BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

"Construcción de lecciones didácticas de probabilidad para nivel medio superior. Una innovación para un Entorno Virtual de Aprendizaje (EVA)"

TESIS

Para obtener el título de:

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

Presenta:

Gladys Denisse Salgado Suárez

Asesor:

M.C. José Dionicio Zacarías Flores.

Puebla, Octubre 2012

AGRADECIMIENTOS

Sé que es invaluable el cariño, el apoyo y las enseñanzas de todas las personas que me ayudaron a hacer posible el sueño de terminar mi licenciatura, por eso en estas cortas pero significativas líneas quiero decirles, GRACIAS.

Gracias a mis padres Francisco Salgado Romero y Amalia Suárez Ochoa, porque han sabido guiarme en todo momento, este es un logro en mi vida pero es un logro de ustedes también, gracias por apoyarme, respetar mis decisiones y estar conmigo en cada paso que doy, los quiero muchísimo.

A mis hermanas Sady y Bertha, gracias por animarme siempre, generar en mí una sonrisa y alentarme para seguir adelante.

Gracias a mi familia por estar siempre al pendiente de mí, no podría desear una familia mejor.

Gracias a mis amigos Yazmín, Ana, Laura, Germán, Gilberto y a ti Alejandro, hicimos juntos un gran equipo difícil de igualar, porque sé que el llegar juntos hasta este punto ha sido resultado de un gran trabajo pero también de una gran amistad.

Le agradezco mucho a mi asesor, el M.C. José Dionicio Zacarías Flores por darme la oportunidad de trabajar con él, por el apoyo que me ha brindado y el tiempo dedicado.

También agradezco a la Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar, al Dr. Francisco Solano Tajonar Sanabria y al M. C. Julio Erasto Poisot Macías por aceptar ser parte de mi jurado y dedicar su tiempo y experiencia a la revisión de mi trabajo.

Y gracias a todos mis profesores de la FCFM por sus enseñanzas y consejos, que influyeron a que pudiera llegar a este momento.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN 5

CAPITULO 1. ANTECEDENTES 9

1.1 Importancia de la probabilidad 10
1.2 Problemática existente en el aprendizaje de probabilidad 16
1.3 Planteamiento del problema 22
1.4 Objetivos de investigación 24

CAPITULO 2. MARCO TEÓRICO 25

2.1 Corrientes didácticas 26
2.2 Propuesta didactica de Cuevas y Pluvinage 33
2.3 Integración de las tecnologías de información y comunicación a la enseñanza. 37

CAPITULO 3. DISEÑO Y DESARROLLO DE LAS LECCIONES DIDÁCTICAS .. 51

3.1 Diseño descriptivo de una leccion didáctica. 52
3.2 Aspectos a considerarse en el desarrollo de las lecciones 54
3.3 Desarrollo de la interfaz de las lecciones didácticas 58
3.4 Descripción de la didáctica en las lecciones 62
3.5 Lección basada en dados 65
3.6 Lección basada en monedas. 77
3.7 Lección basada en el aparato de galton. 86
3.8 Desarrollo del pre-test 94

3.8.1 Metodología de la investigación empírica. 94

3.8.2 Diseño del Pre-test. 96

3.9 Problemas complementarios. 99

CAPITULO 4. APLICACIÓN, ANÁLISIS ESTADÍSTICO E INTERPRETACIÓN DEL PRE-TEST Y LECCIONES DE PROBABILIDAD 101

4.1 Aplicación del pre-test y de las lecciones 102

4.2 Análisis estadístico e interpretación del pre-test. 104

4.3 Análisis estadístico de las lecciones. 114

4.3.1 Análisis de resultados 115

4.3.2 Interpretación de resultados. 142

4.4 Conclusiones finales respecto al capítulo. 146

RESULTADOS Y CONCLUSIONES 147

REFERENCIAS 155

ANEXOS 166

Anexo 1. Referencias. 167

Anexo 2. Pre-tests 168

Anexo 3. Taxonomía de Bloom 178

Anexo 4. Conceptos de Probabilidad 180

Anexo 5. Algunos ejemplos de problemas de sesgos y heurísticas. 184

GLOSARIO 189

INTRODUCCIÓN

Hoy en día la probabilidad y la estadística han adquirido una gran importancia para la interpretación de problemas de la vida diaria, por esta razón a nivel internacional las instituciones gubernamentales han buscado incluir la enseñanza de la probabilidad y la estadística en sus planes de estudio desde temprana edad, de igual manera se han creado programas de evaluación internacionales como PISA y SERCE que valoran tal inclusión así, dentro del campo de la matemática uno de sus elementos claves de evaluación está conformado por dichas áreas. Pero existe una gran problemática alrededor del aprendizaje de la probabilidad, como lo muestran una diversidad de artículos de investigación, quienes nos hacen ver que desde los inicios de la Teoría de Probabilidad hasta nuestras fechas, los estudiantes tienen fuertes problemas de aprendizaje en todos los niveles educativos sin excepción, específicamente por las siguientes dos razones, la dificultad que implica el aprender y enseñar este tema y que cuando se llega a estudiarla, en cualquier nivel el alumno, ya trae consigo ideas intuitivas del azar que muchas veces son erróneas. A partir de aquí junto con nuestro gusto por el tema, nos dimos a la tarea de aportar una propuesta didáctica que promueva el aprendizaje de la probabilidad, buscando minimizar las dificultades ya mencionadas. En el nivel medio superior por el contenido y objetivo de los cursos de probabilidad y estadística, la mayor parte de planes de estudio, recomiendan trabajar los problemas mediante la experimentación, pues de esta manera se puede iniciar con un problema simple, y después podemos ir aumentando paulatinamente la complejidad de los mismos. Por interés personal se aborda el trabajo para este nivel de estudio.

Parte de la intención de realizar este trabajo es aprender a aplicar una propuesta didáctica específica orientada a la matemática y cómo incluir un recurso de tecnología digital a tal didáctica tomando en cuenta que la tecnología actualmente se ha convertido en parte de nuestras vidas donde los alumnos y en general la sociedad ha ido adquiriendo acceso a ella con más facilidad, además de ser de gran importancia para el aprendizaje de las matemáticas cuando se integra adecuadamente al proceso de aprendizaje, Así que el reto fue ¿Cómo promover el aprendizaje en probabilidad de tal manera que este sea significativo en los estudiantes del nivel en consideración?, quedando en un principio la incertidumbre del esfuerzo a realizar para concluir el trabajo, qué didáctica elegir, cómo poder aplicarla y si era posible incluir la tecnología digital.

Para crear una propuesta primero fue necesario conocer la problemática actual en el ámbito internacional y a continuación corroborar que México no es la excepción, para ello dada la facilidad que nos brindó una preparatoria de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, recurrimos a ellos como una muestra válida para el nivel nacional, para probar la propuesta didáctica. Primeramente se realizó un examen diagnóstico que efectivamente mostró evidencia de fuertes dificultades y constata la necesidad de una propuesta que ayude a mejorar el aprendizaje de la probabilidad.

Por tal motivo después de analizar alternativas, el trabajo sería parte de un proyecto más amplio en desarrollo, decidiéndonos por desarrollar lecciones interactivas de aprendizaje, las cuales serían incluidas en el entorno virtual de aprendizaje llamado PROBEXP, supervisadas por la propuesta didáctica de Cuevas y Pluvinage específica para el nivel medio superior, donde la interacción se da entre el alumno y el sistema en ambos sentidos, con la finalidad de servir como soporte complementario que apoye al trabajo del profesor y del estudiante, además de promover un aprendizaje significativo de los conceptos de probabilidad e ir eliminando los sesgos más frecuentes relacionados con el área de estudio.

Sabemos que nuestra propuesta es diferente de lo que actualmente existe (Zacarías, Zacarías, López, 2008), así que nos dedicamos a desarrollarla, la cual se describe a continuación a través de cuatro capítulos.

En el primer capítulo se muestran las razones principales que llevaron a la elaboración de este trabajo, que son la importancia de la probabilidad y la problemática existente en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la probabilidad, que son soporte y justificación de la realización de nuestra propuesta, presentando de igual manera la pregunta de investigación y los objetivos base de todo el trabajo.

El segundo capítulo, presenta el contenido teórico necesario de la computación y la psicología orientada a la educación, áreas que interactúan junto con la matemática para darle respuesta a la pregunta de investigación.

En el tercer capítulo se expone la propuesta con la que pretendemos promover el aprendizaje de la probabilidad, y reducir de manera parcial la problemática planteada en el capítulo uno, recurriendo a los elementos teóricos del capítulo dos, describiendo el diseño de la interfaz principal, junto con el proceso de desarrollo y presentación de las lecciones didácticas, siguiendo la didáctica elegida. De igual manera se incluye el diseño y desarrollo del pre-test que se aplicó en estudiantes de preparatoria de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP).

El cuarto capítulo está dedicado a la aplicación del examen de diagnóstico y de las lecciones desarrolladas, así como sus respectivos análisis estadísticos e interpretación de los resultados y evidencias obtenidas.

Para finalizar, tenemos las conclusiones a las que llegamos una vez vistos los resultados, señalando algunas ideas a seguir para darle continuación al trabajo posteriormente, referencias y anexos utilizados que complementan el contenido de los capítulos.

Se hace notar que toda cita que se presente en cursiva durante el trabajo es íntegramente de los autores a los que se les hace referencia. Y siempre que se hace mención de la palabra tecnología, nos referimos a tecnología digital.

CAPITULO 1.

ANTECEDENTES

En este primer capítulo se presenta el planteamiento del problema y los objetivos que se persiguen, además de las razones principales que motivaron el tema de nuestro trabajo. Primeramente desde sus orígenes hasta la fecha, la probabilidad siempre ha sido difícil de aprender como de enseñar pues no sólo se trata de memorizar y aplicar fórmulas sino que se requiere de un razonamiento probabilístico, por lo que se ha vuelto un reto para todos. El segundo motivo es la importancia que tiene la probabilidad en nuestras vidas, porque todos hemos estado involucrados de manera frecuente en situaciones azarosas, ya sea en la vida cotidiana como en la profesional, por esto, es indispensable tener por lo menos un conocimiento básico de probabilidad para tratar de comprender estas situaciones y así elegir decisiones mejor valoradas.

1.1 IMPORTANCIA DE LA PROBABILIDAD

La necesidad de obtener el conocimiento de la probabilidad surge conjuntamente con la de la estadística para interpretar y conocer los problemas de la sociedad cuando el hombre trata de modelar las situaciones de la vida o la naturaleza y se encuentra que algunas de éstas, siguen un modelo matemático que tiene como principal característica la aleatoriedad; éste escenario está siempre presente y de aquí, nace la importancia del conocimiento de la probabilidad para la toma de decisiones en la vida cotidiana y la profesional (Jiménez y Jiménez, 2005).

En cualquier momento nos vemos envueltos en situaciones donde se presenta el azar, en lo cotidiano puede ser: la hora de llegada del transporte público, el nacimiento de un bebé, el pronóstico del tiempo, que nuestro equipo favorito gane el partido de futbol, aprobar un examen sin haber estudiado, que tengan suficiente cambio en el autobús al pagar con un billete, que me toque lugar en el camión, encontrarme a mis amigos en la fiesta, que me asalten camino al mercado, etc.; también constantemente año con año vivimos fenómenos naturales que sabemos que ocurren pero no sabemos cuándo, como el cambio climático cuyo efecto puede verse por ejemplo en la sequía de este 2012 que se está sufriendo en 19 estados de la república mexicana y que afecta en gran medida a una buena parte de las cosechas, además de causar el hambre y varios problemas más[1]; los tsunamis son fenómenos que también se dan en la naturaleza, podemos recordar el ocurrido en Japón en 2011 que provocó muertes, enfermedades y daños multimillonarios a nivel mundial[2]; igualmente se padecen inundaciones, como las que sufre Tabasco y que deja graves daños[3], o los huracanes que tanto tocan a México poniendo en alerta a gran parte del país y que ocasionan destrucción y perjuicios significativos[4], así como muchos otros fenómenos que nos gustaría pronosticarlos con tiempo para decidir ciertas medidas de prevención; de igual forma, en la vida profesional se manifiestan cuestiones en donde se ve involucrado el azar como los actuarios en finanzas donde el cambio de divisas por lo general presenta cambios bruscos, su tarea es evitar que el accionista tenga pérdidas, por ejemplo el peso con el dólar, donde históricamente se dan fuertes fluctuaciones, generando efectos mayúsculos en la

[1,2,3,4,5,6,7] Anexo 1

economía mexicana[5], los investigadores en el área de medicina al estudiar la propagación de las enfermedades buscan crear una vacuna que evite la transmisión de dicha enfermedad, como la influenza AH1N1 que vivimos en México en el 2009[6], en economía, los economistas evalúan las crisis económicas como la que se presentó también aquí en México en el 2009 causando mayor desempleo, alza de precios y muchos problemas mas[7]. Todos estos aspectos suceden constantemente tanto en nuestro país como fuera de él, mostrándonos la importancia y la necesidad de contar con un conocimiento al menos básico de la probabilidad para intentar comprenderlos y tomar decisiones más valoradas en situaciones azarosas.

Por todo lo anterior han surgido trabajos de muchos organismos internacionales y nacionales evaluadores que se han dedicado a investigar el nivel de conocimiento de los alumnos en diferentes temas que deben ser parte de una formación integral como individuos, en donde uno de ellos es el de probabilidad así como organismos internacionales y nacionales que indican qué contenidos incluir en los diferentes niveles y la forma de cómo aprenderlos, así como la importancia y la necesidad por la cual incluir la probabilidad y la estadística en la educación desde edades tempranas, algunos de estos organismos son los que se presentan a continuación:

PISA (Programme for International Student Assessment*)* **(2006)** es un programa para la evaluación internacional cuyo objetivo es evaluar el nivel de ciertos conocimientos y habilidades necesarios para poder desarrollarse en la sociedad que han adquirido los alumnos que están por concluir la educación básica, examina el rendimiento de alumnos en áreas temáticas clave y estudian igualmente una gama amplia de resultados educativos, entre los que se encuentran: la motivación de los alumnos por aprender, la concepción que éstos tienen sobre sí mismos y sus estrategias de aprendizaje. La prueba se realizó en una primera fase cada tres años a partir del 2000 centrándose en un área concreta en cada evaluación, la lectura (en 2000), las matemáticas (en 2003) y las ciencias (en 2006); siendo la resolución de problemas un área temática especial en PISA 2003 y en una segunda etapa de evaluaciones en el 2009 (lectura), 2012 (matemáticas) y 2015 (ciencias). Participan todos los países miembros de la OCDE, así como varios países asociados. Los estudiantes son seleccionados a partir de una muestra aleatoria de escuelas públicas y privadas. Son elegidos en función de su edad (entre 15 años y tres meses y 16 años y dos meses al principio de la evaluación) y no del grado escolar en el que se encuentran. Más de un millón de alumnos han sido evaluados hasta ahora. Además de las pruebas en papel y lápiz que miden la competencia en lectura, matemáticas y ciencias, los estudiantes han llenado cuestionarios sobre ellos mismos, mientras que sus directores lo han hecho sobre sus escuelas. De esta manera, PISA en el **Marco de la evaluación** dice que:

> *"La ciencia y la tecnología rara vez se ocupan de las certidumbres. En realidad, el conocimiento científico casi nunca es absoluto, e incluso puede ser erróneo en ocasiones, por eso hasta en las predicciones más científicas existe siempre un umbral de incertidumbre. La incertidumbre también está presente en la vida diaria: resultados inciertos de unas elecciones, puentes que se derrumban, caídas de la bolsa de valores, pronósticos del tiempo poco fiables, predicciones erróneas del crecimiento de la población o modelos económicos que no cuadran".*

Es aquí donde la probabilidad entra en acción y juega un papel muy importante para dar respuesta a muchas de estas situaciones, además, uno de los contenidos que se contemplan en la evaluación para el 2012 en la competencia matemática, son los problemas de probabilidad, que al igual que los demás contenidos matemáticos incluidos, menciona "*serían conceptos esenciales de cualquier descripción de las matemáticas y formarían parte del núcleo de cualquier currículo en todos los niveles educativos*", de esta manera, los problemas abordados por la probabilidad comprenden los fenómenos y relaciones probabilísticas y la exploración activa (sea de manera empírica o teórica). Los resultados de esta evaluación pueden verse en el punto 1.2 de este capítulo.

SERCE(2005) (Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo) es organismo evaluador de los temas de lectura, ciencias y matemáticas entre los que está probabilidad, que fue aplicado en el año 2006 en diversos países de América Latina incluido México, sus objetivos son generar conocimiento sobre los resultados de aprendizaje de los estudiantes de educación primaria en las áreas de lenguaje, matemática y ciencias, así como de los factores asociados que explican las diferencias de rendimiento entre los alumnos, busca mejorar la calidad y la equidad de la educación ofreciendo información relevante para las políticas educativas y las prácticas en las escuelas y las aulas, además realizó un análisis curricular a los países participantes en donde detectó en la educación básica la introducción de probabilidad y estadística en sus planes de estudio.

La **NCTM** (National Council of Teachers of Mathematics) es una "organización profesional internacional comprometida con la excelencia de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para todos los estudiantes", que establece cinco estándares de contenidos que indican los temas y conceptos que los alumnos deben saber, formar y usar durante su enseñanza de los cuales uno de ellos es la probabilidad (Godino, Batanero y Font, 2003) y junto con la estadística establece su introducción desde los niveles básicos hasta el preuniversitario, dichos contenidos están en el área de análisis de datos y probabilidad describiendo como "comprender y aplicar los conceptos básicos de probabilidad" entre los que se encuentran espacios muestrales, eventos, propiedades de eventos, medida y cálculo de probabilidades, propiedades de probabilidad, probabilidad empírica, probabilidad condicional, distribuciones, valor esperado, etc., el cual está vigente en este 2012.

La SEP (Secretaria de Educación Pública) **(2011)** En los planes y programas de estudios de secundaria en la asignatura de matemáticas se considera en uno de sus ejes de formación, específicamente el de manejo de la información, el subtema de Nociones de probabilidad que propicia el desarrollo del pensamiento probabilístico debido a como se expone en el mismo plan (2011) "*los alumnos anticipan resultados, realizan actividades de simulación y exploración de fenómenos aleatorios y expresan propiedades, como la independencia, la equiprobabilidad, la complementariedad, etc.*", e incluye temas relacionados con "*el registro de frecuencias y el análisis de eventos azarosos; situaciones cuyo estudio se asocia al desarrollo del pensamiento estadístico y probabilístico*" desde primero a tercer grado; en el programa de estudios de la SEP y la Dirección general de Bachillerato en la asignatura de matemáticas II establece como una de las competencias esperadas "*Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia*" y durante el desarrollo del aprendizaje se pretende que puedan distinguir entre eventos deterministas y aleatorios, utilizando las leyes aditiva y multiplicativa de las probabilidades y en uno de los componentes de formación propedéutica se muestra como competencia principal *"la capacidad de movilizar recursos cognitivos para hacer frente a un tipo de situaciones con buen juicio, a su debido tiempo, para definir y solucionar verdaderos problemas"* y en el primer curso con un contenido que procura que el alumno comprenda las características de experimento, espacio muestral, punto muestral y evento como elementos de la probabilidad simple, y en el segundo curso se presentan los conceptos de eventos mutuamente excluyentes, eventos independientes, probabilidad condicional y Teorema de Bayes. De forma similar, en el plan de estudios 2009 creado por la SEP para los Bachilleratos Tecnológicos y vigente hasta la fecha, establece como una de las competencias disciplinares básicas de las matemáticas que el alumno "*Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia*" además de mostrar como propósito general de matemáticas y propósitos por asignatura de matemáticas en el tema de probabilidad y estadística "*Que el estudiante a través de fuentes de información fiables, analice fenómenos sociales o naturales, utilizando las herramientas básicas de la estadística descriptiva y de la teoría de la probabilidad para muestrear, procesar y comunicar información social y científica, para la toma de decisiones en la vida cotidiana*" incluyendo en su currículo en el tema de probabilidad los conceptos de Teoría de Conjuntos (Operación con conjuntos, Diagrama de Venn, Teorema del binomio, Diagrama de árbol y Eventos complementarios), Técnicas de conteo (Conceptos Básicos, Principio de la suma y la multiplicación, Permutación y Combinación) y Probabilidad para eventos (Probabilidad condicional, Eventos independientes, Teorema de Bayes y Selecciones al azar, con o sin remplazo).

Al revisar el plan de estudios de las preparatorias de la BUAP notamos que está contenida la asignatura de estadística en el tercer año de estudios incluyendo en ésta el tema de probabilidad, en donde se ven conceptos similares a los bachilleratos ya mencionados.

En la vida profesional, la probabilidad es una herramienta importante en la mayor parte de líneas de investigación, seña de esto es notar la probabilidad como asignatura en el nivel superior presente en diversos planes de estudio, la probabilidad es prerrequisito para otras asignaturas y además se conjuga con otras áreas, en los currículos aparece como base del trabajo aplicado que se realice, por ejemplo haciendo una breve investigación en la oferta académica de la BUAP (Benemérita Universidad Autónoma de Puebla), de las 65 carreras que se ofrecen[8], más del 55% poseen al menos una asignatura de probabilidad y estadística.

Estos estudios nos dicen que en general, en todos los niveles de educación es importante adquirir el conocimiento de al menos los conceptos básicos de probabilidad y estadística para formar alumnos que en el futuro sean personas y ciudadanos capaces de comprender lo que está pasando a su alrededor debido a que estamos inmersos en un mundo con diversidad de situaciones sociales, cotidianas, políticas, económicas, etc., las que necesitamos interpretar para tomar buenas decisiones en la vida haciendo uso de herramientas como tablas, graficas, listas, software, etc., indicando también que en los niveles básicos se busca que el estudiante aprenda los conceptos primarios como experimento, azar, eventos probables, poco probables, etc., mediante un enfoque frecuencial y experimental, y para el nivel superior mediante el enfoque axiomático de la probabilidad agregando otros conceptos como variables aleatorias, valor esperado, distribuciones de probabilidad, etc.

1.2 PROBLEMÁTICA EXISTENTE EN EL APRENDIZAJE DE PROBABILIDAD

La necesidad de una formación en probabilidad es inminente por todo lo expuesto anteriormente, y así como se ha buscado enseñar probabilidad en todos los niveles, también en todos ellos se han detectado dificultades, en particular en medio superior y superior (Barragués, Guisasola y Morais, 2005; Estrada, Díaz, y de la Fuente, 2006), por ello, la situación actual del nivel de aprendizaje para alumnos de nivel medio superior en los temas de probabilidad como en cualquier otro de matemáticas es problemático como podemos ver en estudios realizados por diversas instituciones como:

El Informe del Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes o Informe **PISA** por sus siglas en inglés **(Program for International Student Assessment)** realizado en el 2003 cuando el eje principal fue el área de matemáticas, nos presenta que el 90% de los países miembros de la OCDE alcanzan el nivel 1 en el tema de incertidumbre donde muestran lograr hacer la tarea de identificar los conceptos básicos de probabilidad en experimentos ya conocidos, siendo el nivel 1 el más bajo y el nivel 6 el más alto, sin embargo, una cuarta parte o más de los alumnos no consiguen alcanzar ni siquiera el nivel 2 en Grecia, Italia, México, Portugal, Eslovaquia y Turquía, así como en los países asociados Brasil, Indonesia, Letonia, Rusia, Tailandia, Túnez y Uruguay, y es el nivel 6 donde deben interpretar y reflexionar sobre situaciones reales utilizando el conocimiento probabilístico y hacer los cálculos necesarios con proporciones, cantidades grandes y redondeos y sólo el 4% logra alcanzar este nivel.

En los resultados de la prueba **ENLACE** realizada en el 2010 a alumnos en nivel medio superior, se muestra que Puebla se encuentra con el 82% de los alumnos en el nivel insuficiente y elemental en razonamiento matemático, siendo el nivel de excelente donde se aplican los conceptos avanzados de probabilidad. ENLACE, es una prueba del Sistema Educativo Nacional que se aplica a planteles públicos y privados del País, en educación básica, a los alumnos de tercero a sexto de primaria y jóvenes de primero, segundo y tercero de secundaria, en función de los planes y programas de estudios oficiales en las asignaturas de Español y Matemáticas, por cuarta ocasión se evaluó una tercera asignatura (en 2008 Ciencias, en 2009 Formación cívica y ética, en 2010 Historia y en 2011

Geografía), en educación media superior, se aplicó a jóvenes que cursan el último grado de bachillerato para evaluar las competencias disciplinarias básicas de los Campos de Comunicación (Comprensión Lectora) y Matemáticas, teniendo como propósito generar una sola escala de carácter nacional que proporcione información comparable de los conocimientos y habilidades que tienen los estudiantes en los temas evaluados.

Desde el punto de vista académico la enseñanza no ha sido tarea fácil debido a las grandes dificultades que se presentan durante el aprendizaje como se expone en los trabajos de Konold, Pollatsek, Well, Lohmeier, y Lipson, (1993), Watson y Moritz (2003), Del Puerto, Minnaard y Seminara (2004), Barragués, Guisasola y Morais, (2005), Attorresi, García y Pralong, (2008), etc., en los que se hacen notar de manera persistente diversos errores y sesgos que poseen los alumnos al comenzar en el aprendizaje de la probabilidad y que se demuestran en un primer acercamiento a los conceptos básicos de probabilidad (experimento aleatorio, espacio muestral, eventos y calculo de probabilidad clásica y frecuencial), además de la problemática que existe al evaluar el aprendizaje en las matemáticas (Cantoral, Covian, Farfán y Lezama, 2008; LLECE, 2008; y Olson, Martin y Mullis, 2008) algunos de estos sesgos y dificultades son los siguientes:

- Las dificultades en la interpretación de la probabilidad y su estimación. Estas dificultades se refieren a que las personas poseen de antemano una idea intuitiva del azar y de la manera en como calcular e interpretar la probabilidad de un suceso y aun cuando ya se les da una información formal de los conceptos, estos chocan con su sentido común, generando un conflicto y por ende, fuertes dificultades para aplicar correctamente los conceptos probabilísticos (Barragués, Guisasola y Morais, 2005; Batanero, y Díaz, 2007).

- Heurística de la accesibilidad: se emiten juicios según los ejemplos o situaciones que ya se conocen, como lo primero que se les viene a la cabeza o por la facilidad con la que pueden generar ejemplos en los que ocurre el suceso (Barragués, Guisasola y Morais, 2005; Venturiello, 2008).

- Sesgo de equiprobabilidad: Se cree que todos los sucesos asociados a cualquier experimento aleatorio son igualmente probables (Barragués, Guisasola y Morais, 2005; Guisasola, y Barragués, 2002; Sánchez, 1996; Estrada, Díaz y de la Fuente, 2006).

- La heurística de la representatividad: es la idea de que un evento que se cree es prototipo de la población es más probable que otro que se cree no lo es, dos concepciones de esta idea se pueden identificar por *insensibilidad al tamaño de la muestra* en el que se cree que cualquier muestra reproduce las características de la población total, sin considerar su tamaño o la variabilidad de esta; y *concepciones erróneas sobre las secuencias aleatorias* que se cree que las secuencias ordenadas son poco probables. (Barragués, Guisasola y Morais, 2005; Guisasola, y Barragués, 2002).

- Dificultades en el concepto de aleatoriedad, fenómeno aleatorio y espacio muestral. Para establecer la probabilidad de forma axiomática fue necesario primero considerar el espacio muestral gracias a la idea de Kolmogorov, que es la constitución de todos los sucesos posibles elementales en un experimento aleatorio, se considera el mayor de los conjuntos del experimento y se establece como base universal de los eventos, asimismo podemos obtener los subconjuntos que representen los sucesos de interés que están constituidos por un subconjunto de estos sucesos elementales (Godino y Batanero, 1994).

  Es posible comparar probabilidades solo conociendo el espacio muestral y los subconjuntos que representan a los eventos de interés, debido a que el evento que contenga más elementos del espacio muestral, será el que tenga mayor probabilidad de ocurrencia, pero siempre y cuando el espacio muestral sea finito, discreto y equiprobable, así, una construcción errónea del espacio muestral, conlleva a una obtención equivocada de la probabilidad desde el enfoque clásico. El espacio muestral nos ayuda a calcular las probabilidades de conjuntos de eventos distinguiendo si son independientes, equiprobables, disjuntos o contenidos, según nuestro interés y ayudando de esta manera al alumno a tener una mejor visión del problema, aunque muchas veces es difícil afirmar que el elegido es el adecuado. (Godino, Batanero y Flores, 1998). Sin embargo, aunque el concepto de espacio muestral podría pensarse como muy básico e intuitivo y muchas veces no se le da el tiempo necesario para la enseñanza, constituye la parte esencial para el aprendizaje y uso de la probabilidad y conlleva grandes dificultades en su construcción que se basan fundamentalmente en que se debe considerar no solo los sucesos que nos interesan si no todos los eventos posibles que pueden ocurrir, estas concepciones pueden ser muy simples a la vista, sin embargo los errores en su construcción son muy comunes, y siempre han existido como se ve en el trabajo de Batanero (2004) desde los primeros estudios realizados por Fermat, Cardano y otros, y hasta la fecha. Donde los errores más comunes cometidos por los alumnos son: la Identificación incorrecta de los datos, error en la construcción del espacio muestral y de la construcción de eventos.

En cuestión de la aleatoriedad las principales dificultades que se presentan son que muchas veces no comprenden la idea del azar, al creer que todo es efecto de otro fenómeno, quedándose sólo con la idea de causa y efecto, otra dificultad es que no diferencian entre sucesos deterministas y aleatorios que en conjunto con la dificultad anterior, siempre buscan la causa, además de un orden o patrón, aun cuando no existe y piensan que a la larga el fenómeno se puede controlar a conveniencia y siempre están pensando en alguna regularidad, en general, no se identifica correctamente la aleatoriedad (Batanero y Serrano, 1995).

- Sesgo determinista: a un fenómeno aleatorio se le intenta dar una justificación determinista (Guisasola, y Barragués, 2002).

Aunque bien es cierto que los errores pueden surgir de la falta de conocimiento del tema, consideramos que la falta o mal uso de conocimientos previos también pueden afectar a la presencia del error (Venturiello, 2008), una clasificación de errores mencionada en Del Puerto, Minnaard y Seminara, (2004) se mencionan los Errores debidos a un aprendizaje deficiente de conocimientos nuevos y conceptos previos que se refieren a los cometidos por deficiencias en el manejo de algoritmos, procedimientos, símbolos y conceptos matemáticos.

Cada vez que el alumno es sometido al aprendizaje de conocimientos nuevos, estos traen consigo la necesidad de conocimientos previos que son base en el aprendizaje de los nuevos, haciendo una revisión de los planes de estudios de la SEP y los de algunas escuelas particulares de Puebla, para los distintos niveles educativos, los conceptos que se les debe enseñar a los alumnos en los cursos introductorios de probabilidad son los siguientes:

- En nivel primaria, concepto de azar, evento seguro, imposible y probable, espacio muestral, comparación de dos eventos a partir del número de casos favorables sin cuantificar su probabilidad y análisis e interpretación de gráficas para hacer predicciones, como puede verse en el programa de matemáticas de este nivel bajo el tema de "la predicción y el azar" y que su estudio comienza en el tercer grado.

- En nivel secundaria se estudian los conceptos de espacio muestral, eventos, probabilidad clásica y frecuencial, experimento aleatorio, independencia y eventos excluyentes, estudio que se extiende durante los tres grados.

- En nivel medio superior se estudian los conceptos de experimento aleatorio y determinista, eventos y probabilidad clásica, así como las primeras propiedades de eventos en el segundo y quinto semestre.

- En nivel superior se presentan los conceptos de espacio muestral, eventos, experimento aleatorio y no aleatorio, probabilidades clásicas y frecuencial, experimentos aleatorios, operaciones con eventos, axiomas de la probabilidad, probabilidad condicional, eventos independientes, variables aleatorias, momento esperado y distribuciones de probabilidad.

Así, para iniciar con buenas expectativas de aprendizaje un curso introductorio de probabilidad en los niveles medio superior y superior, se necesita de conocimientos previos como son: definición y notación de conjuntos y subconjuntos, operaciones de conjuntos, producto cartesiano y n-ada, aritmética de números fraccionarios y decimales, exponentes, diagramas de Venn, combinaciones y permutaciones.

Por otro lado, el papel que juega el maestro, muchas veces es parte de las dificultades que afectan fuertemente el desarrollo académico de los estudiantes debido a su situación profesional, ya que gran parte de los profesores no adquirieron una preparación matemática formal por lo que poseen pocos conocimientos del tema y no muy bien asimilados, aun cuando en su currículo se incluye un poco de contenidos matemáticos, estos son escasos y de manera superficial siendo así como los transmiten a sus alumnos, generando sesgos, heurísticas y dificultades importantes (Azcarate, Dardeñoso y Porlan, 1988; Lavalle, Micheli y Boché, 2003; Ortiz, Mohamed y Serrano, 2009; Guzmán e Inzunsa, 2011).

La situación actual del aprovechamiento de los alumnos en cualquier nivel en estos temas es bastante problemático por lo que es importante ponerle la atención adecuada a las dificultades, sesgos y heurísticas que se presentan afectando significativamente el desarrollo y aprendizaje de la probabilidad.

1.3 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Ya es conocido que las matemáticas son difíciles en cualquier nivel de estudios y siendo el eje de probabilidad parte de la formación no está exenta de las dificultades que se presentan, de esta manera nuestro trabajo nace por una amplia pero no exhaustiva revisión de artículos de investigación, donde se plasman las dificultades que presentan estudiantes de nivel medio superior, corroborando con un estudio previo exploratorio que los estudiantes de México presentan las mismas dificultades ante el concepto de aleatoriedad, por medio de una muestra que podemos considerar representativa por la facilidad de disposición de estudiantes de preparatorias de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla con el cual se inicia la introducción de la probabilidad, revelándose además la presencia de algunos sesgos relacionados con este tema (Zacarías, 2008), sin embargo, podemos preguntarnos: ¿estas dificultades persisten?, ¿existirán otras? y ¿qué tanto influyen en el aprendizaje de la probabilidad? tomando en cuenta los siguientes dos aspectos:

- Los conocimientos previos presentes antes de empezar el estudio de la probabilidad.
- Los conocimientos informales antes de estudiar probabilidad.

Preocupados por la situación y nuestro interés personal por el tema, nace la necesidad de plantear una propuesta de aprendizaje, la cual queremos integrar en un entorno virtual de aprendizaje (EVA) que ayude a los alumnos del nivel medio superior a mejorar su aprovechamiento en los conceptos de probabilidad, buscando resolver parte de las dificultades encontradas y disminuir algunos de los sesgos que se presentan. De esta manera surge la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo desarrollar una propuesta bajo un Entorno Virtual de Aprendizaje, que promueva el aprendizaje de la probabilidad supervisada por una didáctica específica para el nivel medio superior?

Para responder a esta pregunta de investigación, se precisan algunos aspectos.

El Entorno Virtual de Aprendizaje de la probabilidad, es un proyecto de investigación más amplio que el que aquí se desarrolla, y se pretende que lo que se obtenga sea incluido como una parte de él.

De la pregunta principal de investigación, se desprende una pregunta secundaria:

¿Cuál es la didáctica de la matemática más adecuada para el nivel medio superior?

1.4 OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

Nuestro principal objetivo es promover una mejora en el aprendizaje de la probabilidad en los alumnos del nivel medio superior, siendo estudiantes de las preparatorias de la BUAP nuestros sujetos de estudio. Se pretende que cuando el estudiante lleve un primer curso de probabilidad, el Entorno Virtual de Aprendizaje (EVA) refuerce el aprendizaje obtenido en clase para que este llegue a ser significativo. Por limitante de tiempo, se trabajan los primeros conceptos básicos de probabilidad, como son: experimento, experimento aleatorio y determinista, espacio muestral, eventos simples, compuestos, nulo, e imposible, así como probabilidad frecuencial, con los cuales se establecerá una propuesta didáctica. Siguiendo durante el transcurso del trabajo los siguientes objetivos:

- Investigar las dificultades reales existentes en nuestra población de estudio en cuanto a los conocimientos previos necesarios para el aprendizaje de los conceptos básicos de probabilidad, por medio de un diagnóstico.
- Investigar la didáctica apropiada para el desarrollo de la propuesta didáctica a implementarse.
- Investigar las características y dificultades que puedan darse para que un EVA pueda ser utilizado para el aprendizaje de la probabilidad.
- Estudiar un diseño factible para la propuesta didáctica que incluya el uso de un EVA.
- Desarrollo y aplicación de la propuesta didáctica que surja en los estudiantes de las preparatorias de la BUAP.
- Exploración y análisis del aprovechamiento de los estudiantes después de trabajar la propuesta a desarrollar.
- Presentar resultados y conclusiones pertinentes al trabajo.

CAPITULO 2.
MARCO TEÓRICO

Para tratar de resolver la problemática planteada en el capítulo anterior, utilizamos la interacción de tres áreas del saber: la matemática por medio de la teoría de probabilidad, la psicología orientada a la educación y la computación, en este capítulo se describen los elementos de estas dos últimas áreas ya que la matemática que se maneja que comprende los primeros conceptos de un primer curso de probabilidad para el nivel medio superior, ya fueron mencionados en el capítulo 1, por lo cual, se omiten en éste. Respecto a la psicología orientada a la educación recurrimos a la propuesta didáctica de Cuevas y Pluvinage, la cual nació eligiendo elementos de distintas corrientes del pensamiento, orientada al nivel medio superior y superior, y de la computación haremos uso de un entorno virtual de aprendizaje soportado en Internet.

2.1 CORRIENTES DIDÁCTICAS

La enseñanza que se recibe comúnmente en un salón de clases se da por medio de la transmisión de conocimientos orales en donde el profesor se vuelve el centro de atención y el alumno se mantiene pasivo siendo sólo observador y obteniendo los contenidos por medio de la memorización o imitación sin que se garantice un aprendizaje significativo, además de que tanto profesores como alumnos muchas veces no realizan su papel correspondiente. Debido a diversas razones el profesor no puede comprobar si el alumno está aprendiendo puesto que la evaluación generalmente se da hasta el final a través de exámenes rígidos o tareas demasiado tediosas y el alumno no llega a repasar los contenidos vistos, preguntar para aclarar sus dudas o estudiar en casa antes y después de ver los contenidos en clase. Generalmente el profesor solo puede hacer uso del pizarrón, plumones y cuando mucho de libros de texto quedando limitado en cuestión de material y tiempo. Además, en matemáticas a los contenidos enseñados no se les ve relación con la realidad, como si fuera algo innecesario para la vida, lo que genera cierto rechazo logrando solo la memorización de formulas o símbolos a los que no les encuentran mucho sentido y que olvidan fácilmente; con todo esto no quiere decir que los alumnos no aprendan pero sí les es más difícil y su aprendizaje puede no ser significativo, seña de esto lo muestran una diversidad de trabajos, por citar algunos, PISA (2003), Barragués, Guisasola y Morais, (2005), Attorresi, García y Pralong, (2008), etc.

Nuestro trabajo no pretende sustituir al profesor sino fortalecer la enseñanza que usualmente reciben los alumnos en el salón de clases, y proporcionarles al profesor y a los alumnos una alternativa que complemente este proceso de enseñanza aprendizaje modificando el rol de participación tanto de alumnos como de profesores en dicho proceso. Para esto, nos apoyamos en los fundamentos de la escuela activa que es una corriente que se contrapone con la manera tradicional en que se enseña y que propone como su nombre lo dice que se esté en acción en todo momento, es decir, que los alumnos estén siempre resolviendo problemas, investigando, repasando, preguntando para tratar de despejar sus dudas, trabajando en equipo, etc., y el profesor promoviendo diversas actividades como: presentar problemas, guiar y preparar la clase, encargar, revisar y comentar la tareas, resolver dudas, etc., y siempre mostrando la importancia de lo que se enseña por medio de situaciones que están presentes en nuestra vida. El profesor debe hacer que el alumno sea el actor principal del proceso de aprendizaje y que va más allá de sólo ser el que escucha y observa pasivamente lo que el maestro presenta, pero este escenario no siempre está presente pues el profesor no posee una buena preparación pedagógica y didáctica. Por tales razones ofrecemos una propuesta que de el soporte didáctico necesario por medio de la didáctica de Cuevas y Pluvinage, la cual fue elegida debido a que está orientada al nivel medio superior y superior, adoptando para sus cimientos ideas representativas de grandes pensadores y de la escuela activa que describiremos a continuación de manera breve empezando por:

- Guy Brousseau

En matemáticas, los conceptos usualmente se trabajan por medio de problemas pero generalmente se presentan de tal forma que no se les ve sentido o utilidad para la vida o de manera descontextualizada, lo que genera rechazo y apatía en los alumnos desde el primer acercamiento, así, de Brousseau se eligieron algunas ideas de su "Teoría de las situaciones" que adaptadas a las matemáticas deben ser "producir problemas o ejercicios que modelen situaciones cotidianas para ser resueltos por los alumnos", que sustentada en el constructivismo de Piaget, nos dice que una situación lleva al alumno a un mundo conocido en el que pone en práctica sus conocimientos anteriores para llegar a uno nuevo de manera más natural, pero además Brousseau nos dice que se puede aprender un concepto iniciando su estudio mediante el planteamiento de un problema por medio de una situación *contextualizada en el mundo real* que proporcione motivación al alumno para llegar a la solución de dicho problema (Panizza, 2004) por ejemplo:

Problema clásico	**Problema contextualizado**
Se tiene un experimento de lanzamiento de dados. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 6?	María y Jorge lanzan un dado y eligen el 2 y 5 respectivamente, debido a que son sus números favoritos. ¿Qué número tendrá más posibilidades de salir al lanzar el dado?

En el problema clásico no se ve la utilidad del por qué aprender a medir la probabilidad de los resultados de un dado volviéndose tedioso para el alumno, en cambio en un problema contextualizado se vuelve de interés y más fácil de comprender.

- Hans Aebli y Jean Piaget

Cuando se presenta un problema de matemáticas lo primero que se preguntan los alumnos es cómo lo resuelvo y cómo sé que ya aprendí, Aebli junto con la psicología de Piaget presenta sus ideas didácticas afirmando su validez para los diversos niveles educativos a través de una visión didáctica y psicológica, señala que aparte de realizar acciones físicas también deben llevarse a cabo operaciones internas del pensamiento que permiten la mejor comprensión de los conceptos, estas acciones son: en cuanto a los medios de comunicación "narrar y referir", "(de) mostrar", "contemplar y observar", "leer con los alumnos", "escribir y redactar textos"; respecto al proceso de enseñanza aprendizaje, los elementos que se deben tener siempre presentes son "acciones", "operaciones" y "conceptos", y relativo a los procesos que hacen posible que se dé el aprendizaje de los conceptos: "solución de problemas", "elaboración de operaciones y conceptos", "ejercicio y repetición" y "aplicación". Estas cuatro últimas se consideran esenciales en matemáticas, y respecto a ellas, Aebli menciona que para poder darle solución a un problema, primero se debe atraer la atención de los alumnos, lo que podemos lograr poniendo el problema en una situación que sea de interés para ellos, que lo puedan ver en la vida real sin contradecir nuestras creencias o que se compliquen sin necesidad. Durante el proceso de solucionar problemas el alumno obtiene elementos que lo ayudan a aprender y motivan para saber la respuesta, y que sin embargo pueden surgir dificultades que el profesor puede solucionar a través de una ayuda paulatina que no de la clave de la respuesta de una sola vez sino que incite al alumno a pensar y razonar para que poco a poco él mismo resuelva sus dudas; para saber si pueden aplicar lo aprendido en otras situaciones y no sólo en el problema aprendido, los alumnos deben ser capaces de elaborar por ellos mismos planes de acción y dar las operaciones necesarias que los lleve a la solución de los problemas o con las que puedan resolver cualquier otro; se tiene que ejercitar, es decir practicando es como se fortalece lo que se aprende, resolver y resolver problemas es lo que va a llevar a los alumnos a un buen aprendizaje al lograr investigar y descubrir el proceso de solución, al memorizar y automatizar los conceptos y procedimientos. Por último, Aebli recomienda que el alumno tenga la capacidad de aplicar lo aprendido en su vida cotidiana (Lucio 1992).

- Edouard Claparède,

Cuando queremos enseñarle las matemáticas a nuestros alumnos, siempre nos preguntamos cómo hacerlo, para tratar de responder a esta pregunta, tomamos en cuenta a Claparède que propone que se trabaje de manera colaborativa entre alumnos y maestro, es decir, juntos construir las clases, donde el papel de los alumnos siempre será resolver problemas y el papel del profesor guiar el aprendizaje, aclarar dudas y dificultades. Con el concepto de *educación funcional*, mencionaba que la educación ha de centrarse en actividades que satisfagan los intereses de los niños y que proporcionen una necesidad para ellos el tratar de resolverlos a través de sus propias técnicas mentales y no limitarlos a un solo procedimiento, poder ser flexibles y aceptar que el alumno puede llegar a la respuesta de diversas formas (Claparède, 1905).

- Jonh Dewey

Pero qué es lo que pueden hacer de ante mano los alumnos, con qué podemos contar para ir dirigiendo la enseñanza de las matemáticas, para apoyarnos con esto, Dewey afirmaba que el niño cuando llega a la escuela ya es activo, llevando consigo la capacidad de explorar, comunicarse y construir de manera innata, y la educación solo consiste en orientar esta actividad, estaba convencido de que el aprendizaje se da mediante la experiencia de resolver problemas que sean de interés para ellos, así, el conocimiento será todo lo que se acumula en el proceso de resolver estos problemas por lo que el profesor solo debe ser guía y apoyo del aprendizaje (Westbrook, 1993), es decir, se puede experimentar y a través de ello obtener un aprendizaje por medio de problemas que sean de interés para el alumno, en donde interés significa que le guste o llame la atención intentar resolver el problema propuesto. Por ejemplo, regresando al problema de los dados, es muy común que los estudiantes hayan usado un dado ya sea en juegos de mesa o para tomar decisiones en su vida. Si lo ponemos en una situación real que conozcan, los hace relacionarse con el problema y se vuelve atractivo para ellos, de esta manera al presentarles un problema así, genera interés por realizarlo.

- Raymond Duval

En matemáticas y más concretamente en probabilidad, se utilizan diversos registros de representación semiótica como por ejemplo tablas, gráficas, diagramas, listas, etc., y que Duval menciona que junto con los objetos matemáticos (descritos posteriormente) son las características esenciales en la actividad cognitiva relativas a la actividad matemática, plantea que para que se dé el aprendizaje, es importante aprender a pasar de un registro a otro y a no confundir al objeto matemático con la representación que se hace de él además de utilizar los que sean adecuados de acuerdo a la actividad que se esté realizando, por ejemplo, al hacer la simulación del lanzamiento de un dado, los resultados los podemos ver por medio de una tabla que muestre las frecuencias de cada resultado, pero también esa misma información se puede visualizar a través de una gráfica que los resuma pero que nos de la misma información (ver figura 2.1 y 2.2) (Duval, 1993).

Resultados	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
1	14	0.14
2	20	0.2
3	17	0.17
4	18	0.18
5	20	0.2
6	11	0.11
Total	100	

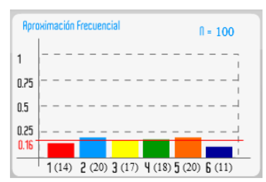


Figura 2.1 Representación tabular de datos. Figura 2.2 Representación gráfica de datos.

Pero hay que tener cuidado en elegir las representaciones adecuadamente, pues existen diferentes representaciones para los datos cualitativos y para los datos cuantitativos, por lo que algunas de las representaciones pueden no tener cabida al no ser la representación más adecuada, por ejemplo si al lanzar un dado, lo que nos interesa es ver la frecuencia de cada resultado, una caja de bigotes puede no sernos de mucha ayuda por lo que no sería una buena representación en este caso (ver figura 2.3).

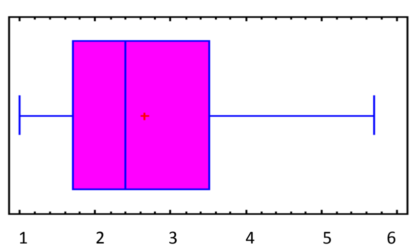


Figura 2.3 Caja de bigotes de datos.

- David Ausubel

La principal preocupación que se da en cualquier materia incluida matemáticas, siempre es que los alumnos alcancen un aprendizaje significativo, y para esto, Ausubel nos apoya con sus ideas haciendo ver que para que este aprendizaje pueda darse, los nuevos conocimientos a aprender deben tener alguna relación con lo que el alumno ya conoce. Concordando con los demás pensadores, tomamos de esto que los problemas que planteemos en matemáticas deben estar en un contexto que sea conocido para los alumnos, además, se deben tomar en cuenta los conocimientos previos que ya posean y tratar de relacionarlos con los nuevos, que se vea el seguimiento de sus conocimientos, por ejemplo, al aprender el concepto de espacio muestral, el alumno hace uso del concepto de conjunto que debe ser un conocimiento previo para el aprendizaje de espacio muestral, otra característica que Ausubel nos menciona es que desde el primer momento, el alumno debe mostrar una actitud positiva hacia lo que se va a hacer, esto es que debemos buscar proporcionarle al alumno alguna motivación que atraiga su atención hacia el trabajo, por esta razón, la tecnología puede llegar a proporcionar esta motivación, pero también, tomando la primera idea, la forma en cómo se le plantee el problema, puede lograr que el alumno le pueda ver la utilidad para su vida y se interese por saber cómo llegar a la respuesta.

- Lev Vygotsky

La matemática debe siempre preocuparse por su utilidad en la sociedad en que vivimos, debido a que es lo que está en contacto directo con nosotros y el ambiente más inmediato en el que hacemos uso de nuestro conocimiento, de aquí, siguiendo la teoría de Vygotsky, para aprender, el alumno debe conocer la relación de lo que aprende con la sociedad en que vive, y esto lo podemos hacer cuando se ve la aplicación de lo que se enseña a través de una situación que sea común para ellos, pero, Vygotsky también nos dice que para esto, se debe conocer la cultura del niño, por ejemplo, no podemos poner un problema en el que se pida contar cuantos surcos se pueden hacer en cierta área de terreno, pues si este problema se le presenta a un alumno que vive en la ciudad o nunca ha ido al campo, seguramente no conoce qué es un surco y entonces el problema ya va a estar en cuestión de la cultura de cada uno y no en los conocimientos matemáticos que nos interesa que se aprendan, así que debemos utilizar un lenguaje y un contexto que sea entendible para todos y que no genere este tipo de problemas, cuando hablamos de volados, lanzamiento de dados, etc., cualquiera podrá entendernos debido a que estas situaciones se dan comúnmente en nuestra vida.

Otra característica más que este pensador nos regala, es que no podemos suponer que el alumno ya sabe algunas cosas, pues nada se trae ya de manera innata sino que se aprende poco a poco conforme se interactúa con los demás, en este caso acorde se va trabajando. Con la intensión de evaluar las capacidades intelectuales que ya posee el niño y las prácticas educativas, Vygotsky define la Zona de desarrollo próximo como "*la distancia entre el nivel de desarrollo real del niño tal y como puede ser determinado a partir de la resolución independiente de problemas y el nivel más elevado de desarrollo potencial tal y como es determinado por la resolución de problemas bajo la guía del adulto o en colaboración con sus iguales más capacitados*" en la que podemos entender que el niño ya posee cierto conocimiento y existe alguna distancia entre él y el conocimiento formal que poco a poco según va trabajando, esta distancia se va acortando y el niño se va acercando más a este conocimiento. Para evaluar este acercamiento realizamos un pre-test que se aplique antes de la enseñanza para apreciar el conocimiento que ya posee el alumno, un test que debe realizarse durante la enseñanza para que se evalúe el acercamiento y un post-test para al término de la enseñanza conocer qué tanto se acercaron al conocimiento formal (Cuadernos UCAB, 1997).

2.2 PROPUESTA DIDACTICA DE CUEVAS Y PLUVINAGE

En la búsqueda de la didáctica en matemáticas a utilizar, la decisión fue elegir la propuesta didáctica debida a Cuevas y Pluvinage, puesto que está dirigida al nivel medio superior y superior, además de ser una didáctica aplicada y no teórica. En el trabajo siempre nos referiremos a esta propuesta solo como la didáctica de Cuevas y Pluvinage

Fundamentos de la didáctica de Cuevas y Pluvinage.

- **Primer elemento**. En la enseñanza es **primordial la *acción***. En el caso de la enseñanza de la matemática, la acción más que una acción física, ésta sería mental. en la resolución de problemas específicos, al estudiante se le *dosificarán gradualmente* hasta lograr el concepto deseado. Esto significa que ***los estudiantes siempre tratarán de resolver o solucionar los problemas.***

- **Segundo elemento**. En cada introducción de un concepto o una noción matemática, **se debe tratar de *partir de un problema colocado en un contexto de interés para el alumno***.

  Este problema puede conducir a otros ejercicios o sub-problemas cuyas soluciones forman una estructura coordinada, que lleva al estudiante a definir o demostrar el concepto matemático deseado.

  Es decisión del profesor, elegir los conceptos apropiados.

  *En cualquier caso, **nunca, introducir un concepto a partir de su definición formal***.

- **Tercer elemento**. Este apoya al primero.

  Una vez resuelto el problema presentado, ***el alumno debe validar sus resultados, comprobando que tienen un sentido lógico, de acuerdo con el problema***.

Interpretando la acción (como lo mencionan Piaget, 1947; y Piaget y Inhelder, 1948) en el ámbito de las matemáticas, por ejemplo, al *resolver problemas*, de acuerdo al segundo principio debemos *proponer un buen problema*, *en un contexto apropiado para el* *estudiante, que le motive a enfrentarlo* (como menciona Brousseau, 1986), y al buscar la manera de resolverlo, *el alumno sienta la necesidad* (Claparède, 1905) *del uso de la matemática para resolverlo*. Pero no basta la acción, es necesario que esta acción nos conduzca a una operación intelectual, es decir, a la acción interiorizada. La importancia de esto nos la muestra Aebli, en un análisis de la psicología de Jean Piaget.

> *"en sus niveles superiores el pensamiento es, ante todo, un sistema de operaciones lógicas, físicas (espacio-temporales) y numéricas. La operación constituye el elemento activo del pensamiento. Asegura los progresos esenciales de la inteligencia, en oposición a la imagen que desempeña el papel de elemento relativamente estático que perfila instantáneas de las transformaciones operatorias"(Aebli, 1958).*

Los demás elementos que conforman la propuesta didáctica de Cuevas – Pluvinage son:

- **Cuarto elemento**. Una de las características fundamentales de esta didáctica es *poder ofrecer al alumno,* ***cada vez que se introduce un concepto o noción, la posibilidad de realizar acciones, mediante la resolución de problemas***.

  De interiorizarse estas acciones, formarán, a su vez, lo que se denomina la *operación intelectual*.

- **Quinto elemento**. Al enseñar un concepto matemático complejo, mediante resolución de problemas, *es necesario descomponer o dividir el problema en sub-problemas que representan las operaciones parciales y registrar todas las operaciones y / o conceptos que resultan de este análisis* necesarios para que el alumno resuelva el problema original.

  Construir a partir de ahí *un plan de acción, que* ***a través de ejercicios dosificados gradualmente, y de forma coherente y coordinada se alcance el objetivo de aprendizaje***.

Piaget (1987, pp. 50-51) nos dice que la *movilidad de una operación* se define por la *reversibilidad y la asociatividad*. Obviamente, determina una diferencia fundamental respecto al hábito o costumbre que se da en la escuela tradicional, cuya característica rigidez, la lleva a ser irreversible. Así, aunque la anterior caracterización no indica cómo enseñar, define claramente a una didáctica contraria a la creación de hábitos en los individuos. Es decir, *si no nos dice qué hacer, sí nos dice qué no hacer*.

- **Sexto elemento**. Trate en lo posible, siempre que se efectúen las operaciones que nos llevan a los conceptos matemáticos***, establecer las operaciones inversas***.

- **Séptimo elemento**. Cuando una forma o método de resolución de problemas es presentado, ***intente dar algún otro tipo de alternativa***.

  En ningún caso, imponer una única forma de solución.

- **Octavo elemento**. Cada vez que nos enseñan un concepto matemático en un registro determinado de representación semiótica, **el trabajo** (si el concepto lo permite) ***es apropiarse de manera correcta de los otros registros***.

- **Noveno elemento.** Si un concepto matemático está presente en más de un registro de representación semiótica, *establecer operaciones directas e inversas que favorezcan la articulación (transferencia) entre los diferentes registros*.

- **Décimo elemento**. Construir problemas, donde el concepto recientemente adquirido, sea un elemento de análisis para un tema más avanzado o más complejo, o la construcción de problemas, que requieren el concepto, pero fuera del contexto de la enseñanza en el que se enseña.

  Significa pensar en los problemas donde el concepto de enseñanza forma parte de la estructura con la que los estudiantes analizan y resuelven la pregunta inicial propuesta.

Al tratar de aplicar los elementos didácticos en la enseñanza de un concepto matemático, se enfrenta uno a dificultades para hacerlo. Las mayores dificultades encontradas son tres.

Primera dificultad. Encontrar un problema relevante en el desarrollo de un plan práctico de acción, que satisfaga las siguientes características:

a) Ser claro y suficientemente simple para ser entendido, pero no necesariamente que la solución sea simple.

b) Ser atractivo para la mayoría de los alumnos o estudiantes.

c) Ser lo suficientemente rico para incluir en la(s) solución(es) concepto(s) de matemáticas para enseñar. Este es un gran reto para que el maestro sea sensible a las preocupaciones de sus estudiantes y para poder plantear cuestiones relacionadas con el fútbol, economía, física, astronomía, gobierno, etc., y no de inmediato justificar la matemática por la matemática.

Segunda dificultad. Llevar a cabo una inspección para encontrar qué conceptos y qué capacidades se requieren para que el estudiante llegue a una comprensión del concepto enseñado. Para el profesor, esta investigación representa un trabajo complejo y tedioso, ya que habitualmente el profesor asume implícitamente un conjunto de conocimientos y habilidades que los estudiantes a menudo no poseen. Se recomienda diseñar una especie de mapa conceptual, que muestre claramente los conceptos matemáticos relacionados y necesarios para la adquisición de la noción a enseñar.

Tercera dificultad. Disponer de facilidades para presentar un concepto matemático en los diferentes registros semióticos que le son propios. Nos reencontramos con lo ordinario que en este sentido es una herramienta muy valiosa para representar, a través del modelado, los diversos registros asociados.

2.3 INTEGRACIÓN DE LAS TECNOLOGÍAS DE INFORMACIÓN Y COMUNICACIÓN A LA ENSEÑANZA.

En los últimos años ha ido creciendo la accesibilidad de la tecnología digital para la sociedad en que vivimos, constantemente hacemos uso de algún elemento tecnológico como el internet, cámaras digitales, computadoras, televisores de alta calidad, videojuegos, etc., y que han sido necesarios para comunicarnos, trabajar, realizar operaciones bancarias, compartir información, etc., e incluso como entretenimiento, es decir, su utilización ha sido un medio importante de comunicación e información en nuestra sociedad. En el ámbito de la educación el nuevo sistema de competencias establece se desarrollen habilidades digitales que pretenden que los alumnos sean capaces de desenvolverse en una sociedad inmersa en un mundo lleno de avances tecnológicos (SEP 2011), de manera natural, el sistema educativo debe adaptarse a éstas condiciones evolutivas de la sociedad. La necesidad de adaptación ha llevado tanto a profesores como alumnos al uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) que se han ido introduciendo ya sea de forma presencial o como apoyo a la educación a distancia, (Díaz, 2008) que ayudan a la interacción de alumnos y maestros entre sí para llevar un trabajo interdisciplinario a través de envío o revisión de tareas en línea, uso de software, etc.

Las TIC pueden jugar un papel muy importante para llegar a una enseñanza y aprendizaje de calidad, (UNESCO, 2012) debido a que haciendo uso de ellas se puede llevar a cabo la evaluación del aprendizaje, tutorías, y el enriquecimiento del aprendizaje gracias a la consulta de material complementario en línea, además, explotando su potencial tienen la capacidad de convertir los escenarios de la educación formal en nuevos e innovadores, inmersos en entornos virtuales o en línea en diferentes contextos de aprendizaje, dejando de lado los límites del tiempo y el espacio debido a que éstos se rigen según las necesidades de quien hace uso de ellos y no se está limitado como en la enseñanza tradicional presencial en la escuela (Bustos y Coll, 2010; Ferro, Martínez y Otero, 2009).

La tecnología digital puede potencializar de manera considerable el aprendizaje de los alumnos en matemáticas, debido a que ayuda al desarrollo de habilidades del pensamiento y razonamiento matemático, el desarrollo de la abstracción, además de lograr mejores emociones y aptitudes hacia la matemática (Orozco y Labrador, 2006). En la Comisión Económica para América Latina (CEPAL, 2012) que es una de las cinco comisiones regionales de las Naciones Unidas fundada para contribuir al desarrollo económico de América Latina, coordinar las acciones encaminadas a su promoción, reforzar las relaciones económicas de los países entre sí y con las demás naciones del mundo y promover el desarrollo social, en su colección de documentos de proyectos (Claro, 2010), se ha hecho una relevante investigación acerca del uso y efectos de las TIC en la educación donde se muestra su impacto en el aprendizaje de los estudiantes en cuanto a la motivación y concentración al interactuar con una máquina y al abordar los temas de diversas formas, otro efecto importante que se deriva del uso de las TIC es lo que ellos llaman la alfabetización digital, que es el aprendizaje del uso de la tecnología y que entra como enfoque a las exigencias de las nuevas competencias digitales (SEP, 2011), también se hace ver que el uso de las TIC propician el desarrollo de habilidades y destrezas como comunicación, colaboración, aprendizaje independiente, trabajo en equipo y mejora de competencias de expresión y creatividad (Claro 2010; Ferro, Martínez y Otero, 2009; Mayta y León, 2009) que son parte importante al aprender las matemáticas.

El apoyo a las TIC en la educación matemática ha sido importante, un ejemplo de ello es como muestra la SEP en el plan de estudios de la educación básica que desde 2009 considera la incorporación de las nuevas tecnologías apoyadas de una didáctica para la enseñanza de las matemáticas desde nivel básico, ejemplo de esto es el programa "La Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología" (EMAT) vigente desde 1996 que propone el uso gradual y sistemático de las tecnologías con ayuda de un modelo pedagógico en la escuela secundaria para la enseñanza de las matemáticas, que muestra resultados favorables desde su evaluación en la etapa piloto.

Sin embargo, integrar nuevas tecnologías a la educación no es tan automático, se requiere de muchos cambios tanto en el escenario educativo como en la tarea docente y competencias de los alumnos. Internet puede ser utilizado como soporte didáctico para el aprendizaje por medio de lecciones o actividades didácticas, y para poder manejarlas adecuadamente y se logren los objetivos esperados, se necesitan desarrollar las habilidades necesarias para el uso correcto de la interfaz por el profesor y los alumnos (Martín, 2005) además se debe considerar que los recursos que se propongan deben estar bajo una didáctica que la sostenga, adecuar al currículo los objetivos que se persiguen (Mayta y León, 2009), así como la organización de los materiales que se necesitan al utilizar el Internet como herramienta.

En el primer Congreso Virtual Latinoamericano de Educación a Distancia en el 2004 se mencionó que se presentan tanto beneficios como dificultades para el uso en general de la WEB, los principales beneficios son: aprender más, de forma más rápida y más significativamente, potencialidad de adaptación a las características individuales de cada sujeto, aumento de la autonomía del alumnado y además, se cuenta con motivadores adicionales (simuladores, bibliografía digital, videos, comunicación online, etc.); en cuanto a las dificultades, concuerdan con las que se presentarán a continuación.

Al realizar la investigación, nos damos cuenta que integrar la tecnología a la educación matemática no es tan automático, podemos englobar en los siguientes puntos a las dificultades más importantes para el uso de las TIC y los retos por vencer al hacer uso de ellas:

- **Formación del profesorado**: el buen uso de las TIC lleva a la necesidad de capacitar a los profesores para que desarrollen las habilidades necesarias como cita Valdez, et al a la UNESCO (2008), que los docentes logren que los estudiantes las adecuen a los contenidos del currículo, reconocer el momento adecuado para utilizarlas, tener el conocimiento básico para el uso del software necesario, capacidad para llevar un seguimiento en los proyectos y evaluación de los mismos (Delgado, Arrieta y Riveros, 2009, Mayta y León, 2009, Valdez, Angulo, Urías, García, y Mortis, 2011).

- **Integración de las TIC en el currículum.** Se necesita que los profesores sean capaces de utilizar los recursos tecnológicos para llevar los conceptos matemáticos a otro marco, teniendo en cuenta la disponibilidad de dichos recursos y que desarrollen habilidades para integrar las TIC a la asignatura y tener el conocimiento de cómo aprenden sus alumnos (Mayta y León, 2009, Claro, 2010).

- **Aislamiento del alumnado**: Debido a que el aprendizaje puede hacerse de forma individualizada puede generar que los alumnos se sientan aislados de la sociedad (Grau, 2008).

- **Inversiones en infraestructura**. Un problema importante es en cuanto a las posibilidades de contar con una computadora con internet, en el siguiente gráfico comparativo de algunos países de América Latina que cuentan con acceso a internet y una computadora, podemos encontrar a México con apenas un 30% de acceso a Internet por parte de la población. Ver figura 2.4.

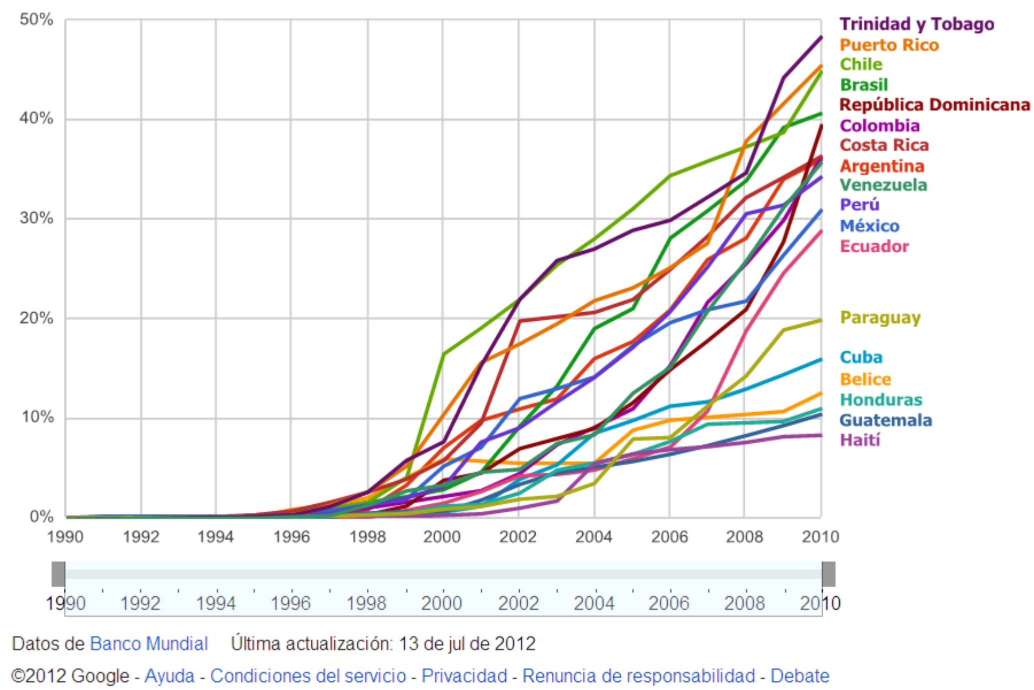


Figura 2.4. Porcentaje de la población con acceso a Internet y Computadora de algunos países latinoamericanos

De igual manera podemos ver en la figura 2.5 que el porcentaje promedio de hogares con conexión a Internet del grupo de países de la OCDE del que México forma parte, es del 66.8 % en 2009, y el de México es del 22.2% en 2010.

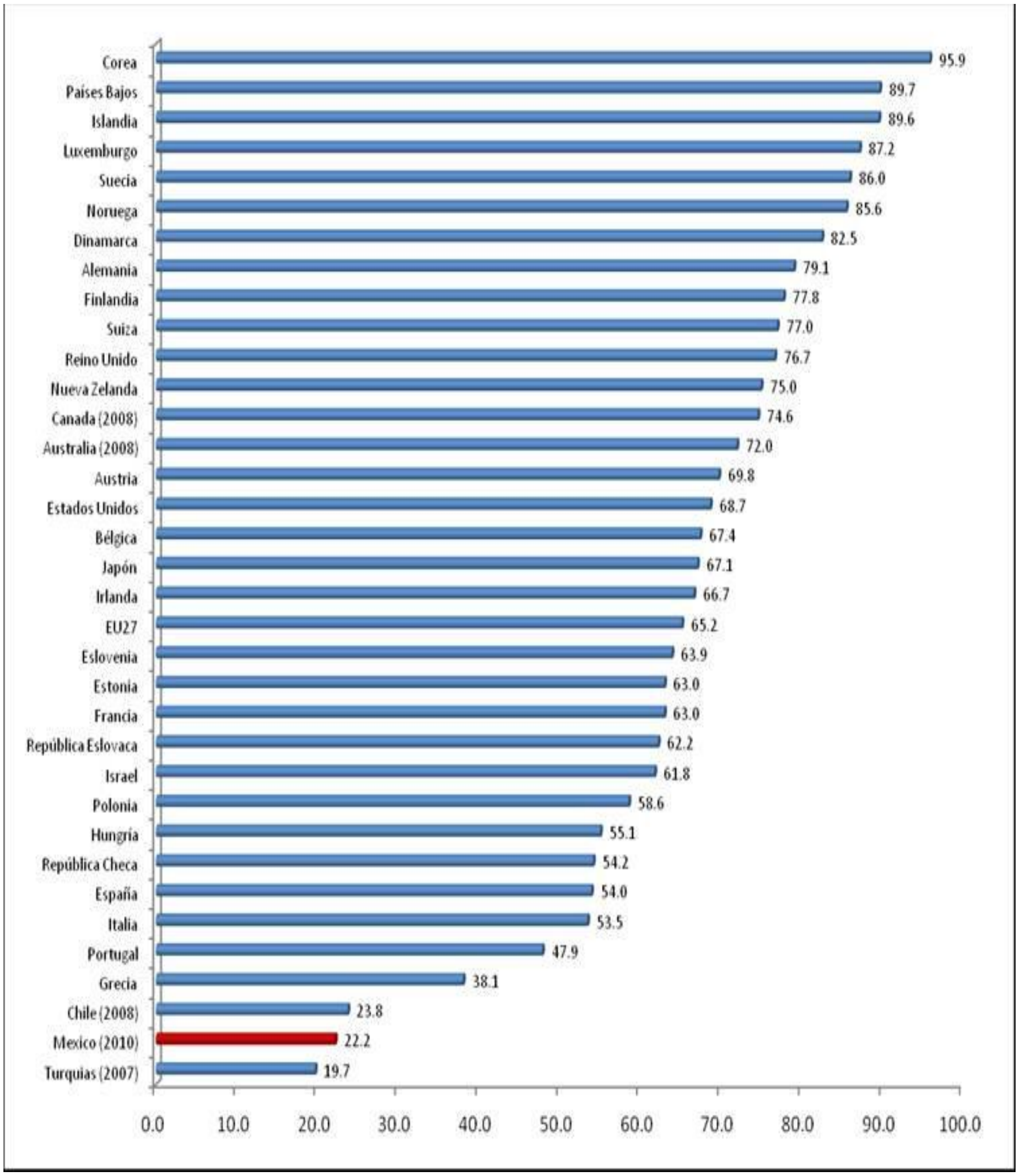


Figura 2.5. Porcentaje de hogares con acceso a Internet de los países de la OCDE, 2009.

Fuente: OCDE. OCDE Key Indicators, mayo 2009. Para México. INEGI. ENDUTIH, 2010.

Además, se debe considerar el acceso que tienen los alumnos en las escuelas, como se puede ver en la tabla, en promedio en México, hay 12 alumnos por cada computadora.

Tabla 2.1 Alumnos por computadora con acceso a Internet para uso educativo por entidad federativa, según modelo educativo y tipo de sostenimiento (2009/20010)

Fuente: INEE, estimaciones con base en el *Censo de recursos tecnológicos* (ciclo escolar 2007/2008), ILCE y SEP-DGPP (2008). *Estadísticas continuas del formato 911* (inicio del ciclo escolar 2007/2008).

Entidad federativa	Total			Modelo educativo								
				Bachillerato general			Bachillerato tecnológico			Profesional técnico		
	Total	Público	Privado	Total	Público	Privado	Total	Público	Privado	Total	Público	Privado
Aguascalientes	10	10	9	10	18	9	10	10	9	7	7	7
Baja California	12	14	8	8	10	7	27	28	22	27	11	2
Baja California Sur	8	9	8	8	8	9	10	10	4	10	6	n.a.
Campeche	10	10	7	9	9	7	15	15	9	15	5	n.a.
Coahuila	8	11	5	6	27	5	10	10	7	10	9	7
Colima	8	9	4	4	13	3	9	9	15	9	7	8
Chiapas	19	23	7	22	30	4	16	18	11	16	9	n.a.
Chihuahua	11	10	13	12	12	12	10	9	19	10	8	17
Distrito Federal	10	13	5	11	26	5	8	8	5	8	13	6
Durango	14	14	10	15	18	9	14	14	n.a.	14	6	20
Guanajuato	12	17	9	12	26	8	11	9	12	11	8	11
Guerrero	25	28	9	38	53	9	18	18	n.a.	18	8	n.a.
Hidalgo	12	13	9	10	10	9	14	15	5	14	22	11
Jalisco	10	12	7	10	12	7	10	10	8	10	17	15
México	12	17	6	13	23	6	10	13	6	10	14	5
Michoacán	22	27	13	23	40	13	21	22	6	21	15	356
Morelos	7	9	6	7	8	5	8	9	7	8	8	6
Nayarit	12	14	6	16	27	7	11	11	n.a.	11	11	5
Nuevo León	10	13	7	9	15	6	11	12	9	11	13	7
Oaxaca	16	16	10	18	20	10	14	14	12	14	9	1
Puebla	15	22	6	20	37	6	8	9	6	8	7	8
Querétaro	7	8	4	7	8	4	8	9	6	8	6	3
Quintana Roo	8	9	6	7	8	6	11	12	4	11	7	n.a.
San Luis Potosí	11	12	10	13	18	11	9	10	5	9	6	6
Sinaloa	12	16	4	15	24	5	8	8	n.a.	8	10	2
Sonora	10	11	7	10	13	7	11	11	n.a.	11	7	3
Tabasco	29	39	9	34	62	8	30	34	11	30	11	n.a.
Tamaulipas	9	11	7	9	13	8	11	12	4	11	6	6
Tlaxcala	19	23	8	17	24	8	25	27	3	25	10	11
Veracruz	18	24	9	28	63	10	12	14	5	12	7	2
Yucatán	14	21	8	16	42	8	14	16	5	14	7	45
Zacatecas	12	14	3	13	19	3	9	9	n.a.	9	16	74
Nacional	12	15	7	13	21	7	11	12	7	11	10	7

El objetivo principal de la enseñanza por cualquiera que sea el método es siempre el aprendizaje, sin embargo, muchas veces los alumnos por diversas razones como falta de recursos, problemas familiares, diferencias étnicas, entre otras, no pueden estar presencialmente en la escuela, así se pone en práctica una educación en línea, pero que aplicada correctamente puede lograr mejores resultados que solo esperar la mejor disposición de los alumnos. La enseñanza propuesta por un sistema de cómputo no pretende sustituir al profesor sino proporcionar otra alternativa para los estudiantes, y servir de apoyo al profesor en la enseñanza.

Un curso de probabilidad en la enseñanza tradicional que se da directamente de maestro a alumno se espera se logre un aprendizaje pues el maestro sirve de guía en la enseñanza y está siempre con el alumno en el salón de clases, sin embargo, este proceso se da mediante dos pasos independientes, primero la enseñanza y posteriormente la evaluación, además de que el profesor se vuelve el centro de atención y el alumno se mantiene pasivo siendo sólo observador, obteniendo el conocimiento por memorización o imitación.

Asimismo, los conceptos de probabilidad los podemos transformar de manera que se trabajen en un mundo digital, concretamente un entorno virtual de aprendizaje (EVA) para la probabilidad, proyecto que está en desarrollo llamado PROBEXP, al que integramos nuestra propuesta.

La UNESCO (1998) en su informe mundial de la educación, señala que los entornos de aprendizaje virtuales constituyen una forma totalmente nueva de Tecnología Educativa y ofrece una compleja serie de oportunidades y tareas a las instituciones de enseñanza de todo el mundo, el entorno de aprendizaje virtual lo define como un programa informático interactivo de carácter pedagógico que posee una capacidad de comunicación integrada, es decir, que está asociado a Nuevas Tecnologías.

La enseñanza y la evaluación se deben realizar de forma simultánea (García, Martínez, Jaén, y Tapia, 2006) y no como se realiza en la enseñanza tradicional por esta razón, parte de la tarea del EVA es ir supervisando las respuestas que el alumno va proporcionando a las preguntas que se le plantean, los errores que detecta son los más comunes, como son: errores de sintaxis, de operatividad, error en conocimientos previos y mal uso de los nuevos conceptos y según el error, el EVA proporciona una ayuda específica para llegar a la respuesta correcta.

Podemos visualizar la comparación descrita en el siguiente diagrama (figura 2.6):

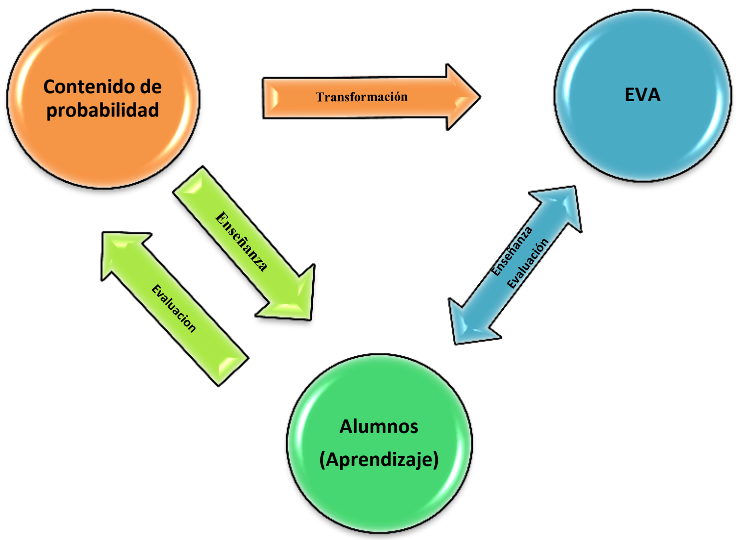


Figura 2.6 Proceso

Como queremos que se aprenda la probabilidad vía la tecnología digital, debemos transformar los objetos matemáticos en objetos de aprendizaje.

Objetos matemáticos (OM)

Los objetos matemáticos son los elementos que se usan en matemáticas, ya sean aritméticos, geométricos, estadísticos, etc., en este caso nosotros usaremos objetos probabilísticos que son los objetos matemáticos de probabilidad como son: gráficas de barras, eventos, notación de eventos, fórmulas, experimentos, etc., que al igual que todos los objetos matemáticos se dan por medio de una definición, un procedimiento y sus propiedades. Para trabajar matemáticamente es necesario tomar en cuenta que tipo y cuál es el uso de los objetos matemáticos que se emplean, conocer sus propiedades, saber su manejo y la relación entre ellos (Martínez, 2009).

Para abordar un problema de probabilidad se deben seguir ciertos pasos a través de objetos matemáticos que puedan llevarnos a la solución, aquí ponemos un ejemplo con los conceptos básicos de probabilidad:

1. Plantear el problema.
2. Representar el experimento.
3. Identificar la aleatoriedad.
4. Obtener el espacio muestral.
5. Saber describir todos los eventos involucrados en el espacio muestral.
6. Obtener la probabilidad de todos los eventos generados por mi espacio muestral en estudio e identificar el o los que resuelva(n) el problema.
7. Interpretar los resultados.

Objetos de aprendizaje (OA)

Cuando se habla de objetos de aprendizaje hacemos referencia al ámbito digital pero al buscar una definición específica, existe una gran discusión y diversidad de ideas, sin embargo, podemos extraer de ellas las características esenciales como son (Gutiérrez, 2008):

- Pequeños: El tamaño del código de los objetos deben se pequeños para que puedan ser reutilizados en diferentes contextos.
- Independientes: los objetos de aprendizaje deben ser independientes, es decir, que no estén ligados con otros para que por si solos puedan facilitar el aprendizaje.
- Combinables: sin contradecir la característica anterior, los objetos de aprendizaje deben tener la capacidad de actuar conjuntamente y crear nuevas combinaciones entre ellos.

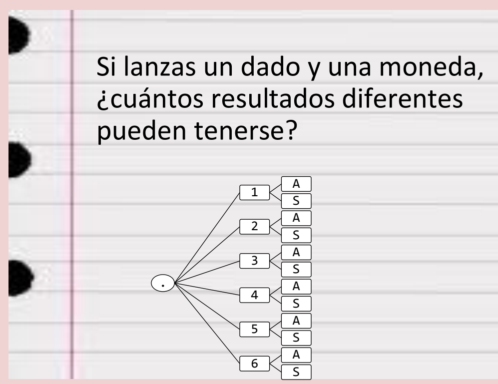
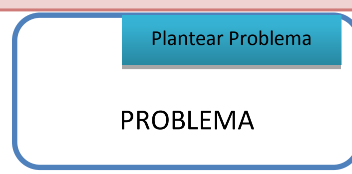
Estas características nos permiten:

- Interactividad: Se permite la comunicación en ambas direcciones entre el usuario y el sistema.

- Durabilidad: El tiempo de vida debe ser de un lapso de tiempo aceptable, las instrucciones deben seguir siendo válidas y utilizables aun cuando cambien la tecnología o se den las actualizaciones.
- Accesibilidad: El contenido puede estar disponible donde sea y en cualquier momento.

Así, nosotros consideraremos como objeto de aprendizaje a un elemento digital que cumpla con las características antes descritas, que apoye a la enseñanza y al aprendizaje. En particular, los objetos de aprendizaje de probabilidad (OAP) deben combinarse apropiadamente para realizar la mejor representación de los objetos de probabilidad al hacer la transformación computacional, tal cuestión podemos mostrarla de la siguiente manera en la figura 2.6, con los primeros conceptos de probabilidad:

Tabla 2.2 Transformación de OM a OA.

TRANSFORMACIÓN	EJEMPLO
1. Plantear el problema. Texto del problema, datos, diagrama.	
• Cuadro de control que plantee el problema. • Cuadro de diálogo que presente el problema a trabajar.	
2. Representar el experimento. Tomar algún instrumento probabilístico como dados, monedas, etc., lanzarlos, repetir el experimento, escribir los resultados y contarlos.	

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>

Simulador del experimento

Datos de entrada

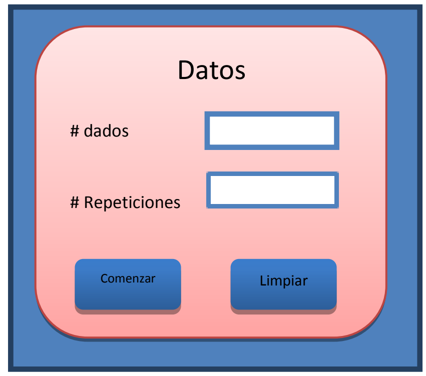
cajas de fondos,
cajas de texto fijo,
cajas dinámicas,
botón de continuar, comenzar y limpiar,
cuadro de selección.

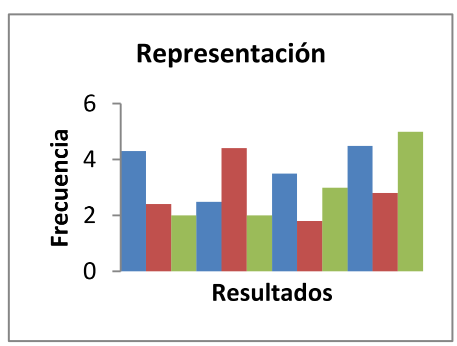
Algoritmo matemático de forma computacional

función Rand,
formulas de conteo y de registro de resultados, etc.

Datos de salida

formas de representaciones de los datos (graficas, imágenes, tablas, listas, etc.).

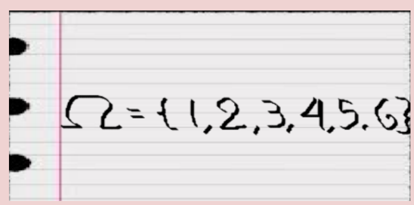
</td>
<td>
Cuadro de datos de entrada


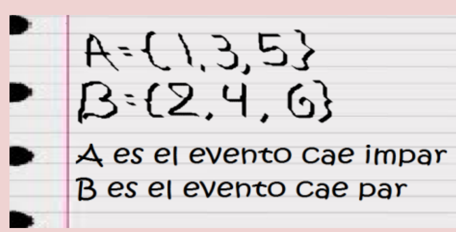
Entrada de datos
Int i, r1, r2,r3,… ;
R=repeticiones;
for (j=0; j<=R;j++)
{ i=1+(rand()%6);
if (i=1)
r1++;
else
if (i=2)
r2++;
…}


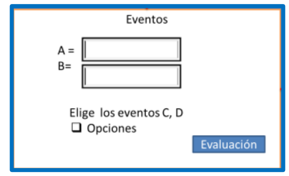
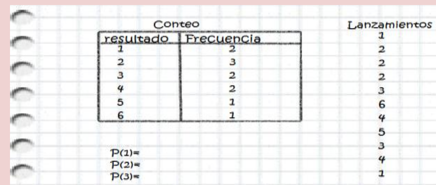
</td>
</tr>
</table>

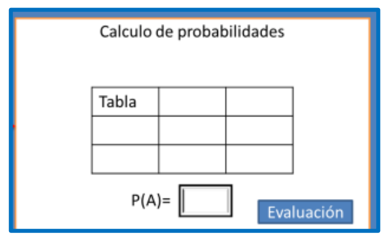
<table>
<tr>
<td>3. Identificar la aleatoriedad.

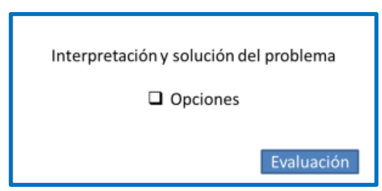
Realizar un experimento con algún instrumento probabilístico como lanzar una moneda o un dado, registrar los resultados en papel y contarlos.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>• Generador de números aleatorios
    ○ Botones de inicio y termino, limpiar y repetir.
    ○ Algoritmo computacional.
• Tabla de registro de los números aleatorios
    ○ Cajas de texto.
    ○ Fórmulas de conteo.</td>
<td><table><tr><th>Numero</th><th>Frecuencia</th></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table></td>
</tr>
<tr>
<td>4. Obtener el espacio muestral.

Escribir el conjunto de todos los posibles resultados del experimento</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>• Cuadros de texto dinámico.
• Cuadro de texto fijo.
• Botón de control para evaluación.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>5. Encontrar los eventos de interés.

Escribir el conjunto que represente a cada evento.</td>
<td></td>
</tr>
</table>

• Cuadros de texto dinámico. • Cuadro de texto fijo. • Botón de control para evaluación. • Botones de selección.	
6. Obtener la probabilidad de los eventos a partir de los datos registrados del experimento e identificar el que resuelva el problema.	

• Cuadros de texto dinámico.
• Botón de control.
• Tabla de datos.
    ○ Cajas de texto.
    ○ Fórmulas de conteo.
    ○ Cuadros de texto.
	

7. Interpretar los resultados y escribirlos en relación con el problema.	
• Cuadro de texto fijo. • Cuadros de selección. • Botón de control.	

Para esto, es necesario tomar en cuenta las características de calidad al diseñar los Objetos de Aprendizaje, las cuales son:

- En cuanto al uso de la tecnología, que cumplan con sus características esenciales como son que sean pequeños, independientes y combinables, además, que puedan ser reutilizados y adaptables a diferentes problemas.
- En cuanto a los elementos pedagógicos, que cumplan con una didáctica específica y que faciliten el proceso de enseñanza - aprendizaje como tomar en cuenta el número de ejemplos que se usen, el manejo de la experimentación, la evaluación, etc.
- Respecto al contenido, se debe considerar la extensión, la complejidad, que sea verídico, etc., por ejemplo, al definir un concepto, hacerlo de forma clara y entendible considerando el nivel del usuario al que es destinado, además de verificar que sea la definición correcta.
- En cuestión de estética, que se usen adecuadamente las fuentes, los colores, realizar un buen acomodo y simetría de los elementos, etc., en general, que sea atractivo, cómodo y agradable para trabajar, para que la principal preocupación del usuario sea por entender y aprender el contenido y no de cómo manejar la interfaz.

Como punto adicional, debe tomarse en cuenta el nivel y características de los usuarios, en este caso, que son estudiantes de nivel medio superior con las dificultades usuales en matemáticas y que han usado alguna vez una computadora (Velázquez, Muñoz, Álvarez y Garza, 2006).

CAPITULO 3. DISEÑO Y DESARROLLO DE LAS LECCIONES DIDÁCTICAS

Para aprender probabilidad existen muchas alternativas como: llevar un curso, recurrir a libros, buscar asesorías, etc., pero para darle respuesta a nuestra pregunta de investigación, nosotros buscamos aprovechar el potencial que tiene la tecnología digital en nuestros días, por lo que diseñamos y desarrollamos lecciones didácticas interactivas bajo un entorno virtual de aprendizaje siguiendo la didáctica elegida, dicho proceso se describirá en este capítulo.

3.1 DISEÑO DESCRIPTIVO DE UNA LECCION DIDÁCTICA.

Nuestra propuesta se presenta, como el titulo lo menciona, a través de la construcción de lecciones didácticas de probabilidad para estudiantes de nivel medio superior en la que se busca una innovación en el proceso de enseñanza - aprendizaje mediante el uso de un entorno virtual de aprendizaje, para promover el aprendizaje de la probabilidad. A continuación, mostraremos a grandes rasgos cómo se realizaron, describiéndolas con más detalle en la siguiente subsección.

Al empezar un curso de probabilidad, en el nivel medio superior, los alumnos inician el aprendizaje teniendo ciertos conocimientos de matemáticas, junto con ideas intuitivas del azar, algunas correctas, otras incorrectas, que a veces usan para la construcción de los nuevos conceptos. Estos nuevos conceptos junto con los anteriores se convierten a su vez en conocimientos previos para los siguientes. Esta relación podemos verla en el siguiente mapa descriptivo (figura 3.1)

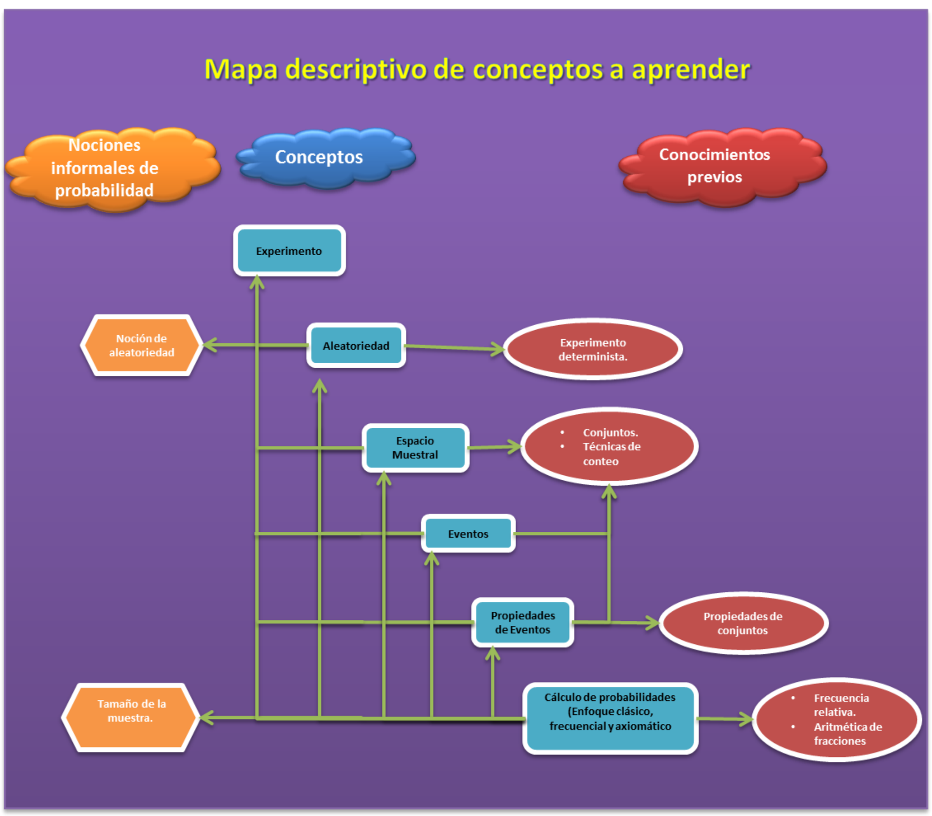


Figura 3.1 Conceptos a aprender y la relación con sus conocimientos previos.

En esta propuesta, toda lección de aprendizaje en probabilidad, será creada bajo supervisión de la didáctica de Cuevas y Pluvinage. El primer elemento didáctico, por lo que se inicia proponiendo un problema de probabilidad bajo el planteamiento de una situación real relacionada a nuestra vida cotidiana, con la finalidad de que sea entendible por los estudiantes y despierte un interés en ellos, donde la aleatoriedad se hace presente como característica principal del problema. Una vez establecido el problema, se identifica el modelo matemático más apropiado para utilizar la teoría de probabilidad realizando primero una subdivisión del problema en subproblemas como lo aconseja la didáctica utilizada, lo que nos permitirá ir trabajando e intuyendo los elementos probabilísticos a aprender por medio de la experimentación. Una vez finalizado este proceso la integración de las respuestas obtenidas le dará solución al problema original. Durante este procedimiento se irá aprendiendo el uso de la nueva notación matemática relacionada a los nuevos conceptos.

El trabajo del alumno debe iniciarse por identificar el experimento, seguido por una serie de preguntas o actividades, que para contestarlas, el estudiante puede, si lo necesita, recurrir a un simulador que hace uso de herramientas probabilísticas adecuadas a cada problema. Posteriormente calcula la probabilidad de los eventos establecidos en cada situación mediante la estimación empírica e interpretará de forma contextual para que tenga sentido con la situación inicial planteada.

Consideramos que la evaluación es parte importante del proceso de aprendizaje por lo que siempre debe ir a la par con la enseñanza, por esta razón, la propuesta es que conforme el alumno va trabajando, conozca de manera inmediata si lo que va realizando es correcto o no. En caso de que cometa algún error, se le señala el probable tipo de error, y se le proporciona la ayuda adecuada todas las veces que sea necesario para que intente nuevamente responder, y así continúe construyendo su propio conocimiento. Atendiendo a la didáctica, nunca se le proporcionarán las respuestas. Cabe aclarar que la evaluación que se va dando es solo con fines informativos, tanto para el estudiante como para el profesor, por lo que no debe entenderse como una evaluación en el sentido estricto que se da en un curso normal.

3.2 ASPECTOS A CONSIDERARSE EN EL DESARROLLO DE LAS LECCIONES

Con el objetivo de mostrar un plan de acción a seguir, se presentan los siguientes aspectos a tomarse en cuenta para la realización de las lecciones, supervisados por la didáctica adoptada:

1. **CONCEPTO:** Elegimos primero el concepto o conceptos a trabajar.

2. **SITUACIÓN DIDÁCTICA**: Debido a que se pretende que el alumno siempre esté en acción por medio de solución de problemas (primer elemento), se proponen problemas de la vida cotidiana que involucren los conceptos a desarrollar y que despierten interés en los alumnos (segundo elemento) para abordarlos.

3. **PROCESO DE TRABAJO:** Se plantean pasos a seguir donde cada uno de ellos sea parte de la solución, esto es, se pretende dividir el problema en varios subproblemas que sean más simples de resolver. Al momento de finalizar de responder todos los subproblemas, integramos respuestas e ideas alcanzadas para conformar la respuesta del problema original (cuarto elemento). Una vez contestado el problema, se propone otro, con mayor dificultad, y nuevamente se repite el ciclo de trabajo. Esto debe continuarse hasta que el alumno interiorice el concepto (quinto elemento).

4. **PROCESO DE EVALUACIÓN**: El tercer elemento nos sugiere que el alumno pueda validar sus resultados, comprobando que tiene sentido lógico de acuerdo al problema planteado. Por lo que se debe contemplar una forma de validación, que le permita al alumno identificar los errores que cometa, pero también proveerle de una ayuda específica de acuerdo al error cometido.

5. **OPERACIÓN INVERSA:** Cuando sea posible se incluirán actividades o preguntas que proporcionen la operación inversa (sexto elemento).

6. **REPRESENTACIONES:** Una vez que se trabaja el problema por medio de una representación, se analiza si es viable usar otra representación y cómo puede ser

aplicada durante la lección (octavo elemento). Posteriormente se busca establecer una transición entre ellas (noveno elemento).

7. **ERRORES:** En las actividades propuestas en cada paso del proceso de trabajo, por lo general se cometerán errores, la tarea entonces será identificarlos y proponer ayudas específicas a los tipos de errores que se cometan, pretendiendo que la propuesta los acote a sólo los más frecuentes.

8. **AYUDA:** Se generan ayudas específicas para los errores más comunes que pueden cometer los alumnos para orientarlos a llegar a la respuesta correcta, más nunca dársela (segundo elemento).

9. **PROBLEMA POSTERIOR:** Se desea que cada problema pueda servir como base para la construcción de un concepto más complejo (décimo elemento).

Atendiendo a la planeación se inicia el prototipo, creando por el momento 3 lecciones del nivel básico que utilizan instrumentos probabilísticos tradicionales, dejando a futuro la inclusión de un nivel intermedio formado por problemas de mayor complejidad y dificultad.

El objetivo de cualquier lección de probabilidad es conseguir que el estudiante sea capaz de medir las posibilidades de ocurrencia de cada uno de los posibles eventos relacionados al experimento aleatorio en estudio. Por la dificultad del razonamiento y con la idea de que el aprendizaje siga un buen ritmo, cada lección se propone dividirla en dos partes. En la primera parte, se trabajan los conceptos de manera más conductista para facilitar el inicio del aprendizaje, en la segunda parte los conceptos a aprender se trabajan de forma más constructiva, dando lugar a que el estudiante experimente y observe antes de intentar resolver los problemas a los que se enfrenta.

Las partes de las lecciones se describen a continuación:

Primera parte:

En esta primera parte se trabajan los conceptos de experimento, experimento aleatorio, espacio muestral, evento, y propiedades de eventos, así como entender y manejar la notación matemática correspondiente. Es necesario que el alumno posea ciertos conocimientos previos, algunos de ellos son:

- Definición y notación de conjuntos.
- Unión de conjuntos.
- Complemento de conjuntos.
- Intersección de conjuntos.
- Diferencia de conjuntos.
- Conjunto vacío.
- Par ordenado.

Al concluir cada lección, los alumnos obtienen diversas competencias como son:

- Aprender a interactuar con un sistema computacional.
- Retroalimentar sus ideas.
- Valorar su aprovechamiento como un reconocimiento a sus capacidades.
- Reforzar sus conocimientos previos.
- Desarrollar su habilidad de comprensión.
- Adquirir responsabilidad de trabajo individual.

Segunda Parte:

La segunda parte de las lecciones incluye el concepto de probabilidad frecuencial, junto con algunas de sus propiedades, su estimación mediante el uso de frecuencia relativa, y la comprensión de variabilidad, además de buscar disminuir los sesgos más comunes:

- *Sesgo determinista.*
- *Insensibilidad al tamaño de la muestra*

Como se desea que el alumno tenga la oportunidad de experimentar y observar lo que ocurre esta parte se desarrolla a través de bloques de repetición del experimento, con la intención de que el alumno se dé cuenta que en repeticiones pequeñas los comportamientos de los resultados son muy distintos, por lo que los resultados pueden no ser los correctos debido a la variabilidad de los mismos. En cambio en repeticiones más grandes, se espera que los alumnos observen que los resultados empiezan a mostrar algún patrón de regularidad frecuencial. Los conceptos se trabajan de manera continua en cada uno de los bloques para que se analicen constantemente, con la intención de que queden mejor comprendidos.

Entre los beneficios que se adquieren al concluir la lección, además de los adquiridos en la primera parte, están: aproximación empírica, interpretación y toma de decisiones, así como el reforzamiento de los conocimientos previos y desarrollo de la capacidad de observación y análisis.

3.3 DESARROLLO DE LA INTERFAZ DE LAS LECCIONES DIDÁCTICAS

Una vez que se tiene el contenido, planeación y desarrollo a seguir de las lecciones, el siguiente paso es crear una interfaz supervisada por la didáctica en uso, buscando que pueda ser adaptable a cualquier lección con la posibilidad de ser ajustada según las propias necesidades de cada una. Por lo que una fuerte inquietud era ¿cómo conjugar los diversos elementos de dicha didáctica, para la promoción de un aprendizaje significativo de la probabilidad, con actividades apoyadas con escenarios virtuales?, es decir, ¡cómo debería ser el diseño de la interfaz para el trabajo a realizar por el estudiante, para que la tecnología digital siga a nuestra didáctica? Después de varias propuestas para su implementación, la interfaz está dividida en siete áreas como se muestran en las figuras 3.2, 3.3 y 3.4:

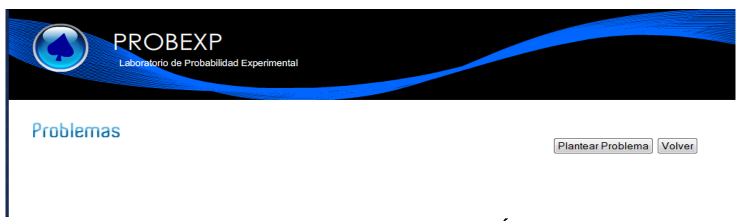


Figura 3.2. Zona inicial de la interface denominada Área de Encabezado.

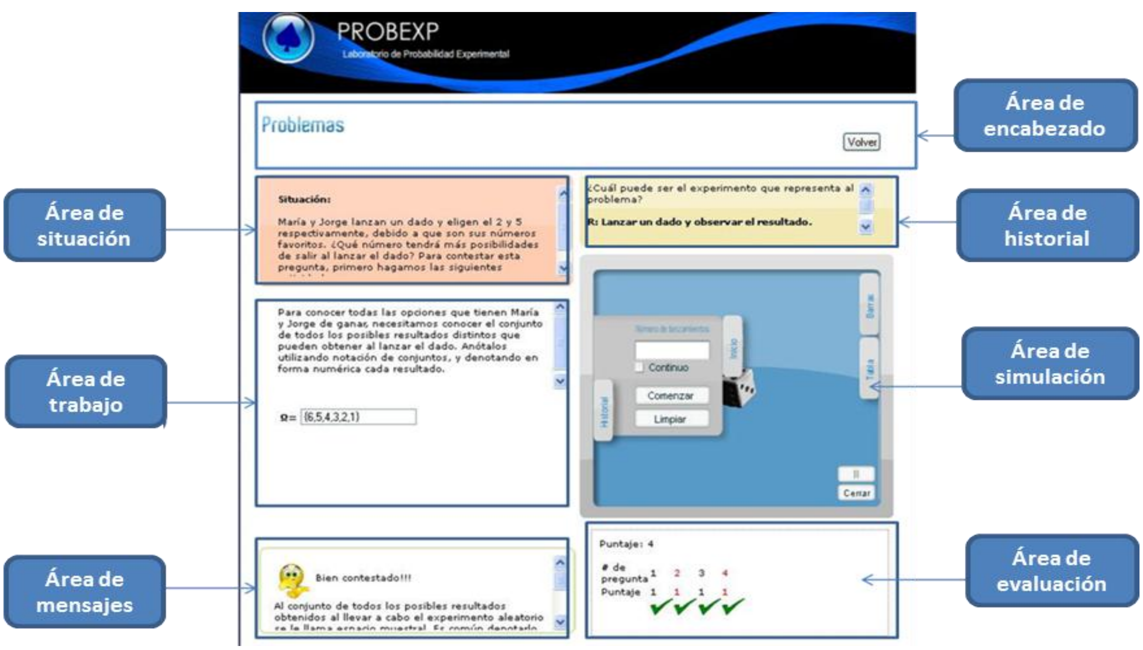


Figura 3.3 Interfaz primera parte.

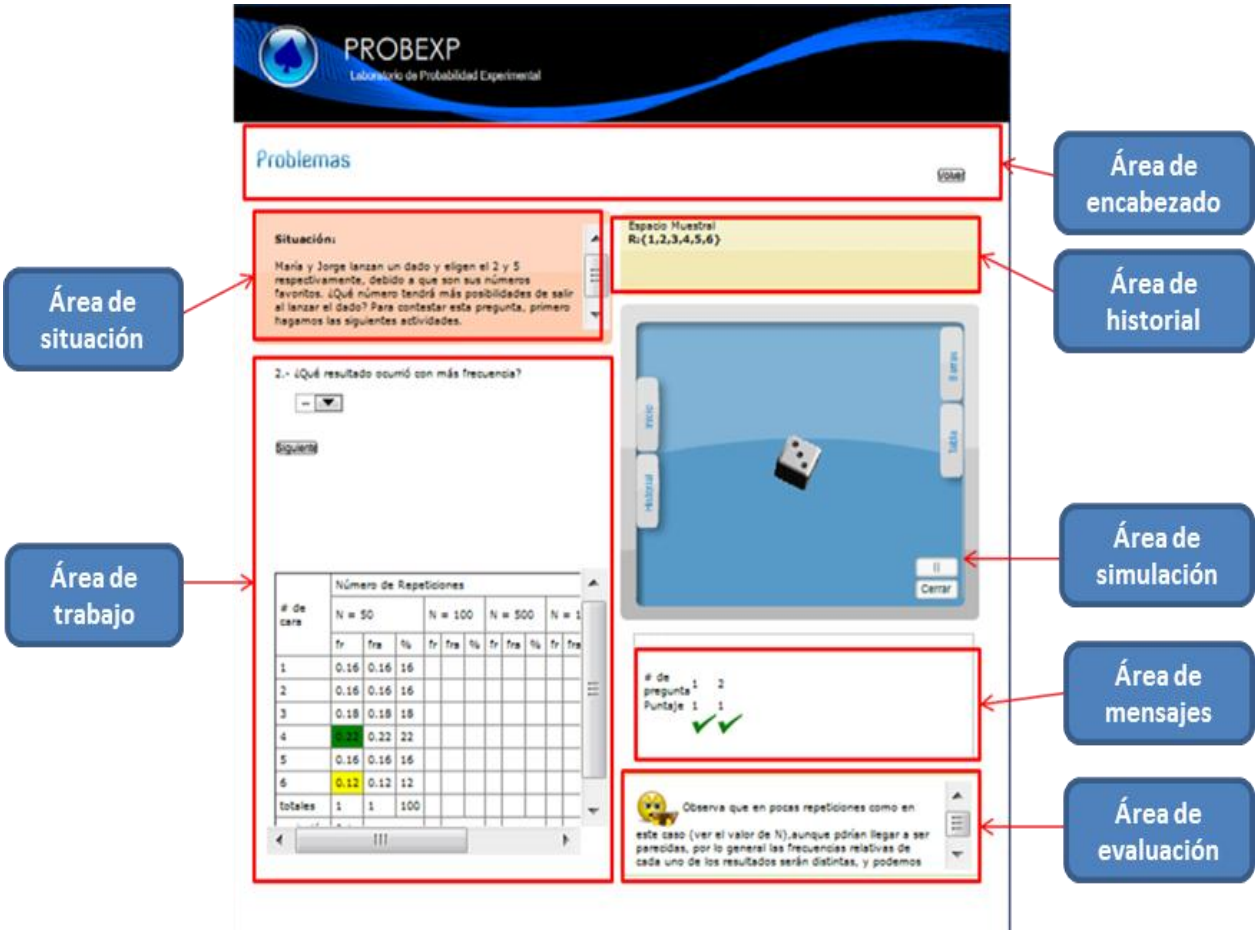


Figura 3.4 Interfaz segunda parte.

A continuación se describen cada una de sus áreas

Área de encabezado

Esta área contiene los siguientes elementos:

- **Botón: Plantear problema**: nos permite cargar aleatoriamente un problema a resolver del nivel específico. Plantear el problema es la primera acción que se debe realizar para empezar a trabajar. Es posible plantear otro problema en caso de cargarse uno ya trabajado, pues de esta manera podemos seleccionar un problema diferente al inicial, y así sucesivamente hasta haber elegido el deseado.
- **Botón: Volver**: nos envía al lugar de selección de nivel, en donde se puede decidir el nivel de trabajo o terminar la sesión.

Área de situación

En el área de situación se describirá el problema que el alumno debe trabajar, en el que se presenta un experimento aleatorio bajo un problema contextualizado, de manera que da origen a todo el trabajo a desarrollar, esta sección permanecerá visible y activa durante toda lección con la intención de que no se pierda de vista el objetivo principal.

Área de Historial

Esta área se irá generando automáticamente con las preguntas y sus respuestas, una vez que el alumno conteste correctamente.

Área de trabajo

El área de trabajo la consideramos una de las partes más importantes de la interfaz, pues es el lugar en donde la mayor parte del tiempo el alumno interactúa con el sistema. Aquí irán apareciendo una por una las preguntas y actividades a realizar de acuerdo a la situación planteada proporcionándole al alumno diversos recursos para contestar que variarán según la lección.

Área de mensajes

El área de mensajes tiene el objetivo de proveer al usuario de una retroalimentación, para comprobar que está realizando bien las cosas o para recibir sugerencias cada que cometa un error.

Área de simulación

Se presenta en cada lección un simulador correspondiente al problema con el fin de facilitarle al alumno, una herramienta probabilística con el que pueda simular el experimento y observar los resultados que arroja para que se vaya intuyendo el valor de probabilidad del evento. Con ello se contribuye a la relación entre la probabilidad frecuencial y formal.

Área de evaluación

Se tiene también un área de validación basada en el número de intentos para contestar correctamente cada actividad que se le solicite. Es decir, si realiza N intentos para llegar a la respuesta correcta, su medición para esa actividad será 1/N (N = 1, 2, 3, etc.). En dicha área, se irá mostrando el puntaje que el alumno va obteniendo con el objetivo de que tanto el alumno como el profesor utilicen dicha información para ir valorando su desempeño.

El sistema tiene registradas preguntas claves que ayudarán a determinar el puntaje mínimo de cada lección, para medir el desempeño realizado por los estudiantes.

3.4 DESCRIPCIÓN DE LA DIDÁCTICA EN LAS LECCIONES

El diseño y desarrollo descrito para las lecciones, se realizó siguiendo los fundamentos de la didáctica de Cuevas y Pluvinage en las que siempre deben estar presentes los tres primeros elementos esenciales:

- **Primer elemento**: este elemento se ve reflejado en todas las áreas de la interfaz pues en cada una de ellas el alumno siempre está en acción; en el área de situación al generar el problema y estudiarlo se está en acción, en el área de trabajo donde el alumno realiza las actividades que se le van proponiendo, al evaluar su aprendizaje (área de evaluación), al retroalimentarse (área de mensajes), al regresar al historial de su trabajo y al simular el experimento. Cada área fue diseñada de tal manera que se cumpliera con este primer elemento indispensable de la didáctica.

- **Segundo elemento**: se creó el área de situación en la que se presenta un problema de interés para el alumno. En estos problemas se plantea un escenario común de la vida real involucrando el uso de instrumentos probabilísticos, que genera en los alumnos ese interés del que se habla al verlo útil y atractivo, además, en el área de trabajo, cada actividad se realiza en relación con la situación original, sin perder de vista el contexto del problema, todas estas actividades se van mostrando en el historial, diseñado precisamente para que en caso de necesitarse lo que ya se realizó pueda revisarse.

  Otro punto importante con relación a este elemento es que cada vez que se intenta introducir un concepto, de ser necesario y posible, se hace por medio de sub-problemas que pueden permitir apropiarse del concepto de manera más fácil. Una característica del sistema dictada por la didáctica es nunca iniciar dando la definición del concepto, se enuncia hasta después de haberlo trabajado, por medio de la retroalimentación contenida en el área de mensajes una vez que se haya realizado correctamente la actividad.

- **Tercer elemento**. Este elemento se aplica por medio del área de evaluación, apoyada por el área de mensajes, cada vez que el alumno resuelve un problema, él con ayuda del sistema valida sus respuestas, la evaluación se da en todo momento durante toda la lección, de estar en lo correcto, el sistema aprueba su respuesta y le presenta la definición del concepto trabajado, de no ser así, se le proporciona una ayuda específica para que vuelva a intentar contestar, hasta hacerlo correctamente.

Los siguientes elementos, complementan a los primeros tres y se aplican según sean viables o necesarios al enseñar cada concepto, en esta ocasión, hicimos uso de ellos de la siguiente manera:

- **Cuarto elemento**: cada vez que aparece una actividad en el área de trabajo, siempre es para trabajar o introducir un concepto, las acciones pueden llegar a ser repetitivas como se hace en la segunda parte de las lecciones, pero se hace con la intención de que se reafirmen y pueda crearse lo que este elemento presenta como la operación intelectual.

- **Quinto elemento**: Este elemento se toma en cuenta al momento de realizar cada lección en dos partes a través de ejercicios dosificados gradualmente de forma coherente y coordinada, este escenario puede verse desde que se presenta el problema en el área de situación, donde se pretende que el alumno resuelva el problema realizando primero ciertas actividades parciales que aparecerán en el área de trabajo, resultantes de descomponer el problema, una vez que se hayan realizado, se van registrando en la sección del historial para posteriormente realizar el análisis de los conceptos y actividades ya trabajadas y poder darle respuesta al problema inicial.

- **Sexto elemento**. En cada una de las lecciones están incluidas preguntas en las que se efectúen las operaciones inversas que llevan a los conceptos matemáticos, con el propósito de reforzar la adquisición del concepto aprendido. Este tipo de preguntas indicarán si alumno está haciendo suyo el concepto.

- **Séptimo elemento**. Por el momento se ha buscado que los alumnos sigan el camino más usual para solucionar un problema, sin embargo, se pensará incluir al menos otra alternativa de respuesta, analizando en qué lección y nivel más apropiado.

- **Octavo elemento**. Este elemento está presente principalmente en la sección de simulación en donde aparece el simulador adecuado para cada lección en el que desde que se acciona, presenta los resultados en diferentes representaciones semióticas, por ejemplo, a través de una lista que indica el orden en que fueron apareciendo los resultados, una tabla que lleva las frecuencias de cada resultado o a través de una grafica de barras en la que se va viendo la tendencia, el alumno debe ser capaz de interpretar los resultados por cualquiera de estas representaciones.

- **Noveno elemento.** Cuando diseñamos las preguntas referentes a la operación inversa, se realizan operaciones para poder pasar de una representación a otra, lo que beneficia la articulación entre registros.

- **Décimo elemento**. Este elemento está constantemente trabajado al ir construyendo poco a poco conceptos que son necesarios para los siguientes conceptos, de igual manera, al pasar de la primera a la segunda parte de las lecciones en los que se consideran los conceptos ya estudiados, igualmente todo lo hecho en el nivel básico es utilizado como base para la construcción de lecciones del nivel intermedio.

Al integrar los aspectos que deben ser tomados en cuenta bajo la dirección didáctica en uso, se crearon las lecciones detalladas a continuación.

3.5 LECCIÓN BASADA EN DADOS

Primera Parte:

Paso 1. Conceptos: Se siguen los conceptos específicos para la primera parte de las lecciones.

Paso 2. Situación. Su generación se basa en una situación común de nuestras vidas.

"María y Jorge lanzan un dado y eligen el 2 y 5 respectivamente, debido a que son sus números favoritos. ¿Qué número tendrá más posibilidades de salir al lanzar el dado? Para contestar esta pregunta, primero hagamos las siguientes actividades."

Paso 3. Se siguen en forma coordinada los puntos 4, 5, 6, 7 y 8 de la sección 3.2.

Evaluación: ésta se da de manera continua conforme el alumno va resolviendo lo que el sistema le solicita hacer, y el puntaje se establece según el número de intentos que el alumno haga para llegar a la respuesta correcta, ejemplo: si contesta en el primer intento, obtiene un punto en esa pregunta, si contesta en el segundo intento obtendrá 0.5 punto y así respectivamente según el número de intentos que realice; se toma como intento al momento que el alumno oprime el botón **Evaluar.**

Formas de respuesta: para esta lección se pueden presentar 3 tipos de respuesta según la pregunta:

- Opción múltiple: donde el alumno debe seleccionar con un clic una sola de las respuestas propuestas que se cargarán en orden aleatorio cada vez que se entre a la lección.

- Opción múltiple con más de una respuesta: El alumno debe seleccionar una o dos respuestas de todas las propuestas debido a que se muestra la respuesta que responde correctamente a la pregunta de dos maneras distintas.

- Completar: el alumno debe introducir la respuesta por medio del teclado utilizando para ello la notación adecuada.

Las opciones de respuesta en cada pregunta, se generan en orden aleatorio cada vez que se resuelve la lección.

Actividad 1.

1. ¿Cuál puede ser el experimento que representa al problema?

- Apostar con un dado.
- Lanzar un dado y observar el resultado.
- Ver si salieron los números favoritos de María y Jorge.
- Observar el resultado.

Estrategia: Para contestar esta pregunta, el alumno debe seleccionar una de las posibles respuestas que se le dan y oprimir evaluar. Si se equivoca la sección de mensajes le indicará el error y le explica por qué no es correcta su respuesta, el alumno debe leer y tratar de comprender antes de volver a contestar y evaluarse de nuevo hasta que lo haga correctamente (Lanzar un dado y observar el resultado). Si lo hace correctamente el sistema le proporciona una retroalimentación con la definición del concepto trabajado. En caso contrario, el sistema le proporciona una ayuda, en este caso es:

Ayuda: Un experimento es una actividad planeada cuyos resultados producen un conjunto de datos.

Actividad 2.

1. ¿Es un experimento aleatorio?

- No
- Si

Estrategia: El alumno debe seleccionar una de las dos posibles opciones y oprimir evaluar. Debido a que esta pregunta solo tiene dos opciones opuestas, solo puede valer uno o cero puntos, si contesta correctamente (sí) en el primer intento, puede continuar inmediatamente a la siguiente pregunta, si no, el sistema le muestra la definición de experimento aleatorio que el alumno deberá leer para después continuar.

Esta es la primera pregunta clave, debido a que hace referencia al concepto de experimento aleatorio, importante en la teoría de probabilidad.

2. ¿Por qué es aleatorio? (si lo consideras marca más de una opción)

- No se sabe de antemano que resultado se obtendrá.
- Siempre sale el mismo resultado.
- Puede obtenerse cualquiera de los resultados.
- Se puede predecir el resultado a obtenerse.

Estrategia: El alumno podrá seleccionar una o varias opciones que se le dan como argumento del por qué el experimento definido en la primera pregunta que representa al problema, es aleatorio. Si selecciona una o las dos opciones correctas (Puede obtenerse cualquiera de los resultados y/o No se sabe de antemano que resultado se obtendrá) podrá continuar, si selecciona al menos una opción incorrecta, se le proporcionará un apoyo que podrá verse al dar clic en la palabra AYUDA en el área de mensajes para volver a intentar dar la respuesta correcta.

Ayuda: Un experimento se dice aleatorio si al momento de realizarlo no se puede predecir qué resultado se obtendrá. Un experimento se dice determinista o no aleatorio si bajo las mismas condiciones se obtiene siempre el mismo resultado.

Actividad 3.

1. Para conocer todas las opciones que tienen María y Jorge de ganar, necesitamos conocer el conjunto de todos los posibles resultados distintos que pueden obtener al lanzar el dado. Anótalos utilizando notación de conjuntos, y denotando en forma numérica cada resultado.

Estrategia: Al dar clic en CONTESTAR en esta pregunta, aparece un recuadro en el que el alumno deberá escribir el conjunto correspondiente “{1,2,3,4,5,6} en cualquier orden” y que será el espacio muestral del experimento, para esto, en caso de ser necesario el alumno podrá visualizar la notación de conjuntos al darle clic en un link que aparecerá con este título, es recomendable que antes de intentar contestar la pregunta, el alumno analice el contenido de este link. De nuevo, si se equivoca, en el área de mensajes le mencionará el error y le hará una sugerencia para continuar, que será respecto a la sintaxis o respecto a los elementos del conjunto.

Esta es la segunda pregunta clave y hace referencia al concepto de espacio muestral

2. Describe el subconjunto formado por los resultados que representan que gana María.
   { }
3. Describe el subconjunto formado por los resultados que representan que gana Jorge.
   { }
4. Describe el subconjunto formado por los resultados que representan que no gana María.
   { }
5. Describe el subconjunto formado por los resultados que representan que no gana Jorge.
   { }
6. Describe el subconjunto formado por los resultados que representan que no gana ni María ni Jorge.
   { }
7. Describe el subconjunto formado por los resultados que representan que gana alguno de los dos.
   { }

Estas últimas preguntas, están en el mismo contexto que la pregunta de espacio muestral en cuanto a la forma de respuesta y los mensajes de retroalimentación, esperando que lleguen a la respuesta {2}, {5}, {1,3,4,5,6}, {1,2,3,4,6}, {1,3,4,6}, {2,5}, respectivamente y que representan identificación de eventos y algunas de sus propiedades.

Actividad 4.

1. Si María volviera apostarle al 2 y Jorge al 5, y pudiéramos modificar el dado para que los resultados siempre representen que gana María o Jorge, ¿cuál de los siguientes dados elegirías?

☐  El mismo dado usual del experimento inicial.

☐  Un dado formado por 3 caras con el 2 y 3 caras con el 5.

☐ No se puede con ninguno de los dos.

Estrategia: El alumno debe seleccionar el dado con el cual se satisfaga la situación expuesta en la pregunta (Dado en el que las caras solo tiene el 2 o el 5).

2. Con este dado , ¿Cuál sería ahora el conjunto de todos los posibles resultados que se pueden obtener?

{ }

La pregunta hace referencia al dado seleccionado en la pregunta anterior que satisface que los resultados siempre representen que gana María o Jorge, ahora el conjunto debe ser el espacio muestral referente a este nuevo experimento “{2,2,2,5,5,5} en cualquier orden”, los mensajes y la forma de respuesta es como en la actividad 3.

3. ¿Sigue siendo un experimento aleatorio?

- Si
- No

Se refiere al nuevo experimento que se genera con el nuevo dado y sigue el esquema de la actividad 2 con el concepto de experimento aleatorio.

4. ¿Por qué es aleatorio? (si lo consideras marca más de una opción)

- Se puede predecir el resultado.
- Siempre sale el resultado de María y Jorge.
- Aún no se sabe de antemano que se obtendrá.
- Se obtiene cualquiera de los dos resultados.

Sigue haciéndose referencia al nuevo experimento con el mismo mecanismo de respuesta que la actividad 3.

El resto de las preguntas de esta actividad, siguen el mismo esquema que la actividad 3 pero haciendo referencia ahora al nuevo dado seleccionado que satisface que los resultados siempre representen que gana María o Jorge.

5. Con el dado  describe el subconjunto formado por los resultados que representan que gana María.

   { }

6. Con el dado  describe el subconjunto formado por los resultados que representan que gana Jorge.
   { }
7. Con el dado  describe el subconjunto formado por los resultados que representan que no gana ni María ni Jorge.
   { }

Debido a que en esta última pregunta la respuesta es el conjunto vacío, el alumno deberá denotarlo de esta manera "{}" notación que aparece en el área de mensajes al dar clic en el link de notación de conjuntos y que será referente al evento nulo o imposible.

Actividad 5:

Las preguntas de esta actividad, se realizan para practicar de nuevo los conceptos de unión de eventos y evento complementario tanto de un evento simple como de la unión de eventos, tomando en cuenta de nuevo al dado original (dado ordinario de 6 caras enumeradas del 1 al 6) pero ahora modificando la situación.

1. Si volvemos a utilizar el dado original pero ahora María apuesta a que cae par y Jorge a que cae impar.
   Describe el subconjunto formado por los resultados que representan que gana María.
   { }
2. Describe el subconjunto formado por los resultados que representan que gana Jorge (recuerda que ahora María apuesta a que cae par y Jorge a que cae impar).
   { }

3. Describe el subconjunto formado por los resultados que representan que gana alguno de los dos (recuerda que ahora María apuesta a que cae par y Jorge a que cae impar).
   { }
4. Describe el subconjunto formado por los resultados que representan que ninguno de los dos gana (recuerda que ahora María apuesta a que cae par y Jorge a que cae impar).

Estrategia. Si se equivoca se le indica el tipo de error que está cometiendo (error de sintaxis, faltan elementos, elementos duplicados) y que el sistema valida, se le invita a revisar la ayuda para intentar contestar nuevamente.

Ayuda. Verificar nuevamente el enunciado de la situación o ver notación de conjuntos.

Actividad 6.

Esta actividad muestra la operación inversa en la que se busca que ahora el alumno sea capaz de interpretar un evento ya dado y así verificar que el alumno comprende el concepto.

1. Si el resultado de lanzar el dado fue alguno de los elementos del conjunto siguiente {1,3,4,6}, ¿qué representa? (recuerda que ahora María apuesta a que cae par y Jorge a que cae impar).

- ☐ Gana Jorge y pierde María.
- ☐ Ambos pierden.
- ☐ Ambos ganan.
- ☐ A veces gana Jorge o María.
- ☐ No gana Jorge ni María

2. Si el resultado de lanzar el dado fue alguno de los elementos del conjunto siguiente {1,2,4,5,6}, ¿qué representa? (recuerda que ahora María apuesta a que cae par y Jorge a que cae impar).

- ☐ A veces gana Jorge o María.
- ☐ A veces gana Jorge y María.
- ☐ Gana Jorge y pierde María.

- Gana María y pierde Jorge.

Estrategia: Si se equivoca se le mostrará una explicación del error según el que haya cometido y se la invita a intentar nuevamente a contestar, previa revisión de la ayuda.

Ayuda: Recuerda en qué consiste el experimento, el evento de interés y cual es su espacio muestral.

Paso 4. Al finalizar de resolver los problemas propuestos se introduce el concepto de manera formal y una vez que termina la lección, se le muestra en pantalla los conceptos trabajados, los cuales puede bajar en un archivo pdf.

FIN DE LA SESIÓN

El sistema le da una valoración de su trabajo realizado y a partir de este instante el sistema le recomienda, según esta valoración, trabajar una nueva situación en este nivel o continuar ya en otro, también el alumno tiene la posibilidad de dar por terminada su sesión de estudio.

Segunda Parte:

Paso 1. Se siguen los conceptos referentes a la segunda parte de las lecciones.

Paso 2. A partir de la situación original, se crea la segunda parte de esta lección.

Paso 3. De nuevo se siguen los aspectos 3, 4, 5, 6, 7 y 8 de la sección 3.2.

Evaluación: la actividad 1 y algunas preguntas del bloque 1 permiten 0.5 puntos, el resto solo será evaluada como bien = 1 punto y mal =0 puntos.

Resolución: a partir de la actividad 2 se le dará un listado de palabras de las cuales deberá elegir la adecuada para contestar correctamente a cada pregunta planteada.

Actividad 1.

1. Para comenzar, recordemos el espacio muestral para este experimento (Descríbelo en forma de conjunto).

$\Omega = \{ \quad \}$

Primeramente pedimos se recuerde el espacio muestral porque es importante que siempre lo tenga presente en un problema de probabilidad.

Actividad 2. Realizamos el trabajo por medio de bloques de repetición del experimento que se irán realizando con el simulador que se proporciona.

Bloque 1: Es referente a 50 repeticiones del experimento que se pide que el alumno realice para empezar a analizar los resultados a través de las preguntas que se le presentarán posteriormente, los resultados tanto de este como de los siguientes bloques se irán registrando automáticamente en una tabla generada en el área de trabajo.

1.- ¿Se parecen sus frecuencias relativas?

Basados en los resultados, se pide observen las frecuencias relativas de cada cara del dado y según consideren, indiquen si son parecidas o no, esperando que como son pocas repeticiones observen que no llegan a parecerse, haciéndoles esta retroalimentación al evaluar esta pregunta.

2.- ¿Qué resultado ocurrió con mayor frecuencia?

3.- ¿Qué resultado ocurrió con menor frecuencia?

Buscando obligarlos a que observen bien los resultados, se les hacen estas dos últimas preguntas.

4.- ¿Cómo consideras el valor de la variabilidad entre el resultado con mayor frecuencia y el de menor frecuencia?

Aquí es donde se trabaja la comprensión de variabilidad, indicando que si es mayor que 0.01, se dirá que es grande, dándoles esta retroalimentación al evaluar la pregunta y para que lo consideren para las preguntas posteriores en los siguientes bloques.

5.- Si volvieras a repetir el experimento igual número de veces, ¿Ocurrirá lo mismo?

Para fortalecer el concepto de experimento aleatorio, se presenta esta pregunta en la que se espera, se den cuenta que en un experimento aleatorio, difícilmente ocurriría lo mismo.

6.- En base a lo observado, ¿qué número crees que tendría más posibilidades de salir si volvieras a lanzar el dado?

Buscamos que se vayan dando cuenta de la tendencia de los resultados para que al final lleguen a comprender que todos tienen las mismas posibilidades

7.- Si lanzamos el dado con el número 6 hacia arriba, ¿cuál de las caras es más probable de salir?

Esta pregunta está diseñada para detectar el sesgo determinista, en el que después de ser evaluada se menciona al alumno que no olvide que está presente el azar y se le sugiere que para quitarse de dudas, consiga un dado y lo lance con la cara del 6 hacia arriba varias veces, para tener clara su respuesta.

8.- Con 50 repeticiones ¿Tendrías suficiente certeza de qué resultado tiene más posibilidades de ocurrir?

Aquí, ponemos esta pregunta referente al sesgo de representatividad y se le retroalimenta mencionándole que nunca olvide que está presente el azar y recordándole que en pocas repeticiones todo puede suceder.

9.- De acuerdo a lo observado, ¿Qué número tendrá más posibilidades de salir al lanzar el dado, el de María o Jorge?

Para ir preparando la respuesta a la pregunta inicial del problema, se presenta esta pregunta pero siempre haciéndoles ver que está presente el azar y que en pocas repeticiones todo puede suceder.

10.- Considerando nuestro experimento de lanzar un dado, en estudio, ¿cuál será la frecuencia relativa de que salga el número 6?

Para contestar esta pregunta, el alumno debe checar el resultado directamente de la tabla que se genera, posteriormente se proporciona la siguiente retroalimentación: La frecuencia relativa es una estimación de la probabilidad de un evento. La aproximación va mejorando mientras el número de repeticiones del experimento vaya siendo cada vez más grande.

BLOQUES 2-6: En estos bloques se presentan las mismas preguntas referentes a 100, 500, 1000, 5000 y 10000 repeticiones del experimento respectivamente.

1.- ¿Se parecen las seis frecuencias relativas a las anteriores?

Para contestar esta pregunta se busca que con ayuda de la retroalimentación, observen que en pocas repeticiones como en el caso 50 y 100, aunque podrían llegar a ser parecidas, por lo general las frecuencias relativas de cada uno de los resultados serán distintas, y podemos considerarlas diferentes.

2.- ¿El valor de las seis frecuencias relativas se aproximan a un mismo valor? ¿A qué valor? (Da tu respuesta en forma decimal con tres dígitos de aproximación).

Con esto se pretende que se vayan dando cuenta de la equiprobabilidad de los resultados y que vayan estimando un valor de la probabilidad.

Las siguientes preguntas siguen la misma intensión que para el primer bloque.

3.- ¿Qué resultado ocurrió con más frecuencia?

4.- ¿Qué resultado ocurrió con menor frecuencia?

5.- ¿Cómo consideras el valor de la variabilidad entre el resultado con mayor frecuencia y el de menor frecuencia?

6.- ¿Cómo fue la variabilidad actual entre el resultado con mayor frecuencia y el de menor frecuencia, respecto a la del bloque anterior?

7.- Si volvieras a repetir el experimento igual número de veces, ¿ocurrirá lo mismo?

8.-¿Qué número crees que tendría más posibilidades de salir si volvieras a lanzar el dado?, ¿Por qué?

9.- ¿Y qué número tendría menos posibilidades de salir si volvieras a lanzar el dado?, ¿Por qué?

10.- Si lanzamos el dado con el número 6 hacia arriba, ¿cuál de las caras es más probable de salir?

11.- Con 100 (500, 1000, 5000, 10000) repeticiones ¿Tendrías suficiente certeza de qué resultado tiene más posibilidades de ocurrir?, ¿Porqué?

12.- Si volviéramos a lanzar el dado, ¿qué número tendrá más posibilidades de salir al lanzar el dado, el de María o Jorge?

13.- Da una estimación de la probabilidad de que al lanzar un dado resulte ser 5?

Paso 4. De igual manera que en la primera parte, una vez que ya se trabajaron los conceptos, se le presentan los conceptos de manera formal y se le proporciona una evaluación final de su trabajo haciéndole recomendaciones según su desempeño.

FIN DE LA SESIÓN

3.6 LECCIÓN BASADA EN MONEDAS.

Esta lección se basa en un par de monedas como instrumento probabilístico.

Primera parte

Paso 1. Conceptos. De nuevo se siguen los conceptos destinados para la primera parte.

Paso 2. Situación.

Dos amigos, Pepe y Juan juegan a lanzar una moneda cada uno. Pepe tiene una moneda de $1 y Juan de $5. Pepe opina que saldrá el resultado sol, y sol; y Juan que saldrá el resultado un sol y una águila, indistintamente. ¿Quién tendrá más posibilidades de ganar? Para contestar esta pregunta, primero hagamos las siguientes actividades.

Paso 3.

Evaluación y formas de respuesta: posee el mismo mecanismo que la lección basada en dados.

Actividad 1. ¿En qué consiste el experimento?

 En lanzar un par de monedas

 En observar el resultado obtenido

 En que Pepe y Juan Juegan

 En hacer una apuesta

Estrategia. Si se equivoca se le mostrará una explicación del error según el que haya cometido y se le invita intentar nuevamente a contestar, previa revisión de la ayuda.

Ayuda. Se le proporciona una definición de lo que se entiende por experimento. “Actividad planeada cuyos resultados producen un conjunto de datos.”

Se pretende que se inicie identificando el experimento apropiado al problema, por medio de la selección de una de las opciones dadas en la que una de ellas muestra el experimento adecuado.

Actividad 2.

1. ¿Es un experimento aleatorio?

□ Sí

□ No

Estrategia: Si no contesta correctamente en la primera oportunidad, se le mostrará la respuesta y se le pide que revise las definiciones de experimento aleatorio y determinista que le proporciona el sistema y luego continuar.

Ayuda: "Un experimento se dice aleatorio si al momento de realizarlo, no se puede predecir qué resultado se obtendrá, antes de que el experimento se ejecute."

"Un experimento se dice determinista o no aleatorio si bajo las mismas condiciones se obtiene siempre el mismo resultado."

2. ¿Por qué es aleatorio? (si lo consideras marca más de una opción)

□ Puede obtenerse cualquiera de los resultados

□Siempre sale el mismo resultado

□No se sabe de antemano que resultado se obtendrá

□Se puede predecir el resultado

Estrategia. Si se equivoca se le invita a intentar nuevamente a contestar, previa revisión de la ayuda que consiste nuevamente en la definición de experimento aleatorio y determinista.

Con estas 2 preguntas, se introduce la noción de azar en la que de no comprenderla correctamente, se le proporciona la definición de experimento aleatorio y determinista pero solo después de que se le hace pensar sobre el concepto por medio de la pregunta y la situación. Una vez que el alumno ya sabe que el experimento en cuestión es aleatorio, debe seleccionar la razón correcta de su aleatoriedad, que en este caso, está planteada de dos formas distintas buscando que el alumno elija la que se apropie más a él.

Actividad 3.

Notación. Si denotamos por **a** la obtención de águila, y **s** el obtener sol, entonces por ejemplo **(s,s)** significa el resultado salió sol en la moneda de $5, y sol en la moneda de $1, es decir, la primera posición es para los resultados de la moneda de $5 y la segunda posición es para los resultados de la moneda de $1.

1. Utilizando notación de conjuntos y par ordenado, anota todos los posibles resultados del experimento aleatorio.

Ω=

Esta pregunta introduce el concepto de espacio muestral, en la que, primeramente se proporciona la notación de par ordenado que se necesita y la explicación de lo que representa en contexto con el problema, además de un link extra para la notación de conjunto que aparecerá además en cada pregunta en la que sea necesario su uso.

2. Describe el subconjunto formado por los resultados que favorecen a Pepe.

{ }

3. Describe el subconjunto formado por los resultados que favorecen a Juan.

{ }

Las dos preguntas anteriores representan a los conceptos de evento simple y compuesto respectivamente.

4. Describe el subconjunto formado por los resultados que no favorecen a Juan.

{ }

5. Describe el subconjunto formado por los resultados que no favorecen a Pepe.

{ }

Una vez realizadas las preguntas de eventos simple y compuesto ya planteadas, estas dos preguntas, buscan trabajar el complemento de eventos y su interpretación.

6. Describe el subconjunto formado por los resultados que favorecen a alguno de los dos.

{ }

Esta pregunta se generó a partir de una situación para introducir la unión de eventos.

7. Describe el subconjunto formado por los resultados que no favorecen a Juan ni a Pepe.

{ }

Siguiendo con el orden de aparición de los conceptos, esta pregunta sigue a la anterior para realizar el complemento de la unión que se acaba de crear y que puede ser recordada en la sección de historial, así como cualquier otra actividad ya realizada.

8. ¿Cómo estaría formado el subconjunto que nos asegure que contiene a cualquiera de los posibles resultados del experimento? Descríbelo.

{ }

Buscando cubrir los conceptos en este nivel, diseñamos esta pregunta para el evento seguro.

9. Describe el subconjunto formado por ninguno de los posibles resultados al lanzar las monedas.

{ }

Se creó esta pregunta para trabajar la interpretación el evento nulo, concepto que no se ve muy común en la vida cotidiana pero que sin embargo si es de importancia.

Estrategia. Si se equivoca se le indica el tipo de error que está cometiendo (error de sintaxis, faltan elementos, elementos duplicados) y que el sistema valida, y se le invita a revisar la ayuda para intentar contestar nuevamente.

Ayuda. Verificar nuevamente el enunciado de la situación o ver notación de conjuntos.

Actividad 4.

Si Pepe ahora apostará al resultado (a,a).

1. ¿Cuál sería el subconjunto de resultados que no favorecen a Pepe?

{ }

2. Describe el subconjunto formado por los resultados que no favorecen a Juan ni a Pepe.

{ }

3. Describe el subconjunto formado por los resultados que favorecen a Juan y a Pepe.

{ }

Las preguntas de esta actividad, se realizan para practicar de nuevo los conceptos de unión de eventos y evento complementario tanto de un evento simple como de la unión de eventos pero ahora modificando la situación original.

Estrategia. Si se equivoca se le indica el tipo de error que está cometiendo (error de sintaxis, faltan elementos, elementos duplicados) y que el sistema valida, y se le invita a revisar la ayuda para intentar contestar nuevamente.

Ayuda. Verificar nuevamente el enunciado de la situación o ver notación de conjuntos.

Actividad 5. Observa el siguiente subconjunto y respecto al planteamiento original de la situación, di que puede representar: {(a,a), (a,s), (s,a)}

- Los resultados no favorables a Pepe.
- Los resultados favorables a Juan.
- Los resultados no favorables a Juan.
- Los resultados favorables a Pepe.

Estrategia: Si se equivoca se le mostrará una explicación del error según el que haya cometido y se la invita a intentar nuevamente a contestar, previa revisión de la ayuda.

Ayuda: Recuerda en qué consiste el experimento, el evento de interés y cual es su espacio muestral.

Esta actividad hace referencia a la operación inversa en la que se pretende que ahora el alumno sea capaz de interpretar un evento ya dado y así verificar si se está dando una mejor comprensión.

Paso 4. De acuerdo al segundo elemento de la didáctica utilizada, de que en la introducción de un concepto o una noción matemática, se debe tratar de partir de un problema colocado en un contexto de interés para el alumno, el cual puede conducir a otros ejercicios o sub-problemas cuyas soluciones forman una estructura coordinada, que lleva al estudiante a definir o demostrar el concepto matemático deseado. Al finalizar de resolver los problemas propuestos se introduce el concepto de manera formal y una vez que termina la lección, también se le proporciona un archivo con los conceptos trabajados.

FIN DE LA SESIÓN

A partir de este instante el sistema da la posibilidad de continuar presentando una nueva situación, o el alumno da por terminada su sesión de estudio.

Segunda parte

Paso 1. Conceptos. Los referidos a la segunda parte.

Paso 2. Se establece de nuevo la misma situación que en la primera parte.

Paso 3. Seguimos con el mecanismo de la lección anterior.

Actividad 1.

Para comenzar, recordemos el espacio muestral para este experimento (Descríbelo en forma de conjunto).

$\Omega = \{ \quad \}$

Una vez más, pedimos se recuerde el espacio muestral porque es importante que siempre lo tenga presente en un problema de probabilidad.

Actividad 2. De nuevo, el trabajo se hace por medio de bloques de repetición del experimento que se irán realizando con el simulador que se proporciona.

1. Realicemos el experimento con el simulador y observemos qué resultados tienen más posibilidades de ocurrir.

Llena la siguiente tabla que se genera al utilizar el simulador del lanzamiento de dos monedas y observa como varían las frecuencias relativas y frecuencia relativa acumulada de cada resultado.

Resultado	Número de repeticiones (N)											
	N= 50		N= 100		N= 300		N= 1000		N= 5000		N=10000	
	fr	fra	fr	fra	fr	fra	fr	fra	fr	fra	fr	fra
(a,s)												
(s,a)												
(s,s)												
(a,a)												
variabilidad												

Actividad 3. Se realiza esta actividad de forma análoga a la lección de los dados.

Observa y contesta las siguientes preguntas:

BLOQUE 1: (50 repeticiones) De acuerdo a lo que se observa en la tabla generada por el simulador, en las 50 repeticiones, veamos qué pasó con los 4 resultados posibles:

1. ¿Se parecen sus frecuencias relativas?
2. ¿qué resultado ocurrió con más frecuencia?
3. ¿qué resultado ocurrió con menor frecuencia?
4. ¿Cómo consideras la variabilidad entre el resultado con mayor frecuencia y el de menor frecuencia?
5. Si volvieras a repetir el experimento igual número de veces, ¿Ocurrirá lo mismo?
6. Con 50 repeticiones ¿Tendrías suficiente certeza de qué resultado tiene mas posibilidades de ocurrir?
7. Recordemos el evento que representa que gana Pepe (Descríbelo en forma de conjunto).
8. Recordemos ahora el evento que representa que gana Juan (Descríbelo en forma de conjunto).
9. De acuerdo a lo observado y si sumamos las frecuencias relativas de los resultados con los que gana Juan, quién crees que tiene más posibilidades de ganar, ¿Pepe o Juan?

BLOQUE 2-6:

De acuerdo a lo que se observa en la tabla generada por el simulador, en las (100, 300, 1000, 5000, 10000) repeticiones, veamos qué pasó con los 4 resultados posibles:

1. ¿Se parecen las cuatro frecuencias relativas a las anteriores?
2. ¿El valor de las seis frecuencias relativas se aproximan a un mismo valor? (En caso de contestar que sí, ¿a qué número?
3. ¿Se parecen las frecuencias relativas de cada resultado?
4. ¿Qué resultado ocurrió con más frecuencia?
5. ¿Qué resultado ocurrió con menor frecuencia?
6. ¿Cómo consideras el valor de la variabilidad entre el resultado con mayor frecuencia y el de menor frecuencia?

7. ¿Fue mayor o menor la variabilidad actual a la del bloque anterior?
8. Si volvieras a repetir el experimento igual número de veces, ¿ocurrirá lo mismo?
9. En base a lo observado, ¿qué resultado crees que tendría más posibilidades de salir si volvieras a lanzar las monedas?
10. ¿Y qué resultado tendría menos posibilidades de salir?
11. Si lanzamos las monedas con la cara del águila hacia arriba, ¿qué resultado tiene más posibilidades de caer?
12. Con 100 (300, 1000, 5000, 10000) repeticiones ¿Tendrías suficiente certeza de qué resultado tiene más posibilidades de ocurrir?
13. De acuerdo a lo observado ahora y si sumamos las frecuencias relativas de los resultados con los que gana Juan, quién crees que tiene más posibilidades de ganar, ¿Pepe o Juan?

Paso 4. De igual manera que en la primera parte, una vez que ya se trabajaron los conceptos, se le presentan los conceptos de manera formal y se le proporciona una evaluación final de su trabajo haciéndole recomendaciones según su desempeño.

FIN DE LA SESION

3.7 LECCIÓN BASADA EN EL APARATO DE GALTON.

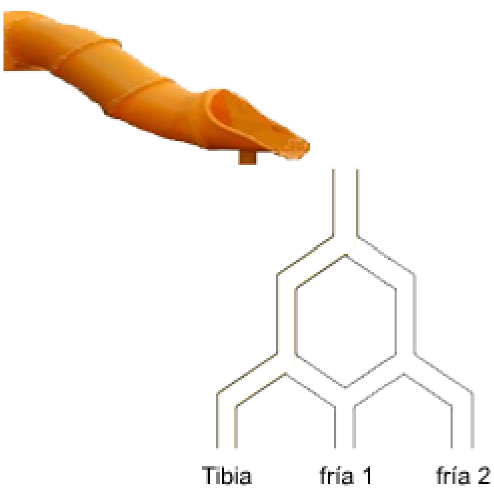
Esta tercera lección usa como instrumento probabilístico al aparato de Dalton,

Primera parte

Paso 1. Conceptos: su objetivo es enseñar los conceptos de experimento aleatorio, espacio muestral y eventos.

Paso 2. **Situación.**

En un balneario hay un tobogán con varios caminos que llegan a diferentes albercas, nuestro amigo Andrés se lanzó y sus amigos lo andan buscando en las albercas donde termina el tobogán. ¿En cuál alberca tendrá más posibilidades de caer Andrés? Para dar una respuesta a esta pregunta realicemos las siguientes actividades.



Paso 3. Creamos actividades que trabajen los conceptos de interés en esta primera parte de la lección.

Evaluación: Continuamos con el tipo de evaluación establecido para la primera lección.

Formas de respuesta: esta lección presenta 4 tipos de respuesta según la pregunta:

- Opción múltiple: donde el alumno debe seleccionar con un clic una sola de las respuestas propuestas que se cargarán en orden aleatorio cada vez que se entre a la lección.

- Opción múltiple con más de una respuesta: El alumno debe seleccionar una o más opciones de todas las propuestas debido a que se muestra la respuesta que responde correctamente a la pregunta de dos maneras distintas o complementa la respuesta.

- Completar: el alumno debe introducir la respuesta por medio del teclado utilizando para ello la notación adecuada.

- Seleccionar: para crear ciertos conjuntos, el alumno debe marcar con el mouse sobre la imagen del aparato de Galton.

Actividad 1. ¿Cuál es el experimento que representa al problema?

- ☐ Ir al balneario
- ☐ Nadar en las albercas
- ☐ Lanzarse del tobogán
- ☐ Buscar a Andrés en los vestidores

Estrategia. Si se equivoca se le invita a intentar nuevamente a contestar previa revisión de la ayuda y se le dará una explicación de su error (ir al balneario es solo la acción de llegar al lugar pero no lo principal del problema, nadar es una acción ajena a la situación planteada, buscar a Andrés en los vestidores es una acción ajena a la situación planteada), una vez que contesta correctamente se le da la definición formal de experimento.

Ayuda. Se le proporciona una definición de lo que se entiende por experimento. “Actividad planeada cuyos resultados producen un conjunto de datos.”

Actividad 2.

1. ¿Es un experimento aleatorio?

- Sí
- No

Estrategia Si no contesta correctamente en la primera oportunidad, se le mostrará la respuesta y se le pide que revise las definiciones de experimento aleatorio y determinista que le proporciona el sistema y luego continuar.

Ayuda: "Un experimento se dice aleatorio si al momento de realizarlo, no se puede predecir qué resultado se obtendrá, antes de que el experimento se ejecute."

"Un experimento se dice determinista o no aleatorio si bajo las mismas condiciones se obtiene siempre el mismo resultado."

2. ¿Por qué es aleatorio?

- Se puede predecir qué camino tomará.
- No se sabe de antemano qué camino tomará.
- Siempre toma el mismo camino.

Estrategia. Si se equivoca le dará una explicación de su error, se le invita a que revise la ayuda y lea con cuidado el enunciado de la situación en estudio y analiza que resultado(s) puede(n) ocurrir e intente nuevamente contestar.

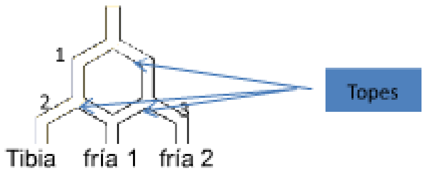
Ayuda. Se le proporciona una definición de lo que se entiende por experimento aleatorio y no aleatorio.

"Un experimento se dice aleatorio si al momento de realizarlo, no se puede predecir qué resultado se obtendrá, antes de que el experimento se ejecute."

"Un experimento se dice determinista o no aleatorio si bajo las mismas condiciones se obtiene siempre el mismo resultado."

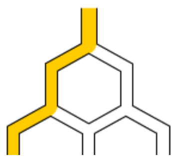
Actividad 3.

NOTACIÓN: Si denotamos los caminos según el lado que tome Andrés izquierda (i) o derecha (d) en cada tope (1, 2 o 3), por ejemplo el siguiente camino amarillo:



Se describe como {ii} que significa que en el tope 1 se va para la izquierda y llegando al tope 2 se va para la izquierda para caer en la alberca con agua tibia.

1. Crea el conjunto de todos los caminos posibles que puede tomar Andrés al lanzarse del tobogán, marcando con el cursor cada camino.



Tibia fría 1 fría 2

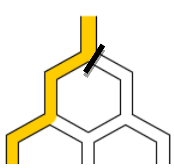
Esta pregunta se realiza para crear el espacio muestral, y una vez que se realiza correctamente, se presenta su definición formal y la de elemento muestral.

2. Marca los caminos que representen que caiga en una alberca con agua tibia.

Estrategia: con el cursor debe ir formando todos los caminos que se piden quedando marcado en la figura, si le faltan le saldrá el mensaje “faltan caminos” análogamente si lo repite o si marca un camino no valido.

Ayuda: Recuerda que necesitamos saber los caminos que puede tomar y no solo la alberca a la que llega.

Actividad 4. Si tapamos el tobogán de la siguiente manera:



Tibia fría 1 fría 2

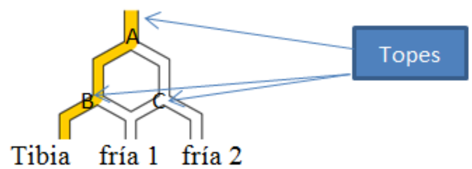
1. Marca con el cursor ¿Qué camino o caminos nunca podrá tomar Andrés?

   { }

2. Marca ¿qué camino o caminos siempre podrá tomar?

   { }

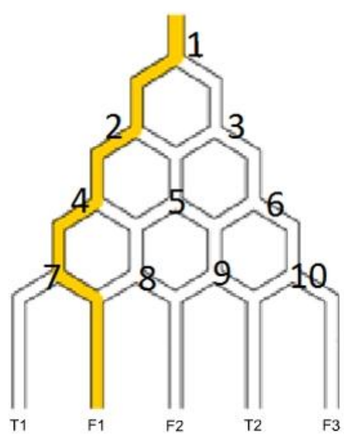
Ayuda: Recuerda que denotamos cada camino según el lado que toma Andrés izquierda (i) o derecha (d) en cada tope, por ejemplo el camino amarillo siguiente:



Se denota como {ii} que significa que en el tope A se va para la izquierda y llegando al tope B se va para la izquierda.

Actividad 5.

Como Andrés ya se siente valiente, ahora se va al lanzar del tobogán máximo como el siguiente:



Donde T1 = Tibia 1, F1 = Fría 1, F2 = Fría 2, T2 = Tibia 2, F3 = Fría 3, y con i denotamos que va a la izquierda, y con d que va a la derecha.

1. Escribe en forma **numérica**, ¿cuántos caminos posibles puede tomar Andrés al lanzarse del tobogán?

Estrategia. Si se equivoca, se le invita a que intente contestar nuevamente proporcionándole una ayuda. Cuando lo hace correctamente, se le da la siguiente retroalimentación: En efecto, dependiendo del número de caídas (n) la respuesta será 2 elevado a la n (2^n).

Ayuda: Observa que al llegar a cada tope siempre es una de dos posibles decisiones por lo que tu respuesta deberá ser un múltiplo de 2.

Actividad 6.

1. Crea el conjunto de todos los caminos posibles que puede tomar Andrés al lanzarse del tobogán, marcando con el cursor cada camino.

Estrategia: que con el cursor vaya formando todos los caminos y se quede marcado en la figura, si le faltan que le salga el mensaje “faltan caminos”, análogamente si lo repite o si marca un camino no valido.

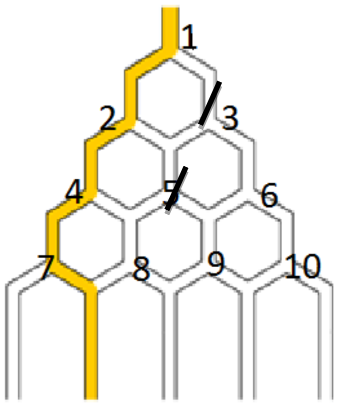
Ayuda: Recuerda que necesitamos saber los caminos que puede tomar y no solo la alberca a la que llega.

2. Describe los caminos que representen que caiga en alguna alberca con agua tibia, marcándolos con el cursor.
   { }
3. Describe ahora el conjunto de los caminos que representan que Andrés caiga en alguna alberca con agua fría, marcándolos con el cursor..
   { }

Estrategia: Usando la notación indicada, debe escribir con el teclado el conjunto que se pide.

Ayuda. Se proporciona la definición de lo que es un conjunto y su notación.

Actividad 7. Si tapamos el tobogán de la siguiente manera:



T1 F1 F2 T2 F3

1. Marca ¿Qué camino o caminos nunca podrá tomar?

☐ IIII	☐ IIID
☐ IIDI	☐ IDII
☐ DIII	☐ IIDD
☐ IDDI	☐ DDII
☐ IDID	☐ DIDI
☐ DIID	☐ DDDI
☐ DDID	☐ DIDD
☐ IDDD	☐ DDDD

2. Y ¿qué camino o caminos siempre tomará?

☐ IIII	☐ IIID
☐ IIDI	☐ IDII
☐ DIII	☐ IIDD
☐ IDDI	☐ DDII
☐ IDID	☐ DIDI
☐ DIID	☐ DDDI
☐ DDID	☐ DIDD
☐ IDDD	☐ DDDD

Estrategia: Se deben seleccionar todas las opciones de caminos que corresponden a la pregunta, cuando ya considere haber seleccionado todos, debe evaluar.

Paso 4. De acuerdo al segundo elemento de la didáctica utilizada, de que en la introducción de un concepto o una noción matemática, se debe tratar de partir de un problema colocado en un contexto de interés para el alumno, el cual puede conducir a otros ejercicios o sub-problemas cuyas soluciones forman una estructura coordinada, que lleva al estudiante a definir o demostrar el concepto matemático deseado. Al finalizar de resolver los problemas propuestos se introduce el concepto de manera formal y una vez que termina la lección, también se le proporciona un archivo con los conceptos trabajados.

FIN DE LA SESIÓN

A partir de este instante el sistema da la posibilidad de continuar presentando una nueva situación, o el alumno da por terminada su sesión de estudio.

3.8 DESARROLLO DEL PRE-TEST

Como ya se ha dicho en el primer capítulo, hay diversidad de dificultades que frenan el aprendizaje de la probabilidad a nivel medio superior. Una de esas dificultades es la falta o mala preparación de conocimientos matemáticos previos, pues esta carencia conduce al alumno a recurrir a sesgos para responder a los problemas de probabilidad (Cañizares y Batanero, 1997; Watson and Moritz, 2003), además de traer ciertas ideas informales de la probabilidad, muchas de las veces equivocadas tal y como lo afirman Garfield y Ahlgren (1988). Los conocimientos previos necesarios para iniciar un primer curso de probabilidad en el nivel medio superior son: definición y notación de conjuntos y subconjuntos, operaciones de conjuntos, producto cartesiano y n-ada, exponentes, aritmética de números, fraccionarios y decimales, diagramas de Venn, combinaciones y permutaciones. Ante esto, la pregunta que nos hicimos fue: ¿qué tanto influyen estos conocimientos previos en un aprendizaje introductorio de los primeros conceptos en probabilidad? Además es parte de la estrategia para validar nuestro prototipo de EVA el conocer cómo están en tales conceptos antes de iniciar el aprendizaje de la probabilidad por medio de las lecciones, pues esto nos permite conocer el impacto de su falta o buena preparación de conocimientos matemáticos, así como la robustez de nuestro sistema. Para darle respuesta recurrimos a la siguiente investigación.

3.8.1 Metodología de la investigación empírica.

El procedimiento para llevar a cabo el trabajo de campo para recabar datos que nos llevaron a dar respuesta a la pregunta de investigación consistió en los siguientes pasos:

1. Se llevó a cabo una revisión de algunos libros de texto para identificar y cuantificar el porcentaje de necesidad de uso de cada uno de los conocimientos previos para poder resolver los problemas que se proponen de tales conceptos.
2. En base a los resultados obtenidos, se diseñó un pre-test basado en la taxonomía de Bloom (acceso a la página el día 1 de agosto de 2010, http://www.cuautitlan.unam.mx/descargas/edudis/recursosacademicos/taxonomiadebloom.pdf) con el propósito de determinar el grado en que los alumnos poseen los

antecedentes necesarios para aprender el curso de probabilidad el cual se da en el sexto semestre.

3. Aplicación del pre-test en estudiantes de preparatoria.
4. Realización de un análisis estadístico de los datos obtenidos, para inferir resultados.
5. Presentación de los resultados obtenidos de la investigación.
6. Conclusiones.

En el paso 1, se decidió efectuar la revisión de los libros de texto de algunos que hubiera en forma digital en Internet, así como un par de libros impresos de nivel medio superior, consultando la parte en donde se mostraba la manera en que son resueltos los problemas que abarcan los conocimientos iniciales de probabilidad. Dicha revisión, involucró alrededor de 58 problemas, y los conocimientos previos más necesarios en su resolución fueron: definición y notación de conjuntos y subconjuntos, operaciones de conjuntos, Diagramas de Venn, definición de producto cartesiano, n-ada, aritmética de números fraccionarios, decimales, uso de exponentes, combinaciones, permutaciones, razones, proporciones y porcentajes. Tal revisión mostró que aproximadamente un 67% de los problemas analizados necesitan de la definición y notación de conjunto y subconjunto para llegar a darle respuesta, siendo así los conceptos previos más utilizados, por lo que los consideramos esenciales en el aprendizaje de los conceptos básicos de probabilidad. Las operaciones de conjuntos como son unión, intersección, además de complemento de conjuntos es localizado en aproximadamente 46% de los problemas. El segundo concepto más utilizado es la definición de producto cartesiano y de n-ada, necesario en aproximadamente el 64% de los problemas estudiados debido a que en la mayoría es necesario la descripción del espacio muestral a partir de varios objetos que se representan por medio de n-adas, sin embargo, el concepto formal es posible que pocos alumnos lo conozcan pero es necesario que aun intuitivamente sepan utilizarlo además de su forma de denotarlo que complementa la notación de conjuntos. El siguiente tema en orden de interés es el de aritmética de números fraccionarios y decimales que es esencial principalmente en el cálculo de probabilidades encontrado aproximadamente en el 57% de los problemas que analizamos, basamos las preguntas en fracciones simples con igual y diferente denominador para identificar si la dificultad es en general con ambos tipos o solo con uno de ellos; en cuanto a números decimales, generamos las preguntas con números menores que 1 pues son los que se usan comúnmente debido a que la probabilidad de un evento está entre 0 y 1. Un tema también involucrado es el uso de exponentes que usualmente se utiliza al obtener probabilidades de eventos cuya cardinalidad se expresa utilizando exponentes, apareciendo en este estudio en el 38% de los problemas, las operaciones más usuales con exponentes durante la resolución de los problemas son elevar directamente un número a otro y de las leyes de los exponentes, la ley $x^m x^n = x^{m+n}$ y la ley $(x^m)^n = x^{mn}$. En el 31% de los problemas se podía llegar a la solución a través de diagramas de Venn punto no tan obligatorio pero es importante identificar si los alumnos lo conocen y así poder utilizarlo para intentar disminuir las dificultades por lo que hacemos preguntas basadas en un diagrama de Venn en las que las respuestas se obtienen solamente de él. Como tema final, notamos que en el 25% de los problemas es usual utilizar combinaciones y permutaciones ya sea directamente con la fórmula o al deducirla en el momento de contar los elementos del espacio muestral o en los eventos para posteriormente obtener la probabilidad, en el test ponemos solo el resultado de realizar la operación, no nos interesa si lo hacen por medio de la fórmula sino que lo que en este momento es importante es saber si los alumnos son capaces de contar.

3.8.2 Diseño del Pre-test.

En el paso 2, tomando en consideración lo anterior, nos dimos a la tarea de elaborar un pre-test que incluyera a cada uno de los conceptos previos necesarios para resolver problemas de probabilidad. Recordemos que un pre-test se hace con la finalidad de evaluar de forma diagnóstica el conocimiento y las destrezas de alumnos que están en el nivel medio superior respecto a los prerrequisitos del tema de probabilidad. Su objetivo principal es mejorar el aprendizaje y parte de su uso es contribuir a la toma de decisiones educativas adecuadas al inicio de un curso. Se decidió elaborar 2 pre-tests uno formado por 19 preguntas y el otro formado por 13, pero ambos equivalentes. El estudiante al presentar el examen, el sistema le carga de manera aleatoria a cualquiera de los dos.

En el primer pre-test, se consideró dividir el cuestionario en ocho bloques, un bloque destinado a cada concepto previo de interés y uno extra al anexar el tema de aleatoriedad: I. Definición y notación de conjuntos y subconjuntos, II. Operaciones de conjuntos, III. Producto cartesiano y n-ada, IV. Aritmética de números fraccionarios y decimales, V.

Exponentes, VI. Diagramas de Venn, VII. Combinaciones y permutaciones, VIII. Aleatoriedad. En el caso del otro pre-test, se dividió cinco bloques, un bloque destinado a cada concepto previo de interés: I. Definición y notación de conjuntos y subconjuntos, II. Operaciones de conjuntos y Diagramas de Venn, III. Producto cartesiano y n-ada, IV. Combinatoria. V. Aritmética de números fraccionarios y decimales. En donde de acuerdo a la importancia de uso de los conceptos, fue la proporción incluida en el pre-test, el cual fue orientado al nivel medio superior.

Para el primer pre-test, cuando se inicia el aprendizaje de probabilidad a nivel superior, los primeros conceptos a estudiar son:

- **Espacio muestral:** representado por las preguntas 1, 5, 6 y 7 para denotar al espacio muestral como conjunto; 5, 7, 12, 16 y 17 para conocer cuántos elementos conforman el espacio muestral.
- **Eventos:** las preguntas de 1, 2, 3, 9, 10 y 11 para denotar como conjunto los eventos además de que el evento es un subconjunto del espacio muestral, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 13, 14 y 15 debido a que un evento se puede formar al unir, intersectar o tomar el complemento de otros eventos.
- **Aleatoriedad:** bloque VIII
- **Definición de probabilidad clásica y por medio del enfoque frecuencial:** preguntas del bloque IV y V, debido a que se necesitan hacer cálculos similares para obtener las probabilidades de los eventos.

Para el segundo pre-test, cuando se inicia el aprendizaje de probabilidad a nivel superior, los primeros conceptos a estudiar son:

- **Espacio muestral:** representado por las preguntas 1, 3 y 9 para denotar al espacio muestral como conjunto; el 10 para conocer cuántos elementos conforman el espacio muestral.
- **Eventos:** las preguntas de los bloques I, II y III para denotar como conjunto los eventos además de que el evento es un subconjunto del espacio muestral, 4, 5, 6, 7,

8 y 9 debido a que un evento se puede formar al unir, intersectar o tomar el complemento de otros eventos.

- **Definición de probabilidad clásica y por medio del enfoque frecuencial:** preguntas del bloque IV y V, debido a que se necesitan hacer estos cálculos similares para obtener las probabilidades de los eventos.

Los pasos del 3 al 6 se muestran como parte del siguiente capítulo.

3.9 PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS.

Debido a que nuestro propósito fue el de realizar lecciones didácticas que promueven el aprendizaje de conceptos de probabilidad, se crearon problemas complementarios los cuales son una actividad complementaria para reforzar la promoción del aprendizaje, dichos problemas están incluidos en un módulo del EVA llamado "Actividades Complementarias". Una característica importante de estos problemas es que son problemas presentados de manera diferente a los que se trabajan en un curso ordinario de probabilidad a nivel medio superior, cuyo nivel de dificultad radica más en un razonamiento matemático, que en el uso de conceptos de probabilidad más avanzados, buscando con ello estimular la capacidad de razonamiento.

Estos problemas incluyen:

- **El objetivo:** Se detalla lo que se espera logre el alumno al realizar el problema.
- **Los conceptos involucrados:** serán los conceptos que se trabajen, comprendidos en un primer curso de probabilidad a nivel medio superior.
- **La estrategia didáctica:** Describe ideas y actividades a seguir para alcanzar el objetivo de aprendizaje que se persigue.
- **Las ideas:** que son una serie de sugerencias que ayudan al alumno a llegar a la solución.
- **Nivel de dificultad:** básicos o intermedios.

Veamos cómo se diseñó uno de los problemas:

PROBLEMA 1.

La baraja americana tiene 52 cartas, se compone de 4 palos:"D" diamante (roja), "E" espada (negra), "T" trébol (negra) y "C" corazón (roja), cada uno con 13 cartas, A 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K.

Se extrae una carta. Sea A el evento "salió un trébol" y B el evento "salió una reina".

Realiza las siguientes actividades:

1. ***Describe el espacio muestral.***

2. ***Para este problema es conveniente usar el enfoque clásico para medir, ¿por qué?***

3. ***Describe A, B y $A \cup B$, $A \cap B$.***

4. ***Calcula, P(A), P(B), $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$ y $P(A) \bullet P(B)$***

5. ***¿A y B son mutuamente excluyentes? Justifica tu respuesta.***

6. ***¿A y B son independientes? Justifica tu respuesta.***

Objetivo:

Reforzar los conceptos de probabilidad ya aprendidos mediante una secuencia de actividades a realizar.

Conceptos involucrados:

Espacio muestral, eventos, unión e intersección de eventos, probabilidad clásica, eventos mutuamente excluyentes, eventos independientes.

Estrategia didáctica:

- Buscar que el alumno identifique quienes son los elementos del espacio muestral.
- Que se tenga claro quiénes son los eventos A y B.
- Hacerle ver al alumno la diferencia entre eventos mutuamente excluyentes e independientes.

Ideas:

a) Recuerda la definición de eventos mutuamente excluyentes e independientes, la justificación es que se cumpla esta definición.
b) Observa bien como están agrupadas las cartas.

Tiempo estimado de trabajo: De 10 a 20 minutos.

CAPITULO 4.

APLICACIÓN, ANÁLISIS ESTADÍSTICO E INTERPRETACIÓN DEL PRE-TEST Y LECCIONES DE PROBABILIDAD

4.1 APLICACIÓN DEL PRE-TEST Y DE LAS LECCIONES

Como este proyecto está contemplado para estudiantes de nivel medio superior, recurrimos a estudiantes de las preparatorias de la BUAP para probar nuestras lecciones. Una vez preparadas las lecciones y el pre-test, nos entrevistamos con los profesores de la academia de matemáticas, de la Preparatoria Lic. Benito Juárez García, perteneciente a la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, en donde se presentó el prototipo desarrollado con el interés de solicitar que permitieran que pudiera ser probado por estudiantes de la preparatoria. Se acordó por infraestructura, que trabajaran en dos de los laboratorios de cómputo de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, perteneciente a la misma universidad. Desde el momento en que llegaron se formaron 2 grupos de estudiantes y fueron distribuidos en los laboratorios previamente preparados. El tiempo promedio para realizar una lección completa fluctúa entre 50 y 60 minutos, a esto le sumamos 20 a 30 minutos por la aplicación de los pre-test ya creados. De manera breve se les instruyó de la parte operativa para trabajar en el EVA, igualmente se les explicó el propósito de su colaboración y comenzaron a trabajar.

El pre-test fue aplicado con la intención de conocer el grado de preparación en conocimientos previos de conceptos matemáticos necesarios para el aprendizaje en un primer curso de probabilidad. Se aplicaron ambos cuestionarios en los laboratorio de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, a un total de 48 alumnos, como los pre-test se cargan aleatoriamente, 32 de ellos contestaron el pre-test que finalmente constó de 19 preguntas, que representan 17.5 puntos en total. Mientras que 16 contestaron el de 13 preguntas que representan 12 puntos en total. El tiempo promedio para contestarlos es de 30 minutos. Ver figura 4.1.

Figura 4.1. Aplicación del pre-test a alumnos de preparatoria.

El cuestionario se aplicó en línea, desde la dirección del sistema. Cabe mencionar que el test fue diseñado de tal manera que ninguna pregunta quedara sin resolver.

En base al mecanismo planeado, al terminar el examen de diagnóstico, de manera inmediata se les cargaron en línea las lecciones de aprendizaje previstas; en un laboratorio la lección basada en dados y en el otro la lección basada en monedas.

En el resto del capítulo se muestran los resultados obtenidos.

4.2 ANÁLISIS ESTADÍSTICO E INTERPRETACIÓN DEL PRE-TEST.

Para su análisis se agruparon las preguntas de ambos cuestionarios por concepto, recodificándose las respuestas según el tipo de error. El análisis estadístico arroja los siguientes resultados.

Bloque: Definición y notación de conjuntos y subconjuntos.

Este bloque está compuesto por preguntas que están diseñadas para identificar si los alumnos conocen la notación y definición de un conjunto, aun cuando conozcan o no el conjunto del que se habla.

En la pregunta donde deben seleccionar la opción que represente un conjunto, el 63.89% de los alumnos reconoció la respuesta correcta el resto cayó en un error, en el que pudimos observar que conocen de qué conjunto se está hablando pero no saben cómo se denota y que en esta ocasión, es lo que más nos interesa, sólo un alumno no vio diferencia entre las opciones determinando así que todas definían el mismo conjunto descrito, sin distinguir la notación. Como se observa en la figura 4.2.

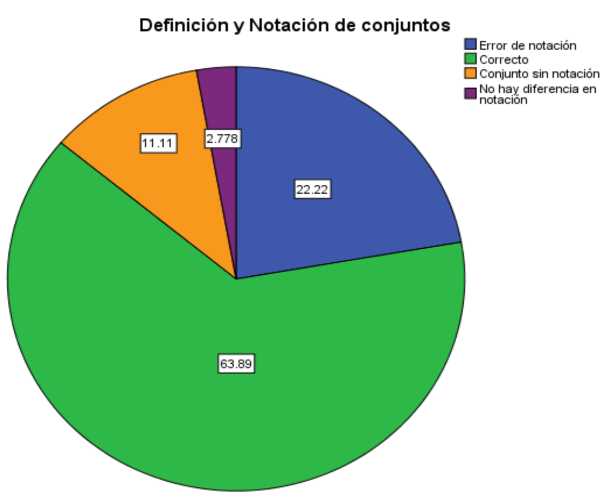


Figura 4.2. Porcentajes de definición y notación de conjuntos.

En la pregunta donde se pide que obtengan un subconjunto de un conjunto dado, notamos que el 47.2% de los alumnos contestaron correctamente, reflejando que conocen tanto los elementos del conjunto que se describe, como la notación que debe utilizarse; un porcentaje de aproximadamente el 11% seleccionó como opción correcta a un conjunto que es parecido al correcto con la diferencia de que hay elementos del conjunto que no corresponde al original pero sin embargo, la notación del conjunto si lo conocieron, caso parecido con las otras opciones, contrario al resto que no conocen la notación correcta (33.3%) o no saben de que se les está hablando (8.3%). Como se muestra en la figura 4.3.

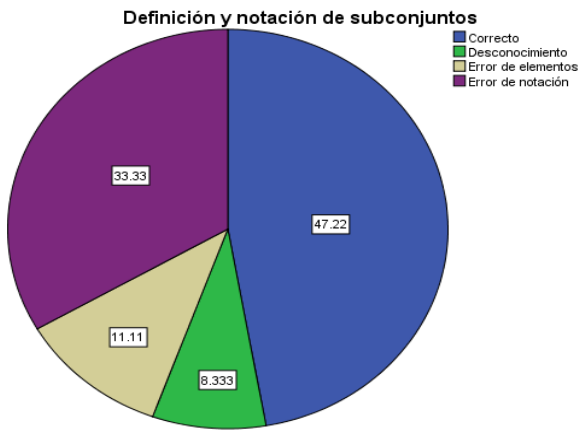


Figura 4.3. Porcentajes definición y notación de subconjuntos

De los alumnos a los que se les preguntó la interpretación del conjunto, la mayoría interpretó correctamente (97.6%) y los que tuvieron errores no identificaban que se está hablando de un conjunto. Ver figura 4.4.

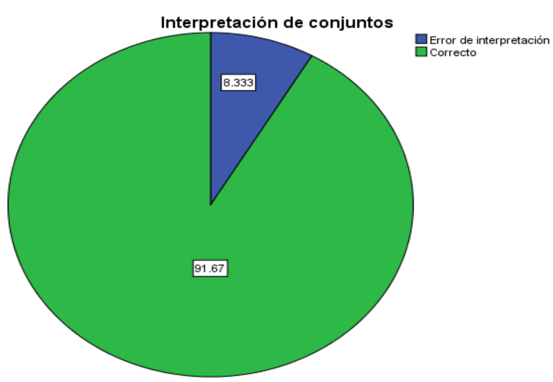


Figura 4.4. Porcentajes de interpretación de conjuntos

Podemos observar que gran parte de los alumnos coincidieron y contestaron correctamente, sin embargo, la mayoría no domina la definición de conjunto la cual es importante conocer para poder estudiar correctamente los conceptos de espacio muestral y eventos.

Bloque: Operaciones de conjuntos

Los resultados en esta parte nos reflejan qué tanto los alumnos saben de las operaciones básicas de conjuntos, como son intersección y unión de conjuntos.

En la unión de conjuntos el 66.6% de los alumnos reflejan saber esta operación reconociendo correctamente los elementos del conjunto que representa la unión de otros dos ya dados, pero también casi 11% no conoce la operación o la confunde con otra, como intersección o $(A\cup B)^c$, y un porcentaje considerable (16.6%) no reconoce la notación correcta. Ver figura 4.5.

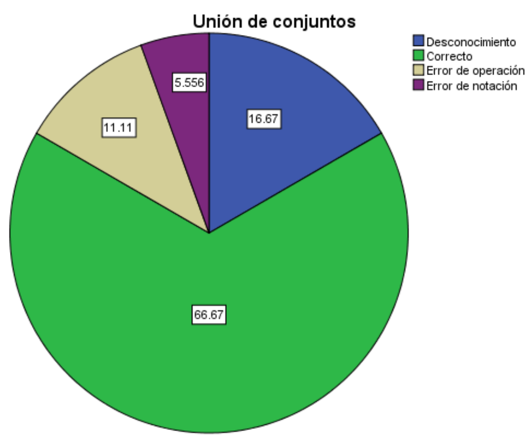


Figura 4.5. Porcentajes de Union de conjuntos

En la operación de intersección sólo el 22% supo la respuesta, menos que en la unión y gravemente, el 25% no conoce la operación y/o simbología, el mayor error se concentró en confundir la operación de intersección por la de unión o no ubicar correctamente los elementos representada por un 36.1% del total de los estudiantes. Ver figura 4.6.

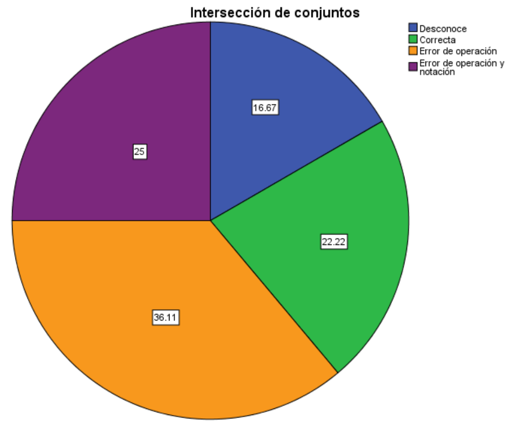


Figura 4.6. Porcentajes de Intersección de conjuntos

El 25% de los alumnos conoce el complemento de conjuntos pero en mayor proporción hubo errores como no reconocer todos los elementos o desconocer por completo la operación y/o la notación. Ver figura 4.7.

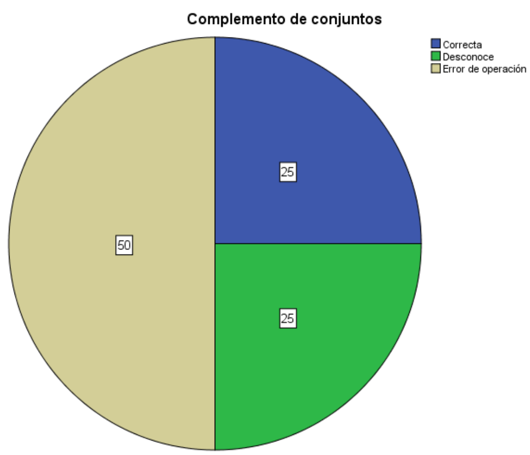


Figura 4.7. Porcentajes de Complemento de conjuntos

Bloque: Producto cartesiano y n-ada

El siguiente bloque destinado al producto cartesiano y n-ada se basa en la notación y definición de este concepto.

Un 55.5% logró identificar la definición y notación del producto cartesiano, el 8.3% dijo desconocer el concepto por completo, el error más frecuente que se dio fue en la notación de producto cartesiano aun conociendo su definición. Como se observa en la figura 4.8.

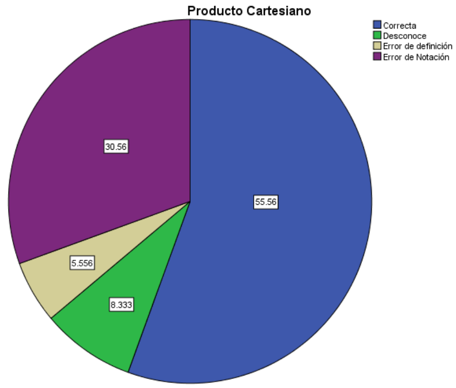


Figura 4.8. Porcentajes de Producto cartesiano

El 33.3% de los alumnos, pudo identificar los conjuntos involucrados en cierto producto cartesiano. Ver figura 4.9.

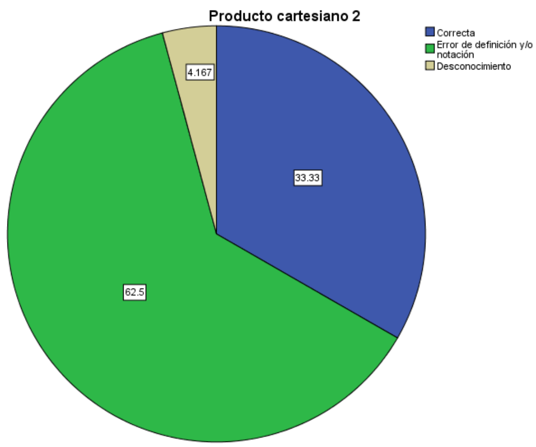


Figura 4.9. Porcentajes de identificación de conjuntos en el producto cartesiano

En cuestión de producto cartesiano de 3 conjuntos, solo el 8.3% señaló correctamente la operación observando como un error común (79.17%) en los alumnos confundir fuertemente la notación haciendo separación por X entre los elementos en lugar de comas.

Se muestra que algunos alumnos tienen confusión en cuestión de notación de producto cartesiano, sin embargo, puede notarse que gran parte sí intuye la definición. Ver figura 4.10.

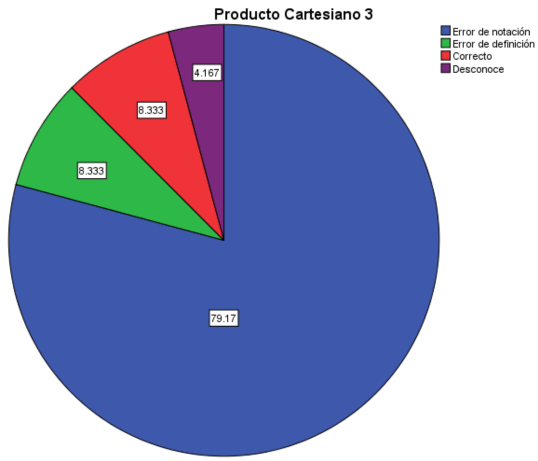


Figura 4.10. Porcentajes de notación de producto cartesiano

Bloque: Aritmética de números fraccionarios y decimales

Este bloque es de operaciones, en el que los alumnos deben calcular suma y división de fracciones, además de producto y división de decimales. Aproximadamente el 50% realizó correctamente la división y el 33.3% la suma de fracciones simples y el 75% conoce el producto, parte importante de los alumnos (33.3%) confunde el algoritmo de la división con el de la multiplicación. En suma de fracciones simples, el error fue el mismo, que al analizarlo, se puede saber que no obtienen el mínimo común múltiplo sino que solo suman los denominadores al igual que los numeradores. Ver figuras 4.11, 4.12 y 4.13.

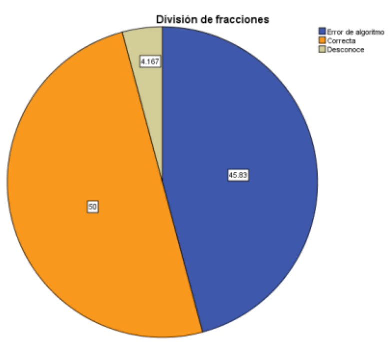


Figura 4.11. Porcentajes de división de fracciones

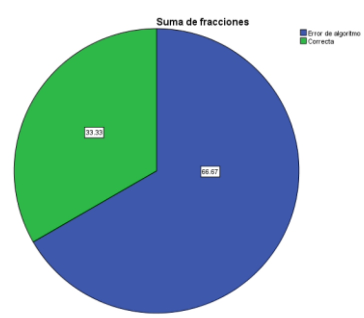


Figura 4.12. Porcentajes de Suma de fracciones

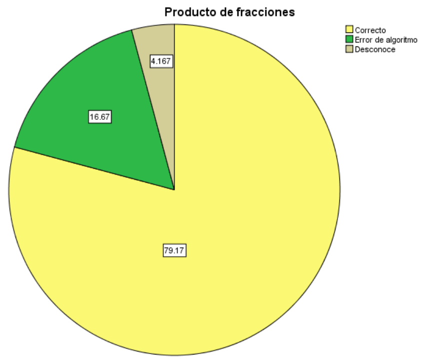


Figura 4.13. Porcentajes de Producto de fracciones

Para producto de números decimales, el porcentaje de error es menor, pues sólo el 69% sabe realizar esta operación y el 58.3% efectúa correctamente la división. Ver figuras 4.14 y 4.15.

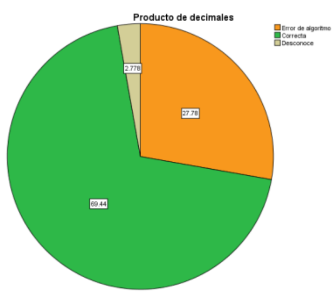


Figura 4.14. Porcentajes de Producto de decimales

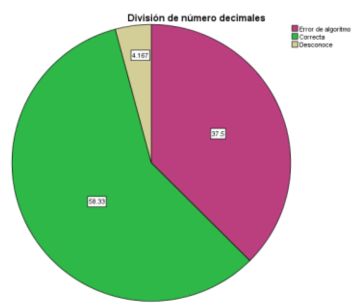


Figura 4.15. Porcentajes de división de decimales

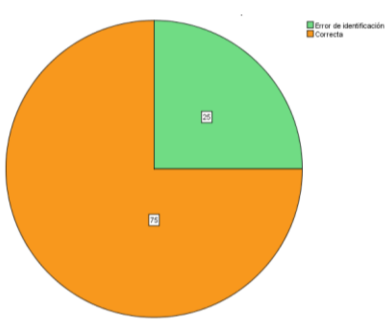
Errores diversos se presentan al dividir decimales, ya sea en la posición del punto decimal, o en confundir el divisor con el dividendo.

Bloque: Exponentes

Podemos estar satisfechos al identificar que casi el 98% de los alumnos en estudio sabe elevar un número a una potencia.

Bloque: Diagramas de Venn

Al identificar conjuntos a partir de un diagrama de Venn, en promedio, un 75% lo hace correctamente (figura 4.16), el 75% identifica la intersección de conjuntos (figura 4.17), el 33.3% visualizó la unión de conjuntos y la diferencia de conjuntos, teniendo como error no identificar correctamente la operación o el área correcta del gráfico. Ver figuras 4.18 y 4.19.



0

Figura 4.16. Porcentajes de identificación de conjuntos

Figura 4.17. Porcentajes de intersección de conjuntos

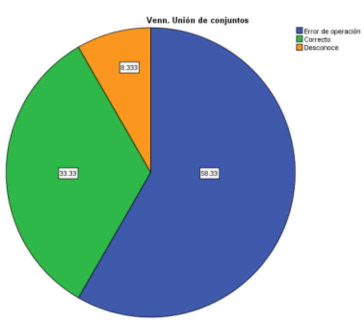


Figura 4.18. Porcentajes de union de conjuntos

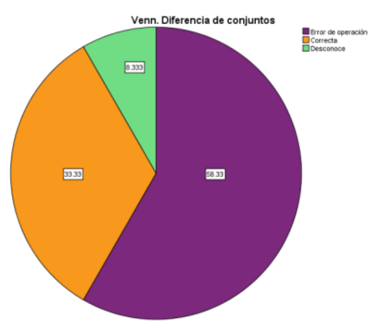


Figura 4.19. Porcentajes de diferencia de conjuntos

Bloque: Combinaciones y permutaciones

En las preguntas de esta sección se presentan problemas en los que se necesitan combinaciones y/o permutaciones para llegar a la solución.

Tres problemas de similar procedimiento produjeron resultados muy diferentes, lo que nos lleva a pensar que la dificultad está en la interpretación del problema, ya que dos de ellos aproximadamente entre el 54 y el 95% contestó correctamente, en cambio en uno de ellos fue el 12.5%

Se presenta un error común entre los alumnos al utilizar combinaciones y permutaciones siendo este error mayor que los aciertos, dicho error se presenta al querer multiplicar los tipos sin considerar que no es importante el orden. Ver figura 4.20.

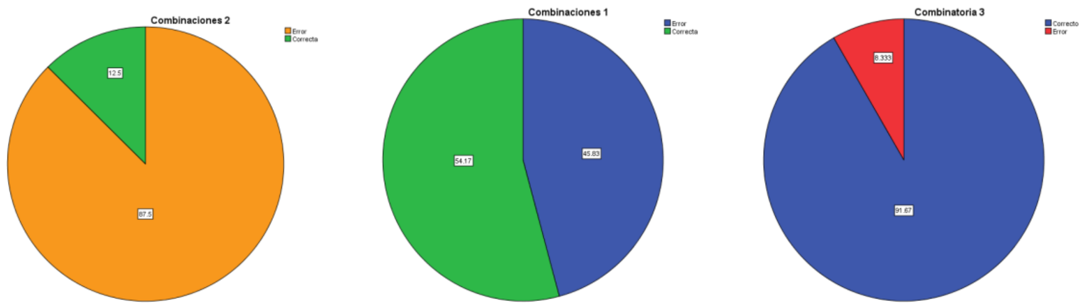


Figura 4.20. Porcentajes de combinaciones

Bloque: Aleatoriedad

En la sección de aleatoriedad incluida en uno de los test, las respuestas estuvieron muy divididas, muy pocos alumnos tuvieron una visión correcta sobre aleatoriedad para identificar una secuencia aleatoria, siendo solo el 16.7% del total, sin embargo, al dar un argumento, el 54% dio uno correcto, pero aun no visualizan la equiprobabilidad de eventos, debido a que tienen un resultado favorito.

Se observa que sólo el 25% identificó que todas las secuencias que ocurren al lanzar una moneda 5 veces son igual de probables de ocurrir. Ver figura 4.21.

La mayoría espera que sólo alguno (uno) de los resultados sea más probable de ocurrir, de igual manera para el que tenga menos probabilidad de ocurrir. Ver figura 4.22.

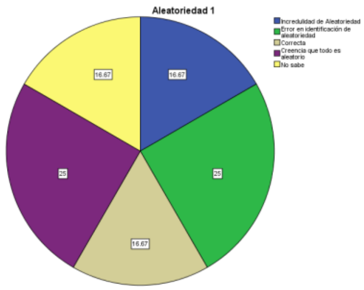


Figura 4.21. Porcentajes de aleatoriedad

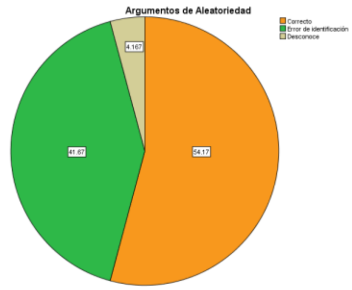


Figura 4.22. Porcentajes de argumentos de aleatoriedad

Conclusiones.

Podemos concluir que la mayor deficiencia que presentan los estudiantes está en conceptos de conjuntos, principalmente en notación y en producto cartesiano, siguiendo después las operaciones aritméticas de fracciones. Desafortunadamente, sabemos que estas deficiencias influyen de manera negativa en la comprensión de los conceptos elementales de un primer curso de probabilidad, por lo que cabría esperar que su desempeño en cuestión de aprendizaje en un curso tradicional de probabilidad no fuera el esperado.

En las lecciones desarrolladas, esperamos que aún con una mala preparación de conocimientos previos los alumnos logren aprender significativamente probabilidad y disminuir sus carencias.

Terminamos comentando que los resultados obtenidos en el pre-test confirman lo que ya todos sabemos. Que llegan con fuertes carencias de conocimientos matemáticos necesarios para la comprensión de los conceptos de probabilidad, en este caso en conceptos de conjuntos, producto cartesiano y de aritmética de fracciones.

4.3 ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE LAS LECCIONES.

Aunque en este momento se tienen integradas tres lecciones de nivel básico, una modelando el juego de dados, otra simulando el lanzamiento de monedas y una más basada en el Aparato de Galton, solo se describen las aplicaciones de las dos primeras lecciones con los estudiantes de nuestra población en estudio (como se aprecia en las figuras 4.23 y 4.24), ya que el tiempo fue insuficiente.

Figura 4.23. Estudiantes de preparatoria realizando las lecciones.

Figura 4.24. Estudiantes de preparatoria realizando las lecciones.

4.3.1 Análisis de resultados

Comenzaremos describiendo lo que el estudio arrojó respecto a la lección basada en dados.

Análisis estadístico de la lección basada en dados (primera parte).

Cada lección está dividida en dos partes, en la primera se trabajan los conceptos de experimento aleatorio, espacio muestral, eventos, propiedades de eventos, mientras que en la segunda parte se cubren los conceptos de espacio muestral (nuevamente), frecuencia relativa, variabilidad y definición de probabilidad bajo el enfoque frecuencial.

Como ya se mencionó, la evaluación de las respuestas está basada en el número de intentos que el alumno hace para resolver correctamente lo que le soliciten, excepto en algunas preguntas en donde solo se asigna el valor de 1 punto si contestan correctamente, 0 puntos en caso contrario. El análisis se hace por conceptos bajo las siguientes preguntas:

1. *¿Cuál puede ser el experimento que representa al problema?*
2. *¿Es un experimento aleatorio?*
3. *¿Por qué es aleatorio? (si lo consideras marca más de una opción)*
4. *Para conocer todas las opciones que tienen María y Jorge de ganar, necesitamos conocer el conjunto de todos los posibles resultados distintos que pueden obtener al lanzar el dado. Anótalos utilizando notación de conjuntos, y denotando en forma numérica cada resultado.*
5. *Describe el subconjunto formado por los resultados que representan que gana María.*
6. *Describe el subconjunto formado por los resultados que representan que gana Jorge.*
7. *Describe el subconjunto formado por los resultados que representan que no gana María.*
8. *Describe el subconjunto formado por los resultados que representan que no gana Jorge.*
9. *Describe el subconjunto formado por los resultados que representan que no gana ni María ni Jorge.*
10. *Describe el subconjunto formado por los resultados que representan que gana alguno de los dos.*

11. *Si María volviera apostarle al 2 y Jorge al 5, y pudiéramos modificar el dado para que los resultados siempre representen que gana María o Jorge, ¿cuál de los siguientes dados elegirías?*
12. *Con este dado*  *, ¿Cuál sería ahora el conjunto de todos los posibles resultados que se pueden obtener?*
13. *¿Sigue siendo un experimento aleatorio?*
14. *¿Por qué es aleatorio? (si lo consideras marca más de una opción)*
15. *Con el dado*  *describe el subconjunto formado por los resultados que representan que gana María.*
16. *Con el dado*  *describe el subconjunto formado por los resultados que representan que gana Jorge.*
17. *Con el dado*  *describe el subconjunto formado por los resultados que representan que no gana ni María ni Jorge.*
18. *Si volvemos a utilizar el dado original pero ahora María apuesta a que cae par y Jorge a que cae impar.*
19. *Describe el subconjunto formado por los resultados que representan que gana María.*
20. *Describe el subconjunto formado por los resultados que representan que gana Jorge (recuerda que ahora María apuesta a que cae par y Jorge a que cae impar).*
21. *Describe el subconjunto formado por los resultados que representan que gana alguno de los dos (recuerda que ahora María apuesta a que cae par y Jorge a que cae impar).*
22. *Describe el subconjunto formado por los resultados que representan que ninguno de los dos gana (recuerda que ahora María apuesta a que cae par y Jorge a que cae impar).*
23. *Si el resultado de lanzar el dado fue alguno de los elementos del conjunto siguiente {1,3,4,6}, ¿qué representa? (recuerda que ahora María apuesta a que cae par y Jorge a que cae impar).*

24. *Si el resultado de lanzar el dado fue alguno de los elementos del conjunto siguiente {1,2,4,5,6}, ¿qué representa? (recuerda que ahora María apuesta a que cae par y Jorge a que cae impar).*

Experimento.

Para este concepto se tiene una pregunta (ítem 1), donde se debe escoger de 4 opciones el experimento que mejor represente al problema, en donde el 84% logró comprender y contestar correctamente la pregunta en el primer intento, 9% lo logró en un segundo intento, 3% lo hizo en tres intentos y 3% lo consiguió en 4 o más intentos, como se observa en la figura 4.25.

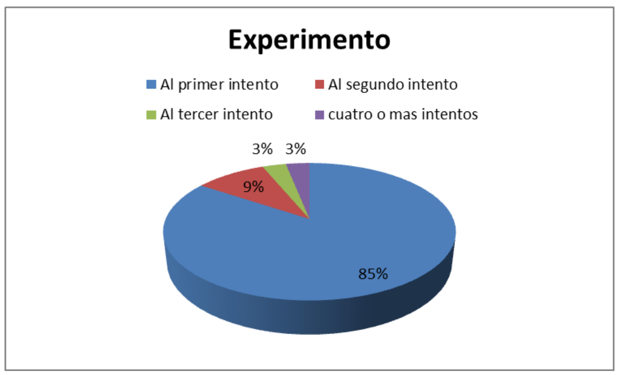


Figura 4.25.

Aleatoriedad.

Para este concepto, al principio de la lección se les pregunta a los alumnos si el experimento del problema inicial es aleatorio y posteriormente se les hace esta misma pregunta para una situación similar en la que se modifica el dado (ítems 3 y 14), satisfactoriamente en la situación original, el 97% lo hizo correctamente y por las razones correctas, el otro 3% con apoyo de la ayuda que consta de la definición de experimento aleatorio y determinista los alumnos en seguida encontraron la característica correcta de experimento aleatorio; al modificar la segunda situación solo el 81% contestó correctamente, mientras que el 19% restante se equivocó. Ver figuras 4.26 y 4.27.

Figura 4.26. Concepto de aleatoriedad en la situación original

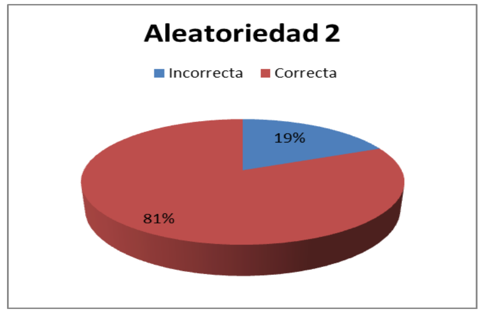


Figura 4.27. Concepto de aleatoriedad en la situación modificada.

.

Espacio muestral.

Las preguntas diseñadas para el concepto de espacio muestral son dos (ítems 4 y 12) y muestran resultados semejantes en el primer intento con un 63%, mientras que el 16% necesito de un segundo intento para contestar correctamente la primera pregunta y el 28% para lograrlo en la segunda pregunta. Ver figuras 4.28 y 4.29.

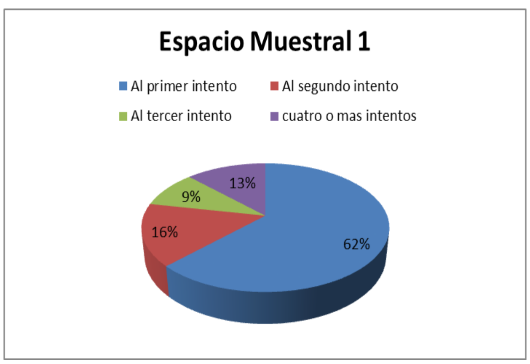


Figura 4.28. Espacio muestral de la situación original

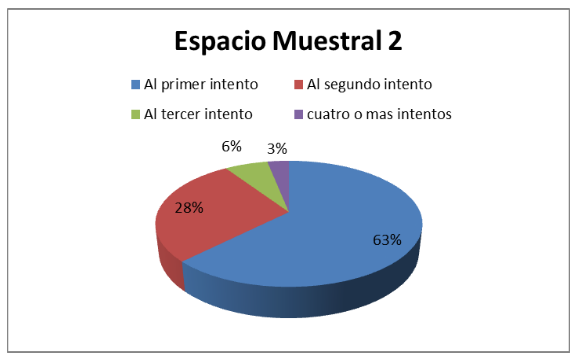


Figura 4.29. Espacio muestral de la situación modificada.

Evento simple.

Este concepto está representado por cuatro preguntas (ítems 5, 6, 15 y 16) en contexto con el problema y su forma de respuesta es por medio del teclado, dos preguntas aparecen consecutivas respecto a la situación planteada originalmente y las otras dos posteriormente respecto a la situación modificada. De la primera pregunta, el 60% contestó bien al primer intento, mientras que un 9% lo logó al segundo intento. Para la segunda pregunta el 91% lo hizo bien al primer intento, y el 3% necesitó de un segundo intento, mientras que para la tercera pregunta el 72% contestó bien al primer intento, y el 28% lo hizo al segundo, para la última pregunta el 97% logró hacerlo bien a la primera, y el 3% lo logró a la segunda. Ver figura 4.30, 4.31.

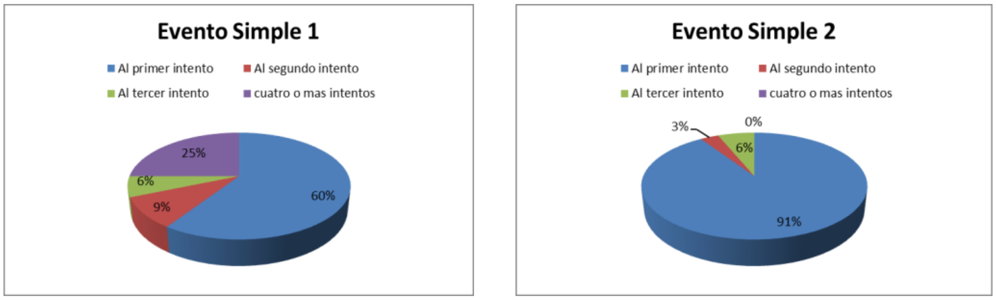


Figura 4.30. Concepto de evento simple en la situación original.

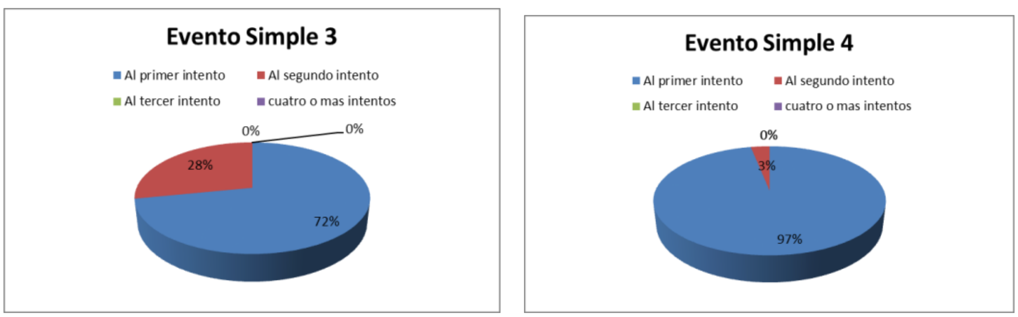


Figura 4.31. Concepto de evento simple en la situación modificada.

Evento complementario.

Para trabajar este concepto se usan los eventos simples generados en preguntas anteriores a la referente a este concepto pidiendo de manera explícita el complemento de éstos, la respuesta debe darse por medio del teclado, se diseñaron 3 preguntas (ítems 7, 8 y 17) de las cuales, en la primera el 69% contestó bien a la primera y el 16% lo hizo a la segunda, para la segunda pregunta, el 87.5% lo hizo bien al primer intento, y el 12.5% necesito de un segundo intento. Para la última pregunta, el 97% contestó bien en el primer intento. Ver figura 4.32.

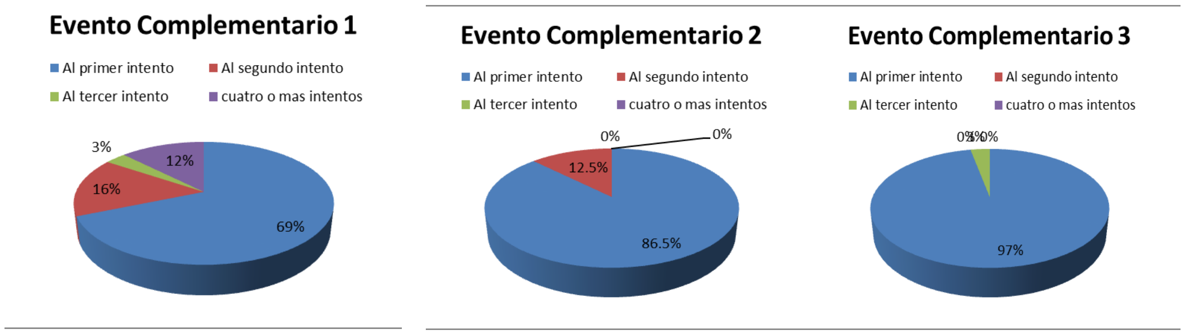


Figura 4.32. Eventos complementarios.

Unión de eventos.

Para crear la unión de eventos se usan al igual que para el complemento, los eventos simples ya trabajados en preguntas anteriores, los resultados muestran que a los alumnos no se les dificultó demasiado llegar a la respuesta de estas preguntas al revelar porcentajes altos desde la primera pregunta. En la primera pregunta (ítem 10) el 91% lo hizo bien al primer intento y en la segunda pregunta (ítem 21) el 85% contestó correctamente al primer intento. Ver figuras 4.33 y 4.34.

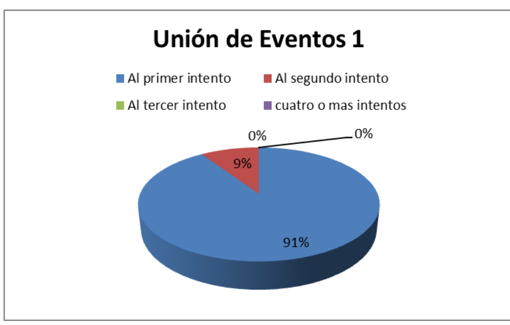


Figura 4.33. Unión de eventos en la situación original.

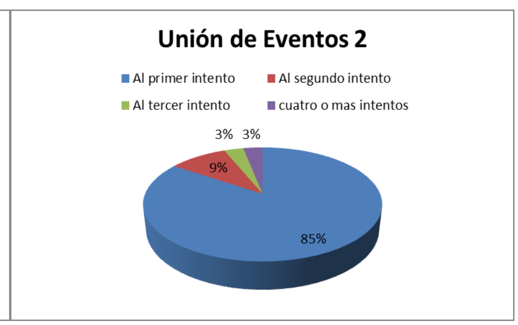


Figura 4.34. Unión de eventos en la situación modificada.

Evento nulo.

Debido a que todas las actividades se hacen en cuestión de la situación planteada, sin darles el concepto como lo sugiere la didáctica elegida, cuando se busca el desarrollo del evento nulo, trae consigo fuertes dificultades de interpretación y de notación, cosa que se refleja en los resultados, a pesar de proporcionarles en todo momento una ayuda referente a la notación de conjuntos. El 66% logró contestar bien al primer intento, 9% lo hizo al segundo intento. Así, el 25% de los alumnos necesitaron de 3 o más intentos para poder encontrar la respuesta correcta que es el evento nulo o imposible (ítem 17). Ver figura 4.35.

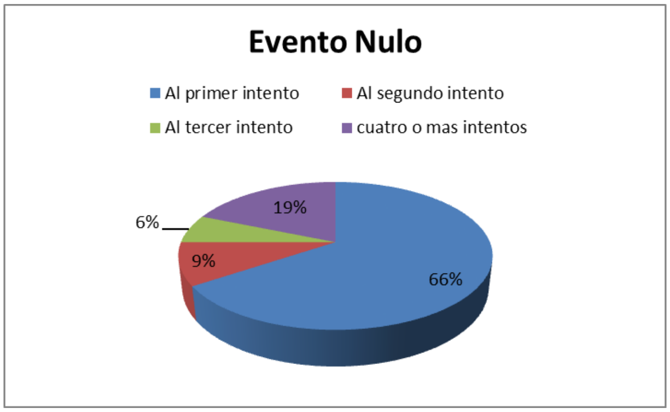


Figura 4.35. Evento nulo

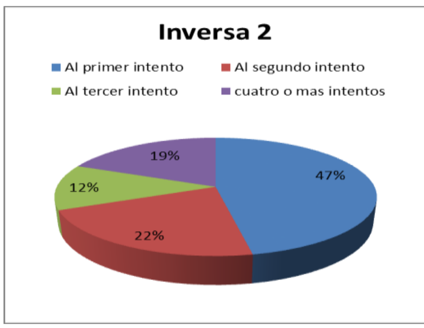
Evento compuesto.

El concepto de evento compuesto está representado por tres preguntas (ítems 18, 19 y 20). Se observa que sólo en la primera en que aparece el concepto los alumnos presentaron ciertas dificultades no muy graves, pues el 78% contestó bien al primer intento, 19% lo hizo al segundo intento y sólo el 3% usó 4 o más intentos; en las dos restantes el 100% lo hizo bien al primer intento. Ver figura 4.36.

Figura 4.36. Eventos compuestos.

Evento para uso de la operación inversa.

Esta parte de la lección a la que llamamos la operación inversa, se valora por medio de tres preguntas (ítems 11, 22 y 23), la primera por su sencillez no presenta mucha dificultad en la mayoría, pues el 91% contestó correctamente a la primera. En las dos preguntas restantes, se proporciona un evento y se pide que el alumno lo interprete de acuerdo a los elementos que posee. Los resultados muestran que en la segunda pregunta sólo el 47% contestó bien al primer intento y el 22% lo hizo al segundo intento, en la tercera pregunta el 53% dio la respuesta correcta al primer intento y el 28% necesitó un segundo intento. Todo parece indicar que a los alumnos se les dificulta la interpretación, generando un nivel más bajo que en el resto de las preguntas. Ver figura 4.37.



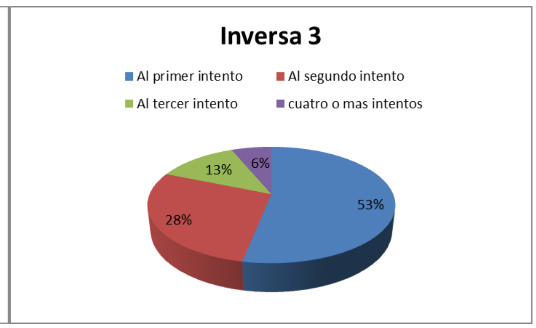


Figura 4.37. Preguntas para la operación inversa

Desempeño

El puntaje máximo para esta lección es de 23 puntos, pues es un punto por cada pregunta, y según los tipos de respuesta y el grado de dificultad de cada pregunta, consideramos un puntaje mínimo de 18 puntos para suponer que el alumno ha completado con éxito el ciclo. Este puntaje se determina sumando las preguntas de control más un puntaje extra por las veces en que se recurre a 3 o más intentos. Con esto podemos tener un indicador de si el alumno la mayor parte de las veces recurrió a lo más a dos intentos para contestar correctamente, y en consecuencia de si está o no realizando las actividades acertadamente.

Al hacer el análisis de los resultados obtenidos por los 32 alumnos participantes en esta primera parte de la lección, alrededor del 85% logró rebasar el puntaje mínimo establecido, dentro de los cuales el 54% obtuvo un puntaje final de 20 puntos en adelante como puntaje final. Esto refleja un avance significativo, aun cuando su preparación matemática no era la deseable. Ver figura 4.38.

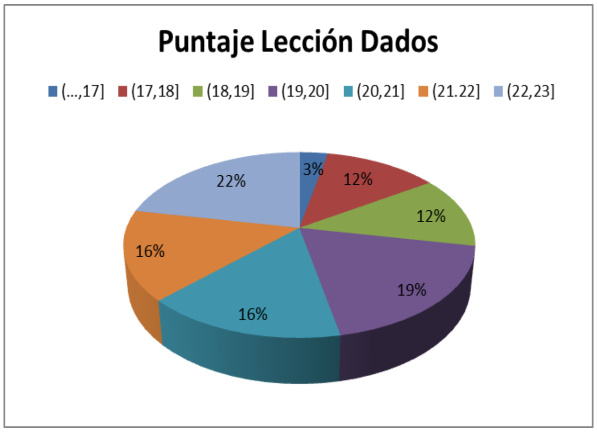


Figura 4.38. Puntaje final de la primera parte de lección basada en dados.

Análisis estadístico de la lección basada en dados (segunda parte).

El propósito en esta segunda parte, es que el estudiante estime el valor de probabilidad, mediante el enfoque frecuencial, para tal estimación y, apoyándose en la frecuencia relativa que aparece en la realización repetidamente de un experimento. Para la realización de esta experiencia, hemos divido la actividad en 6 bloques con cierto número de repeticiones del experimento. Los primeros 4 bloques tienen el propósito de servir con fines indicativos, tanto a los alumnos como al profesor de cómo se percibe su desempeño en las actividades propuestas. Los últimos dos bloques valoran las respuestas dadas a las preguntas, con la intención de medir si se están comprendiendo los objetivos que se persiguen. Al final se contesta la pregunta planteada en la actividad original que da origen a toda la lección.

Aunque los primeros 4 bloques no son valorados, estos son propuestos como un trabajo que le permitirá al estudiante por una parte hacer uso de conceptos matemáticos anteriores para iniciar la comprensión de los nuevos conceptos matemáticos; y por otro lado el aprender a hacer experimentación probabilística. Se incluyen algunas preguntas que pretender detectar el uso del sesgo determinista y de representatividad.

En esta segunda parte de la lección, participan nuevamente los mismos estudiantes que realizaron la primera parte ya analizada. La actividad llevada a cabo en cada uno de los bloques es similar, salvo en ciertas preguntas del primer bloque donde se permite un segundo intento. La medición de las respuestas en los dos últimos bloques se lleva a cabo asignando un punto si contestan correctamente, (medio punto si contestan bien en un segundo intento en solo un par de preguntas), y cero puntos si no se responde correctamente. Esta manera de evaluar se decide así, tomando en consideración que por el trabajo realizado en la primera parte, y lo realizado en los primeros 4 bloques, los alumnos han ido depurando las deficiencias que tenían de sus conocimientos previos, por lo que deben reflejar una mejora en las respuestas. La lección presenta el siguiente planteamiento: *"María y Jorge lanzan un dado y eligen el 2 y 5 respectivamente, debido a que son sus números favoritos. ¿Qué número tendrá más posibilidades de salir al lanzar el dado?".* Para contestar esta pregunta, primero se realizan las siguientes actividades.

Como ya se mencionó, el trabajo está particionado en 6 bloques.
A continuación se muestran las preguntas y actividades contenidas en el primer bloque, y la de los restantes bloques, que sólo difieren del primer bloque en algunas preguntas. También se presenta el análisis estadístico de los resultados obtenidos, en base a las respuestas dadas por los alumnos de los dos últimos bloques.

Bloque 1

En este primer bloque se trabaja con el simulador y se lanza un dado 50 veces en la primera actividad, y se realizan las siguientes preguntas, para fijar ideas se muestra en la figura una experiencia de 50 lanzamientos a la que se refieren las preguntas.

1. *Para comenzar, recordemos el espacio muestral para este experimento (Descríbelo en forma de conjunto)*
2. *¿Se parecen las frecuencias relativas de los distintos valores?*
3. *¿Qué resultado ocurrió con mayor frecuencia?*
4. *¿Qué resultado ocurrió con menor frecuencia?*
5. *¿Cómo consideras la variabilidad entre el resultado con mayor frecuencia y el de menor frecuencia?*
6. *Si volvieras a repetir el experimento igual número de veces, ¿Ocurrirá lo mismo? Hazlo y comprueba tu respuesta.*

7. *En base a lo observado, ¿qué número crees que tendría más posibilidades de salir si volvieras a lanzar el dado?*
8. *Si lanzamos el dado con el número 6 hacia arriba, ¿influye para que una de las caras sea más probable de salir?*
9. *¿Serán suficientes las 50 repeticiones hechas para predecir qué resultado tiene más posibilidades de ocurrir?*
10. *De acuerdo a lo observado, ¿Qué número tendrá más posibilidades de salir al lanzar el dado, el de María o Jorge?*
11. *Considerando el experimento de lanzar un dado ¿cuál será la frecuencia relativa de que salga el número 1?*

Bloque 2

En este segundo bloque se trabaja con el simulador y se lanza el dado 100 veces y a partir de este bloque, todos los bloques estarán conformados por 13 preguntas en las que se encuentran preguntas de identificación de sesgos como el de representatividad y el determinista, para fijar ideas se muestra en la figura una experiencia de 100 lanzamientos a la que se refieren las preguntas.

Las preguntas realizadas son las mismas de la experiencia anterior, salvo las últimas dos que se agregan:

1. *Para comenzar, recordemos el espacio muestral para este experimento (Descríbelo en forma de conjunto)*
2. *¿Se parecen las frecuencias relativas de los distintos valores?*
3. *¿Qué resultado ocurrió con mayor frecuencia?*
4. *¿Qué resultado ocurrió con menor frecuencia?*
5. *¿Cómo consideras la variabilidad entre el resultado con mayor frecuencia y el de menor frecuencia?*
6. *Si volvieras a repetir el experimento igual número de veces, ¿Ocurrirá lo mismo? Hazlo y comprueba tu respuesta.*
7. *En base a lo observado, ¿qué número crees que tendría más posibilidades de salir si volvieras a lanzar el dado?*

8. *Si lanzamos el dado con el número 6 hacia arriba, ¿influye para que una de las caras sea más probable de salir?*
9. *¿Serán suficientes las 50 repeticiones hechas para predecir qué resultado tiene más posibilidades de ocurrir?*
10. *De acuerdo a lo observado, ¿Qué número tendrá más posibilidades de salir al lanzar el dado, el de María o Jorge?*
11. *Considerando el experimento de lanzar un dado ¿cuál será la frecuencia relativa de que salga el número 1?*
12. *¿Cómo consideras que es la diferencia entre el resultado con mayor frecuencia y el de menor frecuencia?*
13. *¿Cómo fue la diferencia actual entre el resultado con mayor frecuencia y el de menor frecuencia, respecto a la del bloque anterior?*

Bloque 3

En el tercer bloque se lanza el dado 500 veces y se realizan las mismas preguntas, salvo la pregunta 11 que modifica el valor del dado. *Da una estimación de la probabilidad de que al lanzar un dado resulte ser 2.*

Bloque 4

En el cuarto bloque se trabaja con el simulador y se lanza el dado 1000 veces, y se realizan las mismas preguntas, salvo la pregunta 11 que modifica el valor del dado. *Da una estimación de la probabilidad de que al lanzar un dado resulte ser 6.*

Bloque 5

En el quinto bloque se trabaja con el simulador y se lanza el dado 5000 veces, y se realizan las mismas preguntas, salvo la pregunta 11 que modifica el valor del dado. *Da una estimación de la probabilidad de que al lanzar un dado resulte ser 4.*

Bloque 6

En el sexto bloque se trabaja con el simulador y se lanza el dado 10000 veces, y se realizan las mismas preguntas, salvo la pregunta 11 con la que se concluye el objetivo principal de la lección. *¿Cuál será la probabilidad de que el número resultante sea el de María? ¿Sea el de Jorge? (Da tu respuesta en forma decimal con tres dígitos de aproximación).*

Descripción del trabajo realizado por los estudiantes.

Del total de los alumnos participantes en esta lección, aproximadamente el 22% no realizó la segunda parte debido a problemas técnicos que se dieron en esos momentos (saturación del servidor y estudiantes que tenían otros compromisos).

Análisis general del bloque 5.

En este bloque como el tamaño de la muestra ya no es pequeña, se realiza una valoración de cada una de las preguntas que conforman el bloque, por lo que de acuerdo a la figura 4.39, el puntaje mínimo obtenido fue de 8 puntos, y el valor que más predominó fue el de 12 puntos, y el promedio que se obtuvo fue de 11 puntos. Lo que nos refleja que la mayor parte de los alumnos han tenido un buen desempeño en la realización de las actividades propuestas.

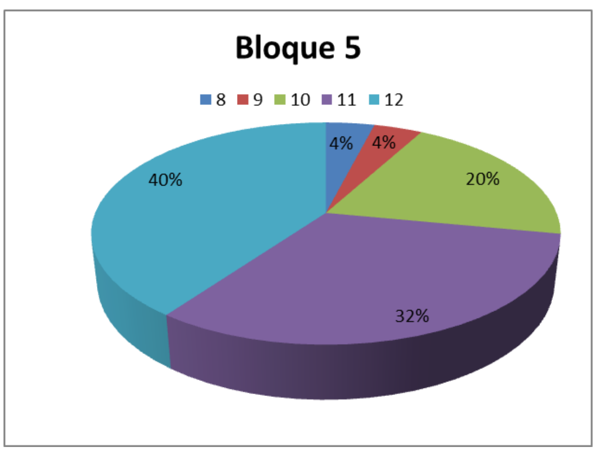


Figura 4.39. Desempeño en el bloque 5.

Análisis general del bloque 6.

Continuando con la valoración, el 8% de los alumnos obtuvo sólo 7 puntos, pero el resto obtuvo 10 o más puntos. El puntaje que más predominó fue el de 12 y el promedio en general fue de 11.04%, lo que nuevamente hace notar un buen trabajo de las actividades. Ver figura 4.40.

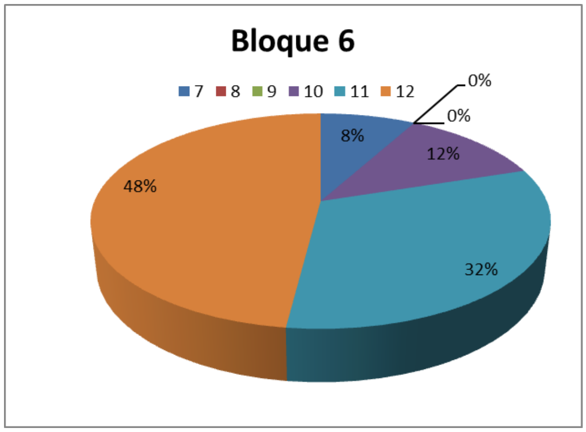


Figura 4.40. Desempeño en el bloque 6.

Desempeño general.

El puntaje máximo para esta segunda parte de la lección es de 27 puntos, pues ambos bloques son de 13 puntos más un punto por la pregunta del espacio muestral. Podemos concluir de acuerdo a las evaluaciones obtenidas en los últimos dos bloques, que cerca del 90% tuvo un buen desempeño. De manera desglosada, su desempeño se muestra a continuación.

Análisis por actividad.

Espacio muestral.

El 100% contestó correctamente. Esto nos indica que ya relacionan conjunto con espacio muestral, además de uso de la notación correcta. Ver figura 4.41.

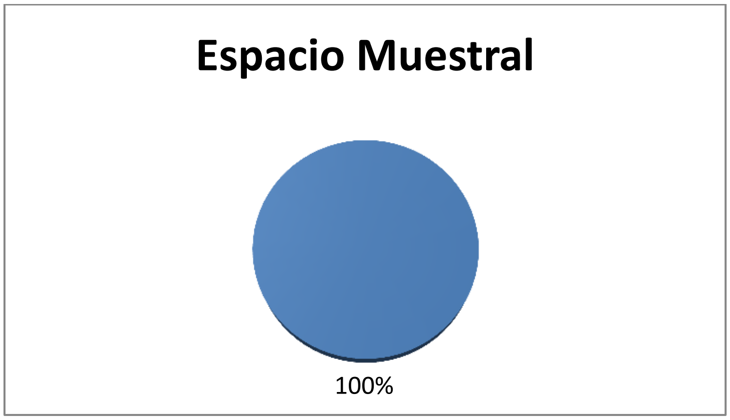


Figura 4.41.

Comparación de frecuencias relativas.

La mayor parte hace una buena comparación entre los valores de las frecuencias relativas en juego. Ver figura 4.42.

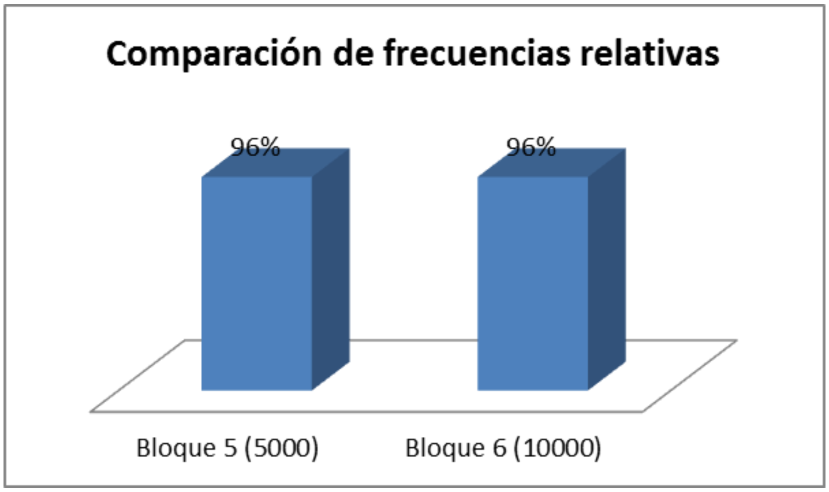


Figura 4.42.

Aproximación numérica.

El total de estudiantes identificó que las frecuencias relativas de todos los posibles resultados se aproximan a cierto valor. Ver figura 4.43.

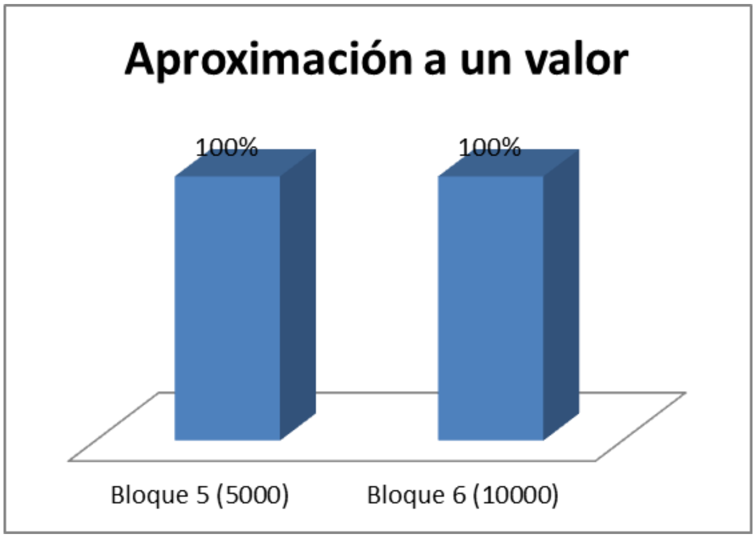


Figura 4.43.

Identificación de valores extremos.

La mayoría identificó los valores extremos de los valores frecuenciales. Ver figuras 4.44 y 4.45.

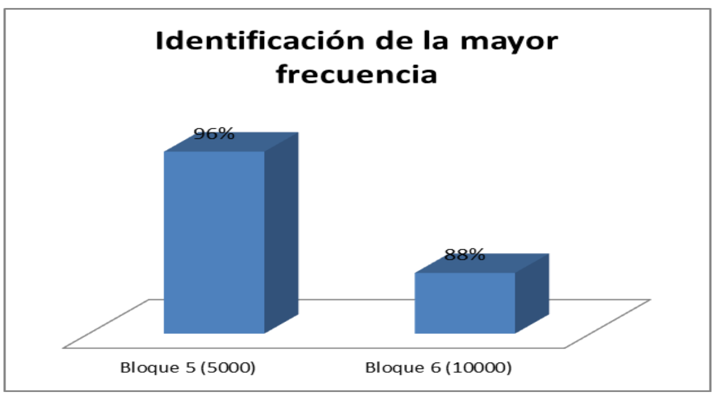


Figura 4.44.

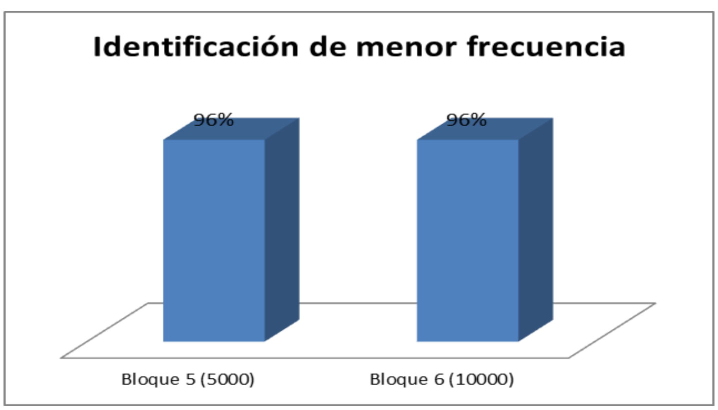


Figura 4.45.

La pregunta 8 incluida en todos los bloques, fue diseñada para detectar el sesgo determinista, pues induce al alumno que posee el sesgo a pensar que de alguna manera, ésta situación (causa) afectaría a la aleatoriedad del experimento (efecto). El porcentaje de respuestas correctas fue de 84% en el primer bloque, 92% en el segundo bloque y de 96% en los restantes bloques. Esto nos indica que aunque fue bajo el porcentaje de estudiantes que recurrieron al sesgo para responder (16%) la primera vez, se notó que el porcentaje disminuyó al 4% conforme avanzaron en los siguientes bloques. Ver figura 4.46.

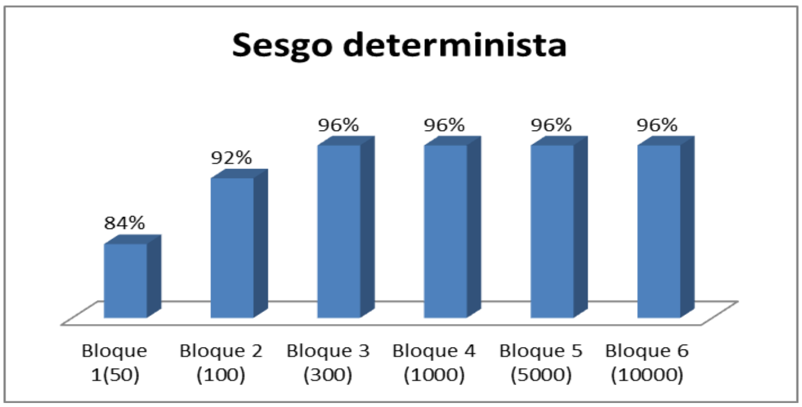


Figura 4.46.

La pregunta 9 incluida en todos los bloques fue diseñada para detectar el sesgo de representatividad, específicamente la insensibilidad al tamaño de la muestra, cuando se tenían repeticiones de tamaño 50, 100, 500, y 1000 del experimento aleatorio (creencia de que una muestra debería reflejar la distribución de la población de la que se obtiene, sin embargo, esta heurística no tiene en cuenta el tamaño de la muestra en el momento de realizar las inferencias inductivas y la variabilidad de las pequeñas muestras dando respuestas con explicaciones causales). Para los primeros 4 bloques dice así: Con 50, 100, 500 y 1000 repeticiones ¿Tendrías suficiente certeza de qué resultado tiene más posibilidades de ocurrir? El porcentaje de respuestas correctas fue de 16% en el primer bloque, de 76%, 84%, 84%, 88% y 88% en los bloques restantes. Lo cual nos muestra que en un principio el sesgo fue fuerte y después con ayuda de la retroalimentación, disminuyó considerablemente, como se muestra en la figura 4.47.

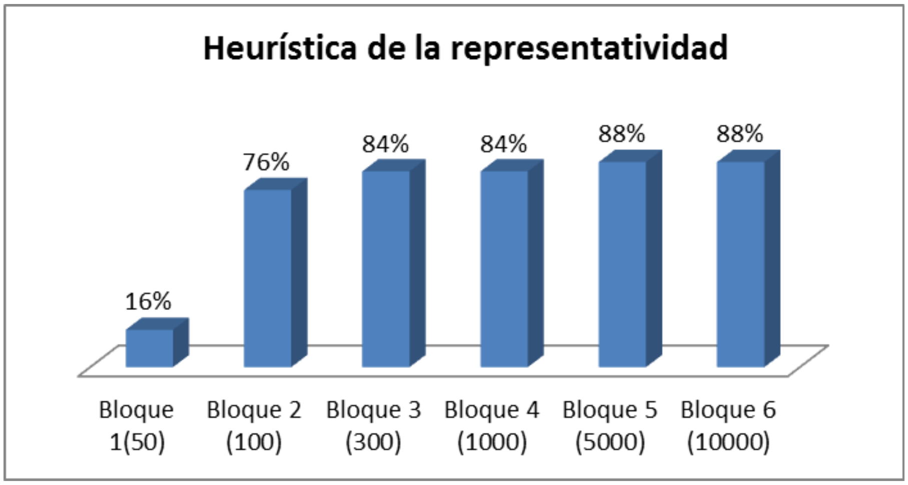


Figura 4.47. Comportamiento del uso de la heurística de la representatividad.

Conclusiones respecto a la lección basada en dados.

Podemos decir de manera general que la aplicación de esta lección reflejó un buen desempeño de parte de la mayoría de los estudiantes que participaron, pues a pesar de que el pre-test nos mostraba que teníamos a un grupo de alumnos de ninguna manera diferente a cualquier otro grupo que va a iniciar un primer curso de probabilidad, es decir, con muchas deficiencias en conocimientos previos de matemáticas, principalmente conjuntos y aritmética de fracciones, los resultados rebasaron nuestras expectativas, pues la mayor parte de ellos consiguió realizar con éxito la mayor parte de las actividades, en uno o dos intentos a lo más. Consideramos que varias de las razones que condujeron a un buen desempeño en los alumnos, fueron recomendaciones didácticas incluidas en el sistema, como la retroalimentación que se les proporciona, el ponerlos a trabajar preguntas y problemas en los que de manera frecuente debían hacer uso de los mismos conceptos, la ayuda y medición continua que les da el EVA, así como el iniciar el aprendizaje con preguntas sencillas y que gradualmente fueron aumentado de complejidad. Igualmente cabe destacar, que el sistema probó ser amigable; pues los estudiantes interactuaron con facilidad con la interfaz, a tal grado de que casi las intervenciones de ayuda fueron escasas.

Análisis estadístico de la lección basada en monedas (primera parte).

Nuevamente esta lección está dividida en dos partes, en la primera se trabajan los conceptos de experimento aleatorio, espacio muestral, eventos, propiedades de eventos, mientras que en la segunda parte se cubren los conceptos de espacio muestral (nuevamente), frecuencia relativa, variabilidad, y definición de probabilidad bajo el enfoque frecuencial. Aquí por dificultades imprevistas del laboratorio solo se aplicó la primera parte.

Como ya se mencionó, la evaluación de las respuestas está basada en el número de intentos que el alumno hace para resolver correctamente lo que le soliciten, de acuerdo a esto, se le asigna un cierto puntaje a la respuesta, la cual varía de 1 a 1/n, donde n es el número de intentos, o uno o cero en el caso en que la pregunta solo tenga dos opciones de respuesta. Para el tratamiento estadístico se toma el número de intentos de la siguiente manera: Uno si contesta correctamente al primer intento, dos, si lo hace en dos intentos, tres si lo logra en tres intentos, y cuatro si necesita 4 o más intentos. El análisis se hace por conceptos.

El enunciado del problema original dice así: *"Dos amigos, Pepe y Juan juegan a lanzar una moneda cada uno. Pepe tiene una moneda de $1 y Juan de $5. Pepe opina que saldrá el resultado sol, y sol; y Juan que saldrá el resultado un sol y una águila, indistintamente. ¿Quién tendrá más posibilidades de ganar? Para contestar esta pregunta, primero hagamos las siguientes actividades." S*iguiendo las siguientes preguntas:

1. *¿En qué consiste el experimento?*
2. *¿Es un experimento aleatorio?*
3. *¿Por qué es aleatorio? (si lo consideras marca más de una opción).*
4. *Utilizando notación de conjuntos y par ordenado, anota todos los posibles resultados del experimento aleatorio.*
5. *Describe el subconjunto formado por los resultados que favorecen a Pepe.*
6. *Describe el subconjunto formado por los resultados que favorecen a Juan.*
7. *Describe el subconjunto formado por los resultados que no favorecen a Juan.*
8. *Describe el subconjunto formado por los resultados que no favorecen a Pepe.*
9. *Describe el subconjunto formado por los resultados que favorecen a alguno de los dos.*
10. *Describe el subconjunto formado por los resultados que no favorecen a Juan ni a Pepe.*

11. *¿Cómo estaría formado el subconjunto que nos asegure que contiene a cualquiera de los posibles resultados del experimento? Descríbelo.*
12. *Describe el subconjunto formado por ninguno de los posibles resultados al lanzar las monedas.*

    Si Pepe ahora apostará al resultado (a,a).
13. *¿Cuál sería el subconjunto de resultados que no favorecen a Pepe?*
14. *Describe el subconjunto formado por los resultados que no favorecen a Juan ni a Pepe.*
15. *Describe el subconjunto formado por los resultados que favorecen a Juan o a Pepe.*
16. *Observa el siguiente subconjunto y respecto al planteamiento original de la situación, di* que puede representar: {(a,a), (a,s), (s,a)}

Experimento.

Para este concepto se tiene una pregunta (ítem 1) donde se debe escoger de 4 opciones el experimento que mejor represente al problema, en donde el 56% logró comprender y contestar correctamente la pregunta en el primer intento, 19% en un segundo intento, y un 25% en tres intentos, como se observa en la figura 4.48.

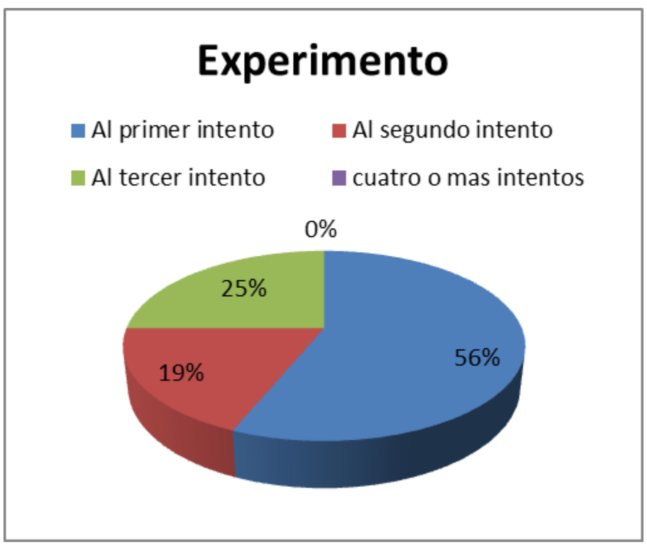


Figura 4.48.

Aleatoriedad.

Al preguntarles a los alumnos si el experimento del problema inicial es aleatorio (ítem 2), el 94% lo hizo correctamente y por las razones correctas, y solo el 6% indicó erróneamente ausencia de aleatoriedad en el experimento. Ver figura 4.49.

Figura 4.49.

Respecto a las razones de aleatoriedad (ítem 3), el 88% al primer intento argumentó de manera correcta las razones del porqué de la aleatoriedad. Ver figura 4.50.

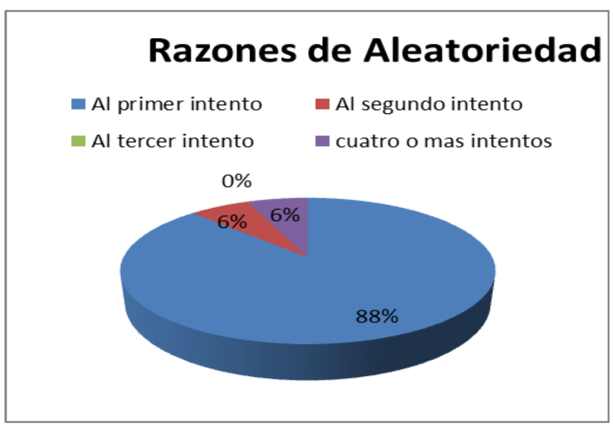


Figura 4.50.

Espacio muestral.

La pregunta diseñada para el concepto de espacio muestral (ítem 4), muestra resultados lamentables, fue la más baja en toda esta lección puesto que solo el 19% que contestó correctamente al primer intento, el 6% contestó bien al segundo intento, y el 75% necesitó de 4 o más intentos para contestar correctamente. De la observación personal, en esta actividad, se pudo constatar que fundamentalmente la dificultad consistió en que los estudiantes no tenían manera de expresar su respuesta, pues carecían de la notación de pareja ordenada. Ver figura 4.51.

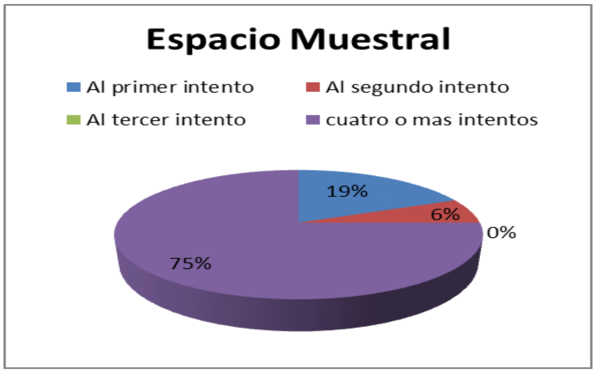


Figura 4.51.

Evento simple.

Este concepto está representado por una pregunta (ítem 5) en contexto con el problema y su forma de respuesta es por medio del teclado, el 37% contestó bien al primer intento, mientras que un 19% al segundo intento, mientras que otro 19% contestó bien al tercer intento, y el 25% en 4 o más intentos. Ver figura 4.52.

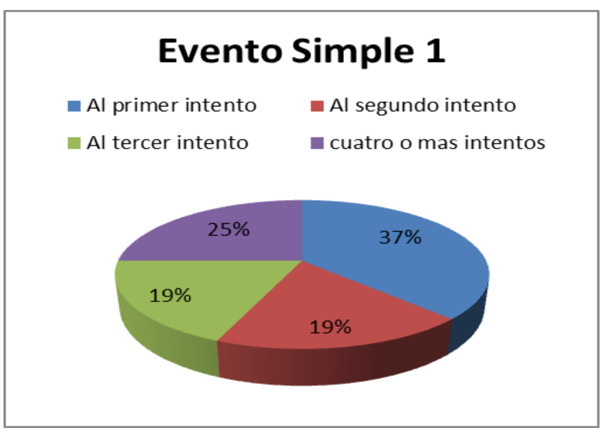


Figura 4.52.

Evento compuesto.

Se colocó una pregunta referente al evento compuesto (ítem 6), en la que los alumnos deben proporcionar el conjunto adecuado al evento planteado. La respuesta a esta pregunta es por medio de un conjunto que se introduce a través del teclado. El 32% de los alumnos contestó correctamente en un primer intento, el 31% al segundo y tercer intento y sólo el 6% necesito de 4 o más intentos. Ver figura 4.53.

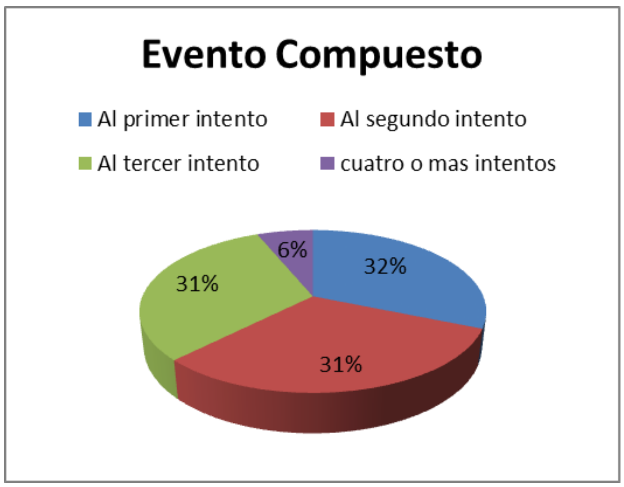
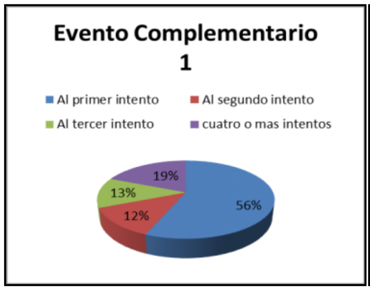


Figura 4.53

Evento complementario.

Para trabajar este concepto se usan los eventos simples generados en preguntas anteriores pidiendo de manera explícita el complemento de éstos, la respuesta debe darse por medio del teclado, se diseñaron 5 preguntas (ítems 7, 8, 10, 14 y 15) de las cuales, en la primera el 56% contestó bien al primer intento, el 16% lo hizo en el segundo intento. Para la segunda pregunta, el 75% contestó correctamente al primer intento, y el 12% lo logró al segundo intento. Para la tercera pregunta, el 81% contestó bien en el primer intento y el resto que son el 19% lo hizo al segundo intento. En la cuarta pregunta, el 94% contestó correctamente al primer intento, y el 6% al segundo intento. En la quinta pregunta, el 69%

contestó bien al primer intento, mientras que el 19% lo hizo al segundo intento, un 12% lo logró en 4 o más intentos. Ver figuras 4.54, 4.55, 4.56, 4.57 y 4.58.



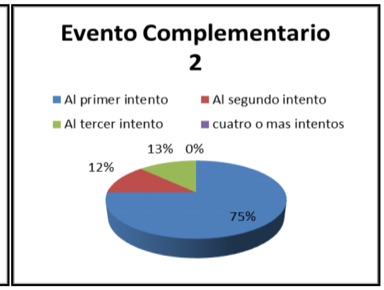
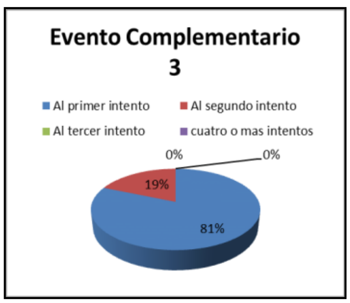
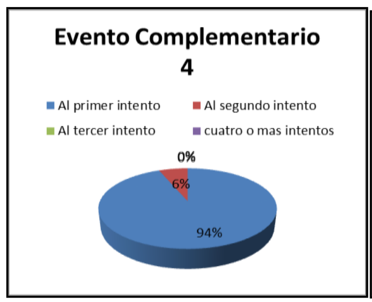


Figura 4.54. Figura 4.55.





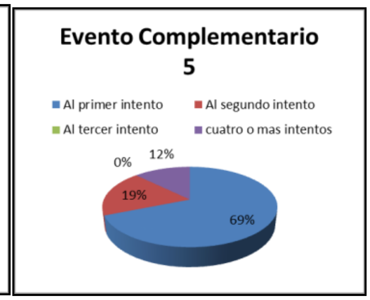
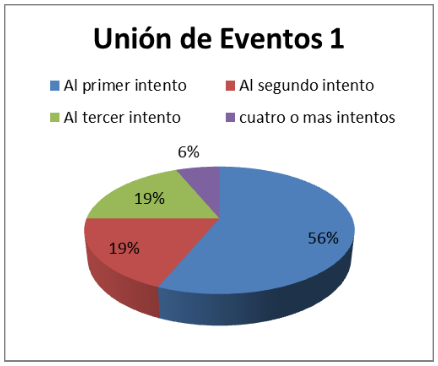


Figura 4.56 Figura 4.57 Figura 4.58

Unión de eventos.

Para crear la unión de eventos se usan al igual que para el complemento, algunos de los eventos simples ya trabajados en preguntas anteriores, los resultados muestran que a los alumnos se les complicó llegar a la respuesta correcta en la primera pregunta (ítem 9), pues el 56% lo hizo bien al primer intento, el 19% lo hizo al segundo intento, y el 25% necesitó de 3 o más intentos para contestar correctamente. Mientras en la segunda pregunta (ítem 14) fue más fácil para los alumnos, pues el 87% contestó correctamente al primer intento, y el 13% lo consiguió al segundo intento. Ver figuras 4.59 y 4.60.



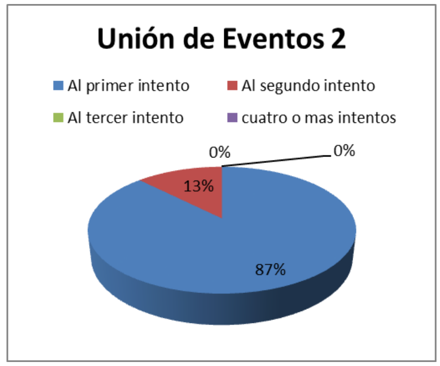


Figura 4.59. Figura 4.60.

Evento nulo.

La probabilidad cero, está asociada a dos tipos de eventos; el evento imposible y el evento improbable. En ambos casos se considera que la probabilidad se asocia a un evento sin resultados posibles o un conjunto vacío. A este evento le llamaremos evento nulo.

Debido a que todas las actividades se hacen en base al problema planteado al inicio de la lección, como lo sugiere la didáctica elegida, se inicia sin darles el concepto. Cuando se busca el desarrollo del evento nulo (ítem 12), este trae consigo fuertes dificultades de interpretación y de notación, lo que se refleja en los resultados obtenidos, pues a pesar de proporcionarles en todo momento una ayuda referente a la notación de conjuntos. Sólo el 25% logró contestar bien al primer intento, y 56% lo hizo al segundo intento. El 19% de los alumnos necesitaron de 3 o más intentos para dar la respuesta correcta que es el evento nulo o imposible. Ver figura 4.61.

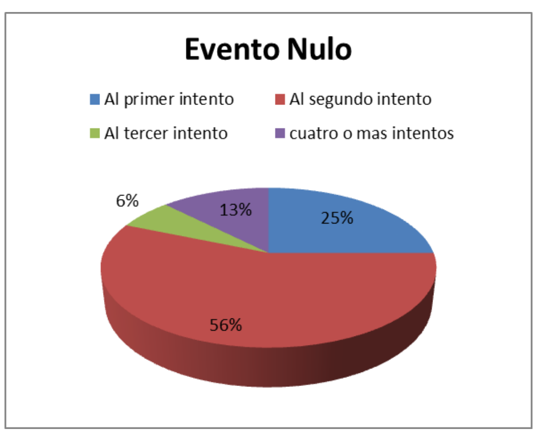


Figura 4.61.

Evento para uso de la operación inversa.

Esta parte de la lección a la que llamamos la operación inversa se valora por medio de una pregunta (ítem 16), el 62% contestó correctamente a la primera, el 13% al segundo intento, mientras que el 25% necesitó de 3 o más intentos. Todo parece indicar que a los alumnos se les dificulta la interpretación, generando un nivel más bajo respuestas. Ver figura 4.62.

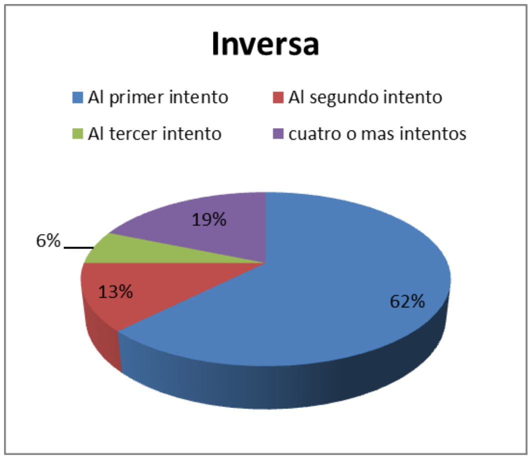


Figura 4.62.

Desempeño alcanzado

El puntaje máximo para esta lección es de 16 puntos, pues es un punto por cada pregunta, y se consideró un puntaje mínimo de 10 puntos para suponer que el alumno está respondiendo bien la lección. Este puntaje se determina sumando las preguntas de control más un puntaje extra por las veces en que se recurre a 3 o más intentos. Con esto se pretende detectar si el alumno recurrió la mayor parte de las veces a lo más de dos intentos para contestar correctamente.

Al hacer el análisis de los resultados obtenidos por los 16 alumnos participantes en esta lección, alrededor del 94% logró rebasar el puntaje mínimo establecido, dentro de los cuales el 69% obtuvo un puntaje de más de 11 puntos y un 19% un puntaje final entre 13 y 16 puntos. Ver figura 4.63.

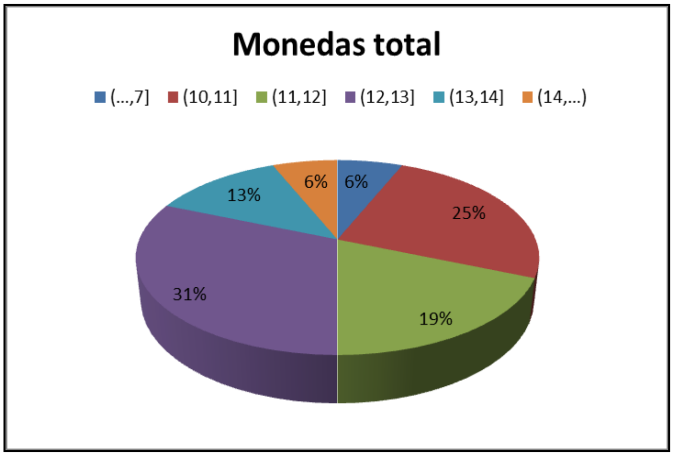


Figura 4.63 Puntaje final de la primera parte de lección basada en monedas.

Conclusiones respecto a la lección basada en monedas.

De acuerdo al análisis estadístico efectuado, hemos visto que al aumentar la complejidad del problema, aumentaron las dificultades para contestar correctamente, aun así, podemos decir que el aprovechamiento de su desempeño en general nuevamente ha sido aceptable, tomando en consideración que sólo la notación a manejar fue lo que se les complicó durante una buena parte de la lección, sin embargo, al final la hicieron suya y eso ayudó a mejorar su puntaje final. Esto también nos permite afirmar que se fue dando una mejora en sus conocimientos previos.

4.3.2 Interpretación de resultados.

Analizaremos los resultados obtenidos en las lecciones por cada concepto trabajado.

Primera parte

Experimento

El concepto de experimento trabajado en las dos lecciones no causó mucho problema, sin embargo, en el contexto de las monedas, encontramos más confusión entre los alumnos pero no de manera grave.

Aleatoriedad.

Las preguntas referentes a este concepto piden de manera directa que se indique si existe o no aleatoriedad en el experimento asociado al problema, y en la pregunta que aparece inmediatamente después, el alumno debe elegir la razón correcta de esta aleatoriedad, los resultados muestran que si realizan correctamente esta actividad, aunque los pocos alumnos que tuvieron errores, se dan cuenta rápido y lo corrigen satisfactoriamente una vez que se les muestra la retroalimentación.

Espacio muestral.

El concepto de espacio muestral fue el que más produjo dificultades, y con mayor gravedad en el contexto de las monedas debido a que en esta lección se necesita además de la notación de conjunto, también la notación de par ordenado, lo que lleva a mayores opciones de error, otro aspecto más que pudo haber afectado es la interpretación de todos los elementos de este espacio muestral, pues se deben dar cuenta de que el resultado (s,a) no es el mismo que (a,s).

Evento simple.

El evento simple es el primer evento que aparece y que se trabaja en ambas lecciones, lo que ocasionó bajos resultados en sus primeras preguntas asociadas, pero en las posteriores la comprensión mejoró considerablemente, estas preguntas se plantean a través de su interpretación y el alumno debe introducir el conjunto adecuado que representa al evento por lo que de nuevo pueden presentarse los mismos errores que para el concepto de espacio muestral.

Evento complementario.

Para el concepto de evento complementario, la situación es similar a la del concepto de evento simple, con la diferencia de que éste se trabaja por medio de más preguntas por lo que se va notando la mejora conforme se van trabajando en el transcurso de las lecciones, además, para poder llegar a este concepto, ya anteriormente durante la lección, se trabajó el evento del que se obtiene este complementario.

Unión de eventos.

Al trabajar unión de eventos en la situación basada en monedas, la comprensión de los alumnos fue buena, lograron proporcionar el conjunto adecuado que la representara, pero en el contexto de las monedas, la primera vez que se trabajó, los resultados muestran que hubo algunas dificultades, lo que nos lleva a pensar que los alumnos sí logran interpretar la unión pero la notación es la que más se dificulta.

Evento nulo.

El evento nulo es uno de los conceptos más complicados para los alumnos, consideramos que una de las razones es porque no encuentran de manera rápida mucha relación con mundo real, los resultados nos muestran que no comprenden este concepto independientemente del contexto en el que se les presente, tanto la notación como la interpretación no son bien comprendidos.

Evento compuesto.

Este concepto es comprendido correctamente una vez que se trabaja por primera vez, los alumnos pueden asociar de manera rápida a los elementos que deben constituir al conjunto que representa a la situación planteada que hace referencia a un evento compuesto.

Evento para uso de la Operación inversa.

Se trabajaron eventos en el que se hiciera uso de la operación para trabajar en el alumno la mejor comprensión del concepto, pues cuando logra realizar la operación inversa hace suyo el concepto y está aprendiendo.

Segunda parte

Variabilidad

Contamos con una pregunta en cada bloque de la lección respecto a la variabilidad entre el resultado con mayor frecuencia y el de menor frecuencia, que al evaluar esta pregunta se da una breve explicación del concepto buscando que el alumno se vaya dando cuenta de que conforme aumenta el número de repeticiones, la variabilidad va siendo menor. Pero los resultados en este concepto siempre fueron de los más bajos, aunque mejoran poco a poco con cada bloque, lo que nos lleva a seguir trabajando para buscar mejorar la enseñanza de este concepto.

Probabilidad bajo el enfoque frecuencial

La pregunta: de acuerdo a lo observado, ¿Qué número tendrá más posibilidades de salir al lanzar el dado, el de María o Jorge? Hace referencia a ir buscando la probabilidad frecuencial de los resultados y comparar estas probabilidades, los tipos de errores en esta pregunta pueden ser muy variados, como no observar correctamente la experimentación, dar un resultado que aunque sea el que más apareció no sea ni el de María ni el de Jorge, no notar la tendencia de los resultados, etc., esto se refleja en los bajos resultados de los primeros bloques, pero para los últimos, ya notan la tendencia correcta.

Sesgo determinista

Para identificar el sesgo determinista se propuso la siguiente pregunta: “Si lanzamos el dado con el número 6 hacia arriba, ¿cuál de las caras es más probable de salir?” en la cual la frase “Si lanzamos el dado con el número 6 hacia arriba” induce al alumno que posee el sesgo a pensar de forma determinista y que afectaría a la aleatoriedad del experimento. La mayoría no recurrió al sesgo, pero de la proporción que si lo hizo, conforme se va trabajando en los siguientes bloques, va disminuyendo considerablemente.

Heurística de la representatividad

La intención de diseñar esta parte de la lección en bloques es precisamente para buscar disminuir en los alumnos esta heurística y hacerles ver que una muestra pequeña no siempre reproduce todas las características de la población, en este caso, pocas repeticiones no proporcionan buena información de la probabilidad. Sin embargo, a partir de repeticiones que pueden ser consideradas grandes (por ejemplo, n = 5000) les ayuda a notar que repeticiones grandes no son 30 o 40, sino valores mucho más grandes. Para ir evaluando esta heurística se colocó la pregunta "Con 50 (100) repeticiones ¿Tendrías suficiente certeza de qué resultado tiene más posibilidades de ocurrir?" que nos muestra que los alumnos sí llegan con esta heurística, pero gracias a la retroalimentación y al trabajo, logran disminuir esta creencia considerablemente.

4.4 CONCLUSIONES FINALES RESPECTO AL CAPÍTULO.

Finalizamos el capítulo haciendo ver que el grupo de estudiantes que nos apoyó probando las lecciones desarrolladas no fue un grupo excepcional, más bien fue un grupo normal del nivel medio superior, al menos de preparatorias de la propia universidad. Llegaron con fuertes deficiencias en los conocimientos que son fundamentales para iniciar un primer curso de probabilidad como son conjuntos y aritmética de fracciones, así como notación en producto cartesiano. Con esto como antecedente podía preverse un mal desempeño de parte de los alumnos, pero por lo ya mostrado en nuestros análisis estadísticos, la mayoría logró hacer un buen papel con la única ayuda que le proporcionó el sistema. Desde que las lecciones empezaron a ser probadas por estudiantes del nivel medio superior primero de manera aislada, y en esta ocasión con un grupo de alumnos de primero, segundo y tercer año, tal vez no muy numeroso de nuestras preparatorias, pero fueron los estudiantes que pudieron prestarnos, siempre tuvimos la confianza de que no solo lograrían alcanzar el puntaje mínimo de las lecciones, sino que una mayoría debería estar más cerca del puntaje máximo. Esta primera evaluación nos hace ver de manera más formal que no vamos por un rumbo equivocado en nuestra propuesta didáctica. Es decir, nuestras lecciones pueden ser una buena alternativa para promover el aprendizaje de la probabilidad de manera significativa a nivel medio superior.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

RESULTADOS

Se culmina la exposición del trabajo de tesis, primeramente mostrando los resultados que fueron obteniéndose durante el desarrollo del trabajo y se termina presentando una serie de conclusiones. Uno de los resultados más importantes es que el trabajo desarrollado fue aplicado en estudiantes a los que va orientado el trabajo, obteniendo resultados favorables que son indicadores que vamos por buen camino, y aunque por el momento se ha probado en un grupo no muy numeroso, se pretende seguir probándolo en más estudiantes del mismo nivel, teniendo como objetivo el depurar, crecer y mejorar este primer prototipo, esperando que a mediano plazo, pueda estar disponible para todo estudiante que tenga interés en complementar su aprendizaje de probabilidad y para todo maestro de nivel medio superior que esté interesado en disponer de una alternativa didáctica para el estudio de la probabilidad bajo un ambiente virtual. En un principio buscaremos hacerlo en nuestra universidad, y más adelante iniciar una expansión que por el momento sería difícil de pronosticar.

Antes de iniciar el desarrollo de las lecciones era necesario conocer cuáles eran los conocimientos matemáticos de los alumnos en cuestión, por lo que nos dimos a la tarea de investigar y crear una metodología para la realización de un pre-test que nos proporcionara la información deseada, esta investigación concluyó con la obtención de un instrumento de tipo diagnostico para aplicarse en línea cada que se necesite, incluido en el EVA que soporta también a nuestras lecciones, diseñado para identificar la existencia de dificultades en los conceptos de: definición y notación de conjuntos y subconjuntos, operaciones con conjuntos, producto cartesiano, n-ada, aritmética de números fraccionarios, decimales y exponentes, combinaciones y permutaciones, conocimientos necesarios para el aprendizaje de los primeros conceptos de probabilidad. Estos resultados fueron divulgados por medio de un artículo publicado en el libro Contribuciones a la Enseñanza y Aprendizaje de la Probabilidad y la Estadística 2010 con ISBN: 978-607-487-245-3. Una vez desarrollado este pre-test, fue importante analizar ¿qué tanto influyen los conocimientos previos de matemáticas en el aprendizaje de los conceptos básicos de probabilidad?, logrando su implementación y aplicación a una muestra de 36 alumnos de nivel medio superior, corroborando que dichas dificultades investigadas primeramente a nivel internacional (Del

Puerto, Minnaard y Seminara, 2004; Venturiello, 2008), persisten también en esta muestra, obteniendo que los conceptos en los que se nota mayor deficiencia son: notación de conjuntos, algunas de sus operaciones como intersección, y el uso de combinaciones o permutaciones, posterior a este análisis se aplicaron un par de lecciones de probabilidad en su primera parte, mismas que fueron descritas en este trabajo, para conocer el grado de impacto que pueden tener estos conocimientos previos en el aprendizaje de los básicos de probabilidad, revelando que los estudiantes que no tenían deficiencias fuertes en conocimientos de matemáticas previos, aunque inicialmente tropezaron, fueron mejorando de manera rápida en su desempeño en las actividades relacionados, mientras que los alumnos que mostraron mayores deficiencias, mostraron mayores dificultades al realizar las mismas actividades, sin embargo, lo notable es que aún así, lograron terminar las lecciones sin intervención nuestra, solo con el soporte que se les proporciona en las lecciones, dichos resultados quedaron plasmados en el libro Contribuciones a la Enseñanza y Aprendizaje de la Probabilidad y la Estadística 2011 con ISBN: 978-607-487-363-4, como cartel en el Encuentro Nacional de Ciencias Luis Rivera Terrazas en septiembre del 2011 y fueron presentados en el XLIV Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana en octubre del 2011. Al considerar los resultados de estos antecedentes, realizamos las lecciones presentadas en este trabajo, divulgadas en el 1er Congreso Internacional de Investigación y Ciencias Educativas y 2do Congreso Regional de Didáctica de las Ciencias en mayo de 2012, ponencia que es incluida en el libro electrónico del evento con ISBN 978-607-7826-20-0 y en el 2do. Encuentro internacional de la probabilidad y la estadística realizado en junio de 2012, en donde se presentó la más reciente versión de la interfaz principal, las lecciones y el pre-test ya descrito, se mostró de igual manera que se aplicaron a un nuevo grupo de estudiantes de nivel medio superior, en el que se revelaron dificultades similares al primer grupo de prueba para el pre-test y en cuanto a las lecciones, se observan mejoras en la comprensión de los conceptos trabajados, así como en la disminución de la heurística de la representatividad y el sesgo determinista. La participación en estos distintos eventos se realizó con el objetivo e interés de contar con una crítica especializada y cierta validación que orientara nuestro trabajo. Próximamente se contempla la publicación de al menos un artículo que muestre parte de los logros que seguimos alcanzando en alguna revista internacional especializada de matemática educativa.

El esfuerzo ha sido agotador, se realizaron diversas versiones de cada parte de las lecciones buscando que se ajustaran mejor al objetivo y a la didáctica en uso. Se realizaron pruebas, cambios y actualizaciones, hasta llegar a la presentación que actualmente tienen las lecciones y que siguen sujetas a futuros cambios.

Los resultados nos muestran que en cada lección es necesario reforzar el aprendizaje de los conceptos que más dificultades han presentado, además de considerar dividir las lecciones en más partes para evitar la desviación de nuestro objetivo que es el que aprendan.

El trabajo computacional que se realiza ha sido enorme para cada aspecto que involucra la incursión de las lecciones en el EVA, cada parte se realizó teniendo una visión del alcance que puede tener la programación, proponiendo alternativas viables para la generación del prototipo, además de contar con la ayuda de un experto en computación.

CONCLUSIONES

Con el uso de las lecciones desarrolladas, los alumnos pueden complementar su aprendizaje en los conceptos aquí trabajados y los profesores pueden apoyar la enseñanza en clase.

El desarrollo de este trabajo ha sido importante, defendiendo una propuesta didáctica que es soporte de este prototipo, creado con ideas de crecimiento. Presentando para la obtención de mi grado, lo que se ha realizado hasta este momento pero con la firme intención de continuar para poder impactar de manera significativa en los jóvenes estudiantes, a los profesores y a todo aquel que desee tener una preparación complementaria en un primer acercamiento con la teoría de la probabilidad y lo que ella involucra en el nivel medio superior. Aunque cada lección ha sido pensada para el nivel medio superior, todas pueden ser ajustadas para ser aplicadas en nivel secundaria y en cursos para profesores en formación, también el nivel intermedio que contiene lecciones con mayor dificultad y complejidad, pueden ser útiles en nivel superior.

Para dar continuidad, se está buscando establecer un convenio de colaboración con los propios profesores de las preparatorias con el objetivo de obtener aportaciones para la creación de más y nuevas lecciones, así como actividades para que una vez desarrolladas, como aquí se ha mostrado, puedan ser aplicadas con sus alumnos apoyando sus clases, pretendiendo que se logren mejores resultados.

¿Qué sigue?

Desde que el proyecto PROBEXP inició, a cada momento surgen nuevas ideas y por consiguiente nuevos cambios. Un conjunto de lecciones por sí solas no serán suficientes para promover el aprendizaje de la probabilidad. Por tal razón en la actualidad se trabaja en la mejora de toda la interfaz del EVA, en la incrustación de una base de datos, y en varios módulos que buscan complementar el trabajo realizado en las lecciones, las cuales están contenidas en un módulo al que se le nombró “Experimentación”. A continuación se describen de manera breve los cambios a que está siendo sujeta la interfaz actual.

A manera de información y para terminar la exposición, Inicialmente se tenía contemplado dividir la interfaz de PROBEXP en diversos módulos que contuvieran a las lecciones. Más adelante se consideró tener un solo módulo para las lecciones didácticas, esto posibilitó agregar otros módulos que refuercen la tarea de aprendizaje. Actualmente la interfaz principal del sistema está compuesto por 6 módulos, 2 ligas, un libro digital, videos descriptivos y un formato de registro.

En el EVA, hay un link que contiene guías, que describen el propósito de cada lección con dos enfoque diferentes, una dirigida para el profesor y otra dirigida para el alumno, con la finalidad de que ambos conozcan la forma y el momento adecuado de realizar las lecciones, así como competencias que pueden adquirirse.

Detectamos la necesidad de registrar las actividades que cada usuario desarrolla al acceder al sistema, puesto que, como el trabajo es de manera virtual al momento de salirnos todo lo que se había realizado se pierde. La respuesta a esta necesidad es la incrustación de una base de datos, pues con ello podemos conocer el comportamiento de uso del entorno por los usuarios con lo que se obtendrá información de todas las actividades que cada usuario realice cada vez que acceda al sistema. Necesidad que estamos empezando a cubrir.

Con la puesta de la base de datos se puede contar con lo siguiente:

Registro de usuarios: Se podrán registrar 2 tipos de usuarios, como alumno o como profesor, si es usuario profesor podrá tener acceso a todas las ligas del sistema.

Mejora en el sistema de evaluación: La evaluación en cada una de las lecciones está hecha según el número de intentos que se realicen antes de llegar a la respuesta correcta pero adicionalmente quisiéramos saber las causas por las que el alumno necesitó más de un intento. En una base de datos se pueden guardar todas las respuestas que proporcione y conociendo esto, podemos darnos cuenta del porqué de sus errores y dificultades. Lo que permitiría enfocarnos a proponer más actividades que disminuyeran sus errores o dificultades. En cuestión de los test es posible guardar los examenes y ser proporcionados al profesor, lo que le será muy útil para tomar decisiones en su curso.

Entorno amigable: El hacer una sesión personalizada le da al alumno una sensación de propiedad que propicia motivación para el estudio.

Interfaz actual de PROBEXP

Las lecciones desarrolladas están integradas en el prototipo PROBEXP, entorno virtual de aprendizaje de la probabilidad, cuya liga de acceso es:

http://www.fcfm.buap.mx/dif/ava/probexp2012/portada/

Figura 1. Imagen de la interfaz

Interfaz en la cual se están realizando las mejoras, por lo que se espera que a finales de año se termine.

Integrantes del equipo de PROBEXP

El equipo para el desarrollo del entorno virtual de aprendizaje PROBEXP actualmente está conformado por dos matemáticos, un diseñador gráfico y un programador. Contando además con un apoyo de asesorías en cuestiones didácticas, de los siguientes doctores: Carlos Rondero Guerrero UAEH, José Armando Albert Huerta ITESM y Jesús Humberto

Cuevas Acosta ITCH II. Se hace necesario crecer al número de integrantes en el equipo para darle robustez al trabajo en menor tiempo y en mayor calidad.

Comentarios finales

Puedo comentar con respecto a la didáctica que se utilizó, que puede ser útil para muchos otros temas de matemáticas siempre y cuando se use correctamente, con la facilidad de ajustarla a las necesidades de cada concepto, pues una de sus característica es que puede ser flexible, sin embargo, no dudo que pueda haber otras que de igual manera sean adecuadas, pero lo que puedo rescatar de la propuesta didáctica de Cuevas y Pluvinage es que el estar enfocada específicamente para matemáticas y seguir las ideas de la escuela activa, puede facilitar su uso además de hacer un cambio en la enseñanza tradicional.

Como conclusión y comentario final, puedo decir que al realizar este trabajo aprendí a entender el papel del alumno y del profesor, comprender los problemas y dificultades que enfrentan y la situación en que están en el proceso de enseñanza aprendizaje. El usar una didáctica, incluir la tecnología en la educación, reforzar y aplicar los conceptos de matemáticas que se involucran ha sido un aprendizaje muy importante. Adicionalmente, en parte de toda mi formación está el aprender a investigar, abordar un problema y buscar darle solución, el expresar la propuesta tanto verbal como escrita y afrontar los problemas y necesidades que conllevan realizar un trabajo de este tipo. En cuestión social al relacionarnos con directivos, maestros y alumnos así como expertos en otras áreas, me permitió desarrollar la capacidad de comunicación y colaboración, aspectos importantes en el desarrollo de mi preparación además de la parte teórica.

Recomiendo e invito a los estudiantes futuros a egresar, a que realicen un proyecto de este tipo porque como yo, podrán lograr un aprendizaje significativo para su formación, además de la satisfacción de realizar un proyecto que pueda ser útil a la sociedad y contribuir en la aportación de un tema tan importante como lo es la educación.

REFERENCIAS

Aebli, Hans, (1958). Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget. Ed. Kapelusz 5. A., Buenos Aires Argentina.

Attorresi, H. F., García, A. M., y Pralong, H. O. (2008). Sesgos en la Estimación de Probabilidades para Dos Situaciones Secuenciales Aleatorias. SUMMA Psicológica, UST 5(1), 3-12. Recuperado el 6 de mayo de 2012, de: dialnet.unirioja.es/servlet/fichero_articulo?codigo=2683120

Ausubel, D.; Novak, J. y Hanesian, H. (1986). Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo. 2 ed. México, Trillas, 1983

Azcárate, P., Cardeñoso, J.M. y Porlán, R.(1988). Concepciones De Futuros Profesores De Primaria Sobre La Noción De Aleatoriedad. Enseñanza De Las Ciencias, 16 (1). 85-97. Recuperado el 10 de mayo de 2009, de: http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/83237/108220

Barragués, J. I., Guisasola, J. y Morais, A. (2005). Concepciones de los Estudiantes de Primer Ciclo de Universidad sobre Estimación de la Probabilidad. Educación Matemática 17 (1), 55-85. Recuperado el 10 de mayo de 2009, de: http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=40517103&iCveNum=4505

Batanero, C. (2004). Ideas Estocásticas Fundamentales.Qué contenidos se debe enseñar en la clase de probabilidad. Ensino e Aprendizagen de Probabilidades e Estadística. Actas I Encontro Probabilidades e Estadística na Escola. Centro de Investigação e Psicología. Universidade do Minho. Portugal. Recuperado el 20 de octubre de 2011 de: http://www.uv.mx/eib/curso_pre/videoconferencia/52IdeasEstocasticasFundamentales.pdf

Batanero, C. y Serrano, L. (1995). Aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. Recuperado el 22 de noviembre de 2011 de: Uno, 15-28. http://biblo.una.edu.ve/docu.7/bases/marc/texto/m20362sl.pdf

Batanero, C. y Díaz, C. (2007). Probabilidad, grado de creencia y proceso de aprendizaje. XIII Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Federación Española de Profesores de Enseñanza de las Matemáticas. Recuperado el 22 de noviembre de 2011 de: www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/PonenciaJAEM.pdf

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. Recherches en didactique des Mathématiques, 7, 2, P. 33- 115. (Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática. Traducción de Dilma Fregona y Facundo Ortega). Argentina. Recuperado el 18 de enero de 2011 de: http://claroline.emate.ucr.ac.cr/claroline/backends/download.php/QnJvdXNzZWF1X0ZvbmRlbWVudHMucGRm?cidReset=true&cidReq=SP1363

Bustos, A., y Coll, C. (2010). Los entornos virtuales como espacios de enseñanza y aprendizaje. Revista Mexicana de Investigación Educativa, 15(44), 163-184. Recuperado el 5 de marzo de 2012 de: http://redalyc.uaemex.mx/pdf/140/14012513009.pdf

Cantoral, R., Covián, O., Farfán, R. M., y Lezama, J. (2008.) Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte iberoamericano. DF, México: Díaz de Santos. Recuperado el 10 de marzo de 2012 de: http://www.diazdesantos.es/wwwdat/pdf/SP0410003968.pdf

Cañizares, J., y Batanero, C. (1997). Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la comparación de probabilidades. UNO, 14, 99-11.

CEPAL, (2012). Acerca de la CEPAL. Recuperado el 22 de junio de 2012 de: http://www.eclac.org/cgi-bin/getprod.asp?xml=/noticias/paginas/3/43023/P43023.xml&xsl=/tpl/p18f-st.xsl&base=/tpl/top-bottom.xsl

Claparede, E. (1905). Esquisse d'une theorie biologique du sommeil, Arch. De Psychol., 4, 15-16.

Claro, M. (2010). La Incorporación de Tecnologías Digitales en Educación. Modelos de identificación de buenas prácticas, CEPAL, Colección documentos de proyectos. Recuperado el 22 de junio de 2012 de: http://www.eclac.cl/cgi-bin/getProd.asp?xml=/publicaciones/xml/8/40278/P40278.xml&xsl=/dds/tpl/p9f.xsl&base=/dds/tpl/top-bottom.xslt

Cuadernos UCAB (1997). No 1 Lev Vygotsky: Sus Aportes para el Siglo XXI. Caracas: Publicaciones UCAB

Cuevas, C. A. (2005). Curso Seminario de Didáctica de las Matemáticas. Publicación interna del Cinvestav IPN.

Cuevas, C. A. y Pluvinage, F. (2003). Les projets D'Action pratiqué éléments D'Une Ingénierie D'enseignement des mathématiques. Annales de didactique et de sciences cognitives (8), 273-293. Francia.

Del Puerto, S., Minnaard, C., y Seminara, S. (2004-2005). Errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Elementos de Matemática, publicación didáctico científica de la Universidad CAECE, 1ª parte: 19 (74), 5-18, 2ª parte: 19(75), 17-32.

Delgado, M., Arrieta, X. y Riveros, V. (2009). Uso de las TIC en educación, una propuesta para su optimización. Revista Omnia, 15, 3. Recuperado el 25 de marzo de 2012 de: http://redalyc.uaemex.mx/pdf/737/73712297005.pdf

Díaz, F. (2008). Educación y nuevas tecnologías de la información y la comunicación: ¿hacia un paradigma educativo innovador?. Revista Sinéctica, 39. Recuperado el 10 de marzo de 2012 de: http://portal.iteso.mx/portal/page/portal/Sinextica/Revista/fridadb

Duran, A. G. (2004). El uso de Internet como herramienta didáctica. Primer Congreso Virtual Latinoamericano de Educación a Distancia. Recuperado el 31 de enero de 2012 de: http://www.ateneonline.net/datos/32_03_Duran_Adela_Guzman.pdf

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento, Investigaciones en Matemática Educativa II. Université Louis Pasteurde Strasbourg, France Ed. Hitt F., 1998. Editorial Iberoamericana, 173-201.

ENLACE (2010). Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE). Recuperado el 15 de abril de 2012 de: http://www.enlace.sep.gob.mx/

Estrada, A., Díaz, C. y de la Fuente, I. (2006). Un estudio inicial de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en alumnos universitarios X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Huesca. Recuperado el 8 de abril de 2012 de: http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/SEIEM 2006.pdf

Ferro, C., Martínez, A. I. y Otero, M. C. (2009) Ventajas del uso de las tics en el proceso de enseñanza-aprendizaje desde la óptica de los docentes universitarios españoles. EDUTEC, Revista Electrónica de Tecnología Educativa, 29. Recuperado el 12 de mayo de 2012 de: http://edutec.rediris.es/revelec2/revelec29/.

García, A. R., Jaén, J. A. y Tapia, S (2006). La autoevaluación como actividad docente en entornos virtuales de aprendizaje/enseñanza. RED. Revista de Educación a Distancia, septiembre. Recuperado el 1 de junio de 2012 de: http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=54709903

Garfield, J., y Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning probability and statistics: Implications for research. Journal for Research in Mathematics Education, 19, 44-63.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Recherches en Didactique des Mathématiques, 14 (3): 325-355. Recuperado el 15 de noviembre de 2009, de : http://www.ugr.es/~batanero/publicaciones%20index.htm , Conference on Teaching Statistics (v.2, p. 766 - 783). University of Sheffield.

Godino, J. D., Batanero, C. y Flores, P. (1998). El análisis didáctico del contenido matemático como recurso en la formación de profesores de matemáticas. A. Olivier y K. Newstead, Proceedings of the 22nd International Conference for the Psychology of Mathematics Education. University of Stellenbosch, South Africa.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Recuperado el 27 de febrero de 2011, de: http://www.ugr.es/local/jgodino/

Guisasola, J. y Barragués. J. I. (2002). Heurísticas y sesgos de los estudiantes de primer ciclo de Universidad en la resolución de problemas de Probabilidad. Enseñanza De Las Ciencias 20 (2), 285-302. Recuperado el 24 de febrero de 2009, de: http://84.88.10.30/index.php/Ensenanza/article/viewArticle/21812/0

Gutiérrez, I. (2008). Usando objetos de aprendizaje en enseñanza Secundaria obligatoria. Edutec, Revista Electrónica de Tecnología Educativa, 27. Recuperado el 8 de junio de 2012 de: http://edutec.rediris.es/Revelec2/revelec27/articulos_n27_PDF/Edutec-E_IGutierrez_n27.pdf

Guzmán, M. C. e Inzunza, S. (2011). Un estudio sobre la comprensión y dificultades de profesores de secundaria acerca de la probabilidad. Recuperado el 16 de febrero de 2012 de: http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/2411/344

INEGI (2010). Estadísticas a propósito del día mundial del internet. Datos nacionales. Recuperado el 14 de mayo de 2012 de: www.inegi.org.mx/inegi/contenidos/.../estadisticas/2010/internet0.doc

Inzunsa, S. (2010). Entornos virtuales de aprendizaje, Un enfoque alternativo para la enseñanza y aprendizaje de la inferencia estadística. Revista Mexicana de Investigación Educativa, Consejo Mexicano de Investigación Educativa México, 15, 45, 423-452. Recuperado el 9 de junio de 2012 de: http://redalyc.uaemex.mx/pdf/140/14012507005.pdf

Jiménez, L y Jiménez, J. R. (2005). Enseñar probabilidad en primaria y secundaria? ¿Para qué y por qué?. Revista digital Matemáticas, Educación e Internet. 6 (1). Recuperado el 30 de marzo de 2011 de: http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/contribuciones-v6-n1-may2005/arti-aleat/index.html

Konold, C., Pollatsek, A., Well, A. D., Lohmeier, J., y Lipson, A. (1993). Inconsistencies in students' Reasoning about probability. Journal for Research in Mathematics Education, 34, 392-414.

Lavalle, A. L., Micheli, E. B. y Boché S. (2003). Juicios heurísticos sobre probabilidad en alumnos del profesorado en matemática. Revisa Premisa Boletín SOAREM 5, 17, 23-31. Recuperado el 23 de mayo de 2011, de: http://www.soarem.org.ar/Documentos/17%20Lavalle.pdf

Llece, (2008). Eficacia escolar y factores asociados en América Latina y el Caribe. Primer Congreso de Eficacia Escolar y Factores Asociados, realizado en Santiago de Chile durante la segunda semana de diciembre de 2007 y organizado por la Oficina Regional de Educación de la UNESCO para América Latina y el Caribe. Recuperado el 24 de abril de 2010 de: http://www.oei.es/pdf2/Eficacia-escolar-factores.pdf.

Lucio, R. (1992) El Pensamiento Didáctico De Hans Aebli. Revista colombiana de educación. 25, 35-59. Recuperado el 22 de Marzo de 2012 de: http://www.pedagogica.edu.co/storage/rce/articulos/rce25_05ensa.pdf

Martín, R. L. (2005). Las Nuevas Tecnologías en la Educación. Cuadernos Sociedad de la Información, 5. Fundación AUNA. Recuperado el 30 Junio 2012 de: http://biblioteca.ulsa.edu.mx/publicaciones/nuevas_tecnologias.pdf

Mayta, R. y Leon, W. (2009). El uso de las tic en la enseñanza profesional. Ind. data. 12,2, 61-67. Recuperado el 30 Junio 2012 de: http://www.scielo.org.pe/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1810-99932009000200008&lng=es&nrm=iso

Martínez, J. (2009). Objetos de Aprendizaje. N.C.T.M. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA; N.C.T.M. Recuperado el 30 Junio 2012 de: http://standards.nctm.org/

Grau, O. (2008). Formación on line. Educación Médica. 11, 3, 139-146. Recuperado el 30 Junio 2012 de: http://scielo.isciii.es/pdf/edu/v11n3/revision.pdf

Olson, J. F., Martin, M. O., y Mullis, I. V. S. (2008). Trends in International Mathematics and Science Study. Boston, US: TIMSS & PIRLS International Study Center. 2008. Recuperado el 20 de agosto de 2009, de: http://timss.bc.edu/timss2007/PDF/TIMSS2007_TechnicalReport.pdf

Orozco M. C. y Labrador M. E. (2006). La tecnología digital en educación: implicaciones en el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante. Theoria, 15, 002 Recuperado el 07 de Octubre de 2010 de: http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=29915209

Ortiz, J. J., Mohamed, N. y Serrano, L. (2009). Probabilidad frecuencial en profesores en formación. En M. J. González; M. T. González y J. Murillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XIII Simposio de La SEIEM. Santander. Recuperado el 12 de Octubre de 2011 de: http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/comunicacionesgrupos/GruposXIII/GrupoDidEstProbComb/Ortiz_Mohamed_Serrano_R.pdf

Panizza, M. (2004). Conceptos básicos de la Teoría de las Situaciones Didácticas. Del Libro Enseñar Matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas. Mabel Panizza /Compiladora. Recuperado el 11 de abril de 2012 de: http://www.crecerysonreir.org/docs/matematicas_teorico.pdf

Piaget, Jean (1947). The psychology of intelligence. London: Routledge.

Piaget, Jean. (1987). Psicología de la Inteligencia, PSIQUE, Argentina.

Piaget, J., Inhelder, B. y Szeminska, A. (1948). La géometrie spontanée de l'enfant. Paris: Presses Universitaires de France.

PISA(2003) INFORME 2003. Recuperado el 9 de junio de 2011 de: http://www.oecd.org/dataoecd/59/1/39732493.pdf

PISA (2006). Marco de la evaluación, Conocimientos y Habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura. Programa para la evaluación internacional de los alumnos. Recuperado el 15 de Octubre de 2011 de http://browse.oecdbookshop.org/oecd/pdfs/free/9806034e.pdf

PISA (2006). OECD Programme for International Student Assessment (PISA). Recuperado el 5 de marzo de 2012 de: http://www.pisa.oecd.org/document/25/0,3746,en_32252351_32235731_39733465_1_1_1_1,00.html

Ramos, P. A. y Gutiérrez, F. M. (2009)

Sánchez, E. (1996). Conceptos teóricos e ideas espontáneas sobre la noción de independencia estocástica en profesores de bachillerato: Un estudio de casos. Tesis de Doctorado, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

SEP, (2009), Bachillerato Tecnológico. Componentes básico y propedéutico. Programa de estudios de Matemática. Recuperado el 9 de febrero de 2012 de: http://www.dgeti-intranet.sep.gob.mx/basicopropedeutico/comparativoAsignaturas.php

SEP, (2010). Programas de estudio. Matemáticas II. Recuperado el 8 de febrero de 2012 de: http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion_academica/programasdeestudio/cfb_2osem/MATEMATICAS-II.pdf

SEP, (2011). Programas de estudio. Guía para el Maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas. Recuperado el 8 de febrero de 2012 de: http://basica.sep.gob.mx/dgdc/sitio/pdf/inicio/matlinea/2011/Matematicas_SEC.pdf

SERCE. Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo (SERCE). Recuperado el 2 de marzo de 2012 de: http://www.llece.org/public/content/view/65/4/lang,es/

SERCE (2005). Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo (SERCE) 2004-2007 Análisis Curricular. Recuperado el 5 de noviembre de 2011 de: http://www.llece.org/public/publicaciones/7_143084s.pdf

UNESCO (2012). Las TIC en la Educación. Recuperado el 20 de mayo de 2012 de: http://www.unesco.org/new/es/unesco/themes/icts/

UNESCO- ICDE. (1998). Conferencia Mundial sobre la Educación Superior. La educación superior en el siglo XXI. Recuperado el 26 de mayo de 2012 de: http://unesdoc.unesco.org/images/0011/001163/116345s.pdf

Valdés, A., Angulo, J., Urías, M.L., García, R., y Mortis, S. V. (2011). Necesidades de capacitación de docentes de educación básica en el uso de las TIC. Pixel-Bit. Revista de Medios y Educación, 39, 211-223. Recuperado el 11 de marzo de 2012 de: http://acdc.sav.us.es/pixelbit/images/stories/p39/15.pdf

Velázquez, C., Muñoz J., Alvarez F. y Garza, L.(2006), La Determinación de la Calidad de Objetos de Aprendizaje. Avances en la ciencia de la computación, VII Encuentro Internacional de Ciencias de la Computación ENC 2006, 346-351. Recuperado el 11 de marzo de 2012 de: http://cvonline.uaeh.edu.mx/Cursos/ObjetosAprendizaje/PDF/Lectura2U02.pdf

Venturiello, V. (2008). ¿Cómo resuelven problemas de probabilidad los estudiantes universitarios? Heurísticas y sesgos que intervienen en el razonamiento probabilístico. Maestría en Educación., en la Universidad de San Andrés, Argentina. Recuperado el 10 de mayo de 2009, de:

http://www.udesa.edu.ar/files/MaeEducacion/VENTURIELLOVER%C3%93NICA.PDF

Watson, J. M. and Moritz, J. B. (2003). Fairness of dice: A longitudinal study of students beliefs and strategies for making judgments. Journal for Research in Mathematics Education, 34, 270-304. Recuperado el 2 de mayo de 2010 de: http://www.jstor.org/stable/30034785

Zacarías J. D. (2008). Explorando las dificultades en la percepción del concepto de la aleatoriedad entre estudiantes de nivel medio superior. Un caso de estudio. Aportación y Aplicación de la Probabilidad y la Estadística, 2, 99-118.

Zacarías J. D., Zacarías M. G. y López J. C. (2008). El uso de Simuladores y Laboratorios en Internet para la Enseñanza de la Probabilidad: Una revisión a la producción actual. 6 º Congreso Internacional en Innovación y Desarrollo Tecnológico.

ANEXOS

Anexo 1. Referencias.

Sanz, D. (2012). Sequía en México. Cambio climático, obtenido el 24 de febrero de 2012 desde http://climaticocambio.com/sequia-en-mexico/

[2]AFP (2011). Cólera y decepción tres meses después de catástrofe en Japón. Univisión. Obtenido el 24 de febrero de 2012 desde http://noticias.univision.com/mundo/tsunami-en-japon/article/2011-06-10/terremoto-japon-decepcion#axzz1nKHiY9sC

[3]AMOL (2011). Lluvias desbordan seis ríos en Tabasco. Informador. Obtenido el 24 de febrero de 2012 desde http://www.informador.com.mx/mexico/2011/329167/6/lluvias-desbordan-seis-rios-en-tabasco-.htm

[4]Equipo Editorial Explorando México (2012). Los Peores Huracanes en México. Explorando México. Obtenido el 24 de febrero de 2012 desde http://www.explorandomexico.com.mx/about-mexico/4/109/

[5]Unica casa de cambio (2012). Historia del Mercado de Cambios en México. Obtenido el 24 de febrero de 2012 desde http://www.unicacc.com.mx/pdf/historia.pdf

[6]Córdova, J. A. (2010). A un año de la influenza en México. El universal. Obtenido el 24 de febrero de 2012 desde http://www.eluniversal.com.mx/editoriales/48071.html

[7]Diaz, J. C. (2009). Crisis económica en México: qué hacer. El economista. Obtenido el 24 de febrero de 2012 desde http://eleconomista.com.mx/notas-impreso/columnas/divisas-socialdemocrata/2009/03/27/crisis-economica-mexico-que-hacer

[8] http://cmas.siu.buap.mx/portal_pprd/wb/EDUCATIVA/oferta_EDUCATIVA

Anexo 2. Pre-tests

Pre-test 1

I. Definición y notación de conjuntos y subconjuntos

1.- Selecciona al conjunto de los días de la semana:

- ○ "lunes,martes,miércoles,jueves,viernes,sábado,domingo"
- ○ { lunes,martes,miércoles,jueves,viernes,sábado,domingo }
- ○ lunes,martes,miércoles,jueves,viernes,sábado,domingo
- ○ Todos los anteriores
- ○ No sé

2.- Es un subconjunto de {a,b,c,d,e,f,g}

- ○ las vocales
- ○ a,b,c
- ○ {a,e,i}
- ◉ {a,c,e}
- ○ No sé

3.- ¿Qué representa {1,2,3,4}?

- ○ Los números del 1 al 4
- ◉ El conjunto de los números del 1 al 4
- ○ Números
- ○ Al número 1234
- ○ No sé

II. Operaciones de conjuntos

Consideremos Ω={f,u,t,b,o,l}, A={f,u,t} y B={b,o,u,l}.
Calcula:

4.-A∪B es:

- "f,u,t,b,o,l"
- {futbol}
- {u}
- (•) {f,u,t,b,o,l}
- No sé

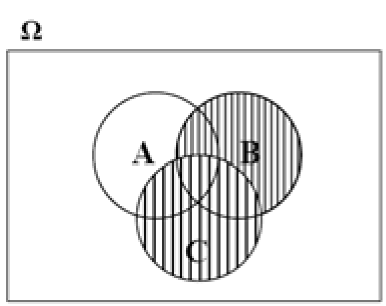
5.- A^c es:

- B
- {f,o,l}
- {b,o,u,l}
- (•) {b,o,l}
- No sé

6.- A∩B:

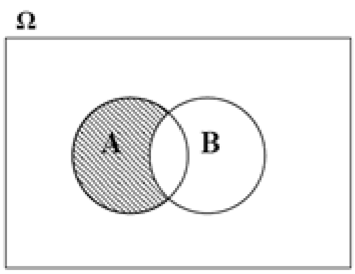
- "f,u,t,b,o,l"
- {futbol}
- (•) {u}
- {f,u,t,b,o,l}
- No sé

7.- En el siguiente diagrama de Venn la parte sombreada representa a:



- ○ B ∪ C ∩ A
- ○ A ∪ B ∪ C
- ○ B ∩ C ∩ A
- ◉ B ∪ C
- ○ No sé

8.- En el siguiente diagrama de Venn la parte sombreada representa a:



- ○ A
- ○ A ∪ B
- ◉ A - B
- ○ B - A
- ○ No sé

III. Producto cartesiano y n-ada.

9. Si tenemos el producto cartesiano siguiente:
AxB={(a,1),(b,1),(c,1),(a,2),(b,2),(c,2)}. ¿Cuál de las posibles respuestas describe a A y a B?

- ◉ A={a,b,c} y B={1,2}
- ○ A={1,2,3} y B={a,b,c}
- ○ A={abc,abc} y B={1,2}
- ○ A={1,2} y B={a,b,c}
- ○ No sé

IV. Combinatoria

10. A una fiesta asisten Gonzalo, Rodolfo, Inés, margarita, y Paula. ¿Cuántas parejas diferentes de hombre y mujer se pueden formar para bailar?

- ○ 2
- ○ 4
- ○ 5
- ◉ 6
- ○ No sé

V. Aritmética de números fraccionarios y decimales (un punto cada una)

11. ¿Cuál es el producto de 1/2 X 3/4?

- ◉ 3/8
- ○ 4/8
- ○ 3/6
- ○ 4/6
- ○ No sé

12. Calcula 2/3 + 5/4

- ○ 25/12
- ○ 12/23
- ◉ 23/12
- ○ 7/7
- ○ No sé

13. ¿Cuánto es 0.3 por 0.28?

- ○ 0.84
- ○ 8.4
- ◉ 0.084

- 0.0084
- No sé

Pre-test 2

I. Definición y notación de conjuntos y subconjuntos (un punto cada una)

1.-Selecciona al conjunto de las vocales:

- "a,e,i,o,u"
- {a,e,i,o,u}
- a,e,i,o,u
- Todos los anteriores
- No sé

2.-Es un subconjunto de {1,2,5,7,11,13}

- {2,5,6}
- 7,11,13
- {11,12,13}
- {5,11,13}
- No sé

II. Operaciones de conjuntos (un punto cada una)

En las preguntas 3 al 5 selecciona la descripción correcta considerando Ω={1,2,3,4,5,6}, A={2,4,6} y B={2,3,4}.

3.-A∪B:

- {2,3,4,6}
- {1, 5, 6}
- {3,3,4,6}
- {2,4}
- No sé

4.-A∩B:

{1,5,6}

{2,4,6,2,3,4}

{3,3,4,6}

{2,4}

No sé

III. Producto cartesiano y eneada (un punto cada una).

5.-Sean los conjuntos A={1,2,3} y B={4,5,6} se tiene que el producto cartesiano AXB es:

{(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6)}

{(4,1),(5,1),(6,1),(4,2),(5,2),(6,2),(4,3),(5,3),(6,3)}

{1x4,1x5,1x6,2x4,2x5,2x6,3x4,3x5,3x6}

{(1x4),(1x5),(1x6),(2x4),(2x5),(2x6),(3x4),(3x5),(3x6)}

No sé

6.-Si AXB={(a,b),(a,d)}, entonces ¿Quiénes son A y B?

A={a,b}, B={a,d}

A={b,d}, B={a}

A={a}, B={b,d}

A={a,d}, B={a,b}

No sé

7.-Sean los conjuntos A={1} , B={2} , C={3,4} se tiene que AXBXC es:

{(1x2x3), (1x2x4)}

{1x2x3, 1x2x4}

{(3,2,1),(4,2,1)}

{(1,2,3), (1,2,4)}

No sé

IV. Aritmética de números fraccionarios y decimales (un punto cada una)

8.-Calcula 4/5 entre 1/3

- ◯ 15/4
- ◉ 12/5
- ◯ 4/15
- ◯ 5/12
- ◯ No sé

9.-Calcula 2/3 más 1/4

- ◉ 11/12
- ◯ 3/12
- ◯ 3/7
- ◯ 12/11
- ◯ No sé

10.-¿Cuánto es 0.3 por 0.28?

- ◯ 0.84
- ◯ 8.4
- ◉ 0.084
- ◯ 0.0084
- ◯ No sé

11.-¿Cuánto es 0.01 entre 0.2?

- ◯ 20
- ◯ 0.5
- ◯ 2
- ◉ 0.05
- ◯ No sé

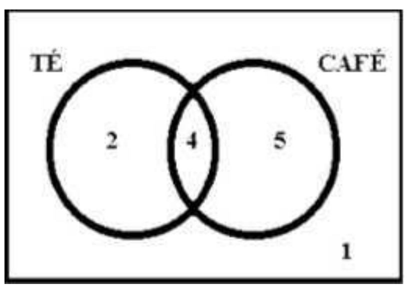
V. Exponentes (un punto cada una)

12.-Calcula 4^3

- 81
- 16
- 12
- 64
- No sé

VI. Diagramas de Venn (1/2 punto cada una)

En el siguiente diagrama, se representan los datos obtenidos en una encuesta, realizada a personas, donde se les preguntó si tomaban té o café. Los números que aparecen se refieren a las cantidades de personas que respondieron a la pregunta en las diversas formas posibles: solamente té, té y café, ninguna de las dos bebidas, etc.



Relaciona correctamente (las respuestas pueden repetirse):

13.-Personas que tomaban té

6 personas

14.-Personas que tomaban café.

9 personas

15.-Personas que tomaban té y café

4 personas

VII. Combinaciones y permutaciones (un punto cada una).

16.-En un torneo de futbol hay 5 equipos y solo 2 pasarán a la final, ¿De cuantas maneras distintas se puede ver la final?

○ 20

○ 25

○ 7

◉ 10

○ No sé

17.-¿De cuantas formas un lector puede seleccionar tres libros, sin fijarse en el orden de un conjunto de 4 libros denotados por A, B, C y D?

○ 24

○ 12

◉ 4

○ 3

○ No sé

VIII. Aleatoriedad (un punto cada una).

Se pidió a los niños María y Daniel que lanzaran una moneda 40 veces y anotaran los resultados obtenidos. Indicaron C para la cara y + para la cruz. Estos son sus resultados.

María: + + + C + C C + + + C + C C C C C + C + C + + C + C C + + + + C C C + C C + C C

Daniel: C + C + + C C + C + C C + + C + + C C + + C + C C + + C + C + C + C + C + + C +

18.-De acuerdo a los resultados obtenidos, identifica si alguno de ellos hizo trampa.

○ Ambos hicieron trampa.

○ Solo María hizo trampa.

◉ Solo Daniel hizo trampa.

- Ninguno hizo trampa.
- No sé

19.-¿Por qué? (Puedes seleccionar una o más opciones si así lo consideras).

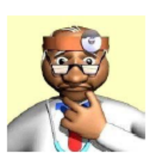
- Se observa un comportamiento regular en la(s) secuencia(s).
- Se observa un comportamiento irregular en la(s) secuencia(s).
- Las frecuencias de los diferentes resultados son bastante parecidas.
- Las frecuencias de los distintos resultados son bastante diferentes.
- No sé

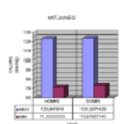
Anexo 3. Taxonomía de Bloom

Al clasificar los objetivos educativos, se realizó bajo tres enfoques, el cognitivo, el afectivo y el psicomotor, al aspecto cognitivo se le llamó taxonomía de Bloom.

Ésta se basa en los objetivos que según los profesores deben cumplir los estudiantes durante su tarea de estudiar, lleva un orden subordinado de lo más simple a lo más complejo que los maestros deben considerar cuando planean sus clases para poco a poco a través de actividades, cubrir estos objetivos hasta llegar al nivel más alto. La taxonomía de Bloom se divide en 6 aspectos: conocimiento, comprensión, aplicación, análisis, síntesis y evaluación, que se describen en la tabla 1. (Obtenida de: http://www.cuautitlan.unam.mx/descargas/edudis/recursosacademicos/taxonomiadebloom.pdf)

Tabla 1. Objetivos cognitivos

OBJETIVO COGNITIVO	DEFINICIÓN	VERBOS (para expresar acciones o tareas a realizar
CONOCIMIENTO 	El sujeto es capaz de recordar información anteriormente aprendida. Reconoce informaciones, ideas, hechos, fechas, nombres, símbolos, definiciones, etc., de una forma aproximada a cómo las ha aprendido.	• Escribir • describir • enumerar • etiquetar • reproducir • seleccionar • hacer listas • hacer carteles • nombrar • decir • definir ...
COMPRENSIÓN 	El sujeto entiende "se hace suyo" aquello que ha aprendido y esto lo demuestra cuando es capaz de presentar la información de otra manera, cuando la transforma, cuando encuentra relaciones con otra información, cuando se asocia a otro hecho, cuando se saben decir las posibles causas y consecuencias.	• Clasificar • citar • convertir • describir • estimar • explicar • generalizar • dar ejemplos • exponer • resumir • ilustrar • parafrasear • ...
APLICACIÓN 	El sujeto es capaz de utilizar aquello que ha aprendido. Cuando aplica las destrezas adquiridas a nuevas situaciones que se le presenten. Cuando utiliza la información recibida en situaciones nuevas y concretas para resolver problemas.	• Usar • recoger • calcular • construir • controlar • determinar • establecer • incluir • producir • proyectar • proporcionar • relacionar • solucionar • transferir • aplicar • resolver • utilizar • demostrar • informar • aplicar • relatar • contribuir • administrar • ...

ANÁLISIS 	Cuando el sujeto es capaz de descomponer el todo en sus partes y puede solucionar problemas a partir del conocimiento adquirido. Cuando intenta entender la estructura de la organización del material informativo examinando las partes de las cuáles se compone.	• Analizar • discriminar • categorizar • distinguir • comparar • ilustrar • contrastar • precisar • separar • limitar • priorizar • subdividir • construir • diagramas • ...
SÍNTESIS 	Cuando el sujeto es capaz de crear, integrar, combinar ideas, planear y proponer nuevas maneras de hacer. Crear aplicando el conocimiento y habilidades anteriores para producir alguna cosa nueva u original.	• Crear • adaptar • anticipar • planear • categorizar • elaborar hipótesis • inventar • combinar • desarrollar • comparar • comunicar • compilar • componer • contrastar • expresar • formular • integrar • modificar • reconstruir • reorganizar • revisar • estructurar • sustituir • validar • facilitar • generar • incorporar • iniciar • reforzar • ...
EVALUACIÓN 	Emitir juicios respecto al valor de un producto según opiniones personales a partir de unos objetivos dados.	• Valorar • comparar • contrastar • concluir • criticar • decidir • definir • interpretar • juzgar • justificar • ayudar • ...

Anexo 4. Conceptos de Probabilidad

Se enuncian los conceptos iniciales que se estudian en un primer curso de probabilidad a nivel medio superior.

Experimento: Actividad planeada que genera uno o más resultados.

Experimento aleatorio: Un experimento se dice aleatorio si al momento de realizarlo, no se puede predecir qué resultado se obtendrá antes de que el experimento se ejecute, aun realizándolo bajo las mismas condiciones.

Experimento determinista: Un experimento se dice determinista o no aleatorio si bajo las mismas condiciones se obtiene siempre el mismo resultado.

Espacio muestral: Es el conjunto de todos los posibles resultados obtenidos al llevar a cabo el experimento aleatorio. Es común denotarlo con la letra Ω.

Cada resultado perteneciente al espacio muestral se le llama **elemento muestral**.

A cada subconjunto obtenido del espacio muestral se le llama **evento**. Es común denotarlos con letras mayúsculas A, B, C, etc.

Cuando el evento contiene un único elemento muestral, se le llama **evento simple**. En caso de que contenga dos o más elementos muestrales, se le llama **evento compuesto**.

Cuando el evento no contiene elementos muestrales, se le llama **evento nulo o imposible**.

Cuando el evento está formado por todos los elementos muestrales, se le conoce como **evento seguro**.

Unión de eventos: si tenemos dos eventos A y B, su unión AUB es el evento que representa que ocurre A o B

Intersección de eventos: si tenemos dos eventos A y B, su intersección $A \cap B$ es el evento que representa que ocurre A y B.

Evento complementario: Se llama evento complementario de un evento A al evento que representa que no ocurre A y se representa por A^c.

Eventos independientes: Dos o más eventos son independientes cuando la ocurrencia o no ocurrencia de un evento no tiene efecto sobre la probabilidad de que ocurra el otro evento (o eventos).

Dos eventos A y B de Ω se dicen independientes cuando

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Variabilidad: Es la dispersión de un conjunto de valores.

Eventos dependientes y probabilidad condicional: Dos o más eventos serán dependientes cuando la ocurrencia o no ocurrencia de uno de ellos afecta la probabilidad de que ocurra el otro (u otros). Cuando tenemos este caso, empleamos entonces, el concepto de **probabilidad condicional** para denominar la probabilidad del evento relacionado. La expresión P(A|B) indica la probabilidad de ocurrencia del evento A sí el evento B ya ocurrió donde:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{o} \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Eventos mutuamente excluyentes: Dos o más eventos se dicen excluyentes si ninguna parte de alguno de ellos es parte del otro, es decir, que no pueden ocurrir simultáneamente, A y B son mutuamente excluyentes si $A \cap B = \phi$.

Probabilidad frecuencial: La probabilidad frecuencial de un evento A es el valor fijo al que se van acercando las frecuencias relativas de la ocurrencia del evento cuando se van haciendo repeticiones cada vez más grandes del experimento, se refiere a la relación entre el número de eventos favorables obtenidos, respecto del total. Esta definición proporciona probabilidades aproximadas, es decir, proporciona estimaciones de los valores exactos. Además, los resultados son *a posteriori*, pues se necesita realizar el experimento para poder obtenerlos.

Probabilidad clásica: Consideramos un espacio muestral finito y que todos los elementos muestrales tengan la misma probabilidad de ocurrir, la **probabilidad clásica de un evento *E***, que denotaremos por $P(E)$, se define como el número de elementos que componen al evento E, entre el número de elementos que componen el espacio muestral:

$$P(E) = \frac{Número\ de\ elementos\ en\ E}{Número\ de\ elementos\ en\ \Omega}$$

A esta fórmula se le conoce como regla de Laplace.

Enfoque axiomático de la probabilidad: Los enfoques clásico y frecuencial de la probabilidad sólo pueden usarse bajo situaciones muy específicas, por esta razón y para poder medir un evento de forma general, se estableció el enfoque axiomático de la probabilidad que se da por medio de los siguientes 3 axiomas.

Sea Ω el espacio muestral de cierto experimento aleatorio:

Axioma 1. Si A es una colección de elementos de Ω, existe un número $0 \leq P(A) \leq 1$ llamado probabilidad del evento A. (***La probabilidad de cualquier evento A es no negativa***).

Axioma 2. $P(\Omega) = 1$. (***La probabilidad del espacio muestral es 1***)

Axioma 3. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ una sucesión numerable de eventos disjuntos dos a dos ($A_i \cap A_j = \phi$) se verifica que $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$
(***La probabilidad de la unión numerable de sucesos disjuntos es la suma de sus probabilidades***).

Teorema de Bayes:

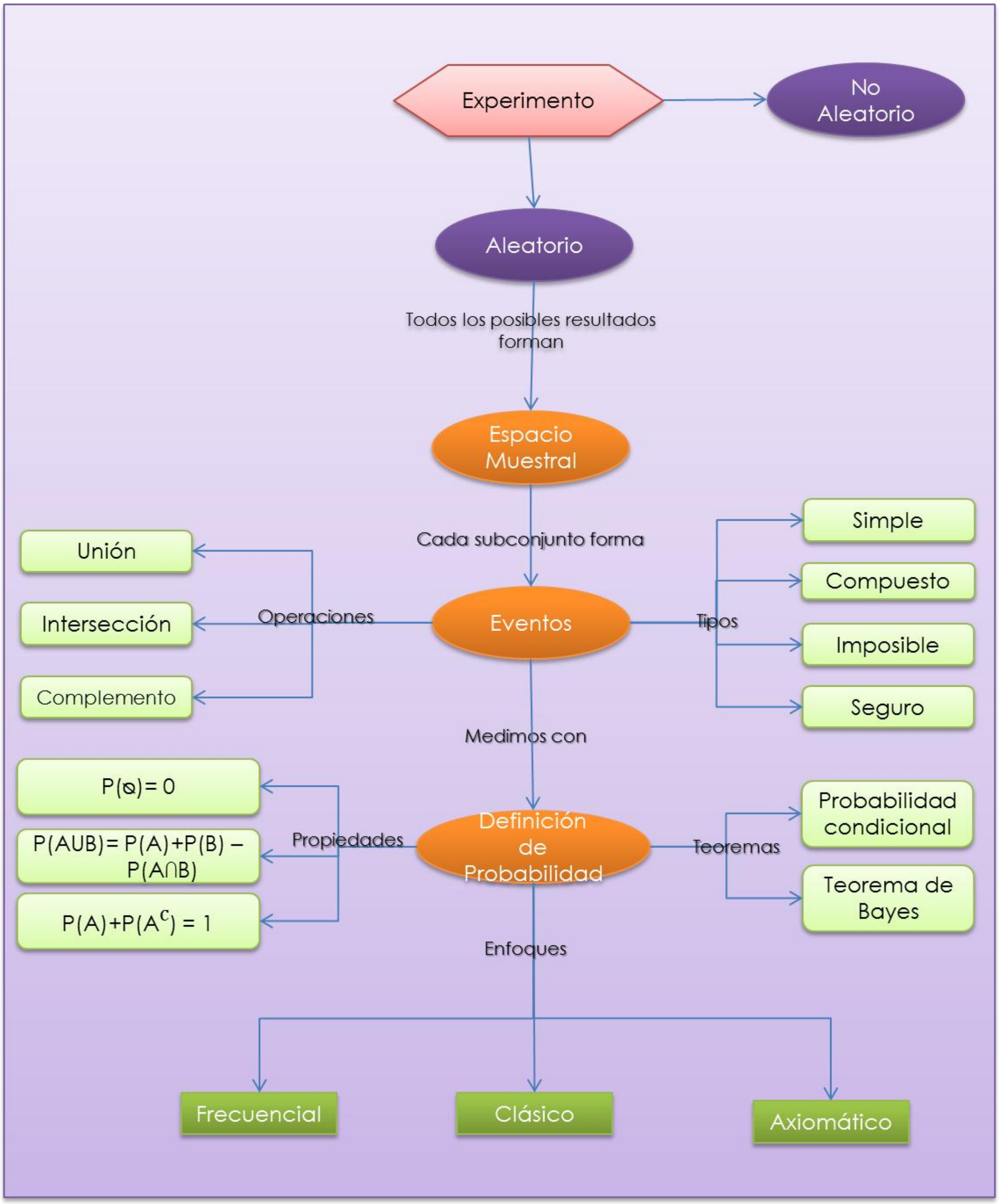
Sean los siguientes eventos:

- $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tales que la probabilidad de cada uno es diferente de cero y la unión de todos ellos es Ω.
- B un evento cualquiera del que se conocen sus probabilidades condicionales $P(B|A_i)$

Entonces las probabilidades $P(A_i|B)$ están dadas por:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)}$$

EN RESUMEN



Anexo 5. Algunos ejemplos de problemas de sesgos y heurísticas.

Dificultades en la comprensión en el concepto de aleatoriedad

1. *¿Cuál de las siguientes dos sucesiones es aleatoria? ¿Por qué?*

CC++C+CC++

C+C+C+C+C+

2. *Escribe una sucesión aleatoria de caras y cruces que represente los resultados de lanzar 50 veces una moneda.*

Al analizar éstos problemas notamos que la situación debe estar descrita de tal manera que la respuesta nos diga qué falsa creencia tienen los alumnos sobre la aleatoriedad. La característica principal es que se describen sucesiones aleatorias, que el alumno debe identificar de una no aleatoria o bien, tiene que generarla como él crea que sea aleatoria, pero además, deben poner la justificación de su respuesta que es la que realmente da muestra de su intuición.

Cada problema se hace con el fin de analizar los siguientes aspectos:

• Identificar en las respuestas la frecuencia relativa, la independencia y la consistencia.

• Analizar el argumento de las respuestas para identificar la concepción que tienen los alumnos sobre aleatoriedad.

Fenómeno Aleatorio

Un agente de bolsa ha comprado acciones de tres empresas. ¿Cuál es la probabilidad de que en el transcurso de un mes suban las acciones de al menos dos de las tres empresas?

a) La probabilidad es 1/2.

b) La probabilidad es 3/8.

c) La probabilidad es _____.

d) No puedo calcular la probabilidad.

Por favor, razona tu respuesta

Insensibilidad al tamaño de la muestra

1. *¿Cuál de las siguientes sucesiones es más probable que resulte al lanzar una moneda equilibrada 5 veces?:*

a) CCCXX

b) XCCXC

c) XCXXX

d) CXCXC

e) Las cuatro sucesiones son igual de probables.

¿Por qué has dado esta respuesta?

2. *En el hospital de cierta ciudad se registra el número de niños y niñas recién nacidos ¿Cuál de los siguientes casos te parece más probable?:*

a) La fracción de varones será mayor o igual a 7/10;

b) La fracción de varones será menor o igual a 3/10;

c) La fracción de varones estará comprendida entre 4/10 y 6/10;

d) Las tres opciones anteriores a), b), c) son igual de probables.

3. *El maestro dice que el 70% de los alumnos de su escuela obtienen una calificación menor de 8 en Historia. Tomamos cinco alumnos, les preguntamos su calificación en Historia, y resulta que los cinco tienen calificación mayor que 8. ¿Crees que se el maestro se equivoca? ¿Por qué?*

4. *En el hospital de cierta ciudad se registra el número de niños y niñas recién nacidos ¿Cuál de los siguientes casos te parece más probable?:*

   a) Que en los próximos 10 nacimientos 8 o más recién nacidos sean varones;

   b) Que en los próximos 100 nacimientos 80 o más recién nacidos sean varones;

   c) Las dos cosas anteriores a) y b) son igual de probables.

El problema 1 valora la utilización de la heurística de la representatividad por los alumnos en su concepción de la probabilidad, al obtener diferentes secuencias en el lanzamiento de una moneda, puede ser muy útil para identificar si los alumnos le asignan mayor valor a situaciones que ellos piensan que no lleven un orden o un patrón. Sabiendo que todas las secuencias tienen la misma probabilidad, la respuesta b) a los alumnos puede parecerle la correcta. Los problemas restantes exploran las intuiciones de los alumnos sobre probabilidad, pero si saben usar la heurística de la representatividad en sus razonamientos, podrán elegir la respuesta correcta. Además cada uno de los distintos argumentos a las respuestas de estas preguntas será resultado típico de la heurística de la representatividad.

En este tipo de razonamiento se prescinde del tamaño de la muestra y, con ello, del estudio de la variabilidad del muestreo, produciéndose una confianza indebida en las pequeñas muestras.

Concepciones erróneas sobre las secuencias aleatorias

1. *En la kermes del pueblo se va a efectuar una rifa, tú quieres participar pero sólo quedan dos boletos, ¿cuál de los siguientes boletos preferirías?*
   - *12345*
   - *29371*
   - *Cualquiera, pues los dos son igual de posibles*

Este problema pretende identificar si los alumnos poseen cierta inclinación por una secuencia o por el contrario, total rechazo, lo que reflejaría una concepción errónea sobre las secuencias aleatorias, sabiendo bien que las secuencias que se presentan en este problema, son igualmente probables.

Sesgo de equiprobabilidad

1. *Al lanzar dos dados ¿hay la misma probabilidad de obtener un 5 y un 6 que la de obtener dos veces un 5?*
2. *El semáforo que regula el tráfico en cierto cruce puede encontrarse en uno de los cuatro estados siguientes: ROJO, VERDE, AMBAR FIJO O AMBAR INTERMITENTE. ¿Cuál es la probabilidad de que en un instante determinado el estado del semáforo sea ROJO o VERDE?*

a) La probabilidad es 0.5

b) La probabilidad es 0.75

c) La probabilidad es:

Muchas veces la primera impresión de los alumnos es que todos los resultados son igualmente probables, estos problemas, están creados para detectar este tipo de sesgo en los que se identifica al momento de que el alumno proporcione una probabilidad o un argumento en el que considera equiprobabilidad en los resultados.

Confusión entre sucesos independientes y sucesos mutuamente excluyentes

1. *Se extrae una carta al azar de una baraja española (40 cartas con 4 palos: oros, bastos, espadas y copas. Cada palo tiene los números del 1 al 7, sota, caballo y rey). Sea A el evento "se extrae una carta de oros" y B el evento "se extrae un rey", ¿los eventos A y B son independientes?*

a) No son independientes, porque en la baraja hay un rey de oros.

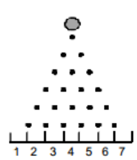
b) Solo si sacamos primero una carta para ver si es rey y se vuelve a colocar en la baraja y luego sacamos una segunda carta para mirar si es oros.

c) Si, porque P(rey de oros) = P(rey) x P(oros).

d) No, porque P(rey /oros) □, P(rey).

Sesgo determinista

Tu amigo Borja es muy aficionado a los experimentos físicos. Te ha llamado para hablarte del último que tiene entre manos. Sobre un panel vertical ha clavado algunos clavos, como aparece en la siguiente figura:



Cuando se deja caer la bola desde la parte superior, rebota por los clavos y termina en alguno de los agujeros de la parte inferior. Lo que intenta Borja es predecir cuál será el agujero en el que entrará la bola. Ha medido con mucho cuidado la posición de los clavos, el peso y el diámetro de la bola y las características del material con que está fabricada. Su idea es emplear todos estos datos y los principios y las leyes de física sobre choques y *movimiento de objetos para calcular la trayectoria que seguirá la bola en su caída, y así poder predecir en qué agujero entrará. Sin embargo, Borja no ve claro cómo ponerse en marcha, qué leyes físicas emplear y cómo hacerlo. Por eso te ha pedido ayuda.*

Se trata de que le aconsejes de la siguiente forma:

a) Te ha explicado su modo de enfocar el problema. Explícale qué te parece ese enfoque.

b) Explícale los pasos más importantes que piensas que habría que dar para resolver el problema.

Siendo que este problema presenta un fenómeno aleatorio, el sesgo determinista se reflejaría al dar una justificación determinista en este caso por medio de cuestiones físicas.

Sesgo de accesibilidad

Tomemos aleatoriamente del diccionario una palabra que contenga una vez la letra R, ya sea en su primera o en su tercera posición. Elige una respuesta:

a) Es más probable que la R se encuentre en la primera posición.

b) Es más probable que la R se encuentre en la tercera posición.

c) Es tan probable que la R se encuentre en primera posición como que se encuentre en la tercera.

d) No puedo determinar cuál de las posiciones de la R, primera o tercera, es más probable.

Por favor, razona tu respuesta

Si el alumno elige una posición con solo la información que se proporciona en el problema, entonces estará recurriendo al sesgo de accesibilidad pues dará su argumento según como pueda generar un ejemplo en su mente o como recuerde una palabra que contenga la letra R mas en ningún momento utiliza un razonamiento probabilístico.

GLOSARIO

Aprendizaje significativo: cuando los estudiantes se involucran en tareas motivadoras y significativas o en la resolución de problemas reales, su aprendizaje es considerado auténtico. Cuando están interesados en lo que están aprendiendo son capaces de construir su propio entendimiento, saben cómo controlar y regular ese aprendizaje para adaptarlo a sus propias necesidades, pueden establecer sus propias metas y estrategias, y son capaces de trabajar con otros estudiantes.

Competencias: conjunto de capacidades que incluyen conocimientos, actitudes, habilidades, y destrezas que una persona logra mediante procesos de aprendizaje y que se manifiestan en su desempeño en situaciones y contextos diversos (SEP).

Competencia matemática: es la capacidad de un individuo para analizar, razonar y comunicar de forma eficaz; a la vez de plantear, resolver, e interpretar problemas matemáticos en una variedad de situaciones que incluyen conceptos matemáticos cuantitativos, espaciales, de probabilidad, o de otro tipo. Además, esta competencia tiene que ver con la capacidad para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados y, utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que pueda satisfacer las necesidades de la vida diaria de un ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (PISA).

Diagramas de árbol: Un diagrama de árbol es un dibujo que se usa para enumerar todos los resultados posibles de una serie de experimentos en donde cada experimento puede suceder en un número finito de maneras.

Diagrama de Caja de Bigotes: Una gráfica de este tipo consiste en una caja rectangular dividida por un segmento vertical que nos indica la posición de la mediana, y su relación con el primero y tercer cuartil. El segundo cuartil coincide con la mediana. En ambos extremos de la caja sobresalen dos líneas llamadas bigotes cuyos límites de prolongación son un valor mínimo y otro máximo. El espacio comprendido de los bigotes es entre el valor mínimo y el primer cuartil y entre el tercer cuartil y el valor máximo.

Didáctica: Para Aebli la didáctica es una ciencia que auxilia a la Pedagogía para todo lo que tiene que ver con las tareas educativas más generales. Asegura que la didáctica científica es el resultado del conocimiento de los procesos educativos en el intelecto de un individuo y las metodologías utilizadas.

Mattos expresa que para él consiste en una doctrina pedagógica cuya meta es definir una técnica adecuada de enseñanza y dirigir eficazmente el aprendizaje de un grupo. Posee un carácter práctico y normativo que debe ser respetado.

Stöcker, por su parte asegura que es una teoría que permite dar instrucciones en la enseñanza escolar de todos los niveles. Analiza todos los aspectos de la enseñanza (fenómenos, preceptos, principios, leyes, etc.); mientras que Larroyo la presenta como el estudio de los procedimientos en la tarea de enseñar. (Definicion.de)

Podemos terminar diciendo que la didáctica es una disciplina que se encarga de describir, explicar, fundamentar y proporcionar los métodos y recursos que considera más adecuados para dirigir al estudiante para lograr los objetivos de aprendizaje.

Didáctica de las matemáticas: Desde el punto de vista Freudentahal, la didáctica de las matemáticas es la organización de los procesos de enseñanza y aprendizaje relevantes para las matemáticas.

Brousseau la marca como la ciencia que se interesa por la producción y comunicación del conocimiento matemático, en lo que esta producción y esta comunicación tienen de específicos de los mismos.

Para R. Douady es el estudio de los procesos de transmisión y adquisición de los diferentes contenidos de las matemáticas. Describe y explica los fenómenos relativos a la enseñanza y aprendizaje.

Gráfica de barras: Es una gráfica que muestra datos de forma visual utilizando barras horizontales o verticales cuyas longitudes son proporcionales a las cantidades que representan.

Gráfica de pastel: también llamada de sectores, es un gráfico redondo dividido en sectores donde cada sector muestra el tamaño relativo de cada valor, de esta manera el área de cada sector es proporcional a la cantidad que representa, en conjunto todo el gráfico debe representar el 100% de los datos.

Gráfico de Puntos: El gráfico de puntos permite mostrar apropiadamente a pequeños conjuntos de datos, la abscisa representa los valores de la variable estudiada y la ordenada la frecuencia de aparición de un valor en el conjunto de datos estudiado.

Pensamiento matemático cognitivo: El pensamiento matemático es aquella capacidad que permite comprender las relaciones que se dan en el mundo, que posibilita cuantificarlas y formalizarlas para entenderlas mejor y poder comunicarlas. Consecuentemente, esta forma de pensamiento se traduce en el uso y manejo de procesos cognitivos tales como: razonar, demostrar, argumentar, interpretar, identificar, relacionar, gratificar, calcular, inferir, efectuar algoritmos y modelizar en general y, al igual que cualquier otra forma de desarrollo de pensamiento, es susceptible de aprendizaje. (Carina Mercado Navarrete).
Es la habilidad de pensamiento necesario para el tratamiento matemático.

Recursos cognitivos: la percepción, la memoria, el procesamiento, etc.

Representación Semiótica: Siguiendo a Duval, por registro de representación entendemos a un sistema de signos utilizados para representar una idea u objeto matemático y que además cumple con las siguientes características: es identificable, permite el tratamiento, esto es, la manipulación y transformación dentro del mismo registro y, por último, permite la conversión, consistente en la transformación total o parcial en otro registro.