Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

UNA PROPUESTA PARA EL APRENDIZAJE Y LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE DERIVADA BASADA EN EL ALINEAMIENTO CONSTRUCTIVO

TESIS PRESENTADA COMO REQUISITO PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTADA POR:
GRISELDA SÁNCHEZ DENICIA

DIRIGIDO POR:
DRA. LUCÍA CERVANTES GÓMEZ

18 de noviembre 2011
Puebla, Puebla.

Reconocimientos

- A la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado VIEP por las becas otorgadas que motivaron y favorecieron el desarrollo de esta tesis, durante algunos meses en los años 2010 y 2011, a través del proyecto de investigación "Aprovechamiento de la Modelación Matemática para la promoción del aprendizaje significativo de las matemáticas y su vinculación con la investigación".

- Al CA de Ecuaciones Diferenciales y Modelación Matemática (BUAP-CA-33), quien mediante el Apoyo a las redes temáticas del programa PROMEP de la Secretaría de Educación Pública (SEP), me otorgó una beca que me permitió concluir e imprimir esta tesis.

A mi madre con todo mi cariño
porque fue ella la persona que gozó y sufrió conmigo todos y cada uno
de mis éxitos y fracasos a lo largo de este camino.

Agradecimientos:

- Agradezco a dios por darme la sabiduría y la fortaleza para llegar hasta aquí y a mis padres porque siempre estuvieron ahí para apoyarme, durante toda mi carrera y a lo largo de mi vida.

- A la Dra. Lucía Cervantes Gómez por su dedicación en la realización de esta tesis, así como la aportación de su experiencia y de sus conocimientos, pero lo más importante por todo su apoyo y sus valiosas enseñanzas.

- A la Dra. Honorina Ruíz Estrada por sus valiosas sugerencias, en especial las relacionadas con el uso pruebas internacionales de evaluación (TIMSS) y por compartir con nosotros los resultados de sus evaluaciones sobre el tipo de razonamiento de los estudiantes de nuevo ingreso de las licenciaturas de la FCFM.

- Al grupo de profesores de la facultad participantes en el “Seminario sobre la práctica docente” de la FCFM, en especial al Dr. Javier Hernández y al M.C. Julio Poisot Macías, por sus comentarios que contribuyeron a mejorar el desarrollo de esta tesis.

- A todos y cada uno de los profesores que me brindaron la oportunidad de compartir con ellos su conocimiento, y a aquellos que me brindaron su apoyo y sus consejos para salir adelante.

- A mis compañeros por todas la experiencias vividas a su lado que me ayudaron a continuar para cumplir mi meta, en especial a mis amigos Valeria y José Juan por brindarme su ayuda incondicional en todos y cada uno de los momentos en que los necesité.

- Y a todas aquellas personas que directa o indirectamente colaboraron para que este trabajo tuviera éxito y llegara a su fin.

A todos y cada uno mil gracias…

Índice General

Introducción

Las evaluaciones internacionales que comparan los sistemas educativos de diferentes países (Pisa [8], TIMSS [14], etc.) muestran la gran brecha que hay entre los mismos, obviamente determinada por las distintas realidades económicas, políticas y sociales

En particular, las evaluaciones tanto nacionales (ENLACE [5]) como internacionales (Pisa [8], TIMSS [14] y [3]) han mostrado graves deficiencias en el sistema educativo mexicano, que es necesario corregir. Dado que el aprendizaje ocurre en un contexto particular y su resultado depende de diferentes factores, tales como el tipo de escuela, los recursos escolares, los métodos de enseñanza, las competencias docentes del maestro, las actitudes y aptitudes de los estudiantes; es posible, y además, compete a cada comunidad escolar y académica participar en la solución.

Basándonos en los resultados de investigaciones realizados por expertos en educación, así como los logros alcanzados en diferentes regiones del mundo, consideramos que, a pesar de no contar con las condiciones idóneas del entorno de trabajo (las cuales por supuesto es importante que se logren), las universidades públicas mexicanas satisfacen un mínimo de condiciones básicas que permiten a <u>los profesores generar oportunidades y posibilidades de contribuir a mejorar significativamente los resultados de aprendizaje de sus estudiantes</u>, si se apoyan en la práctica reflexiva (de preferencia colaborativa) y la implementación, adaptada a su contexto, de un marco teórico específico (resultado de las investigaciones en educación).

Los profesores de la FCFM, de manera individual o colectiva, en el trascurso de la historia de la facultad, han diseñado y realizado distintas propuestas con la intención de mejorar el aprendizaje de los estudiantes; un problema es que la mayoría de los procesos y resultados no han quedado registrados por escrito. Aprovechando las ventajas que nos ofrecen las nuevas tecnologías, es nuestro interés compartir nuestro trabajo con la intención de que pueda ser revisado y utilizado por otras personas interesadas.

Con el deseo de contribuir a mejorar la inserción y la formación de los estudiantes de nuevo ingreso a la licenciatura en Matemáticas Aplicadas, el propósito de este trabajo fue recopilar, reconstruir y presentar un conjunto de secuencias didácticas, apoyado en el alineamiento constructivo de Biggs, que pudiera servir para incrementar las oportunidades de lograr un aprendizaje profundo del concepto de derivada.

Se recopilaron algunas secuencias didácticas que se habían empleado en cursos de Conceptos de Cálculo durante el año 2009 y otoño del 2010, las cuales se ampliaron y reescribieron basándonos en la teoría del alineamiento constructivo de Biggs, mientras se aplicaban en primavera de 2011 con otro grupo de estudiantes; el análisis de los resultados obtenidos, aunado a un proceso reflexivo, nos permitió generar las secuencias presentadas en esta tesis, las cuales, esperamos puedan ser útiles a otros estudiantes y profesores interesados.

Para realizar este trabajo elegimos el concepto de derivada, porque es una pieza fundamental en el estudio del Cálculo, materia que resulta de vital importancia dentro de la formación matemática. Partimos asumiendo como conocimiento previo el de función, desarrollando los conceptos de razón de cambio y de límite, trabajando minuciosamente en este último, por su importancia como piedra angular en la comprensión del Cálculo y el Análisis y además, por la reconocida dificultad que presenta a los estudiantes su comprensión profunda.

Para mejorar nuestra enseñanza nos apoyamos en el marco teórico del alineamiento constructivo de Biggs, por dos razones. En primera por que este marco es acorde con el modelo de enseñanza-aprendizaje que rige nuestra universidad (MUM) y en segunda debido a su atractiva e innovadora propuesta pedagógica en la que la enseñanza se perfecciona reflexionando y que a diferencia de la enseñanza tradicional nos presenta un nuevo enfoque en el que es más importante lo que hace el alumno que lo que hace el profesor.

A fin de motivar el uso del marco de Biggs, es conveniente tomar en cuenta lo siguiente: como profesores, en muchas ocasiones nos hemos preguntado por qué hay tantos estudiantes que no logran aprender adecuadamente o desertan, y si podría hacerse algo al respecto, en respuesta a esta interrogante generalmente hemos adoptado distintas posturas, dando más énfasis a las características del estudiante, del profesor o del medio. Desde la perspectiva de Biggs, es importante identificar cuál es nuestra postura a través de lo que él llama *niveles de pensamiento acerca de la enseñanza*, los cuales pueden identificarse con mucha claridad en los vídeos:

http://www.youtube.com/watch?v=_Vy_DNvmZRQ

http://www.youtube.com/watch?v=2DMnYxc3ank

http://www.youtube.com/watch?v=AuCG0kdj5DQ

Podemos recapitular su propuesta, resumida en los videos, mencionando que el aspecto esencial de esta teoría es que la enseñanza se refuerza al alinear sus objetivos, métodos y las tareas de evaluación, lo que se consigue centrándose en las actividades relacionadas con el aprendizaje, siempre dentro de un clima de confianza y motivación.

Figura1a. Alineamiento constructivo.

Esta tesis está compuesta de tres capítulos. En el capítulo 1 se resumen los aspectos más relevantes de la teoría del alineamiento constructivo que utilizamos para la realización de nuestras secuencias. En el capítulo 2, se incluye el desarrollo de dos secuencias didácticas aplicando la teoría estudiada para el aprendizaje del concepto de la derivada así como sus resultados. Y por último en el capítulo 3 se muestran nuestras conclusiones.

Al final de la tesis se encuentran cuatro apéndices, el primero contiene parte del material utilizado en clases, el segundo contiene una pequeña reseña histórica de los principales problemas que dieron origen al Cálculo, en el tercero se encuentra información relevante de la prueba TIMSS [14] y en el cuarto se describen técnicas de enseñanza a clases numerosas según la teoría de Biggs.

En resumen tenemos lo siguiente:

Supuesto

Basándonos en los resultados de investigaciones realizados por expertos en educación, así como los logros alcanzados en diferentes regiones del mundo, consideramos que, a pesar de no contar con las condiciones idóneas del entorno de trabajo (las cuales por supuesto es importante que se logren), las universidades públicas mexicanas satisfacen un mínimo de condiciones básicas que permiten a los profesores generar oportunidades y posibilidades de contribuir a mejorar significativamente los resultados de aprendizaje de sus estudiantes, si se apoyan en la práctica reflexiva (de preferencia colaborativa) y la implementación, adaptada a su contexto, de un marco teórico específico (resultado de las investigaciones en educación).

Objetivo

Recopilar, reconstruir y dejar asentado un conjunto de secuencias didácticas, apoyado en el alineamiento constructivo de Biggs, que pudiera servir para incrementar las oportunidades de lograr un aprendizaje profundo del concepto de derivada.

Metodología

Se diseñaron unas secuencias didácticas para el tema de derivada que se impartieron de acuerdo al alineamiento constructivo de Biggs en un curso de primavera de 2011, para verificar el aprendizaje del concepto por los alumnos durante el curso, se aplicó un diagnóstico al principio y una evaluación al final del mismo, ambos tomando preguntas del tipo utilizado en la evaluación internacional de TIMSS [14].

1. MARCO TEÓRICO: EL ALINEAMIENTO CONSTRUCTIVO.

1.1 El contexto de la enseñanza universitaria.

En la mayoría de los países (incluidos los más industrializados) se han puesto en evidencia diferentes problemas de la educación.

De los estudiantes:

Varias décadas atrás la selección de estudiantes para el ingreso a las universidades era de un número muy reducido, y parecía que el uso de cualquier método de enseñanza, como lo era la clase tipo magistral, funcionaba adecuadamente, sin embargo, a partir de la década de 1990, este número se incrementó drásticamente, por lo que debido a circunstancias como el sobrecupo de alumnos y el avance de la tecnología, la clase tradicional parece no ser suficiente para lograr un buen aprendizaje en la mayoría de los alumnos universitarios.

De los profesores:

Una característica de los profesores a nivel universitario es que son académicos para la mayoría de los cuales la prioridad ha consistido en estar al día de los avances del contenido de su disciplina, ya que además se exige que contribuyan al desarrollo de la misma a través de la investigación y, normalmente, la adquisición del dominio de la enseñanza ha pasado a segundo plano, debido, entre otras razones, al conjunto de prioridades dictadas tanto por las estructuras institucionales y los sistemas de recompensas como por elección personal.

De los marcos teóricos:

En diferentes partes del mundo se han realizado variadas e importantes investigaciones que han producido distintas teorías sobre el aprendizaje y la enseñanza, estas investigaciones, a lo largo de muchos años han logrado reunir una gran base de conocimientos que ha constituido diferentes marcos teóricos, y en consecuencia distintas propuestas prácticas (parafraseando al investigador en la acción, Kurt Lewin (ver [2], pág.16) 'nada es más práctico que una buena teoría'), ya se ha visto en otras universidades las ventajas de adoptar alguno de estos marcos teóricos.

Es claro que la implementación de un marco teórico no dará solución a todos nuestros problemas, pero nos guiará dándonos las herramientas adecuadas para diseñar y lograr nuestros objetivos.

1.2 La perspectiva de Biggs

Para Biggs la mejora en la enseñanza comienza con asumir el reto de estimular a los alumnos para que utilicen los procesos de aprendizaje que los estudiantes con intereses académicos emplean de forma espontánea, esto es, para que la enseñanza funcione es importante lograr que los estudiantes se comprometan en actividades relacionadas con el aprendizaje que les ayuden a alcanzar los objetivos concretos establecidos para la unidad o asignatura y que impliquen procesos cognitivos de orden superior como teorizar, crear nuevas ideas, reflexionar, aplicar, resolver problemas, etc. El problema al que nos enfrentamos es que existe solo una minoría de estudiantes que desarrollan de forma espontánea estas actividades en sus niveles más elevados de manera más o menos independiente de la enseñanza. Es decir, la mayoría de los estudiantes necesita más apoyo para desarrollar estas actividades en su nivel más elevado.

Esta teoría no trata de aplicar principios docentes mediante reglas preestablecidas y rígidas, sino aportar nuevas técnicas de enseñanza, y fundamentalmente trasladar el énfasis hacia las actividades del alumno[1], tratando de aprovechar una gran base de conocimientos, derivada de la investigación, acerca de la enseñanza y el aprendizaje. Es importante hacer notar que el buen aprovechamiento de estos conocimientos dependerá de la aplicación y utilización individual de cada profesor, mediante la utilización de la práctica reflexiva, que le permitirá crear un entorno mejorado de enseñanza ajustado a sus propias características personales y a su propio contexto docente.

El aspecto esencial de esta teoría es que la enseñanza se refuerza al alinear sus objetivos, sus métodos y las tareas de evaluación, lo que se consigue centrándose en las actividades relacionadas con el aprendizaje, siempre dentro de un clima de confianza y motivación.

Figura1b. Alineamiento constructivo

[1]El principal enfoque de esta teoría se resume en la cita de Thomas Shuell (ver [2], pág.16): “Lo que hace el estudiante es, en realidad, más importante que lo que hace el profesor”.

En resumen, considerando que el contexto en el que trabaja cada profesor es diferente, él tiene que idear sus propias soluciones, y esto requiere de reflexión, una teoría de enseñanza con la cual reflexionar y un conjunto de experiencias como objeto de reflexión. Este proceso puede dirigirse formalmente como “aprendizaje en la acción” que consiste en buscar de forma sistemática el progreso del propio ejercicio docente y en asegurarse que los cambios se efectúen en la dirección correcta, en concreto que los alumnos aprendan mejor de lo que solían.

1.3 Construir el aprendizaje alineando la enseñanza: alineamiento constructivo.

La clave para reflexionar sobre nuestra forma de enseñar consiste en basar nuestro pensamiento en lo que sabemos acerca de la forma de aprender de los estudiantes. El aprendizaje es el resultado de su actividad constructiva de modo que la enseñanza es eficaz cuando apoya las actividades adecuadas para alcanzar los objetivos curriculares estimulando, por tanto, a los estudiantes para que adopten un enfoque profundo del aprendizaje. Una enseñanza y una evaluación de baja calidad se traducen en un enfoque superficial, en el que los estudiantes utilizan actividades de aprendizaje inadecuadas y de orden inferior. Un buen sistema de enseñanza alinea el método y la evaluación de la enseñanza con las actividades de aprendizaje establecidas en los objetivos, de manera que todos los aspectos de este sistema están de acuerdo en apoyar el adecuado aprendizaje del estudiante. Este sistema se denomina *alineamiento constructivo,* basado en los dos principios del constructivismo: aprendizaje y alineamiento en la enseñanza.

Los enfoques superficial y profundo del aprendizaje describen las dos formas que tienen los estudiantes de relacionarse con un ambiente de enseñanza y aprendizaje, pero no son características fijas de estos. Una buena enseñanza respalda el enfoque profundo y aleja del superficial, pero, por diversas razones, gran parte de la enseñanza tradicional tiene el efecto opuesto.

Para incluir los enfoques del aprendizaje, con el fin de crear un sistema interactivo se desarrolló el modelo lineal de enseñanza y aprendizaje 3P. El modelo 3P señala tres puntos temporales en los que se sitúan los factores relacionados con el aprendizaje: pronóstico, antes de que se produzca el aprendizaje; proceso, durante el aprendizaje y producto o resultado del aprendizaje. Este modelo presenta la clase como un sistema interactivo en el que las características del estudiante y el contexto de enseñanza determinan mutuamente las actividades de aprendizaje superficial o profundo, las cuales, a su vez, determinan la calidad de los resultados del aprendizaje.

El modelo 3P (pronóstico, proceso y producto) ayuda a situar tres enfoques sobre la enseñanza dependiendo de lo que se considere como determinante principal del aprendizaje: a) qué son los estudiantes; b) qué hacen los profesores, y c) qué hacen los estudiantes[2]. Estos factores están en orden ascendente de abstracción y definen "niveles" de pensamiento sobre la enseñanza. En el nivel 1, el papel del profesor consiste en exponer información y el de los estudiantes en absorberla, si no tienen la capacidad o la motivación para hacerlo correctamente o en cantidad suficiente, el problema es de ellos. En el nivel 2, el papel del profesor consiste en explicar conceptos y principios, así como en presentar información. Estos profesores necesitan diversas destrezas, técnicas y competencias. En este caso el centro de atención está constituido por lo que hace el profesor, en vez de lo que es estudiante, y en esa medida es más reflexivo y sofisticado. En el nivel 3, la atención se fija en lo que hacen los estudiantes: ¿realizan las actividades de aprendizaje adecuadas? Eso es lo que el profesor ha de estimular. La tarea es doble:

1) Maximizarlas oportunidades de que los estudiantes empleen un enfoque profundo.
2) Minimizar las oportunidades de que los estudiantes utilicen un enfoque superficial.

El alineamiento constructivo es un diseño de enseñanza calculado para estimular la participación profunda. Para construir una enseñanza alineada, primero hace falta especificar, el nivel o niveles deseados de comprensión del contenido que se trate. El enunciado de los verbos adecuados de comprensión contribuye a hacerlo. Estos verbos se convierten en las actividades que los estudiantes tienen que realizar y que, en consecuencia, tienen que promover los métodos de enseñanza y abordar las tareas de evaluación, con el fin de juzgar si los estudiantes alcanzan con éxito los objetivos y en qué medida lo hacen. Esta combinación de teoría constructivista e instrucción alineada constituye el modelo del alineamiento constructivo.

1.4 Formular y clarificar los objetivos curriculares.

Al aclarar nuestros objetivos, es esencial que desarrollemos y hagamos explícitos los conocimientos que querremos que aprendan nuestros alumnos. Los máximos niveles de comprensión que queremos que manifiesten los estudiantes al final de un programa conducente a una titulación y, en algunos casos, mucho antes de esta. Nuestro objetivo ahora será clarificar los diferentes niveles de

[2] Para mirar los ilustrativos vídeos sobre los diferentes enfoques, consulte el apéndice 1.

comprensión y convertirlos en objetivos curriculares, que permiten apropiarse del contenido y nivel de la unidad. El reto consiste en concebir nuestros objetivos de enseñanza en términos que se refieran a la activación de la comprensión de los estudiantes en vez de su mera declaración verbal. Un instrumento útil para hacerlo es la taxonomía SOLO, que, cuando se aplica a contenidos concretos, puede especificar objetivos en términos que sean claros tanto para nosotros como para nuestros estudiantes.

SOLO, abreviatura de Structure of the Observed Learning Outcome ("Estructura del Resultado Observado del Aprendizaje"), facilita una forma sistemática de describir como aumenta la complejidad de comprensión de un aprendiz cuando domina muchas tareas académicas. Pueden utilizarse, por tanto, para definir objetivos curriculares, que describan dónde deben de estar operando los estudiantes y para evaluar los resultados del aprendizaje, de manera que podamos saber en qué nivel concreto se están desenvolviendo. Los objetivos contienen criterios para el aprendizaje deseado, con respecto a los cuales están diseñadas las tareas de evaluación, vinculando de ese modo los objetivos con la evaluación. Esa evaluación referida a criterios dirige la atención de los estudiantes a lo que han de aprender, mientras que su actuación nos dice hasta que punto lo han aprendido y en qué medida ha sido eficaz nuestra enseñanza.

Necesitamos un modo de describir como aumenta y se desarrolla la comprensión. A medida que se desarrolla, se estructura y articula más, como se describe en la taxonomía SOLO. Al aprender un tema nuevo, la comprensión atraviesa una fase cuantitativa, de lo uni a lo multiestructural, que supone descubrir cada vez más datos y relaciones entre éstos.

La taxonomía SOLO consta de cinco niveles: (1) preestructural, (2) uniestructural, (3) multiestructural, (4) relacional y (5) abstracto ampliado. En el primer nivel se aloja sólo el término de falta de comprensión. Los niveles (2) y (3) consideran la comprensión como un incremento cuantitativo de lo que se aprehende. En el caso del nivel (4), se incluye una reestructuración conceptual de los componentes, y el reconocimiento de la propiedad de los sistemas como integradores de los componentes, mientras que el paso siguiente al nivel (5) lleva el argumento a una nueva dimensión. Estos son los ladrillos de la comprensión, que forman unas estructuras más o menos elaboradas y originales en los niveles relacional y abstracto ampliado. SOLO proporciona un marco para formular objetivos y describe una jerarquía, en la que cada construcción parcial se convierte en el fundamento sobre el que se construye el aprendizaje posterior.

El objeto de la comprensión es el conocimiento. Es importante distinguir varios tipos. El conocimiento declarativo se refiere al saber sobre las cosas, saber los hechos históricos, lo que postuló alguien, a qué se refieren los términos de una ecuación, etc. se trata de un saber público, sometido a reglas de comprobación que lo hacen replicable y lógicamente consistente, es lo que está en las bibliotecas. El conocimiento procedimental está basado de por sí en destrezas y carece de fundamentos declarativos de nivel superior. El conocimiento condicional incluye el conocimiento procedimental y el declarativo de orden superior en un nivel teórico, de manera que el sujeto sepa cuándo, por qué y en qué se debe hacer esto y no lo otro. Y por último el conocimiento funcional; este conocimiento requiere de un sólido fundamento de conocimientos declarativos, al menos en el nivel relacional, pero también implica saber cómo hacer las cosas, cómo desarrollar procedimientos o aplicar destrezas (conocimiento "procedimental"), y cuándo hacer estas cosas y por qué (conocimiento "condicional"); este conocimiento se encuentra en la experiencia del aprendiz. Estas distinciones son importantes para determinar lo que los estudiantes tienen que comprender, en cuánto saber sobre algo, y lo que tienen que comprender, en cuánto capacidad de aplicarlo. La figura 2 muestra la relación entre estos tipos de conocimiento. En resumen, el conocimiento funcional implica el conocimiento declarativo (la base de conocimientos académicos), el conocimiento procedimental (la posesión de las destrezas) y el conocimiento condicional (saber las circunstancias de su utilización).

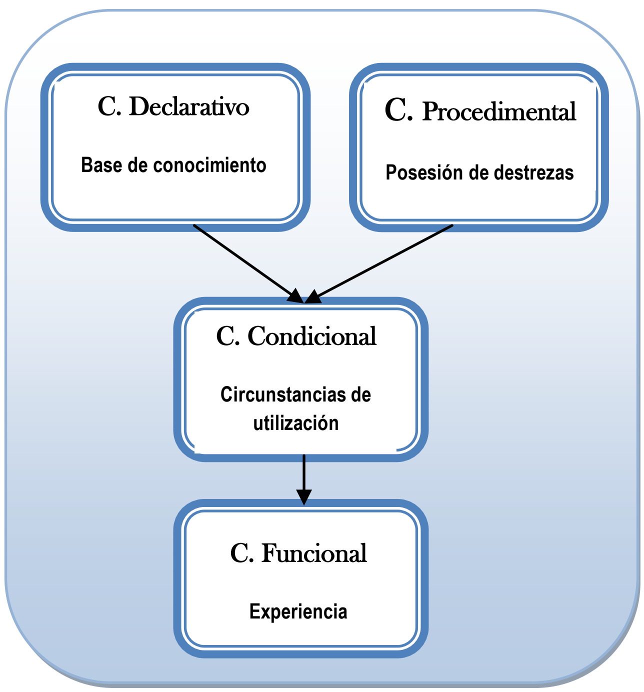


Figura 2. Tipos de conocimientos.

Tradicionalmente la enseñanza universitaria incluye el conocimiento declarativo y procedimental, pero el problema estriba en que la integración de estos se deja al estudiante. Sin embargo como el objetivo es el conocimiento funcional, es necesario desarrollar el conocimiento declarativo hasta los niveles relacional y abstracto ampliado con el fin de proporcionar tanto el conocimiento del contexto específico como el conocimiento condicional que permitan poner en práctica las destrezas de manera adecuada.

1.4.1 Objetivos curriculares

Un objetivo curricular es muy específico, no solo se refiere a temas de contenido, sino que contiene un criterio relativo al nivel de aprendizaje requerido y que las tareas de evaluación pueden encarar. Con el alineamiento constructivo, no solo se definen en términos de contenidos, sino en relación con el nivel de comprensión aplicado a ese contenido.

Antes de decidir unos objetivos concretos tenemos que:

1. *Decidir el tipo de conocimiento*. Los objetivos deben de aclarar qué tipo de conocimiento se quiere y porqué.

2. *Seleccionar los temas a enseñar*, teniendo siempre presente que "abarcar mucho es el peor enemigo de la comprensión".

Figura 3. Creación de objetivos.

3. *Decidir la finalidad de la enseñanza del tema y, en consecuencia, el nivel de conocimiento que desea que adquieran los estudiantes*. Tenemos que establecer prioridades, exigiendo que los temas importantes se comprendan en un nivel superior que los menos importantes. Podemos señalar la importancia asignando un nivel de comprensión a cada tema.

4. *Reunir el paquete de objetivos y relacionarlos con las tareas de evaluación, de manera que los resultados puedan convertirse en la calificación final*.

La asignación de prioridad a los objetivos se hace en términos de los verbos relacionados con cada nivel de comprensión, puesto que los niveles de comprensión pueden describirse como verbos en orden ascendente de complejidad cognitiva, análogo al de la taxonomía SOLO.

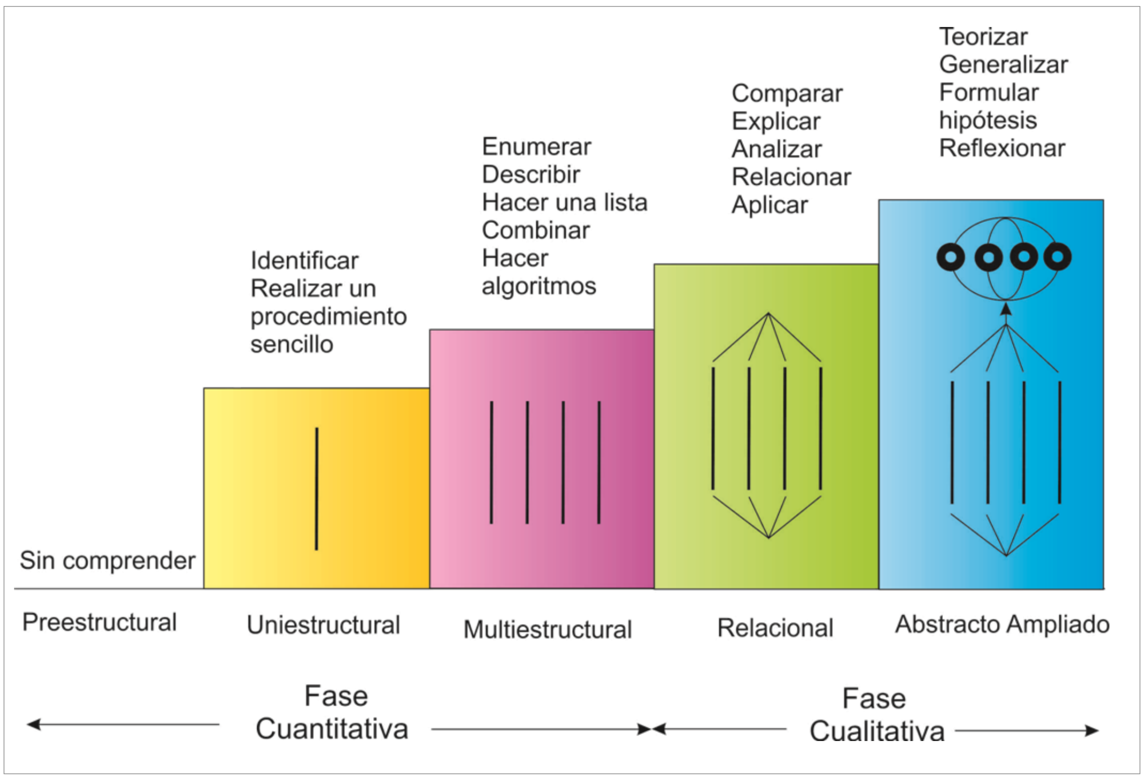


Figura 4. Taxonomía SOLO.

La participación abstracta ampliada está indicada por verbos como teorizar, formular hipótesis, generalizar, reflexionar, generar, etc. Requiere que el estudiante conceptúe en un nivel que trasciende lo tratado en la enseñanza concreta. El siguiente nivel de participación relacional viene indicado por: aplicar, integrar, analizar, explicar y otros por el estilo; indican la relación entre datos y teoría, acción y finalidad. Clasificar, describir, hacer una lista indican un nivel de participación multiestructural; la comprensión de los límites, pero no de sistemas. Memorizar, identificar, reconocer son uniestructurales; directos, concretos, autosuficientes, pero minimalistas. La figura 4 ilustra estos aspectos de manera visual. Un componente relevante se muestra como una pequeña línea vertical, de manera que la uniestructural tiene una; la multiestructural, varias; la relacional las integra como un concepto o estructura, y la abstracta ampliada las generaliza a un área nueva. En cada paso, se relacionan verbos típicos que pueden ser útiles para formular objetivos curriculares.

Como SOLO da una buena idea de la jerarquía del aprendizaje, puede ser una guía útil para definir las categorías de calificación adecuadas para la asignatura de cada cual.

El uso de verbos, en particular para estructurar los objetivos enfatiza que el aprendizaje y la comprensión dependen de la “actividad del estudiante”, mientras que, en la práctica, los verbos pueden utilizarse para alinear objetivos, actividades de enseñanza-aprendizaje y tareas de evaluación.

Para definir cada categoría de calificación de forma cualitativa, se dan los pasos siguientes:

1. Decidir lo que es mínimamente aceptable. Habrá verbos de bajo nivel y otros no muy bien activados de alto nivel.
2. Definir la mejor actuación que pueda prever en esta unidad. Un puñado de verbos abstractos ampliados, quizá.
3. Definir las calificaciones medias. Utilización de mezcla de verbos y tema de contenido.

1.5 Marco para una enseñanza eficaz

La enseñanza eficaz supone establecer un contexto de enseñanza y aprendizaje de manera que los estudiantes tengan todos los estímulos necesarios para reaccionar con el nivel de compromiso cognitivo que requieran nuestros objetivos. Esto tiene varios aspectos: motivación, clima y promoción de actividades específicas de enseñanza y aprendizaje que ofrezcan mayores oportunidades de lograr los resultados deseados.

1.5.1 Motivación

El enfoque sobre la enseñanza de nivel 1 ve la motivación como una cualidad que poseen los alumnos en cantidades diversas, de manera que los buenos estudiantes tienen mucha y los malos estudiantes, poca o ninguna. El pensamiento de nivel 3 considera la motivación como un resultado de la enseñanza. ¿Qué ocurre con la motivación, en el sentido inicial? es decir, al decidir ¿si hacer o no hacer la tarea? Hay dos factores que hacen que los estudiantes quieran aprender algo, pero si alguno de estos factores no se presenta no podrá existir la motivación:

1. La importancia del tema que debe tener algún valor para el alumno.
2. La posibilidad de realización de la tarea de aprendizaje con cierto éxito.

Nadie quiere hacer algo que crea que no merece la pena o que las oportunidades de éxito sean mínimas. En ambos casos, la realización de la tarea se considerará una pérdida de tiempo.

Pero ¿qué hace que una tarea valga la pena? ¿Cómo podemos destacar el valor de la tarea ante los estudiantes? La respuesta general es bastante clara: hacer que su trabajo sea importante para ellos. El trabajo puede ser importante por varias razones, las cuales se traducen en un tipo diferente de motivación:

- El resultado → motivación extrínseca
- Valoración de otras personas → motivación social
- Reflejo de la capacidad del propio yo → motivación de logro
- Resultado del procedimiento seguido → motivación intrínseca

Motivación extrínseca. El estudiante no centra su atención en el proceso, ni siquiera en el producto, sino en las consecuencias del producto: obtener una recompensa (p. ej., aprobar) o un castigo.

Motivación social. Los estudiantes aprenden con el fin de agradar a personas cuya opinión es importante para ellos. Si otras personas importantes para el estudiante valoran el proceso de estudiar o los frutos de una buena educación, la educación puede adquirir una importancia intrínseca para el alumno.

Motivación de logro. Los estudiantes pueden aprender con el fin de hacer que destaquen sus egos compitiendo con otros estudiantes y superándolos, lo que les hace sentirse bien consigo mismos, pero hay que tomar en cuenta que no es deseable favorecer este tipo de motivación, pues acaba con la colaboración, limitando oportunidades de aprendizaje y logro.

Motivación intrínseca: Los estudiantes aprenden por que les interesa la tarea o la actividad misma. En este tipo de motivación no existen signos externos que hagan a los estudiantes sentirse bien. Su principal objetivo es conducir a los alumnos hacia un aprendizaje profundo y un trabajo académico óptimo, fruto del compromiso previo, exitoso y gratificante en la misma área de contenido.

Para finalizar esta sección, es muy importante aclarar, que los profesores no pueden exigir a los estudiantes que estén intrínsecamente motivados, excepto mediante una enseñanza adecuada.

1.5.2 Clima

Cada profesor, como cada institución en su conjunto, crea un clima de aprendizaje mediante las interacciones formales e informales con los alumnos. Este clima tiene que ver con la forma que ellos y nosotros tenemos de sentir las cosas y esto, naturalmente, tiene efectos positivos o negativos sobre su aprendizaje. La distinción de McGregor (ver [2], pág. 87) entre los supuestos de la teoría X y la teoría Y sobre la honradez humana es una buena forma de caracterizar ese clima.

En el clima de la teoría X los profesores asumen que no se puede confiar en los estudiantes. Éstos no quieren aprender; si se les da la menor oportunidad, te engañan, y por tanto, no se les debe permitir tomar ninguna decisión importante acerca de su aprendizaje. Hay que decirles lo que tienen que hacer y lo que tienen que estudiar, comprobar la asistencia y vigilar los exámenes de cuyo resultado dependerá la mayor parte de la nota final. La autoevaluación y la evaluación a cargo de los compañeros están fuera de lugar. Esta forma de pensar conduce muy pronto a un clima de trabajo basado en la ansiedad y la culpabilización del estudiante.

En el clima de la teoría Y los profesores asumen que los estudiantes trabajan mejor cuando tienen libertad y espacio para usar su propio juicio. En consecuencia los profesores que se orientan de acuerdo con la teoría Y adoptan la postura opuesta en cuestiones tales como las tareas de evaluación para llevar a casa, la autoevaluación y la evaluación a cargo de los compañeros, la asistencia a clases, la concesión de la libertad a los estudiantes para que tomen sus propias decisiones etc. Desde luego en el caso de algunos estudiantes, es más probable que engañen cuando se les evalúa mediante trabajos que cuando se hace mediante exámenes vigilados, pero los beneficios educativos son más importantes que ese riesgo. La teoría Y es una metateoría compatible con la visión de la enseñanza de nivel 3: lo principal es apoyar el aprendizaje del estudiante y no combatir sus desviaciones.

Por otro lado la teoría X produce una baja confianza, un riesgo bajo pero también un valor bajo, mientras que la teoría Y produce una elevada confianza, un riesgo elevado, pero también un valor alto, si funciona. Y ése será el objetivo del profesor, hacer que funcione.

Si no se puede confiar en los estudiantes, hay que establecer unas estructuras formales rígidas con sanciones por los incumplimientos. La ansiedad y el cinismo son el resultado, y ambos conducen a un aprendizaje superficial.

La *ansiedad,* producida por ejemplo por la intimidación el sarcasmo, las amenazas de fracaso o el uso continuo de sanciones, crea una necesidad intensiva de salir de la situación. En consecuencia, la conducta del estudiante se dirige a ese fin, en vez de hacia la adecuada participación en la tarea.

El *cinismo* opera de un modo más fríamente cognitivo. La percepción de que el profesor está degradando de alguna manera la tarea o menospreciando a los estudiantes al pedirles que realicen ciertas actividades, provoca el cinismo, cuya reacción consiste en una decisión deliberada de no participar honradamente en la tarea.

Después de analizar con detenimiento las características de estas dos teorías, debemos crear el tipo de clima de aprendizaje que creamos que logra el equilibrio adecuado para un aprendizaje óptimo, dadas nuestras condiciones, nuestra asignatura y nuestros alumnos. Pero también debemos encontrar los elementos de nuestra enseñanza que debemos eliminar para no crear un clima opuesto al deseado. Y esta información deberá obtenerse de una fuente externa confiable que nos pueda proporcionar una perspectiva diferente, pues es muy poco probable que nuestras propias reflexiones sean una fuente productiva y fiable de información sobre los aspectos de su actuación docente de los que no sea consciente.

1.6 Actividades de enseñanza y aprendizaje.

Después de haber estudiado el marco teórico del alineamiento constructivo, es momento de llevarlo a la práctica. Una actividad docente satisfactoria es un espacio de construcción en el que los estudiantes construyen sobre lo que ya conocen, lo cual requiere mucha actividad, interacción con los demás y auto supervisión para corroborar que todo se desarrolle según los planes. El papel del profesor varía desde el muy directivo, especificando procedimientos y corrigiendo errores, al de supervisor, consultor y líder de grupo. El papel adoptado define la naturaleza de las diferentes actividades de enseñanza y aprendizaje (AEA), cada una de las cuales se adapta mejor para lograr un fin diferente.

Los métodos tradicionales de enseñanza, clase magistral, tutoría grupal o individual brindan un mínimo apoyo a los procesos superiores de aprendizaje. Por lo tanto lo que se debe hacer es seleccionar actividades docentes que estimulen a los alumnos a reflexionar, cuestionar y analizar.

Para idear e implementar AEA eficaces, tiene mucho sentido ver lo que tienen en común los contextos en los que se produce un buen aprendizaje. La construcción de una buena base de conocimientos, la percepción de la necesidad de aprender así como la actividad del aprendiz y su interacción son las principales características de un contexto rico de enseñanza y aprendizaje. La fuerza de un método de enseñanza o AEA depende de la mayor o menor presencia de estas características.

Una base poderosa de conocimientos tiene una estructura compleja y carece de errores, estando construida sobre conocimientos sólidos basados en interconexiones accesibles. El crecimiento cognitivo no radica solo en saber más, sino en la reestructuración de lo que ocurre cuando los nuevos conocimientos se conectan con lo que ya se conocía.

De este reconocimiento surgen cuatro preceptos generales:

- **Construir sobre lo ya conocido.** Guiar a los estudiantes a que construyan basándose en sus propias experiencias, atraer y explicar paralelismos, utilizar referencias cruzadas etc.
- **Maximizar la estructura**. Podemos maximizar de muchas maneras las oportunidades de que los estudiantes lleguen a comprender la estructura. No debemos limitarnos a descargar la información nueva sobre el alumno, en intrincadas clases magistrales o en textos mal construidos. La mejor manera de establecer las conexiones para que los estudiantes comprendan la estructura, es fijarlas de forma jerárquica, no horizontal, reconceptuando las situaciones de manera que lo que, en un nivel subordinado son diferencias, en el nivel superior está relacionado.
- **Utilizar el error de forma constructiva**. En el curso de la construcción del conocimiento, es inevitable que los estudiantes creen interpretaciones erróneas que hay que corregir, pero antes hay que descubrir cuáles son, mediante la *evaluación formativa*, la cual consiste en sondear los conocimientos de los estudiantes a medida que se construyen, de manera que cualquier concepción errónea pueda corregirse en la misma fase formativa. Para ello hace falta un clima propio de la teoría Y, en el que los estudiantes se sientan con libertad suficiente para admitir el error. Si creen que se les calificará por el resultado estarán muy a la defensiva.

- **Maximizar la conciencia de los estudiantes acerca de la construcción de su conocimiento.** El profesor, no es quien edifica la base de conocimientos, sino los estudiantes, utilizando los materiales proporcionados tanto por el profesor como por su experiencia.

Las dos últimas características de los contextos de enseñanza y aprendizaje, la actividad del aprendiz y su interacción con otros, facilitan algunos principios generales de la enseñanza y una base de clasificación de las AEA.

1.7 La importancia de la actividad.

El conocimiento se construye mediante la actividad y las interacciones del que aprende. Estudios analizados han revelado la fuerte correlación que existe entre el grado de actividad y la eficiencia del aprendizaje. En estos estudios están presentes dos factores. El primero es cuestión de atención y concentración. La actividad acentúa la emoción, lo que hace que la actuación sea más eficiente. Esta es una razón muy buena para interrumpir los periodos muy largos de clase magistral con actividades intercaladas. El segundo factor es que las actividades deben estar adecuadas a los objetivos académicos.

Aprendemos a través de distintas modalidades sensoriales (tabla 1) y entre más se refuerza una modalidad u otra, más eficaz es el aprendizaje. Las AEA utilizan estas modalidades para proporcionar un acceso múltiple a lo que se ha aprendido.

Cuando aprendemos algo, intervienen tres sistemas de memoria: primero las acciones (aprendemos lo que hacemos), después las imágenes (dónde lo aprendemos) y por último la semántica (cómo describir lo que aprendemos).

Tabla 1.Relación entre modalidades sensoriales y aprendizaje

La mayoría de las personas aprende…
El 10% de lo que lee El 20% de lo que oye El 30% de lo que ve El 50% de lo que ve y oye El 70% de lo que habla con otros El 80% de lo que utiliza y hace en la vida real El 95% de lo que enseña a otras personas.

Algunas actividades son más relevantes para los objetivos de nuestra asignatura que otras. Las aulas ofrecen pocas posibilidades de actividades; pero el problema no es la reducción de AEA, sino la selección de aquellas que posibiliten lo que el profesor desea que consigan los alumnos en el contexto de su ejercicio docente.

Las AEA pueden estar dirigidas por el profesor, por los compañeros o ser auto-dirigidas. Cada clase suscita un tipo diferente de participación del estudiante y un fin concreto y diferente:

1. Las actividades dirigidas por el profesor comprenden las situaciones de enseñanza más formales: clase magistral, tutorías, laboratorios, etc.

2. Las actividades dirigidas por los compañeros abarcan tanto AEA formales, que puede haber propuesto primero el profesor, dejándolas luego en manos de los estudiantes, como actividades propuestas por los estudiantes fuera de clase. Los profesores pueden iniciar actividades para los alumnos, retirándose después; de manera que el papel de los estudiantes resulte cada vez más importante, aunque manteniendo el control último de las sesiones de información y conclusión.

3. Las actividades auto-dirigidas comprenden todas las actividades independientes de aprendizaje y de estudio. El aprendizaje flexible constituye un ejemplo en el que el profesor establece el contexto y los materiales, pero el aprendizaje, como tal, es auto-dirigido.

Cada tipo de AEA se adapta mejor a una determinada forma de aprendizaje.

- Las primeras (dirigidas por el profesor) se adaptan mejor al tratamiento profundo de los temas principales; el profesor es el experto y puede corregir las concepciones erróneas y presentar el punto de vista “oficial”. Son especialmente útiles para centrarse en contenidos prioritarios; impartir, explicar y clarificar información; proporcionar retroinformación; profundizar la comprensión mediante la interacción con los estudiantes.

- Las segundas (dirigidas por los compañeros) resultan particularmente útiles para entrar en detalles, ampliar la comprensión, proporcionar distintos puntos de vista y perspectivas y alcanzar una comprensión personal más fina.

- Las terceras (autodirigidas) son útiles para desarrollar una comprensión profunda, supervisarla y autoevaluarla.

1.7.1 Actividades de enseñanza y aprendizaje dirigidas por el profesor.

a) Clase magistral

La clase tipo magistral es el método estándar de la enseñanza superior. El experto en la materia expone los temas principales que configuran la disciplina o el área profesional. Se parte de una base en que el flujo de información es unidireccional, limitándose normalmente la contribución del estudiante a hacer preguntas y peticiones de aclaración. La explicación detallada del material, la corrección de las ideas erróneas, la aplicación a casos concretos y la comparación de las distintas interpretaciones corresponden al complemento de la clase magistral: la tutoría (asesoría, en nuestro contexto).

La diferencia entre la enseñanza expositiva y la interactiva es básica. La enseñanza expositiva es unidireccional e implica una interacción mínima de los alumnos. Es apropiada cuando el profesor quiere decir algo desde su posición de experto. La enseñanza interactiva es bidireccional y se produce en las clases más pequeñas.

b) *La presentación*

La presentación en clase es una versión más interactiva de la clase magistral que se adapta mejor a las clases pequeñas. En ella se aplican todos los principios de una buena enseñanza: estructuración, utilización de la base de conocimientos, un clima adecuado y así sucesivamente.

La buena improvisación es crucial para aprovechar al máximo la enseñanza interactiva: las preguntas y los comentarios de los estudiantes pueden ser la base para repensar ideas nuevas y estimulantes y reconstruirlas, siempre y cuando se avance en dirección adecuada.

Una técnica importante para la presentación consiste en hacer preguntas a los estudiantes, lo cual requiere de un amplio conocimiento de la estructura del tema flexible así como una gran gama de conocimientos de contenido pedagógico.

Las preguntas pueden ser de distintos tipos:

- Convergentes o divergentes. Las preguntas convergentes se hacen teniendo en mente una respuesta correcta; las divergentes pretenden lograr la auténtica aportación del alumno.

- Nivel alto o bajo. Las preguntas de alto nivel utilizan los verbos de alto nivel: teorizar, reflexionar, elaborar hipótesis. Las preguntas de bajo nivel pretenden obtener respuestas concretas y, en consecuencia, tienden a ser convergentes. Sin embargo las preguntas convergentes no tienen porqué ser de bajo nivel.

Es importante tomar en cuenta que para obtener una respuesta satisfactoria a las preguntas de alto nivel, es preciso dejar un tiempo de espera. Puesto que la calidad de la respuesta aumenta cuanto más tiempo le dedican los estudiantes.

Otra técnica de la presentación son los mapas conceptuales. Crear mapas conceptuales es una experiencia de aprendizaje para los estudiantes, que les ayuda a estructurar explícitamente su pensamiento y, al mismo tiempo, los mapas resultantes indican cómo ve el estudiante la forma en que se relacionan entre sí.

Los mapas conceptuales se diseñaron para presentar una estructura y, al mismo tiempo para describir como ven los estudiantes tal estructura. Esto los convierte en un instrumento muy flexible. Pueden utilizarlos los profesores, tanto con fines de enseñanza como de evaluación, y los estudiantes, para organizar sus ideas.

Cuando el objetivo es la evaluación, la mejor forma de hacerlo es juzgando la complejidad de la disposición de los elementos y la corrección de las interrelaciones. Pueden utilizarse como retroinformación, para ver cómo puede ajustarse la enseñanza, como parte de las evaluaciones finales del aprendizaje del estudiante.

Dar ejemplos pensando en voz alta forma parte de las técnicas de la presentación. Al presentar nuevas tareas o problemas, puede ser útil que el profesor piense en voz alta mientras trabaja con la tarea o problema de manera que los estudiantes vean con mayor claridad lo que se supone que tienen que hacer. El profesor hace el autoanálisis y la reflexión públicamente, poniendo de manifiesto ante los estudiantes como lo hace un experto, con el fin de que ellos lo hagan por su cuenta posteriormente.

c) La asesoría (Tutoría)

En la asesoría, el experto da la información y los alumnos adoptan una postura pasiva. Para que la tutoría sea más útil, el tutor debe plantear tareas ricas en contenido, hacer preguntas sagaces, cuestionar las concepciones erróneas, adoptar las medidas adecuadas a los niveles de comprensión de los estudiantes y moderar las reuniones. Por otra parte, una tutoría debe facilitar un buen debate, fomentar la participación de los estudiantes más callados y tranquilizar a los que intervienen en exceso, así como señalar un centro de interés para el diálogo y la interacción que exija a los estudiantes una preparación previa.

En consecuencia, los profesores deben diseñar adecuadamente los procedimientos y elaborar diferentes interpretaciones y aplicaciones del material de clase. Se trata de una magnífica oportunidad para que los estudiantes vean como otros interpretan el material y juzguen, con la discreta evaluación del profesor, cuáles son las mejores interpretaciones, de manera que también se corrijan las concepciones equivocadas. A menudo, las asesorías de ciencias versan sobre la resolución pública de problemas, lo que exige otras destrezas.

Evidentemente para que los tutores desempeñen un buen papel, es importante darles una formación y una orientación clara acerca de la finalidad de las tutorías y del modo de dirigirlas. En particular, hay que entender las tutorías como complemento de una clase magistral y no como un añadido de la misma.

d) El seminario

El seminario consiste habitualmente en la presentación que hace un estudiante de un tema que han investigado todos los alumnos. Esta actividad debe dirigirse cuidadosamente pues puede convertirse en un enfoque superficial de la enseñanza, sobre todo en los cursos de primer ciclo. El en seminario, el principal beneficiario, si no es que el único, es el presentador, y solo con respecto al aprendizaje del tema presentado. El auditorio no recibe más que otra clase magistral impartida por una persona cuyas destrezas docentes son aún más peligrosas.

1.7.2 Actividades de enseñanza y aprendizaje dirigidas los compañeros.

Hay muchas pruebas de que la interacción entre estudiantes, tanto estructurada formalmente como espontánea, puede enriquecer los resultados del aprendizaje.

Con unas interacciones eficaces de aprendizaje entre estudiantes, es probable que se obtengan los siguientes resultados:

- ✓ Desarrollo de contenidos conocidos
- ✓ Conciencia metacognitiva de cómo se llega a una posición dada.

Y por tanto, hay resultados motivacionales y sociales:

- ✓ Interactuar con los compañeros suele ser más interesante que escuchar clases magistrales.
- ✓ Mejorar el autoconcepto, las destrezas de comunicación y la capacidad para enseñar (modalidad sensorial que refuerza en mayor grado el aprendizaje).

La interacción entre estudiantes puede utilizarse de muchas maneras:

- Grupos de compañeros (siempre diferentes).

1. Grupos de dialogo: son grupos de estudiantes a los que se encomienda una cuestión o tema para que dialoguen sobre él en el transcurso de una clase. Los estudiantes se encargan del desarrollo de la reunión, salvo que al profesor le parezca útil repasar durante los últimos diez minutos. El éxito de esta técnica depende de que los estudiantes tengan claro lo que tienen que hacer.

2. Grupos de debate: los grupos tienen asignada una tarea. El núcleo de esta técnica es el debate intensivo. Las tareas están diseñadas con el fin de que todo el mundo tenga algo que decir. Al finalizar, los grupos informan en sesiones plenarias dirigidas por el profesor, para ayudar a formar y consolidar las estructuras conceptuales que hayan surgido en cada grupo. Collier (ver [2], pág.118) dice que la motivación de los estudiantes es muy alta y se refuerzan las destrezas de alto nivel, siempre que se evalúen. En caso contrario, los estudiantes tienden a divagar por lo que el sistema debe alinearse.

3. Grupos de resolución de problemas: los estudiantes tienen que construir una hipótesis, con unos datos insuficientes para alcanzar una conclusión sin ambigüedades. Por regla general, los distintos individuos se fijan en aspectos diferentes de los datos o utilizan los mismos datos para extraer diferentes conclusiones, de manera que algunos estudiantes, se encuentran constantemente en desacuerdo con otros que están igualmente convencidos de la corrección de sus propias interpretaciones. El choque provocado por ese descubrimiento puede ser muy fuerte y obligar a los alumnos a examinar con detenimiento las bases desde las que llegan a sus propias conclusiones.

   En todos los grupos, los estudiantes deben tener un bagaje que les permita aportar algo, derivado de lecturas suficientes para mantener un diálogo informado, o porque el tema se relacione directamente con la experiencia personal. La intervención del profesor como experto acaba con las ventajas del ejercicio, pues en ese caso los estudiantes tienden a sentarse y esperar que les digan lo que tienen que pensar.
   Cuanto mayor sea el grupo, más probable es la aparición de la llamada "vagancia social", en la que con frecuencia trabajan unos pocos, frente a

la inmensa mayoría. El reto del profesor será que cada miembro se sienta responsable pero sobre todo comprometido.

1.7.3 Actividades de enseñanza y aprendizaje autodirigidas.

Los objetivos de todas las instituciones de enseñanza superior se refieren, implícita o explícitamente, al desarrollo de habilidades para un aprendizaje autodirigido. Cuando los cuerpos básicos de conocimiento y los conocimientos relativos a la práctica profesional cambian con la rapidez que lo hacen, es inútil enseñar a los estudiantes todo lo que necesitarán conocer en el desarrollo de sus carreras profesionales. Lo que hay que hacer, es enseñar a los estudiantes a aprender, a buscar información nueva, a utilizarla y evaluar su importancia, a resolver problemas profesionales nuevos, que no aparecen en los libros de texto. Necesitan destrezas metacognitivas de alto nivel y un cuerpo abstracto de teoría sobre el que desarrollarlas, de manera que puedan juzgar reflexivamente su carácter más o menos satisfactorio para afrontar problemas nuevos y la manera de desenvolverse mejor. Es lo que se conoce como aprendizaje para toda la vida.

Nos ocuparemos de tres niveles de aprendizaje autodirigido.

- ✓ Técnicas genéricas de estudio.

Las técnicas genéricas de estudio son formas de administrar el tiempo y el espacio.

- ✓ Técnicas de estudio relacionadas con contenidos concretos de aprendizaje.

Estas técnicas tienen como finalidad enseñar no solo lo que se quiere que aprenda el estudiante, sino también como han de aprenderlo. Chalmers y Fullers (ver [2], pág.122) proponen que los profesores incluyan en su enseñanza secciones dedicadas a estrategias para adquirir información (tomar apuntes, memorizar, lectura rápida), estrategias para trabajar con la información (explicar ideas, organizar ideas, escribir resúmenes), estrategias para confirmar el aprendizaje (tratamiento de tareas de evaluación), etc. En resumen, la construcción del conocimiento es mucho más eficaz cuando las herramientas necesarias para construirlo se utilizan sobre la marcha y con esmero.

- ✓ Técnicas metacognitivas de aprendizaje.

Por último están las destrezas de autodirección que se centran en lo que hace el aprendiz en contextos nuevos, que es el objetivo último de la enseñanza universitaria. Perkins (1991) (ver [2], pág.123) caracteriza la diferencia entre las técnicas de estudio de la sección anterior y las de esta como la diferencia entre el acto de “trascender la información dada” (TID) y la actuación “sin la información dada" (SID). En la enseñanza TID, la instrucción directa va seguida por actividades orientadas a la reflexión que suponen un reto para los estudiantes, de manera que lleguen a aplicar, generalizar y refinar su comprensión: la enseñanza convencional en su máximo nivel. La enseñanza SID trasciende la instrucción directa porque en ella se estimula a los estudiantes mediante preguntas y apoyándolos para que hallen su propia vía de salida. Preguntas y problemas que no se habían visto y que tampoco están en sus libros de texto. En dichas preguntas los verbos implicados son en su mayoría de carácter abierto: planificar, teorizar, elaborar hipótesis, generar. Sin embargo, hay también una importante faceta de supervisión, una función de observación de lo que se desarrolla y la comprobación de los resultados con respecto a su eficiencia.

Tabla 2. Actividades de enseñanza y aprendizaje.

<table>
<tr><td colspan="3">En el alineamiento constructivo las actividades de enseñanza y aprendizaje son la base de la construcción de significados ya que favorecen la creación de ambientes educativos enriquecidos y distribuidos. Las AEA buscan que los resultados de aprendizaje esperados sean alcanzados.</td></tr>
<tr><td>Dirigidas por el profesor

Comprenden las situaciones de enseñanza más formales. Se adaptan mejor al tratamiento profundo de un tema. Son especialmente útiles para centrarse en contenidos prioritarios.</td><td>Dirigidas por los compañeros

Particularmente útiles para entrar en detalles, ampliar la comprensión y ofrecer distintos puntos de vista y perspectivas.</td><td>Autodirigidas

Desarrollan destrezas metacognitivas de alto nivel. Útiles para desarrollar una comprensión profunda, supervisarla y autoevaluarla.</td></tr>
<tr><td>Ejemplos:

• Clase magistral
• Presentación
  ▪ Preguntas a estudiantes
  ▪ Pensar en voz alta
  ▪ Mapas conceptuales
• Asesoría
• Seminario</td><td>Ejemplos:

• Grupos de diálogo
• Grupos de debate
• Grupos de resolución de problemas</td><td>Ejemplos:

• Técnicas genéricas de estudio
  ▪ Manejo de apuntes
  ▪ Administración del tiempo
• Técnicas de estudio relacionadas con contenido
  ▪ Subrayar palabras clave
  ▪ Leer buscando ideas principales
  ▪ Saber tomar apuntes
  ▪ Redactar trabajos
• Técnicas metacognitivas de aprendizaje.
  ▪ Se abordan problemas.</td></tr>
</table>

1.8 Principios para evaluar la calidad del aprendizaje

El qué y el cómo aprendan los estudiantes depende en gran medida de cómo crean que se les evaluará. En la enseñanza alineada, la evaluación refuerza el aprendizaje y es el principal complemento de la enseñanza. Si se hace mal, el resto se desmorona.

Los profesores podemos considerar los objetivos curriculares como el pilar central de la enseñanza en un sistema alineado, pero nuestros alumnos piensan de otro modo. Los estudiantes aprenden lo que creen que se les pondrá en el examen. En un sistema no alineado, en el que los exámenes no reflejan los objetivos, esto se traduce en un aprendizaje superficial inadecuado.

Para el profesor, la evaluación está al final de la sucesión de acontecimientos de enseñanza y aprendizaje, pero, para el estudiante, está al principio. Si las actividades de enseñanza del profesor y las actividades de aprendizaje del alumno están dirigidas hacia el mismo objetivo y las tareas para la evaluación se refieren claramente a los criterios de aprendizaje contenidas en el currículo; al prepararse para las evaluaciones, los estudiantes estarán aprendiendo el currículo.

Lo primero que hay que tener claro es la razón para evaluar. Hay muchas y buenas razones por las que debemos evaluar a los estudiantes, pero dos de ellas son de excepcional importancia:

1. La evaluación formativa, cuyos resultados se utilizan con fines de retroinformación. Tanto los estudiantes como los profesores necesitan saber cómo se está desarrollando el aprendizaje. La retroinformación puede servir tanto para mejorar el aprendizaje de estudiantes concretos como para mejorar la enseñanza.
2. La evaluación sumativa, cuyos resultados se utilizan para calificar a los estudiantes al acabar una unidad, un curso o para la expedición del título o diploma al final de un programa.

La evaluación formativa es inseparable de la enseñanza. De hecho la eficacia de los diferentes métodos de enseñanza está directamente relacionada con su capacidad de proporcionar retroinformación formativa. En un buen sistema de aprendizaje, los estudiantes aprender a asumir la función formativa, supervisando ellos mismos lo que aprenden.

Por su parte la evaluación sumativa se lleva a cabo después de concluir el episodio de enseñanza. Su finalidad consiste en comprobar hasta qué punto los estudiantes han aprendido bien lo que se supone que han aprendido. El resultado es la calificación, lo cual temen los estudiantes pues su futuro depende de él.

No deben confundirse las funciones formativas y las sumativas. Para la función formativa, los estudiantes deben sentirse libres para manifestar su propia ignorancia y los errores de su pensamiento, pero si los resultados se utilizan para calificar, estarán muy motivados para ocultar sus posibles puntos débiles.

1.8.1 Dos modelos de evaluación sumativa.

Existen dos modelos de evaluación sumativa. *El modelo de medida y el modelo de niveles*. El primero está diseñado para cuantificar las características de cada individuo con el fin de compararlos entre sí o con normas de la población general. Esa evaluación está *referida a normas (ERN)*. El segundo está diseñado para evaluar los cambios de rendimiento a consecuencia del aprendizaje, con el fin de comprobar si se ha aprendido algo y hasta qué punto se ha aprendido bien. Esa evaluación está *referida a criterios (ERC)*. Este modelo es relevante para la evaluación sumativa en la universidad.

Nuestra función como profesores consiste en establecer hasta qué punto han aprendido nuestros estudiantes siempre dentro de lo que se preveía que tenían que aprender. Para descubrirlo necesitamos en primer lugar, tener claro lo que nuestros estudiantes tienen que aprender, en términos de cualidades o actuaciones que definen las categorías de calificación y después idear unas tareas para evaluación que nos digan como lo han hecho. La primera tarea es fijar los objetivos.

El currículo se divide en conocimientos declarativos y conocimientos funcionales. Ambos tienen su sitio en la educación superior, pero, cuando llega la evaluación, el conocimiento funcional se evalúa con frecuencia como si fuera declarativo. Los estudiantes dicen lo que han aprendido en vez de demostrarlo de forma eficiente.

Necesitamos un marco conceptual que guíe las decisiones relacionadas con la evaluación. El marco más corriente es cuantitativo: reducimos las actuaciones a la agregación de unidades en una escala de puntos. Ese marco violenta la estructura del conocimiento en el nivel superior y envía mensajes que inducen a error a los estudiantes acerca de lo que tienen que hacer para demostrar su competencia.

El marco alternativo es cualitativo ya que aborda las formas de conocimiento a alcanzar al final de la enseñanza, expresadas como niveles diversos de aceptabilidad en el sistema de objetivos y de calificaciones. Este marco requiere del profesor unos niveles de juicio más elevados que los exigidos por la evaluación cuantitativa acerca del grado en que la actuación de los estudiantes concuerda con los objetivos.

Las tareas para evaluación han de ser auténticas en relación con los objetivos; estos tienen que estipular una calidad de actuación que exija después la tarea para evaluar. La autenticidad nos lleva a considerar la evaluación contextualizada o descontextualizada, la evaluación holística o analítica y la evaluación convergente o divergente.

El conocimiento declarativo puede evaluarse válidamente fuera de contexto, pero el conocimiento funcional está siempre en un contexto. La autenticidad requiere la evaluación de la totalidad del acto y no de varias partes del mismo que se sumen al final. La evaluación analítica no hace justicia a la integridad de lo que se aprende y desdibuja la importancia diferencial de los temas, lo que puede llevar a unas consecuencias absurdas. La evaluación puede estar muy sesgada a favor de los procesos convergentes, pero muchas destrezas complejas importantes son abiertas o de carácter divergente.

Tradicionalmente, el profesor es quien establece las tareas, selecciona las pruebas y hace los juicios sumativos. Hay, sin embargo, muchas razones por las que los estudiantes pueden participar en parte o en todos estos procesos de evaluación. Los estudiantes aprenderán siempre contenidos relevantes de maneras o formas que el profesor no puede prever y no puede descubrir si sólo se platean preguntas cerradas. Si se permite que los estudiantes propongan sus propias preguntas o seleccionen sus propias pruebas del aprendizaje, facilitamos la evaluación de estos resultados improvistos. La autoevaluación y la evaluación a cargo de compañeros no solo agudizan el aprendizaje de contenidos, si no que dan ocasión de que los estudiantes aprendan los procesos metacognitivos de autosupervisión, que se les pedirá que desarrollen en la vida profesional y académica.

La mayor parte de lo que se sabe acerca de la fiabilidad y la validez de la evaluación se basa en el modelo de medida. Cuando ese modelo se viene abajo, lo mismo sucede con nuestros supuestos acerca de lo que es “buena” prueba. Cuando se desmantela el andamiaje cuantitativo, descubrimos que las ideas de fiabilidad y validez dependen cada vez más de la responsabilidad profesional básica del profesor, que consiste en hacer juicios sobre la calidad del aprendizaje.

En resumen, se han presentado dos modelos diferentes de evaluación, es importante comprender a lo que se refiere cada uno y comprometernos después con uno u otro (Tabla 3), ya que es contraproducente aplicarlos mezclados, pues están diseñados para realizar funciones diferentes; sin embargo es común que entre los docentes universitarios haya poca claridad entre las diferencias importante de ambos modelos y se confundan, por lo que consideramos es muy importante dirigir nuestra atención en este aspecto.

Tabla 3. Fórmulas de evaluación.

Fórmula de evaluación 1(Fuente: el modelo de medida)
Referida a normas: • El conocimiento se concibe como un agregado de unidades; • las tareas de evaluación están descontextualizadas; • evaluación analítica: proceso e información en términos cuantitativos; • el profesor controla todos los aspectos de la evaluación Este modelo tiene una tecnología sofisticada, muy eficaz para comparar a unos estudiantes con otros y para tomar decisiones administrativas sobre estos. Dado que violenta la estructura del conocimiento, no se refiere al saber, sino a la medida de ciertas características de las personas.
Fórmula de evaluación 2 (Fuente: el modelo de niveles)
Referida a criterios: • El conocimiento se concibe como se expresa en los objetivos; • normalmente, se evalúa cualitativamente(aunque los criterios pueden ser cuantitativos, cuando sea conveniente); • las tareas para evaluar están contextualizadas, con el fin de valorar el conocimiento funcional, y descontextualizadas, para evaluar el conocimiento declarativo; • la evaluación es esencialmente holística, pero podría ser analítica para determinar el progreso en curso; • información en categorías cualitativas(convertibles, quizá más tarde, en escalas cuantitativas); • distintos aspectos de la evaluación pueden ser controlados por el profesor, por los compañeros o por el mismo individuo, según mejor se adapte a la tarea a aprender.
¡Escoja su fórmula!

Hecha nuestra elección entre la fórmula 1 y la fórmula 2, nos hallamos ante la cuestión práctica de efectuar nuestra evaluación sumativa de acuerdo con la fórmula escogida. Tenemos que decidir que modalidades concretas de evaluación se adaptan mejor a nuestros objetivos, como evaluar utilizando estas tareas y hacer enunciados sumativos de rendimiento, para después, informar de los resultados.

2. Aplicación del alineamiento constructivo al aprendizaje conceptual de la derivada.

El objetivo que nos planteamos dentro del curso fue la reconstrucción del concepto de derivada que permitiera al estudiante una comprensión profunda del mismo que incluyera una imagen conceptual (ver [12], págs.151-169) rica e integrada con la definición formal.

Para que el estudiante logre posteriormente una correcta asimilación de la definición formal, que implique un buen manejo algebraico del concepto y sus aplicaciones; tomando en consideración las características de los alumnos y el entorno, consideramos conveniente desarrollar un proceso de construcción del concepto, análogo al de la creación del Cálculo [3], partiendo de problemas concretos y avanzando gradualmente hasta lograr las concepciones más abstractas.

Para la aplicación del marco teórico, se requirió del diseño y utilización de una gran cantidad de material. Se realizaron varias secuencias didácticas en las que se incorporaron los diferentes tipos de actividades que señala Biggs, las diferentes formas de evaluación así como la implementación de distintas actividades para promover la motivación y crear un buen clima. Debido a la extensión de este trabajo, en esta tesis nos restringiremos a mostrar una parte del material, que a nuestra consideración, muestra un panorama de la aplicación del marco, dándonos así la oportunidad de poder mostrar a detalle cada paso en su realización.

El material elegido consiste en dos secuencias didácticas que presentamos en este capítulo. Estas secuencias incluyen el planteamiento de sus respectivos objetivos, algunos ejemplos de evaluación para objetivos específicos, y el seguimiento de algunas actividades dirigidas por el profesor, actividades que además de ser diseñadas para la realización de los objetivos deben estructurarse considerando el manejo del clima y la motivación, aspecto cuyo análisis no está considerado en esta tesis, pero que de igual manera es un factor importante por lo cual se deja como un trabajo posterior.

[3] Ver en el Apéndice II los principales problemas que dieron origen al Cálculo.

2.1 Principios básicos utilizados.

Las secuencias se diseñaron bajo la estructura que señala el alineamiento constructivo. Por lo que, de acuerdo con esta teoría buscamos alinear:

- los objetivos, con
- las actividades
  - ✓ que realiza el profesor,
  - ✓ que realiza el estudiante.
- y la evaluación
  - ✓ Formativa
  - ✓ Sumativa

dentro de un clima de confianza y motivación que propicie el aprendizaje y desarrollo de los estudiantes.

Para la elaboración de los objetivos utilizamos los cuatro principios que menciona Bigss. Iniciando con la selección de los temas, elegimos conceptos claves que nos ayudaran a reforzar la enseñanza partiendo de lo ya conocido usando nociones básicas y concretas. Los ordenamos en forma jerárquica de acuerdo al grado de complejidad cognitiva y tomando en cuenta el nivel de abstracción de los conceptos incluidos así como el de los estudiantes, en la que cada construcción parcial utilizando el enfoque de la taxonomía SOLO se convierte en el fundamento sobre el que se construye el aprendizaje posterior. Prosiguiendo a la elección del tipo de conocimiento, determinamos que los alumnos deben alcanzar un conocimiento funcional, puesto que la enseñanza universitaria y en particular la FCFM así lo requiere. En cuanto al nivel de conocimiento, escogimos el relacional, el cual ya es un nivel profundo en la taxonomía SOLO y cuyos verbos se adaptan a la perfección con nuestros objetivos y al curso impartido; el nivel abstracto ampliado es el siguiente nivel necesario al que deben acceder los alumnos, pero con una buena base de conocimientos este se alcanzará durante los siguientes semestres.

Es importante hacer notar que para la construcción de estas secuencias, partimos de un nivel de pensamiento 3 con respecto a la enseñanza, basado en un enfoque en el que el aprendizaje sucede a través del comportamiento activo del estudiante: “el alumno aprende lo que él hace, no lo que el profesor hace” .Esta concepción de visualizar las acciones del estudiante, diseñadas y orientadas por el profesor, cómo algo primordial es el motivo por el cual esta teoría de la enseñanza se separa de los otros modelos y es una de las principales características que marca la diferencia con la enseñanza tradicional (con clases tipo magistral).Haciendo uso de este nuevo enfoque se logró un mayor énfasis en el papel que desempeña el estudiante, resaltando la importancia de su actividad y de su participación, en el diseño de los objetivos así como en el de las actividades; buscando de esta manera el involucramiento positivo de los estudiantes para poder guiarlos hacia la construcción de su propio conocimiento.

Siguiendo con los principios de Biggs, estas secuencias se crearon haciendo uso de la práctica reflexiva. El proceso a seguir para su elaboración fue el siguiente: se fueron aplicando diferentes secuencias a los alumnos, para después estudiar y analizar sus resultados, buscando elementos que fuera posible mejorar en el diseño de las actividades, por ejemplo actividades que no condujeran de manera adecuada hacia los objetivos, o que no promovieran la actividad e interacción por parte de los estudiantes, siempre utilizando la reflexión para poder mejorarla enseñanza por parte del profesor, y el aprendizaje por parte de los alumnos.

Por otra parte, considerando el aspecto de la motivación, los ejercicios presentados en las secuencias se colocaron en orden ascendente de complejidad, empezando con los ejercicios más sencillos y aumentando gradualmente el nivel de complejidad, buscando de esta manera fomentar la confianza en sí mismos al iniciar obteniendo éxitos a lo largo de su aprendizaje.

Fue muy importante para nosotros lograr una motivación intrínseca y el involucramiento de los estudiantes, por lo que se realizó, al principio del curso, una encuesta que nos permitiera tener conocimiento de que es lo que más les gustaba e interesaba a nuestros alumnos (la encuesta se muestra en el apéndice I).De esta encuesta nos pudimos percatar que el uso de la computadora y sus aplicaciones fue la actividad preferida de los estudiantes, por lo que utilizamos este resultado como herramienta para el desarrollo de varias de nuestras actividades tratando de sacar de ésta el mayor provecho.

Complementando la parte de la motivación decidimos que crear un buen clima sería la última pieza para desarrollar con éxito nuestras secuencias, por lo que apoyados en la teoría Y, creamos un clima en el que básicamente la confianza en sí mismos y la libertad para poder expresar sus ideas les permitió encontrar el gusto y el interés por seguir aprendiendo.

En todas las secuencias se empleó un análisis numérico, geométrico y algebraico que brindaba un mayor número de oportunidades para reforzar el aprendizaje. Se emplearon ejercicios que permitían a los estudiantes partir de sus conocimientos y experiencias previas, para poder encontrar soluciones y siempre se buscó colocar las actividades de una forma jerárquica, para que al terminar de desarrollar cada secuencia los alumnos fueran capaces de poder relacionar los resultados obtenidos y construir su propio conocimiento. Creando así y de forma intuitiva un proceso de abstracción y generalización que los llevara a la construcción de la teoría.

Dentro de esta construcción tomamos en cuenta que entre más se refuerza cada modalidad sensorial, más eficaz es el aprendizaje. Por lo que siempre se trató de incluir todas y cada una de las modalidades sensoriales con las que el ser humano aprende (tabla 1).

Para finalizar, en cuanto a la parte que se refiere a la evaluación, la del tipo formativo fue la más utilizada, puesto que siempre se buscó usar la retroinformación corrigiendo errores y resolviendo dudas que obstruyeran la comprensión y el aprendizaje. Al terminar cada actividad o sesión se hacían diferentes evaluaciones formativas, por ejemplo pidiendo a los alumnos reconstruir la información más relevante. Para culminar la evaluación de cada secuencia además de las evaluaciones formativas ya realizadas se aplicaron evaluaciones sumativas para verificar en algunas ocasiones qué nivel de comprensión se encontraban los alumnos y en otras para asegurarnos de que el grado del aprendizaje esperado fuera el planteado mediante los objetivos.

2.2 Razón de cambio.

Esta primera secuencia tiene como tema central uno de los conceptos indispensables para la comprensión del concepto de derivada: la razón de cambio.

Para crear esta secuencia nos dimos a la tarea de realizar una presentación que nos ayudara a introducir el tema de razón de cambio de una manera más interactiva buscando la participación y atención de los estudiantes. La didáctica consistía en plantear a los alumnos alguna situación física referente al tema, para después ir realizando una serie de ejercicios y preguntas que iríamos resolviendo de manera conjunta y cuya resolución los conduciría a la respuesta del problema. Cada pregunta y ejercicio se creó de manera que sus respuestas fueran una pieza clave para la construcción de su conocimiento mediante su propio razonamiento.

El alumno debía analizar el problema planteado y obtener de él los datos relevantes así como las diferentes representaciones del fenómeno (numérica y visual) para después, utilizando esta información, realizar actividades complementarias que le permitieran realizar procesos de abstracción y generalización (deducción de representaciones algebraicas y geométricas).

Los conocimientos previos requeridos fueron los conceptos de función; funciones reales constantes, crecientes y decrecientes; así como un manejo fluido entre las distintas representaciones de una función: verbal, numérica, visual y algebraica para funciones elementales.

2.2.1 Objetivos y Evaluación

Para la creación de los objetivos de esta secuencia utilizamos verbos desde el nivel uniestructural, hasta el nivel relacional. Ya concluida su elaboración los relacionamos con la evaluación, debido a la extensión de la evaluación solo presentamos algunos ejemplos que muestran claramente la actividad requerida que mide el grado de comprensión requerido por el o los verbos de algún objetivo específico.

Objetivo general

Dada una función real sencilla, expresada en forma verbal, numérica o algebraica, el estudiante será capaz de bosquejar su gráfica **analizando** si sus razones de cambio son constantes, crecientes o decrecientes y de manera inversa, dada la gráfica de una función real, **describir** el comportamiento de sus razones de cambio.

Objetivos específicos

Dentro de esta secuencia el estudiante deberá de ser capaz de:

1. **Calcular** razones de cambio de funciones expresadas en forma numérica y algebraica.
2. **Identificar** el concepto de razón de cambio en funciones expresadas en cualquiera de sus modalidades: verbal, numérica, visual y algebraica.
3. **Reconocer** y **aplicar** que una función cuya razón de cambio es constante tiene asociado un modelo algebraico lineal cuya gráfica es una recta y la razón de cambio es la pendiente de la recta.
4. **Relacionar** el concepto de razón de cambio con los de pendiente, secante y velocidad.
5. **Diferenciar** las funciones (expresadas en cualquiera de sus modalidades) cuya razón de cambio sea constante o no constante.
6. **Identificar** la forma de la gráfica (incluyendo el tipo de concavidad) de una función no lineal (expresada en forma verbal, numérica o algebraica) analizando el comportamiento creciente o decreciente de sus razones de cambio.
7. Dada la gráfica de una función, **describir** por intervalos el comportamiento de sus razones de cambio: constante, creciente o decreciente.

Ejemplo de evaluación.

Ejercicio: En un sistema coordenado, dibuja la gráfica de la magnitud *y* en función de la magnitud *t*, de tal forma que se cumpla todo lo siguiente:

a) La razón de cambio de y con respecto a t es negativa de t=1 a t=5.
b) La razón de cambio de y con respecto a t es positiva de t=5 a t=9.
c) La razón de cambio de y con respecto a t es decreciente de t=1 a t=3.
d) La razón de cambio de y con respecto a t es creciente de t=3 a t=5.
e) La razón de cambio de y con respecto a t es creciente de t=5 a t=7.
f) La razón de cambio de y con respecto a t es decreciente de t=7 a t=9.

2.2.2 Secuencia didáctica A.

2.2.2.1 Funciones con razón de cambio constante.

Iniciamos nuestra secuencia planteando a los alumnos una situación física, y el contexto elegido para cumplir nuestro objetivo fue en esta ocasión el movimiento de un carro en línea recta. Situación que tiene la característica de ser muy familiar para ellos y además sencilla.

Mostramos el enunciado de una manera visual (fig. 4) y escrita (fig. 5) para reforzar así modalidades sensoriales visuales y auditivas que irán creando un aprendizaje más efectivo.

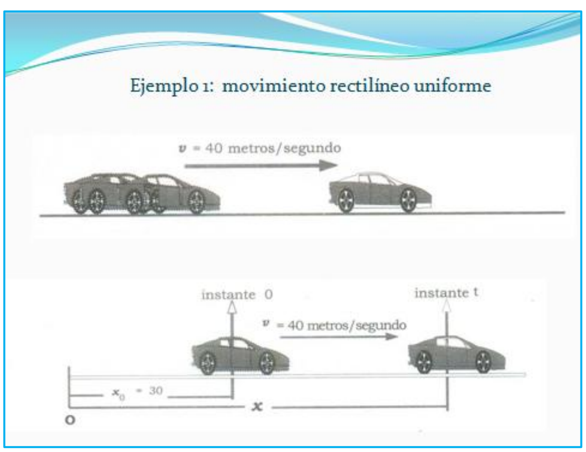


Figura 4. Planteamiento visual.

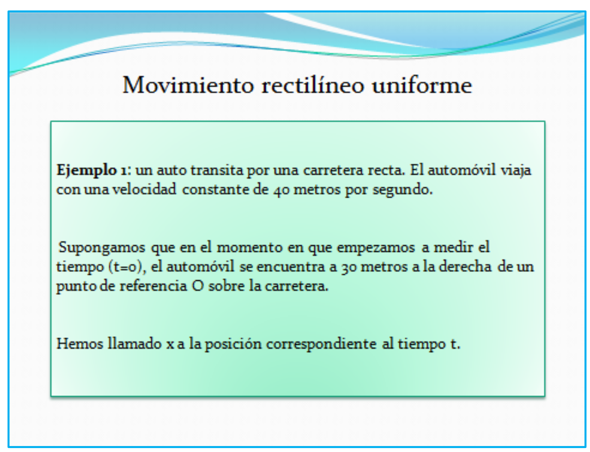
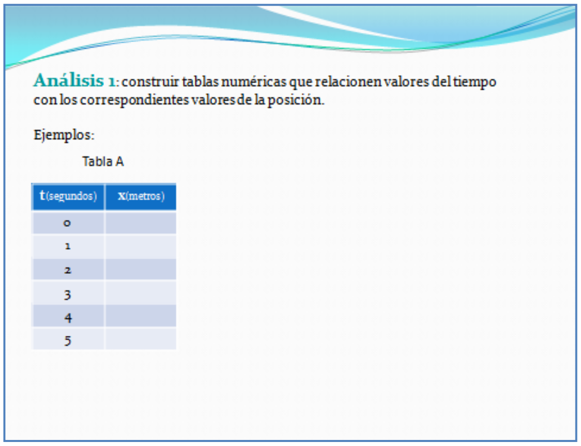


Figura 5. Planteamiento escrito.

Después de haber hecho la presentación de la situación, verificamos la comprensión del enunciado pidiendo que los alumnos construyeran una primera tabla en la que tenían que escribir el valor de la distancia recorrida por el automóvil de segundo en segundo, sólo se les mostró la tabla a llenar (ver fig.6), donde los únicos valores que aparecían en la tabla, eran los valores de los segundos (en dicha tabla, conforme los estudiantes daban sus respuestas, se iban mostraban los valores correspondientes previamente obtenidos (ver fig.7)).



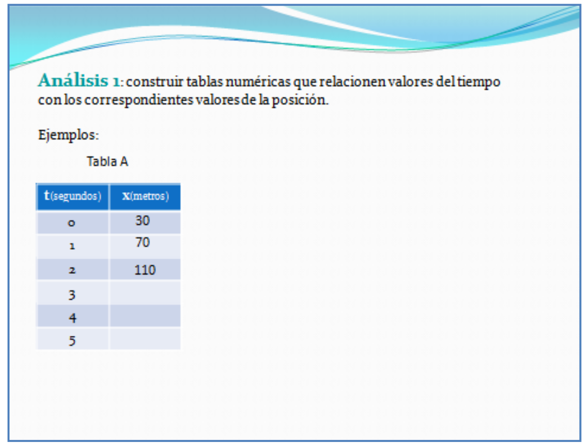


Figura 6. Tabla de valores incompleta.

Figura 7. Tabla de valores completada.

Una vez que se terminó de llenar la tabla A se preguntó cuál sería la distancia recorrida cada dos segundos, construyendo rápidamente la tabla B, y se les pidió que elaboraran las tablas C y D correspondientes a valores del tiempo cada medio y cada cuarto de segundo (ver fig. 8). Esta actividad permite inducir una reflexión sobre las características del movimiento uniforme (a través de preguntas o de ejemplos de movimiento).

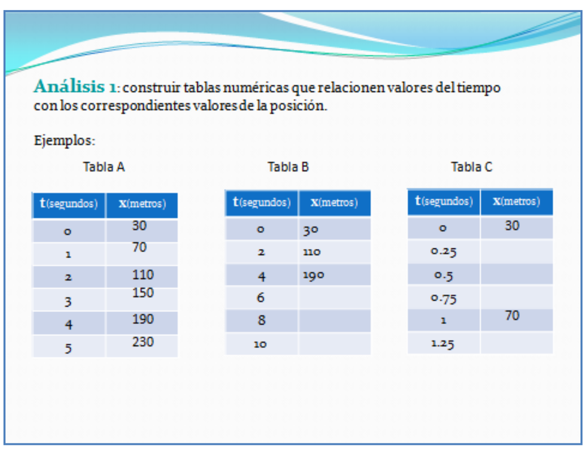


Figura 8. Llenado de tablas.

Ya con las tablas completadas, escogimos parejas de valores de la posición en la tabla A y los alumnos fueron calculando los cocientes del cambio de posición dividido por el cambio en el tiempo, conforme los iban obteniendo los revisábamos grupalmente comparándolos con los resultados correctos que mostrábamos en las tablas. En seguida escogimos otros valores de las siguientes tablas y realizamos el proceso anterior. Por último analizamos los valores obtenidos de los cocientes calculados y con esto los alumnos pudieron constatar que el resultado obtenido fue el mismo (ver fig.10).

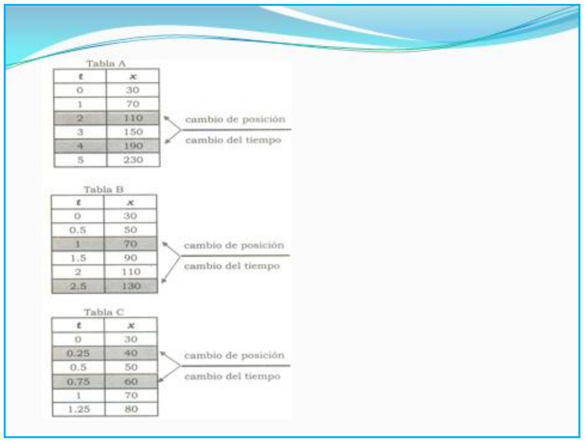


Figura 9. Elección de cocientes.

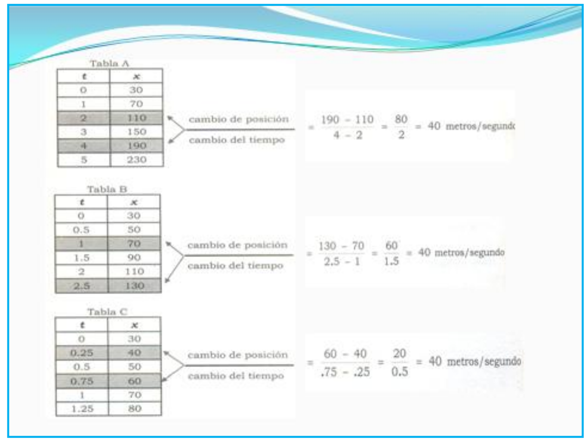


Figura 10. Calculo de cocientes.

Es interesante notar que en diferentes grupos, siempre hay asombro por parte de algunos alumnos al percatarse de que obtenían el mismo valor a pesar de haber elegido diferentes cocientes de distintas tablas, y entonces surge la pregunta de ¿por qué sucede eso?, ¿qué significado tiene? Preguntas que al estar siendo aclaradas nos ayudaron a introducir el concepto de razón de cambio constante.

Siguiendo con el diseño de la secuencia, después de un análisis numérico, pasamos al análisis algebraico, análisis que utilizamos para deducir una fórmula que describiera de manera general la posición x del automóvil en cualquier tiempo t. El proceso que seguiremos se basa básicamente en la reinterpretación y acomodo de los datos mencionados en el problema.

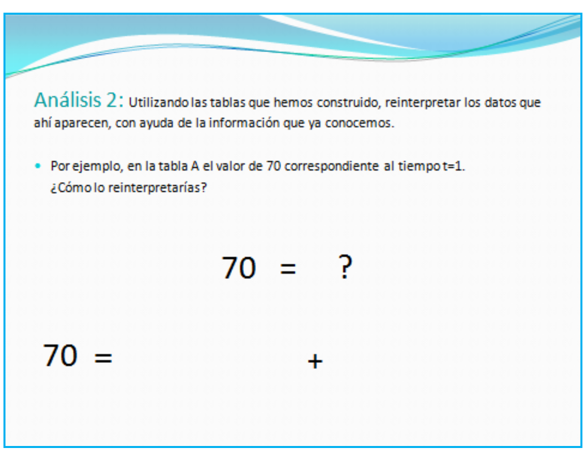


Figura 11. Actividad.

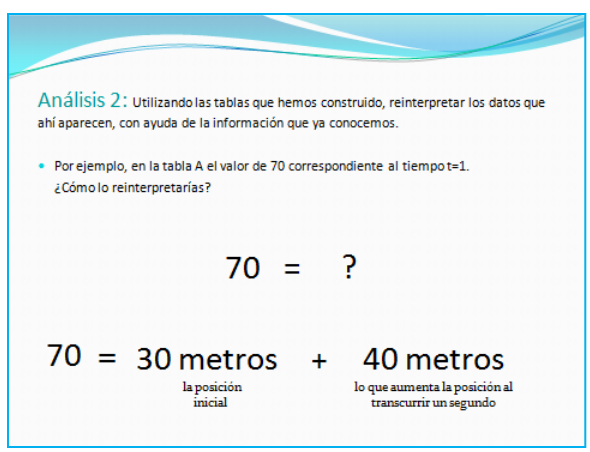
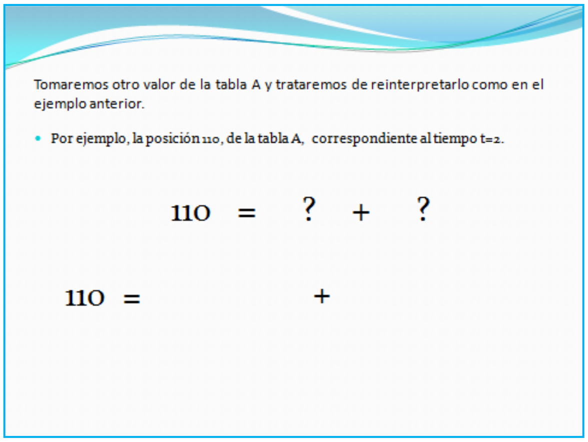


Figura 12. Reinterpretación de datos.

Por ejemplo: tomamos el valor específico 70 correspondiente al tiempo 1 de la tabla A, valor que los alumnos reinterpretaron haciendo uso de la información ya conocida.

El profesor fue haciendo preguntas y dando pistas para que en grupo pudieran realizar este primer ejercicio (ver fig.11 y 12). Después, habiendo resuelto el primer ejercicio se les pidió que realizaran el mismo procedimiento del ejercicio anterior pero ahora para un valor diferente de 70 tomado de la misma tabla (ver fig. 13 y 14).



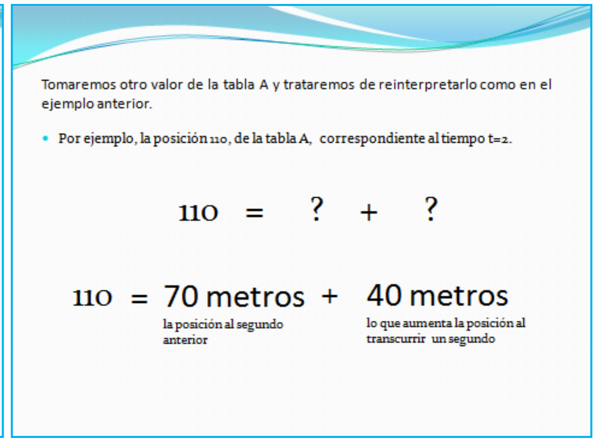
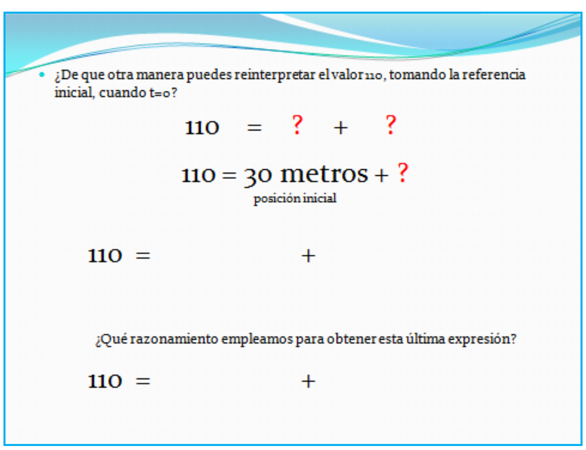


Figura 13. Actividad.

Figura 14. Reinterpretación de datos.

Después de haber realizado dos ejercicios similares de reinterpretación de datos, enseguida se les pidió que tomaran el valor del ejercicio anterior para reinterpretarlo pero ahora utilizando la referencia inicial, cuando t=0. Ahora tenían que reinterpretar el mismo valor pero de diferente manera, proceso en el que con algunas pistas del profesor y un nuevo análisis los datos logaron culminar (ver fig.15 y 16).



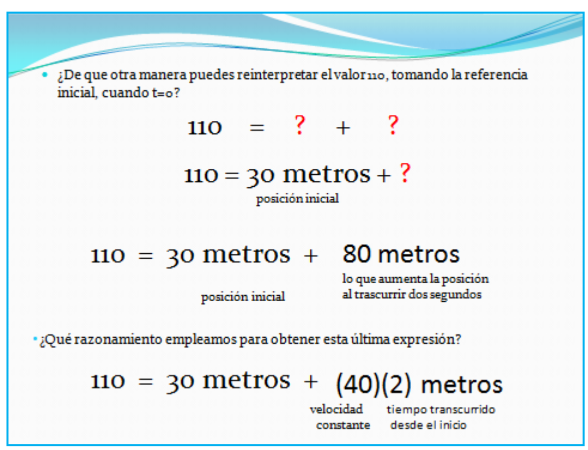


Figura 15. Actividad.

Figura 16. Reinterpretación de datos.

Por último se les pidió utilizar un nuevo valor y reinterpretarlo de la misma manera que en el ejercicio anterior reafirmando el proceso utilizado (ver fig.18).

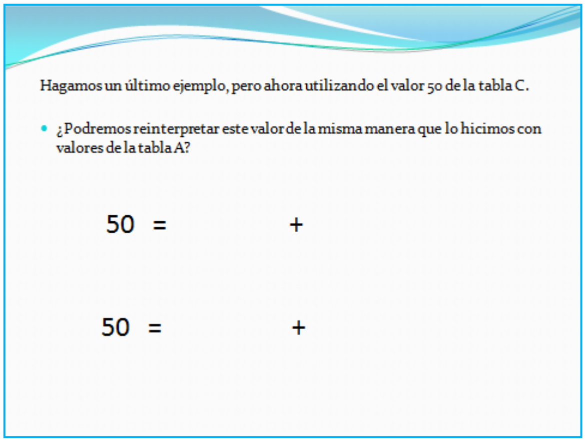


Figura 17. Actividad.

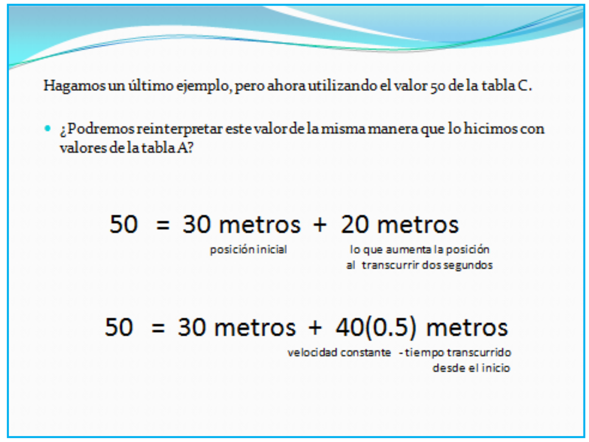


Figura 18. Reinterpretación de datos.

Para concluir este proceso, pedimos a los alumnos que encontraran una fórmula de la distancia respecto al tiempo utilizando el proceso de la reinterpretación de valores de los últimos dos ejercicios anteriores.

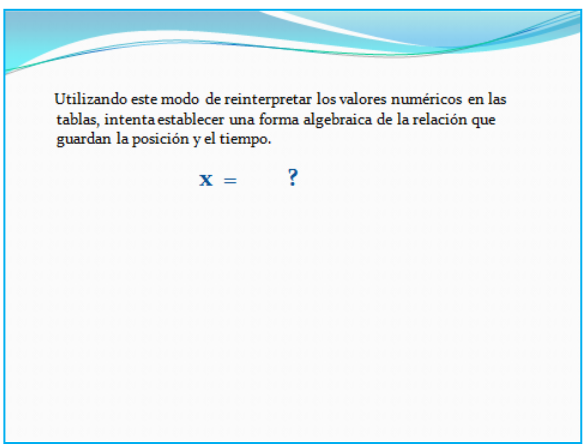


Figura 19. Actividad.

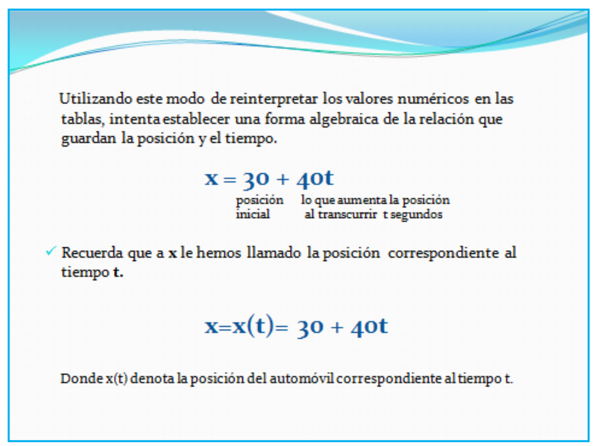
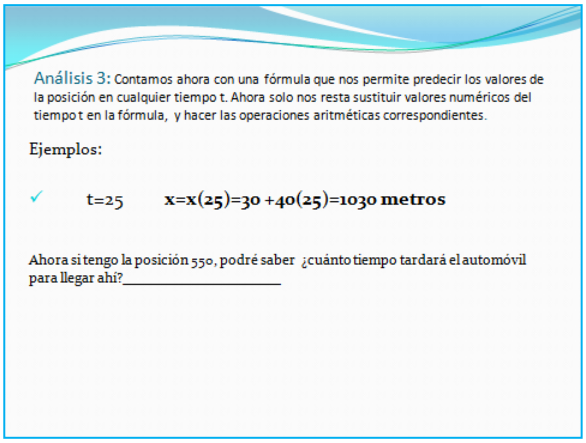


Figura 20. Reinterpretación de datos.

Toda esta serie de ejercicios llevó a los alumnos de una manera muy sencilla a construir un proceso para descifrar la fórmula de la distancia por ellos mismos de una manera intuitiva. Mediante la reinterpretación de los datos utilizados en la situación planteada.

Después de haber comprendido este proceso, se les mostró lo sencillo que ahora era poder encontrar el valor de la distancia recorrida para cualquier tiempo, sin tener que realizar ninguna tabla. Además de hacerles notar que manipulando la ecuación también podemos obtener el tiempo que tardaría el automóvil si recorre *x* distancia (ver fig.21 y 22).



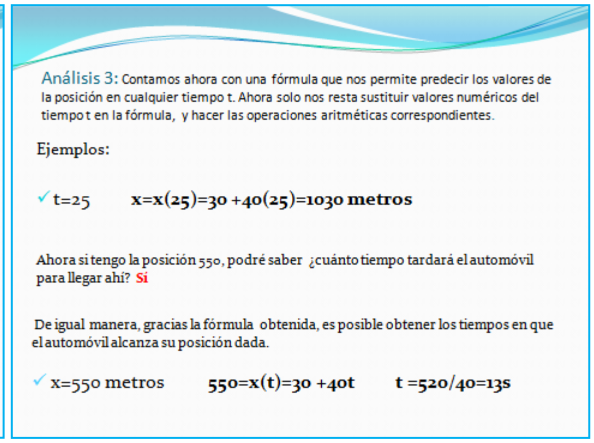
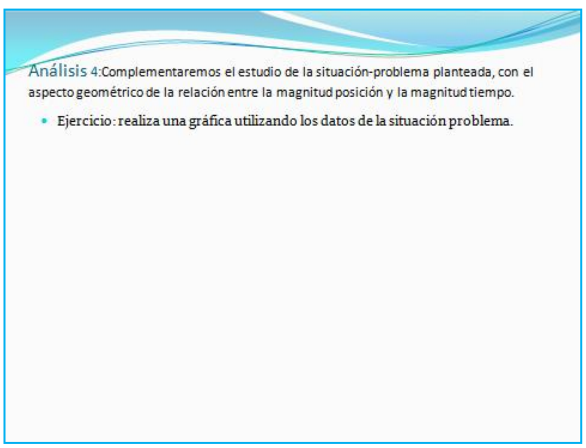


Figura 21. Aplicación de la fórmula. Figura 22. Aplicación de la fórmula.

Para finalizar nuestros análisis falta solo el aspecto geométrico, por lo que ahora pedimos a los estudiantes que trazaran la gráfica de la fórmula encontrada y analizaran cuáles eran las características de la recta encontrada.



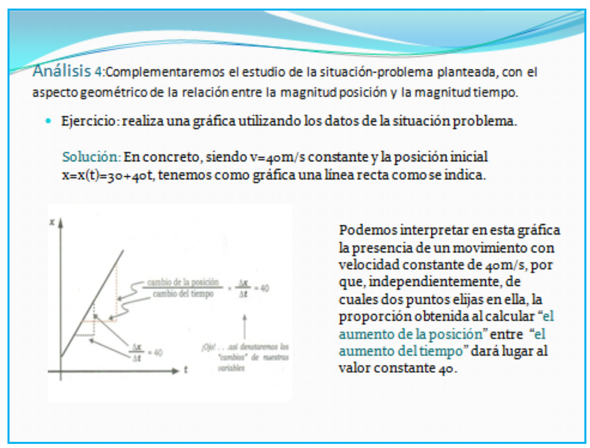


Figura 23. Actividad Figura 24. Análisis geométrico.

Realizado esto, el profesor empezó a dar pistas e ideas para lograr que los alumnos pudieran deducir la relación entre el aspecto geométrico y el algebraico, recordamos la definición de pendiente y trazada la gráfica, realizamos diferentes actividades en grupo e individuales que los condujeron a encontrar la relación que existe entre la pendiente de una recta y la razón de cambio.

Enseguida, de manera grupal fuimos realizando una generalización de los resultados obtenidos en clase reconstruyendo las ideas más importantes. Esto con el fin de reafirmar el aprendizaje y realizar evaluaciones formativas para realizar la retroinformación (ver fig. 25 y 26).

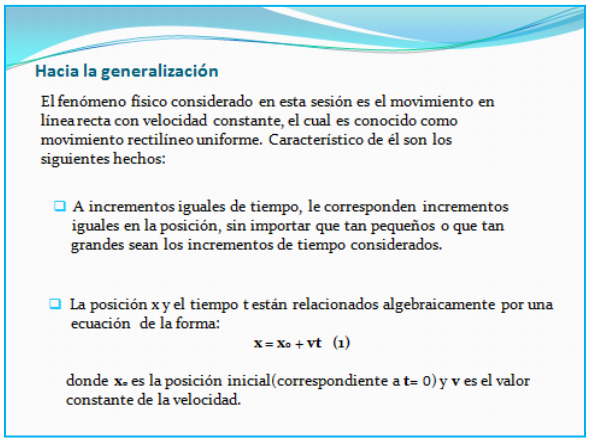


Figura 25. Generalización.

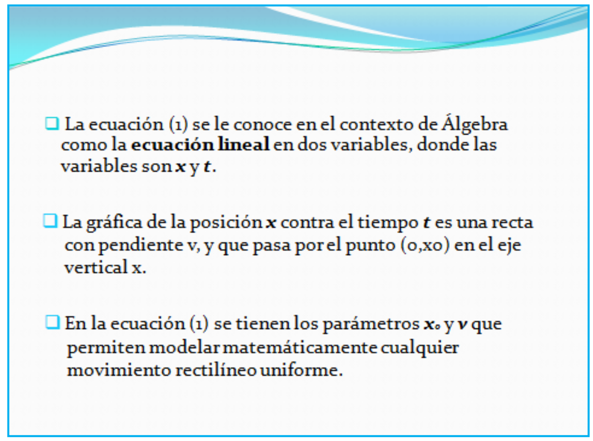


Figura 26. Generalización

Continuando con nuestra secuencia, después del análisis de la situación física anterior, introdujimos otros dos ejemplos similares, en los que las magnitudes e interpretación física variaban; esto con el fin de proporcionar más oportunidades para asimilar y generalizar las ideas y procesos más relevantes.

Ejemplo 2: Determinar cuál es la temperatura de una taza de café en un tiempo específico cuando ésta se está enfriando.

En este nuevo problema la magnitud de referencia seguía siendo el tiempo pero la magnitud de interés ya no era la distancia sino la temperatura. La fórmula encontrada para calcular la magnitud de interés en este caso no era una suma sino una resta y por último, la pendiente de la gráfica de esta situación no era positiva sino negativa. Pedimos a los alumnos pusieran atención en el desarrollo de la resolución de esta nueva situación para comparar y encontrar las diferencias y similitudes de este ejercicio con el ejercicio anterior.

Ejemplo3: Dada la densidad de masa en una varilla, determinar la masa en un segmento de longitud específica.

En este caso lo importante es que ahora la magnitud de referencia es la longitud en vez del tiempo, característica muy importante que arrojó nuevas características que los alumnos tuvieron que encontrar y luego comparar con los dos ejercicios anteriores.

Para concluir esta primera parte nos enfocamos en la generalización del tema, destacando las ideas más importantes pero ahora no solas del primer ejercicio sino de los tres ejercicios realizados en clase. Se analizaron en grupos sus características y se pidió a los alumnos trataran de encontrar las que tenían en común.

Realizando una generalización los alumnos tenían que descubrir el hecho de que las tres situaciones contaban con el mismo modelo matemático, a partir de esta conclusión se introdujo la representación algebraica, así como la reinterpretación de cada una de las variables (ver fig. 27 y 28).

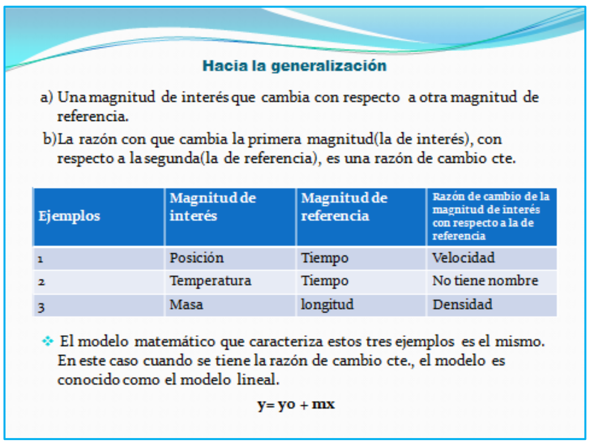


Figura 27. Generalización.

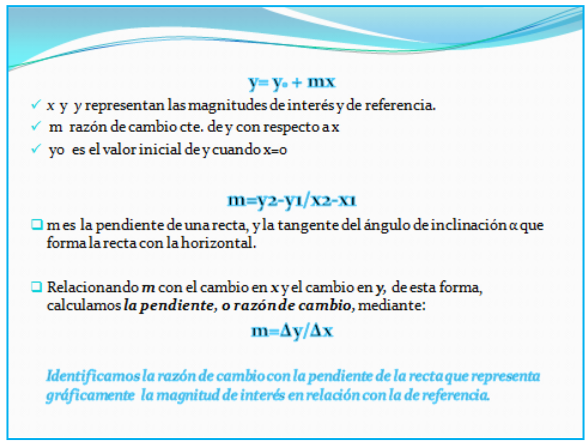


Figura 28. Generalización.

Finalmente solo nos faltaba la generalización del aspecto geométrico, por lo que se estudió con los alumnos algunas características de la gráfica del modelo lineal, como el comportamiento de las pendientes (para los casos en que la pendiente es positiva, es negativa o es igual a cero y para otros en los las pendientes van creciendo o decreciendo) y la correspondiente relación con sus razones de cambio.

2.2.2.2 Funciones con razón de cambio no constante.

El siguiente tema estudiado fue la razón de cambio no constante, tema que incluía el análisis de carecterísticas de las magnitudes como su crececimiento o decrecimiento.

La primera actividad fue plantear una situación física a los alumnos en la que se mostraba el llenado de dos recipientes en forma cónica, situación que tenía como objetivo que los alumnos analizaran y estudiaran los casos en que las magnitudes eran crecientes (ver fig. 29).

En una primera actividad se pidió a los alumnos argumentaran basados en las imágenes mostradas, qué figura describía a la magnitud con un crecimiento cada vez más rápido y cual describía la magnitud con un crecimiento cada vez más lento.

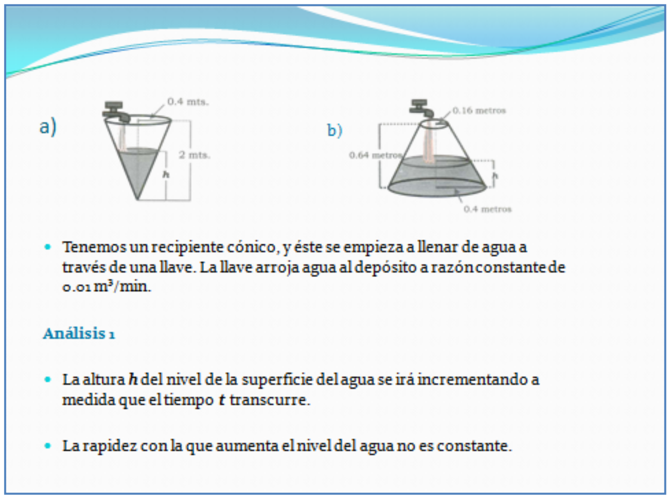
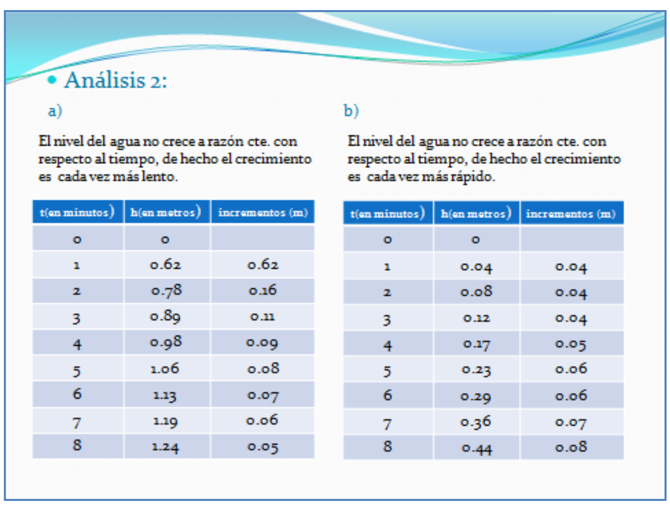


Figura 29. Situación física.

En seguida se mostraron las tablas que describían el crecimiento de cada una de las magnitudes y de esta manera los alumnos verificaron si los datos de las tablas coincidían con sus respuestas antes dadas. Pidiéndoles que hicieran énfasis en la columna de los incrementos (ver fig. 30).



a)

t(en minutos)	h(en metros)	incrementos (m)
0	0	
1	0.62	0.62
2	0.78	0.16
3	0.89	0.11
4	0.98	0.09
5	1.06	0.08
6	1.13	0.07
7	1.19	0.06
8	1.24	0.05

b)

t(en minutos)	h(en metros)	incrementos (m)
0	0	
1	0.04	0.04
2	0.08	0.04
3	0.12	0.04
4	0.17	0.05
5	0.23	0.06
6	0.29	0.06
7	0.36	0.07
8	0.44	0.08

Figura 30. Tablas de datos de la situación física.

Por último analizamos el comportamiento geométrico de estas magnitudes, presentando a los alumnos tres tipos de gráficas que representaban una magnitud en crecimiento, donde el valor de la magnitud *h* iba aumentando, sin embargo, la manera en que lo hacía, era esencialmente distinta en cada una de las tres gráficas consideradas.

Los alumnos tenían que observar detalladamente las gráficas y después describir como era el comportamiento de la magnitud *h* en cada una de ellas, justificando sus respuestas.

Para apoyarlos en la construcción de sus argumentos, utilizamos un proceso que les mostraba claramente la manera en que crece *h* revisando geométricamente sus razones de cambio, el proceso consistía en dividir el intervalo de tiempo en una serie de subintervalos iguales, después levantar rectas verticales en cada uno de los extremos de los subintervalos hasta intersectarlas con la curva, enseguida trazar rectas horizontales hacia la derecha para formar rectángulos; y por último analizarlos triángulos resultantes entre la curva y los rectángulos que se formaron, puesto que estos son la representación gráfica de los incrementos de la magnitud, por lo que su análisis comprobaría la manera en que crece *h* (ver fig. 31).

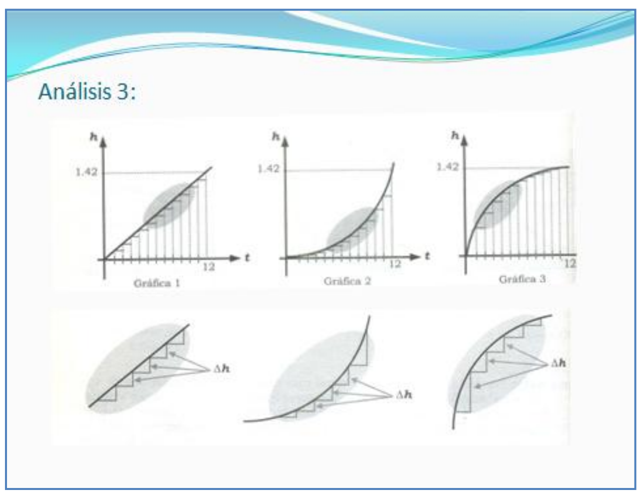


Figura 31. Gráficas de magnitudes en crecimiento.

En seguida se presentó otra situación a los alumnos para mostrar el caso opuesto al antes estudiado, es decir el estudio de la magnitudes cuando decrecen. Se analizó esta nueva situación siguiendo los pasos del ejercicio anterior, resaltando las diferencias entre cada una de ellas y estudiando el nuevo comportamiento de la magnitud.

Utilizando estos resultados y los obtenidos al estudiar la relación de las pendientes con la razón de cambio, encomendamos a los alumnos la tarea de buscar una generalización de las características del comportamiento geométrico de una magnitud cuando ésta presenta un crecimiento o decrecimiento. Realizada esta tarea, el profesó concluyó asignando los términos de: cóncava hacia arriba cuando las razones de cambio son crecientes (tanto si la magnitud de interés es creciente como si es decreciente) y de cóncava hacia abajo, cuando las razones de cambio son decrecientes (tanto si la magnitud de interés es creciente o decreciente) (ver fig. 32).

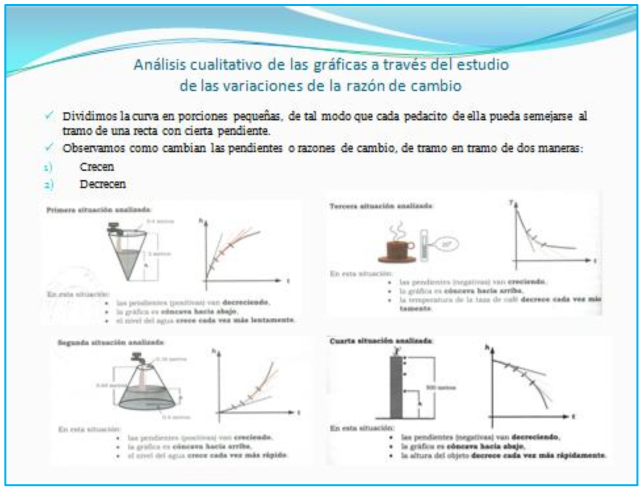


Fig. 32. Generalización geométrica.

Para concluir esta secuencia tomando los resultados de la actividad anterior pedimos a los alumnos que utilizando todos los conceptos estudiados: función creciente y decreciente, cóncava hacia arriba o hacia abajo, crecimiento o decrecimiento de las magnitudes así como de las razones de cambio, identificaran los cuatro tipos de formas gráficas que podíamos obtener (ver fig. 33).

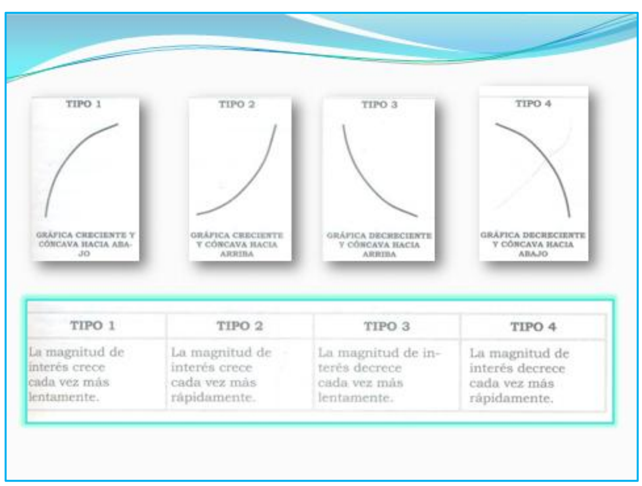


Fig. 33. Propiedades de las gráficas.

Este tema es muy relevante en el aprendizaje de la derivada por lo que para reafirmar su aprendizaje se analizó más a detalle (ver fig. 34 y 35), y se aplicaron varios ejercicios más en los que los alumnos tenían que relacionar, analizar y aplicar este conjunto de propiedades.

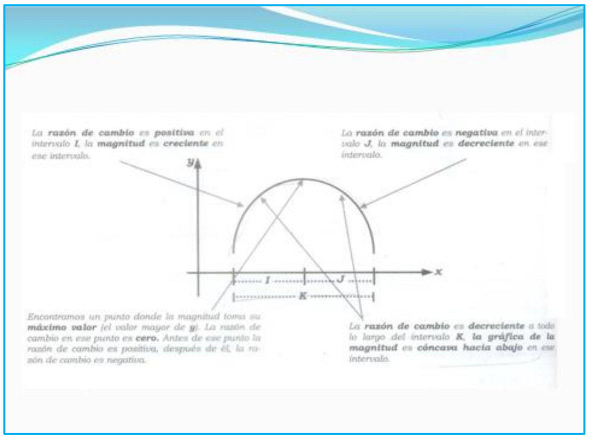


Fig. 34. Gráfica cóncava hacia arriba.

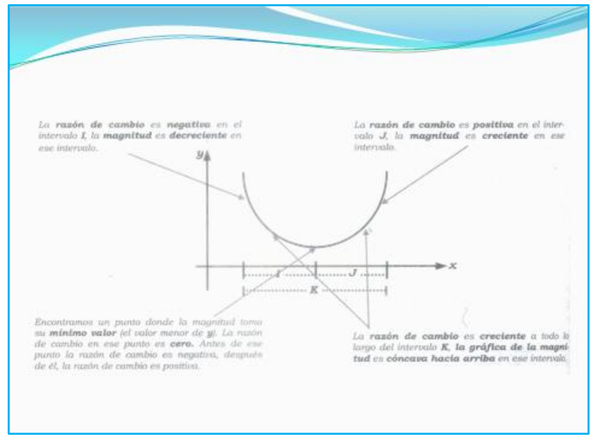


Fig. 35. Gráfica cóncava hacia abajo.

2.3 Límite y Derivada

En esta nueva secuencia, nuestro objetivo principal es llegar al aprendizaje profundo de la derivada y su conexión con conceptos que la motivaron históricamente, y cuya importancia sigue vigente, como son el de recta tangente y velocidad instantánea; por lo que construimos actividades que permitieran a los alumnos una comprensión en primer lugar del concepto de límite, para después avanzar al aprendizaje de la definición formal de derivada como razón instantánea de cambio y sus relaciones con otros conceptos.

Debido a que la derivada requiere un buen manejo del concepto de límite, el cual además es la base de la mayoría de las definiciones del Cálculo y el Análisis, lo catalogamos como concepto prioritario, por lo que es necesario que los alumnos lo manejen con profundidad. Por otro lado, tomando en cuenta la dificultad que tiene la comprensión de este concepto por sus propias características, aunque se podría comenzar desde la definición formal, al revisar la complejidad de los conceptos y el nivel de abstracción del pensamiento no formal o en transición de la mayoría de los estudiantes de nuevo ingreso, así como el enfoque constructivista que estamos utilizando, consideramos que lo más conveniente en esta secuencia era introducir varios conceptos que permitieran al estudiante ir avanzando en el nivel de complejidad desde situaciones concretas hacia los conceptos tanto de límite como de derivada.

Por otra parte, haciendo uso de los avances tecnológicos existentes y del gusto e interés de los estudiantes por el manejo de la computadora (detectados a través de una encuesta que realizamos a principio del curso[4]) elegimos emplear un software que nos facilitara la construcción de diferentes programas, para que, mediante las actividades del uso y la aplicación de los mismos, estos nos ayudaran en la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos, utilizándolos además, como herramienta principal en la construcción de la mayor parte de las actividades incluidas en esta secuencia, dando así un mayor énfasis en el análisis geométrico, utilizándolo como puente para conducir a los estudiantes hacia las definiciones formales; cabe destacar que estos programas son una aportación de esta tesis, los cuales quedan en español y a disposición de los interesados, de manera libre.

Para el proceso de desarrollar las representaciones numérica y geométrica de cada concepto, cuya creación se realizó con el fin de construir una base que nos apoyara para avanzar de manera más eficaz hacia las definiciones formales (representación algebraica), se diseñaron varias actividades, que contenían un enfoque más práctico que teórico impulsado por el uso de la computadora. Con estas actividades los alumnos podían manipular cualquier valor relacionado con la gráfica o función, por ejemplo los importantes épsilones y deltas de cada una de las definiciones y la observación de los cambios que ocurrían al utilizar otra función y analizar una nueva gráfica. Este proceso de activación de los estudiantes que está basado en el enfoque del alineamiento constructivo donde el alumno aprende lo que él hace, incrementó el éxito de aprendizaje satisfactoriamente.

2.3.1 Objetivos y evaluación.

La asignación de prioridad a los objetivos se hace en términos de los verbos relacionados con cada nivel de comprensión por tal motivo debido a la complejidad de los conceptos incluidos en esta secuencia, dimos mayor prioridad al de límite puesto que es la base fundamental del concepto de derivada elaborando la mayor parte de los objetivos con verbos de nivel relacional.

Para la elaboración de los objetivos de aprendizaje de esta secuencia, debido a la extensión del número de temas elegidos para introducir y estudiar, de una manera constructivista los conceptos de límite y derivada así como su relación con otros conceptos, a continuación presentamos la lista de temas elegidos y el orden en el que se emplearon:

1. Introducción a los conceptos de sucesión y límite de sucesión.
2. Definición algebraica de sucesión.
3. Definición algebraica de límite de sucesión.

[4] Encuesta presentada en el apéndice I.

4. Análisis geométrico de límite de una sucesión.
5. Definición algebraica de límite de función cuando $x \to \infty$
6. Motivación geométrica de límite de función cuando $x \to \infty$
7. Definición de límite de sucesión como caso particular del de límite de función.
8. Definición algebraica de límite de función cuando $x \to x_0$
9. Motivación geométrica de límite de función cuando $x \to x_0$
10. Límites de razones de cambio.
11. Definición de recta tangente mediante secantes.
12. Visualización de la recta tangente como la recta que más se parece a la gráfica.
13. Introducción de la definición de derivada.
14. Relación entre tangente, velocidad instantánea y derivada.
15. Definición formal de derivada.
16. Introducción geométrica de la función derivada.
17. Definición algebraica de la función derivada.
18. Relación entre derivada en un punto y función derivada.

Objetivo general

El alumno conocerá, manejará y **aplicará** los conceptos de derivada de una función *f* en un número (punto) y de función derivada, con sus distintas representaciones o enfoques (numérico, geométrico y algebraico), y además los **relacionará** entre ellos y con los conceptos de recta tangente y velocidad.

Objetivos específicos:

En relación con el límite de una f*unción f*, el alumno deberá ser capaz de:

1. **Identificar** todos los elementos de la definición y saber relacionarlos para comprender la definición en cada una de sus diferentes representaciones.
2. **Aplicar** la definición para **encontrar** el límite.

En relación con la *derivada de una función f en un número* (punto), el alumno deberá ser capaz de:

1. **Identificar** todos los elementos de la definición y saber relacionarlos para comprender la definición en cada una de sus diferentes representaciones.
2. **Aplicar** la definición para obtener el valor de la derivada en números específicos de funciones elementales dadas.
3. **Relacionar** la derivada con la tangente en un punto y la velocidad instantánea.

4. **Resolver** problemas sencillos que requieran la aplicación de la definición de derivada.

En relación con la f*unción derivada de una función f*, el alumno deberá ser capaz de:

5. **Aplicar** la definición formal en funciones elementales.
6. **Comparar** los conceptos de derivada de una función f en un número y función derivada de f y **distinguir** sus diferencias.
7. **Reconocer** y **aplicar** las relaciones entre las propiedades de las gráficas de las funciones y sus derivadas:
   a) Dada la gráfica de una función que sepa bosquejar la de la derivada.
   b) Utilizar propiedades de la función derivada f' para determinar propiedades de la gráfica de f para funciones elementales.

Ejemplo de evaluación para el concepto de límite.

Ejercicio: Para el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

utiliza su gráfica (con ayuda de Geogebra) y encuentra valores δ_1 y δ_2 que correspondan a ε_1=0.5 y ε_2=0.1y satisfagan la definición de límite.

Ejemplo de evaluación para el concepto de derivada.

Ejercicio:

1. Dada la gráfica de una función f:

   a) Encuentra los segmentos de las rectas tangentes en diversos puntos de la gráfica f.
   b) Usa los segmentos obtenidos en (a) para bosquejar la gráfica de la función derivada.

2. Dada la gráfica de la derivada f' de una función f:

   a) Bosqueja la gráfica de la función, si se sabe que f (a)=b.
   b) Determinar los puntos de inflexión y los intervalos en los que f es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba o hacia abajo.

Además de este tipo de ejemplos, pueden utilizarse los de empleados en TIMSS [14] ver Apéndice I.

2.7 Secuencia didáctica B

Para iniciar la segunda secuencia volvimos a partir de una situación física, en este caso la de caída libre, planteando encontrar la velocidad con la que cae el objeto.

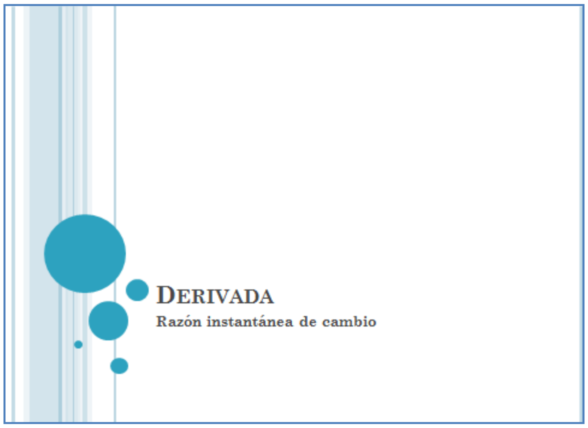


Figura 36. Presentación

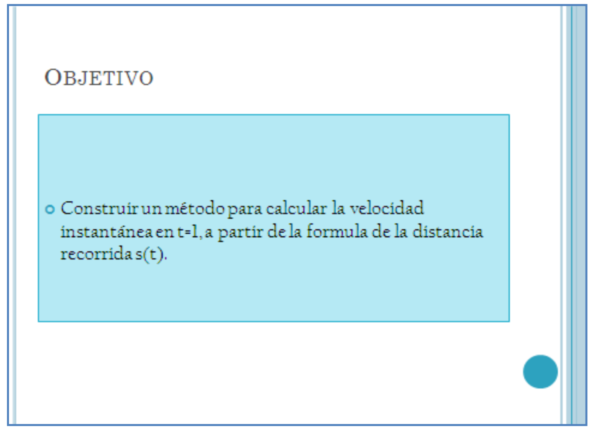


Figura 37. Objetivo.

Escogimos este ejemplo por su utilidad para introducir y relacionar varios conceptos: razón de cambio, sucesión, límite de sucesión y por consiguiente derivada. Como primera actividad los alumnos calcularon de forma aproximada el valor de la velocidad con la que cae el objeto para el instante t=1 (figuras 38 y 39).

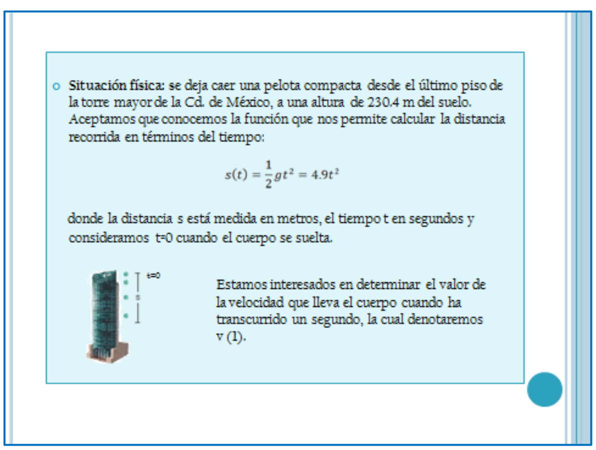


Figura 38. Situación física planteada.

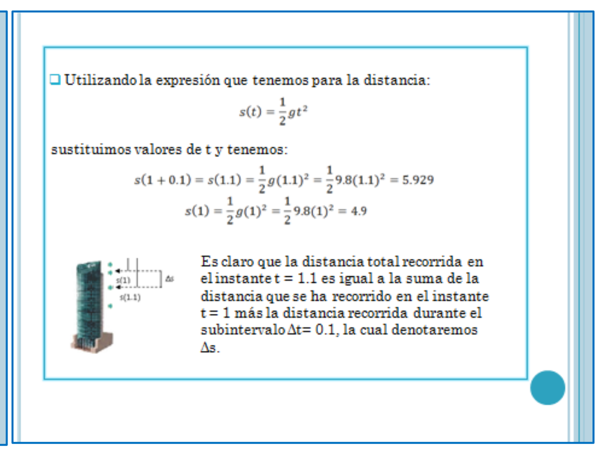
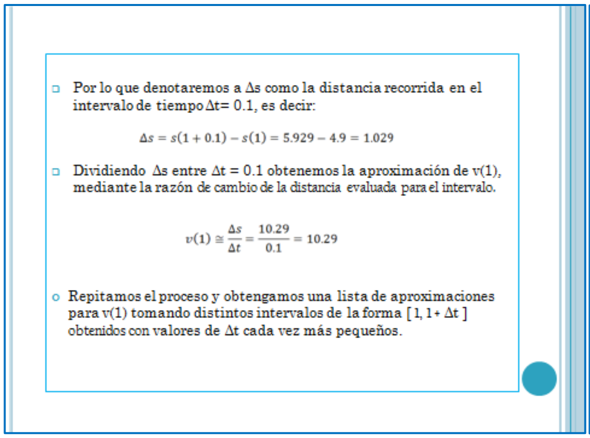


Figura 39. Cálculo de la velocidad para t=1.

Después de que obtuvieron el valor de v(1), realizaron el mismo procedimiento y anotaran los resultados obtenidos en una lista pero ahora empleando intervalos cada vez más pequeños para mejorar nuestra aproximación, utilizando $\Delta t = 0.01$ y después valores menores de Δt (ver figuras 40 y 41). Realizado este ejercicio, utilizamos la lista que construyeron y se les pidió analizaran qué pasaba con el cálculo del valor v(1) cada vez que Δt era más pequeño. Los alumnos pudieron darse cuenta con claridad que el valor de v(1) se estabilizaba en un valor, en este caso 9.8.



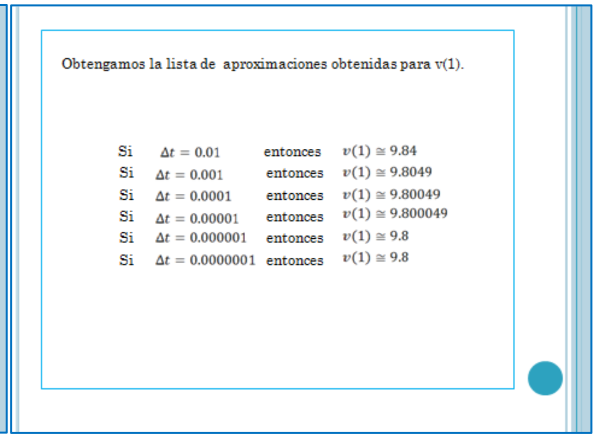


Figura 40. Otra aproximación de *v* para *t*=1. Figura 41. Aproximaciones de *v* para *t*=1.

Encontrada esta observación los alumnos con los datos del problema tenían que completar la siguiente tabla. Tabla que nos ayudaría a agrupar toda la información anterior de una manera más explícita y a relacionar los conceptos antes mencionados.

N	t_k	Δt	$s(t_k)$	$s(t_k)$-s(1)	R(1, t_k)
0	1.1	0.1	5.929	1.029	10.29
1	1.01	0.01	4.998	0.098	9.84
2	1.001	0.001	4.90980	0.0098	9.8049
3	1.0001	0.0001	4.90098	0.00098	9.80049
4	1.00001	0.00001	4.900098	0.000098	9.800049
5	1.000001	0.000001	4.9000098	0.0000098	9.8000049
$\to \infty$	$\to 1$	$\to 0$	$\to 4.9$	$\to 0$	$\to 9.8$

Tabla 3

Después de completar la tabla, el grupo estudió sus resultados para encontrar características importantes que presentaban las columnas, la información resultante nos permitió introducir los conceptos de sucesión y límite de sucesión. Primero manejamos una sucesión de una manera informal como una <u>lista de números</u> escritos en orden definido:

$$a_1, a_2, \ a_3, \ a_4, \ \ldots, \ a_n, \ \ldots$$

Donde el número a_1 es el primer término; a_2 el segundo término y, en general, a_n es el n-ésimo término, realizamos varios ejercicios con el manejo de estas listas y ya familiarizados con ellas introducimos la definición formal.

Definición 1. Una sucesión es una función del conjunto N de los números naturales en el conjunto R de los números reales.

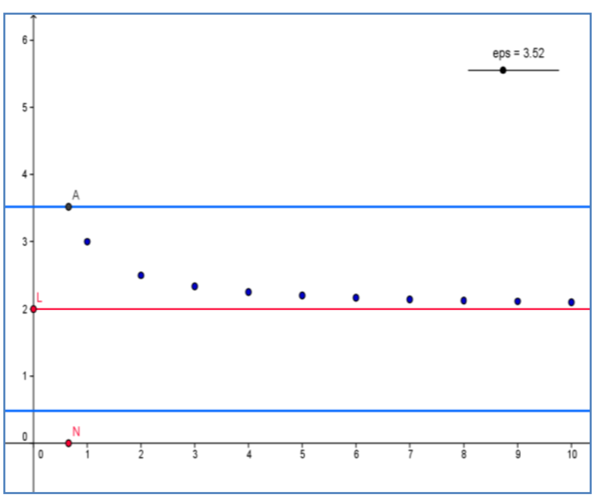
$$x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

Contando ahora con esta definición en la que una sucesión es una función, se empezó a introducir el límite de una sucesión realizando tablas con los valores de las sucesiones y observando hacia donde se acumulaban o convergían esos valores, luego comenzamos a hacer uso de la computadora para graficar diferentes sucesiones y observar sus comportamientos, haciendo énfasis en el posicionamiento de los valores del codominio respecto a los del dominio. De esta manera los alumnos podían apreciar muy fácilmente que pasaba con las imágenes de una sucesión y su tarea era tratar de encontrar a través de la gráfica hacia dónde convergía ahora sin el uso de las tablas. Después de realizar varios ejercicios de este tipo enunciamos la definición formal del límite de sucesión.

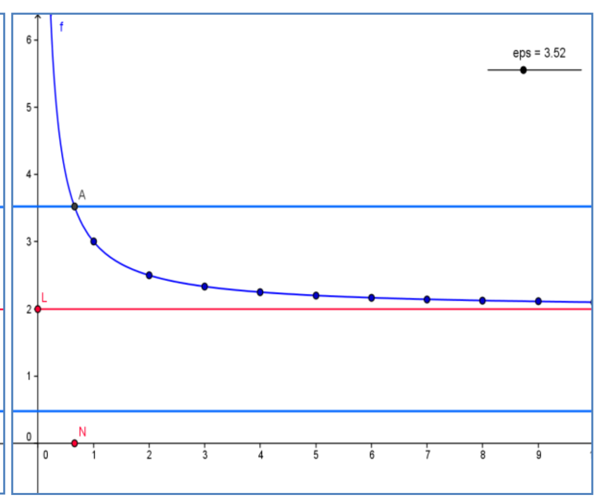
Definición 2. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión y $l \in \mathbb{R}$. Decimos que L es el límite de la sucesión si:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N \in\ : n \geq N\ \Rightarrow \mid x_n - l \mid < \varepsilon$$

Enseguida realizamos un análisis gráfico que favoreciera la comprensión de la definición. Para esto utilizamos un programa que mostraba los elementos incluidos en la definición: l, ε y N. Los cuales eran manipulables para que los alumnos pudieran identificarlos y poco a poco relacionarlos; así como realizar ejercicios en los cuales pudieran realizar la aplicación de la definición.



Gráfica 1. Repr. geométrica de límite de sucesión.



Gráfica 2. Repr. Geom. de lím. de *f* cuando $x \rightarrow \infty$

Ejercicio:

1) Expresada de manera algebraica, y dados también su límite L y un épsilon específico, **identificar** el N que satisface la definición formal utilizando las gráficas correspondientes, así como algebraicamente para casos sencillos.

Cabe resaltar que una aportación de esta tesis son los programas de Geogebra que permiten a los estudiantes experimentar la diferencia crucial entre una las clases de tipo magistral usuales y una clase activa como la que estamos mostrando, ya que en este caso, no es el profesor o el libro quien muestra los dibujos y las ideas, sino que son los estudiantes quienes están construyendo su conocimiento, bajo la guía del profesor, al estar manipulando y elaborando objetos y herramientas geométricas, conectando con los conceptos matemáticos para que logren establecer las relaciones requeridas entre ellos.

Una vez comprendido el significado de la definición se realizaron varias actividades más para la aplicación de la definición solamente algebraicamente.

Ejercicios:

2) Expresada de manera algebraica, y dados también su límite L y un épsilon arbitrario, **identificar** el N que satisface la definición formal para casos sencillos.

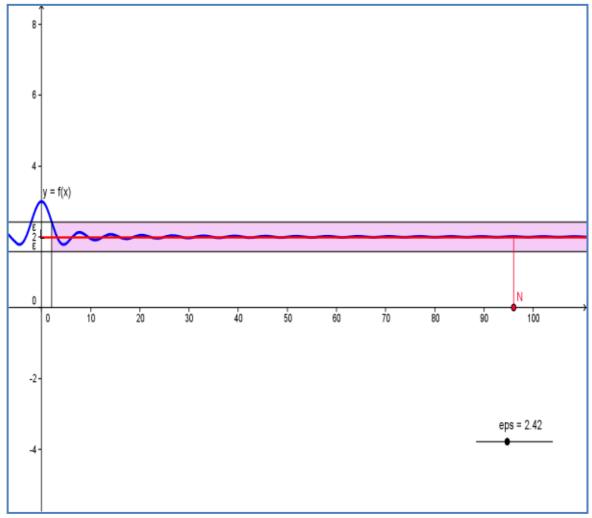
3) En forma algebraica **identificar** el límite de la sucesión, utilizando la definición formal para casos sencillos.

Terminado este tema continuó con la definición de límite de una función cuando *x* tiende a infinito (quedando como caso particular la de límite de una sucesión) (ver gráfica 1 y 2) realizando el mismo procedimiento del tema anterior. Primero haciendo uso de tablas, y después mostrando la definición formal.

Definición 3. Sea f una función definida sobre algún intervalo (a, ∞). Entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\,, \exists\, N\ \in\ :\ x > N\ \Rightarrow \mid f(x) - L \mid < \varepsilon\ .$$

Enseguida el manejo de programas para poder comprender de una manera concreta la definición (ver gráfica 3) y por último las actividades para el manejo algebraico.



Gráfica 3. Repr. geométrica de límite de *f* cuando $x \to \infty$

Ejercicios:

1. Dada la expresión algebraica de una función f, **verificar** si un L propuesto es o no su límite cuando $x \to \infty$.

2. **Relacionar** el límite de una sucesión con el límite de una función f cuando $x \to \infty$.

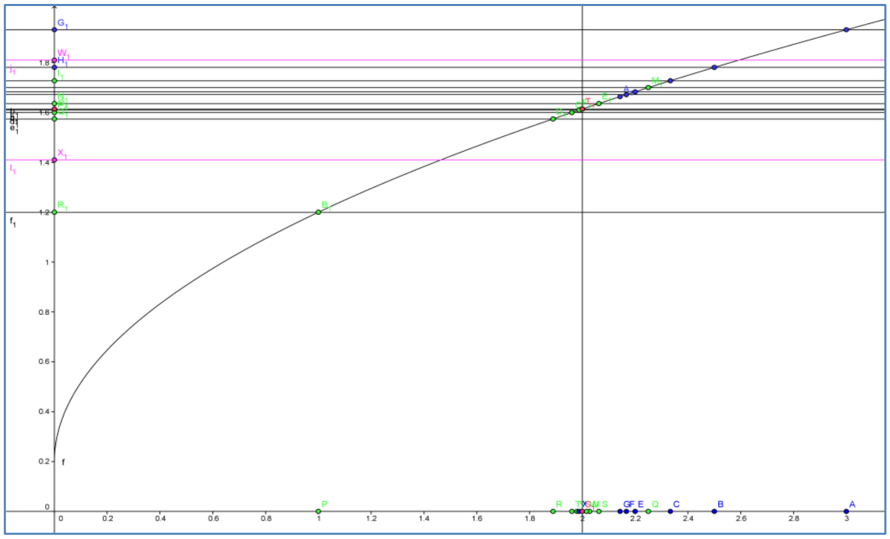
Nuestro siguiente tema era el límite de una función cuando *x* tiende a un número específico por lo que hicimos uso de un tema ya estudiado: sucesiones, y realizamos un nuevo programa para su análisis geométrico. Esta vez el programa mostraba dos sucesiones distintas en un mismo plano. Los alumnos podían darse cuenta que pasaba con los valores del dominio y del contradominio, cómo y hacia dónde se estabilizaban sus valores, observaciones que ya habían realizado pero que ahora lo harían no solo para una sino para dos sucesiones, actividad que utilizamos para motivar nuestro nuevo concepto (ver gráfica 4).

Ejercicios:

1) Generando sucesiones en Geogebra que convergen a un x_0 y las correspondientes sucesiones de imágenes:
   a) **Analizar** si el límite L existe y en caso de que exista, proponerlo.

   b) En caso de que el límite L exista, **encontrarlo** al evaluar la función cuando sea posible.

   c) **Determinar** si un L propuesto es o no el límite de f en x_0.



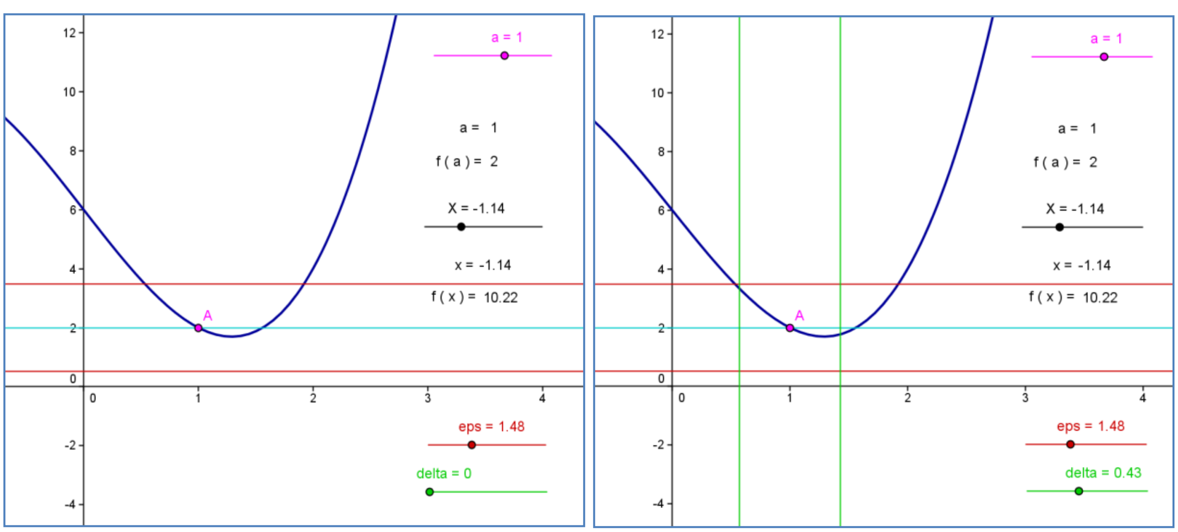
Gráfica 4. Introducción al $\lim_{x \to x_0} f(x)$con sucesiones.

.

Definición 4. Sea f una función definida sobre algún intervalo abierto que contiene el número x_0, excepto posiblemente en x_0 mismo. Decimos entonces *que L es el límite de la función f cuando la variable independiente x tiende al valor* x_0 y lo denotamos $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

$$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \qquad \exists\, \delta > 0 : |\, f(x) - L \,| < \varepsilon \;\Rightarrow |\, x - x_0 \,| < \delta$$

Enunciada la definición dimos inicio al análisis geométrico. En esta ocasión se utilizó un nuevo programa con herramientas que nos permitieran nuevamente la manipulación de cada uno de los elementos de la definición.



Gráfica 4 y 5. Representación Geométrica de límite de *f* cuando $x \to x_0$

Es importante recordar que por la complejidad del concepto y la utilización que le daremos más adelante debemos lograr que los alumnos logren un aprendizaje profundo del mismo, por lo que para este concepto se crearon y aplicaron un mayor número de actividades adecuadas que nos ayudaran a cumplir de forma concreta con los objetivos. En seguida se presentan algunas:

1. Dada la gráfica de una función continua o discontinua:

   a) Dado un valor $x_0$en el dominio verificar si el límite de f existe en x_0.
   b) En caso de que el límite exista, proponerlo.
   c) Determinar si un L propuesto es o no el límite de f en x_0.
   d) Teniendo L y un ε específico dado, encontrar geométricamente (con un software previamente acordado) el δ que satisface la definición de límite.

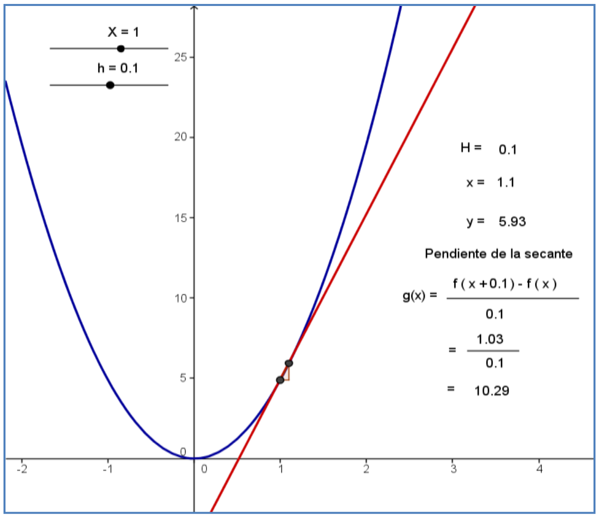
2. Dada la expresión algebraica de una función continua o discontinua:

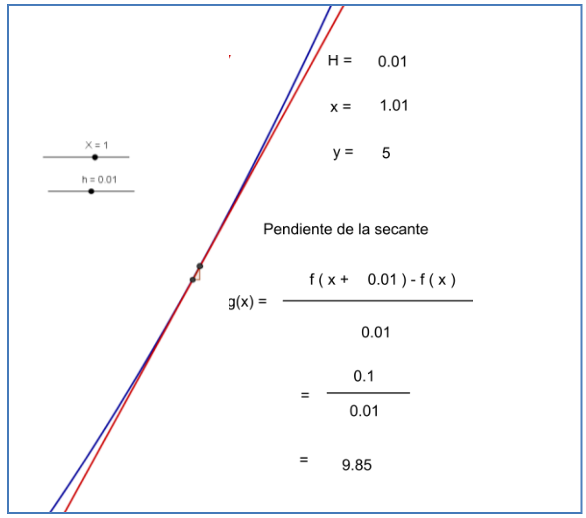
   a) Comprobar basado en su gráfica (geométricamente) si el límite existe.
   b) En caso de que el límite L exista, encontrar su resultado geométricamente.
   c) Teniendo L y un ε específico dado encontrar geométricamente (con un software previamente acordado) el δ que satisface la definición de límite.
   a) Dados L y ε específicos encontrar algebraicamente el δ que satisface la definición de límite.
   b) Dado L y ε arbitrario encontrar algebraicamente el δ que satisface la definición de límite en un número para algunas funciones sencillas.

Después del empleo de este último programa y de la realización de las diferentes actividades para la comprensión y manejo de épsilones y deltas, y de la definición en general pasamos al análisis puramente algebraico.

Por otra parte para entrar a nuestro siguiente tema realizamos un segundo análisis de los datos obtenidos a partir de la situación física planteada de caída libre, los alumnos graficaron la función s(t) (con Geogebra), y compararon la información de la tabla con su interpretación geométrica.

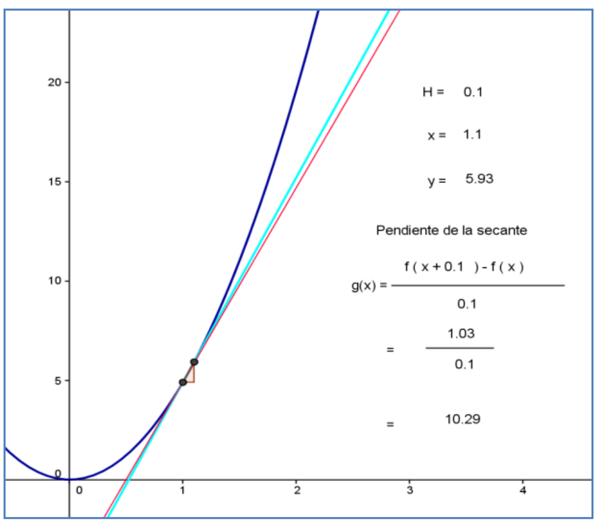
En primer lugar relacionamos la lista de las razones de cambio obtenidas en la tabla con las pendientes de las secantes que pasaban por los puntos x= (1, s(1)) y x=(1+Δt, s(1+Δt)) y observaron que entre menor fuera el Δt, las secantes se aproximan a una recta específica ya que las pendientes de las secantes se van aproximando a una pendiente determinada: el límite de las pendientes, obtenido con las razones de cambio de la tabla, lo que permitiría proponer una recta cuya pendiente es ese límite y además pase por el punto x= (1, s(1)).

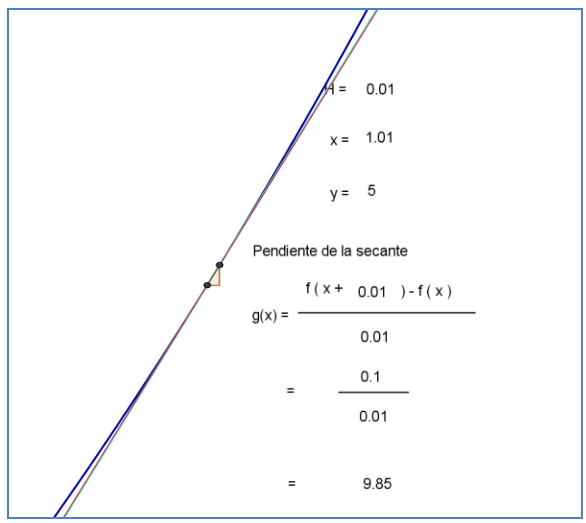




Gráfica 1. Repr. Geom. de límite de razón de cambio. Gráfica 2. Ampliación gráfica 1.

Para confirmar esta idea, ahora les pedimos que abrieran el programa anterior pero que ahora además incorporaran la gráfica de la tangente (que proporciona el programa) que pasa por el punto x=1.

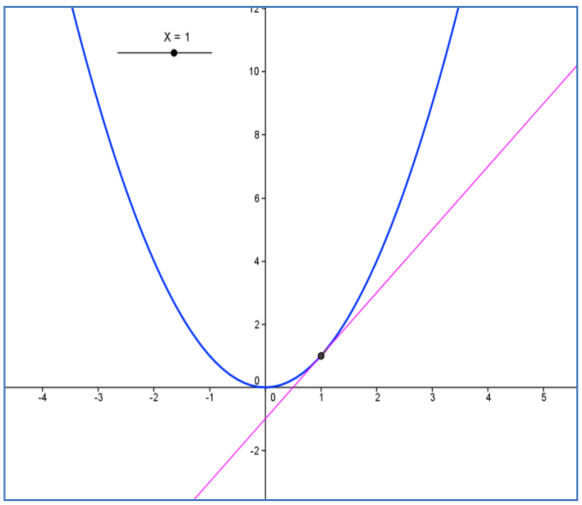




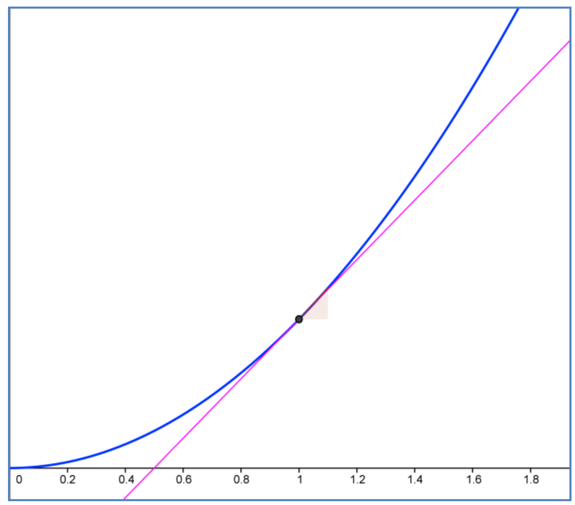
Gráfica 3. Repr. Geom. de recta tangente mediante secantes. Gráfica 4. Ampliación de gráfica 3.

La operación anterior se repitió para varias funciones y al finalizar este análisis pudimos concluir que es posible definir la *recta tangente* a una curva en un punto dado, al identificar la pendiente de la recta deseada con el valor “límite” de las pendientes de las secantes, las cuales estaban determinadas por las razones de cambio aproximadas con los diferentes valores Δt (Inducción de la definición de recta tangente).

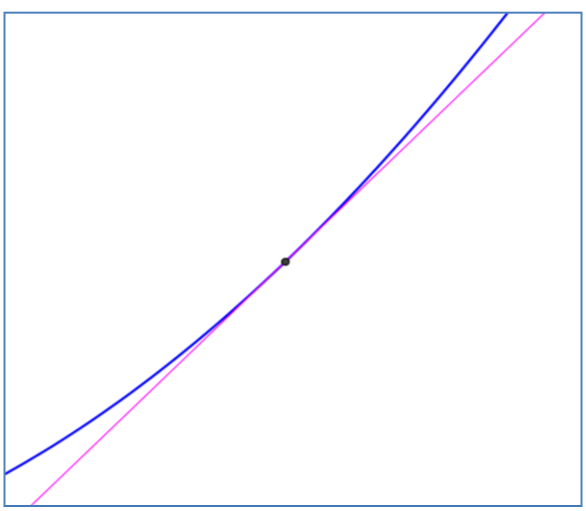
Para aprovechar este análisis geométrico, se les indicó a los alumnos que haciendo uso de las herramientas de la computadora realizaran amplificaciones de la gráfica, y que cada vez fueran tomando intervalos más pequeños, con este ejercicio por ellos mismos pudieron darse cuenta que ésta se iría pareciendo más a la recta tangente (Visualización de la recta tangente como la recta que más se parece a la gráfica).



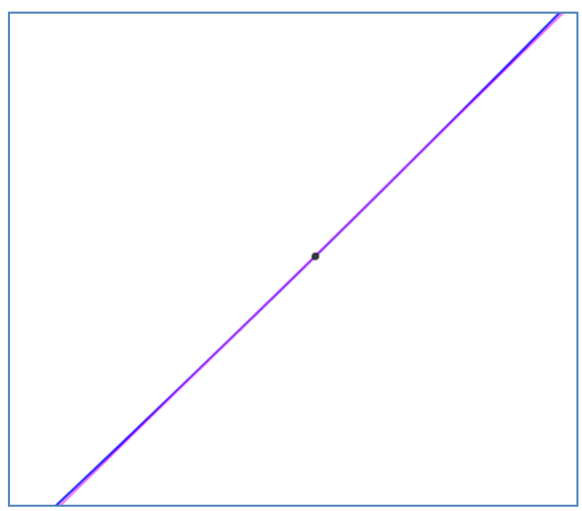
Gráfica 5. Recta tangente.



Gráfica 6. Ampliación gráfica 5.



Gráfica 7. Ampliación gráfica 6.



Gráfica 8. Ampliación gráfica 7.

Retomando al análisis numérico con los datos de la tabla realizada anteriormente, se hace la observación de que: el valor "límite" de las razones de cambio aproximadas con los diferentes valores Δt del tiempo, se llama "*derivada*" (introducción de la definición de derivada) y ésta nos permite dar la definición de velocidad instantánea.

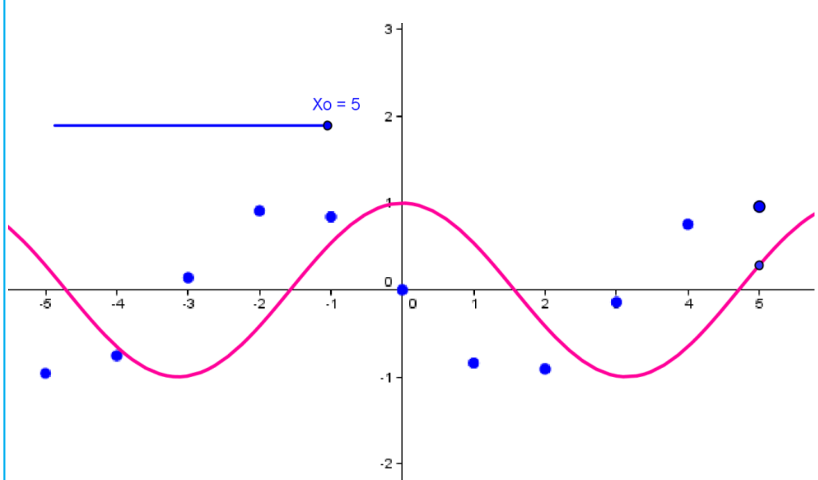
Se recapitulan las relaciones entre recta tangente, velocidad instantánea y derivada y el profesor concluye dando las ideas más importantes para dar paso a las definiciones formales.

Definición 5. La derivada de una función f en un punto x_0, denotada con $f'(x_0)$, es

$$f'(x_0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x_0 - x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

si este límite existe.

Para motivar el concepto de derivada de una función en un punto, proporcionamos a los estudiantes un nuevo programa en Geogebra, con el que a través su manejo los alumnos podían observar la manera en que variaba $f'(x_0)$ al variar el valor x_0 en el dominio, analizando su tabla de valores y la gráfica que van generando los valores obtenidos de $f'(x_0)$.

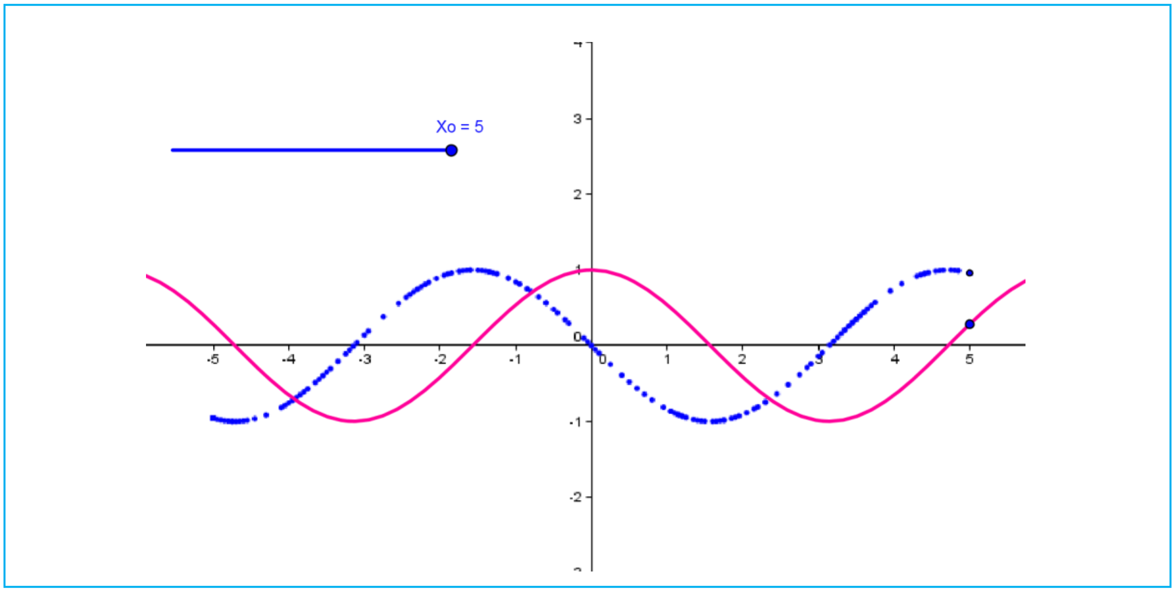


x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$
-5	0.28	-0.96
-4	-0.65	-0.76
-3	-0.99	0.14
-2	-0.42	0.91
-1	0.54	0.84
0	1	0
1	0.54	-0.84
2	-0.42	-0.91
3	-0.99	-0.14
4	-0.65	-0.76
5	0.28	0.96

Gráfica 9. Representación geométrica de derivada en un punto.

Después de practicar con este programa y estudiar la definición, los mismos alumnos pueden introducir la definición pero ahora de función derivada.

Por último se utilizó un programa que mostraba como se iba formando la función derivada esta observación junto con una serie de actividades ayudó a los alumnos a fijar la relación y diferencia entre derivada en un punto y función derivada.



Gráfica 10. Representación geométrica de función derivada.

2.4 Resultados

Como se mencionó en la introducción, se recopilaron secuencias que empezaron a utilizarse desde otoño del 2009, pero no fue sino hasta primavera del 2011 que empezamos a estructurarlas dentro del alineamiento constructivo, por lo que sólo mencionaremos los resultados obtenidos en ese período.

Licenciatura	# Total Inscritos	# Alumnos con asistencia $\geq$30%	# Aprobados	% De aprobados de los alumnos que asistieron
Matemáticas	13	8	6	75%
Matemáticas Aplicadas	9	9	6	66.6%
Actuaría	19	17	12	70.58%
Total	41	34	24	70.58%

La sección de primavera de 2011 fue una sección de recurso, por lo mismo, con características distintas de las de un grupo arbitrario de nuevo ingreso, pero la metodología sigue siendo válida y es importante mencionar los principales resultados obtenidos.

En el examen diagnóstico nadie aprobó la parte correspondiente al manejo conceptual de la derivada.

El 100% de los estudiantes que tuvieron una asistencia mayor al 80% aprobó la asignatura y el 90% ellos logró un aprendizaje de tipo funcional a un nivel relacional del concepto de derivada, lo cual se constató con los resultados obtenidos en un examen final que incluyó la pregunta K5 (traducida) del anexo 1, la cual pertenece a las pruebas estandarizadas internacionales (TIMSS[5] [14]) y que regularmente es respondida correctamente en promedio sólo por el 45% de los estudiantes.

Que el 100% de los estudiantes que permanecieron de manera regular y hasta el final en el curso lo aprobaran es un indicador de éxito muy importante, ya que lo más común es que no todos aprueben los cursos en esos grupos numerosos, aunque asistan a la mayoría de las clases.

Cabe mencionar que de los 6 alumnos que estamos considerando que no asistieron, es que realmente nunca se presentaron o se presentaron muy poco como para considerarse miembros del grupo.

[5] Puede consultar información básica correspondiente a esta prueba en el Apéndice III.

Estudiantes con asistencia menor al 30%	
2	Cero asistencias.
3	2 ó 3 Asistencias (sólo la primera semana).
1	Asistió una vez por semana sólo las primeras 6
1	Asistió por primera vez durante la cuarta semana y después asistió de manera muy irregular.

El análisis de lo que ocurre con estos estudiantes no es parte de esta tesis, sin embargo, consideramos que si es importante un mayor involucramiento de los tutores y mejorar la aplicación de la metodología, continuando con el diseño del entorno de trabajo que favorezca el involucramiento de los 10 estudiantes inscritos que participaron en al menos el 30% de las clases, los cuales no se presentaron al examen final y al menos 7 podrían haber aprobado el curso.

En la selección que estamos presentando sólo estamos incluyendo las secuencias que consideramos que son más fáciles de utilizar y probaron propiciar un conocimiento de tipo funcional y que pudiera llegarse a un nivel relacional.

3. Conclusiones

El alineamiento constructivo resume muchos resultados de investigación sobre los proceso de enseñanza aprendizaje, en una propuesta para la enseñanza universitaria que nos permite tener un panorama de los factores importantes a considerar si queremos mejorar nuestra práctica docente.

Una ventaja de la propuesta de Biggs es que reúne información pensando en el nivel universitario y permite elaborar propuestas concretas, sin embargo está diseñada pesando en las asignaturas en general y conviene profundizar en propuestas específicas para las matemáticas a nivel superior, las cuales tendrán más sentido después estar ubicados desde un planteamiento global.

La utilización de la computadora se ha convertido en un instrumento primordial en la enseñanza y el aprendizaje a nivel mundial, este hecho y los resultados de la encuesta aplicada para elaborar el inventario de intereses del grupo, nos guió para desarrollar el material basándonos en aplicaciones computacionales; aunque hay actividades parecidas en libros o páginas de internet de otras universidades, la mayoría están en inglés y creemos que nuestra aportación llena un vacío en nuestro medio.

Cabe resaltar que la diferencia crucial entre un curso como el que estamos presentando y las clases de tipo magistral usuales, es que haciendo uso de este marco, no es principalmente el profesor o el libro quienes muestran los conceptos, los dibujos, las fórmulas, resultados y aplicaciones; sino que ahora los estudiantes participan de manera más activa construyendo sus conocimientos bajo la guía del profesor, al estar manipulando y elaborando objetos geométricos, tablas numéricas, expresiones algebraicas y buscando relaciones con contextos reales, para que logren comprender mejor los conceptos y establecer profunda y correctamente las relaciones requeridas entre éstos. Los resultados presentados en la sección 2.4 nos incentivan a continuar aprovechando los resultados de las investigaciones relacionadas con el aprendizaje y la enseñanza.

Esperamos que las secuencias presentadas puedan servir a los estudiantes que quieran mejorar su comprensión del concepto de derivada, y a los profesores interesados, como otra referencia para continuar reflexionando sobre la práctica docente, de tal manera que permita lograr un aprendizaje profundo en una mayor cantidad de los estudiantes que nos corresponde atender.

Bibliografía

[1] Allsop, David H. y Kyger, Maggie M. *Teaching Mathematics Meaningfully. Solutions for Reaching Struggling Learners*, Ed. Brookes, Baltimore 2007.

[2] Biggs, John. *Calidad del Aprendizaje Universitario*, Narcea, S.A. de ediciones, 3ª ed. Madrid 2006.

[3] Backhoff Escudero, Eduard y Solano Flores, Guillermo. *Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias Naturales (TIMSS): Resultados de México en 1995 y 2000*. Colección cuadernos de investigación del INEE, Cuaderno no. 4.

[4] Cervantes Gómez, Lucía, Sánchez Denicia, Griselda y González Pérez, Ana Luisa. *La construcción de rectas tangentes antes de la invención de la derivada*. Capítulo del libro Matemáticas y sus Aplicaciones I, págs. 81-94, FCFM, BUAP.

[5] ENLACE *Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares*. http://www.enlace.sep.gob.mx/ba/

[6] Franco, Carcedo Ma. Elena. *Lenguaje científico y técnico elaboración de tesis*, 2ª ed. Puebla 2004.

[7] Kline, Morris. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* Tomo I, Oxford University Press, New York 1972.

[8] PISA *Programme for International Student Assessment.* http://www.inee.edu.mx/index.php/proyectos-y-servicios/pisa.

[9] Ruíz Estrada, Honorina. Resultados obtenidos en la aplicación de la *prueba de razonamiento científico* de Anton E. Lawson en el primer semestre de las licenciaturas de la FCFM durante los años 2004-2006. Comunicación Personal.

[10] Salinas Patricia, Alanís Juan Antonio, Pulido Ricardo, Santos Francisco, Escobedo Julio César y Garza José Luis. *Elementos del Cálculo: reconstrucción conceptual para el aprendizaje y la enseñanza*, Ed. Trillas, 2ª ed. México 2002.

[11] Salinas Patricia, Alanís Juan Antonio, Pulido Ricardo, Santos Francisco, Escobedo Julio César, Garza José Luis. *Elementos del Cálculo: cuaderno de apoyo*, 2ª ed. México 2002, Ed. Trillas.

[12] Stewart, James. Càlculo conceptos y contexto. International Thomson Editores, 3ª ed. México 1999.

[13] Tall, David, Vinner, *Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity,* Educational Studies in Mathematics. Vol. 12, Shlomo 1981.

[14] TIMSS in International Mathematics and Science Study. http://www.timssandpirls.bc.edu/

Apéndice I

- Ligas para videos ilustrativos del alineamiento constructivo.

http://www.youtube.com/watch?v=_Vy_DNvmZRQ

http://www.youtube.com/watch?v=2DMnYxc3ank

http://www.youtube.com/watch?v=AuCG0kdj5DQ

- Encuesta aplicada a los estudiantes para conocer sus intereses.

Inventario de intereses	
Nombre:	
Semestre:	
Materia:	
Actividades que te gusta hacer solo.	
Actividades preferidas.	
Cosas que te gusta aprender.	
Actividades que te gusta hacer con tus amigos.	
Actividades que te gusta hacer con tu familia.	

- Lista de reactivos liberados de la Prueba internacional *Trends in International Mathematics and Science Study*, que usamos como base para evaluar la comprensión de concepto de derivada
http://timssandpirls.bc.edu/timss1995i/Items.html

K-3

K3. The acceleration of an object moving in a straight line can be determined from

A. the slope of the distance-time graph

B. the area below the distance-time graph

C. the slope of the velocity-time graph

D. the area below the velocity-time graph

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly	International Difficulty Index
Advanced Mathematics	C	Calculus	Knowing	65%	489

66

K3. The acceleration of an object moving in a straight line can be determined from

A. the slope of the distance-time graph

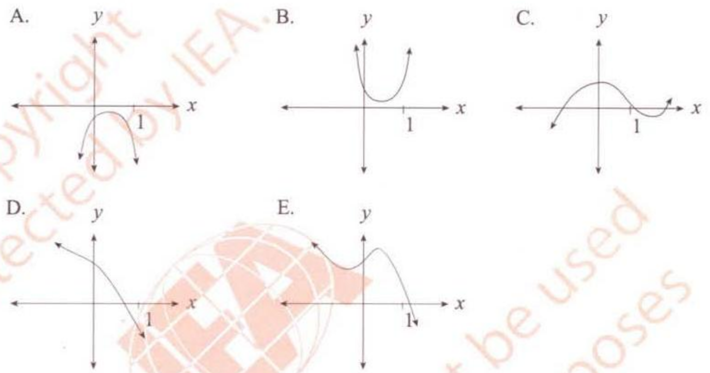
B. the area below the distance-time graph

C. the slope of the velocity-time graph

D. the area below the velocity-time graph

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly	International Difficulty Index
Advanced Mathematics	C	Calculus	Knowing	65%	489

K5. Which of the following graphs has these features:
$f'(0) > 0$, $f'(1) < 0$, and $f''(x)$ is always negative?



Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly	International Difficulty Index
Advanced Mathematics	A	Calculus	Solving Problems	45%	601

K-17

K17. The graph of the function g passes through the point (1,2). The slope of the tangent to the graph at any point (x, y) is given by $g'(x) = 6x - 12$. What is $g(x)$? Show all your work.

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly	International Difficulty Index
Advanced Mathematics	next page	Calculus	Solving Problems	28%	642

L5. The sum of the infinite geometric series $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots$ is

A. $\frac{5}{8}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{3}{2}$

E. ∞

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly	International Difficulty Index
Advanced Mathematics	B	Calculus	Routine Procedures	45%	597

Apéndice II

Principales problemas que dieron origen al Cálculo

Después de la adopción del concepto de función llegó el Cálculo, el cual, para varios historiadores, filósofos y matemáticos, es la máxima creación en la Matemática después de la Geometría Euclidiana.

Los problemas de Cálculo fueron abordados mínimo por una docena de los mejores matemáticos y por varias docenas de matemáticos menos notables del siglo XVII. Todas sus contribuciones fueron coronadas por los logros de Newton y Leibniz.

Aunque el Cálculo resolvió varios problemas ya planteados por los Griegos, éste se creó tratando de resolver los principales problemas científicos del siglo XVII, los cuáles podemos agrupar en cuatro tipos de problemas.

1º Dada la fórmula de la distancia que recorre un cuerpo en función del tiempo, encontrar la velocidad y la aceleración en cualquier instante; y a la inversa, dada la fórmula que describe la aceleración de un cuerpo como una función del tiempo, encontrar la velocidad y la distancia recorridas.

Este problema surgió directamente en el estudio del movimiento y la dificultad que planteaba era que las velocidades y la aceleración que interesaban en el siglo diecisiete variaban de instante en instante. Al calcular una velocidad instantánea, por ejemplo, no se puede, como en el caso de la velocidad promedio o media, dividir la distancia recorrida sobre el tiempo de viaje, porque en un instante dado tanto la distancia recorrida como el tiempo de viaje son cero, y 0/0 no tiene sentido. Sin embargo, era claro por razones físicas que el movimiento de los objetos tenía una velocidad en cada instante de su recorrido. El problema inverso de encontrar la distancia recorrida, conociendo la fórmula para la velocidad, implica la dificultad correspondiente; no se puede multiplicar la velocidad en algún instante por el tiempo de viaje para obtener la distancia recorrida porque la velocidad varía de un instante a otro.

2º Encontrar la tangente a una curva.

El interés en este problema provenía de más de una fuente; fue un problema de geometría pura de gran importancia para diferentes aplicaciones científicas.

La Óptica, la cual, como nosotros la conocemos, fue una de las principales actividades científicas del siglo XVII, el diseño de lentes fue de gran interés para Fermat, Descartes, Huygens, y Newton. Al estudiar el paso de la luz a través de una lente, uno debe conocer el ángulo en el que el rayo llega a la lente con el fin de aplicar la ley de refracción. El ángulo importante es el que forma el rayo y la normal a la curva, debido a que la normal es perpendicular a la tangente, encontrar la tangente nos permite encontrar la normal y en consecuencia el ángulo que forma la Luz.

Otro problema científico que involucra la tangente a una curva surgió en el estudio del movimiento. La dirección del movimiento de un cuerpo en movimiento en cualquier punto de su trayectoria es la dirección de la tangente a la trayectoria.

3º Encontrar los valores máximos o mínimos de una función.

Cuando se dispara una bala de cañón, la distancia que recorrerá horizontalmente (el rango), depende del ángulo de inclinación con respecto a la tierra. Un problema "práctico" fue encontrar el ángulo que maximizara el rango. A principios del siglo diecisiete, Galileo determinó que el rango máximo (en el vacío) se obtiene con un ángulo de disparo de 45 grados; también obtuvo la máxima altura alcanzada por proyectiles disparados desde varios ángulos. El estudio del movimiento de los planetas también involucró problemas de máximos y mínimos, tal como encontrar la distancia más grande y más pequeña de un planeta al sol.

4º Encontrar las longitudes de curvas, las áreas delimitadas por curvas; los volúmenes delimitados por superficies; centros de gravedad de cuerpos; y la atracción gravitacional que un cuerpo grande ejerce sobre otro cuerpo.

Los Griegos habían utilizado el método de 'exhaución' para encontrar algunas áreas y volúmenes. A pesar del hecho de que lo usaron para áreas y volúmenes relativamente simples, tenían que aplicar mucho ingenio, ya que el método carecía de generalidad. El interés en encontrar longitudes, áreas, volúmenes y centros de gravedad revivió cuando el trabajo de Arquímedes se dio a conocer en Europa. El método de exhaución se modificó primero gradualmente, y después de manera radical con la invención del Cálculo.

Apéndice III

Evaluación Internacional sobre Matemáticas y Ciencias TIMSS

El Estudio Sobre las Tendencias en Matemáticas y Ciencias, TIMSS, por sus siglas en inglés (Trends in International Mathematics and Science Study) es un proyecto de investigación internacional colaborativo.

En el marco de TIMSS se realizaron evaluaciones en los años 1995, 1999, 2003, 2007 y se están realizando en el 2011, pero las evaluaciones que incluyen el tema de Cálculo, que son las que se aplican a los estudiantes de tercer año de bachillerato, se aplicaron únicamente en 1995 y 2003, y se liberaron al dominio público sólo parte de los reactivos empleados en1995, son los que utilizamos.

La evaluación del Cálculo se diseñó para estudiantes que estuvieran terminando el último año de preparatoria o bachillerato y que hubieran cursado la asignatura de Matemáticas Avanzadas que incluye el temario de Cálculo Diferencial e Integral. Tomado en consideración que muchos de los estudiantes de nuevo ingreso no han llevado Cálculo previamente, nos pareció una prueba adecuada a nuestros intereses.

En 1994-1995[6] las pruebas de rendimiento en matemáticas y ciencias se aplicaron a muestras de estudiantes cuidadosamente seleccionadas en aulas de más de 40 países participantes. Se evaluaron cinco grados en dos materias de la escuela, más de medio millón de alumnos fueron sometidos a la prueba en más de 30 idiomas y millones de respuestas abiertas generadas, TIMSS es el estudio más grande y ambicioso de los logros educativos comparativos que se haya hecho.

El estudio TIMSS-1995 recabó y evaluó información contextual, acerca del proceso escolar de los estudiantes, en los siguientes niveles educativos:

- Los estudiantes inscritos en dos grados adyacentes, de tal forma que la mayoría tuvieran 9 años de edad, los grados fueron 3º y 4º de primaria para muchos países, incluido el caso de México.
- Los estudiantes inscritos en dos grados adyacentes de tal manera que la mayoría tuvieran 13 años de edad, los grados fueron 7º y 8º en la mayoría de los países, el equivalente a primero y segundo de secundaria para México.
- Los estudiantes en su último año de educación 'secundaria', el grado 12 en la mayoría de los países, el equivalente al último año de preparatoria o bachillerato en México. Como una opción adicional, los países participantes podían examinar dos subgrupos especiales de estos estudiantes, los que estuvieran tomando cursos avanzados de matemáticas o física.

[6] La información presentada sobre TIMSS es una traducción nuestra de la que se presenta en su página oficial [14].

Los tres grupos diferentes de estudiantes TIMSS mencionados anteriormente (primaria, secundaria y bachillerato) se refieren en el contexto de TIMSS como las poblaciones 1, 2 y 3, respectivamente. Todos los países que participaron en el TIMSS evaluaron la población 2, que es el núcleo de interés principal de para TIMSS, los países participantes podían elegir participar o no en las otras dos, México participó evaluando las poblaciones 1 y 2, pero no la 3.

Los cuestionarios de los estudiantes están diseñados para recopilar información sobre antecedentes de los estudiantes, las actitudes y creencias relacionadas con la educación y el aprendizaje, la información acerca de sus experiencias en el aula, entre muchos otros temas. Los cuestionarios del profesor y de la escuela preguntan sobre la clase de planificación, las matemáticas y la cobertura de contenido científico, las políticas escolares, los fondos maestros de educación y preparación, entre muchos otros temas.

TIMSS fue creado a través de una amplia colaboración entre los países participantes. Expertos en currículo, la medición y la educación de todo el mundo trabajaron juntos para crear los marcos de evaluación, los temas fuentes, y los cuestionarios. TIMSS se basa en la currícula de las escuelas de todo el mundo, y se organiza para investigar cómo a los estudiantes se le ofrecieron oportunidades educativas, y los factores que influyen en cómo los estudiantes hacen uso de estas oportunidades. TIMSS se propone investigar tres niveles: el plan de estudios previsto, el plan de estudios implementado, y el plan de estudios alcanzado. El plan de estudios previsto se define como la matemática y la ciencia que las sociedades pretenden que los estudiantes aprendan y cómo los sistemas educativos se organizan para satisfacer esta demanda, el plan de estudios implementado es lo que realmente se enseña en las aulas, que se enseña y cómo se enseña, el plan de estudios alcanzado es lo que han aprendido los alumnos. Los diversos cuestionarios buscar información sobre el plan de estudios previsto y ejecutado, la evaluación busca determinar qué saben los estudiantes.

El éxito de la TIMSS dependía de un esfuerzo de colaboración entre los centros de investigación en cada país responsable de la ejecución del proyecto, y la red de centros responsable de la gestión a través de los países en tareas como representantes de los países de entrenamiento en los procedimientos estandarizados, la selección de muestras comparables de las escuelas y los estudiantes, y llevar a cabo los distintos pasos necesarios para el procesamiento y análisis de datos. El TIMSS Centro de Estudios Internacionales, responsable de la coordinación internacional de las tareas, se encuentra en el Centro para el Estudio de las pruebas, evaluación y política educativa (CSTEEP) en el Boston College.

El aprendizaje tiene lugar en un contexto y no en forma aislada. Existen numerosos factores contextuales que tienen efecto en el aprendizaje de los estudiantes, por ejemplo, el tipo de escuela, los recursos escolares, métodos de enseñanza, las características del maestro, actitudes de los estudiantes, y apoyo en el hogar para el aprendizaje contribuyen en gran medida al aprendizaje de los estudiantes y sus logros. Para una apreciación más plena de lo que los resultados de rendimiento TIMSS significan y cómo se puede utilizar para mejorar el aprendizaje de los estudiantes en matemáticas y ciencias, es importante entender el contexto en el cual los estudiantes aprenden. TIMSS en cada ciclo recoge una amplia gama de información acerca de estos contextos para el aprendizaje mediante la administración de cuestionarios de antecedentes a los estudiantes, profesores, directores de escuela, y los expertos en currículo, que, junto con la evaluación de desempeño de los estudiantes en matemáticas y ciencias, constituyen una rica fuente de datos sobre rendimiento de los estudiantes.

Así como los marcos de las matemáticas y la ciencia describen lo que debe ser evaluado en esas áreas, el marco contextual identifica las principales características de los contextos educativos y sociales que fueron estudiados con el fin de mejorar el aprendizaje del estudiante.

Por lo cual estudio contempla los siguientes instrumentos:

Prueba de matemáticas y ciencias (estudiantes). Estos instrumentos miden los aprendizajes de los estudiantes en las áreas de matemáticas y ciencias.

Cuestionario para estudiantes. Estos cuestionarios recogen información sobre el ambiente de aprendizaje de los estudiantes, considera información sobre el ambiente escolar y familiar.

Cuestionario para profesores y Cuestionario para director o directora. Estos cuestionarios recogen información sobre el contexto en que ocurre la enseñanza de los estudiantes en las áreas de matemática y ciencias.

Resultados de México[7]

México no aparece en la tabla de resultados de TIMSS, porque el gobierno mexicano retiró su participación en el estudio después de que se habían administrado y calificado las pruebas, pero antes de que se publicaran los resultados. Como consecuencia, la IEA retiró de la base de datos los resultados mexicanos y destruyó la información recabada de nuestros estudiantes. Sin embargo, la Dirección General de Evaluación (DGE) de la SEP conservó copia de los resultados originales que le proporcionó la IEA.

Cinco años después, en 2000, la DGE emprendió un estudio nacional utilizando sólo las preguntas de opción múltiple de TIMSS-1995. Para ello, hizo un muestreo de aproximadamente 20 mil estudiantes para las poblaciones 1 y 2.

Los resultados mexicanos de ambos estudios (1995 y 2000) no se publicaron en esas fechas y, hasta donde se tiene conocimiento, tampoco se analizaron cabalmente para realizar con ello un informe técnico de uso interno de la SEP.

[7] Información adaptada de la presentada en [3].

Ocho años después, a principios del año 2003, el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) solicitó a la DGE los resultados de ambas evaluaciones, con el propósito de realizar un análisis de los resultados del TIMSS.

Puede consultar los resultados obtenidos de ese estudio en el resumen ejecutivo [3].

Apéndice IV

MEJORAR LA CALIDAD DE LA ENSEÑANZA EN CLASES NUMEROSAS

La clase magistral es el método normal de enseñanza cuando las clases son muy numerosas. Sus virtudes radican en la comunicación de (a) información y (b) las interpretaciones personales del profesor, pero requiere una concentración que reduce drásticamente su valor si no se desarrolla adecuadamente. Esta sección muestra cómo puede alcanzar mayor eficacia la clase magistral, introduciendo pausas periódicas, cambios de actividad que aclaren y desarrollen el contenido de la clase y el repaso activo de los estudiantes.

Buscamos formas de enriquecer la enseñanza en clases grandes desde dos puntos de vista: examinar formas de incrementar el alcance cognitivo de la clase magistral y buscar alternativas a la clase magistral para manejar la elevada proporción entre el número de estudiantes y el profesor. Primero veamos qué posibilidades tiene la clase magistral y qué limitaciones.

Un atractivo de la clase magistral es que admite grandes fluctuaciones en el número de estudiantes, por eso se ha convertido en el método universal. Se da por supuesto que, si usted conoce su asignatura y no tiene defectos del habla, puede impartir una clase magistral pasable. No obstante es preciso observar con detenimiento este supuesto.

Bligh (1971) llevó a cabo la revisión de cerca de 100 estudios, que comparaban la clase magistral con otros métodos, en su mayor parte, diálogos en grupo o lecturas, y concluyó lo siguiente:

1. Las clases magistrales son tan eficaces como otros métodos para *transmitir información*, pero no más. Cuarenta estudios indicaban que la lectura no supervisada es mejor que la clase magistral.
2. Las clases magistrales son muy ineficaces para estimular el *pensamiento de orden superior.*
3. No se puede contar con la clase magistral para inspirar a los estudiantes o cambiar sus actitudes de manera favorable.
4. A los estudiantes les gustan las buenas clases magistrales, pero, por regla general, prefieren un trabajo en grupo bien dirigido.

El profesor debe ser un agente de transformación del conocimiento, que ayude a los estudiantes a interpretar y a construir sus propios conocimientos, y no una instancia pasiva que les transmita unos mensajes prefabricados.

En consecuencia la clase magistral es tan buena como lo sea el profesor, no en cuanto a individuo que complace a las masas, sino como estudioso. Así, si quiere utilizar la clase magistral como método predominante, la cuestión es: ¿puede ofrecer a sus estudiantes algo que no proporcione el libro de texto u otras fuentes? Si la respuesta es negativa, debería de tratar de utilizar la clase magistral con moderación.

Muchas de las limitaciones de la clase magistral derivan de ciertos hechos inherentes al aprendizaje humano:

1. La actividad de bajo nivel sostenida y sin cambios reduce la concentración. Sentarse a escuchar una clase magistral es una de estas actividades.

2. En estas condiciones, el periodo de atención de los estudiantes puede mantenerse entre diez y quince minutos, pasados los cuales el aprendizaje decae rápidamente.

3. Un corto periodo de descanso, o un cambio de actividad durante unos quince minutos, lleva a la recuperación del rendimiento casi al nivel original.

4. Un breve periodo de consolidación, después de un aprendizaje prolongado, refuerza en gran medida la retención. Si consigue que los alumnos hagan un repaso de lo aprendido al final de la clase magistral, la retención será mucho mejor y más duradera que si finaliza la clase y despide a los alumnos.

5. Los resultados de bajo nivel que, por regla general, se obtienen con la clase magistral se deben en gran parte a las actividades continuadas de escuchar y tomar apuntes.

El reto de la enseñanza a clases grandes entonces consiste en restaurar los apoyos del aprendizaje que reduce el contexto:

1. Intercalar cambios de actividad en el curso de una sesión. El profesor que es capaz de mantener a los estudiantes continua y plenamente atentos durante toda una sesión es muy especial.
2. Utilizar estas interrupciones para hacer que los estudiantes revisen sus apuntes y para hacer algún trabajo cognitivo de alto nivel con lo que hayan escuchado.
3. Asegurarse de que haya una actividad de repaso.

Llegamos de nuevo a la premisa fundamental de este libro; lo que hace el estudiante… Y ése es el problema básico de la clase magistral. Tanto el profesor como los alumnos consideran la clase magistral como una cuestión relacionada con la actuación del profesor y no con la del alumno. Esta es una percepción que hay que cambiar.

En resumen, aunque las clases magistrales pueden transmitir información a los estudiantes, su forma habitual en la que una parte habla y la otra escucha y toma apuntes, no lleva a los estudiantes a pensar crítica o creativamente, ni los motiva. Sin embargo, a medida que la relación profesor-estudiantes aumenta es probable que la clase magistral se afiance aún más.

La enseñanza a clases grandes no consiste solo en hacer lo que se pueda, sino que tiene sus propios placeres y ventajas. En realidad permiten que el profesor consiga con mucha facilidad algunas cosas que son más difíciles de hacer en los grupos pequeños. Por otra parte la enseñanza a clases grandes es difícil y requiere del profesor mucha más seguridad en sí mismo y más experiencia.

A continuación, presentamos algunas sugerencias para dirigir clases grandes.

- *Preparación*. Las clases grandes necesitan una preparación mucho más meticulosa que las pequeñas. La preparación supone planificar el contenido académico y los procedimientos de dirección de la clase, así como la preparación mental.
- *Estructura académica*. Hay que hacer claramente explícitos los fines de cada sesión. Transmitir a los alumnos la finalidad de la clase.
- *Materiales*. Antes de la clase, hay que organizar el material a utilizar, para tenerlo todo listo para su uso. Muy importante, nunca ordene el material sobre la marcha.
- *Reglas procedimentales*. Establezca desde el principio sus reglas procedimentales, por escrito cuando sea conveniente: indicaciones de comportamiento, de realización de actividades, de participación etc.
- *Preguntas*. En un grupo grande de este tipo, las preguntas tienen que seguir unos procedimientos muy distintos de los que se emplean en grupos pequeños. El tratamiento de las preguntas requiere una técnica de “clase grande”. Las preguntas facilitan una grata pausa que muchas estudiantes perciben como un buen momento para charlar con el compañero, mientras el colega tiene una charla con el profesor. Para impedir esto, hay que incluir e involucrar a toda la clase lo que supone *distanciarse* de quien pregunte.

Estrategias para estructurar una clase magistral numerosa.

- El comienzo de la clase magistral

El tamaño y los murmullos de una clase grande dificultan su comienzo por lo que es recomendable:

- ✓ No entrar en materia de inmediato: indique que la clase ha comenzado y espere a que se haga silencio.
- ✓ Empezar con una introducción adecuada: recuerde a los estudiantes qué hicieron, dígales que van a hacer y qué aprendizaje deben obtener de esa clase concreta.

- La estructura

Idealmente, la estructura de la clase magistral es un reflejo de la estructura de los temas o contenidos que se van a impartir. Brown y Atkins (1988) señalan diferentes estructuras:

1. *Clásica*, en la que la clase aborda diversas áreas, y sus subdivisiones. Éste es el método de estructuración más fácil y potencialmente el más aburrido. Si no se prepara y estructura adecuadamente, puede convertirse en un intrincado monólogo. En esta situación hay que ser muy claro sobre la estructura, tanto para uno mismo como para los estudiantes. Hay que enfatizar con toda claridad la estructura del tema y plasmarla en las subdivisiones.
2. *Basada en problemas*: se presenta un problema y se indican soluciones alternativas. Pueden dejarse a la consideración de los alumnos para que las ordenen, o puede concluirse la clase con un argumento a favor de una de ellas.
3. *Comparativa*: se presentan y comparan dos o más teorías, puntos de vista perspectivas, etc. Los estudiantes tienen que conocer primero las distintas teorías o posturas.
4. *Tesis*: se adopta una postura y se apoya con pruebas, argumentos, hipótesis.

- El desarrollo

He aquí algunas indicaciones que es necesario observar durante la clase magistral:

- ❖ Mantener el contacto visual con los estudiantes mientras se habla.
- ❖ Asegurar la claridad de la voz.
- ❖ Centrarse en las filas de atrás y de los lados, esto involucrará a las demás automáticamente.

- ❖ Indicar los puntos que quiera que los estudiantes trasladen a sus apuntes al pie de la letra. Dejarles tiempo suficiente.
- ❖ Ayudas visuales, apuntes y notas para repartir. Es aconsejable repartir las notas al principio o al final de la clase, de manera que los estudiantes puedan recogerlas al entrar o al salir, de otro modo será fuente de desorden y pérdida de tiempo.
- ❖ Cuando cambien las actividades explique por qué.

- Personalizar la clase

La forma de personalizar la clase depende de cada profesor; no obstante, he aquí algunas posibilidades (Davis, 1993):

- o Permanecer de pie, si es posible pase por los pasillos, lo que supone también que no lean sus notas. Esa forma de actuar da la impresión de cercanía. No obstante deténgase cuando tenga que enseñar aspectos importantes.
- o Si la sesión se centra en el desarrollo de una actividad para toda la clase, no caiga en la tentación de mantener una conversación en voz baja con un estudiante cercano, en respuesta a una rápida pregunta informal. Debe tratarla como una pregunta que proviniera de toda la clase.
- o Pida a los estudiantes que complementen un corto cuestionario biográfico, con las razones para cursar la asignatura, sus aficiones etc. Después puede llamarlos por su nombre, y seleccionar ejemplos para ilustrar algunos aspectos de sus clases magistrales que concuerden con sus intereses. Aunque nadie lo mencione, estas cosas les hacen sentirse a gusto.
- o Llegue antes de la hora a clase o váyase más tarde para poder hablar con los estudiantes. Del mismo modo es aconsejable dar a conocer las horas en las que estará en su despacho a su disposición y procure respectar dicho horario.
- o Emplee el humor y haga referencia a la actualidad.

Estos puntos se centran en lo que hace el profesor. Ahora nos centraremos en la cuestión más importante: lo que hace el estudiante.

- Aprendizaje activo en la clase numerosa

No está nada mal que una persona con amplios conocimientos explique aquello que puede ser útil para otras. En la comunicación normal cuando parece que la atención del oyente se pierde, normalmente se hace algo para recuperarla: un rápido contacto visual, una pregunta. Por su parte, los oyentes pueden aclarar puntos difíciles sobre la marcha, comentar aspectos que les sorprendan y hacer algo con esos conocimientos a medida que se desarrollan, como pensar en sus propios ejemplos, asegurarse de que sus apuntes son suficientes para estructurar un buen recuerdo posterior o para explicárselo a otra persona.

En una clase pequeña, estas claves de comprensión son relativamente fáciles de disponer. El reto está en prepararlas cuando hay demasiadas personas escuchando.

Para comprender de manera adecuada una clase magistral, los estudiantes tienen que realizar dos tareas: comprender lo que oyen y escribir sus apuntes y comentarios para profundizar en el tema más tarde.

A muchos les resulta difícil hacer ambas tareas, por lo que las alternan. Escuchan una oración, y mientras escriben lo esencial, el profesor dice, al menos, otras dos, que el alumno no capta. Con esta estrategia, los estudiantes anotan menos de un tercio de las ideas que configuran la clase magistral y que conlleva una dificultad en el proceso posterior apto para el aprendizaje. Los estudiantes no solo necesitan una oportunidad para comprobar que sus apuntes son exactos, sino, más importante aún, para ver que sus apuntes recogen realmente el argumento. Necesitan tiempo para reflexionar.

La solución es sencilla: separar el tiempo para comprender del tiempo para anotar. Déjeles un periodo de tiempo cada quince o veinte minutos para que comprueben sus notas. En ese momento los estudiantes pueden intercambiar apuntes con sus compañeros, discutir las diferencias y redactarlos de otra manera. De ese modo pueden rellenar las lagunas con las principales ideas que se hayan dicho y o con los detalles de cada oración.

La pausa puede utilizarse también para suscitar su interés por otras actividades, de nivel cognitivo superior, que utilizan el contenido; como hacer preguntas para reflexionar sobre lo aprendido, plantear problemas para que trabajen en ellos o simplemente para tomarse un respiro.

Hacia el final de la clase magistral, puede dejarse 5 minutos para que cada estudiante diga o escriba lo que cree que ha constituido la idea principal de la sesión. Con ello se consigue un repaso activo y la posibilidad de tener una perspectiva diferente en qué pensar, además de su propia interpretación.

El profesor puede repartir a los estudiantes notas o diagramas muy generales, que facilita a los estudiantes la información pero les exige que busquen activamente la idea principal y la expongan con sus propias palabras.

Los vínculos entre episodios distintos de la clase magistral pueden crearse con preguntas planteadas de antemano a los estudiantes para que se las respondan ellos mismos.

1) ¿Qué quiero aprender en la clase?
2) ¿Qué es lo que aprendí hoy?
3) ¿Qué fue lo que no entendí?

Las respuestas pueden utilizarse como evaluación formativa para ellos y para usted. El registro acumulativo da una indicación muy buena y rápida del desarrollo del pensamiento de los estudiantes a lo largo del curso.

Esto obliga a los estudiantes a hacer una lectura previa y a reflexionar sobre ella, como en la primera pregunta. La segunda pregunta puede darle información sobre el aprendizaje de los estudiantes y sobre su enseñanza: si consideran como el punto más importante alguna cuestión menor, o usted o ellos tienen algún problema. La última pregunta le permite abordar en la clase de la semana siguiente las concepciones erróneas surgidas en la clase, así como exponer las diferencias entre lo que usted considera puntos importantes y los que ellos consideran como tales.

Por supuesto, estas no son las únicas preguntas que pueden o deben hacerse. Sin duda usted puede pensar en otras que se ajusten más adecuadamente a sus objetivos.

Las técnicas de toma informada de apuntes, las pausas el intercambio de apuntes con los compañeros, el diálogo sobre las cuestiones clave, etc., por separado o en combinación, allanan muchas de las objeciones suscitadas en relación con la clase magistral, mejorando su eficiencia, manteniendo la atención de los estudiantes y la relevancia de sus apuntes y haciendo que ellos participen en actividades de alto nivel que, por regla general, no suscita la clase magistral. En particular, las actividades intercaladas sirven para supervisar, estructurar y consolidar la información presentada en la clase magistral.

Tipos de interacción entre los estudiantes en el entorno de la clase grande

El recurso más abundante en las clases grandes está constituido por los mismo estudiantes y su empleo adecuado implica un conjunto diferente de verbos que aborda una serie de objetivos escasamente atendidos por las AEA dirigidas por el profesor. Como vimos anteriormente la interacción con los compañeros produce de por sí unos resultados valiosos: desarrollo de los conocimientos, consciencia de los niveles de conocimiento, reflexión que lleva a la consciencia metacognitiva y diversos beneficios sociales. A los estudiantes también les gusta aprender de sus compañeros.

- Enseñanza a cargo de los compañeros

Así como no hay un único método de enseñanza que sea definitivamente el mejor, Mckeachie (1986) señala, que el segundo mejor es que "los estudiantes enseñen a otros estudiantes". La enseñanza a cargo de compañeros es un método de enseñanza muy potente. La investigación sobre la enseñanza a cargo de los compañeros ha descubierto que tanto el tutor como el tutelado se benefician en el plano académico, y el tutor más que el tutelado. También es probable que el tutor muestre un incremento de sus destrezas sociales y de sus actitudes con respecto al estudio y así mismo. El éxito de esta actividad se debe simplemente a que la enseñanza de la materia hace más profunda la comprensión cognitiva de los estudiantes.

- Grupos dirigidos por los estudiantes

Estos grupos pueden ser iniciados por el profesor o por los mismos estudiantes, de manera espontánea. Ambos tipos pueden funcionar muy bien. Un resultado corriente es que, en comparación con los grupos dirigidos por el profesor, los dirigidos por estudiantes mantienen diálogos de mayor alcance y obtienen resultados más complejos. Sin embargo lo importante no es la técnica sino su funcionamiento. Puede hacer falta proporcionar alguna preparación y un plan estructurado.

- Enseñanza suplementaria

Este tipo de enseñanza se trata de una variante de la tutoría a cargo de compañeros se cursos superiores. Los estudiantes son tutores de segundo o tercero, que habiendo aprobado la asignatura de primero con unas calificaciones excelentes, reúnen más cualidades personales apropiadas. Se les forma para ejemplificar, aconsejar y facilitar, más que para abordar directamente el currículo, y por su trabajo o bien se les paga o bien reciben créditos académicos.

Se pide a estos estudiantes que lleven un diario reflexivo, con el que puedan facilitar retroinformación al coordinador del departamento. Esta información sobre la marcha es mucho más útil para que los profesores puedan abordar los problemas que surgen que las evaluaciones de la asignatura al final del semestre.

- Colaboración espontánea

Algunos grupos de trabajo no son oficiales sino que se forman espontáneamente para abordar determinadas tareas. El trabajo en colaboración se extiende de diversas formas a través de la fase de planificación del proyecto, pero el plan detallado final y la refacción se llevan a cabo individualmente.

Actividades de enseñanza y aprendizaje autodirigidas

En el estudio autodirigido los estudiantes aprenden a cumplir los requisitos institucionales fuera de clase.

- Aprendizaje fuera del aula

El aprendizaje fuera del aula se ha identificado con los estudios externos; después con la educación a distancia y ahora con el aprendizaje flexible. Estas modalidades reflejan diferentes ideas de la enseñanza, pero básicamente, suponen que el aprendiz se responsabilice del aprendizaje, que a fin de cuentas es de lo que trata la enseñanza superior.

En este desarrollo del AFA cada fase se basaba en unos supuestos acerca de la enseñanza y el aprendizaje que hacían innecesaria la asistencia regular a clase:

1. *Estudios externos*. Esta fase inicial del AFA se basaba en un modelo de transmisión de nivel 1; en el que el método de enseñanza consistía básicamente en apuntes detallados de la clase y tareas que se enviaban por correo. En la mayoría de los casos, los estudiantes acudían al campus durante un par de semanas para recibir unas clases magistrales rigurosas y participar en algunos trabajos de tutorías.
2. *Aprendizaje abierto.* La fase siguiente era mucho más sofisticada. Se basaba en las ideas de la enseñanza de nivel 2(centrada en el profesor) y de nivel 3(centrada en el estudiante), dependiendo de su forma de implementación en los casos concretos.
3. Aprendizaje flexible. Es probable que la tercera fase del AFA no difiera mucho del aprendizaje abierto, desde el punto de vista filosófico, pero hace un uso más generalizado de la tecnología educativa de alto nivel y, en consecuencia, de las opciones de enseñanza y aprendizaje que ofrece.
   El aprendizaje flexible debe involucrar activamente a los alumnos, como en la visión de la enseñanza de nivel 3, y aunque pueda desarrollarse fuera del aula, no tiene porqué producirse fuera del campus.
   Parece pues que hay dos formas de pensar acerca del aprendizaje flexible: como algo suplementario o como algo propio del milenio. En todo caso el aprendizaje flexible ofrece oportunidades reales de generar un aprendizaje eficaz y de alta calidad economizando tiempo.

No obstante, a pesar de la amplia gama de AFA, las pruebas reunidas hasta ahora indican que la interacción con los profesores y con otros estudiantes sigue siendo tan necesaria aquí como cuando se impartía una clase magistral a centenares de estudiantes a la vez.