Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

La conjetura de Quillen a través del anillo de Burnside

TESIS

que para obtener el grado de

Licenciada en Matemáticas Aplicadas

presenta:

Itzel Rosas Martínez

Directores de tesis:

Dr. Alberto Gerardo Raggi Cárdenas (CCM, UNAM Morelia)
Dr. David Villa Hernández (FCFM, BUAP)

Puebla, Pue. Marzo, 2020

A mi familia
por estar siempre a mi lado.

A los que me permitieron volar
porque hoy vuelo más alto de lo que soñé.

Y a esa pequeña niña que soñaba con comerse al mundo,
pero que era tan insegura que creía que el mundo se la comería.
Aquella niña solitaria que creían rara.
Pero que, al final,
logró su sueño.

Índice general

Agradecimientos

En 2014 empezó una travesía en la vida de una joven yo. El nombre de esa travesía: *universidad*. Para buena o mala fortuna suya, estuvo llena de momentos de calma y de tormentas, algunas tan fuertes que hubo veces en las que creyó no poder seguir con este viaje pero, para su buena suerte, en el camino nunca estuvo sola. En cada miniaventura que emprendió, en cada reto que se le presentó (o que ella misma se puso enfrente), siempre hubo una mano amiga dispuesta a ayudar en lo que pudiera. Y es gracias a esas manos amigas, tanto las que se quedaron como las que fueron pasajeras, que la actual yo puede afirmar que llegó hasta aquí y, sobre todo, que puede escribir, de la manera más informal posible, estas palabras de gratitud que todos ellos merecen.

En estas páginas hago ese intento por agradecer a todas esas personas que me han acompañado a lo largo de esta aventura, pues cada uno ha sido parte importante del camino. Tal vez no lo logre por completo, no por mi notable falla de memoria sino por la complejidad que esto representa, pero este es el mejor intento. Decidí hacerlo en orden cronológico, pues habría tenido muchos conflictos si lo hacía en orden de importancia.

Papá y mamá, Silverio y Estela, gracias por apoyarme en (casi) absolutamente todas mis locuras, mis aventuras, desde la primaria. Cuando decidí estudiar matemáticas. Cuando escogí universidad y me incliné por Guanajuato, incluso cuando decidí dejarlo. Cuando decidí intentar ser ingeniera en biotecnología y cuando les dije que, a pesar de que la carrera me gustaba, las matemáticas me llamaban. Y cuando decidí entrar a la BUAP. Son tantas cosas las que tengo que agradecerles que sé que estas palabras son insuficientes para expresarlo. Este logro también es suyo. ¡Los quiero mucho!

Hermano, Eduardo, has sido mi inspiración desde tiempos inmemoriables. No estás tú para saberlo, ni yo para contarlo, pero los teóricos de los antiguos astronautas dicen que sí. Y sí, sé que con esas palabras me estoy jugando la vida, pero a pesar de muchas cosas, te veo como mi ejemplo a seguir. En cierta forma tú me encaminaste para llegar a donde estoy ahora. Gracias por soportarme, porque sé que tener una hermana como yo no es fácil. Después de mamá y papá, eres la persona de la que más he aprendido en muchísimos aspectos.

Al programa conjunto UG–CIMAT le agradezco la oportunidad de empezar a cumplir este sueño y de conocer a personas valiosas como mis compañeros de clase, compañeros más avanzados y profesores. Gracias por hacer lo más amena posible mi corta estancia de dos

meses. De ahí me llevé una gran lección: las matemáticas son lo mío. Quiero agradecer especialmente al Dr. Elías Rodríguez y a Veva por brindarme tantas oportunidades dentro del DEMAT, tanto para ingresar al programa conjunto como para dejarlo y seguir en el camino de las matemáticas.

Gracias a la oportunidad que me brindó la UPAEP para dejarme probar suerte en la Ingeniería en Biotecnología. En especial, le agradezco a la Mtra. Flora Leticia López por haberme apoyado a perseguir mi sueño, a la Dra. María Cristina Miranda por haber creído en mí como prospecto de ingeniera en biotecnología y a los compañeros Karla y Ulises por dejarme pertenecer a la generación 2014-2.

Gracias a la BUAP, sobre todo a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, que me dio la oportunidad de continuar mi sueño y donde hubo muchas risas, sufrimiento, llanto, diversión y alguno que otro golpe:

Natalia, Cristina, Hazel, Yansi, son los mejores amigos que me pudo dejar la universidad. Gracias por sus consejos, por el apoyo incondicional que me han brindado durante todo este tiempo y por darme el ánimo necesario para decidir volar y hacerlo. He aprendido mucho de cada uno de ustedes pues cada uno a su manera me ha brindado algo distinto y por eso los admiro. En verdad, muchas gracias.

Catalina, Sofi, Lalo, Christian, Óscar, Lety, Gaby y los demás que faltan por mencionar, son los mejores compañeritos de generación que alguien puede tener. No creí que con el paso del tiempo seguiríamos siendo unidos, pero nosotros mismos nos lo demostramos.

Doctores Toño, Nava, Cata, Angel, Alba, Wendy, Uriel, Mireya, Baruch, gracias por tantas risas y por incluirme en el grupito del pilineo. En verdad, me divertí y aprendí mucho de cada uno, tanto académica como personalmente. Que las risas nunca falten.

Fer, Dany, Alfredo y los demás aplicaditos (algunos ya caídos), gracias por dejarse conocer y haberme aceptado como una de ustedes (al menos en una clase). Me dieron una perspectiva diferente de mi carrera. Fue un placer "amadrinarlos" a su llegada.

Aleyda, Adal, Esmeralda, Zaida, Manuel y los demás del grupo de lógica de su generación, conocerlos fue bastante divertido, sobre todo por las condiciones en las que lo hice. Gracias por ser tan bien portados en sus exámenes de grupos y por ayudarme a liberar mi servicio social. Sobre todo, gracias por hacerse amigos míos fuera de su curso de grupos.

Ángel, Paulina, Clara, Luis, Ivonee, Nicole, Vivi, Betza, Armando, Maricruz, Cristhian, Salma y todos ellos cuyos nombres sé que faltan pero que esta cabeza no recuerda, conocerlos a lo largo de la carrera fue muy gratificante. Su ánimo y sus risas ayudaron a que mi estancia en la facultad fuera más amena.

Doctor Carlos Alberto López Andrade, gracias por haberme abierto las puertas al camino del álgebra y por mostrarme que éste es uno de los más bonitos; por reiterarme que el trabajo duro, la disciplina y la perseverancia al final dan sus frutos. Gracias por ese 4CIMA que

me animó a perseguir uno de mis sueños y por abrirme los ojos a dos áreas apasionantes que se intersectan en un punto bastante interesante.

Maestro Ángel Contreras Pérez, gracias por mostrarme, aunque sólo haya sido en un curso, su perspectiva única sobre las matemáticas y, sobre todo, del álgebra.

Profesores Carlos Guillén, Celestino Soriano, Fernando Velasco, Iván Martínez, Edgar Moyotl y Manuel Ibarra, a lo largo de mi transcurso por la facultad los conocí. Tenerlos como profesores fue importante para mostrarme otras perspectivas de las diversas áreas a las cuales respeto bastante.

Las personas que he mencionado hasta ahora han sido importantes. Sin embargo, hay personas que, a pesar de que conocí en otros lados, también han influido de manera considerable:

Joaquín, Juanita, Esteban, Amadeo, Noé, Miguel, Karley, Dr. Ricardo Sáenz, Dr. Horacio Tapia y todas aquellas personas que conocí en escuelas de verano, congresos, coloquios y demás eventos locos a los que he asistido, gracias por abrir aún más mi panorama de lo que son las matemáticas y cómo trabajar en ellas.

Andrea, en muy poco tiempo te volviste una de mis mejores amigas (a distancia), gracias por todo tu apoyo. Como ya te lo he dicho en varias ocasiones, nunca había encontrado a alguien tan parecido a mí. Tú me devolviste la fe en los desconocidos. Sabes que en mí tienes una amiga en la cual siempre puedes confiar, no importa qué pase. Sé que, al igual que tu corazón y tu talento, serás una muy grande matemática.

Dejé a las siguientes personas a lo último, no porque sean menos importantes. Al contrario, porque han sido cruciales, incluso para la realización de esta tesis.

En primer lugar, agradezco a mi asesor externo, el Dr. Alberto Gerardo Raggi Cárdenas, por haber confiado en mí desde que le propuse que trabajáramos en algo a distancia y haber aceptado, sin saber a ciencia cierta cómo trabajo. Por su gran paciencia, su preocupación por que entendiera las cosas, por el conocimiento que en este corto tiempo me ha heredado, por permitirme aprender con y de usted durante mis visitas a Morelia, en los congresos de Villahermosa y Monterrey y a lo largo de la elaboración de esta tesis. Gracias por ponerme este gran reto llamado tesis y, sobre todo, por enseñarme que este camino que al principio parecía muy oscuro, está lleno de luz.

A mi asesor interno, el Dr. David Villa Hernández, por haberme ayudado a ver que iba por el camino adecuado y por mostrarme que el camino al álgebra abstracta no es tan tortuoso como llegaron a decirme; es más, es gratificante. Gracias por esa confianza que me brindó desde el inicio, por su buen humor, por su optimismo, por su ánimo y sobre todo por su peculiar amistad. Gracias por lo que he aprendido de usted tanto dentro como fuera del salón y del cubículo. Gracias por abrirme las puertas a su mundo al dejarme estar de oyente en su curso de Intro. Gracias por haberme brindado la oportunidad de asistir

a esa escuela de verano en Morelia que me permitió conocer al Dr. Gerardo. Gracias por haberme aconsejado en algunos momentos oscuros, por permitirme trabajar con usted en varias ocasiones, por haberme ayudado con mis prácticas profesionales (y despedirme 2 veces) y, sobre todo, por haber aceptado ser mi asesor interno y haber salvado este trabajo en muchas ocasiones. Gracias por esta travesía.

A mis sinodales, Dr. César Cejudo Castilla, Dra. Nadia Romero Romero y Dr. Juan Manuel Ramírez Contreras, por permitirme conocerlos en circunstancias diferentes, por lo vivido con cada uno de ustedes, por sus aportes, cada uno a su estilo, tanto para mi vida académica como para mejorar esta tesis, por su paciencia, su comprensión y por haber aceptado ser sinodales.

El camino no ha sido fácil. Han pasado muchas cosas, desde mis primeros parciales reprobados, pasando por algunos grandes fracasos, pequeños éxitos, bromas, pizzas, tacos, hasta un esguince. Cumpleaños, juegos de UNO que casi rompen amistades, viajecillos improvisados, escuelas de verano, congresos. Pero a pesar de todo, no sólo yo, sino todos salimos adelante.

Sólo me queda decirles ¡muchas gracias a todos!

Introducción

A finales del siglo XIX, William Burnside sentó las bases de lo que actualmente se conoce como anillo de Burnside. Fue hasta 1967 cuando Louis Solomon, en *The Burnside algebra of a finite group*, [Sol67], le dio estructura de anillo.

El anillo de Burnside $B(G)$ para un grupo finito G es uno de los anillos de representación fundamentales de G. Es, en muchos sentidos, el objeto universal a considerar cuando se estudia la categoría de G–conjuntos finitos y puede verse como el análogo del anillo de los enteros $\mathbb{Z}$ para esta categoría.

El anillo de Burnside, además, es el objeto fundamental para estudiar los invariantes asociados a G–conjuntos con estructura, tales como los G–copos o, más generalmente, los G–conjuntos simpliciales. Estos invariantes son generalizaciones de nociones clásicas para la categoría de los G–conjuntos, tales como la función de Möbius para un copo. Tiene propiedades de proyectividad, lo que lleva a congruencias en los valores de la característica de Euler–Poincaré de algunos conjuntos de subgrupos de G.

Por otra parte, alrededor de 1978, Daniel G. Quillen en su artículo *Homotopy properties of the poset of nontrivial p-subgroups of a group*, [Qui78], conjeturó que si $S_p(G)$ denota al copo de p-subgrupos no triviales de un grupo finito G y $|S_p(G)|$ a su realización geométrica asociada, entonces existe un p-subgrupo de G normal no trivial si y sólo si $|S_p(G)|$ es contraíble topológicamente.

Es fácil ver ([Ben91], p. 225) que la existencia de un p-subgrupo de G normal no trivial implica que $|S_p(G)|$ es contraíble. El recíproco es una conjetura. En esta tesis, con ayuda de la teoría de los anillos de Burnside, demostraremos que existe un p-subgrupo de G normal no trivial si y sólo si $S_p(G)$ es G-contraíble, una afirmación completamente algebraica y más débil que la conjetura de Quillen.

El trabajo está basado en la sección 4 del capítulo *Burnside Rings*, [Bou00], de Serge Bouc, publicado en 2000. Es importante señalar que, además de cumplir con el objetivo antes mencionado, se aprovecha la oportunidad para desarrollar teoría sobre los anillos de Burnside a lo largo del capítulo 2.

Esta tesis se divide en cuatro capítulos. A lo largo del primer capítulo se desarrollan las herramientas necesarias para el resto del trabajo: se estudian los G–conjuntos y sus propiedades, algunas especialmente para el caso finito; posteriormente se dan aspectos generales sobre R–módulos izquierdos y algunos resultados importantes sobre R–módulos libres y grupos abelianos finitamente generados; de igual forma se definen conceptos esenciales para el trabajo, como lo son los conceptos de copo y G–copo.

En el segundo capítulo se da una construcción del anillo de Burnside $B(G)$, la cual coincide con el anillo de Grothendieck de la categoría de G–conjuntos finitos; además, se presentan algunas de sus propiedades más importantes. De igual manera se define el concepto de marca y se enuncian y demuestran las propiedades principales de este morfismo.

El tercer capítulo trata sobre copos finitos. Se usan conceptos obtenidos de la teoría de números, tales como la característica de Euler–Poincaré y la función de Möbius, en esta ocasión definidos para copos. Estos conceptos nos ayudarán para dar una caracterización de los idempotentes del anillo de Burnside $B_{\mathbb{Q}}(G)$ mediante la fórmula que dio D. Gluck en [Glu81] y a la cual T. Yoshida llegó de manera independiente en [Yos83]. Igualmente se desarrolla teoría sobre la homología de copos finitos, como los conceptos de complejo de cadena, morfismos y copos homotópicos y se estudian algunas consecuencias de todos estos conceptos con el objetivo de explicar la contractibilidad de un copo.

Finalmente, en el cuarto capítulo se estudian los G–copos finitos. Se define el invariante de Lefschetz de un G–copo, el cual se ve como un elemento especial del anillo de Burnside de G y se estudian algunas de sus propiedades básicas. Se hace uso de los conceptos desarrollados en la segunda parte del capítulo 3 para dar otra caracterización de la característica de Euler–Poincaré que nos ayudará a decir cuándo los invariantes de Lefschetz de dos G–copos relacionados de cierta forma son iguales. Por último, se estudia el G–copo de los p-subgrupos de G con lo que, finalmente, se enuncia y demuestra el resultado principal de esta tesis.

Cabe mencionar que para una mayor comprensión de este trabajo de tesis, se le recomienda al lector tener conocimientos básicos de la teoría de grupos.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. G-conjuntos

Para más detalles sobre G-conjuntos se sugiere revisar el capítulo 3 de [Rot99] y la sección 1 de [CRV16].

Definición 1.1.1 (G-conjunto)**.** Sean X un conjunto y G un grupo. A X lo llamaremos *G-conjunto* si existe una función

$$* : G \times X \longrightarrow X$$

tal que $(g, x) \longmapsto g * x$, llamada *acción*, que cumple las siguientes propiedades:

1. $e * x = x$ para todo $x \in X$, donde e es la identidad en G,

2. $(gh) * x = g * (h * x)$ para todo $g, h \in G$ y $x \in X$.

Ejemplo 1.1.1.

1. Sea G un grupo y X un conjunto. X es un G-conjunto bajo la acción $* : G \times X \longrightarrow X$ tal que $(g, x) \longmapsto g * x = x$. A esta acción se le conoce como *acción trivial*.

2. Sea $(G, \cdot)$ un grupo. G actúa sobre sí mismo mediante $* = \cdot$, es decir, $* : G \times G \longrightarrow G$ definida como $g * x = g \cdot x$. En otras palabras, G actúa en sí mismo mediante su operación binaria.

3. Sea G un grupo y $H \leq G$. Entonces G/H (el conjunto de clases laterales izquierdas) es un G-conjunto bajo la acción $* : G \times G/H \longrightarrow G/H$ tal que $(g_1, g_2H) \longmapsto g_1 * g_2H = (g_1g_2)H$.

4. Sea G un grupo. G actúa sobre sí mismo mediante conjugación, es decir, $* : G \times G \longrightarrow G$ tal que $(g, h) \longmapsto g * h = ghg^{-1}$.

Definición 1.1.2. Sean X, Y conjuntos. Sean $X' = X \times \{1\}$ y $Y' = Y \times \{2\}$. Definimos la *unión ajena* de X y Y como $X \sqcup Y := X' \cup Y'$.

Notemos que $X' \cap Y' = \emptyset$.

De manera más general, dada $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos, la unión ajena de dicha familia es $\displaystyle\bigsqcup_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I} X_i'$, con $X_i' = X_i \times \{i\}$.

Ejemplo 1.1.2.

1. Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de G-conjuntos. Entonces $\displaystyle\bigsqcup_{i\in I} X_i$ es un G-conjunto mediante la acción $\displaystyle * : G \times \bigsqcup_{i\in I} X_i \longrightarrow \bigsqcup_{i\in I} X_i$ definida como $g * (x, i) = (g *_i x, i)$, donde $*_i$ es la acción del G-conjunto X_i, $x \in X_i$, $i \in I$.
2. Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de G-conjuntos. Entonces $\displaystyle\prod_{i\in I} X_i$ es un G-conjunto mediante $\displaystyle * : G \times \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i$ definida por $g * (x_i)_{i\in I} = (g *_i x_i)_{i\in I}$, donde $*_i$ es la acción del G-conjunto X_i, $i \in I$.

Observación 1.1.1. *Sea X un G-conjunto. Entonces la siguiente es una relación de equivalencia en X:*

$$x \sim y \text{ si y sólo si existe } g \in G \text{ tal que } y = g * x,$$

con $x, y \in X$.

Demostración.

- (Reflexividad) $x \sim x$ pues para $e \in G$, se tiene que $x = e * x$.
- (Simetría) Supongamos que $x \sim y$. Entonces existe $g \in G$ tal que $y = g * x$. Luego, $g^{-1} * y = g^{-1} * (g * x) = (g^{-1}g) * x = e * x = x$, es decir, $g^{-1} * y = x$. Por lo tanto, $y \sim x$.
- (Transitividad) Supongamos que $x \sim y$ y $y \sim z$. Entonces existen $g, h \in G$ tales que $y = g * x$ y $z = h * y$. Luego, $z = h * y = h * (g * x) = (hg) * x$. Por lo tanto, $x \sim z$.

□

Definición 1.1.3. De acuerdo a la relación $\sim$ de la Observación 1.1.1, denotaremos a la clase de equivalencia de $x \in X$ por $\mathcal{O}_G(x)$ y la llamaremos *órbita* de x en G.

Observemos que $\mathcal{O}_G(x) = \{y \in X \mid y = g * x \text{ para algún } g \in G\} \subseteq X$.

Observación 1.1.2. *Las órbitas son ajenas y $\displaystyle X = \bigcup_{x\in X} \mathcal{O}_G(x)$.*

Definición 1.1.4. Sean $(X, *_X), (Y, *_Y)$ dos G-conjuntos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Diremos que f es un *morfismo de G-conjuntos* si para todo $g \in G$ y para todo $x \in X$ se cumple que

$$f(g *_X x) = g *_Y f(x)$$

Denotaremos al conjunto de morfismos de G-conjuntos de X a Y como $Hom_G(X, Y)$.

Además, diremos que X y Y son *isomorfos* como G-conjuntos, lo cual denotaremos como $X \cong_G Y$, si existe f morfismo biyectivo de G-conjuntos. De esta manera, si f es un morfismo biyectivo de G-conjuntos, entonces diremos que f es un *isomorfismo de G-conjuntos*.

Ejemplo 1.1.3.
1. Sean $H \leq K \leq G$, con G un grupo. Entonces $\pi : G/H \longrightarrow G/K$ definida por $\pi(aH) = aK$ es un morfismo suprayectivo de G-conjuntos.
2. Sea X un G-conjunto. Entonces $Id_X : X \longrightarrow X$ es un morfismo de G-conjuntos.

Proposición 1.1.3.
1. *La composición de morfismos de G-conjuntos es un morfismo de G-conjuntos.*
2. *El inverso de un isomorfismo de G-conjuntos es un isomorfismo de G-conjuntos.*
3. *Un morfismo de G-conjuntos manda órbitas en órbitas.*

Demostración.
1. Sean X, Y, Z G-conjuntos con sus correspondientes acciones $*_X, *_Y, *_Z$; $f : X \longrightarrow Y$ y $h : Y \longrightarrow Z$ morfismos de G-conjuntos. Sean $g \in G$ y $x \in X$.

   Entonces $(h \circ f)(g *_X x) = h(f(g *_X x)) = h(g *_Y f(x)) = g *_Z h(f(x)) = g *_Z (h \circ f)(x)$.

   Por lo tanto, $h \circ f$ es morfismo de G-conjuntos.

2. Sea $f : (X, *_X) \longrightarrow (Y, *_Y)$ un morfismo biyectivo de G-conjuntos.

   Como f es biyectivo, entonces existe $f^{-1} : Y \longrightarrow X$. Notemos que f^{-1} está bien definido y es biyectivo. Veamos que es morfismo de G-conjuntos.

   Sean $y \in Y, g \in G$. Como f es suprayectivo, entonces existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$, por lo que $f^{-1}(g *_Y y) = f^{-1}(g *_Y f(x)) = f^{-1}(f(g *_X x)) = (f^{-1} \circ f)(g *_X x) = Id_X(g *_X x) = g *_X Id_X(x) = g *_X f^{-1}(f(x)) = g *_X f^{-1}(y)$.

   Por lo tanto, f^{-1} es isomorfismo de G-conjuntos.

3. Sean $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo de G-conjuntos, $x \in X$ y $\mathcal{O}_G(x)$ la órbita de x en G.

   P. D. $f(\mathcal{O}_G(x)) = \mathcal{O}_G(f(x))$.

   $\subseteq$) Sea $z \in \mathcal{O}_G(x)$. Entonces $z = g *_X x$, con $*_X$ la acción de G sobre X.

   Luego, $f(z) = f(g *_X x) = g *_Y f(x) \in \mathcal{O}_G(f(x))$. Así, $f(\mathcal{O}_G(x)) \subseteq \mathcal{O}_G(f(x))$.

$\supseteq$) Por otro lado, si $y \in \mathcal{O}_G(f(x))$, entonces $y = g *_Y f(x) = f(g *_X x) \in f(\mathcal{O}_G(x))$.
De ahí que $\mathcal{O}_G(f(x)) \subseteq f(\mathcal{O}_G(x))$.

Por lo tanto, $f(\mathcal{O}_G(x)) = \mathcal{O}_G(f(x))$.

$\square$

Definición 1.1.5. Un G-conjunto es llamado *transitivo* si tiene una única órbita, es decir, para cada $x, y \in X$ existe $g \in G$ tal que $y = g * x$.

Definición 1.1.6. Sea G un grupo y $H \leq G$. Definimos el *normalizador de H en G* como

$$N_G(H) = \left\{ g \in G \mid gHg^{-1} = H \right\}$$

$N_G(H)$ es el mayor subgrupo de G en el cual H es normal.

Definición 1.1.7. Sea G un grupo, X un G-conjunto y $x \in X$. Definimos el *estabilizador* de x en G como

$$stab_G(x) = \{g \in G \mid g * x = x\}$$

con $*$ la acción de G sobre X.

Proposición 1.1.4. *$stab_G(x)$ es un subgrupo de G.*

Demostración.

1. Sea $e \in G$. Entonces para todo $x \in X$ se cumple que $e * x = x$. De ahí que $e \in stab_G(x)$.
2. Sean $g_1, g_2 \in stab_G(x)$. Entonces $(g_1g_2) * x = g_1 * (g_2 * x) = g_1 * x = x$. De ahí que $g_1g_2 \in stab_G(x)$.
3. Sea $g \in stab_G(x)$. Entonces $x = e * x = (g^{-1}g) * x = g^{-1} * (g * x) = g^{-1} * x$, es decir, $g^{-1} * x = x$. Por lo tanto, $g^{-1} \in stab_G(x)$.

Así, $stab_G(x) \leq G$. $\square$

Nota. De aquí en adelante denotaremos como $gx := g * x$ para todo $x \in X$, $g \in G$ y X un G-conjunto.

Teorema 1.1.5 (cf. [CRV16], Teorema 1.19)**.** *Sean G un grupo, X un G-conjunto y $x_0 \in X$. Entonces se cumplen:*

1. *Si $g \in G$, entonces $stab_G(gx_0) = g\,(stab_G(x_0))\,g^{-1}$.*
2. *$\mathcal{O}_G(x_0) \cong_G G/stab_G(x_0)$.*
3. *Si $H \leq G$, entonces G/H es transitivo.*
4. *Si X es transitivo, entonces $X \cong_G G/H$ para algún $H \leq G$.*

Demostración.

1. Sea $a \in stab_G(gx_0)$. Entonces se cumple que $a(gx_0) = (ag)x_0 = gx_0$. Luego, $g^{-1}agx_0 = x_0$, es decir, $g^{-1}ag \in stab_G(x_0)$. De ahí que $a \in g\,(stab_G(x_0))\,g^{-1}$.

   Ahora, sea $b \in g\,(stab_G(x_0))\,g^{-1}$. Entonces $g^{-1}bg \in stab_G(x_0)$, es decir, $(g^{-1}bg)x_0 = x_0$. Luego, $b(gx_0) = gx_0$, es decir, $b \in stab_G(gx_0)$.

   Por lo tanto, $stab_G(gx_0) = g\,(stab_G(x_0))\,g^{-1}$.

2. Denotemos como $H = stab_G(x_0)$ y definamos $\varphi : \mathcal{O}_G(x_0) \longrightarrow G/H$ tal que $gx_0 \longmapsto gH$.

   Veamos que φ está bien definida.

   Sean $g_1x_0, g_2x_0 \in \mathcal{O}_G(x_0)$ tales que $g_1x_0 = g_2x_0$. Entonces $g_2^{-1}g_1x_0 = x_0$, es decir, $g_2^{-1}g_1 \in H$, por lo que $g_1H = g_2H$. Por lo tanto, φ está bien definida.

   Ahora, si $g_1H, g_2H \in G/H$ son tales que $g_1H = g_2H$, entonces $g_2^{-1}g_1 \in H$, es decir, $\left(g_2^{-1}g_1\right)x_0 = x_0$. De ahí que $g_1x_0 = g_2x_0$. Por lo tanto, φ es inyectiva.

   Veamos que φ es un morfismo de G-conjuntos.

   Sean $g_1, g_2 \in G$. Entonces $\varphi(g_1(g_2x_0)) = \varphi((g_1g_2)x_0) = (g_1g_2)H = g_1(g_2H) = g_1\varphi(g_2x_0)$.

   Por lo tanto, φ es morfismo de G-conjuntos.

   Por último, sea $gH \in G/H$. Notemos que $gx_0 \in \mathcal{O}_G(x_0)$ implica que $\varphi(gx_0) = gH$. Por lo tanto, φ es suprayectiva.

   Así, φ es morfismo biyectivo de G-conjuntos, i.e., φ es isomorfismo de G-conjuntos.

   Por lo tanto, $\mathcal{O}_G(x_0) \cong_G G/stab_G(x_0)$.

3. Sea $H \leq G$ un subgrupo. Sabemos que $H = eH \in G/H$.

   Si $gH \in G/H$, entonces $gH = (ge)H = g(eH) \in \mathcal{O}_G(eH) = \mathcal{O}_G(H)$, es decir, $G/H \subseteq \mathcal{O}_G(H)$. Pero también sabemos que $\mathcal{O}_G(H) \subseteq G/H$.

   Por lo tanto, $G/H = \mathcal{O}_G(H)$. Así, G/H es transitivo.

4. Como X es transitivo, entonces $X = \mathcal{O}_G(x)$ para algún $x \in X$. Por 2. de este Teorema, $\mathcal{O}_G(x) \cong_G G/H$, con $H = stab_G(x)$.

   Así, $X \cong_G G/H$.

$\square$

Teorema 1.1.6 (cf. [Bou00], Lema 2.3.1). *Si X es un G-conjunto finito, entonces*

$$X \cong_G \bigsqcup_{i\in I} G/stab_G(x_i)$$

donde I es un conjunto de índices.

Demostración. Sean X un G-conjunto finito e I un conjunto de índices.

Por la Observación 1.1.2, se tiene que $X = \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_G(x_i)$.

Luego, por 2. del Teorema 1.1.5, sabemos que $\mathcal{O}_G(x_i) \cong_G G/stab_G(x_i)$ para cada $i \in I$, es decir, existen morfismos biyectivos de G-conjuntos $\varphi_i : \mathcal{O}_G(x_i) \longrightarrow G/stab_G(x_i)$ para cada $i \in I$.

Así, establecemos el siguiente morfismo de G-conjuntos:

$$\varphi : \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_G(x_i) \longrightarrow \bigsqcup_{i\in I} G/stab_G(x_i) \text{ tal que } y \longmapsto (\varphi_i(y), i)$$

con $y \in \mathcal{O}_G(x_i)$.

Puesto que φ_i es morfismo biyectivo de G-conjuntos para cada $i \in I$, se tiene que φ es morfismo biyectivo de G-conjuntos.

Por lo tanto,

$$X \cong_G \bigsqcup_{i\in I} G/stab_G(x_i)$$

□

Definición 1.1.8. Sea $H \leq G$. Definimos al *conjugado* de H por $g \in G$ como el siguiente subgrupo:

$$gHg^{-1} = \left\{ghg^{-1} : h \in H\right\}$$

Observación 1.1.7. *Sea $X = \{H \subseteq G \,|\, H$ es subgrupo de $G\}$. Entonces X es un G-conjunto bajo la siguiente acción: $* : G \times X \longrightarrow X$ tal que $(g, H) \longmapsto gHg^{-1}$.*

Demostración. Veamos que $*$ está bien definida.

Sean $(g_1, H_1), (g_2, H_2) \in G \times X$ tales que $(g_1, H_1) = (g_2, H_2)$. Entonces $g_1 = g_2$ y $H_1 = H_2$. De ahí que $g_1^{-1} = g_2^{-1}$.

Luego, $g_1 * H_1 = g_1 H_1 g_1^{-1} = g_1 H_2 g_1^{-1} = g_2 H_2 g_2^{-1} = g_2 * H_2$.

Así, $*$ está bien definida.

Ahora veamos que es acción.

- Para $e \in G$, tenemos que $e * H = eHe^{-1} = H$.
- Sean $g_1, g_2 \in G$. Entonces $(g_1g_2) * H = (g_1g_2)H(g_1g_2)^{-1} = g_1\left(g_2Hg_2^{-1}\right)g_1^{-1} = g_1 * (g_2 * H)$.

Por lo tanto, $*$ es acción. $\square$

Observación 1.1.8. *Por la Observación 1.1.1, tenemos que la acción anterior define una relación de equivalencia, a saber, dados $H, K \in X$ se tiene que $H \sim K$ si y sólo si existe $g \in G$ tal que $gHg^{-1} = K$.*

Notación 1.1.1. Denotaremos por $[S_G]$ a un conjunto de representantes de las clases de conjugación de subgrupos de G, es decir, a un conjunto de representantes de las órbitas bajo la acción definida en la Observación 1.1.7.

Lema 1.1.9 (cf. [Bou00], Lema 2.3.1)**.** *Sean $H, K \leq G$. Entonces $G/H \cong_G G/K$ si y sólo si H y K son conjugados.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos que $G/H \cong_G G/K$, es decir, existe $\varphi : G/H \longrightarrow G/K$ isomorfismo de G-conjuntos tal que $eH \longmapsto g_0K$, con $g_0 \in G$.

Como φ es de G-conjuntos, se cumple que $\varphi(aH) = \varphi(aeH) = a\varphi(eH) = ag_0K$. Entonces para cada $h \in H$ tenemos que $g_0K = \varphi(eH) = \varphi(hH) = h\varphi(eH) = hg_0K$, es decir, $g_0K = hg_0K$. Esto ocurre si y sólo si $g_0^{-1}hg_0 \in K$ para cada $h \in H$.

De ahí que $g_0^{-1}Hg_0 \subseteq K$.

Ahora, tomemos $\varphi^{-1} : G/K \longrightarrow G/H$ dada por $\varphi^{-1}(g_0K) = eH = H$, el cual también es morfismo de G-conjuntos. Entonces $H = \varphi^{-1}(g_0K) = \varphi^{-1}(g_0eK) = g_0\varphi^{-1}(eK)$, i.e., $\varphi^{-1}(eK) = g_0^{-1}H$.

Luego, para cada $k \in K$ se tiene que $g_0^{-1}H = \varphi^{-1}(eK) = \varphi^{-1}(kK) = k\varphi^{-1}(eK) = kg_0^{-1}H$, es decir, $g_0^{-1}H = kg_0^{-1}H$. Esto pasa si y sólo si $g_0kg_0^{-1} \in H$.

De ahí que $g_0Kg_0^{-1} \subseteq H$. Luego, $K \subseteq g_0^{-1}Hg_0$.

Por lo tanto, H y K son conjugados.

$\Longleftarrow$) Supongamos que H y K son conjugados. Entonces existe $g \in G$ tal que $gHg^{-1} = K$.

Proponemos $\varphi : G/H \longrightarrow G/K$ tal que $aH \longmapsto a(g^{-1}K)$.

Veamos que φ está bien definida.

Sean $a_1H, a_2H \in G/H$ tales que $a_1H = a_2H$. Entonces $a_1Hg^{-1} = a_2Hg^{-1}$.

Como $gHg^{-1} = K$, entonces $Hg^{-1} = g^{-1}K$. De ahí que $a_1g^{-1}K = a_2g^{-1}K$, es decir, $\varphi(a_1H) = \varphi(a_2H)$.

Veamos que φ es biyectiva.

- (Inyectividad) Sean $a_1H, a_2H \in G/H$ tales que $\varphi(a_1H) = \varphi(a_2H)$. Entonces $a_1g^{-1}K = a_2g^{-1}K$. Como $K = gHg^{-1}$, entonces $g^{-1}K = Hg^{-1}$. De ahí que $a_1Hg^{-1} = a_2Hg^{-1}$. Así, $a_1H = a_2H$.

- (Suprayectividad) Sea $aK \in G/K$. Notemos que, si tomamos $agH \in G/H$, se sigue que $\varphi(agH) = (ag)(g^{-1}K) = a(gg^{-1})K = aK$.

Por último, veamos que φ es morfismo de G-conjuntos. Sean $x \in G$ y $a_1H \in G/H$.

Entonces $\varphi(x(aH)) = \varphi((xa)H) = xag^{-1}K = x(ag^{-1}K) = x\varphi(aH)$.

Por lo tanto, φ es morfismo biyectivo de G-conjuntos. Así, $G/H \cong_G G/K$.

□

Definición 1.1.9. Sean H y K subgrupos de G. Si existe $g \in G$ tal que $gHg^{-1} \subseteq K$ diremos que H es *subconjugado* de K.

Teorema 1.1.10 (cf. [CRV16], Teorema 1.26). *Si H y K son subgrupos de G, entonces $Hom_G(G/H, G/K) \neq \emptyset$ si y sólo si H es subconjugado de K.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Sea $f \in Hom_G(G/H, G/K)$. Entonces $f(eH) = aK$ para algún $a \in G$.

Para cada $h \in H$ se tiene que $hH = H = eH$, de ahí que $f(hH) = f(eH) = aK$. Lo anterior implica que $aK = f(hH) = hf(eH) = haK$. Entonces $a^{-1}ha \in K$, es decir, $a^{-1}Ha \subseteq K$.

$\Longleftarrow$) Como H es subconjugado de K, entonces existe $g \in G$ tal que $gHg^{-1} \subseteq K$. Así, por el Ejemplo 1.1.3, podemos definir el morfismo suprayectivo $\pi : G/gHg^{-1} \longrightarrow G/K$ tal que $\pi\left(a(gHg^{-1})\right) = aK$.

Por el Lema 1.1.9, sabemos que $G/H \cong_G G/gHg^{-1}$, entonces existe $\alpha : G/H \longrightarrow G/gHg^{-1}$ isomorfismo de G-conjuntos.

Por lo tanto, $\pi \circ \alpha : G/H \longrightarrow G/K \in Hom_G(G/H, G/K)$.

□

Observación 1.1.11. *1. Si H es subconjugado de K, entonces todo conjugado de H es subconjugado de cualquier conjugado de K.*

2. En $[S_G]$ hay una relación de orden parcial. Dados $H, K \in [S_G]$, tenemos que $H \preceq K$ si y sólo si H es subconjugado de K.

1.2. R-módulos

En lo sucesivo, R denotará un anillo asociativo con 1. Para más detalles sobre R-módulos se sugiere revisar los capítulos 2, 3 y 4 de [Kas82] y el capítulo 9 de [Rot02].

Definición 1.2.1 (R-módulo, cf. [Kas82], 2.1.1)**.** Sea R un anillo. Decimos que M es un *R-módulo izquierdo* si y sólo si se cumple lo siguiente:

1. $(M, +, 0)$ es un grupo abeliano;
2. (Ley de composición externa) Se define una función $\cdot : R \times M \longrightarrow M$ tal que $(r, m) \longmapsto r \cdot m$, llamada *multiplicación*, que cumple:
   a) (Ley asociativa) $\forall r_1, r_2 \in R$, $\forall m \in M$ se cumple que $(r_1r_2)m = r_1(r_2m)$;
   b) (Leyes distributivas) $\forall r \in R$, $\forall m_1, m_2 \in M$ se cumple que $r(m_1+m_2) = rm_1+rm_2$ y $\forall r_1, r_2 \in R$, $\forall m \in M$ se cumple que $(r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m$;
   c) $\forall m \in M$ se cumple que $1 \cdot m = m$.

Ejemplo 1.2.1.
1. Si R es un campo o semicampo, entonces un R-módulo es llamado R-espacio vectorial.
2. Los módulos sobre $\mathbb{Z}$ son los grupos abelianos.

   Sea M un $\mathbb{Z}$-módulo. Ya tenemos que $(M, +)$ es un grupo abeliano. Ahora, sean $z \in \mathbb{Z}$ y $m \in M$. Entonces definimos $z \cdot m$ de la siguiente forma: si $z \in \mathbb{Z}^+$, entonces $z \cdot m = \underbrace{m + \cdots + m}_{z \text{ veces}}$; si $z \in \mathbb{Z}^-$, entonces $z \cdot m = \underbrace{(-m) + \cdots + (-m)}_{z \text{ veces}}$; si $z = 0$, $z \cdot m = 0$.

Observación 1.2.1.
1. *Cuando M es un R-módulo izquierdo, escribimos ${}_RM$;*
2. *Si ${}_M0 \in M$ y ${}_R0 \in R$, entonces $r \cdot {}_M0 = {}_M0$ y ${}_R0 \cdot m = {}_M0$, para todo $r \in R$ y $m \in M$. Usualmente se escribe 0 para ${}_M0$ y ${}_R0$;*
3. *Para todo $m \in M$ y toda $r \in R$ se cumple que $-(rm) = (-r)m = r(-m)$.*

Definición 1.2.2. Sea M un R-módulo izquierdo. Un subconjunto A de M es llamado *submódulo* de M, lo que se denota por $A \leq M$, si A es un R-módulo izquierdo con respecto a las operaciones suma y producto de M en A.

Cuando $A \subseteq M$ es un submódulo propio, lo denotamos por $A < M$ o $A \lneq M$. Si A no es submódulo de M, lo denotamos por $A \nleq M$.

Lema 1.2.2 (cf. [Kas82], 2.2.2)**.** *Sea M un R-módulo izquierdo. Si $A \subseteq M$ y $A \neq \emptyset$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$A \leq M$;*

2. *Para toda $a_1, a_2 \in A$, $a_1 + a_2 \in A$ y para toda $r \in R$ y toda $a \in A$, $ra \in A$.*

Definición 1.2.3. 1. Sea $m_0 \in M$. Denotamos por $Rm_0 = \{rm_0 \mid r \in R\}$ al *submódulo cíclico generado por m_0* .

2. Un R-módulo izquierdo M es llamado *cíclico* si existe $m_0 \in M$ tal que $Rm_0 = M$.

3. Un R-módulo izquierdo M es llamado *simple* si $M \neq 0$ y sus únicos submódulos son M y 0.

4. Un submódulo $N \leq M$ es llamado *mínimo* si $0 \lneqq N$ y para todo $B \leq M$ tal que $B \lneqq N$, entonces $B = 0$.

5. Un submódulo $N \leq M$ es llamado *máximo* si $N \lneqq M$ y para todo $B \leq M$ tal que $N \lneqq B$, entonces $B = M$.

Lema 1.2.3 (cf. [Kas82], 2.3.2)**.** *Sean M un R-módulo izquierdo y $X \subseteq M$. Consideremos*

$$A = \begin{cases} \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \,\middle|\, r_i \in R, x_i \in X, n \in \mathbb{N} \right\} & si\ X \neq \emptyset \\ 0 & si\ X = \emptyset \end{cases}$$

Entonces $A \leq M$.

Definición 1.2.4. El módulo izquierdo definido en el Lema 1.2.3 es llamado el *submódulo de M generado por X* y se denota por $(X]$.

Definición 1.2.5. Sea M un R-módulo izquierdo.

1. $X \subseteq M$ es llamado *conjunto generador* de M si $(X] = M$.

2. M es llamado *finitamente generado* si existe $X \subseteq M$ subconjunto finito que genera a M.

3. Sea $X \subseteq M$. Se dice que X es *libre* si para todo subconjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$, con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, se cumple que si $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i = 0$ con $r_i \in R$ $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $r_i = 0$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$.

4. Un subconjunto X de M es llamado *base* de M si X genera a M y es libre.

Observación 1.2.4. *1. Si R es un anillo, entonces ${}_RR$ tiene al conjunto $\{1\}$ como base.*

2. Si $m \in (X] = M$, entonces existen $r_1, \ldots, r_n \in R$ y $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $m = r_1x_1 + \cdots + r_nx_n$, pero los r_i no son necesariamente únicos y n no está fijo.

Teorema 1.2.5 (cf. [Kas82], 2.3.6)**.** *Sean M un R-módulo izquierdo y $\emptyset \neq X \subseteq M$ tal que genera a M. Entonces X es base de M si y sólo si para todo $m \in M$, la representación $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i$ es única en el siguiente sentido: si $m = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i = \sum_{i=1}^{n} r'_i x_i$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, entonces $r_i = r'_i$.*

Definición 1.2.6. Sean M, M' R-módulos izquierdos y $\alpha : M \longrightarrow M'$ una función. Diremos que α es un *morfismo de R-módulos izquierdos* si:

1. Para cualesquiera $m_1, m_2 \in M$ se tiene que $\alpha(m_1 + m_2) = \alpha(m_1) + \alpha(m_2)$;
2. $\forall\, m \in M, \forall\, r \in R : \alpha(rm) = r\alpha(m)$.

Ejemplo 1.2.2.
1. $0 : M \longrightarrow M'$ tal que $\forall\, m \in M :\ 0(m) = {}_{M'}0$ es llamado el morfismo cero.
2. Si $N \leq M$, entonces la función inclusión $\iota : N \hookrightarrow M$, definida por $\iota(n) = n$ es un morfismo de módulos
3. La función identidad $1_M : M \longrightarrow M$ es un morfismo de módulos.
4. Si $N \leq M$, entonces $\nu : M \longrightarrow M/N$ definido por $\nu(m) = m + N$ es un morfismo de módulos.

Observación 1.2.6.
1. *Si $\alpha : A \longrightarrow B$ y $\beta : B \longrightarrow C$ son morfismos de módulos, entonces $\beta \circ \alpha$ es un morfismo de módulos.*
2. *Si $\alpha : A \longrightarrow B$ es un morfismo de módulos biyectivo, entonces α^{-1} es un morfismo de módulos.*

Definición 1.2.7. Sea $\alpha : A \longrightarrow B$ un morfismo de R-módulos.

1. Diremos que α es un *monomorfismo* si para cualesquiera $\beta_1, \beta_2 : C \longrightarrow A$ morfismos de R-módulos tales que $\alpha \circ \beta_1 = \alpha \circ \beta_2$, implica que $\beta_1 = \beta_2$. Lo denotaremos por $\alpha : A \rightarrowtail B$.
2. Diremos que α es un *epimorfismo* si para cualesquiera $\gamma_1, \gamma_2 : B \longrightarrow C$ morfismos de R-módulos tales que $\gamma_1 \circ \alpha = \gamma_2 \circ \alpha$, implica que $\gamma_1 = \gamma_2$. Lo denotaremos por $\alpha : A \twoheadrightarrow B$.
3. α es llamado *bimorfismo* si y sólo si α es monomorfismo y epimorfismo. Lo denotaremos por $\alpha : A \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow B$.

Teorema 1.2.7 (cf. [Kas82], 3.1.5). *Sea $\alpha : A \longrightarrow B$ un morfismo de R-módulos. Entonces se cumplen las siguientes proposiciones:*

1. *α es inyectivo si y sólo si α es monomorfismo.*
2. *α es suprayectivo si y sólo si α es epimorfismo.*
3. *α es biyectivo si y sólo si α es bimorfismo si y sólo si α es isomorfismo.*

Definición 1.2.8. Sea R un anillo y sea

$$\mathcal{A} = \cdots \xrightarrow{\alpha_{i-2}} A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} \cdots$$

una sucesión de morfismos de R-módulos izquierdos.

1. Una sucesión $\mathcal{A}$ es llamada *exacta* si y sólo si para toda subsucesión

$$A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1}$$

   se cumple que $\operatorname{Im} \alpha_{i-1} = \operatorname{Ker} \alpha_i$.

2. Una sucesión exacta $\mathcal{A}$ *se escinde* si y sólo si para toda subsucesión

$$A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1}$$

   se cumple que $\operatorname{Im} \alpha_{i-1} = \operatorname{Ker} \alpha_i$ es un sumando directo de A_i.

3. Una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

   es llamada *exacta corta*.

Observación 1.2.8. *1. Una sucesión* $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$ *es exacta si y sólo si f es monomorfismo.*

2. Una sucesión $B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ *es exacta si y sólo si g es epimorfismo.*

3. Si $A' \leq A$, entonces $0 \longrightarrow A' \overset{\iota}{\hookrightarrow} A \overset{\nu}{\twoheadrightarrow} A/A' \longrightarrow 0$ *es exacta corta.*

4. Si $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ *es una sucesión exacta corta, entonces* $C \cong \dfrac{B}{\operatorname{Im} f} = \dfrac{B}{\operatorname{Ker} g}$.

Lema 1.2.9 (cf. [Kas82], 4.4.1)**.** *Sea F un R-módulo izquierdo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *F tiene una base;*
2. *$F = \bigoplus_{i \in I} A_i$ y para toda $i \in I$, $A_i \cong R$.*

Definición 1.2.9. Un módulo F que satisface las condiciones del Lema 1.2.9 es llamado *módulo libre*.

Lema 1.2.10 (cf. [Kas82], 4.4.3). *Sea I un conjunto. Entonces $R^{(I)}$ es un R-módulo izquierdo libre con base X tal que $|X| = |I|$.*

Corolario 1.2.11 (cf. [Kas82], 4.4.4). *Todo R-módulo M es cociente de un R-módulo libre F. Si M es finitamente generado, entonces es cociente de un libre con base finita.*

Definición 1.2.10. Si A es un $\mathbb{Z}$-módulo izquierdo, entonces su *parte de torsión* o *submódulo de torsión*, denotado por $t(A)$, se define como

$$t(A) = \{a \in A \,|\, \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } na = 0\}$$

Decimos que A es *libre de torsión* si $t(A) = 0$. Si $t(A) = A$, entonces decimos que A es un *$\mathbb{Z}$-módulo de torsión*.

Observación 1.2.12. *Si A es un $\mathbb{Z}$-módulo izquierdo, entonces $t(A)$ es un submódulo de A.*

Lema 1.2.13 (cf. [Rot02], Proposición 9.2). *Sea A un $\mathbb{Z}$-módulo. Entonces $A/t(A)$ es libre de torsión.*

Demostración. Sea $a + t(A) \in A/t(A)$ tal que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n(a + t(A)) = t(A)$, es decir, $na + t(A) = t(A)$. Esto pasa si y sólo si $na \in t(A)$, por lo que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m(na) = (mn)a = 0$. Luego, $a \in t(A)$, por lo que $a + t(A) = 0 + t(A)$. Así, $A/t(A) = 0$.

Por lo tanto, $A/t(A)$ es libre de torsión. □

Lema 1.2.14 (cf. [Rot02], Teorema 9.3). *Si R es un dominio de ideales principales, entonces todo R-módulo finitamente generado libre de torsión es libre.*

Corolario 1.2.15 (cf. [Rot02], Corolario 9.4). *Todo $\mathbb{Z}$-módulo finitamente generado libre de torsión es libre.*

Teorema 1.2.16 (cf. [Rot02], Corolario 9.5). *Si A es un $\mathbb{Z}$-módulo finitamente generado, entonces $A = t(A) \oplus F$, con $F \cong \mathbb{Z}^n$ (es decir, F es libre).*

Demostración. Sea A un $\mathbb{Z}$-módulo finitamente generado. Entonces $A/t(A)$ es libre de torsión (por el Lema 1.2.13) y finitamente generado (pues está generado por el mismo número de elementos que A).

Entonces $A/t(A) = F \cong \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\overline{a_i}$, con $\mathbb{Z}\overline{a_i} \cong \mathbb{Z}$.

Consideremos la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow t(A) \overset{\iota}{\hookrightarrow} A \overset{\nu}{\twoheadrightarrow} A/t(A) \longrightarrow 0$$

Sea $l : A/t(A) \longrightarrow A$ tal que $l(\overline{a_i}) = a_i$ y es tal que $\nu \circ l = 1_{A/t(A)}$.

Notemos lo siguiente: sea $\overline{a_i} \in \text{Ker } l$. Entonces $l(\overline{a_i}) = 0$, es decir, $a_i = 0$. De ahí que $\overline{a_i} = \bar{0}$, por lo que Ker $l = 0$. Entonces l es inyectivo.

De igual forma, se puede notar que $A/t(A) \cong l(A/t(A))$.

Veamos que $A = t(A) \oplus l(A/t(A))$.

- Sea $a \in A$. Entonces $a = a - l(\nu(a)) + l(\nu(a))$. Observemos que $l(\nu(a)) \in l(A/t(A))$. Veamos que $a - l(\nu(a)) \in t(A)$:

  Notemos que $\nu(a - l(\nu(a))) = \nu(a) - \nu(l(\nu(a))) = \nu(a) - \nu(a) = 0$. Se sigue que $a - l(\nu(a)) \in \text{Ker } \nu = t(A)$.

  Así, $A = t(A) + l(A/t(A))$.

- Sea $x \in t(A) \cap l(A/t(A))$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx = 0$ y $x = l(\bar{a})$, con $\bar{a} \in A/t(A)$.

  Como $x \in t(A) = \text{Ker } \nu$, entonces $\nu(x) = 0$ y $\nu(x) = \nu(l(\bar{a})) = 1_{A/t(A)}(\bar{a}) = \bar{a}$. De ahí que $\bar{a} = \bar{0}$.

  Luego, $x = l(\bar{a}) = l(\bar{0}) = 0$. Por lo tanto, $t(A) \cap l(A/t(A)) = 0$.

Así,

$$A = t(A) \oplus l(A/t(A))$$

□

Definición 1.2.11 (cf. [Rot99], p. 331)**.** El *rango* de un $\mathbb{Z}$-módulo libre de torsión G, denotado por rank(G), es el número de elementos en un subconjunto independiente máximo. De igual forma, definimos el rango rank(G) de un $\mathbb{Z}$-módulo arbitrario G como rank$(G/t(G))$.

Teorema 1.2.17 (cf. [Rot99], p. 335)**.** *Sea* $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta de grupos abelianos. Entonces* rank$(B) = $ rank$(A) + $ rank(C).

1.3. Copos y G-copos

Para más detalles sobre conjuntos parcialmente ordenados se sugiere revisar el capítulo 1 de [Rom08].

Definición 1.3.1. Un *orden parcial* sobre un conjunto no vacío $\mathcal{L}$ es una relación binaria $\leq$ en $\mathcal{L}$ que satisface para toda $a, b, c \in \mathcal{L}$ las siguientes condiciones:

1. (Reflexividad) $a \leq a$,

2. (Antisimetría) Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$,
3. (Transitividad) Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

El par $(\mathcal{L}, \leq)$ es llamado *conjunto parcialmente ordenado* o *copo*.

Si $a \leq b$ o $b \leq a$, entonces a y b son *comparables*. En otro caso, a y b son *incomparables*.

Ejemplo 1.3.1. 1. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de números naturales. Entonces $(\mathbb{N}, \leq)$ es un copo con el orden usual.

2. Si X es un conjunto no vacío, el conjunto potencia $\mathcal{P}(X)$ de X es el conjunto de todos los subconjuntos de X, el cual es un copo con la inclusión.
3. Si G es un grupo finito, el conjunto de los subgrupos de G, denotado por $S(G)$, es un copo con la inclusión, es decir, $(S(G), \subseteq)$ es un copo.

Definición 1.3.2 (cf. [Rom08], pp. 6–7)**.** Sea $(\mathcal{L}, \leq)$ un copo y P un subconjunto de $\mathcal{L}$.

1. Diremos que $x \in \mathcal{L}$ es *cota superior* de P si para todo $y \in P$, $y \leq x$.
2. $x \in \mathcal{L}$ es *cota inferior* de P si para todo $y \in P$, $x \leq y$.
3. Un elemento $y_0 \in P$ es *elemento mayor* de P si $y \leq y_0$ para todo $y \in P$.
4. Diremos que $y_0 \in P$ es *elemento menor* de P si $y_0 \leq y$ para todo $y \in P$.
5. Diremos que $y_1 \in P$ es *elemento máximo* en P si no existe $y \in P$ tal que $y_1 \leq y$ y $y \neq y_1$.
6. Diremos que $y_1 \in P$ es *elemento mínimo* en P si no existe $y \in P$ tal que $y \leq y_1$ y $y \neq y_1$.
7. Diremos que $s \in \mathcal{L}$ es el *supremo* de P si s es el elemento menor del conjunto de las cotas superiores de P.
8. Diremos que $i \in \mathcal{L}$ es el *ínfimo* de P si i es el elemento mayor del conjunto de las cotas inferiores de P.

Observación 1.3.1. *Cuando a y b son elementos de un copo $\mathcal{L}$, el supremo del conjunto $\{a, b\}$ se denotará por $a \wedge b$ y al ínfimo de este conjunto se le denotará por $a \vee b$.*

Definición 1.3.3. Sea $(\mathcal{L}, \leq)$ un copo. Diremos que $\mathcal{L}$ es una *retícula* si para todo $a, b \in \mathcal{L}$ existen $a \wedge b$ y $a \vee b$.

Definición 1.3.4. Sea $(\mathcal{L}, \leq)$ un copo. Una *cadena* $\mathcal{C}$ en $\mathcal{L}$ es un subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{L}$, es decir, si $a, b \in \mathcal{C}$ se tiene que $a \leq b$ o $b \leq a$.

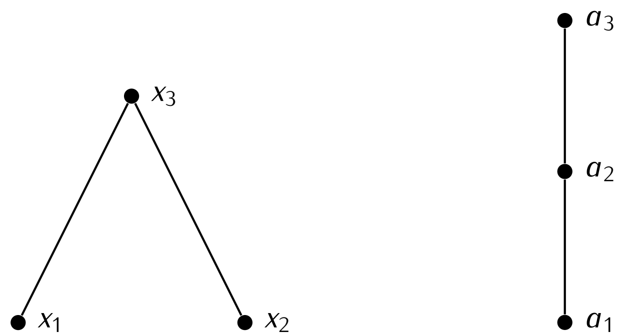
Definición 1.3.5. Sea $(\mathcal{L}, \leq_{\mathcal{L}})$ un copo. Se dice que $\left(Q, \leq_Q\right)$ es un *subcopo inducido* de $(\mathcal{L}, \leq_{\mathcal{L}})$ si $Q \subseteq \mathcal{L}$ y para cualesquiera $x, y \in Q$ se cumple que $x \leq_Q y \iff x \leq_{\mathcal{L}} y$.

Nota. Cuando hablemos de un subcopo, nos referiremos a un subcopo inducido.

Definición 1.3.6. Sean $(A, \leq)$, $(B, \leq')$ copos. Sea $f : A \longrightarrow B$ una función. Diremos que f es *morfismo de orden* si para toda $a_1, a_2 \in A$ tales que $a_1 \leq a_2$ se cumple que $f(a_1) \leq' f(a_2)$.

Definición 1.3.7. Sea f un morfismo de orden. Diremos que f es un *isomorfismo de orden* si f es biyectiva y f^{-1} es morfismo de orden.

Ejemplo 1.3.2. Sean $X = \{x_1, x_2, x_3\}, A = \{a_1, a_2, a_3\}$ dos copos dados de la siguiente forma:



Sea $f : X \longrightarrow A$ una función tal que $f(x_1) = a_1$, $f(x_2) = a_2$, $f(x_3) = a_3$.

Notemos que f es morfismo de orden. Además, es claro que f es biyectiva. Pero f^{-1} no es morfismo de orden, pues $a_1 \leq a_2$ pero $f^{-1}(a_1) \nleq f^{-1}(a_2)$ (x_1 y x_2 no son comparables).

Definición 1.3.8 (G-copo, cf. [Thé87])**.** Sea G un grupo finito. Sea X un copo finito que además es un G-conjunto. X es un *G-copo* si para todo $g \in G$ y para todo $x, y \in X$ se cumple que $x \leq y \implies gx \leq gy$.

Definición 1.3.9. Sean X, Y dos G-copos. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Diremos que f es un *morfismo de G-copos* si f es morfismo de orden y morfismo de G-conjuntos.

De igual forma, diremos que f es un *isomorfismo de G-copos* si f es isomorfismo de orden e isomorfismo de G-conjuntos.

Capítulo 2

El anillo de Burnside

2.1. La marca

Para más detalles sobre la marca, se sugiere revisar la sección 2 de [CRV16].

Definición 2.1.1. 1. Sea G un grupo, $H \leq G$ un subgrupo y X un G-conjunto finito. Definimos y denotamos al conjunto de *puntos fijos de X bajo la acción de H* como

$$X^H = \{x \in X \mid hx = x \; \forall\, h \in H\}.$$

2. Definimos la *marca de H en X* como la cardinalidad de X^H y la denotamos por

$$\varphi_H(X) = |X^H|.$$

Ejemplo 2.1.1. En el Ejemplo 1.1.1, vimos que si $K \leq G$, entonces G/K es un G-conjunto. Sea $H \leq G$. Entonces

$$\begin{array}{rcl} (G/K)^H & = & \{aK \mid haK = aK \; \forall\, h \in H\} \\ & = & \{aK \mid a^{-1}ha \in K \; \forall\, h \in H\} \\ & = & \{aK \mid a^{-1}Ha \subseteq K\} \\ & = & \{aK \mid H \subseteq aKa^{-1}\} \end{array}$$

Luego, $\varphi_H(G/K) = |\{aK \mid H \subseteq aKa^{-1}\}|$.

Teorema 2.1.1 (cf. [CRV16], Teorema 2.2)**.** *Sean G un grupo, $H, K \leq G$ y X, Y G-conjuntos finitos. Entonces se cumplen:*

1. $\varphi_H(X \sqcup Y) = \varphi_H(X) + \varphi_H(Y)$,
2. $\varphi_H(X \times Y) = \varphi_H(X)\,\varphi_H(Y)$,
3. *Si H y K son conjugados, entonces para todo G-conjunto finito X se satisface que $\varphi_H(X) = \varphi_K(X)$.*

Demostración. Sean X, Y G-conjuntos finitos y $H, K \leq G$ subgrupos.

1. Notemos que

$$\begin{array}{rcl}(X \sqcup Y)^H & = & \{z \in X \sqcup Y \mid hz = z \;\; \forall\, h \in H\} \\ & = & \{z \mid (z \in X \times \{1\} \text{ y } hz = z) \text{ o } (z \in Y \times \{2\} \text{ y } hz = z) \;\; \forall\, h \in H\} \\ & = & X^H \sqcup Y^H\end{array}$$

De ahí que $|(X \sqcup Y)^H| = |X^H \sqcup Y^H| = |X^H| + |Y^H|$.

2. Observemos que

$$\begin{array}{rcl}(X \times Y)^H & = & \{(x,y) \in X \times Y \mid h(x,y) = (x,y) \;\; \forall\, h \in H\} \\ & = & \{(x,y) \in X \times Y \mid (hx, hy) = (x,y) \;\; \forall\, h \in H\} \\ & = & \{(x,y) \in X \times Y \mid hx = x \text{ y } hy = y \;\; \forall\, h \in H\} \\ & = & \left\{(x,y) \in X \times Y \mid x \in X^H \text{ y } y \in Y^H\right\} \\ & = & X^H \times Y^H\end{array}$$

De ahí que $|(X \times Y)^H| = |X^H \times Y^H| = |X^H||Y^H|$.

3. Supongamos que H y K son conjugados. Entonces existe $g \in G$ tal que $gKg^{-1} = H$. Entonces

$$\begin{array}{rcl}X^H & = & \{x \in X \mid hx = x \;\; \forall\, h \in H\} \\ & = & \left\{x \in X \mid (gkg^{-1})x = x \;\; \forall\, k \in K\right\} \\ & = & \left\{x \in X \mid kg^{-1}x = g^{-1}x \;\; \forall\, k \in K\right\} \\ & = & \left\{x \in X \mid g^{-1}x \in X^K\right\} \\ & = & \left\{x \in X \mid x \in gX^K\right\} \\ & = & gX^K\end{array}$$

De aquí que $|X^H| = |gX^K|$.

Ahora, definimos $\alpha : X^K \longrightarrow gX^K$ tal que $x \longmapsto gx$. Se puede ver que α está bien definida y es una biyección, por lo que $|X^K| = |gX^K|$. Así, $|X^H| = |X^K|$.

Por lo tanto, para todo G-conjunto X se cumple que $\varphi_H(X) = \varphi_K(X)$.

□

Lema 2.1.2 (cf. [CRV16], Lema 2.3). *Sean H, K subgrupos de G. Entonces existe una biyección entre $(G/K)^H$ y $Hom_G(G/H, G/K)$.*

Demostración.

- Sabemos que $Hom_G(G/H, G/K) \neq \emptyset$ si y sólo si H es subconjugado de K, por el Teorema 1.1.10.

  Supongamos que H no es subconjugado de K. Entonces, por el Teorema 1.1.10, $Hom_G(G/H, G/K) = \emptyset$.

Por otro lado, tenemos que

$$
\begin{aligned}
(G/K)^H &= \{gK \in G/K \mid hgK = gK \ \forall\, h \in H\} \\
&= \left\{gK \in G/K \mid g^{-1}hgK = K \ \forall\, h \in H\right\} \\
&= \left\{gK \in G/K \mid g^{-1}Hg \subseteq K\right\} \\
&= \emptyset
\end{aligned}
$$

Así, $f : (G/K)^H \longrightarrow Hom_G(G/H, G/K)$ es la función vacía, la cual es biyectiva.

- Ahora supongamos que H es subconjugado de K.

  Definimos $\gamma : (G/K)^H \longrightarrow Hom_G(G/H, G/K)$ tal que $aK \longmapsto \gamma_a$, donde $\gamma_a : G/H \longrightarrow G/K$ con $\gamma_a(gH) = gaK$.

  Veamos que γ_a está bien definida.

  Sean $g_1H, g_2H \in G/H$ con $g_1H = g_2H$. Esto pasa si y sólo si existe $h \in H$ tal que $g_1 = g_2h$. Luego, $\gamma_a(g_1H) = g_1aK = g_2(h(aK)) = g_2(aK) = \gamma_a(g_2H)$ pues $aK \in (G/K)^H$.

  Ahora veamos que γ_a es morfismo de G-conjuntos.

  Sean $g' \in G$ y $gH \in G/H$. Entonces $\gamma_a(g'(gH)) = \gamma_a((g'g)H) = (g'g)aK = g'(ga)K = g'\gamma_a(gK)$.

  Veamos que γ está bien definida.

  Sean $aK, bK \in (G/K)^H$ tales que $aK = bK$. Entonces $b = ak$ para algún $k \in K$. Luego, $\gamma_b(gH) = gbK = gakK = gaK = \gamma_a(gH)$. Esto pasa para todo $gH \in G/H$. Por lo tanto, $\gamma_a = \gamma_b$.

  Sea $\gamma' : Hom_G(G/H, G/K) \longrightarrow (G/K)^H$ tal que $\gamma'(\alpha) = \alpha(H)$.

  γ' está bien definida, pues si $h \in H$, entonces $h\alpha(H) = \alpha(hH) = \alpha(H)$, por lo que $\alpha(H) \in (G/K)^H$.

  Ahora veamos que $\gamma \circ \gamma' = Id_{Hom_G(G/H,G/K)}$.

  $(\gamma \circ \gamma')(\alpha) = \gamma(\gamma'(\alpha)) = \gamma(\alpha(H)) = \gamma(gK) = \gamma_g$, donde $\alpha(H) = gK$.

  Por otro lado, $((\gamma \circ \gamma')(\alpha))(xH) = \gamma_g(xH) = xgK = x\alpha(H) = \alpha(xH)$ para todo $xH \in G/H$.

  De ahí que $(\gamma \circ \gamma')(\alpha) = \alpha$. Así, $\gamma \circ \gamma' = Id_{Hom_G(G/H,G/K)}$.

  Ahora, sea $aK \in (G/K)^H$. Entonces $(\gamma' \circ \gamma)(aK) = \gamma'(\gamma(aK)) = \gamma'(\gamma_a) = \gamma_a(H) = aK$.

  Por lo tanto, $\gamma' \circ \gamma = Id_{(G/K)^H}$. Así, γ es biyección.

$\square$

Corolario 2.1.3. *Sean $H, K \leq G$ subgrupos. Entonces $\varphi_H(G/K) \neq 0$ si y sólo si H es subconjugado de K.*

Teorema 2.1.4 (cf. [CRV16], Lema 2.6). *Sean $H, K \leq G$ subgrupos. Entonces*

$$\varphi_H(G/K) = \frac{|N_G(K)|}{|K|}\ \alpha(H,K) = \frac{|N_G(H)|}{|K|}\ \beta(H,K)$$

donde

$$\alpha(H,K) = |\{E \leq G \mid E \text{ y } K \text{ son conjugados y } H \subseteq E\}|$$

y

$$\beta(H,K) = |\{E \leq G \mid E \text{ y } H \text{ son conjugados y } E \subseteq K\}|$$

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \left\{E \leq G \,\middle|\, E \text{ y } K \text{ son conjugados y } H \subseteq E\right\}$. Notemos que, por el Ejemplo 2.1.1, $(G/K)^H = \left\{aK \mid H \subseteq aKa^{-1}\right\}$.

Sea $f : \left\{aK \mid H \subseteq aKa^{-1}\right\} \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que $aK \longmapsto aKa^{-1}$. Veamos que está bien definida:

Sean $aK, bK \in \left\{aK \mid H \subseteq aKa^{-1}\right\}$ tales que $aK = bK$. Entonces existe $k \in K$ tal que $a = bk$.

Ahora, $aKa^{-1} = (bk)K(bk)^{-1} = (bk)K\left(k^{-1}b^{-1}\right) = b(kKk^{-1})b^{-1} = bKb^{-1}$. Por lo tanto, f está bien definida.

Notemos que, por construcción, f es suprayectiva.

Luego, $\left\{aK \mid H \subseteq aKa^{-1}\right\} = \bigcup_{E \in \mathcal{A}} f^{-1}(E)$, con $f^{-1}(E)$ la fibra de E.

Veamos que $f^{-1}(E) = \{abK \mid bK \in N_G(K)/K\}$:

- $\subseteq$) Sea $cK \in \left\{aK \mid H \subseteq aKa^{-1}\right\}$ tal que $f(cK) = E$, donde $E = aKa^{-1}$. Entonces $cKc^{-1} = aKa^{-1}$, por lo que $a^{-1}cKc^{-1}a = K$. De ahí que $a^{-1}c \in N_G(K)$. Así, existe $b \in N_G(K)$ tal que $b = a^{-1}c$. Esto implica que $c = ab$, con $bK \in N_G(K)/K$.
- $\supseteq$) Sea abK tal que $bK \in N_G(K)/K$. Entonces $f(abK) = abKb^{-1}a^{-1} = aKa^{-1} = E$. De ahí que $abK \in f^{-1}(E)$.

Por último, notemos que si $bK, b'K \in N_G(K)/K$, entonces $bK = b'K$ si y sólo si $abK = ab'K$. De ahí que $|\{abK \mid bK \in N_G(K)/K\}| = |N_G(K)| \,/\, |K|$.

Luego, $\left|f^{-1}(E)\right| = \dfrac{|N_G(K)|}{|K|}$. Por lo tanto,

$$\varphi_H(G/K) = \frac{|N_G(K)|}{|K|}\ \alpha(H,K)$$

Por otro lado, llamemos $\mathcal{B} = \left\{a \in G \mid a^{-1}Ha \subseteq K\right\}$ y tomemos la función $f_1 : \mathcal{B} \longrightarrow \left\{aK \mid a^{-1}Ha \subseteq K\right\}$ tal que $a \longmapsto aK$.

Es fácil ver que f_1 está bien definida y es suprayectiva. Luego, la preimagen de aK bajo f_1 es

$$\begin{aligned} f_1^{-1}(aK) &= \{g \in G \mid f_1(g) = aK\} \\ &= \{g \in G \mid gK = aK\} \\ &= \left\{g \in G \mid a^{-1}gK = K\right\} \\ &= \{g \in G \mid g = ak \text{ p. a. } k \in K\} \\ &= \{ak \mid k \in K\} \\ &= aK \end{aligned}$$

Así, $\left|f_1^{-1}(aK)\right| = |aK| = |K|$. De aquí que $|\mathcal{B}| = |K|\ \varphi_H(G/K)$.

Ahora, llamemos $B = \{E \leq G \mid E \text{ y } H \text{ son conjugados y } E \subseteq K\}$. Veamos que $|\mathcal{B}| = |N_G(H)|\, \beta(H, K)$.

Tomemos $f_2 : \mathcal{B} \longrightarrow B$ tal que $a \longmapsto a^{-1}Ha$. Se puede notar que f_2 está bien definida.

Sea $E \in B$. Así, E y H son conjugados, es decir, existe $a \in G$ tal que $E = a^{-1}Ha \subseteq K$. Luego, $E \in \mathcal{B}$. Por lo tanto, f_2 es suprayectiva.

Por otra parte, la preimagen de E bajo f_2 es

$$\begin{aligned} f_2^{-1}(E) &= \left\{g \in G \mid f_2(g) = a^{-1}Ha\right\} \\ &= \left\{g \in G \mid g^{-1}Hg = a^{-1}Ha\right\} \\ &= \left\{g \in G \mid ga^{-1} \in N_G(H)\right\} \\ &= \{g \in G \mid g = xa \text{ p. a. } x \in N_G(H)\} \\ &= \{xa \mid x \in N_G(H)\} \\ &= N_G(H)a \end{aligned}$$

Luego, $\left|f_2^{-1}(E)\right| = |N_G(H)a| = |N_G(H)|$.

Por lo tanto, $|\mathcal{B}| = |N_G(H)|\ \beta(H, K) = |K|\varphi_H(G/K)$.

Así,

$$\varphi_H(G/K) = \frac{|N_G(H)|}{|K|}\ \beta(H, K)$$

$\square$

Definición 2.1.2. Dados G un grupo y $H \leq G$ un subgrupo, definimos el *grupo de Weyl* de H en G como

$$W(H) = \frac{N_G(H)}{H}$$

2.2. El anillo de Burnside

Para más detalles sobre el anillo de Burnside y su construcción, se sugiere revisar [Bou00] y la sección 3 de [CRV16].

Definición 2.2.1. Dado G un grupo finito, sea $\mathbb{A}$ la clase de todos los G-conjuntos finitos, es decir,

$$\mathbb{A} = \{X \mid X \text{ es un } G\text{-conjunto finito}\}\,.$$

Observación 2.2.1. *En $\mathbb{A}$ hay una relación de equivalencia $\sim$, a saber, dados $X, Y \in \mathbb{A}$ se tiene que $X \sim Y$ si y sólo si $X \cong_G Y$.*

Demostración.

1. (Reflexividad) Sea $X \in \mathbb{A}$. Notemos que por el Ejemplo 1.1.3, inciso 2, $Id_X : X \longrightarrow X$ es morfismo de G-conjuntos. Además es claro que es biyectiva, por lo que Id_X es isomorfismo de G-conjuntos. Así, $X \sim X$.

2. (Simetría) Sean $X, Y \in \mathbb{A}$ tales que $X \sim Y$. Entonces existe $f : X \longrightarrow Y$ isomorfismo de G-conjuntos. Por la Proposición 1.1.3, inciso 2, tenemos que $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ es isomorfismo de G-conjuntos, por lo que $Y \sim X$.

3. (Transitividad) Sean $X, Y, Z \in \mathbb{A}$ tales que $X \sim Y$ y $Y \sim Z$. Entonces existen $f_1 : X \longrightarrow Y$ y $f_2 : Y \longrightarrow Z$ isomorfismos de G-conjuntos. Por la Proposición 1.1.3, inciso 1, la composición $f_2 \circ f_1 : X \longrightarrow Z$ es morfismo de G-conjuntos. Además, es fácil ver que, como f_1 y f_2 son biyecciones, también lo es $f_2 \circ f_1$. Así, $f_2 \circ f_1$ es isomorfismo de G-conjuntos. Por lo tanto, $X \sim Z$.

Por lo tanto, $\sim$ es de equivalencia. □

Definición 2.2.2. Denotaremos por $[X]$ a la clase de equivalencia de $X \in \mathbb{A}$ y la llamaremos la *clase de G-isomorfismo* de X. Así, definimos

$$B^+(G) = \{[X] \mid X \in \mathbb{A}\}$$

Teorema 2.2.2 (cf. [CRV16], Teorema 3.3)**.** *Sea G un grupo finito. Entonces $(B^+(G), +, \cdot)$ es un semianillo conmutativo con unidad, con las operaciones de suma y producto definidas de la siguiente forma:*

- *(Suma)* $[X] + [Y] = [X \sqcup Y]$
- *(Producto)* $[X]\,[Y] = [X \times Y]$

Demostración. Veamos primero que tanto la suma como el producto están bien definidos.

Sean $[X_1], [X_2], [Y_1], [Y_2] \in B^+(G)$ tales que $[X_1] = [X_2]$ y $[Y_1] = [Y_2]$. Entonces existen $f_1 : X_1 \longrightarrow X_2$ y $f_2 : Y_1 \longrightarrow Y_2$ isomorfismos de G-conjuntos.

Notemos que f_1 y f_2 inducen el siguiente isomorfismo de G-conjuntos:

$$\begin{aligned} f_3 : (X_1 \times \{1\}) \cup (Y_1 \times \{2\}) &\longrightarrow (X_2 \times \{1\}) \cup (Y_2 \times \{2\}) \\ (z, i) &\longmapsto (f_i(z), i), \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

Así, $[X_1 \sqcup Y_1] = [X_2 \sqcup Y_2]$, con lo que la suma está bien definida.

Ahora, veamos que f_1 y f_2 también inducen el siguiente isomorfismo de G-conjuntos:

$$\begin{aligned} f_4 : X_1 \times Y_1 &\longrightarrow X_2 \times Y_2 \\ (x, y) &\longmapsto (f_1(x), f_2(y)) \end{aligned}$$

De ahí que $[X_1 \times Y_1] = [X_2 \times Y_2]$, con lo que el producto también está bien definido.

Sin pérdida de generalidad, en lo sucesivo podemos considerar que para elementos $[X], [Y] \in B^+(G)$ se tiene que $X \cap Y = \emptyset$; esto debido a la definición de $[X]$ y $[Y]$ y a que las operaciones están bien definidas.

Veamos que $B^+(G)$ cumple con los axiomas de semianillo conmutativo con unidad. Para esto, sean $[X], [Y], [Z] \in B^+(G)$, con X, Y, Z ajenos dos a dos.

Respecto de la suma:

1. Asociatividad.

$$\begin{aligned} [X] + ([Y] + [Z]) &= [X] + [Y \cup Z] \\ &= [X \cup (Y \cup Z)] \\ &= [(X \cup Y) \cup Z] \\ &= [X \cup Y] + [Z] \\ &= ([X] + [Y]) + [Z] \end{aligned}$$

2. Conmutatividad. $[X] + [Y] = [X \cup Y] = [Y \cup X] = [Y] + [X]$
3. El neutro aditivo es $[\emptyset]$. Notemos que $[\emptyset] \in B^+(G)$, pues existe $\cdot : G \times \emptyset \longrightarrow \emptyset$ la acción vacía. Así, $[X] + [\emptyset] = [\emptyset] + [X] = [\emptyset \cup X] = [X]$.

Respecto del producto:

4. Asociatividad. $[X]([Y][Z]) = [X][Y \times Z] = [X \times (Y \times Z)] = [(X \times Y) \times Z] = [X \times Y][Z] = ([X][Y])[Z]$.
5. Conmutatividad. Sea $f : X \times Y \longrightarrow Y \times X$ tal que $(x, y) \longmapsto (y, x)$. Notemos que f está bien definida y es biyectiva. Veamos que es de G-conjuntos.

   Sea $g \in G$. Entonces $gf(x, y) = g(y, x) = (gy, gx) = f(gx, gy) = f(g(x, y))$.

   Por lo tanto, f es morfismo de G-conjuntos. Así, $[X][Y] = [Y][X]$.

6. La identidad es $[G/G]$. Notemos que $[G/G] \in B^+(G)$ pues existe $\cdot : G \times G/G \longrightarrow G/G$ tal que $(g, G) \longmapsto g \cdot G = G$, la cual es una acción.

   Sea $f : X \times G/G \longrightarrow X$ tal que $(x, G) \longmapsto x$. Sean $(x, G), (y, G) \in X \times G/G$ tales que $(x, G) = (y, G)$. Esto pasa si y sólo si $x = y$. Por lo tanto, f está bien definida y es inyectiva. Notemos que, como X y G/G son finitos, f es suprayectiva.

   Así, como f es isomorfismo de G-conjuntos, $[X][G/G] = [X]$.

7. Distributividad. $[X]([Y] + [Z]) = [X][Y \cup Z] = [X \times (Y \cup Z)] = [(X \times Y) \cup (X \times Z)] = [X \times Y] + [X \times Z] = [X][Y] + [X][Z]$.

Por lo tanto, $(B^+(G), +, \cdot)$ es un semianillo conmutativo con unidad. $\square$

Observación 2.2.3. *Notemos que, si $G = \{e\}$ y X es un conjunto, entonces X es un $\{e\}$-conjunto con la acción trivial (véase Ejemplo 1.1.1, inciso 1.).*

Además, dos G-conjuntos con la acción trivial son isomorfos si y sólo si existe una biyección entre ellos. Luego, $\psi : B^+(\{e\}) \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $[X] \longmapsto |X|$ es un isomorfismo de semianillos.

Así, $\mathbb{N} \cong B^+(\{e\})$ como semianillos.

Teorema 2.2.4 (Ley de cancelación, cf. [CRV16], Teorema 3.5). *Sean $[X], [Y], [Z] \in B^+(G)$ tales que $[X] + [Y] = [Z] + [Y]$. Entonces $[X] = [Z]$.*

Demostración. Sean $[X], [Y], [Z] \in B^+(G)$ tales que $[X] + [Y] = [Z] + [Y]$. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que X, Y y Z son ajenos dos a dos.

Sean $X = \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{O}_G(x_i)$, $Y = \bigcup_{j=1}^{l} \mathcal{O}_G(y_j)$ y $Z = \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{O}_G(z_k)$.

Como $[X] + [Y] = [X \cup Y] = [Z \cup Y] = [Z] + [Y]$, entonces existe una función biyectiva entre las órbitas de $X \cup Y$ y $Z \cup Y$. Luego, tenemos que $m + l = n + l$, por lo que $m = n$. De ahí que $Z = \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{O}_G(z_i)$.

Veamos por inducción sobre $l \geq 1$ que hay cancelación:

i) Para $l = 1$, existe un isomorfismo de G-conjuntos $f : X \cup \mathcal{O}_G(y_1) \longrightarrow Z \cup \mathcal{O}_G(y_1)$.

   Si $f(\mathcal{O}_G(y_1)) = \mathcal{O}_G(y_1)$, entonces $f_{|X} : X \longrightarrow Z$ es un isomorfismo de G-conjuntos, por lo que $[X] = [Z]$.

   En caso contrario, sin pérdida de generalidad supongamos que $f(\mathcal{O}_G(y_1)) = \mathcal{O}_G(z_m)$. Entonces $[\mathcal{O}_G(y_1)] = [\mathcal{O}_G(z_m)]$, por lo que existe

$$f_1 = f_{|\mathcal{O}_G(y_1)} : \mathcal{O}_G(y_1) \longrightarrow \mathcal{O}_G(z_m)$$

isomorfismo de G-conjuntos.

Por otro lado, sin pérdida de generalidad supongamos que $f(\mathcal{O}_G(x_m)) = \mathcal{O}_G(y_1)$. Entonces $[\mathcal{O}_G(x_m)] = [\mathcal{O}_G(y_1)]$, por lo que existe

$$f_2 = f_{|\mathcal{O}_G(x_m)} : \mathcal{O}_G(x_m) \longrightarrow \mathcal{O}_G(y_1)$$

isomorfismo de G-conjuntos.

Sea $f_3 : \mathcal{O}_G(x_m) \longrightarrow \mathcal{O}_G(z_m)$ isomorfismo de G-conjuntos dado por $f_3 = f_1^{-1} \circ f_2$.

Por otra parte, sea

$$f_4 = f_{\left| \bigcup_{i=1}^{m-1} \mathcal{O}_G(x_i)\right.} : \bigcup_{i=1}^{m-1} \mathcal{O}_G(x_i) \longrightarrow \bigcup_{i=1}^{m-1} \mathcal{O}_G(z_i)$$

isomorfismo de G-conjuntos.

Así, definimos

$$h : \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{O}_G(x_i) \longrightarrow \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{O}_G(z_i)$$

tal que $h(x) = \begin{cases} f_3(x) & \text{si } x \in \mathcal{O}_G(x_m) \\ f_4(x) & \text{si } x \in \bigcup_{i=1}^{m-1} \mathcal{O}_G(x_i) \end{cases}$, el cual es isomorfismo de G-conjuntos.

Por lo tanto, $[X] = [Z]$.

ii) Para $l > 1$ tenemos que $[X] + [Y] = [Z] + [Y]$. Entonces

$$\left([X] + \left[\bigcup_{j=1}^{l-1} \mathcal{O}_G(y_j) \right] \right) + [\mathcal{O}_G(y_l)] = \left([Z] + \left[\bigcup_{j=1}^{l-1} \mathcal{O}_G(y_j) \right] \right) + [\mathcal{O}_G(y_l)]$$

Por base de inducción, podemos cancelar una órbita; en este caso, $\mathcal{O}_G(y_l)$.

Por hipótesis de inducción, podemos cancelar $l - 1$ órbitas. Así, $[X] = [Z]$.

$\square$

Observación 2.2.5. *El Teorema 2.2.4 nos permite definir una relación de equivalencia en $B^+(G) \times B^+(G)$, a saber, dados $([X_1], [Y_1]), ([X_2], [Y_2]) \in B^+(G) \times B^+(G)$, tenemos que $([X_1], [Y_1]) \sim ([X_2], [Y_2])$ si y sólo si $[X_1] + [Y_2] = [X_2] + [Y_1]$.*

Denotaremos a la clase de equivalencia de $([X], [Y]) \in B^+(G) \times B^+(G)$ como $[X] - [Y]$.

Definición 2.2.3 (Anillo de Burnside). Definimos el *anillo de Burnside* $B(G)$ de un grupo finito G como

$$B(G) = \frac{B^+(G) \times B^+(G)}{\sim} = \{[X] - [Y] \mid ([X],[Y]) \in B^+(G) \times B^+(G)\}$$

con las siguientes operaciones binarias de suma y producto:

- (Suma) $([X_1] - [Y_1]) + ([X_2] - [Y_2]) = ([X_1] + [X_2]) - ([Y_1] + [Y_2])$,
- (Producto) $([X_1] - [Y_1])([X_2] - [Y_2]) = ([X_1][X_2] + [Y_1][Y_2]) - ([X_1][Y_2] + [X_2][Y_1])$.

Observación 2.2.6 (cf. [Bou00], Definición 3.1.1). *El anillo de Burnside $B(G)$ es el anillo de Grothendieck de $B^+(G)$.*

El siguiente resultado es consecuencia del Teorema de Burnside (cf. [Bou00], Teorema 2.3.2):

Teorema 2.2.7 (cf. [Bou00], p. 746). *Dado un grupo finito G, se tiene que $B(G)$ es libre como grupo abeliano, generado por los elementos de la forma G/H, donde H recorre los elementos de $[S_G]$.*

Demostración. Sea G un grupo finito y X un G–conjunto finito. Por 4. del Teorema 1.1.5, $X \cong_G \bigsqcup_{i \in I} G/H_i$, donde $H_i \leq G$ para cada $i \in I$.

Así,
$$[X] = \left[\bigsqcup_{i \in I} G/H_i\right] = \sum_{i \in I} (G/H_i) \in B^+(G).$$

Ahora, por el Lema 1.1.9 podemos tener repeticiones de algunos G/H_i, por lo que denotaremos con $a_{H_i} \in \mathbb{N}$ el número de veces que se repite el elemento G/H_i.

Así, si $[X] \in B^+(G)$, entonces
$$[X] = \sum_{H \in [S_G]} a_H (G/H)$$

con $a_H \in \mathbb{N}$.

De ahí que si $[X] \in B(G)$, entonces $[X] = \sum_{H \in [S_G]} a_H (G/H)$, con $a_H \in \mathbb{Z}$.

Veamos que $\{G/H \mid H \in [S_G]\}$ es base.

Supongamos que $\sum_{H \in [S_G]} a_H (G/H) = 0$ y que no todos los $a_H \in \mathbb{Z}$ son cero. Así, tenemos la siguiente igualdad:

$$\sum_{a_K>0} a_K(G/K) = \sum_{a_L<0} (-a_L)(G/L)$$

Sean $[Y] = \sum_{a_K>0} a_K(G/K)$ y $[Z] = \sum_{a_L<0} (-a_L)(G/L)$.

Si $[Y] = [\emptyset]$, entonces alguno de los coeficientes, digamos a_{K_0} sería distinto de cero, lo que significaría que la órbita G/K_0 de $[\emptyset]$ es no vacía, lo cual no es posible. Así, sin pérdida de generalidad, supongamos que $[Y] \neq [\emptyset] \neq [Z]$.

Si $K_0 \in [S_G]$ tal que $a_{K_0} > 0$, entonces existe $\mathcal{O}_G(y_0) \subseteq Y$ que cumple que $\mathcal{O}_G(y_0) \cong_G G/K_0$.

Por otro lado, $[Y] = [Z]$, por lo que $\mathcal{O}_G(y_0) \cong_G \mathcal{O}_G(z_0)$ para algún $z_0 \in Z$, que a su vez $\mathcal{O}_G(z_0) \cong_G G/L_0$, para algún $L_0 \in [S_G]$ tal que $a_{L_0} < 0$.

De ahí que $G/K_0 \cong_G G/L_0$. Así, K_0 y L_0 son conjugados, lo cual es una contradicción, pues $K_0 \neq L_0$ en $[S_G]$.

Así, $a_H = 0$ para todo $H \in [S_G]$.

Por lo tanto,

$$B(G) = \bigoplus_{H\in[S_G]} \mathbb{Z}\ (G/H)$$

$\square$

Observación 2.2.8. *Existe una inclusión* $\iota : B^+(G) \longrightarrow B(G)$ *tal que* $[X] \longmapsto [X] - [\emptyset]$.

Observación 2.2.9 (cf. [CRV16], Observación 3.11)**.** *Dados G un grupo finito, R un anillo conmutativo y $f : B^+(G) \longrightarrow R$ un morfismo de semianillos, tenemos que f se extiende de manera única a $B(G)$, esto es, existe $F : B(G) \longrightarrow R$ morfismo de anillos tal que $F_{\big| B^+(G)} = f$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
B^+(G) \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & B(G) \arrow[dl, dashed, "\exists!\ F\ de\ anillos"] \\
R &
\end{tikzcd}$$

Además, F está dada por $F([X] - [Y]) = f([X]) - f([Y])$.

Demostración. Veamos que F es morfismo de anillos:

Notemos que $F([\emptyset] - [\emptyset]) = f([\emptyset]) - f([\emptyset]) = 0 - 0 = 0$ y que $F([G/G] - [\emptyset]) = f([G/G]) - f([\emptyset]) = 1 - 0 = 1$.

Sean $[X_1]-[Y_1],[X_2]-[Y_2] \in B(G)$.

Para la suma:

$$\begin{array}{rcl} F(([X_1]-[Y_1])+([X_2]-[Y_2])) & = & F(([X_1]+[X_2])-([Y_1]+[Y_2])) \\ & = & f([X_1]+[X_2])-f([Y_1]+[Y_2]) \\ & = & f([X_1])+f([X_2])-f([Y_1])-f([Y_2]) \\ & = & F([X_1]-[Y_1])+F([X_2]-[Y_2]) \end{array}$$

Para el producto:

$$\begin{array}{rcl} F(([X_1]-[Y_1])([X_2]-[Y_2])) & = & F(([X_1][X_2]+[Y_1][Y_2])-([X_1][Y_2]+[X_2][Y_1])) \\ & = & f([X_1][X_2]+[Y_1][Y_2])-f([X_1][Y_2]+[X_2][Y_1]) \\ & = & f([X_1])f([X_2])+f([Y_1])f([Y_2])-f([X_1])f([Y_2])-f([X_2])f([Y_1]) \\ & = & (f([X_1])-f([Y_1]))(f([X_2])-f([Y_2])) \\ & = & F([X_1]-[Y_1])F([X_2]-[Y_2]) \end{array}$$

Por lo tanto, F es morfismo de anillos.

Ahora, si $[X] \in B^+(G)$, entonces $(F \circ \iota)([X]) = F(\iota([X])) = F([X]-[\emptyset]) = f([X]) - f([\emptyset]) = f([X]) - 0 = f([X])$. Esto pasa para todo $[X] \in B^+(G)$. Así, el triángulo conmuta, por lo que $F_{|B^+(G)} = f$.

Por último, veamos que F es único.

Sea $\psi : B(G) \longrightarrow R$ morfismo de anillos tal que $\psi_{|B^+(G)} = f$. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \psi([X]-[Y]) & = & \psi([X]-[\emptyset]+[\emptyset]-[Y]) \\ & = & \psi([X]-[\emptyset])+\psi(-([Y]-[\emptyset])) \\ & = & \psi([X]-[\emptyset])-\psi([Y]-[\emptyset]) \\ & = & f([X])-f([Y]) \\ & = & F([X]-[Y]) \end{array}$$

Así, $\psi = F$. $\square$

A partir de aquí, abusando de la notación usaremos

$$X \in B^+(G) = \bigoplus_{H\in[S_G]} \mathbb{N}(G/H) \quad \text{y} \quad [X] \in B(G) = \bigoplus_{H\in[S_G]} \mathbb{Z}(G/H)$$

Lema 2.2.10. *Sea $\varphi : B^+(G) \longrightarrow \prod_{H\in[S_G]} \mathbb{Z}$ dado por $\varphi(X) = (\varphi_H(X))_{H\in[S_G]}$. Entonces φ es un morfismo de semianillos, el cual se extiende de manera única a un morfismo inyectivo de anillos $\widetilde{\varphi} : B(G) \longrightarrow \prod_{H\in[S_G]} \mathbb{Z}$ (véase [Bou00], p. 747) teniendo que el siguiente diagrama conmuta:*

$$
\begin{tikzcd}
B^+(G) \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\varphi"'] & B(G) \arrow[dl, dashed, "\exists!\ \widetilde{\varphi}\ \textit{de anillos}"] \\
\prod\limits_{H\in[S_G]} \mathbb{Z} &
\end{tikzcd}
$$

Demostración. Notemos que $\prod\limits_{H\in[S_G]} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{|[S_G]|}$ es un anillo conmutativo con unidad, con la suma y el producto usuales.

Sea $X \in B^+(G)$. Por propiedades de la marca, $(\varphi_H(X))_{H\in[S_G]}$ no depende del representante de H.

Sea $Y \in B^+(G)$ tal que $X = Y$. Entonces existe $f : X \longrightarrow Y$ isomorfismo de G-conjuntos. Sea $H \in [S_G]$ y $x \in X^H$. Entonces $h \cdot x = x$ para todo $h \in H$. Luego, $hf(x) = f(hx) = f(x)$, es decir, $hf(x) = f(x)$ para toda $h \in H$. Esto pasa si y sólo si $f(x) \in Y^H$. Luego, $f(X^H) \subseteq Y^H$.

Ahora, como f es isomorfismo de G-conjuntos, f^{-1} también lo es. Sea $H \in [S_G]$ y $y \in Y^H$. Entonces $h \cdot y = y$ para todo $h \in H$. Luego, $hf^{-1}(y) = f^{-1}(hy) = f(y)$, y esto pasa si y sólo si $f^{-1}(y) \in X^H$. De ahí que $f^{-1}(Y^H) \subseteq X^H$. Así, $f(X^H) = Y^H$.

Entonces $f_{|X^H} : X^H \longrightarrow Y^H$ es biyección, así que $\varphi_H(X) = \varphi_H(Y)$. Esto se cumple para cada $H \in [S_G]$, de modo que $\varphi(X) = (\varphi_H(X))_{H\in[S_G]} = (\varphi_H(Y))_{H\in[S_G]} = \varphi(Y)$.

Por lo tanto, φ está bien definida.

Recordemos que $1_{B^+(G)} = G/G$ y $1_{\mathbb{Z}^{|[S_G]|}} = \underbrace{(1, \dots, 1)}_{|[S_G]| \text{ veces}}$.

Ahora, para cada $H \leq G$ subgrupo, tenemos que $H \preceq G$, con lo que $\varphi_H(G/G) \neq 0$, de modo que $\varphi_H(G/G) = 1$. Por tanto, $\varphi(G/G) = (\varphi_H(G/G))_{H\in[S_G]} = \underbrace{(1, \dots, 1)}_{|[S_G]| \text{ veces}}$.

Por propiedades de la marca, se puede ver que φ preserva sumas y productos. Por lo tanto, φ es morfismo de semianillos.

Por la Observación 2.2.9, podemos extender φ de manera única a un morfismo de anillos $\widetilde{\varphi} : B(G) \longrightarrow \prod\limits_{H\in[S_G]} \mathbb{Z}$ tal que $\widetilde{\varphi}_{|B^+(G)} = \varphi$ y tal que $\widetilde{\varphi}([X]) = \varphi(X)$.

Veamos que $\widetilde{\varphi}$ es inyectivo.

Sea $a \in B(G) \setminus \{[\emptyset]\}$. Entonces $a = \sum\limits_{H\in[S_G]} a_H(G/H)$ con $a_H \in \mathbb{Z}$.

Como G es finito, se cumple la Condición de Cadena Ascendente, por lo que elegimos $K' \in [S_G]$ máximo respecto a este orden parcial tal que $a_{K'} \neq 0$.

Entonces $a = \sum_{H\in[S_G]} b_H(G/H) - \sum_{H\in[S_G]} c_H(G/H)$, donde $b_H = a_H$ si $a_H > 0$ y $c_H = -a_H$ si $a_H < 0$.

Ahora, como $\widetilde{\varphi}$ extiende a φ, tenemos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(a) &= \widetilde{\varphi}\left(\sum_{H\in[S_G]} a_H(G/H)\right) \\
&= \widetilde{\varphi}\left(\sum_{H\in[S_G]} b_H(G/H) - \sum_{H\in[S_G]} c_H(G/H)\right) \\
&= \sum_{H\in[S_G]} b_H\widetilde{\varphi}(G/H) - \sum_{H\in[S_G]} c_H\widetilde{\varphi}(G/H) \\
&= \sum_{H\in[S_G]} b_H\varphi(G/H) - \sum_{H\in[S_G]} c_H\varphi(G/H) \\
&= \sum_{H\in[S_G]} b_H(\varphi_K(G/H))_{K\in[S_G]} - \sum_{H\in[S_G]} c_H(\varphi_K(G/H))_{K\in[S_G]} \\
&= \sum_{H\in[S_G]} a_H(\varphi_K(G/H))_{K\in[S_G]}
\end{aligned}$$

Para que $\widetilde{\varphi}$ sea inyectiva basta ver que una de las entradas de $\widetilde{\varphi}(a)$ no es cero. Para esto, sabemos que $\varphi_{K'}(G/H) \neq 0$ si y sólo si $K' \preceq H$. Como elegimos K' máximo con respecto a este orden parcial tal que $a_{K'} \neq 0$, entonces la K'-ésima entrada de $\widetilde{\varphi}(a)$ es $\sum_{H\in[S_G]} a_H\varphi_{K'}(G/H) = a_{K'}\,|W(K')| \neq 0$.

Así, $\widetilde{\varphi}(a) \neq 0$. Por lo tanto, $\widetilde{\varphi}$ es morfismo inyectivo de anillos.

Ahora, como $\widetilde{\varphi}_{|B^+(G)} = \varphi$ y $\widetilde{\varphi}$ es inyectivo, entonces φ también lo es. Así, φ es morfismo inyectivo de semianillos. □

Corolario 2.2.11 (Teorema de Burnside, cf. [Bou00], Teorema 2.3.2). *Sean G un grupo finito y $[X],[Y] \in B(G)$. Entonces $[X] = [Y]$ si y sólo si $\varphi_H(X) = \varphi_H(Y)$ para todo $H \in [S_G]$.* [1]

Demostración. Se sigue de la buena definición y la inyectividad de φ del Lema 2.2.10. □

[1] En las notas de S. Bouc, [Bou00], se le da un mayor valor al Teorema de Burnside, por lo que en este sentido el Teorema 2.2.7 y en el Lema 2.2.10 son consecuencia de este resultado.

Observación 2.2.12. *1. A* $\prod_{H\in[S_G]} \mathbb{Z}$ *se le denota como* $\widetilde{B}(G)$ *y se le llama anillo fantasma de* G.

2. El conúcleo de $\widetilde{\varphi}$ *es isomorfo a* $\prod_{H\in[S_G]} \mathbb{Z}_{|W(H)|}$.

Lema 2.2.13 (cf. [Yos83]). *Sea* $e_D = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \widetilde{B}(G)$ *el elemento donde el 1 aparece en la* D*-ésima coordenada,* $D \in [S_G]$. *Entonces*

$$G/H = \sum_{D\leq H} \frac{|N_G(D)|}{|D|}\, e_D.$$

Demostración. Notemos que $G/H = \sum_{D\in[S_G]} \varphi_D(G/H)\, e_D$.

Por otro lado, por el Teorema 2.1.4 tenemos que $\varphi_D(G/H) = \frac{|N_G(D)|}{|H|}\, \beta(D, H)$.

Entonces

$$G/H = \sum_{D\in[S_G]} \frac{|N_G(D)|}{|H|}\, \beta(D, H)\, e_D.$$

Ahora, sean $D_1, D_2 \leq H$ tales que D_1 y D_2 son conjugados. Entonces $|N_G(D_1)| = |N_G(D_2)|$, por lo que $\frac{|N_G(D_1)|}{|H|} = \frac{|N_G(D_2)|}{|H|}$.

Así, $\frac{|N_G(D)|}{|H|}$ se repite $\beta(D, H)$ veces para cada $D \in [S_G]$ tal que $D \leq H$. Por lo tanto,

$$G/H = \sum_{D\leq H} \frac{|N_G(D)|}{|D|}\, e_D.$$

□

Capítulo 3

Copos finitos

Para más detalles sobre aspectos de copos finitos se puede consultar la sección 8 de [MH90].

3.1. Álgebras de incidencia

Definición 3.1.1. 1. Sea $(Y, \leq)$ un copo finito. Definimos el *conjunto de cadenas* de elementos de Y de longitud $n+1$ de la siguiente forma:

$$S_n(Y) = \left\{ \{y_0, \ldots, y_n\} \,\middle|\, y_i \in Y, y_0 \lneq y_1 \lneq \cdots \lneq y_n \right\}$$

2. (Característica de Euler) De igual forma, definimos la *característica de Euler–Poincaré* de Y, denotada por $\chi(Y)$, como

$$\chi(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left| S_n(Y) \right|$$

Ejemplo 3.1.1. 1. Si $Y = \{\bullet\}$, entonces $\chi(Y) = 1$.

2. Si Y es el siguiente copo:

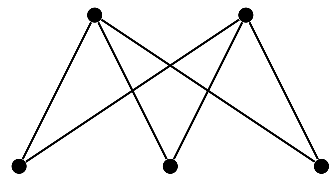
entonces $\chi(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n |S_n(Y)| = 2 - 1 = 1$.

3. Si Y es el siguiente copo:

entonces $\chi(Y) = 2$.

En general, si X y Y son dos copos disjuntos, entonces $\chi(X \cup Y) = \chi(X) + \chi(Y)$.

4. Si Y es el siguiente copo:



entonces $\chi(Y) = 5 - 6 = -1$.

Definición 3.1.2. Sea $(P, \leq)$ un copo. Decimos que P es *localmente finito* si todos sus intervalos son finitos, es decir, $\forall\, a, b \in P$ tales que $a < b$ se cumple que

$$|\{x \in P \mid a \leq x \text{ y } x \leq b\}| < \infty$$

Notación 3.1.1.

- $[x, y] = \{z \in P \mid x \leq z \leq y\}$,
- $(x, y] = \{z \in P \mid x \lneq z \leq y\}$,
- $[x, y) = \{z \in P \mid x \leq z \lneq y\}$,
- $(x, y) = \{z \in P \mid x \lneq z \lneq y\}$.

Definición 3.1.3. Sean $(P, \leq)$ un copo localmente finito y R un anillo conmutativo con unidad. Definimos el conjunto

$$a_R(P) = \left\{ f : P \times P \longrightarrow R \;\middle|\; f(x, y) = 0 \text{ si } x \not\leq y \right\}.$$

Observación 3.1.1. *$a_R(P)$ es un anillo con unidad con las siguientes operaciones:*

- *Suma: $(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$;*
- *Producto (convolución): $(f * g)(x, y) = \sum_{z \in P} f(x, z)g(z, y) = \sum_{z \in [x,y]} f(x, z)g(z, y)$;*
- *El neutro aditivo está dado por $\widehat{0}$;*
- *La unidad es $\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & si\ x = y \\ 0 & si\ x \neq y \end{cases}$, es decir, la delta de Kronecker.*

Teorema 3.1.2. *Sean P y R como en la definición anterior. Las unidades de $a_R(P)$ son*

$$U(a_R(P)) = \left\{ f \in a_R(P) \;\middle|\; f(x, x) \in U(R)\ \forall\, x \in P \right\}$$

Demostración. $\subseteq$) Sea $f \in U(a_R(P))$. Como f es una unidad, entonces existe $g \in a_R(P)$ tal que $f * g = g * f = \delta$.

Para cada $x \in P$, $(f * g)(x, x) = f(x, x)g(x, x)$, pues $z \in [x, x] = \{x\}$. Por otro lado, $(f * g)(x, x) = \delta(x, x) = 1$. Así, $f(x, x)g(x, x) = 1$. Como R es conmutativo, se tiene que $f(x, x) \in U(R)$.

$\supseteq$) Sea $f \in a_R(P)$ tal que $f(x, x) \in U(R)$ para toda $x \in P$. Entonces $(f(x, x))^{-1} \in R$.

Construiremos el inverso de f por recursión y lo denotaremos por g.

Notemos que, como $(f * g)(x, x) = f(x, x)g(x, x) = 1$, podemos definir

$$g(x, x) := (f(x, x))^{-1}$$

Luego, como $f \in a_R(P)$, se cumple que $f(x, y) = 0$ si $x \nleq y$ con $x, y \in P$. Así, si $x, y \in P$ son tales que $x \nleq y$, podemos definir $g(x, y) = 0$.

Sean $x, y \in P$ tales que $x \lneq y$. Supongamos que para toda $z \in [x, y)$ hemos construido $g(x, z)$. Tratemos de calcular $g(x, y)$:

$$(g * f)(x, y) = \sum_{z \in [x,y]} g(x, z)f(z, y) = \sum_{z \in [x,y)} g(x, z)f(z, y) + g(x, y)f(y, y).$$

Por otra parte, como $x \lneq y$, se cumple que $(g * f)(x, y) = \delta(x, y) = 0$. Por lo que el inverso izquierdo de f es

$$g(x, y) = -g(y, y) \sum_{z \in [x,y)} g(x, z)f(z, y).$$

Análogamente, el inverso derecho de f es

$$g(x, y) = -g(x, x) \sum_{z \in (x,y]} f(x, z)g(z, y).$$

Por lo tanto, $f \in U(a_R(P))$. □

Teorema 3.1.3 (Inversión de Möbius, cf. [GCR64])**.** *Sean $(P, \leq)$ un copo localmente finito, R un anillo conmutativo con unidad, $a, b : P \longrightarrow R$ funciones y $f \in a_R(P)$ unidad con inverso g. Entonces $a(x) = \sum_{y \in P} f(y, x)b(y)$ si y sólo si $b(x) = \sum_{y \in P} g(y, x)a(y)$.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Notemos que

$$\begin{aligned}\sum_{y\in P} g(y,x)a(y) &= \sum_{y\in P} g(y,x)\left(\sum_{z\in P} f(z,y)b(z)\right)\\ &= \sum_{z\in P}\left(\sum_{y\in P} f(z,y)g(y,x)\right) b(z)\\ &= \sum_{z\in P}\left((f*g)(z,x)\right) b(z)\\ &= \sum_{z\in P}\delta(z,x)\, b(z)\\ &= b(x)\end{aligned}$$

$\Longleftarrow$) La demostración es simétrica. □

Un elemento particular de $a_R(P)$ es el siguiente:

Definición 3.1.4. Consideremos la función $\zeta \in a_R(P)$ definida como sigue:

$$\zeta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ 0 & \text{si } x \not\leq y \end{cases}$$

Llamamos a ζ la *función Zeta*. Observemos que, por el Teorema 3.1.2, $\zeta \in U(a_R(P))$.

Así, definimos y denotamos a la *función de Möbius* como $\mu := \zeta^{-1}$.

Lema 3.1.4 (cf. [GCR64]). *Sea $(P,\leq)$ un copo localmente finito.*

1. *Para toda $a \in P$ se cumple que $\mu(a,a) = 1$;*
2. *Si $a,b \in P$ son tales que $a \neq b$, se tiene que $\sum_{z\in[a,b]} \mu(a,z) = 0$.*

Demostración. 1. Sea $a \in P$. Notemos que $(\mu * \zeta)(a,a) = \delta(a,a) = 1$.

Por otro lado, $(\mu * \zeta)(a,a) = \sum_{z\in[a,a]} \mu(a,z)\zeta(z,a) = \mu(a,a)\zeta(a,a) = \mu(a,a)$, pues como $a \leq a$, entonces $\zeta(a,a) = 1$.

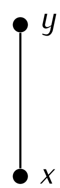
Así, $\mu(a,a) = 1$.

2. Sean $a, b \in P$ tales que $a \neq b$. Entonces $(\mu * \zeta)(a,b) = \delta(a,b) = 0$.

   Por otro lado, $(\mu * \zeta)(a,b) = \sum_{z\in[a,b]} \mu(a,z)\zeta(z,b) = \sum_{z\in[a,b]} \mu(a,z)$, pues como $z \leq b$, entonces $\zeta(z,b) = 1$.

$\square$

Ejemplo 3.1.2. 1. Sea P el siguiente copo:



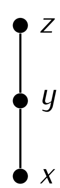
Calculemos $\mu(x,y)$.

Notemos que, por un lado, $(\mu * \zeta)(x,y) = \delta(x,y) = 0$.

Por otro lado, $(\mu * \zeta)(x,y) = \sum_{z\in[x,y]} \mu(x,z)\zeta(z,y) = \mu(x,x)\zeta(x,y) + \mu(x,y)\zeta(y,y) = 1 \cdot 1 + \mu(x,y) \cdot 1 = 1 + \mu(x,y)$.

De ahí que $\mu(x,y) = -1$.

2. Sea P el siguiente copo:



Calculemos $\mu(x,z)$.

Notemos que, por un lado, $(\mu * \zeta)(x,z) = \delta(x,z) = 0$.

Por otro lado, $(\mu * \zeta)(x,z) = \sum_{t\in[x,z]} \mu(x,t)\zeta(t,z) = \mu(x,x) + \mu(x,y) + \mu(x,z)$.

Luego, $\mu(x,z) = -\mu(x,x) - \mu(x,y) = -1 - (-1)$ por 1. de este ejemplo.

Así, $\mu(x,z) = 0$.

Teorema 3.1.5 (cf. [Yos83]). *Sea $(P, \leq)$ un copo finito. Entonces*

$$\chi(P) = \sum_{x,y\in P} \mu(x,y).$$

Demostración. (Por inducción sobre $|P|$)

i) Si $|P| = 1$, es decir, si $P = \{x\}$, entonces $\chi(P) = 1 = \mu(x,x) = \sum_{x,y\in P} \mu(x,y)$, por 1. del Lema 3.1.4.

ii) Supongamos que se cumple para $|P| > 1$.

Definimos $P_x = \{y \in P \mid x < y\} \subset P$ un subcopo de P. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{x,y\in P} \mu(x,y) &= \sum_{\substack{x,y\in P\\ x=y}} \mu(x,y) + \sum_{\substack{x,y\in P\\ x<y}} \mu(x,y)\\
&= |S_0(P)| + \sum_{\substack{x,y\in P\\ x<y}} \mu(x,y)\\
&= |S_0(P)| + \sum_{\substack{x\in P\\ \text{mínimo}}} \left(\sum_{y\in(x,z]} \mu(x,y) \right)\\
&= |S_0(P)| + \sum_{\substack{x\in P\\ \text{mínimo}}} \chi(P_x)\\
&= |S_0(P)| + \sum_{\substack{x\in P\\ \text{mínimo}}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m |S_m(P_x)|\\
&= |S_0(P)| + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n |S_n(P)|\\
&= \chi(P).
\end{aligned}$$

□

Lema 3.1.6 (Fórmula de Gluck, cf. [Glu81], [Yos83]). *Sea* $B_{\mathbb{Q}}(G) = \bigoplus_{H\in[S_G]} \mathbb{Q}(G/H)$. *Entonces* $\{e_H \mid H \in [S_G]\}$ *es el conjunto de idempotentes de* $B_{\mathbb{Q}}(G)$*, donde*

$$e_H = \frac{1}{|N_G(H)|} \sum_{D\leq H} |D|\, \mu(D,H)\, G/D.$$

Demostración. Sea $(S(G), \subseteq)$ el copo de todos los subgrupos de G.

Sean $f, g \in a_{B_{\mathbb{Q}}(G)}(S(G))$ tales que $\forall\, H \in S(G)$, $f(H) = |H|\, G/H$ y $g(H) = |N_G(H)|\; e_H$.

Entonces
$$\begin{aligned} f(H) &= |H|\, G/H \\ &= \sum_{D\leq H} |N_G(D)|\ e_D \\ &= \sum_{D\leq H} g(D) \\ &= \sum_{D\leq H} \zeta(D,H)\, g(D) \\ &= \sum_{D\in S(G)} \zeta(D,H)\, g(D). \end{aligned}$$

Por el Teorema de Inversión de Möbius (Teorema 3.1.3), $g(H) = \sum_{D\in S(G)} \mu(D,H)\, f(D)$.

Luego,
$$|N_G(H)|\ e_H = \sum_{D\leq H} \mu(D,H)\, |D|\, G/D$$

Así,
$$e_H = \frac{1}{|N_G(H)|} \sum_{D\leq H} \mu(D,H)\, |D|\, G/D$$

□

3.2. Homología de copos

En esta sección se considerarán únicamente copos finitos. Para más detalles sobre homología se puede consultar la sección 10.4 de [Rot02].

Notación 3.2.1. Sean $(X,\leq_X)$, $(Y,\leq_Y)$ dos copos y sean $f,g : (X,\leq_X) \longrightarrow (Y,\leq_Y)$ morfismos de orden. Denotamos por $f\leq g$ si $f(x)\leq_Y g(x)$ para todo $x\in X$.

Definición 3.2.1. Si $f,g : X \longrightarrow Y$ son morfismos de orden, decimos que f y g son *comparables* si $f\leq g$ o $g\leq f$.

Definición 3.2.2 (cf. [Rot02], p. 815)**.** Sea R un anillo. Un *complejo de cadena* (C_*,∂_*) es una sucesión de la forma

$$C_* = \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

donde cada C_n es un R-módulo izquierdo; los $\partial_n : C_n \longrightarrow C_{n-1}$ son morfismos de R-módulos, llamados *diferenciales* y son tales que $\operatorname{Im}\partial_{n+1} \subseteq \operatorname{Ker}\partial_n$ para cada $n\in\mathbb{Z}$.

En lo sucesivo consideraremos X un copo y $R = \mathbb{Z}$. Entonces

$$C_n(X) = \bigoplus_{\{x_0,\dots,x_n\}\in S_n(X)} \mathbb{Z}\ (x_0,\dots,x_n)$$

es el $\mathbb{Z}$-módulo libre con base los elementos de $S_n(X)$.

El morfismo $d_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$ está dado por

$$d_n(x_0,\dots,x_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i\,(x_0,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_n)$$

donde $(x_0,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_n)$ denota la cadena $(x_0,\dots,x_n)\setminus\{x_i\}$.

Observación 3.2.1. *1. Para $n<0$, $C_n(X)=0$, pues $C_n(X)$ estará generado por el vacío.*

2. Para $n\leq 0$, $d_n=0$, pues la imagen de d_n será $C_n(X)=0$ (por el inciso anterior).

Ejemplo 3.2.1. Consideremos X un copo y la siguiente sucesión:

$$\cdots \longrightarrow C_1(X) \xrightarrow{d_1} C_0(X) \xrightarrow{d_0} C_{-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

Sea $(x_0,x_1)\in C_1(X)$ un elemento generador. Entonces

$$d_1\,(x_0,x_1) = (-1)^0\,(\widehat{x_0},x_1) + (-1)\,(x_0,\widehat{x_1}) = x_1 - x_0$$

Lema 3.2.2. *Sea $(X,\leq)$ un copo. Entonces $d_n\circ d_{n+1}=0$ para todo $n\in\mathbb{Z}$.*

Demostración. Sean $(X,\leq)$ un copo y $n\in\mathbb{Z}$. Si $n\leq 0$ tenemos que $d_n\circ d_{n+1}=0$ pues al menos $d_n=0$ (por 2. de la Observación 3.2.1).

Supongamos que $n\geq 1$. Sea $(x_0,\dots,x_{n+1})\in C_{n+1}(X)$ un elemento generador. Entonces

$$\begin{aligned}
(d_n\circ d_{n+1})\,(x_0,\dots,x_{n+1}) &= d_n\left(\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\,(x_0,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_{n+1})\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\left(x_0,\dots,\widehat{x_j},\dots,\widehat{x_i},\dots,x_{n+1}\right)\\
&\quad+\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sum_{j=i+1}^{n+1}(-1)^{j-1}\left(x_0,\dots,\widehat{x_i},\dots,\widehat{x_j},\dots,x_{n+1}\right)
\end{aligned}$$

$$=\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i+j}\left(x_0,\dots,\widehat{x_j},\dots,\widehat{x_i},\dots,x_{n+1}\right)+\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i+1}^{n+1}(-1)^{i+j-1}\left(x_0,\dots,\widehat{x_i},\dots,\widehat{x_j},\dots,x_{n+1}\right)$$

Veamos que para cada término de la primera suma doble hay un correspondiente término en la segunda suma doble con signo contrario.

Sea $(-1)^{i+j}\left(x_0,\ldots,\widehat{x_j},\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_{n+1}\right)$ un término de la primera suma doble y sea $(-1)^{k+l-1}\left(x_0,\ldots,\widehat{x_k},\ldots,\widehat{x_l},\ldots,x_{n+1}\right)$ un término de la segunda suma doble.

Sean $j=k$ e $i=l$. Notemos que los signos de cada término son $(-1)^{l+k}$ y $(-1)^{l+k-1}$ respectivamente, por lo que tienen signos distintos. Por lo tanto, los términos se eliminan.

Así, $d_n \circ d_{n+1} = 0$. □

Observación 3.2.3. *Sea $(X,\leq)$ un copo y sea*

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}(X) \xrightarrow{d_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

una sucesión. Del Lema 3.2.2 podemos notar que $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $d_n \circ d_{n+1} = 0$ si y sólo si $\operatorname{Im} d_{n+1} \subseteq \operatorname{Ker} d_n$.

De esta observación se desprende la siguiente definición:

Definición 3.2.3 (cf. [Rot02], p. 818)**.** Sea $(X,\leq)$ un copo. Definimos y denotamos para toda $n \in \mathbb{Z}$ la *n-ésima homología* de X como

$$H_n(X) = \frac{\operatorname{Ker} \partial_n}{\operatorname{Im} \partial_{n+1}}$$

Ejemplo 3.2.2. Sea $X = \{\bullet\}$. Consideremos el siguiente complejo para X:

$$\cdots \longrightarrow C_1(X) = 0 \xrightarrow{d_1=0} C_0(X) = \mathbb{Z} \xrightarrow{d_0=0} C_{-1}(X) = 0 \longrightarrow \cdots$$

Entonces

$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Definición 3.2.4 (cf. [Rot02], p. 817)**.** Sea R un anillo. Una *aplicación de cadenas* de R-módulos izquierdos del complejo de cadenas (C_*,∂_*) en el complejo de cadenas (C'_*,∂'_*) es una sucesión de morfismos de R-módulos izquierdos $f_n : C_n \longrightarrow C'_n$ tal que para toda $n \in \mathbb{Z}$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] & C'_n \arrow[r, "\partial'_n"] & C'_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

En lo sucesivo, consideraremos X y Y dos copos, $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo de orden y $R = \mathbb{Z}$. Entonces $f_n = C_n(f) : C_n(X) \longrightarrow C_n(Y)$ está definida como sigue:

$$C_n(f)(x_0, \ldots, x_n) = \begin{cases} (f(x_0), \ldots, f(x_n)) & \text{si } f(x_{i-1}) < f(x_i)\ \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \\ 0 & \text{si } \exists\, i \in \{1, \ldots, n\} \text{ tal que } f(x_{i-1}) = f(x_i) \end{cases}$$

Lema 3.2.4. *Sean X, Y, Z copos. Entonces:*

1. *El siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} C_n(X) \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "C_n(f)"'] & C_{n-1}(X) \arrow[d, "C_{n-1}(f)"] \\ C_n(Y) \arrow[r, "d'_n"'] & C_{n-1}(Y) \end{tikzcd}$$

   es decir, $d'_n \circ C_n(f) = C_{n-1}(f) \circ d_n$, donde d'_n es el diferencial correspondiente al complejo de cadena relativo al copo Y.

2. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ y $l : Y \longrightarrow Z$ morfismos de orden. Para toda $n \in \mathbb{Z}$, $C_n(l \circ f) = C_n(l) \circ C_n(f)$.*

3. *Sea $1_X : X \longrightarrow X$ el morfismo de orden identidad. Para toda $n \in \mathbb{Z}$, $C_n(1_X) = 1_{C_n(X)}$.*

4. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo de orden. Entonces existe*

$$H_n(f) : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$$

   tal que $\forall\, n \in \mathbb{Z}$ se tiene que $H_n(f)(a + \operatorname{Im} d_{n+1}) = C_n(f)(a) + \operatorname{Im} d'_{n+1}$.

Demostración. 1. Sea $(x_0, \ldots, x_n) \in C_n(X)$ un elemento generador. Entonces

$$\begin{aligned} (C_{n-1}(f) \circ d_n)(x_0, \ldots, x_n) &= C_{n-1}(f) \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i (x_0, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_{n-1}(f)(x_0, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(f(x_0), \ldots, \widehat{f(x_i)}, \ldots, f(x_n) \right) & \text{si } f(x_{i-1}) < f(x_i)\ \forall\, i \\ 0 & \text{si } f(x_{i-1}) = f(x_i) \text{ p. a. } i \end{cases}$$

Por otra parte,

$$\left(d'_n \circ C_n(f) \right)(x_0, \ldots, x_n) = \begin{cases} d'_n\,(f(x_0), \ldots, f(x_n)) & \text{si } f(x_{i-1}) < f(x_i)\ \forall\, i \\ 0 & \text{si } f(x_{i-1}) = f(x_i) \text{ p. a. } i \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \left(f(x_0), \ldots, \widehat{f(x_i)}, \ldots, f(x_n) \right) & \text{si } f(x_{i-1}) < f(x_i) \ \forall\, i \\ 0 & \text{si } f(x_{i-1}) = f(x_i) \text{ p. a. } i \end{cases}$$

$$= \left(C_{n-1}(f) \circ d_n\right)(x_0, \ldots, x_n)$$

2. Sea $(x_0, \ldots, x_n) \in C_n(X)$. Entonces

$$\left(C_n(l) \circ C_n(f)\right)(x_0, \ldots, x_n) = \begin{cases} C_n(l)\left(f(x_0), \ldots, f(x_n)\right) & \text{si } f(x_{i-1}) < f(x_i) \ \forall\, i \\ C_n(l)(0) = 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (l(f(x_0)), \ldots, l(f(x_n))) & \text{si } l(f(x_{i-1})) < l(f(x_i)) \ \forall\, i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ((l \circ f)(x_0), \ldots, (l \circ f)(x_n)) & \text{si } (l \circ f)(x_{i-1}) < (l \circ f)(x_i) \ \forall\, i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$= C_n(l \circ f)\,(x_0, \ldots, x_n)$$

   Por lo tanto, $C_n(l \circ f) = C_n(l) \circ C_n(f)$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.

3. Sea $(x_0, \ldots, x_n) \in C_n(X)$. Entonces

$$\begin{aligned} \left(C_n(1_X)\right)(x_0, \ldots, x_n) &= \begin{cases} (1_X(x_0), \ldots, 1_X(x_n)) & \text{si } 1_X(x_{i-1}) < 1_X(x_i) \ \forall\, i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ &= (x_0, \ldots, x_n) \\ &= 1_{C_n(X)}\,(x_0, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

   Por lo tanto, $C_n(1_X) = 1_{C_n(X)}$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.

4. Veamos que $H_n(f)$ está bien definido para cada n.

   Sean $a + \operatorname{Im} d_{n+1}, a' + \operatorname{Im} d_{n+1} \in H_n(X)$ tales que $a + \operatorname{Im} d_{n+1} = a' + \operatorname{Im} d_{n+1}$. Entonces $a - a' \in \operatorname{Im} d_{n+1}$, es decir, existe $b \in C_{n+1}(X)$ tal que $a - a' = d_{n+1}(b)$.

   Luego, $C_n(f)(a - a') = C_n(f)(d_{n+1}(b)) = d'_{n+1}\left(C_{n+1}(f)(b)\right) \in \operatorname{Im} d'_{n+1}$. Por otro lado, $C_n(f)(a - a') = C_n(f)(a) - C_n(f)(a')$.

   Así, $C_n(f)(a) + \operatorname{Im} d'_{n+1} = C_n(f)(a') + \operatorname{Im} d'_{n+1}$.

   Es decir, $H_n(f)(a + \operatorname{Im} d_{n+1}) = H_n(f)(a' + \operatorname{Im} d_{n+1})$.

□

Observación 3.2.5. *Sean X, Y, Z copos.*

1. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ y $l : Y \longrightarrow Z$ morfismos de orden. Entonces $H_n(l \circ f) = H_n(l) \circ H_n(f)$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.*

2. *Sea $1_X : X \longrightarrow X$ el morfismo identidad. Entonces $H_n(1_X) = 1_{H_n(X)}$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. 1. Sea $a + \operatorname{Im} d_{n+1} \in H_n(X)$. Entonces

$$\begin{aligned} H_n(l \circ f)(a + \operatorname{Im} d_{n+1}) &= C_n(l \circ f)(a) + \operatorname{Im} d''_{n+1} \\ &= (C_n(l) \circ C_n(f))\,(a) + \operatorname{Im} d''_{n+1} \\ &= H_n(l)\left(C_n(f)(a) + \operatorname{Im} d'_{n+1}\right) \\ &= H_n(l)\,(H_n(f)(a + \operatorname{Im} d_{n+1})) \\ &= (H_n(l) \circ H_n(f))\,(a + \operatorname{Im} d_{n+1}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $H_n(l \circ f) = H_n(l) \circ H_n(f)$.

2. Sea $a + \operatorname{Im} d_{n+1} \in H_n(X)$. Entonces $H_n(1_X)(a + \operatorname{Im} d_{n+1}) = C_n(1_X)(a) + \operatorname{Im} d_{n+1} = 1_{C_n(X)}(a) + \operatorname{Im} d_{n+1} = a + \operatorname{Im} d_{n+1} = 1_{H_n(X)}\,(a + \operatorname{Im} d_{n+1})$.

   Por lo tanto, $H_n(1_X) = 1_{H_n(X)}$.

□

Definición 3.2.5 (cf. [Rot02], p. 820). Sean X, Y dos copos y $f, l : X \longrightarrow Y$ morfismos de orden. Decimos que f es *homotópico* a l si para cada $n \in \mathbb{Z}$ existe $\delta_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(Y)$ morfismo de $\mathbb{Z}$-módulos tal que $d'_{n+1} \circ \delta_n + \delta_{n-1} \circ d_n = C_n(f) - C_n(l)$.

Notación 3.2.2. Si f y l son homotópicos, lo denotamos por $f \sim l$.

Observación 3.2.6. *Ser homotópico es una relación de equivalencia.*

Demostración. Sean X y Y copos y $f, l, t : X \longrightarrow Y$ morfismos de orden.

- (Reflexividad) $f \sim f$ pues para $\delta_n = 0$ $\forall\, n \in \mathbb{Z}$ se tiene que $d'_{n+1} \circ \delta_n + \delta_{n-1} \circ d_n = 0 = C_n(f) - C_n(f)$.
- (Simetría) Supongamos que $f \sim l$. Entonces existe $\delta_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(Y)$ $\forall\, n \in \mathbb{Z}$ tal que $d'_{n+1} \circ \delta_n + \delta_{n-1} \circ d_n = C_n(f) - C_n(l)$.

  Luego, $C_n(l) - C_n(f) = -\,(C_n(f) - C_n(l)) = -\left(d'_{n+1} \circ \delta_n + \delta_{n-1} \circ d_n\right) = d'_{n+1} \circ (-\delta_n) + (-\delta_{n-1}) \circ d_n$, es decir, $C_n(l) - C_n(f) = d'_{n+1} \circ (-\delta_n) + (-\delta_{n-1}) \circ d_n$. Por lo tanto, $l \sim f$.
- (Transitividad) Supongamos que $f \sim l$ y $l \sim t$. Entonces existen $\delta_n, \delta'_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(Y)$ tales que $d'_{n+1} \circ \delta_n + \delta_{n-1} \circ d_n = C_n(f) - C_n(l)$ y $d'_{n+1} \circ \delta'_n + \delta'_{n-1} \circ d_n = C_n(l) - C_n(t)$.

  Luego, $(d'_{n+1} \circ \delta_n + \delta_{n-1} \circ d_n) + (d'_{n+1} \circ \delta'_n + \delta'_{n-1} \circ d_n) = d'_{n+1} \circ (\delta_n + \delta'_n) + (\delta_{n-1} + \delta'_{n-1}) \circ d_n = (C_n(f) - C_n(l)) + (C_n(l) - C_n(t)) = C_n(f) - C_n(t)$. Por lo tanto, $f \sim t$.

□

Proposición 3.2.7 (cf. [Rot02], Proposición 10.39). *Sean $f, l : X \longrightarrow Y$ morfismos de orden tales que $f \sim l$. Entonces $H_n(f) = H_n(l) : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$.*

Demostración. Sea $a + \text{Im } d_{n+1} \in H_n(X)$. Notemos que $H_n(f)(a + \text{Im } d_{n+1}) = C_n(f)(a) + \text{Im } d'_{n+1}$ y $H_n(l)(a + \text{Im } d_{n+1}) = C_n(l)(a) + \text{Im } d'_{n+1}$.

Para probar que $H_n(f)(a + \text{Im } d_{n+1}) = H_n(l)(a + \text{Im } d_{n+1})$, tenemos que ver que $C_n(f)(a) - C_n(l)(a) \in \text{Im } d'_{n+1}$.

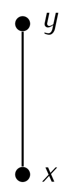
Como $f \sim l$, $C_n(f)(a) - C_n(l)(a) = \left(d'_{n+1} \circ \delta_n\right)(a) + (\delta_{n-1} \circ d_n)(a) = d'_{n+1}(\delta_n(a)) + 0 = d'_{n+1}(\delta_n(a)) \in \text{Im } d'_{n+1}$.

Por lo tanto, $H_n(f) = H_n(l)$ $\forall\, a + \text{Im } d_{n+1} \in H_n(X)$. □

Definición 3.2.6. Sean X, Y copos. Decimos que X y Y son *homotópicos* si existen $f : X \longrightarrow Y$ y $l : Y \longrightarrow X$ morfismos de orden tales que $l \circ f \sim 1_X$ y $f \circ l \sim 1_Y$. Lo denotamos por $X \sim Y$.

Definición 3.2.7. Sea X un copo. X es *contraíble* si X es homotópico a un punto, es decir, $X \sim \bullet$.

Ejemplo 3.2.3. Sea X el siguiente copo:



Consideremos la siguiente sucesión:

$$0 \xrightarrow{d_2} C_1(X) \xrightarrow{d_1} C_0(X) \xrightarrow{d_0} 0$$

donde $d_1 : C_1(X) \longrightarrow C_0(X)$ es tal que $d_1(x, y) = y - x$.

Notemos que

$$C_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}x \oplus \mathbb{Z}y & \text{si } n = 0 \\ \mathbb{Z}(x, y) & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \text{ o } n < 0 \end{cases}$$

De ahí que $H_0(X) = \dfrac{\text{Ker } d_0}{\text{Im } d_1} = \dfrac{\mathbb{Z}x \oplus \mathbb{Z}y}{\mathbb{Z}(y - x)}$.

Sea $\varphi : \mathbb{Z}x \oplus \mathbb{Z}y \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $\varphi(ax+by) = a+b$, el cual es un epimorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos (por definición y por propiedades de la suma directa).

Entonces $\text{Ker } \varphi = \{ax + by \in \mathbb{Z}x \oplus \mathbb{Z}y \mid a + b = 0\} = \{ax + by \in \mathbb{Z}x \oplus \mathbb{Z}y \mid a = -b\}$ $= \{-bx + by \mid b \in \mathbb{Z}\} = \{b(y - x) \mid b \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}(y - x)$.

Luego, por el Primer Teorema de Isomorfismos, tenemos que $\dfrac{\mathbb{Z}x \oplus \mathbb{Z}y}{\mathbb{Z}(y-x)} \cong \mathbb{Z}$, es decir, $H_0(X)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Ahora, sea $\sum_{i=1}^{l} m_i(x_i, y_i) \in \text{Ker } d_1$. Entonces $d_1\left(\sum_{i=1}^{l} m_i(x_i, y_i)\right) = \sum_{i=1}^{l} m_i(y_i - x_i) = 0 \in C_0(X)$. De ahí que $m_i = 0$, por lo que $\sum_{i=1}^{l} m_i(x_i, y_i) = 0$. Luego, $\text{Ker } d_1 = 0$.

Con esto podemos ver que $H_1(X) = \text{Ker } d_1 = 0$. Igualmente notemos que para cualquier otra $n \in \mathbb{Z}$, $H_n(X) = 0$.

Veamos que X es contraíble, es decir, que existen $f : X \longrightarrow \bullet$ y $l : \bullet \longrightarrow X$ morfismos de orden tales que $f \circ l \sim 1_\bullet$ y $l \circ f \sim 1_X$.

Sean $f : X \longrightarrow \bullet$ y $l : \bullet \longrightarrow X$ tales que $f(x) = \bullet = f(y)$ y $l(\bullet) = x$. Veamos que $f \circ l \sim 1_\bullet$ y $l \circ f \sim 1_X$.

Primero notemos que $(f \circ l)(\bullet) = f(l(\bullet)) = f(x) = \bullet = 1_\bullet(\bullet)$, y como $1_\bullet \sim 1_\bullet$, entonces $f \circ l \sim 1_\bullet$.

Ahora, llamemos $t = l \circ f$. Entonces $t(x) = x = t(y)$ y veamos que $t \sim 1_X$. Notemos que $t \leq 1_X$, pues $t(x) = x \leq x = 1_X(x)$ y $t(y) = x \leq y = 1_X(y)$.

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "d_2"] & C_1(X) \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "C_1(1_X)"', "C_1(t)"] \arrow[dl, "\delta_1"'] & C_0(X) \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "C_0(1_X)"', "C_0(t)"] \arrow[dl, "\delta_0"'] & 0 \arrow[dl, "\delta_{-1}"] \\
0 \arrow[r, "d_2"] & C_1(X) \arrow[r, "d_1"] & C_0(X) \arrow[r, "d_0"] & 0
\end{tikzcd}$$

Veamos que $t \sim 1_X$. Para esto tenemos que exhibir $\delta_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(X)$ tal que $C_n(1_X) - C_n(t) = d_{n+1} \circ \delta_n + \delta_{n-1} \circ d_n$.

Observemos que para $n \neq 0$, $\delta_n = 0$. Así que sólo basta definir $\delta_0 : C_0(X) \longrightarrow C_1(X)$ tal que $\delta_0(x) = 0$ y $\delta_0(y) = (x, y)$.

Sea (x, y) el generador de $C_1(X)$. Entonces $(C_1(1_X) - C_1(t))\,(x, y) = (x, y) - (t(x), t(y)) = (x, y) - 0 = (x, y)$.

Por otro lado, notemos que $d_2 \circ \delta_1 + \delta_0 \circ d_1 = \delta_0 \circ d_1$. Entonces $(\delta_0 \circ d_1)(x, y) = \delta_0\,(d_1(x, y)) = \delta_0(y - x) = \delta_0(y) - \delta_0(x) = (x, y) - 0 = (x, y) = (C_1(1_X) - C_1(t))\,(x, y)$.

Ahora veamos que también se cumple que $C_0(1_X) - C_0(t) = d_1 \circ \delta_0 + \delta_{-1} \circ d_0$.

Sean x y y los generadores de $C_0(X)$. Observemos que $(C_0(1_X) - C_0(t))(x) = x - t(x) = x - x = 0$ y $(C_0(1_X) - C_0(t))(y) = y - t(y) = y - x$.

Luego, notemos que $d_1 \circ \delta_0 + \delta_{-1} \circ d_0 = d_1 \circ \delta_0$. Entonces $(d_1 \circ \delta_0)(x) = d_1(\delta_0(x)) = d_1(0) = 0 = (C_0(1_X) - C_0(t))(x)$ y $(d_1 \circ \delta_0)(y) = d_1(\delta_0(y)) = d_1(x, y) = y - x = (C_0(1_X) - C_0(t))(y)$.

Así, $t \sim 1_X$, es decir, $l \circ f \sim 1_X$. Por lo tanto, X es contraíble.

Lema 3.2.8. *Sean X, Y copos tales que son homotópicos. Entonces para toda $n \in \mathbb{Z}$ se cumple que $H_n(X) \cong H_n(Y)$.*

Demostración. Como X y Y son homotópicos, entonces existen $f : X \longrightarrow Y$ y $l : Y \longrightarrow X$ tales que $l \circ f \sim 1_X$ y $f \circ l \sim 1_Y$.

Por la Proposición 3.2.7 tenemos que $H_n(l \circ f) = H_n(1_X)$; por la Observación 3.2.5, $H_n(l \circ f) = H_n(l) \circ H_n(f)$ y $H_n(1_X) = 1_{H_n(X)}$. Así, $H_n(l) \circ H_n(f) = 1_{H_n(X)}$. Similarmente, $H_n(f) \circ H_n(l) = 1_{H_n(Y)}$.

Así, existen $H_n(f) : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$ y $H_n(l) : H_n(Y) \longrightarrow H_n(X)$ tales que $H_n(l) \circ H_n(f) = 1_{H_n(X)}$ y $H_n(f) \circ H_n(l) = 1_{H_n(Y)}$.

Por lo tanto, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$ se tiene que $H_n(X) \cong H_n(Y)$. □

Corolario 3.2.9. *Si X es un copo contraíble, entonces* $H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & si\ n = 0 \\ 0 & si\ n \neq 0 \end{cases}$.

Teorema 3.2.10 (cf. [Bou00], Lema 4.1.2)**.** *Sean $f, l : X \longrightarrow Y$ morfismos de orden tales que son comparables. Entonces f y l son homotópicos.*

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1}(X) \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "C_{n+1}(l)"', "C_{n+1}(f)"] & C_n(X) \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "C_n(l)"', "C_n(f)"] \arrow[dl, "\delta_n"'] & C_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "C_{n-1}(l)"', "C_{n-1}(f)"] \arrow[dl, "\delta_{n-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1}(Y) \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & C_n(Y) \arrow[r, "d'_n"'] & C_{n-1}(Y) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Como f y l son comparables supongamos, sin pérdida de generalidad, que $f \leq l$.

Veamos que $f \sim l$, es decir, que existen $\delta_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(Y)$ tal que $d'_{n+1} \circ \delta_n + \delta_{n-1} \circ d_n = C_n(l) - C_n(f)$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Consideremos entonces $\delta_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(Y)$ definida para $n \in \mathbb{Z}$ por $\delta_n(x_0, \dots, x_n) =$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(f(x_0), \dots, f(x_i), l(x_i), \dots, l(x_n)\right) & \text{si } f(x_0) < \cdots < f(x_i) < l(x_i) < \cdots < l(x_n)\ \forall\, i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Verifiquemos que f y l son homotópicos, es decir, que $d'_{n+1} \circ \delta_n + \delta_{n-1} \circ d_n = C_n(l) - C_n(f)$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Sea $(x_0, \dots, x_n)$ un elemento generador de $C_n(X)$. Tenemos que $\left(C_n(l) - C_n(f)\right)(x_0, \dots, x_n) = (l(x_0), \dots, l(x_n)) - (f(x_0), \dots, f(x_n))$.

Ahora desarrollemos $\left(d'_{n+1} \circ \delta_n + \delta_{n-1} \circ d_n\right)(x_0, \dots, x_n)$:

$$\left(d'_{n+1} \circ \delta_n + \delta_{n-1} \circ d_n\right)(x_0, \dots, x_n) = \left(d'_{n+1} \circ \delta_n\right)(x_0, \dots, x_n) + \left(\delta_{n-1} \circ d_n\right)(x_0, \dots, x_n)$$

$$= d'_{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(f(x_0), \dots, f(x_i), l(x_i), \dots, l(x_n)\right)\right) + \delta_{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(x_0, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n\right)\right)$$

$$= d'_{n+1}\left(\left(f(x_0), l(x_0), \dots, l(x_n)\right) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \left(f(x_0), \dots, f(x_i), l(x_i), \dots, l(x_n)\right)\right)$$
$$+\delta_{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(x_0, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n\right)\right)$$

$$= d'_{n+1}\left(f(x_0), l(x_0), \dots, l(x_n)\right) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i d'_{n+1}\left(f(x_0), \dots, f(x_i), l(x_i), \dots, l(x_n)\right)$$
$$+ \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \delta_{n-1}\left(x_0, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n\right)$$

$$= d'_{n+1}\left(f(x_0), l(x_0), \dots, l(x_n)\right) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i d'_{n+1}\left(f(x_0), \dots, f(x_i), l(x_i), \dots, l(x_n)\right)$$
$$+ \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \delta_{n-1}\left(x_0, \dots, \widehat{x_{i-1}}, \dots, x_n\right)$$

Desarrollemos cada sumando:

$$= (\widehat{f(x_0)}, l(x_0), \dots, l(x_n)) \tag{3.1}$$

$$+\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j+1}\left(f(x_0), l(x_0), \ldots, \widehat{l(x_j)}, \ldots, l(x_n)\right) \tag{3.2}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{j}\left(f(x_0), \ldots, \widehat{f(x_j)}, \ldots, f(x_i), l(x_i), \ldots, l(x_n)\right) \tag{3.3}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}\sum_{j=i+1}^{n+1}(-1)^{j}\left(f(x_0), \ldots, f(x_i), l(x_i), \ldots, \widehat{l(x_{j-1})}, \ldots, l(x_n)\right) \tag{3.4}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\sum_{j=i}^{n}(-1)^{j}\left(f(x_0), \ldots, \widehat{x_{i-1}}, \ldots, f(x_j), l(x_j), \ldots, l(x_n)\right) \tag{3.5}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{j}\left(f(x_0), \ldots, f(x_j), l(x_j), \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, l(x_n)\right) \tag{3.6}$$

Notemos que el término (3.1) es igual a $(l(x_0), \ldots, l(x_n)) = C_n(l)(x_0, \ldots, x_n)$. Además, si tomamos $i = n, j = n+1$ en el término (3.4), tenemos que es igual a

$$(-1)^{n+n+1}\left(f(x_0), \ldots, f(x_n), \widehat{l(x_n)}\right) = -\left(f(x_0), \ldots, f(x_n)\right) = -C_n(f)(x_0, \ldots, x_n)$$

Ahora veamos cómo se eliminan los demás términos:

- Si tomamos $j = 0$ en el término (3.2) y en el término (3.3) tomamos $i = 1, j = 1$, podemos notar que se trata de término iguales pero con signo contrario, pues el primero tiene signo $(-1)^{0+1} = -1$ y el segundo $(-1)^{1+1} = 1$. Por lo tanto, se eliminan.

- Si tomamos $j \geq 1$ en el término (3.2), tenemos

  $$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\left(f(x_0), l(x_0), \ldots, \widehat{l(x_j)}, \ldots, l(x_n)\right)$$

  Por otro lado, si tomamos $j = 0$ en el término (3.6) tenemos

  $$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}\left(f(x_0), l(x_0), \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, l(x_n)\right)$$

  Así, si tomamos $j = i$ notamos que se trata de los mismos términos con signo contrario, pues para el primero tendremos $(-1)^{i+1}$ y para el segundo $(-1)^{i}$. Por lo tanto, se eliminan los términos.

- Si del término (3.3) ahora tomamos $i = j \geq 2$ tendremos

$$\sum_{i=2}^{n} \left(f(x_0), \ldots, \widehat{f(x_i)}, l(x_i), \ldots, l(x_n) \right)$$

y si tomamos $j = i + 1 \leq n$ del término (3.4) tendremos

$$\sum_{i=2}^{n} (-1) \left(f(x_0), \ldots, f(x_{i-1}), \widehat{l(x_{i-1})}, \ldots, l(x_n) \right)$$

Se puede ver que se trata de los mismos términos y claramente tienen signos diferentes. Por lo tanto, se anulan.

- Si tomamos los sumandos restantes del término (3.3), es decir,

$$\sum_{\substack{i=1 \\ 0 \leq j < i}}^{n} (-1)^{i+j} \left(f(x_0), \ldots, \widehat{f(x_j)}, \ldots, f(x_i), l(x_i), \ldots, l(x_n) \right)$$

y el término (3.5), podemos notar que tienen los mismos sumandos si $\widehat{f(x_j)}$ y $\widehat{x_{i-1}}$ están en la misma posición, es decir, si $j = i - 1$. Al sustituir estos valores en cada término tendremos que los signos son $(-1)^{i+i-1} = -1$ y $(-1)^{i-1+i-1} = 1$, por lo que estos términos se anulan.

- Finalmente, si tomamos los sumandos restantes del término (3.4) y los términos restantes del término (3.6), éstos tienen los mismos sumandos si $\widehat{l(x_{j-1})}$ y $\widehat{x_i}$ están en la misma posición, es decir, si $j = i + 1$. En cada término tendremos que los signos son -1 y 1 respectivamente, por lo que se anulan los términos.

Por lo anterior, los únicos términos que no se anulan son los correspondientes a $(C_n(f) - C_n(l))(x_0, \ldots, x_n)$. Así, f y l son homotópicos. $\square$

Capítulo 4

G-copos y la conjetura de Quillen

En este capítulo todos los copos, grupos y conjuntos considerados son finitos. Para más detalles se puede consultar la sección 4 de [Bou00].

4.1. Invariante de Lefschetz

Definición 4.1.1. Sea X un copo. Decimos que X es *acíclico* si X tiene la homología de un punto, es decir, si

$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Observación 4.1.1. *Sea X un G-copo. Entonces para $n \in \mathbb{N}$, $S_n(X)$ es un G-conjunto con la siguiente acción:*

$$\forall\, g \in G, \forall (x_0, \ldots, x_n) \in S_n(X) : g(x_0, \ldots, x_n) = (gx_0, \ldots, gx_n)$$

En efecto, sea $(x_0, \ldots, x_n) \in S_n(X)$.

- *Notemos que $e\,(x_0, \ldots, x_n) = (ex_0, \ldots, ex_n) = (x_0, \ldots, x_n)$.*
- *Sean $g_1, g_2 \in G$. Entonces $(g_1 g_2)\,(x_0, \ldots, x_n) = ((g_1 g_2)\, x_0, \ldots, (g_1 g_2)\, x_n)$ $= (g_1\,(g_2 x_0)\,, \ldots, g_1\,(g_2 x_n)) = g_1\,(g_2 x_0, \ldots, g_2 x_n) = g_1\,(g_2\,(x_0, \ldots, x_n))$*

Así, podemos ver a $S_n(X)$ como un elemento de $B(G)$.

La siguiente definición del invariante de Lefschetz se debe a Thévenaz (cf. [Thé87]):

Definición 4.1.2. Sea X un G-copo. El *invariante de Lefschetz* de X es el elemento de $B(G)$ definido de la siguiente forma:

$$\Lambda_X = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n S_n(X)$$

Ejemplo 4.1.1. 1. Sea $X = \{\bullet\}$. Entonces $\Lambda_X = (-1)^0 S_0(X) = \{\bullet\} = [G/G] = 1_{B(G)}$.

2. El invariante de Lefschetz del copo vacío es $\Lambda_\emptyset = [\emptyset] = 0_{B(G)}$.

3. Sea X un G-copo con la acción trivial. Entonces para todo $H \in [S_G]$ se tiene que $\varphi_H(\Lambda_X) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \varphi_H(S_n(X)) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n |S_n(X)| = \chi(X)$.

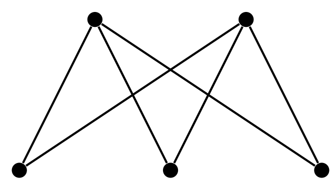
   De ahí que $\varphi(\Lambda_X) = (\chi(X), \ldots, \chi(X)) = \chi(X)\,\varphi\left(1_{B(G)}\right) = \varphi\left(\chi(X)\cdot 1_{B(G)}\right)$.

   Luego, como φ es inyectivo se tiene que $\Lambda_X = \chi(X)\cdot 1_{B(G)}$ (ver Teorema 4.1.4).

4. Sea X un G-conjunto con el siguiente orden: $x \leq y \iff x = y$. Con este orden, X es un G-copo.

   Entonces $\Lambda_X = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n S_n(X) = S_0(X) = X \in B(G)$.

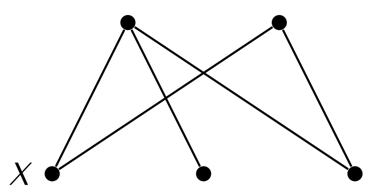
5. Sea X el siguiente copo con la acción trivial:



   Por 4. del Ejemplo 3.1.1, $\chi(X) = -1$. Así, por 3. de este Ejemplo,
   $\Lambda_X = -1 \cdot 1_{B(G)} \in B(G)$.

6. Sea X un G-conjunto con el siguiente orden: $x \leq y \iff x = y$.

   Sea Y el siguiente copo con la acción trivial:



   Podemos observar que Y es un G-copo. En efecto, se tienen 3 casos:

   - Si $x, y \in X$ y $x \leq y$, entonces $x = y$. De ahí que $gx = gy$, por lo que $gx \leq gy$.
   - Si $x, y \in Y \setminus X$ tales que $x \leq y$, entonces $gx = x \leq y = gy$, i.e., $gx \leq gy$.
   - Si $x \in X$ y $y \in Y \setminus X$ tales que $x \leq y$, entonces $gx \in X$ y $gy = y$, por lo que $gx \leq gy$.

Calculemos Λ_Y: $\Lambda_Y = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n S_n(Y) = S_0(Y) - S_1(Y)$.

Notemos que $S_0(Y) = S_0(X) + 4 \cdot 1_{B(G)} = X + 4 \cdot 1_{B(G)}$ y $S_1(Y) = S_1(X) + 2S_0(X) + 3 \cdot 1_{B(G)} = 2X + 3 \cdot 1_{B(G)}$.

Entonces $\Lambda_Y = (X + 4 \cdot 1_{B(G)}) - (2X + 3 \cdot 1_{B(G)}) = -X + 1 \cdot 1_{B(G)}$.

Proposición 4.1.2 (cf. [Bou10], 11.2.11). *Sean X, Y dos G-copos. Entonces $\Lambda_{X \sqcup Y} = \Lambda_X + \Lambda_Y$ en $B(G)$.*

Demostración. Primero veamos que para toda $n \in \mathbb{Z}$, $S_n(X \sqcup Y) = S_n(X) \sqcup S_n(Y)$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que X y Y son ajenos.

$\subseteq$) Sea $(x_0, \ldots, x_n) \in S_n(X \sqcup Y)$. Entonces $x_0, \ldots, x_n \in X \sqcup Y$ y $x_0 < \cdots < x_n$.

Luego, $(x_0, \ldots, x_n \in X$ y $x_0 < \cdots < x_n)$ o $(x_0, \ldots, x_n \in Y$ y $x_0 < \cdots < x_n)$.

De ahí que $(x_0, \ldots, x_n) \in S_n(X) \cup S_n(Y)$.

Afirmamos que esta unión es ajena, pues si $(x_0, \ldots, x_n) \in S_n(X) \cap S_n(Y)$, entonces $(x_0, \ldots, x_n \in X$ y $x_0 < \cdots < x_n)$ y $(x_0, \ldots, x_n \in Y$ y $x_0 < \cdots < x_n)$, por lo que $x_0, \ldots, x_n \in X \cap Y$, lo cual es una contradicción pues estamos suponiendo que X y Y son ajenos. Así, $S_n(X \sqcup Y) \subseteq S_n(X) \sqcup S_n(Y)$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.

$\supseteq$) Sea $(x_0, \ldots, x_n) \in S_n(X) \sqcup S_n(Y)$. Entonces $(x_0, \ldots, x_n) \in S_n(X)$ o $(x_0, \ldots, x_n) \in S_n(Y)$.

Luego, $(x_0, \ldots, x_n \in X$ y $x_0 < \cdots < x_n)$ o $(x_0, \ldots, x_n \in Y$ y $x_0 < \cdots < x_n)$.

Entonces $x_0, \ldots, x_n \in X \sqcup Y$ y $x_0 < \cdots < x_n$.

Así, $(x_0, \ldots, x_n) \in S_n(X \sqcup Y)$.

Por lo tanto, $S_n(X \sqcup Y) = S_n(X) \sqcup S_n(Y)$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Así,

$$\begin{aligned}
\Lambda_{X \sqcup Y} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n S_n(X \sqcup Y) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(S_n(X) \sqcup S_n(Y)\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n S_n(X) + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n S_n(Y) \\
&= \Lambda_X + \Lambda_Y
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 4.1.3 (cf. [Bou10], 11.2.9, 11.2.11). *Sea G un grupo y sean X y Y G-copos. Denotamos por $X \times Y$ el producto cartesiano de X y Y, dotado con la acción diagonal y con el siguiente orden:*

$$\forall\, x, x' \in X, \forall\, y, y' \in Y : (x, y) \leq (x', y') \iff x \leq x' \text{ y } y \leq y'$$

Entonces $\Lambda_{X\times Y} = \Lambda_X \Lambda_Y$ en $B(G)$.

Teorema 4.1.4 (cf. [Bou10], 11.2.8). *Sean X y Y G-copos y $H \leq G$. Entonces:*

1. *$(\Lambda_X)^H = \Lambda_{X^H}$ en $B\left(N_G(H)/H\right)$,*
2. *$\varphi_H(\Lambda_X) = \chi\left(X^H\right)$,*
3. *$\Lambda_X = \Lambda_Y$ en $B(G)$ si y sólo si $\chi\left(X^H\right) = \chi\left(Y^H\right)$ para cualquier subgrupo H de G.*

Demostración. 1. Primero veamos que para toda $n \in \mathbb{Z}$ se cumple que $S_n(X)^H = S_n\left(X^H\right)$.

Sea $(x_0, \ldots, x_n) \in S_n(X)^H$ y sea $h \in H$. Entonces $h(x_0, \ldots, x_n) = (hx_0, \ldots, hx_n) = (x_0, \ldots, x_n)$, es decir, $hx_i = x_i$ para toda $i \in \{0, \ldots, n\}$. Luego, $x_i \in X^H$ para toda $i \in \{0, \ldots, n\}$. Así, $(x_0, \ldots, x_n) \in S_n\left(X^H\right)$, por lo que $S_n(X)^H \subseteq S_n\left(X^H\right)$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Ahora, sea $(x_0, \ldots, x_n) \in S_n\left(X^H\right)$. Entonces $h\left(x_0, \ldots, x_n\right) = (hx_0, \ldots, hx_n)$ $= (x_0, \ldots, x_n)$ para cada $x_i \in X^H$ y para cada $h \in H$. De ahí que $(x_0, \ldots, x_n) \in S_n(X)^H$.

Así, $S_n(X^H) \subseteq S_n(X)^H$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Entonces

$$(\Lambda_X)^H = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n S_n(X)\right)^H = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n S_n(X)^H = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n S_n\left(X^H\right) = \Lambda_{X^H}$$

2. Notemos que

$$\begin{aligned}
\varphi_H(\Lambda_X) &= \left|(\Lambda_X)^H\right| && \text{(por definición de la marca)}\\
&= \left|\Lambda_{X^H}\right| && \text{(por 1. de este teorema)}\\
&= \left|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n S_n\left(X^H\right)\right| && \text{(por definición del invariante de Lefschetz)}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left|S_n\left(X^H\right)\right| && \text{(pues el morfismo marca es de anillos)}\\
&= \chi\left(X^H\right) && \text{(por definición de la característica de Euler)}
\end{aligned}$$

3. Se sigue de 2. y del Corolario 2.2.11. □

Lema 4.1.5 (cf. [Bou10], 11.2.11)**.** *Sea X un G-copo. Denotemos por $X * \{0,1\}$ la unión disjunta $X \sqcup \{0,1\}$, donde $\{0,1\}$ es un conjunto con dos elementos en el que G actúa trivialmente, ordenado por*

$$\forall\ a,b \in X * \{0,1\}, a \leq b \iff \begin{cases} a,b \in X \ y\ a \leq b \ en\ X \\ a,b \in \{0,1\}\ y\ a = b \\ a \in X\ y\ b \in \{0,1\} \end{cases}$$

Entonces $\Lambda_{X*\{0,1\}} = 2 \cdot 1_{B(G)} - \Lambda_X$ en $B(G)$.

Demostración. Sea $s = (z_0, \ldots, z_n) \in S_n(X * \{0,1\})$. Entonces existen 3 casos:

- Si cada $z_i \in X$, entonces $s \in S_n(X)$.
- Si $s = \{0\}$ o $s = \{1\}$, entonces $s \in S_0(\{0,1\})$.
- Si $s = s' \sqcup \{m\}$, donde $s' \in S_{n-1}(X)$ y $m \in \{0,1\}$. Notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} stab_G(s') &= \{g \in G \mid gs' = s'\} \\ &= \{g \in G \mid (gz_0, \ldots, gz_{n-1}) = (z_0, \ldots, z_{n-1})\} \\ &= \{g \in G \mid (gz_0, \ldots, gz_{n-1}, m) = (z_0, \ldots, z_{n-1}, m)\} \\ &= \{g \in G \mid (gz_0, \ldots, gz_{n-1}, gm) = (z_0, \ldots, z_{n-1}, m)\} \\ &= \{g \in G \mid gs = s\} \\ &= stab_G(s) \end{aligned}$$

  Luego, $\mathcal{O}_G(s) \cong \mathcal{O}_G(s')$.

Ahora, sean $s_1 = s' \sqcup \{0\}$ y $s_2 = s' \sqcup \{1\}$.

Entonces

$$S_n(X * \{0,1\}) \cong \frac{G}{stab_G(z_0, \ldots, z_n)} \sqcup \frac{G}{stab_G\{0\}} \sqcup \frac{G}{stab_G\{1\}} \sqcup \frac{G}{stab_G s_1} \sqcup \frac{G}{stab_G s_2}$$

De ahí que

$$\begin{aligned} \Lambda_{X*\{0,1\}} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n S_n(X * \{0,1\}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{G}{stab_G(z_0, \ldots, z_n)} \sqcup \frac{G}{stab_G\{0\}} \sqcup \frac{G}{stab_G\{1\}} \sqcup \frac{G}{stab_G s_1} \sqcup \frac{G}{stab_G s_2} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n S_n(X) + 2 \cdot 1_{B(G)} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n S_{n-1}(X) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n S_n(X) + 2 \cdot 1_{B(G)} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} S_n(X) \\ &= 2 \cdot 1_{B(G)} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n S_n(X) \\ &= 2 \cdot 1_{B(G)} - \Lambda_X \end{aligned}$$

□

Teorema 4.1.6 (cf. [Bou10], 11.2.12). *Sea G un grupo. Entonces para todo $a \in B(G)$ existe P un G-copo finito tal que $\Lambda_P = a$.*

Demostración. Sea $a \in B(G)$. Entonces $a = X - Y$, con $X, Y \in B^+(G)$ G-conjuntos, a los cuales dotaremos con el orden trivial (es decir, $x \leq y \iff x = y$).

Sea E un conjunto con 3 elementos dotado de la acción trivial y con el orden trivial. Entonces $\Lambda_E = 3 \cdot 1_{B(G)}$.

Sea $F = E * \{0,1\}$ como en el Lema 4.1.5. Entonces $\Lambda_F = 2 \cdot 1_{B(G)} - 3 \cdot 1_{B(G)} = -1 \cdot 1_{B(G)}$.

Definimos $Z = (Y * \{0,1\}) \sqcup (F \sqcup F)$ y $P = X \sqcup Z$. Entonces

$$\begin{aligned}
\Lambda_P = \Lambda_{X \sqcup Z} &= \Lambda_X + \Lambda_{(Y*\{0,1\}) \sqcup (F \sqcup F)} \\
&= \Lambda_X + \Lambda_{Y*\{0,1\}} + \Lambda_{F \sqcup F} \\
&= \Lambda_X + 2 \cdot 1_{B(G)} - \Lambda_Y - 2 \cdot 1_{B(G)} \\
&= \Lambda_X - \Lambda_Y = X - Y = a
\end{aligned}$$

□

Definición 4.1.3. Sean G un grupo y X un G-copo. Decimos que X es *G-acíclico* si para todo $H \leq G$ subgrupo se tiene que X^H es acíclico, es decir,

$$H_n\left(X^H\right) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Veamos otra forma de entender la característica de Euler (cf. [Bou00], p. 764):

Sea X un G-copo. Entonces $\chi(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n |S_n(X)|$. Consideremos la siguiente sucesión:

$$0 \xrightarrow{d_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} C_1(X) \xrightarrow{d_1} C_0(X) \xrightarrow{d_0} 0$$

Recordemos que $C_n(X)$ está generado por los elementos de $S_n(X)$. Entonces el rango de $C_n(X)$ es $\operatorname{rank}(C_n(X)) = |S_n(X)|$, por lo que

$$\chi(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname{rank}(C_n(X))$$

Consideremos ahora las siguientes sucesiones exactas cortas:

$$0 \longrightarrow \text{Ker } d_n \xhookrightarrow{\iota} C_n(X) \xrightarrow{d_n} \text{Im } d_n \longrightarrow 0 \tag{4.1}$$

$$0 \longrightarrow \text{Im } d_{n+1} \xhookrightarrow{\iota} \text{Ker } d_n \xrightarrow{\nu} H_n(X) \longrightarrow 0 \tag{4.2}$$

Usando el Teorema 1.2.17, de la sucesión (4.1) tenemos que $\text{rank}\,(C_n(X)) = \text{rank}\,(\text{Ker } d_n) + \text{rank}\,(\text{Im } d_n)$ y de la sucesión (4.2) tenemos que $\text{rank}\,(\text{Ker } d_n) = \text{rank}\,(\text{Im } d_{n+1}) + \text{rank}\,(H_n(X))$.

Entonces $\text{rank}\,(C_n(X)) = \text{rank}\,(\text{Im } d_n) + \text{rank}\,(\text{Im } d_{n+1}) + \text{rank}\,(H_n(X))$.

Luego,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \text{rank}\,(C_n(X)) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\text{rank}\,(\text{Im } d_n) + \text{rank}\,(\text{Im } d_{n+1}) + \text{rank}\,(H_n(X))\right)$$

Como se trata de una suma alternada, los sumandos $\text{rank}\,(\text{Im } d_{n+1})$ y $\text{rank}\,(\text{Im } d_n)$ se cancelan para toda $n \in \mathbb{N}$.

Así,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \text{rank}\,(C_n(X)) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \text{rank}\,(H_n(X))$$

es decir,

$$\chi\,(X) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \text{rank}\,(H_n(X))$$

Proposición 4.1.7 (cf. [Bou00], Proposición 4.2.5)**.** *1. Sean X y Y G-copos y sean $f : X \longrightarrow Y$, $l : Y \longrightarrow X$ morfismos de G-copos. Si $l \circ f$ es comparable con 1_X y $f \circ l$ es comparable con 1_Y, entonces $\Lambda_X = \Lambda_Y$ en $B(G)$.*

2. Si un G-copo X tiene un elemento mayor o menor, entonces X es contraíble. Más aún, X es G-acíclico.

Demostración. 1. Por 3. del Teorema 4.1.4, basta con demostrar que para todo $H \leq G$ se cumple que $\chi\left(X^H\right) = \chi\left(Y^H\right)$.

Notemos que, si $f : X \longrightarrow Y$ y $l : Y \longrightarrow X$ son de G-copos, entonces $f_H = f_{|_{X^H}} : X^H \longrightarrow Y^H$ y $l_H = l_{|_{Y^H}} : Y^H \longrightarrow X^H$.

De ahí que $l_H \circ f_H$ es comparable con 1_{X^H} y $f_H \circ l_H$ es comparable con 1_{Y^H}. Luego, por el Teorema 3.2.10 tenemos que $l_H \circ f_H \sim 1_{X^H}$ y $f_H \circ l_H \sim 1_{Y^H}$.

Entonces, por la Proposición 3.2.7, $H_n\left(l_H \circ f_H\right) = H_n\left(1_{X^H}\right) = 1_{H_n\left(X^H\right)}$ y $H_n\left(f_H \circ l_H\right) = H_n\left(1_{Y^H}\right) = 1_{H_n\left(Y^H\right)}$, es decir, $H_n\left(l_H\right) \circ H_n\left(f_H\right) = 1_{H_n\left(X^H\right)}$ y $H_n\left(f_H\right) \circ H_n\left(l_H\right) = 1_{H_n\left(Y^H\right)}$.

Así, $H_n\left(X^H\right) \cong H_n\left(Y^H\right)$, por lo que $\operatorname{rank}\left(H_n\left(X^H\right)\right) = \operatorname{rank}\left(H_n\left(Y^H\right)\right)$.

Por lo tanto, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \operatorname{rank}\left(H_n\left(X^H\right)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \operatorname{rank}\left(H_n\left(Y^H\right)\right)$, es decir,

$$\chi\left(X^H\right) = \chi\left(Y^H\right)$$

2. Sea X un G-copo y supongamos que existe un elemento menor en X, a saber, x_0.

   Sea $g \in G$. Como x_0 es elemento menor, entonces $x_0 \leq gx_0$ y $x_0 \leq g^{-1}x_0$, es decir, $x_0 \leq gx_0$ y $gx_0 \leq x_0$. Entonces para toda $g \in G$ se tiene que $gx_0 = x_0$, por lo que $x_0 \in X^G$. De hecho, para cualquier $H \leq G$ se tiene que $x_0 \in X^H$. De ahí que X^H tiene un elemento menor para todo $H \leq G$.

   Sean $f : X^H \longrightarrow \bullet$ y $l : \bullet \longrightarrow X^H$ morfismos de G-copos tales que para todo $z \in X^H$ se cumple que $f(z) = \bullet$ y $l(\bullet) = x_0$.

   Notemos que $(f \circ l)(\bullet) = f(l(\bullet)) = f(x_0) = \bullet = 1_\bullet(\bullet)$, por lo que $f \circ l$ es comparable con $1_\bullet$.

   Por otro lado, para todo $z \in X^H$ ocurre que $(l \circ f)(z) = l(f(z)) = l(\bullet) = x_0 \leq z = 1_{X^H}(z)$, es decir, $l \circ f \leq 1_{X^H}$, por lo que son comparables.

   Así, por 1. de esta Proposición, tenemos que $\Lambda_{X^H} = \Lambda_\bullet = 1_{B(G)}$ (por 1. del Ejemplo 4.1.1).

   Por otra parte, $l \circ f \sim 1_{X^H}$ y $f \circ l \sim 1_\bullet$, por lo que X^H es contraíble. De ahí que X es G-acíclico.

   El caso en el que X tiene elemento mayor es análogo.

□

4.2. Conjetura de Quillen

Sea G un grupo y $p \in \mathbb{Z}$ un número primo tal que p divide al orden de G.

Denotamos por $S_p(G)$ al conjunto de p-subgrupos de G no triviales, es decir,

$$S_p(G) = \{P \leq G \mid P \neq 1 \text{ y } P \text{ es } p\text{-subgrupo}\}.$$

Antes de enunciar la conjetura de Daniel Quillen, revisemos algunas definiciones provenientes de la topología algebraica. Para más detalles se sugiere revisar [Hat00], [Mun84], [ASGP08] y [Spa89].

Definición 4.2.1. Un *complejo simplicial* K es una familia de subconjuntos finitos no vacíos, llamados *simplejos*, de un conjunto $V = \mathrm{vert}(K)$, llamado *conjunto de vértices*, tal que:

1. Si $v \in V$, entonces $\{v\}$ es un simplejo;
2. Si s es un simplejo, entonces todo subconjunto no vacío de s también es un simplejo.

Un simplejo $s = \{v_0, \dots, v_q\}$ con $q + 1$ vértices es llamado *q-simplejo* y se dice que s tiene dimensión q, lo cual se denota como $\dim(s) = q$. Por lo tanto, los vértices son los 0-simplejos de K.

Si n es la mayor dimensión de un simplejo en K, entonces K es llamado un *n-complejo* y se denota por $\dim(K) = n$ (si no hay simplejo con dimensión mayor, entonces $\dim(K) = \infty$).

Si s es un simplejo de K, lo denotaremos como $s \in K$.

El *n-esqueleto* de un complejo simplicial K es el complejo simplicial K^n que consiste en todos los simplejos de K de dimensión menor o igual que n.

Ejemplo 4.2.1.
1. Un 0-complejo es un conjunto de puntos.
2. Un 1-complejo es un *grafo*: decimos que $u, v \in V$ son adyacentes si $\{u, v\}$ es un 1-simplejo.

Definición 4.2.2. Dado $n \in \mathbb{N}$, el *n-simplejo estándar* es el subespacio

$$\Delta^n = \left\{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, \sum t_i = 1, t_i \geq 0 \;\forall\, i\right\}$$

Notemos que todo punto $(t_0, \dots, t_n) \in \Delta^n$ puede ser visto como una función $\alpha : \{v_0, \dots, v_n\} \longrightarrow I$ tal que $\sum \alpha(v_i) = 1$, donde $v_0, \dots, v_n$ son los vértices del simplejo estándar.

Definición 4.2.3. Sea K un complejo simplicial. Definimos el conjunto $|K|$ de funciones $\alpha : \mathrm{vert}(K) \longrightarrow I$ tales que

1. $\{v \mid \alpha(v) \neq 0\}$ es un simplejo en K. En particular, el soporte de α es finito.
2. $\displaystyle\sum_{v \in \mathrm{vert}(K)} \alpha(v) = 1.$

Definimos una distancia en $|K|$ de la siguiente manera: $d(\alpha, \beta) = \sqrt{\displaystyle\sum_{v \in \mathrm{vert}(K)} (\alpha(v) - \beta(v))^2}$ y denotamos como $|K|_d$ a este espacio métrico.

Si $s \in K$ es un simplejo, definimos el conjunto $|s| \subseteq |K|$ como

$$|s| = \{\alpha \in |K| : \alpha(v) = 0 \ \forall\, v \notin s\}\,.$$

Si $\dim(s) = n$, entonces existe una biyección entre $|s|$ y Δ^n, pues una función α que se anula fuera de s puede ser vista como una $(n+1)$-ada $(t_0, \ldots, t_n) \in \Delta^n$.

Definición 4.2.4. Dado un complejo simplicial K, consideremos para todo $s \in K$ el espacio métrico $|s|_d$ con la distancia dada en la Definición 4.2.3 y dotamos a $|K|$ de la topología final respecto de todos sus simplejos, es decir, $A \subseteq |K|$ es abierto si y sólo si $A \cap |s|_d$ es abierto en $|s|_d$ para todo $s \in K$.

Denotaremos por $|K|$ a este espacio topológico y lo llamaremos la *realización geométrica o simplicial* de K.

Definición 4.2.5.
1. Un espacio es llamado *celda* de dimensión m si es homeomorfo con la m-bola unitaria B^m. Dicho m está determinado de manera única por el espacio en cuestión.
2. Se dice que un espacio es una *celda abierta* de dimensión m si es homeomorfo con el interior de B^m.

Definición 4.2.6 (Complejo CW)**.** Un *complejo CW* es un espacio X y una colección de celdas abiertas e_α cuya unión es X y es tal que:

1. Para cualesquiera $x, y \in X$ tales que $x \neq y$, existen V_1, V_2 abiertos tales que $x \in V_1$, $y \in V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, es decir, X es un espacio Hausdorff.
2. Para cada m-celda abierta e_α de la colección, existe una función continua $f_\alpha : B^m \longrightarrow X$ que manda el interior de B^m homeomórficamente en e_α y manda a la frontera de B^m en una unión finita de celdas abiertas, cada una con dimensión menor que m.
3. Un conjunto A es cerrado en X si $A \cap \overline{e_\alpha}$ es cerrado en $\overline{e_\alpha}$ para cada α.

Ejemplo 4.2.2 (cf. [ASGP08], 5.1.3)**.** Los complejos simpliciales son ejemplos de complejos CW.

Definición 4.2.7. Dos funciones continuas $\varphi_0, \varphi_1 : X \longrightarrow Y$ entre los espacios topológicos X y Y son *homotópicas* si y sólo si existe una función continua $\varphi : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ tal que, para todo $x \in X$, se cumple que

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x) \qquad y \qquad \varphi(x,1) = \varphi_1(x)$$

Si φ_0 y φ_1 son homotópicas, lo denotamos por $\varphi_0 \simeq \varphi_1$.

A la función φ le llamamos una *homotopía* de φ_0 a φ_1.

Definición 4.2.8. Dos espacios X y Y se dicen *homotópicamente equivalentes* si existen funciones $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow X$ tales que $g \circ f \simeq 1_X$ y $f \circ g \simeq 1_Y$. Lo denotamos por $X \simeq Y$.

Si X es homotópicamente equivalente a un punto, decimos que X es *contraíble*.

Haciendo algunas modificaciones adecuadas de estas definiciones tenemos lo siguiente:

Definición 4.2.9.
1. Sea G un grupo. Un espacio topológico X es llamado *G-espacio* si X es un G-conjunto, es decir, si G actúa sobre X.
2. Sean X y Y dos espacios. $f : X \longrightarrow Y$ es un morfismo de G-espacios si f es continua y es morfismo de G-conjuntos.

Definición 4.2.10. Dos funciones continuas $f, g : X \longrightarrow Y$ entre G-espacios son *G-homotópicas* si existe una homotopía F, como en la Definición 4.2.7, que además es morfismo de G-espacios. En ese caso, escribimos $f \simeq_G g$. A la función F le llamamos G-homotopía.

Definición 4.2.11. Los G-espacios X y Y son *G-homotópicamente equivalentes* (o *G-homotópicos*) si existen $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow X$ tales que $g \circ f \simeq_G 1_X$ y $f \circ g \simeq_G 1_Y$. En este caso escribimos $X \simeq_G Y$.

Finalmente, decimos que X es *G-contraíble* si X es G-homotópico a un punto.

Conjetura 1 (Quillen, cf. [Qui78])**.** Sea G un grupo finito y $p \in \mathbb{Z}$ primo tal que p divide al orden de G. Consideremos $S_p(G)$. Entonces son equivalentes:

1. La realización geométrica de $S_p(G)$ es contraíble, es decir, $|S_p(G)| \simeq \bullet$.
2. Existe P un p-subgrupo normal no trivial de G.

Se demostrará una afirmación más débil que esta conjetura y meramente algebraica a continuación:

Observación 4.2.1. *Notemos que $S_p(G)$ es un G-copo con la acción conjugación y el orden dado por la inclusión, es decir, si $H, K \in S_p(G)$, entonces $H \leq K \iff gHg^{-1} \leq gKg^{-1}$.*

Teorema 4.2.2 (cf. [Bou00], Proposición 4.3.2)**.** *Sea G un grupo. Entonces $\Lambda_{S_p(G)} = 1_{B(G)}$ si y sólo si existe un p-subgrupo P de G normal no trivial.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos que $\Lambda_{S_p(G)} = 1_{B(G)}$. Entonces para todo $H \leq G$ se cumple que $\varphi_H\left(\Lambda_{S_p(G)}\right) = 1$. En particular, $\varphi_G\left(\Lambda_{S_p(G)}\right) = \varphi_G(1_{B(G)}) = 1$, es decir, $\chi\left(S_p(G)^G\right) = 1$.

Afirmamos que $S_p(G)^G \neq \emptyset$, pues en caso contrario, $\chi\left(S_p(G)^G\right) = 0$. Entonces existe $P \in S_p(G)^G$, es decir, para toda $g \in G$, $gPg^{-1} = P$; es decir, P es un p-subgrupo de G normal no trivial.

$\Longleftarrow$) Supongamos que P es un p-subgrupo normal no trivial de G.

Consideremos $[P,\infty) = \{E \leq G \mid P \leq E\} \subseteq S_p(G)$. Notemos que $[P,\infty)$ es un G-copo, pues si $Q \in [P,\infty)$, entonces $P \leq Q$. Luego, $P = gPg^{-1} \leq gQg^{-1} \in [P,\infty)$.

Sean $\iota : [P,\infty) \longrightarrow S_p(G)$ (el morfismo inclusión) y $f : S_p(G) \longrightarrow [P,\infty)$ morfismos de G-copos dados por $\iota(Q) = Q$ y como $P \trianglelefteq G$, entonces f está dado por $f(Q) = PQ$.

Ahora, $(f \circ \iota)(Q) = f(Q) = PQ = Q = 1_{[P,\infty)}(Q)$, pues $P \leq Q$, por lo que $f \circ \iota = 1_{[P,\infty)}$. De ahí que $f \circ \iota$ es comparable con $1_{[P,\infty)}$.

Además, $(\iota \circ f)(Q) = \iota(PQ) = PQ \geq Q = 1_{S_p(G)}(Q)$, por lo que $\iota \circ f \geq 1_{S_p(G)}$, es decir, son comparables.

Luego, por 1. de la Proposición 4.1.7, $\Lambda_{S_p(G)} = \Lambda_{[P,\infty)}$. Pero como $[P,\infty)$ tiene un elemento mínimo, a saber, P, por 2. de la Proposición 4.1.7 tenemos que $\Lambda_{[P,\infty)} = 1_{B(G)}$, es decir, $\Lambda_{S_p(G)} = 1_{B(G)}$.

$\square$

Proposición 4.2.3 ([TW91], Proposición 1.3). *Sean X, Y G-espacios y sea $\phi : X \longrightarrow Y$ un morfismo de G-espacios. Entonces ϕ es una equivalencia G-homotópica si y sólo si $\phi^H = \phi_{|_H} : X^H \longrightarrow Y^H$ es una equivalencia homotópica para cada subgrupo H de G.*

El resultado anterior fue originalmente dado por Bredon (véase [Bre67], sección II) y nos permite definir G-contraíble de la siguiente manera:

Definición 4.2.12. Sea X un G-copo. Decimos que X es *G-contraíble* si para todo $H \leq G$ subgrupo se cumple que X^H es contraíble.

Teorema 4.2.4. *Sea G un grupo finito y $p \in \mathbb{Z}$ primo tal que p divide al orden de G. Consideremos $S_p(G)$. Entonces son equivalentes:*

1. $\Lambda_{S_p(G)} = 1_{B(G)}$;
2. *Existe un p-subgrupo P de G normal no trivial;*
3. *$S_p(G)$ es G-contraíble.*

Demostración. Sea G un grupo.

- (1. $\Longrightarrow$ 2.) Se da por el Teorema 4.2.2.

- (2. $\implies$ 3.) Como $P \trianglelefteq G$, en particular se tiene que $P \in S_p(G)^H$ para cualquier $H \leq G$.

  Tomemos $f : S_p(G)^H \longrightarrow [P, \infty)$ e $\iota : [P, \infty) \longrightarrow S_p(G)^H$ (el morfismo inclusión) morfismos de G-copos tales que $f(Q) = PQ$ e $\iota(Q) = Q$.

  Como $[P, \infty)$ tiene un elemento mínimo, entonces por 2. de la Proposición 4.1.6 $[P, \infty) \sim \bullet$.

  Notemos que $(f \circ \iota)(Q) = f(Q) = PQ = Q = 1_{[P,\infty)}(Q)$ para todo $Q \in [P, \infty)$. En particular, $f \circ \iota$ y $1_{[P,\infty)}$ son comparables.

  También observemos que $(\iota \circ f)(Q) = \iota(PQ) = PQ \geq Q = 1_{S_p(G)^H}(Q)$ para todo $Q \in S_p(G)^H$. De ahí que $\iota \circ f$ y $1_{S_p(G)^H}$ son comparables.

  Luego, por el Teorema 3.2.10, $f \circ \iota \sim 1_{[P,\infty)}$ y $\iota \circ f \sim 1_{S_p(G)^H}$, por lo que $S_p(G)^H \sim [P, \infty)$. Como $[P, \infty) \sim \bullet$, tenemos que $S_p(G)^H \sim \bullet$, es decir, $S_p(G)$ es G-contraíble.

- (3. $\implies$ 1.) Como $S_p(G)$ es G-contraíble, entonces $S_p(G)^H \sim \bullet$ para todo $H \leq G$. Luego, $\chi\left(S_p(G)^H\right) = 1 = \chi(\{\bullet\}) = \chi\left(\{\bullet\}^H\right) = \chi\left(1^H_{B(G)}\right)$ para todo $H \leq G$. De ahí que $\Lambda_{S_p(G)} = 1_{B(G)}$. $\square$

Bibliografía

[ASGP08] M. Aguilar, S. B. Sontz, S. Gitler, and C. Prieto, *Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint*, Universitext, Springer New York, 2008.

[Ben91] David J. Benson, *Representations and Cohomology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 2, Cambridge University Press, 1991.

[Bou00] Serge Bouc, *Burnside rings*, Handbook of Algebra (M. Hazewinkel, ed.), vol. 2, North-Holland, 2000, pp. 739–804.

[Bou10] ______, *Biset functors for finite groups*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.

[Bre67] Glen E. Bredon, *Equivariant Cohomology Theories*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 34, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1967.

[CRV16] C. Cejudo, J. M. Ramírez, and D. Villa, *El anillo de Burnside*, Matemáticas y sus aplicaciones (F. Macías-Romero, ed.), vol. 7, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2016, pp. 31–52.

[GCR64] Gian-Carlo Rota, *On the foundations of combinatorial theory I. Theory of Möbius Functions*, Z. Wahrsch. Verw. **2** (1964), 340–368.

[Glu81] David Gluck, *Idempotent formula for the Burnside algebra with applications to the p-subgroup simplicial complex*, Illinois J. Math. **25** (1981), no. 1, 63–67.

[Hat00] Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[Kas82] Friedrich Kasch, *Modules and Rings*, London Mathematical Society monograph, Academic Press, 1982.

[MH90] Fausto Membrillo Hernández, *Idempotentes en anillos de Burnside*, Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, 1990.

[Mun84] James R. Munkres, *Elements of Algebraic Topology*, Addison Wesley Publishing Company, 1984.

[Qui78] Daniel Quillen, *Homotopy properties of the poset of nontrivial p-subgroups of a group*, Adv. in Math. **28** (1978), 101–128.

[Rom08] Steven Roman, *Lattices and Ordered Sets*, Springer New York, 2008.

[Rot99] Joseph J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*, 4 ed., Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag New York, 1999.

[Rot02] ______, *Advanced Modern Algebra*, 2 ed., Prentice Hall, 2002.

[Sol67] Louis Solomon, *The Burnside algebra of a finite group*, Journal of Combinatorial Theory **2** (1967), no. 4, 603–615.

[Spa89] Edwin H. Spanier, *Algebraic Topology*, Springer, 1989.

[Thé87] Jacques Thévenaz, *Permutation representations arising from simplicial complexes*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **46** (1987), no. 1, 121–155.

[TW91] J. Thévenaz and P. J. Webb, *Homotopy equivalence of posets with a group action*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **56** (1991), no. 2, 173–181.

[Yos83] Tomoyuki Yoshida, *Idempotents of Burnside Rings and Dress Induction Theorem*, Journal of Algebra **80** (1983), no. 1, 90–105.

Índice alfabético