BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Introducción a las pruebas de Consistencia en ZF

TESIS

Que para obtener el grado de
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Presenta
Giovanna De Jesús Carlos

Director de Tesis:
Dr. Iván Martínez Ruiz

Puebla, Pue., Octubre 2013.

Agradecimientos

Muchas gracias a mis papas y hermanos. Gracias a las personas que concibieron el proyecto de la Facultad, y a todos los que se esfuerzan porque la esencia de ella se mantenga. A los profesores, que además de enseñar cosas académicas comparten cosas no académicas.

De manera especial agradezco a mis amigos con los que cuento y a las personas con las que, en algún momento, he contado, muchas gracias. También, agradezco a las personas que contribuyeron para la realización de este trabajo. Agradezco al profesor Iván Martínez por dirigir la tesis, a los profesores que fungen como sinodales, Agustín Contreras, Manuel Ibarra y Alejandro Ramiréz por la revisión y corrección de ésta.

Introducción

> Las anécdotas son esencialmente verdaderas porque son inventadas, porque se las inventa pieza por pieza, para ajustarlas exactamente a un individuo. Algo semejante sucede con los mitos nacionales, que son fabricados a propósito para describir el alma de un país,...

Ernesto Sábato, Sobre héroes y tumbas.

> ...podemos partir con los números naturales y, conociendo únicamente las propiedades y las relaciones establecidas por los axiomas, deducir toda la aritmética. ¿Por qué se supone que los matemáticos se interesan en partir de tales principios primitivos? ¿Son verdaderas $m+n = n+m$ y $m \cdot n = n \cdot m$ porque pueden deducirse como una consecuencia de los axiomas? En cierto sentido, existe otra forma completamente diferente de ver las cosas. Los axiomas son "verdaderos" o válidos porque, a partir de ellos, podemos deducir $m + n = n + m$ y $m \cdot n = n \cdot m$ (después que se han definido la adición y la multiplicación) y todas las demás reglas comunes de la aritmética. Un aspecto de esa forma de ver las cosas es simplemente estético: da un desarrollo limpio y bello de una masa de conocimientos útiles y bien conocidos a partir de los fundamentos sencillos establecidos con precisión. Existe una belleza artística en tal estructura.

Watson Fulks, CALCULO AVANZADO.

Desde tiempos muy antiguos la idea del infinito ha inquietado la mente del hombre. Quizás ésta surge como un reflejo de sus ilusiones y ambiciones. Sin embargo, no fue sino hasta el siglo XIX, con Cantor (1845-1918), que el infinito se empieza a tratar como un objeto matemático. A ésto se le considera el inicio de la Teoría de Conjuntos.
Tratar al infinito como un objeto implicó una revolución, pues hasta ese entonces las concepciones del infinito, en la matemática, eran de tipo potencial esto es, como se afirma en la introducción de *Las paradojas del Infinito*[1] "Si se encuentran frente a conjuntos infinitos no los ven como colecciones, sino que repiten con Euclides: hay más números primos que cualquier colección de números primos dada. "

Uno de los resultados principales de Cantor establece que la cantidad de elementos del conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) es un infinito más grande que el conjunto de los números naturales (ω). Otro resultado es que el conjunto potencia de un conjunto dado A, denotado por $\mathscr{P}(A)$, es más grande que el conjunto A, a este resultado se le conoce como Teorema de Cantor. A partir de este Teorema se puede construir una larga lista de infinitos pues, partiendo de los números naturales, ω, $\mathscr{P}(\omega)$ es un infinito más grande que ω, luego $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\omega))$ es un infinito más grande que $\mathscr{P}(\omega)$, y así sucesivamente.
La validez del resultado anterior se sustenta, entre otras cosas, en la existencia del conjunto potencia de un conjunto dado. De hecho, esta es una condición necesaria, como se ve en el Corolario 3.3.7 del Capítulo 3.

[1] Las paradojas del infinito de Bernard Bolzano, Colección MATHEMA.

De acuerdo a los resultados de Cantor, una pregunta que surge es que si existe un conjunto infinito más grande que ω pero más chico que $\mathbb{R}$. La expresión que afirma que no existe tal conjunto, es la llamada Hipótesis del continuo (HC).

Actualmente se sabe que la Hipótesis del Continuo no es un teorema. Para demostrar que una proposición de la teoría de conjuntos no es un teorema, antes fue necesario precisar los términos básicos de esta teoría, como conjunto.

Ya que en el estudio de las matemáticas un concepto muy importante es el de conjunto, la formalización de éste por sí misma es importante, pues formalizando a la teoría de conjuntos se fundamenta buena parte de la matemática, por ejemplo, se formalizan el concepto de función y a los números naturales (de donde se formalizan a los números reales y complejos) y la teoría desarrollada por Cantor.

Esta formalización, en parte, se hizo siguiendo el método axiomático propuesto por Euclides para la geometría. Esto es, se propusieron principios (axiomas) a partir de los cuales se obtuviera la teoría. En un sentido lógico, estos principios son la esencia de la teoría, pues a partir de ellos se desarrolla ésta.

Respecto a qué principios se consideran para formalizar una teoría, en [11] Hermann Weyl afirma: " El método axiomático consiste sencillamente en coleccionar todos aquellos conceptos básicos así como todos aquellos hechos básicos a partir de los cuales se pueden derivar por definición y deducción respectivamente todos los conceptos y teoremas de una ciencia". También, se busca evitar contradicciones, así por ejemplo, en el caso de la teoría de conjuntos, se evita la paradoja de Rusell. De manera más general, si ϕ es un enunciado, se busca evitar que $\phi \wedge \neg\phi$ sea un teorema. Si el conjunto de axiomas cumple esta propiedad se dice que es consistente.

También, es deseable que el sistema axiomático propuesto no sea redundante, esto es, que ningún axioma sea deducible de los demás.

Entre 1905 y 1930 Zermelo, Skolem y Fraenkel proponen el sistema axiomático para la teoría de conjuntos, conocido hoy como ZF y agregándole el Axioma de Elección se conoce como ZFC.

¿Es ZFC consistente? Esto es, ¿a partir de estos principios no se llega a alguna contradicción? Para responder lo anterior será necesario referirnos a los resultados obtenidos por Gödel, llamados Teoremas de Incompletitud y de Inconsistencia.

Estudiar propiamente estos resultados escapa a los objetivos de la tesis, sin embargo para el desarrollo de ésta es importante considerarlos. En la sección de Preliminares los enunciamos de manera muy general, sin profundizar en ello. En la sección 4 del capítulo 1 de [9], se encuentra una introducción amena de estos resultados.
Gödel demostró que, en un sistema axiomático lo suficientemente robusto para definir a la aritmética (los naturales junto con las operaciones $+$ y $-$), suceden dos cosas:

(1) Si tal sistema es consistente entonces, la formula que expresa la consistencia del sistema axiomático no se puede demostrar dentro del sistema.

(2) Si dicho sistema es consistente entonces, es incompleto, es decir, se pueden enunciar proposiciones dentro del sistema que ni ellas ni su negación sean teoremas.

Los Resultados de Gödel se aplican a la teoría de conjuntos, ya que en dicha teoría, es posible definir a la aritmética, para un desarrollo de esto consulte [2].

Así, de acuerdo a (1) no es posible demostrar en ZFC, que en dicha teoría no haya contradicciones, esto es, podría existir una proposición en ZFC tal que ella y su negación sean teoremas. También, en ZFC existen proposiciones como en (2), a tales se les llama indecidibles o independientes de ZFC.

Si bien, los principios que rigen a la teoría de conjuntos son elegibles las consecuencias de tal elección no son controlables, en el sentido de poder garantizar la inexistencia de contradicciones, así por los teoremas de Gödel estamos condenados a vivir con la incertidumbre de que, si en la teoría en la que trabajamos no hay contradicciones, pero también, como ya se ha dicho, abre la posibilidad de trabajar en diferentes mundos.

Si ϕ es una proposición, suponiendo la consistencia de ZFC, la consistencia de $ZFC \cup \{\phi\}$, denotada por $ZFC + \phi$, y la indecidibilidad de ϕ están relacionadas de la siguiente manera, ϕ es indecidible si y sólo si $ZFC + \phi$ y $ZFC + \neg\phi$ son consistentes.

Por otro lado, un resultado de la teoría de modelos dice que un conjunto de axiomas, Δ, es consistente si y sólo si existe una interpretación en donde los axiomas de Δ sean verdaderos. Una interpretación con estas características se denomina modelo de Δ.

Por lo tanto, una forma de demostrar que una proposición ϕ es independiente de ZFC, suponiendo la consistencia de ZFC, es mostrar que existen modelos para $ZFC + \phi$ y $ZFC + \neg\phi$.

Dicho de una manera muy general, de esta forma Gödel y Cohen mostraron que la Hipótesis del Continuo es una proposición independiente de ZFC, el primero mostró que la negación de HC no es un teorema y el segundo que HC no es un teorema.

Así, es posible adjuntar a ZFC, como Axioma adicional la HC o la negación de ésta y, bajo el supuesto de que ZFC es consistente, obtener una teoría más amplia y carente de contradicciones.

Estos resultados de consistencia son relativos, pues se está apelando a la consistencia de ZFC. Sin embargo, aunque no es posible demostrar la consistencia de ZFC, es posible garantizar la consistencia de fragmentos finitos de ZFC.

Intuitivamente, un modelo de un conjunto de axiomas, Δ, es un universo en donde los símbolos del lenguaje en el que están enunciados los axiomas se interpretan. Y así, un enunciado es verdadero o falso. Además cumple: (a) si ϕ es una fórmula que se deduce de

Δ, entonces la expresión que corresponde a ϕ en el modelo es verdadera. También, (b) un modelo no admite que un enunciado sea verdadero y falso.

El objetivo de esta tesis es dar una breve introducción a la manera de realizar pruebas de consistencia a través de modelos.

En el capítulo de preliminares se enuncia a la teoría de conjuntos como una teoría lógica formal y algunos resultados propios de la teoría de conjuntos que se usarán en los capítulos posteriores. En el capítulo 2, se estudia al Axioma de Fundación, para ello se define a la clase de los conjuntos bien fundados, esta clase admite una gran parte de la matemática y suponer el Axioma de Fundación es equivalente a que ésta es igual a la clase de todos los conjuntos. También, se estudian modelos a partir de los cuales en el Capítulo 3, se hacen pruebas de consistencia, por último, se enuncia el Teorema de Colapso de Mostowski. En el Capítulo 3 se estudian las condiciones bajo las cuales los axiomas de ZFC, se cumplen en las interpretaciones del lenguaje de la teoría de conjuntos. Mediante pruebas de consistencia se demuestra que es correcto considerar a los Axiomas de Infinitud y de Conjunto Potencia como axiomas pues éstos no se deducen de los demás. También se prueba que la existencia de cardinales fuertemente inaccesibles no es posible demostrarla a partir de ZFC. Por último, se estudian modelos de $ZFC - P$ y y modelos numerables de fragmentos finitos de ZFC. De esta forma se garantiza la consistencia para fragmentos finitos de ZFC, esto es importante, pues al demostrar un teorema o una cantidad finita de teoremas únicamente se usan un número finito de Axiomas.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presenta a la teoría de conjuntos como una teoría formal. Lógicamente, ésta es sólo un sistema de símbolos sin ninguna significación específica.

La base de una teoría formal, es un lenguaje a partir del cual se forman las expresiones. Una clase particular de expresiones son las fórmulas bien formadas, una colección de estas fórmulas serán los axiomas, en las teorías formales que se considerarán existen dos tipos de axiomas, los axiomas lógicos y los axiomas propios, el conjunto de axiomas propios forma el sistema axiomático de la teoría. A partir de los axiomas y de las reglas de inferencia se construye toda la teoría.

Aquí, conviene hacer una analogía, informal, de nuestro lenguaje, el español, con el lenguaje de las teorías formales. Partimos de un conjunto inicial de símbolos, en el caso de nuestro lenguaje, el alfabeto y los signos de puntuación, una secuencia finita de símbolos es una expresión. En nuestro idioma no consideramos a todas las expresiones, existen reglas para cuando una expresión es válida, las expresiones válidas corresponden a las fórmulas bien formadas en la teoría formal.

1.1. Teorías Formales.

Una teoría formal requiere de un lenguaje formado por un conjunto de símbolos, éste es importante pues a partir de ahí se construyen las fórmulas bien formadas, luego los axiomas. Los símbolos del lenguaje varían dependiendo de la teoría formal que se trate.

Definición 1.1.1. *Un lenguaje de primer orden está formado por los siguientes símbolos.*

(a) Una cantidad "numerable" de ***variables****,* $x_1, x_2, \ldots$

(b) Símbolos lógicos. $\wedge, \neg, \exists$.

(c) Signos de puntuación. Paréntesis derecho, paréntesis izquierdo y coma.

(d) *Existe una "función", posiblemente "vacía", σ, con rango(σ) $\subset \omega$ y $|dom\sigma| \leq \omega$. Los elementos del dom(σ) pertenecen al lenguaje y se llaman símbolos funcionales. Si $f \in$ dom(σ) a $\sigma(f)$ se le llama aridad de f. Los elementos c en dom(σ) tal que $\sigma(c) = 0$ se llaman constantes.*

(e) *Existe una "función", diferente del "vacío", ρ con rango(ρ) $\subset \omega$ y $|dom\rho| \leq \omega$. Los elementos del dom(ρ) pertenecen al lenguaje y se llaman símbolos de relación. Si $R \in$ dom(ρ), a $\rho(R)$ se le llama aridad de R.*

Por ejemplo, en un lenguaje adecuado para la aritmética, σ pudiera ser $\{(+, 2)\}$ y ρ puede tener como elemento a $(\leq, 2)$.

Definición 1.1.2. *Una teoría formal $\mathscr{K}$, está definida si las siguientes condiciones se cumplen.*

(1) *Existe un "conjunto" "numerable" de símbolos de $\mathscr{K}$. Una "sucesión" "finita" de símbolos de $\mathscr{K}$ es llamada expresión de $\mathscr{K}$.*

(2) *Existe un "subconjunto" del "conjunto" de expresiones de $\mathscr{K}$, llamado el conjunto de fórmulas bien formadas (wfs). Existe un procedimiento para verificar cuando una expresión está en wfs.*

(3) *Existe un subconjunto del conjunto wfs llamado el conjunto de axiomas de $\mathscr{K}$.*

(4) *Existe un conjunto de "relaciones" $R_1, \ldots, R_n$ entre fórmulas bien formadas, llamadas reglas de inferencia. A cada, R_i le corresponde un único "entero" "positivo" j, tal que existe un procedimiento que indique si un conjunto A de j-1 fórmulas está R_i relacionada con otra fórmula $\mathscr{B}$. En caso de que A esté relacionada con $\mathscr{B}$ se dice que $\mathscr{B}$ se* ***sigue o es una consecuencia directa*** *de las j-1 fórmulas de A.*

Notar que, tanto en la definición de lenguaje de primer orden como la de teoría formal, se usan los conceptos conjunto, subconjunto y función, entre otros. Entenderemos a estos conceptos como elementos de un metalenguaje, entendiendo al metalenguaje como el lenguaje que se usa para estudiar a la teoría, como un objeto matemático. Para distinguir entre conceptos del metalenguaje y conceptos definidos en una teoría formal haremos uso, en algunas ocasiones, de "". Se hace la precisión para evitar, si es posible, confusión y desencanto. Si se quisiera formalizar el metalenguaje, éste se consideraría como un objeto de estudio y al lenguaje que se usaría para estudiarla sería el metametalenguaje, y así sucesivamente.

Formalmente, los símbolos utilizados en el lenguaje carecen de significación, sin embargo, casi siempre están connotados por su significado habitual.

Si $\mathscr{K}$ es una teoría formal, una **demostración** en $\mathscr{K}$ es una sucesión finita de fórmulas bien formadas, $\phi_1, \ldots, \phi_n$, tal que, para cada i, ϕ_i es un axioma de $\mathscr{K}$ o es consecuencia directa de aplicar una regla de inferencia a fórmulas anteriores a ϕ_i.

Un **teorema** de $\mathscr{K}$ es una fórmula bien formada, ψ, tal que es la última de una demostración en $\mathscr{K}$; una de tales demostraciones se llama una demostración de ψ.
Dada una fórmula ϕ de $\mathscr{K}$, se dice que ϕ es una **consecuencia** de un conjunto de fórmulas bien formadas Γ, si existe una demostración de ϕ tal que, cada fórmula de la demostración, o es un axioma o está en Γ o es consecuencia directa de reglas de inferencia aplicadas a fórmulas que le preceden a ϕ en la demostración. Se usará $\Gamma \vdash \phi$ para indicar que ϕ es una consecuencia de Γ. Si ϕ es una fórmula, $\vdash \phi$ denota que ϕ es un teorema.

Si ϕ, ψ son fórmulas, se dice que son **equivalentes** si y sólo si, $\vdash ((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi))$.

Una vez que tenemos el conjunto de símbolos, el siguiente paso es construir palabras, que en este caso serán los términos. El conjunto de **términos** está formado como sigue:

(a) Cada variable es un término.

(b) Cada símbolo constante es un término.

(c) Si $t_1, \ldots, t_n$ son términos y f es un símbolo funcional de aridad n, entonces $f\ t_1, \ldots, t_n$ es un término.

El siguiente paso consiste en crear expresiones(fórmulas) con las palabras (términos).

Definición 1.1.3. *Si $\mathscr{L}$ es un lenguaje de primer orden, definimos al conjunto de fórmulas bien formadas como sigue:*

(a) Si t_1, t_2 son términos, entonces $t_1 = t_2$ es una fórmula.

(b) Si $t_1, \ldots, t_n$ son términos y R es una símbolo de relación de aridad n, entonces $R\ t_1, \ldots, t_n$ es una fórmula.

(c) Si ϕ y ψ son fórmulas, entonces, también lo son $\phi \wedge \psi, \neg\phi$ y $\exists x_i(\phi)$ para $i \in \omega$.

Con el fin de recalcar que en (b), de la Definición 1.1.3, sólo se trata de símbolos sin significado escribimos $R\ t_1, t_2, \ldots, t_n$ en lugar de $R(t_1, \ldots, t_n)$, pues la última notación pudiera sugerir que R es una relación. De manera análoga en el inciso (c) de la definición de término.

Para no escribir largas expresiones se usan las siguientes abreviaciones.

(a) $\forall x_i(\phi)$ abrevia $\neg(\exists x_i(\neg(\phi)))$.

(b) $\phi \vee \psi$ abrevia $\neg((\neg\phi) \wedge (\neg\psi))$.

(c) $\phi \to \psi$ abrevia $(\neg(\phi)) \vee (\psi)$.

(d) $\phi \leftrightarrow \psi$ abrevia $((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi))$.

(e) $x_i \neq x_j$ abrevia $\neg(x_i = x_j)$.

(e) Se usarán palabras y expresiones en Español en lugar de algunos símbolos. Escribiremos "existe", "o", "implica", "si y sólo si" en lugar de, respectivamente, $\exists, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

Por ejemplo, escribimos "existen conjuntos x, y, z tal que $x \in y$ y $y \in z$" en lugar de

$$\exists x_0(\exists x_1(\exists x_2((x_0 \in x_1) \wedge (x_1 \in x_2)))).$$

Una **subfórmula** de ϕ es una secuencia de símbolos de ϕ los cuales forman una fórmula. Por ejemplo, las subfórmulas de

$$(\exists x_0(x_0 \in x_1)) \wedge (\exists x_1(x_2 \in x_1)) \tag{1.1}$$

son $x_0 \in x_1, \exists x_0(x_0 \in x_1), x_2 \in x_1, \exists x_1(x_2 \in x_1)$ y la fórmula misma 1.1.

El **alcance** de la ocurrencia de un cuantificador $\exists x_i$ es la única subfórmula que empieza con $\exists x_i$. Por ejemplo, el alcance de $\exists x_0$ en 1.1 es $\exists x_0(x_0 \in x_1)$.

Una ocurrencia de una variable en una fórmula es **acotada** si y sólo si, está en el alcance de un cuantificador sobre la variable, de otra forma la variable se dice que es **libre**. Por ejemplo, en 1.1 la primera ocurrencia de x_1 es libre, pero en la segunda ocurrencia es acotada, mientras que x_0 es acotada y x_2 es libre.

Intuitivamente, una fórmula expresa una propiedad sobre sus variables libres, mientras que las variables acotadas se pueden sustituir por otras y la fórmula esencialmente no cambia, así 1.1 dice lo mismo que

$$(\exists x_4(x_4 \in x_1)) \wedge (\exists x_4(x_2 \in x_4)).$$

En lo que sigue escribimos $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ para indicar que algunas de las variables $x_1, \ldots, x_n$ son variables libres de ϕ. También, en lo que sigue, si $y_1, \ldots, y_n$ son otras variables, $\phi(y_1, \ldots, y_n)$ denotará a la fórmula resultante de sustituir a cada ocurrencia libre de x_i por y_i. Tal **sustitución** se llama **libre** si y sólo si, ninguna ocurrencia de x_i está en el alcance de un cuantificador $\exists y_i$. Intuitivamente $\phi(y_1, \ldots, y_n)$ dice de $y_1, \ldots, y_n$ lo mismo que $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ dice de $x_1, \ldots, x_n$, pero éste no es el caso si la sustitución no es libre. En adelante supondremos que las sustituciones son libres.

El uso de la notación $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ no implica que cada x_i ocurre libre en ϕ. También, $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ pudiera tener otras variables libres.

Por ejemplo, a la fórmula 1.1 podemos denotarla como $\phi(x_1, x_3)$. Así, $\phi(x_2, x_8)$ es

$$(\exists x_0(x_0 \in x_2)) \wedge (\exists x_1(x_2 \in x_1)),$$

y $\phi(x_0, x_8)$

$$(\exists x_0(x_0 \in x_0)) \wedge (\exists x_1(x_2 \in x_1)). \tag{1.2}$$

La última sustitución no es libre, y lo que $\phi(x_0, x_8)$ dice acerca de x_0 y x_8 es diferente a lo que $\phi(x_1, x_3)$, dice acerca de x_1, x_3, pues $\phi(x_1, x_3)$ dice que x_1 tiene un elemento y en

$\phi(x_0, x_8)$ dice que existe un conjunto que es elemento de sí mismo.

Si ϕ es una fórmula, $x_1, \ldots, x_n$ variables y $t_1, \ldots, t_n$ términos, denotaremos por $\phi(t_1, \ldots, t_n)$ a la fórmula que se obtiene de sustituir cada ocurrencia libre de x_i por t_i, para $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Se dice que un término t, es un **término libre** para la variable x_i, si ninguna ocurrencia libre de x_i en ϕ está en el alcance de un cauntificador $\forall x_j$ para x_j variable en t.

Una fórmula ϕ es una **sentencia** si no contiene variables libres. Por ejemplo, $\forall x(x = x)$ es una sentencia y $x = x$ no lo es.

Si ϕ es una fórmula, la **clausura universal** de ϕ es la fórmula obtenida de cuantificar todas las variables libres de ϕ. Así, la clausura universal de una fórmula es una sentencia.

Un ejemplo de una teoría formal, es la llamada **teoría de primer orden**, que, de acuerdo a la definición 1.1.2, el conjunto de simbolos es un lenguaje de primer orden, y el conjunto wfs es el conjunto de fórmulas de la Definición 1.1.3. Un conjunto de fórmulas serán los Axiomas. Tiene dos tipos de axiomas, los axiomas lógicos y los axiomas propios. Un axioma lógico es una fórmula que en toda interpretación del lenguaje es válida.

Sea $\mathscr{K}$ una teoría de primer orden. Si $\mathscr{K}$ admite un símbolo de relación, A_1^2, que denotaremos por $=$, tal que:

(1) $\forall x(x = x)$.

(2) $x = y \to (\phi(x, x) \to \phi(x, y))$ (donde $\phi(x, x)$ es una fórmula, $\phi(x, y)$ es la fórmula que se obtiene de reemplazar algunas ocurrencias libres de x por y con la condición de que y es libre para x en $\phi(x, x)$).

son teoremas de $\mathscr{K}$. Entonces, se dice que $\mathscr{K}$ es una **teoría de primer orden con igualdad**.

Entenderemos por esquema de axioma a una fórmula que tiene la forma de un axioma. El sistema de **axiomas lógicos** está formado por todos los esquemas de axioma.
A continuación se alistan los esquemas de axioma lógicos. Sean α, β, γ y ϕ fórmulas.

(1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$.

(2) $(\alpha \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$.

(3) $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \gamma)$.

(4) $(\forall x_i)\phi(x_i) \to \phi(t)$ si t es libre para x_i en $\phi(x_i)$.

(5) $(\forall x_i)(\phi \to \gamma) \to (\phi \to (\forall x_i)\gamma)$, ϕ no contiene ocurrencias libres de x_i.

Un sobconjunto de fórmulas serán los **axiomas propios**, el cual puede varíar de acuerdo a la teoría que se desee desarrollar. Las **reglas de inferencia** son

$\{(\alpha, \alpha \rightarrow \beta, \beta) : \alpha, \beta$ son fórmulas$\}$ y $\{\alpha, (\forall x_i)\alpha\}$, la primera regla se llama **Modus Ponens** y la segunda, regla de Generalización . Entonces, para cualesquiera fórmulas, α, β, β se sigue de $\alpha, \alpha \rightarrow \beta$.

Los axiomas (lógicos y propios) junto con las reglas de inferencia se usan para obtener nuevas fórmulas.

Si $\mathscr{L}$ en lenguaje de primer orden y Δ es un conjunto de fórmulas de $\mathscr{L}$, se dice que Δ es **consistente** si no existe una fórmula ϕ de $\mathscr{L}$ tal que $\Delta \vdash \phi$ y $\Delta \vdash \neg\phi$. Existen dos formas de estudiar a Δ, una, como un conjunto de fórmulas bien formadas de las cuales se pueden obtener, usando las reglas de inferencia, otras formulas, a ésta se le llama **sintáctica**, la otra forma es desde un punto de vista **semántico**, esto es, interpretar los símbolos de $\mathscr{L}$ y encontrar modelos en donde cada fórmula de Δ, sea verdadero.

Precisando el punto de vista semántico. Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje de primer orden. Una $\mathscr{L}-$**estructura**, $\mathscr{A}$, consiste de un "conjunto" no "vacío" A, llamado el **dominio**, junto con una "función" la cual asigna a cada símbolo constante, c, un elemento, $c^{\mathscr{A}}$, de A; a cada símbolo de relación, R, de aridad n, una relación $R^{\mathscr{A}} = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in A\}$, y a cada símbolo funcional f de aridad n una función, $f^{\mathscr{A}} : A^n \rightarrow A$.
Una **asignación** en A es una "función" $\alpha :$ $\{$variables de $\mathscr{L}\} \rightarrow A$.
Una **interpretación, I**, de $\mathscr{L}$ es una "pareja", $(\mathscr{A}, \alpha)$, que consiste de una estructura $\mathscr{A}$ y una asignación α en A.
Para cada interpretación **I**, $(\mathscr{A}, \alpha)$, a cada término t se le asigna un elemento de A, denotado por $val(t)[\alpha]$ como sigue.

(a) Si $t = c$, c constante en $\mathscr{L}$, $val(c)[\alpha] = c^{\mathscr{A}}$.

(b) Si $t = x_i$, x_i una variable, $val(x_i)[\alpha] = \alpha(x_i)$.

(c) Si $t = f\ t_1, \ldots, t_n$, $val(f\ t_1, \ldots, t_n)[\alpha] = f^{\mathscr{A}}(val(t_1)[\alpha], \ldots, val(t_n)[\alpha])$.

Ahora ya estamos en las condiciones de decir cuando una fórmula, ψ, es verdadera para una interpretación $\mathbf{I} = (\mathscr{A}, \alpha)$, para ello se define la **valuación de ψ respecto a** α, denotada por $val(\psi)[\alpha]$, por recursión sobre el número de conectivos de ψ, como sigue.

(a) Si $\psi = R\ t_1, \ldots, t_n$,

$$val(\psi)[\alpha] = \begin{cases} 1 & \text{si } (val(t_1)[\alpha], \ldots, val(t_n)[\alpha]) \in R^{\mathscr{A}}, \\ 0 & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

(b) Si $\psi = \neg\phi$,

$$val(\psi)[\alpha] = \begin{cases} 1 & \text{si } val(\phi)[\alpha] = 0, \\ 0 & \text{si } val(\phi)[\alpha] = 1. \end{cases}$$

(c) Si $\psi = \phi \rightarrow \gamma$,

$$val(\psi)[\alpha] = \begin{cases} 1 & \text{si } val(\phi)[\alpha] \leq val(\gamma)[\alpha], \\ 0 & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

(d) Si $\psi = (\forall x_i)\phi$,

$$val(\psi)[\alpha] = \begin{cases} 1 & \text{si } val(\psi)[\beta] = 1 \text{ para toda valuación } \beta \text{ que difiera de } \alpha \\ & \text{únicamente en } x_i, \\ 0 & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

Si ψ es tal que $val(\psi)[\alpha] = 1$, se escribe $\mathbf{I} \models \psi$.

Si Δ es un conjunto de fórmulas de $\mathscr{L}$, se dice que una $\mathscr{L}$-estructura, $\mathscr{A}$, es un **modelo** para Δ si y sólo si, para toda asignación α en $\mathscr{A}$ y toda fórmula, ψ, de Δ se cumple que $val(\psi)[\alpha] = 1$

Notar que, por definición, una fórmula no puede ser al mismo tiempo falsa y verdadera para un modelo.

A continuación, mencionamos un importante teorema, que se puede consultar en [1], que relaciona los enfoques sintáctico y semántico.

Teorema 1.1.4. *(Teorema de Completitud). Sean Δ un conjunto de sentencias de $\mathscr{L}$. Entonces, Δ es consistente si y sólo si, tiene un modelo.*

Notar que la definición de consistencia se hizo de manera sintáctica.

Los siguientes dos teoremas son importantes resultados en los que se fundamenta la presente tesis. Para una introducción a la demostración de éstos el lector interesado puede consultar [9], y la demostración formal se puede consultar en [8].

Teorema 1.1.5. *(Teorema de Incompletitud de Gödel). Si K es una $\mathscr{L}$- teoría de primer orden consistente tal que, a partir de su sistema axiomático es posible definir a los números naturales y las operaciones $+$ y $-$ y además demostrar algunos hechos básicos de éstos entonces, existe una $\mathscr{L}$sentencia, ψ, la cual es independiente de K. Esto es, no ocurre que ψ es teorema en $\mathscr{L}$ ni que $\neg\psi$ sea teorema en $\mathscr{L}$.*

Entonces, usando el Teorema de Completitud se cumple que existen modelos M_1 y M_2 para $K + \phi$ y para $K + \neg\phi$.

Teorema 1.1.6. *(Teorema de Inconsistencia de Gödel). Sea K una $\mathscr{L}$-teoría de primer orden. Si T es un conjunto de fórmulas de K lo suficientemente robusto para que a partir de ellos se pueda definir a los números naturales y a las operaciones suma y resta así como resultados básicos de éstas, entonces, si T es consistente entonces su consistencia no se puede demostrar en T.*

Los resultados básicos a los que se refieren los Teoremas 1.1.5 y 1.1.6, son, entre otros, los que afirma el Teorema 1.2.5.

Particularmente, el Teorema anterior afirma que si ZFC fuera consistente, entonces su consistencia no podría ser demostrada en ZFC.

Si Δ es un conjunto de fórmulas y ψ es una fórmula que no está en Δ, se dice que ψ es **consistente relativo a** Δ, si $Con(\Delta)$ implica la $Con(\Delta \cup \{\psi\})$. En lo que sigue se escribirá $\Delta + \psi$ en lugar de $\Delta \cup \{\psi\}$.
Si ψ y $\neg\psi$ son consistentes con Δ, se dice que ψ es **independiente** de Δ.

1.2. La teoría de conjuntos como una teoría formal.

Sea $\mathscr{K}$ la teoría de primer orden con igualdad cuyo lenguaje no tiene símbolos funcionales y tiene un símbolo de relación, $\in$, de aridad 2. En lo que sigue, en lugar de escribir $\in x, y$ y $= x, y$ escribiremos, respectivamente, $x \in y$ y $x = y$. Las variables del lenguaje, serán los objetos de la teoría y se les llamará **conjuntos**.

Los axiomas propios de $\mathscr{K}$ son:

Axioma 0. Existencia.

$$\exists x(x = x).$$

Intuitivamente, este axioma afirma que el universo en el que estamos trabajando no es vacío.

Axioma 1. Extensionalidad.

$$\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y).$$

Intuitivamente, este axioma dice que un conjunto está determinado por sus elementos.

Axioma 2. Fundación.

$$\forall x(\exists y(y \in x) \rightarrow \exists y(y \in x \wedge \neg\exists z(z \in x \wedge z \in y))).$$

En el capítulo 2, se hablará de este axioma.

El axioma de Comprensión es un intento de formalizar la construcción de los conjuntos de la forma $\{x : P(x)\}$ donde $P(x)$ denota alguna propiedad de x. Ya que la noción de propiedad se formaliza vía fórmulas, se quisiera formar axiomas de la forma:

$$\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow \phi(x)),$$

donde $\phi(x)$ es una fórmula. Pero, si $\phi(x)$ es $x \notin x$, entonces este axioma daría un conjunto y tal que

$$\forall x(x \in y \leftrightarrow x \notin x),$$

entonces, $y \in y \leftrightarrow y \notin y$. Por esto, nos restringimos a formar un conjunto con una propiedad, de tal manera que éste sea subconjunto de un conjunto dado.

Axioma 3. Axioma de Comprensión. Para cada fórmula ϕ sin y como variable libre, la clausura universal de la siguiente fórmula es un axioma:

$$\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \phi).$$

El axioma de Extensionalidad garantiza la unicidad del conjunto y, el cual se denota por

$$\{x : x \in z \wedge \phi\} \text{ o } \{x \in z : \phi\}.$$

La restricción de que y sea variable libre de ϕ es para evitar la autorreferencia en la definición de conjuntos. Por ejemplo, en la fórmula $\phi(x) = x \notin y$, y es libre para $\phi(x)$, entonces se tendría

$$\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge x \notin y).$$

Por lo tanto, si existe un conjunto z no vacío, la sentencia anterior dice que $x \in y \wedge x \notin y$. Notar que el Esquema de Comprensión da un axioma para cada fórmula ϕ, así se tienen infinitos axiomas.

Dada una fórmula ϕ, la colección $\{x : \phi(x)\}$ no necesariamente es un conjunto. El Axioma de Comprensión establece que cuando dicha colección se define a partir de un conjunto dado, entonces sí es un conjunto.

Si z es un conjunto, entonces a partir de la fórmula $x \neq x$ y el Axioma de Comprensión es posible construir el conjunto $\{x \in z : x \neq x\}$, el cual no tiene elementos. Más aún, tal conjunto es único por Extensionalidad. Por el Axioma 0, existe un conjunto z, por lo tanto, lo anterior justifica la siguiente definición.

Definición 1.2.1. 0 *es el único conjunto* y *tal que* $\forall x(x \notin y)$.

Decimos que y es un **subconjunto** de x, denotado por $y \subset x$ si $\forall z(z \in y \to z \in x)$. Así $0 \subset x$, para todo x.

Axioma 4. Axioma del Par.

$$\forall x \forall y \exists z(x \in z \wedge y \in z).$$

Notar que tal conjunto z puede tener más elementos, además de x y y.

Axioma 5. Unión.

$$\forall \mathscr{F}\ \exists A\ \forall Y\ \forall x(x \in Y \wedge Y \in \mathscr{F} \to x \in A).$$

Usando el Axioma de la Unión y el Esquema de Comprensión se define el conjunto:

$$\bigcup \mathscr{F} = \{x : \exists Y \in \mathscr{F}(x \in y)\}.$$

Axioma 6. Axioma de Reemplazo. Para cada fórmula ϕ que no contiene a Y como variable libre, la clausura universal de la siguiente fórmula es un axioma.

$$\forall x \in A\ \exists! y \phi(x, y) \to \exists Y\ \forall x \in A\ \exists y \in Y \phi(x, y).$$

El Axioma de Reemplazo nos da el conjunto z que se requiere para aplicar el Axioma de Comprensión y así formar conjuntos. En la mayoría de veces el Axioma de Reemplazo se aplicará junto con el Axioma de Comprensión.

Antes de enunciar el Axioma de Infinitud y el Axioma de Elección, es necesario establecer algunas definiciones.
Por el Axioma del Par, dados x, y existe un conjunto z tal que $x \in z \wedge y \in z$, sea $\phi(x, y)$ igual a $v = x \vee v = y$, entonces por el Axioma de Comprensión para ϕ, se tiene

$$\exists w \forall v(v \in w \leftrightarrow v \in z \wedge (v = x \vee v = y)).$$

El conjunto $w = \{v \in z : v = x \vee v = y\}$ es único por Extensionalidad.
Definimos **la pareja no ordenada** de x, y como $\{x, y\} = w$ y la **pareja ordenada** de x, y como $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Si $\mathscr{F} \neq 0$, sea $B \in \mathscr{F}$ usando el Axioma de Comprensión construimos el conjunto

$$\{x \in B : \forall Y \in \mathscr{F}(x \in Y)\},$$

que es igual a

$$\{x : \forall Y \in \mathscr{F}(x \in Y)\}.$$

A este conjunto lo denotamos por $\bigcap \mathscr{F}$. También, definimos los conjuntos $A \cap B = \bigcap\{A, B\}, A \cup B = \bigcup\{A, B\}$ y $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$.

Sean $\phi(x, y)$ una fórmula y A un conjunto, si se cumple que $\forall x \in A \exists! y \phi(x, y)$. Entonces, a partir de los Axiomas de Comprensión y Reemplazo formamos:

$$\{y \in Y : \exists x \in A \phi(x, y)\},$$

donde Y está dado por el Axioma de Reemplazo.

Sean A, B conjuntos, para un $y \in B$, se tiene

$$\forall x \in A \exists! z(z = \langle x, y\rangle),$$

así, usando el Axioma de Reemplazo sea un Y tal que $\forall x \in A \exists z \in Y(z = \langle x, y \rangle)$, o dicho de otra forma, $\forall x \in A, \langle x, y \rangle \in Y$. Luego, por el Axioma Comprensión, definimos:

$$prod(A, y) = \{z \in Y : \exists x \in A(z = \langle x, y \rangle)\} = \{z : \exists x \in A(z = \langle x, y \rangle)\}.$$

Se cumple

$$\forall y \in B \exists! z(z = prod(A, y)),$$

entonces, por el Axioma de Reemplazo existe Y tal que $\forall y \in B, prod(A, y) \in Y$, entonces

$$\{prod(A, y) : y \in B\} \subset Y.$$

Así, por el Axioma de Comprensión $\{prod(A, y) : y \in B\}$ es un conjunto, lo denotamos por $prod'(A, B)$. Luego, definimos el **producto cartesiano**:

$$A \times B = \bigcup prod'(A, B).$$

Una **relación** es un conjunto, R, tal que todos sus elementos son parejas ordenadas.

Por el Axioma de Comprensión,

$$\{x \in \bigcup(\bigcup R) : \exists y(\langle x, y \rangle \in R)\},$$

es un conjunto, lo denotamos por $dom(R)$. También, por el Axioma de Comprensión,

$$\{y \in \bigcup(\bigcup R) : \exists x(\langle x, y \rangle \in R)\},$$

es un conjunto, lo denotamos por $rango(R)$.
Definimos, usando los Axiomas de Comprensión y Reemplazo $R^{-} = \{\langle y, x \rangle : \langle x, y \rangle \in R\}$.

Ahora, ya podemos definir al término función. f es una **función** si y sólo si, f es una relación y

$$\forall x \in\ dom(f) \exists! y \in\ rango(f)(\langle x, y \rangle \in f).$$

El símbolo $f : A \to B$ significa que f es una función con $dom(f) = A$ y $rango(f) = B$. Si $x \in A, f(x)$ es el único y tal que $\langle x, y \rangle \in f$. Si $C \subset A,\ f \restriction C = f \cap C \times B$ y se le llama **restricción de f a C**, y definimos $f(C) = rango(f \restriction C) = \{f(x) : x \in C\}$.

Una función, $f : A \to B$ es **inyectiva**, si y sólo si f^{-} es una función, f es **sobreyectiva** si y sólo si $rango(f) = B$ y f es **biyectiva** si y sólo si es inyectiva y sobreyectiva.

Si R es una relación, en lugar de escribir $(x, y) \in R$ escribimos xRy.
Un **orden total** es una pareja $\langle A, R \rangle$ tal que, A es un conjunto, R una relación y R es **transitiva** en A:

$$\forall x, y, z \in A(xRy \wedge yRz \to xRz),$$

se cumple la tricotomia:

$$\forall x, y \in A(x = y \vee xRy \vee yRx),$$

y R es irreflexiva:

$$\forall x \in A(\neg(xRx)).$$

Si R y S son relaciones y A y B conjuntos, decimos que $\langle A, R\rangle$ y $\langle B, S\rangle$ son **isomorfos**, denotado por $\langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle$, si y sólo si, existe una función biyectiva $f : A \to B$ tal que $\forall x, y \in A(xRy \leftrightarrow f(x)Sf(y))$, a la función f se le denomina **isomorfismo** de $\langle A, R\rangle$ a $\langle B, S\rangle$.

Se dice que R **bien ordena** A o que $\langle A, R\rangle$ es un **buen orden**, si y sólo si, $\langle A, R\rangle$ es un orden total y todo subconjunto no vacío de A tiene un R primer elemento, esto es, si para todo $C \subset A$, existe $x_0 \in C$ tal que $\forall x \in A(x_0 Rx)$.

Definición 1.2.2. *Un conjunto x es transitivo si y sólo si todo elemento de x es un subconjunto de x.*

Por ejemplo, $0, \{0\}, \{0, \{0\}\}$ son conjuntos transitivos.

Definición 1.2.3. *x es un ordinal si y sólo si x es transitivo y está bien ordenado por la relación $\in_x$, donde,*

$$\in_x = \{\langle y, z\rangle \in x \times x : y \in z\}.$$

En lo que sigue se usan las letras griegas $\alpha, \beta, \dots,$ para denotar a los ordinales y en lugar de escribir $\alpha \in \beta$ escribiremos $\alpha < \beta$ y $\alpha \geq \beta$ denotará que $\alpha > \beta$ o $\alpha = \beta$.

Axioma 7. Axioma del Conjunto Potencia.

$$\forall x \exists y \forall z(z \subset x \to z \in y).$$

Notar que, el conjunto y, puede tener más elementos además de los subconjuntos de x. Usando el Axioma del Conjunto Potencia y el Axioma de Comprensión formamos el conjunto:

$$\{z : z \subset x\},$$

que denotamos por $\mathscr{P}(x)$ y que llamamos conjunto potencia de x.

Definición 1.2.4. *Sea α un ordinal.*

(1) $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$.

(2) α *es un ordinal sucesor si y sólo si* $\exists\beta(\alpha = S(\beta))$. α *es un ordinal límite si y sólo si* $\alpha \neq 0$ *y* α *no es un ordinal sucesor.*

(3) $1 = S(0), 2 = S(1), 3 = S(2), etc.$

(4) α *es un número natural si y sólo si,* $\forall\beta \leq \alpha(\beta = 0 \vee \beta$ *es un ordinal sucesor*$)$.

Axioma 8. Axioma de Infinitud.

$$\exists x(0 \in x \wedge \forall y \in x(S(y) \in x)).$$

Sea x el conjunto dado por Infinitud, entonces x contiene a todos los números naturales, así por el Axioma de Comprensión,

$$\{y \in x : y \text{ es un número natural}\}$$

es un conjunto, denotamos a tal conjunto por ω.

El siguiente teorema dice que, en efecto, ω es el conjunto de números naturales que ya conocemos.

Teorema 1.2.5. *(1)* $0 \in \omega$.

(2) $\forall n \in \omega(S(n) \in \omega)$.

(3) $\forall n, m \in \omega(n \neq m \to S(n) \neq S(m))$.

(4) *(Inducción)* $\forall X \subset \omega[0 \in X \wedge \forall n \in X(S(n) \in X)) \to X = \omega]$.

En ω se pueden definir las operaciones $+, -$ de tal manera que cumplan las propiedades que ya conocemos vea [2].

Axioma 9. Axioma de Elección. $\forall A \exists R(R$ bien ordena$A)$.

Al sistema de axiomas de $\mathscr{K}$ de la forma $0-9$ se le conoce como **ZFC**. A la teoría (definiciones y teoremas) que se construye a partir de los axiomas de $\mathscr{K}$, junto con ZFC, se le llama **teoría de conjuntos**. En lo que sigue usaremos las siguientes abreviaciones, ZF consiste de los axiomas $0-8$, $ZF-P$ consiste de los axiomas $0-7$ y $ZFC-P$ consiste de los axiomas $0-7$ junto con el Axioma 9. Por $ZFC^-, ZF^-, ZF^- - P$ y $ZFC^- - P$ se entenderá, respectivamente, ZFC, ZF, $ZF-P$ y $ZFC-P$ sin el Axioma de Fundación.

1.2.1. Clases.

Se ha visto que dada una fórmula $\phi(x)$, no necesariamente existe un conjunto de la forma $\{x : \phi(x)\}$. Sin embargo, consideraremos tales colecciones, en el entendido que no son objetos legítimos de la teoría. Informalmente, a una colección de la forma $\{x : \phi(x)\}$ se le llama **clase**. Una **clase propia** es una clase que no forma un conjunto. El Axioma de Comprensión dice que una subclase de un conjunto es un conjunto. En lo que sigue se usarán letras mayúsculas y en negrita para denotar a las clases. Es posible demostrar que las siguientes clases son clases propias.

$$\mathbf{V} = \{x : x = x\}.$$
$$\mathbf{ON} = \{x : x \text{ es un ordinal}\}.$$

Teorema 1.2.6. *$\boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{ON}$ son clases propias.*

Demostración. Ya que $x = x$ para cada $x \in \mathbf{V}$. Si $\mathbf{V}$ fuera conjunto, esto es, $\mathbf{V} = z$, para algún z conjunto, entonces para cada x, $x \in z$, así por Comprensión formamos el conjunto $y = \{x \in z : x \notin x\} = \{x : x \notin x\}$, entonces $y \in y \leftrightarrow y \notin y$.

Si $\mathbf{ON}$ fuera conjunto, entonces $\mathbf{ON}$ cumpliría las condiciones para ser un ordinal, así, se tendría que $\mathbf{ON} \in \mathbf{ON}$, lo cual no puede ocurrir por el Axioma de Fundación, ver capítulo 2. ∎

Formalmente, una clase propia no existe, una expresión que contenga una clase deberá ser considerada como una abreviación de una expresión que no contenga a la clase. Por ejemplo, la expresión

$$x \in \mathbf{ON}$$

abrevia la expresión "x es un ordinal", $\mathbf{ON} = \mathbf{V}$ abrevia $\forall x(x \text{ es un ordinal}) \leftrightarrow x = x$.

Por ejemplo, la expresión abreviada por $\{x \in y : x \text{ es un ordinal }\}$ la escribimos $\mathbf{ON} \cap y$. La notación de clases ayuda, por ejemplo, al considerar la operación unión, entre conjuntos, $\mathbf{UN} = \{\langle\langle x, y\rangle, z\rangle : z = x \cup y\}$ podemos pensarla como $\mathbf{UN} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$.

A continuación se enuncian los Teoremas de Inducción y Recursión Transfinita en $\mathbf{ON}$, en términos de clases, la demostración del Teorema de Recursión Transfinita es un caso particular del Teorema 2.4.7 que estudiaremos más adelante.

Teorema 1.2.7. *Si $\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{ON}$ y $\boldsymbol{C} \neq 0$, entonces $\boldsymbol{C}$ tiene un elemento minimal.*

Demostración. Sea $\alpha \in \mathbf{C}$, si α no es un elemento minimal, sea β el elemento minimal de $\alpha \cap \mathbf{C}$. Ya que $\alpha \cap \mathbf{C} \subset \alpha$ y $\langle \alpha, \in\rangle$ es un buen orden existe tal β. Así, β es un elemento minimal de $\mathbf{C}$.

Teorema 1.2.8. *Si $\boldsymbol{F} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, existe una única función $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{ON} \to \boldsymbol{V}$ tal que*

$$\forall \alpha[\boldsymbol{G}(\alpha) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{G} \restriction \alpha)].$$

1.2.2. Modelos de ZFC.

Aunque en el lenguaje de la teoría de conjuntos, los símbolos $\exists, \neg, \in$, formalmente no se les ha atribuido ninguna significación específica, siempre están connotados, como se ha dicho, por su significación habitual. Una fórmula, por ejemplo, $(x \in y) \wedge \neg(x \in y)$ nos resulta paradójica, pero, formalmente, no es verdadera ni falsa; las sentencias, como la anterior, tienen un valor de verdad cuando se interpretan en modelos.

Si $\mathscr{L}$ es el lenguaje de la teoría de conjuntos, una interpretación de $\mathscr{L}$ está dada por un universo M junto con una relación, E, en M que interpreta a $\in$ (y una asignación en M). Así, una interpretación de $\mathscr{L}$ podría ser la pareja M, E, donde M es el conjunto de personas y E la relación " ser hijo de", así $x \in y$ se traduciría en x^M es hijo de y^M, donde x^M, y^M son las respectivas personas que le corresponde a x y y. Pero, ¿qué significaría $\{x\}$ aquí?, y es que en M no se cumple el Axioma del Par. Así que M, E no es un modelo de ZFC.
También, ya que a partir de ZFC es posible definir una cantidad infinita de elementos, un modelo de ZFC tendría que ser infinito.
Así que necesariamente los modelos de la teoría de conjuntos son "ideales", éstos se consideran en la propia teoría de conjuntos y serán clases. Por ejemplo, en el Capítulo 2, a partir de ZF^- se construye un modelo, $M = R(\omega)$, para $ZF - Inf + (\neg Inf)$. Entonces, cómo garantizar que no existe una formula ϕ tal que se cumpla $\phi \wedge \neg\phi$ en M. Puesto que M se construye en ZF^-, para garantizar ésto se apela a la consistencia de ZF^-. Así que si $Con(ZF^-)$ entonces existe un modelo para $ZF - Inf + (\neg Inf)$, es decir que $ZF - Inf + (\neg Inf)$ es consistente (Por el Teorema que dice que un conjunto de Axiomas Δ es consistente si y sólo admite un modelo). Por lo tanto, no se hacen pruebas absolutas de consistencia sino relativas. Siguiendo con nuestro ejemplo, una vez que se ha probado la $Con(ZF - Inf + (\neg Inf))$ se tiene que $ZF - Inf \nvdash Inf$. Es decir, que es correcto poner al Axioma de Infinitud como Axioma.

En general, si ϕ es una fórmula y se cumple que $Con(\Delta) \rightarrow Con(\Delta + \neg\phi)$, entonces se tiene que ϕ no se deduce de Δ.

1.3. Resultados de la teoría de conjuntos.

En esta sección enunciamos algunas definiciones y resultados de la teoría de conjuntos que usaremos en los siguientes capítulos. Las demostraciones de estos resultados se pueden consultar en [2] y [7].

Teorema 1.3.1. *Si $\langle A, R\rangle$ es un buen orden, entonces existe un único ordinal, C, tal que $\langle A, R\rangle \cong C$.*

Definición 1.3.2. *Si $\langle A, R\rangle$ es un buen orden, el tipo$(\langle A, R\rangle)$ es el único ordinal C tal que $\langle A, R\rangle \cong C$.*

Definición 1.3.3. *Sean A Y B conjuntos,*
(1) $A \precsim B$ si y sólo si, existe una función inyectiva de A en B.
(2)$A \approx B$ si y sólo si existe una función biyectiva de A a B.
(3) $A \prec B$ si y sólo si $A \precsim B$ y $B \not\precsim A$.

Se cumple que $\precsim$ es transitiva y que $\approx$ es una relación de equivalencia.

Teorema 1.3.4. ***ON*** *satisface las condiciones para ser un ordinal, excepto la de ser conjunto.*

Entonces, dado un subconjunto de **ON** existe un elemento $\in -$minimal.

Teorema 1.3.5. *(Cantor-Schröder-Berstein). Si, A y B son conjuntos tales que $A \precsim B$ y $B \precsim A$, entonces $A \approx B$.*

Si A puede ser bien ordenado, entonces por 1.3.1 existe un ordinal α tal que $A \cong \alpha$, así existe un mínimo de tales α, al menor α se le llama **cardinalidad** de A y se denota por $|A|$.

En lo que sigue al usar expresiones en donde aparezca $|A|$, por ejemplo $|A| < \alpha$, se supondrá que tal notación es correcta, esto es, que A puede ser bien ordenado. Usando el Axioma de Elección, $|A|$ está definido para todo conjunto A.

Definición 1.3.6. *Un ordinal α es un cardinal si y sólo si, $\alpha = |\alpha|$.*

Definición 1.3.7. *A es finito si y sólo si $|A| < \omega$. A es numerable si y sólo si $|A| \leq \omega$. A es infinito si no es finito y no numerable si no es numerable.*

Teorema 1.3.8. *(Cantor). $x \prec \mathscr{P}(x)$.*

Usando el Axioma de Elección se cumple el siguiente teorema.

Teorema 1.3.9. $\forall\alpha\exists\kappa(\kappa > \alpha$ *y* κ *es un cardinal*).

Demostración. Dado α, usando el axioma de Elección, $\mathscr{P}(\alpha)$ puede ser bien ordenado, luego tiene sentido considerar $|\mathscr{P}(\alpha)|$, sea $\kappa = |\mathscr{P}(\alpha)|$. ■

Definición 1.3.10. *α^+ es el menor cardinal mayor que α. κ es un cardinal sucesor si y sólo si $\kappa = \alpha^+$. κ es un cardinal límite si y sólo si $\kappa > \omega$ y no es un cardinal sucesor.*

Definición 1.3.11. *ω_α está definido por recursión transfinita en* ***ON*** *como:*

(1) $\omega_0 = \omega$.

(2) $\omega_{\alpha+1} = (\omega_\alpha)^+$.

(3) Si γ es un ordinal límite, $\omega_\gamma = sup\{\omega_\alpha : \alpha < \gamma\}$.

Usualmente a estos números ordinales se les llama alephs. También, se define $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$.

Definición 1.3.12. *Para conjuntos A, B $A^B = {}^B A = \{f : f$ es una función y $dom(f) = B$ y $rango(f) \subset A\}$. En el caso de que A y B sean ordinales, usaremos ${}^B A$.*

Definición 1.3.13. *En ZFC, para κ, λ cardinales, $\kappa^\lambda = |{}^\lambda \kappa|$.*

Teorema 1.3.14. $2^\omega = |\mathscr{P}(\omega)|$.

Demostración. Por definición $2^\omega = |{}^\omega 2| = |\{f : f : \omega \to 2\}|$. Por otro lado, se cumple que $|\{f : f : \omega \to 2\}| = |\mathscr{P}(\omega)|$. ■

¿Cuál es la relación entre $|\mathscr{P}(\omega)|$ y ω_1? La proposición que se conoce como Hipótesis del continuo enuncia:

$$|\mathscr{P}(\omega)| = \omega_1.$$

Definición 1.3.15. *Si X es un conjunto de ordinales, $sup(X) = \bigcup X$ y si $X \neq 0$, $mín(X) = \bigcap X$.*

Lema 1.3.16. *Si X es un conjunto de ordinales, $sup(X)$ es el menor ordinal mayor o igual que todo elemento de X.*

Definición 1.3.17. *(1) Si A es un conjunto y R una relación en A, tal que $dom(R)$ es A. Se dice que $B \subset A$ es no acotado o cofinal en A, si y sólo si, $\forall x \in A \exists y \in B : xRy$.*

(2) La cofinalidad de β, denotada por $(cof(\beta))$, es el menor α tal que existe una función f de α en β tal que $rango(f)$ es cofinal en β.

Se cumple que $cof(\beta) \leq \beta$, $cof(\beta)$ es un cardinal, y si β es un ordinal sucesor, $cof(\beta) = 1$.

Definición 1.3.18. *(1) Un ordinal β, es regular si y sólo si β es un ordinal límite y $cof(\beta) = \beta$.*

Por ejemplo, ω es regular.

Lema 1.3.19. *Si un ordinal β es regular entonces β es un cardinal.*

Definición 1.3.20. *κ es fuertemente inaccesible si y sólo si $\kappa > \omega$, κ es regular y*

$$\forall \lambda < \kappa (2^\lambda < \kappa).$$

Lema 1.3.21. *Sea κ un ordinal regular. Si I es un conjunto, tal que $|I| < \kappa$ y para cada $i \in I$, A_i es un conjunto tal que $|A_i| < \kappa$, entonces*

$$|\bigcup \{A_i : i \in I\}| < \kappa.$$

Lema 1.3.22. *Si $\kappa \geq \omega$ y $|X_\alpha| \leq \kappa$, para todo $\alpha < \kappa$, entonces $|\bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha| \leq \kappa$.*

Definición 1.3.23. *Una función $n-$aria en A es una función, $f : A^n \to A$ si $n > 0$, o un elemento de A si $n = 0$. Si $B \subset A$, B es cerrado bajo f, si y sólo si $f(B^n) \subset B$ (o $f \in B$ si $n = 0$). Una función finitaria es una función $n-$aria para algún n. Si $\mathscr{L}$ es un conjunto de funciones finitarias y $B \subset A$, la clausura de B bajo $\mathscr{L}$ es $\bigcap\{D : B \subset D \subset A$ y D es cerrado bajo toda función de $\mathscr{L}\}$.*

Teorema 1.3.24. *Sean, κ un cardinal infinito, conjuntos A, B tales que $B \subset A, |B| \leq \kappa$ y $\mathscr{L}$ un conjunto de funciones finitarias en A, con $|\mathscr{L}| \leq \kappa$. Entonces, la clausura de B bajo $\mathscr{L}$ tiene cardinalidad menor o igual que κ.*

Capítulo 2

Conjuntos bien fundados

En esta sección se discute el Axioma de Fundación. Como se verá, este axioma tiene la finalidad de restringir el dominio de objetos de estudio en matemáticas. Particularmente, evita objetos del tipo $x = \{x\}$. Trabajando en ZF, sin el Axioma de Fundación, definimos **WF**, la clase de conjuntos bien fundados. Esta clase es construida vía la operación potencia de un conjunto, partiendo del conjunto 0, es cerrada bajo operaciones definidas en la teoría de conjuntos, como se ve en el Lema 2.1.8, además, contiene una copia de cualquier espacio topológico y de cualquier grupo y no admite conjuntos del tipo $x = \{x\}$.

2.1. Propiedades de los conjuntos bien fundados

Definición 2.1.1. *Por recursión transfinita, definimos $R(\alpha)$ para α en $\boldsymbol{ON}$ como:*

(a) $R(0) = 0$.

(b) $R(\alpha + 1) = \mathscr{P}(R(\alpha))$.

(c) $R(\alpha) = \bigcup_{\xi<\alpha} R(\xi)$, *si α es un ordinal límite.*

Definición 2.1.2. $\boldsymbol{WF} = \bigcup\{R(\alpha) : \alpha \in \boldsymbol{ON}\}$.

Lema 2.1.3. *Para cada α se cumple:*

(a) $R(\alpha)$ *es transitivo,*

(b) $\forall \xi \leq \alpha \ R(\xi) \subset R(\alpha)$.

Demostración. La demostración se hará por inducción transfinita en α. Asumamos que el lema es válido para todo $\beta < \alpha$.
Caso I. Si $\alpha = 0$ trivialmente se vale (a) y (b).

Caso II. Si $\alpha = \beta + 1$. Sean x y y tales que $y \in x \in R(\alpha) = R(\beta + 1) = \mathscr{P}(R(\beta))$, entonces $x \subset R(\beta)$, luego $y \in R(\beta)$. A partir de la transitividad de $R(\beta)$, se sigue que $y \subset R(\beta)$, entonces $y \in \mathscr{P}(R(\beta)) = R(\alpha)$. Así se cumple (a).
Para (b), sea $\xi < \alpha$, entonces $\xi \leq \beta$, así por hipótesis $R(\xi) \subset R(\beta)$. Luego, se cumple que $R(\beta) \in R(\alpha)$, entonces por (a) $R(\beta) \subset R(\alpha)$, así se tiene que $R(\xi) \subset R(\beta) \subset R(\alpha)$.

Caso III. Si α es límite, por definición $R(\alpha) = \bigcup_{\xi<\alpha} R(\xi)$, (a) se cumple ya que la unión de conjuntos transitivos es transitivo y (b) es inmediato de la definición de $R(\alpha)$.

■

Definición 2.1.4. *Si $x \in$ **WF**, se define rank(x), como el menor ordinal β tal que x está en $R(\beta + 1)$.*

A partir de la definición $R(\alpha)$ para el caso límite se garantiza que, rank, está bien definido. Así, si $\beta = \text{rank}(x), x \in R(\beta+1)) = \mathscr{P}(R(\beta))$, luego $x \subset R(\beta)$ y por la definición de rank, $x \notin R(\beta)$.

Lema 2.1.5. *Para α en **ON** se cumple que, $R(\alpha) = \{x \in \textbf{WF} : rank(x) < \alpha\}$.*

Demostración. Sea $x \in \textbf{WF}$, si $x \in R(\alpha)$, entonces $\text{rank}(x) < \alpha$. Por otro lado, si $\beta = \text{rank}(x) < \alpha$, entonces $x \in R(\beta + 1) \subset R(\alpha)$, así $x \in R(\alpha)$. ■

El siguiente resultado será de utilidad para el cálculo de ranks.

Lema 2.1.6. *Si $y \in$ **WF**, entonces*

(a) $\forall x \in y\ (x \in \textbf{WF} \wedge rank(x) < rank(y))$ *y*

(b) $rank(y) = sup\{rank(x) + 1 : x \in y\}$.

Demostración. Sea $y \in \textbf{WF}$. Para demostrar (a), sea $\alpha = \text{rank}(y)$ entonces, $y \in R(\alpha+1) = \mathscr{P}(R(\alpha))$. Así, si $x \in y$ se cumple que $x \in R(\alpha)$, así $x \in \textbf{WF}$, por la definición de **WF**; luego, $\text{rank}(x) < \alpha$ (por el Lema 2.1.5).
Para demostrar (b). Para cada $x \in y$ por (a) del lema, $x \in \textbf{WF}$ y $\text{rank}(x) < \text{rank}(y)$, así $\text{rank}(x)+1 \leq \text{rank}(y)$. Luego, $\sup\{\text{rank}(x)+1 : x \in y\}$ existe, sea $\alpha = \sup\{\text{rank}(x)+1 : x \in y\}$. Entonces, por la definición de sup, $\alpha \leq \text{rank}(y)$.
Por otro lado, usando el hecho, de que para cada $x \in y, \text{rank}(x) < \alpha$, se tiene por el Lema 2.1.5 que $y \subset R(\alpha)$. Así $y \in R(\alpha + 1)$, luego $\text{rank}(y) \leq \alpha$. Por lo tanto, $\alpha = \text{rank}(y)$. ■

El Lema 2.1.6 establece que la clase **WF** es transitiva, más aún que un elemento de **WF** se forma a partir de los elementos de menor rank que él. Esto evita que en **WF** existan x tal que $x \in x$, ya que si existiera uno de tales x, se tendría que $\text{rank}(x) < \text{rank}(x)$ lo cual es falso, ya que $\text{rank}(x) \in \textbf{ON}$. También, por lo anterior, no existen x y y en **WF** tales que $x \in y$ y $y \in x$, pues de lo contrario, por la transitividad de **WF** se tendría que $x \in x$.

Lema 2.1.7. *(a)* $\forall\alpha \in \boldsymbol{ON}(\alpha \in \boldsymbol{WF} \wedge rank(\alpha) = \alpha)$.

(b) $\forall\alpha \in \boldsymbol{ON}(R(\alpha) \cap \boldsymbol{ON} = \alpha)$.

Demostración. La demostración será por inducción transfinita en α. Supongamos que (a) se cumple para todo $\beta < \alpha$. Entonces, para $\beta < \alpha, \beta \in R(\beta+1) \subset R(\alpha)$, así $\alpha \subset R(\alpha)$, luego $\alpha \in R(\alpha+1)$, por lo que $\alpha \in \mathbf{WF}$. Luego, por el Lema 2.1.6(b), $\text{rank}(\alpha) = \sup\{\text{rank}(x)+1 : x \in \alpha\} = \sup\{\beta + 1 : \beta \in \alpha\} = \alpha$. Por lo tanto, se cumple (a).
Para demostrar (b), a partir del Lema 2.1.5 se tiene que para $\alpha \in \mathbf{ON}$, $R(\alpha) = \{x \in \mathbf{WF} : \text{rank}(x) < \alpha\}$. Así, $R(\alpha) \cap \mathbf{ON} = \{x \in \mathbf{ON} : \text{rank}(x) < \alpha\}$. Luego, por (a) del lema se tiene que $\{x \in \mathbf{ON} : \text{rank}(x) < \alpha\} = \{x \in \mathbf{ON} : x < \alpha\} = \alpha$.

■

Del Lema 2.1.7 se sigue que, **WF** contiene a la clase **ON**. Más aún, el siguiente resultado establece que **WF** es cerrado bajo las operaciones estándar de conjuntos.

Lema 2.1.8. *(a) Si x está en* $\boldsymbol{WF}$*, entonces* $\bigcup x, \mathscr{P}(x), \{x\}$ *están en* $\boldsymbol{WF}$ *y el rank de estos conjuntos es menor que* $rank(x) + \omega$.

(b) Si x y y están en $\boldsymbol{WF}$*, entonces* $x \times y, x \cup y, x \cap y, \{x, y\}, \langle x, y\rangle$ *y* x^y *están en* $\boldsymbol{WF}$ *y el rank de estos conjuntos es menor que* $máx(rank(x), rank(y)) + \omega$.

Demostración. Para (a), sean x en **WF** y $\alpha = \text{rank}(x)$. Entonces $x \subset R(\alpha)$.
Así $\mathscr{P}(x) \subset \mathscr{P}(R(\alpha)) = R(\alpha+1)$, luego $\mathscr{P}(x) \in R(\alpha+2)$.
De que $x \subset R(\alpha)$ y $R(\alpha)$ es transitiva, se sigue que $\bigcup x \subset R(\alpha)$, entonces $\bigcup x \in R(\alpha+1)$.
También, a partir de que $x \in R(\alpha+1)$ se sigue que, $\{x\} \subset R(\alpha+1)$ luego, $\{x\} \in R(\alpha+2)$.
Por lo tanto, se cumple que $\bigcup x, \mathscr{P}(x)$, y $\{x\} \in \mathbf{WF}$ y el rank de cada conjunto es menor que $\text{rank}(x) + 1 < \text{rank}(x) + \omega$.

Para demostrar (b), sean x, y en **WF** y α=máx$\{\text{rank}(x), \text{rank}(y)\}$. Entonces, por el Lema 2.1.5 $x, y \in R(\alpha+1)$, luego $\{x, y\} \subset R(\alpha+1)$, así $\{x, y\} \in R(\alpha+2)$.

Entonces, por lo anterior y (a), se sigue que $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \langle x, y\rangle \subset R(\alpha+2)$, por lo cual $\langle x, y\rangle \in R(\alpha+3)$.

Por lo anterior se tiene que $x \times y \subset R(\alpha+3)$ de donde, $x \times y \in R(\alpha+4)$.
Si $w, z \in x \cup y$, entonces $w, z \in R(\alpha+1)$, luego $\langle w, z\rangle \in R(\alpha+3)$. Entonces, si $f \in x^y$, $f \subset R(\alpha+3)$, así $f \in R(\alpha+4)$, por lo tanto $x^y \in R(\alpha+5)$.
Por último, $\alpha = \text{máx}\{\text{rank}(x), \text{rank}(y)\}$ implica que $x, y \subset R(\alpha)$, así $x \cup y \subset R(\alpha)$, de donde $x \cap y, x \cup y \in R(\alpha+1)$.
Así, se cumple que $x \times y, x \cup y, x \cap y, \{x, y\}, (x, y)$ y x^y están en **WF** y el rank de estos conjuntos es menor $\alpha + 4 < \text{máx}(\text{rank}(x), \text{rank}(y)) + \omega$.

■

Lema 2.1.9. $\forall x(x \in \boldsymbol{WF} \leftrightarrow x \subset \boldsymbol{WF})$.

Demostración. Si $x \in \mathbf{WF}$ entonces, se cumple que $x \subset \mathbf{WF}$, por la transitividad de $\mathbf{WF}$ (Lema 2.1.6). Por otro lado, si $x \subset \mathbf{WF}$, sea α=sup$\{\text{rank}(y)+1 : y \in x\}$, entonces $x \subset R(\alpha)$, así $x \in R(\alpha+1)$, luego $x \in \mathbf{WF}$. ■

Es posible verificar que si $\mathbf{M}$ es una clase tal que

$$\forall x(x \subset \mathbf{M} \to x \in \mathbf{M})$$

entonces, $\mathbf{WF} \subset \mathbf{M}$.

Lema 2.1.10. $\forall n \in \omega(|R(n)| < \omega)$.

Demostración. La demostración será por inducción en n. Para $n = 0$, $R(n) = 0$, así trivialmente se cumple el lema. Si el lema se cumple para n, entonces
$|R(n+1)| = |\mathscr{P}(R(n))| = |2^{R(n)}| < \omega$. ■

Lema 2.1.11. $|R(\omega)| = \omega$.

Demostración. $R(\omega) = \bigcup\{R(n) : n \in \omega\}$, luego por el Lema 2.1.10 cada $|R(n)| < \omega$, así usando que la unión númerable de conjuntos finitos es a lo más numerable se tiene que, $|R(\omega)| \leq \omega$. También, se cumple que $\omega \subset R(\omega)$. Por lo tanto, $|R(\omega)| = \omega$. ■

Definición 2.1.12. *Por recursión transfinita, definimos a la función beth como sigue, denotamos a beth(α) como $\beth_\alpha$.*

(1) $\beth_0 = \omega$.

(2) $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$,

(3) Para γ límite, $\beth_\gamma = sup\{\beth_\alpha : \alpha < \gamma\}$

Por inducción transfinita en α es posible demostrar que $\beth_\alpha$ es un cardinal. El siguiente Lema establece que el cardinal de $R(\alpha)$ crece exponencialmente.

Lema 2.1.13. $|R(\omega+\alpha)| = \beth_\alpha$

Demostración. Por inducción en α. Para $\alpha = 0$ se cumple por el Lema 2.1.11. Si $\alpha = \beta+1$ por la definición de suma de ordinales, se cumple que $R(\omega+\alpha) = R(\omega+(\beta+1)) = R((\omega+\beta)+1) = \mathscr{P}(R(\omega+\beta))$. Así, $|R(\omega+\alpha)| = |\mathscr{P}(R(\omega+\beta))| = |{}^{|R(\omega+\beta)|}2|$ luego, por hipótesis de inducción $|{}^{|R(\omega+\beta)|}2| = |{}^{\beth_\beta}2| = \beth_{\beta+1} = \beth_\alpha$.

Si α es un ordinal límite, entonces $\omega+\alpha$ también lo es. Así $R(\omega+\alpha) = \bigcup\{R(\omega+\beta : \beta < \alpha)\}$, luego $|R(\omega+\alpha)| = |\bigcup\{R(\omega+\beta : \beta < \alpha)\}| = |\bigcup\{|R(\omega+\beta)| : \beta < \alpha\}|$.
Usando que la unión de cardinales es un cardinal se tiene:
$|\bigcup\{|R(\omega+\beta)| : \beta < \alpha\}| = \bigcup\{|R(\omega+\beta)| : \beta < \alpha\}$. Así, $|R(\omega+\alpha)| = \bigcup\{|R(\omega+\beta)| : \beta < \alpha\} = \bigcup\{\beth_\beta : \beta < \alpha\} = \sup\{\beth_\beta : \beta < \alpha\} = \beth_\alpha$. ■

Lema 2.1.14. *(a) Todo grupo es isomorfo a un grupo de **WF**.*
*(b)Todo espacio topológico es homeomorfo a un espacio topológico de **WF**.*

Demostración. Para (a), un grupo es una pareja $\langle G, \cdot \rangle$, donde $\cdot : G \times G \to G$. Por los Lemas 2.1.8 y 2.1.9, respectivamente se tiene

$$\langle G, \cdot \rangle \in \mathbf{WF} \leftrightarrow G \in \mathbf{WF} \text{ y } G \in \mathbf{WF} \leftrightarrow G \subset \mathbf{WF}.$$

Si $\langle G, \cdot \rangle$ es un grupo, sean $\alpha = |G|$ y $f : \alpha \to G$ una función biyectiva. Sea $\circ : \alpha \times \alpha \to \alpha$ definida como: $\xi \circ \eta = f^{-1}(f(\xi) \cdot f(\eta))$. Se cumple $\langle \alpha, \circ \rangle$ es isomorfo a $\langle G, \cdot \rangle$.

Por otro lado, si $\langle X, \tau \rangle$ es un espacio topológico. Sean $\alpha = |X|$ y $f : X \to \alpha$ una función biyectiva. Sea $\tau_\alpha = \{f(A) : A \in \tau\}$. Se cumple que $\langle X, \tau \rangle$ es homeomorfo a $\langle \alpha, \tau_\alpha \rangle$. ■

Notar que en el Lema 2.1.14 se usa el Axioma de Elección al considerar la cardinalidad de conjuntos.
Por lo tanto, **WF** admite una buena parte de la matemática pues contiene una copia de cada grupo y cada espacio topológico.

2.2. Relaciones bien fundadas

Para la construcción de **WF** se usó el Axioma del Conjunto Potencia. En cambio, en esta sección se enunciarán resultados cuya deducción no necesita dicho axioma.
En lo siguiente se indicará explícitamente cuáles axiomas de la teoría de conjuntos se están presuponiendo para la teoría que se desarrolla.

Definición 2.2.1. *(ZF^--P). Una relación R, en un conjunto A es bien fundada si*

$$\forall X \subset A[X \neq 0 \to \exists y \in X(\neg \exists z \in X(zRy))]. \tag{2.1}$$

Al elemento y de la definición anterior se le denomina R-minimal en X.

Por lo tanto R es bien fundada en A si y sólo si, todo subconjunto no vacío tiene un elemento R-minimal. En particular, si R es un orden total en A, entonces R es bien fundada en A si y sólo si R bien ordena a A. Si R no es un orden total en A, entonces el X de la Definición 2.2.1 pudiera tener más de un elemento R-minimal.

Lema 2.2.2. (ZF^-). *Si $A \in$ **WF**, entonces $\in$ es bien fundada en A.*

Demostración. Sean A en **WF** y X un subconjunto no vacío de A. Sea $\alpha = \text{mín}\{\text{rank}(y) : y \in X\}$ y fijemos un y en X tal que $\text{rank}(y) = \alpha$. Entonces y es un elemento R-minimal de X, ya que si existiera z en X tal que $z \in y$, se cumpliría que $\text{rank}(z) < \text{rank}(y)$, por el Lema 2.1.6(a), lo que sería contradictorio con la elección de y.

■

El recíproco del Lema 2.2.2 no necesariamente es cierto, por ejemplo si $x = \{y\}$, $y = \{x\}$, y $x \neq y$, se cumple que la relación $\in$ es bien fundada en y pero $y \notin \mathbf{WF}$. Para que éste sea válido, es necesario pedir que A sea transitivo.

Lema 2.2.3. (ZF^-). *Si A es transitivo y $\in$ es bien fundada en A, entonces $A \in \boldsymbol{WF}$.*

Demostración. Sea A como en el enunciado del lema. Por el Lema 2.1.9 es suficiente mostrar que $A \subset \mathbf{WF}$. Si $A \not\subset \mathbf{WF}$, entonces $X = A \setminus \mathbf{WF} \neq 0$, sea y un elemento $\in$-minimal de X. Luego, si $z \in y$, entonces $z \notin X$, y $z \in A$ ya que A es transitivo, así $z \in \mathbf{WF}$. Luego $y \subset \mathbf{WF}$, entonces $y \in \mathbf{WF}$ por el Lema 2.1.9, lo cual es una contradicción con el hecho de que $y \notin \mathbf{WF}$. Por lo tanto $A \subset \mathbf{WF}$. ■

En lo que sigue se demuestra que A está en $\mathbf{WF}$ si y sólo si $\in$ es bien fundada en la clausura transitiva de A, denotada por $tr\ cl$, que es el menor conjunto transitivo que contiene a A como subconjunto. A continuación definimos este concepto.

Definición 2.2.4. *$(ZF^-$-$P)$. Sea A un conjunto. (a) Por recursión en n definimos $\bigcup^0 A = A$, $\bigcup^{n+1} A = \bigcup(\bigcup^n A)$.*
(b)Definimos la clausura transitiva de A, denotada por $tr\ cl(A)$, como $\bigcup\{\bigcup^n A : n \in \omega\}$.

Lema 2.2.5. *$(ZF^-$-$P)$. Si A es un conjunto, se cumple lo siguiente.*
(a) $A \subset tr\ cl(A)$.
(b) $tr\ cl(A)$ es transitivo.
(c) Si $A \subset T$ y T es transitivo, entonces $tr\ cl(A) \subset T$.
(d) Si A es transitivo, entonces $tr\ cl(A) = A$.
(e) Si $x \in A$, entonces $tr\ cl(x) \subset tr\ cl(A)$.
(f) $tr\ cl(A) = A \cup \bigcup\{tr\ cl(x) : x \in A\}$.

Demostración. (a) se sigue inmediatamente de la definición de $tr\ cl(A)$. (b) es una consecuencia del hecho siguiente, si $y \in \bigcup^n A$, entonces $y \subset \bigcup^{n+1} A$.

Para (c) por inducción en n, probaremos que $\bigcup^n A \subset T$. Para $n = 0$ se cumple por hipótesis. Sea $y \in x \in \bigcup^n A$, $x \in T$ por hipótesis de inducción, así $y \in T$ ya que T es transitiva. Por lo tanto $tr\ cl(A) = \bigcup(\bigcup^n A) \subset T$.

(d) se sigue de (a) y (c) del lema.

Para demostrar (e), si $x \in A$, entonces $x \in tr\ cl(A)$, así que $x \subset tr\ cl(A)$. Aplicando (c) a x se tiene que $tr\ cl(x) \subset tr\ cl(A)$.

Para demostrar (f), sea

$$T = A \cup \bigcup\{tr\ cl(x) : x \in A\}.$$

T es transitiva, así por (c) $tr\ cl(A) \subset T$, por otro lado $T \subset tr\ cl(A)$ por (a) y (e). ■

Teorema 2.2.6. (ZF^-). *Para un conjunto A, son equivalentes:*

(a) $A \in \boldsymbol{WF}$.

(b) $tr\ cl(A) \in \boldsymbol{WF}$.

(c) $\in$ *es bien fundada en* $tr\ cl(A)$.

Demostración. $(a) \to (b)$. Si $A \in \mathbf{WF}$, entonces por inducción en n, se cumple que $\bigcup^n A \in \mathbf{WF}$ ya que $\mathbf{WF}$ es cerrado bajo la operación $\bigcup$. Así, por el Lema 2.1.9 cada $\bigcup^n A \subset \mathbf{WF}$, luego $tr\ cl(A) \subset \mathbf{WF}$, con lo cual se concluye que $tr\ cl(A) \in \mathbf{WF}$.
$(b) \to (c)$. Por el Lema 2.2.2.
$(c) \to (a)$. Por (c) y el Lema 2.2.3, $tr\ cl(A) \in \mathbf{WF}$. Así, de que $A \subset tr\ cl(A)$, entonces $A \subset \mathbf{WF}$, luego por el Lema 2.1.9, $A \in \mathbf{WF}$. ■

2.3. El axioma de fundación

Los resultados presentados en la Sección 2.1 establecen que buena parte de la matemática tiene lugar en $\mathbf{WF}$, ademas de que en $\mathbf{WF}$ no existen elementos x, y $x \neq y$ tales que $x = \{x\}$, o $x \in y$ y $y \in x$. Por lo tanto, es razonable contar con un axioma que enuncie que $\mathbf{WF} = \mathbf{V}$. Esto es, que nos restrinjamos a trabajar en $\mathbf{WF}$, pero en realidad estemos trabajando en todo $\mathbf{V}$.
Todos los axiomas de ZF^- se cumplen en $\mathbf{WF}$. En el siguiente capítulo se demuestra esta afirmación.
En esta sección estudiamos algunas consecuencias de considerar como axioma a $\mathbf{V} = \mathbf{WF}$ de ZF^-.

Considerar al Axioma de Fundación en la teoría, es equivalente a $\forall x(x \neq 0 \to \exists y \in x(x \cap y = 0))$, o que todo conjunto no vacío tiene un elemento $\in -$minimal, o bien extendiendo la definición de conjuntos bien fundados a clases propias, $\in$ es bien fundado en $\mathbf{V}$.

Axioma 2. Fundación.

$$\forall x(\exists y(y \in x) \to \exists y(y \in x \land \neg\exists z(z \in x \land z \in y))).$$

Teorema 2.3.1. (ZF^-). *Son equivalentes:*

(a) El Axioma de Fundación.

(b) Para todo conjunto A *se cumple que* $\in$ *es bien fundado en* A.

(c) $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{WF}$.

Demostración. $(a) \leftrightarrow (b)$ es inmediato.
$(b) \to (c)$. Dado un conjunto A, por (b), $\in$ es bien fundado en $trcl(A)$, luego por el Teorema 2.2.6, $A \in \mathbf{WF}$. Para $(c) \to (b)$, si $\mathbf{V} = \mathbf{WF}$, entonces por el Lema 2.2.2 se cumple (b). ■

Por el Teorema 2.3.1, introducir el Axioma de Fundación, equivale a restringirnos a trabajar en **WF**, cuya imagen podemos visualizar por la forma en que se construyó. Asumiendo que $\in$ es bien fundada en todo conjunto simplifica algunas resultados y definiciones. Por ejemplo la siguiente:

Teorema 2.3.2. *(ZF-P). A es un ordinal si y sólo si A es transitivo y totalmente ordenada por $\in$.*

Demostración. Por la Definición (1.2.3) de ordinal se tiene la necesidad del lema. Para la suficiencia, sea A totalmente ordenado y transitivo, veamos que $\in$ bien ordena A, sea $0 \neq X \subset A$, aplicando el Axioma de Fundación a X se tiene un elemento $\in -$minimal. Luego, A es un ordinal. ∎

2.4. Inducción y recursión en relaciones bien fundadas

Si A es un conjunto bien fundado por una relación R, el método de demostración por inducción transfinita se generaliza como sigue.

Lema 2.4.1. *Sean, A un conjunto y ϕ una fórmula tal que para todo x en A se cumple $\forall y \in A(yRx \to \phi(y)) \to \phi(x)$, entonces para cada $x \in A$ se cumple $\phi(x)$.*

Demostración. Supongamos que existe x en A, tal que $\neg\phi(x)$, entonces el conjunto $\{x \in A : \neg\phi(x)\} \neq \emptyset$. Sea x_0 un elemento R-minimal de este conjunto, esto es, $x_0 \in \{x \in A : \neg\phi(x)\}$ tal que $\forall zRx_0$ se cumple, $\phi(z)$, luego, por hipótesis se cumple que $\phi(x_0)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto se sigue el lema. ∎

La Definición 2.2.1 dada para conjuntos se generaliza para clases como sigue:

Definición 2.4.2. *$(ZF^- - P)$. Sean $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{R}$ clases, se dice que $\boldsymbol{R}$ está bien fundada en $\boldsymbol{A}$, si y sólo si,*

$$\forall X \subset \boldsymbol{A}[X \neq 0 \to \exists y \in X(\neg\exists z \in X(z\boldsymbol{R}y))]. \tag{2.2}$$

Definición 2.4.3. *$(ZF^- - P)$. $\boldsymbol{R}$ es set-like en $\boldsymbol{A}$, si y sólo si para todo x en $\boldsymbol{A}$, $\{y \in \boldsymbol{A} : y\boldsymbol{R}x\}$ es conjunto.*

Por ejemplo, toda relación en un conjunto es set like.

Definición 2.4.4. *$(ZF^-$-$P)$. Si $\boldsymbol{R}$ es set-like en $\boldsymbol{A}$, definimos*

(a) $pred(\boldsymbol{A}, x, \boldsymbol{R}) = \{y \in \boldsymbol{A} : y\boldsymbol{R}x\}$.

(b) $pred^0(\boldsymbol{A}, x, \boldsymbol{R}) = pred(\boldsymbol{A}, x, \boldsymbol{R})$;
$pred^{n+1}(\boldsymbol{A}, x, \boldsymbol{R}) = \bigcup\{pred(\boldsymbol{A}, y, \boldsymbol{R}) : y \in pred^n(\boldsymbol{A}, x, \boldsymbol{R})\}$.

(c) $cl(\boldsymbol{A}, x, \boldsymbol{R}) = \bigcup\{pred^n(\boldsymbol{A}, x, \boldsymbol{R}) : n \in \omega\}$.

Notar que, puesto que $\mathbf{R}$ es set-like en $\mathbf{A}$, las definiciones (a), (b) y (c) son conjuntos.

Lema 2.4.5. *($ZF^- - P$). Si $\boldsymbol{R}$ es set-like en $\boldsymbol{A}$ y $x \in \boldsymbol{A}$, entonces, para cada $y \in cl(\boldsymbol{A}, x, \boldsymbol{R}), pred(\boldsymbol{A}, y, \boldsymbol{R}) \subset cl(\boldsymbol{A}, x, \boldsymbol{R})$.*

Demostración. Si $y \in \mathrm{cl}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$, entonces $y \in \mathrm{pred}^n(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$ para algún $n \in \omega$ así, $\mathrm{pred}(\mathbf{A}, y, \mathbf{R}) \subset \mathrm{pred}^{n+1}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) \subset cl(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$. ■

Teorema 2.4.6. *($ZF^- - P$). Si $\boldsymbol{R}$ está bien fundada y es set-like en $\boldsymbol{A}$, entonces toda subclase $\boldsymbol{X} \neq \emptyset$ de $\boldsymbol{A}$ tiene un elemento $\boldsymbol{R}$ minimal.*

Demostración. Si $\mathbf{X} \neq \emptyset$, sea $x \in \mathbf{X}$. Si x no es $\mathbf{R}$-minimal, entonces $\mathbf{X} \cap \mathrm{cl}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$ es un subconjunto de $\mathbf{A}$ y diferente del vacío, por lo que admite un elemento y $\mathbf{R}$-minimal. Sea $z \in \mathbf{X}$, si ocurriera que $z\mathbf{R}y$, es decir, que $z \in \mathrm{pred}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$, entonces por el Lema 2.4.5, z estaría en cl($\mathbf{A}$,x,$\mathbf{R}$), lo que implicaría que $y\mathbf{R}z$ lo cual sería contradictorio. Por lo tanto, y es un elemento $\mathbf{R}$ minimal en $\mathbf{X}$. ■

Por el Teorema 2.4.6, se justifica el método de demostración por inducción transfinita en clases $\mathbf{A}$, $\mathbf{R}$ como en la Definición 2.4.3. También, es posible generalizar el método de definición por recursión transfinita, como sigue:

Teorema 2.4.7. *(ZF^--P).(Recursión transfinita). Sea $\boldsymbol{R}$ una clase bien fundada y set-like en $\boldsymbol{A}$. Si $\boldsymbol{F} : \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, entonces existe una única $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{V}$ tal que:*

$$\forall x \in \boldsymbol{A}[\boldsymbol{G}(x) = \boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{G}|pred(\boldsymbol{A}, x, \boldsymbol{R}))]. \tag{2.3}$$

Demostración. Primero probaremos, por inducción transfinita, la unicidad de $\mathbf{G}$. Si $\mathbf{G}_1$ y $\mathbf{G}_2$ son funciones como la función $\mathbf{G}$ del teorema, y $\forall y \in A(yRx)$ se cumple $\mathbf{G}_1(y) = \mathbf{G}_2(y)$, entonces

$$\mathbf{G}_1(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{G}_1 \restriction \mathrm{pred}(x)) = \mathbf{F}(x, \mathbf{G}_2 \restriction \mathrm{pred}(x)) = \mathbf{G}_2(x).$$

Por lo tanto, $\mathbf{G}_1(x) = \mathbf{G}_2(x)$ para todo $x \in \mathbf{A}$.
Por brevedad, en lo que sigue, escribiremos $\mathrm{pred}(x)$, $\mathrm{pred}^n(x)$ y $\mathrm{cl}(x)$ en lugar de, respectivamente, $\mathrm{pred}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$, $\mathrm{pred}^n(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$ y $\mathrm{cl}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$. Decimos que un conjunto $d \subset \mathbf{A}$ es cerrado en $\mathbf{A}$ si y sólo si, $\forall x \in d(\mathrm{pred}(x) \subset d)$. Notar que cada x en $\mathbf{A}$ está en un conjunto cerrado, a saber $\{x\} \cup cl(x)$. De hecho este es el menor conjunto cerrado que contiene a x. Si d es cerrado decimos que g es una d-aproximación si y sólo si, g es una función con dominio d y

$$\forall x \in d[g(x) = \mathbf{F}(x, g \restriction \mathrm{pred}(x))].$$

Observación 1:
Si d y d_1 son conjuntos cerrados, entonces $(d \cap d_1)$ es cerrado. En efecto, pues si $x \in (d \cap d_1)$ entonces $\text{pred}(x) \subset d$ y $\text{pred}(x) \subset d_1$ así $\text{pred}(x) \subset d \cap d_1$, luego $(d \cap d_1)$ es cerrado.
Si g es una d aproximación y g_1 es una d_1 aproximación, entonces $g \restriction (d \cap d_1) = g_1 \restriction (d \cap d_1)$. La prueba de lo anterior la hacemos por inducción transfinita. Sea x en $(d \cap d_1)$ suponemos que $\forall y \in \mathbf{A}$ tal que $y\mathbf{R}x$ se cumple que $g(y) = g_1(y)$, así

$$g(x) = \mathbf{F}(x, g \restriction \text{pred}(x)) = \mathbf{F}(x, g_1 \restriction \text{pred}(x)) = g_1(x).$$

Observación 2:
$\bigcup\{\{y\} \cup \text{cl}(y) : y\mathbf{R}x\} = \text{cl}(x)$
Demostración: Sea $y \in \mathbf{A}$ tal que $y\mathbf{R}x$. Por inducción sobre n, demostramos que, $\text{pred}^n(y) \subset \text{pred}^{n+1}(x)$.
Se tiene $\text{pred}^0(y) = \text{pred}(y) \subset \bigcup\{\text{pred}(y) : y \in \text{pred}(x)\} = \text{pred}^1(x)$. Supongamos que se cumple $\text{pred}^{n-1}(y) \subset \text{pred}^n(x)$.
Entonces, $\text{pred}^n(y) = \bigcup\{\text{pred}(z) : z \in \text{pred}^{n-1}(y)\} \subset \bigcup\{\text{pred}(z) : z \in \text{pred}^n(x)\} = \text{pred}^{n+1}(x)$.
Así, $\bigcup\{\text{pred}^n(y) : n \in \omega\} = cl(y) \subset \bigcup\{\text{pred}^n(x) : n \in \omega\} = cl(x)$. Luego, $\bigcup\{\{y\} \cup \text{cl}(y) : y\mathbf{R}x\} \subset \text{cl}(x)$.
Así también, por inducción sobre los naturales, demostramos que
$\text{pred}^n(x) \subset \{\{y\} \cup \text{cl}(y) : y\mathbf{R}x\}$ para $n \in \omega$.
$\text{pred}^0(x) = \{y \in \mathbf{A} : y\mathbf{R}x\} \subset \{\{y\} \cup \text{cl}(y) : y\mathbf{R}x\}$. Supongamos que se cumple para n que $\text{pred}^n(x) \subset \{\{y\} \cup \text{cl}(y) : y\mathbf{R}x\}$. Entonces, si $z \in \text{pred}^{n+1}(x)$, $z \in \text{pred}(z_1)$ para algún $z_1 \in \text{pred}^n(x)$. Entonces, $z_1 \in \{\{y\} \cup \text{cl}(y) : y\mathbf{R}x\}$; así, por el Lema 2.4.5, $z \in \{\{y\} \cup \text{cl}(y) : y\mathbf{R}x\}$. Así que $\text{pred}^{n+1}(x) \subset \{\{y\} \cup \text{cl}(y) : y\mathbf{R}x\}$. Se sigue que $\text{cl}(x) \subset \{\{y\} \cup \text{cl}(y) : y\mathbf{R}x\}$.
Por todo lo anterior se concluye que la Observación 2 se cumple.

Por inducción transfinita en x demostremos que existe una $\{x\} \cup \text{cl}(x)$- aproximación.
Sea $x \in \mathbf{A}$, supongamos que para cada y tal que $y\mathbf{R}x$ existe una $\{y\} \cup \text{cl}(y)$- aproximación, por la Observación 1 ésta es única, denotémosla por g_y.
Sea $h = \bigcup\{g_y : y\mathbf{R}x\}$, h tiene como dominio a $\bigcup\{\{y\} \cup \text{cl}(y) : y\mathbf{R}x\} = \text{cl}(x)$ por observación 2. Entonces h es una $\text{cl}(x)$-aproximación. Así $h \cup \{\langle x, \mathbf{F}(x, h)\rangle\}$ es una $\{x\} \cup \text{cl}(x)$ aproximación.

Definamos $\mathbf{G} = \bigcup\{g :$ donde g es una d aproximación, d conjunto cerrado en $\mathbf{A}\}$.
Así, puesto que $\forall x \in \mathbf{A}$ existe una $\{x\} \cup \text{cl}(x)$- aproximación, se cumple que el dominio de $\mathbf{G}$ es $\mathbf{A}$. Por la observación 1 $\mathbf{G}$ está bien definida y por inducción transfinita se demuestra que $\mathbf{G}$ cumple (2.3). ■

Notar que para la demostración del Teorema se usó inducción transfinita, por lo que es necesario que $\mathbf{R}$ sea bien fundada y set-like en $\mathbf{A}$.
Como una aplicación del Teorema 2.4.7, generalizamos el Lema 2.1.6(b).

Definición 2.4.8. *Si $\boldsymbol{R}$ está bien fundada y es set-like en $\boldsymbol{A}$. Definimos a rank(x,$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{R}$) como $\boldsymbol{G}(x)$, donde $\boldsymbol{G}$ es la función garantizada por el Teorema 2.4.7 aplicado a la función:*

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \sup\{\ \alpha+1 : \alpha \in \text{rango de } y\ \} \text{ si, } y : \textit{pred}(\boldsymbol{A}, x, \boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{ON}.$$

Por inducción transfinita es posible mostrar que para todo x en $\mathbf{A}$, $\mathbf{G}(x)$ está en $\mathbf{ON}$. También se cumple $\text{rank}(x) = \mathbf{F}(x, \text{rank} \restriction \text{pred}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}))$ de donde,

$$\text{rank}(x) = \sup\{\text{rank}(y, \mathbf{A}, \mathbf{R}) + 1 : y\mathbf{R}x, y \in \mathbf{A}\}.$$

Lema 2.4.9. (ZF^-). *Si $\boldsymbol{A}$ es transitiva y $\in$ es bien fundada en $\boldsymbol{A}$, entonces $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{WF}$ y $\text{rank}(x, \boldsymbol{A}, \in) = \text{rank}(x)$ para todo x en $\boldsymbol{A}$.*

Demostración. Si $\mathbf{A} \not\subseteq \mathbf{WF}$, sea x un elemento $\in$-minimal de $\mathbf{A} \setminus \mathbf{WF}$.
Por lo tanto si $y \in x$, $y \in \mathbf{A}$, ya que $\mathbf{A}$ es transitiva, luego $y \in \mathbf{WF}$, se obtiene que, $x \subset \mathbf{WF}$, luego por el Lema 2.2.3, $x \in \mathbf{WF}$, lo cual es una contradicción. Se concluye que $\mathbf{A} \subset \mathbf{WF}$.

Ahora probaremos que $\text{rank}(x, \mathbf{A}, \in) = \text{rank}(x)$ para todo x en $\mathbf{A}$. Supongamos que no es así, sea x un elemento $\in$- minimal de $\{x \in \mathbf{A} : \text{rank}(x, \mathbf{A}, \in) \neq \text{rank}(x)\}$.
Se cumple que $\text{rank}(x)=\sup\{\text{rank}(y) + 1 : y \in x\}$, por el Lema 2.1.6(b). También si $y \in x$, $y \in \mathbf{A}$, por la transitividad de $\mathbf{A}$, y $\text{rank}(y, \mathbf{A}, \in) = \text{rank}(y)$.
Así, $\text{rank}(x)=\sup\{\text{rank}(y) + 1 : y \in x\}= \sup\{\text{rank}(y, \mathbf{A}, \in) + 1 : y \in x \wedge y \in \mathbf{A}\} = \text{rank}(x, \text{A}, \in)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, se cumple $\text{rank}(x, \mathbf{A}, \in) = \text{rank}(x)$ para todo x en $\mathbf{A}$.

∎

Como se sabe, todo conjunto bien ordenado es isomorfo a un ordinal. Es posible obtener un resultado similar en una clase respecto a una relación, ($\mathbf{A}$,$\mathbf{R}$), como sigue, si $\mathbf{R}$ es bien fundada, set-like y extensional en $\mathbf{A}$, entonces existe una clase transitiva $\mathbf{M}$, tal que ($\mathbf{A}$,$\mathbf{R}$) es isomorfo a ($\mathbf{M}$,$\in$). A continuación se desarrolla esto.

Definición 2.4.10. ($ZF^- - P$). *Sean $\boldsymbol{R}$ bien fundada y set-like en $\boldsymbol{A}$. Definimos a la función colapso de Mostowski, como la función $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{V}$ garantizada por el Teorema 2.4.7 aplicado a la función $\boldsymbol{F} : \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, donde*

$$\boldsymbol{F}(x,h)=\{h(y) : y \text{ en el dominio de } h\} \text{ si } h : \textit{pred}(\boldsymbol{A}, x, \boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{V}.$$

Definimos colapso de Mostowski de ($\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{R}$), al rango, $\boldsymbol{M}$, de $\boldsymbol{G}$.

Notar que, para la función $\mathbf{G}$ de la Definición 2.4.10, se cumple

$$\mathbf{G}(x) = \{G(y) : y \in \mathbf{A} \wedge y\mathbf{R}x\}.$$

Lema 2.4.11. ($ZF^- - P$). *Usando la notación de la Definición 2.4.10, se cumple lo siguiente.*

(a) $\forall x, y \in \boldsymbol{A}(x\boldsymbol{R}y \to \boldsymbol{G}(x) \in \boldsymbol{G}(y))$.

(b) $\boldsymbol{M}$ *es transitiva.*

(c) *(ZF$^-$).* $\boldsymbol{M} \subset WF$.

(d) *(ZF$^-$). Si $x \in \boldsymbol{A}$, entonces rank(x,$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{R}$)=rank($\boldsymbol{G(x)}$).*

Demostración. (a) y (b) se siguen directamente de la definición de $\mathbf{G}$. Para (c) demostramos, por inducción transfinita en x, que $\mathbf{G}(x) \in \mathbf{WF}$.
Notar que si x es un elemento R-minimal de $\mathbf{A}$, entonces $\mathbf{G}(x) = 0$.
Supongamos que $\forall y \in A(yRx)$ se cumple que $\mathbf{G}(y) \in \mathbf{WF}$, entonces

$$\{G(y) : y \in \mathbf{A} \wedge y\mathbf{R}x\} = \mathbf{G}(x) \subset \mathbf{WF}.$$

Luego, por el Lema 2.1.9, $\mathbf{G}(x) \in \mathbf{WF}$. Entonces $\forall x \in \mathbf{A}, \mathbf{G}(x) \in \mathbf{WF}$.
Así, se concluye que $\mathbf{M} \subset \mathbf{WF}$.

Para demostrar (d), también usaremos inducción, sea $x \in \mathbf{A}$ supongamos que, para cada $y \in A(yRx)$ se cumple que rank(y, $\mathbf{A}$, $\mathbf{R}$)=rank($\mathbf{G}(y)$), entonces rank($\mathbf{G}(x)$)=sup{rank(v)+ $1 : v \in \mathbf{G}(x)$}=sup{rank($\mathbf{G}(y) + 1$: $y\mathbf{R}x$)}; luego, por hipótesis de inducción
sup{rank($\mathbf{G}(y) + 1$:$y\mathbf{R}x$)}= sup{rank(y,$\mathbf{A}$,$\mathbf{R}$)+1:$y\mathbf{R}x$)}=rank(x,$\mathbf{A}$,$\mathbf{R}$). ■

La función de Mostowski no necesariamente es un isomorfismo, por ejemplo si $\mathbf{A} \neq 0$ y $\mathbf{R} = 0$, entonces la función colapso de Mostowski, $\mathbf{G}$ cumple que, $\mathbf{G}(x) = 0$ para cada x en $\mathbf{A}$. Una condición para que sea un isomorfismo es que $\mathbf{R}$ sea extensional en $\mathbf{A}$.

Definición 2.4.12. $(ZF^- - P)$ $\boldsymbol{R}$ *es extensional en* $\boldsymbol{A}$ *si y sólo si,*

$$\forall x, y \in \boldsymbol{A}(\forall z \in \boldsymbol{A}(z\boldsymbol{R}x \leftrightarrow z\boldsymbol{R}y) \to x = y).$$

La Definición 2.4.12 generaliza el axioma de extensión, el cual establece que en un conjunto, la relación $\in$ es extensional.

Notar que $\mathbf{R}$ es extensional en $\mathbf{A}$, si y sólo si, para todo $x, y \in \mathbf{A}$, si $x \neq y$, entonces pred($\mathbf{A}$,x,$\mathbf{R}$)$\neq$ pred($\mathbf{A}$,y,$\mathbf{R}$).
Así, todos los ordenes totales son extensionales. También, se cumple el siguiente resultado.

Lema 2.4.13. $(ZF^- - P)$. *Si* $\boldsymbol{N}$ *es transitiva, entonces la relación* $\in$ *es extensional en* $\boldsymbol{N}$.

Demostración. Sea $y \in x$ entonces, como $\mathbf{N}$ es transitiva, $y \in \mathbf{N}$, luego $y \in \text{pred}(\mathbf{N}, x, \in)$. Así $x \subset \text{pred}(\mathbf{N}, x, \in)$, por otro lado se cumple que $\text{pred}(\mathbf{N}, x, \in) \subset x$. Por lo tanto, $\text{pred}(\mathbf{N}, x, \in) = x$. Así, $\in$ es extensional en $\mathbf{A}$.

Lema 2.4.14. $(ZF^- - P)$ *Usando la notación de la Definición 2.4.10 si se cumple que la función colapso de Mostowski es un isomorfismo, entonces* $\boldsymbol{R}$ *es extensional en* $\boldsymbol{A}$.

Demostración. Sean $x, y \in \mathbf{A}, x \neq y$, entonces $\mathbf{G}(x) \neq \mathbf{G}(y)$, entonces existe $z \in \mathbf{A}$, tal que

$$\mathbf{G}(z) \in \mathbf{G}(x) \text{ y } \mathbf{G}(z) \notin \mathbf{G}(y) \text{ o } \mathbf{G}(z) \in \mathbf{G}(y) \text{ y } \mathbf{G}(z) \notin \mathbf{G}(x).$$

Supongamos que ocurre el primer caso, entonces existe z_1 tal que

$$\mathbf{G}(z_1) = \mathbf{G}(z) \text{ y } z_1 \mathbf{R} x \wedge \neg(z_1 \mathbf{R} y).$$

A partir de que $\mathbf{G}$ es inyectiva, se sigue que $z = z_1$, así $\text{pred}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) \neq \text{pred}(\mathbf{A}, y\ \mathbf{R})$. Se sigue que $\mathbf{R}$ es extensional en $\mathbf{A}$. De manera análoga si ocurre el segundo caso. ■

Se cumple el recíproco del Lema 2.4.14, esto es:

Lema 2.4.15. $(ZF^- - P)$. *Usando la notación de la Definición 2.4.10, si* $\boldsymbol{R}$ *es extensional en* $\boldsymbol{A}$*, entonces* $\boldsymbol{G}$ *es un isomorfismo entre* $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{R})$ *y* $(\boldsymbol{M}, \in)$*, es decir,* $\boldsymbol{G}$ *es biyectiva y para cada* $\forall x, y \in \boldsymbol{A}$ *se cumple* $(x\boldsymbol{R}y \leftrightarrow \boldsymbol{G}(x) \in \boldsymbol{G}(\boldsymbol{y}))$.

Demostración. Primero mostramos que $\mathbf{G}$ es biyectiva. Por la definición de $\mathbf{M}$ se tiene que $\mathbf{G}$ es sobreyectiva. Supongamos que $\mathbf{G}$ no es inyectiva. Sea x un elemento $\mathbf{R}$-minimal de

$$\{x \in \mathbf{A} : \exists y \in \mathbf{A}(x \neq y) \wedge \mathbf{G}(x) = \mathbf{G}(y)\},$$

sea y tal que $y \neq x$ y $\mathbf{G}(x) = \mathbf{G}(y)$. Como $\mathbf{R}$ es extensional en $\mathbf{A}$, se tiene que $\text{pred}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) \neq \text{pred}(\mathbf{A}, y, \mathbf{R})$. Así, uno de los dos casos siguientes se cumple:
Caso 1. $\exists z \in \mathbf{A}(z\mathbf{R}x \wedge \neg(z\mathbf{R}y))$.
Si ocurre este caso, entonces se cumple que $\mathbf{G}(z) \in \mathbf{G}(x) = \mathbf{G}(y)$, luego $\mathbf{G}(z) = \mathbf{G}(w)$ para algún w tal que $w\mathbf{R}y$. Entonces $w \neq z$, esto contradice que x sea $\mathbf{R}$-minimal.

Caso 2. $\exists w \in \mathbf{A}(w\mathbf{R}y \wedge \neg(w\mathbf{R}x))$. Si ocurre este caso, análogo al Caso 1, existe z tal que $z\mathbf{R}x$ y $\mathbf{G}(z) = \mathbf{G}(w)$. Lo cual contradice que x sea $\mathbf{R}$-minimal. Así, no ocurre el Caso 1 ni el Caso 2, lo cual es una contradicción, de donde $\mathbf{G}$ es inyectiva.
Directamente de la definición se tiene que para cada x, y en $\mathbf{A}$, se cumple $(x\mathbf{R}y \rightarrow \mathbf{G}(x) \in \mathbf{G}(y))$. Recíprocamente, si $\mathbf{G}(x) \in \mathbf{G}(y)$, existe z tal que $z\mathbf{R}y$ y $\mathbf{G}(z) = \mathbf{G}(x)$, como $\mathbf{G}$ es inyectiva, $z = x$, se sigue que $x\mathbf{R}y$. ■

Como consecuencia de los resultados anteriores se obtiene la siguiente proposición.

Teorema 2.4.16. $(ZF^- - P)$. *(Teorema del colapso de Mostowski). Si* $\boldsymbol{R}$ *es bien fundada, set-like y extensional en* $\boldsymbol{A}$*; entonces existe una clase transitiva* $\boldsymbol{M}$ *y una función* $\boldsymbol{G}$ *de* $\boldsymbol{A}$ *en* $\boldsymbol{M}$*, tal que* $\boldsymbol{G}$ *es un isomorfismo entre* $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{R})$ *y* $(\boldsymbol{M}, \in)$*. Más aún,* $\boldsymbol{M}$ *y* $\boldsymbol{G}$ *son únicos.*

Demostración. Sean $\mathbf{R}$ y $\mathbf{A}$ como en el enunciado del teorema. Usando que $\mathbf{R}$ es bien fundada y set-like definimos como en la Definición 2.4.10 a $\mathbf{M}$ y $\mathbf{G}$. Si $\mathbf{R}$ es extensional, por el Lema 2.4.15, se tiene que $\mathbf{G}$ es un isomorfismo entre $(\mathbf{A},\mathbf{R})$ y $(\mathbf{M}, \in)$. Supongamos que existen $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{M}_1$ como en el enunciado del teorema, por inducción en x, se cumple que, $\mathbf{G}_1(x) = \mathbf{G}(x)$ para todo x en $\mathbf{A}$, lo cual implica que $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1$. Así $\mathbf{G}$ y $\mathbf{M}$ son únicos. ■

Como consecuencia del Teorema 2.4.16, si se cumple que **R** es un orden total en **A**, entonces **R** bien ordena a **A**. Luego, $\in$ bien ordena a **M**. Así **M** es un ordinal. Se sigue que si **A** es conjunto, entonces $\mathbf{M} \in \mathbf{ON}$ y si **A** es una clase, $\mathbf{M} = \mathbf{ON}$.

Corolario 2.4.17. $(ZF^{-} - P)$. *Si* $\in$ *es bien fundada y extensional en* $\in$ $\boldsymbol{A}$*, entonces existe* $\boldsymbol{M}$ *transitiva y una función* $\boldsymbol{G}$ *de* $\boldsymbol{A}$ *en* $\boldsymbol{M}$ *tal que:*

$$\forall x, y \in \boldsymbol{A}(x \in y \leftrightarrow \boldsymbol{G}(x) \in \boldsymbol{G}(y).$$

Demostración. Debido a que los elementos de **A** son conjuntos, se tiene que la relación $\in$ es set-like en **A**. Así se cumplen todas las hipótesis del Teorema 2.4.16, luego se cumple el corolario. ■

Capítulo 3

Pruebas de consistencia Relativa

En esta sección se estudian las condiciones bajo las cuales, en una clase $\mathbf{M}$, los axiomas de la teoría de conjuntos se cumplen.

3.1. Relativización

Definición 3.1.1. *Sea $\boldsymbol{M}$ una clase, para una fórmula ϕ de la teoría de conjuntos, se define la relativización de ϕ a $\boldsymbol{M}$, denotada por $\phi^{\boldsymbol{M}}$, por recursión sobre el número de conectivos de ϕ como sigue.*
(a)$(x = y)^{\boldsymbol{M}}$ es $x = y$.
(b)$(x \in y)^{\boldsymbol{M}}$ es $x \in y$.
(c)$(\phi \wedge \psi)^{\boldsymbol{M}}$ es $\phi^{\boldsymbol{M}} \wedge \psi^{\boldsymbol{M}}$.
(d)$(\neg\phi)^{\boldsymbol{M}}$ es $\neg(\phi^{\boldsymbol{M}})$.
(e)$(\exists x\phi)^{\boldsymbol{M}}$ es $\exists x(x \in \boldsymbol{M} \wedge \phi^{\boldsymbol{M}})$.

Cuando se considere la relativización de $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ estará implícito que las variables están en $\mathbf{M}$.

Las fórmulas $\phi \vee \psi, \forall x\phi, \phi \leftrightarrow \varphi$ son abreviaciones de fórmulas del tipo (a)-(e) de la Definición 3.1.1. Así, la relativización de una de estas fórmulas está determinada por la fórmula que abrevia. Por ejemplo, $\phi \vee \psi$ abrevia $\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$, así $(\phi \vee \psi)^{\mathbf{M}}$ es $(\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi))^{\mathbf{M}}$, lo cual por definición es $\neg(\neg(\phi)^{\mathbf{M}} \wedge \neg(\psi)^{\mathbf{M}})$ que es $\phi^{\mathbf{M}} \vee \phi^{\mathbf{M}}$. De manera similar se obtiene que $(\forall x\phi)^{\mathbf{M}}$ es lógicamente equivalente a $\forall x(x \in \mathbf{M} \to \phi^{\mathbf{M}})$.

Definición 3.1.2. *Si $\boldsymbol{M}$ es una clase.*
(a) Para una sentencia ϕ, se dirá que ϕ es verdadera en $\boldsymbol{M}$ si se cumple $\phi^{\boldsymbol{M}}$.
(b) Para un conjunto de sentencias S, se dirá que S es verdadero en $\boldsymbol{M}$, o que $\boldsymbol{M}$ es un modelo para S, si cada sentencia en S es verdadera en $\boldsymbol{M}$.

Lema 3.1.3. *Sean S y T conjuntos de sentencias en el lenguaje de la teoría de conjuntos y supongamos que, para una clase $\boldsymbol{M}$, a partir de T se prueba que $\boldsymbol{M} \neq 0$ y que $\boldsymbol{M}$ es un modelo para S. Entonces $Con(T) \rightarrow Con(S)$.*

Demostración. Sean S, T y $\mathbf{M}$ como en el enunciado del lema. Supongamos que T es consistente. Si S fuera inconsistente, existiría una fórmula ψ, tal que a partir de S se probaría que $\psi \wedge \neg\psi$ es un teorema. Luego, como $\mathbf{M}$ es un modelo de S, en $\mathbf{M}$ se cumple $\psi^{\mathbf{M}} \wedge \neg\psi^{\mathbf{M}}$ pero ésto es una contradicción, ya que $\mathbf{M}$ es un modelo. Por lo tanto, S es consistente. ∎

Dada una clase $\mathbf{M}$, en lo que sigue se asumirá que el Axioma 0 se cumple en $\mathbf{M}$, esto es, que $\exists x \in \mathbf{M}(x = x)$ dicho de otro modo que $\mathbf{M} \neq 0$.
El axioma de extensión relativizado a $\mathbf{M}$, es

$$\forall x, y \in \mathbf{M}(\forall z \in \mathbf{M}(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y).$$

Notar que es precisamente la definición de que $\in$ sea extensional en $\mathbf{M}$, de acuerdo a la Definición 2.4.12. Así, usando el Lema 2.4.13, se cumple:

Lema 3.1.4. *Si $\boldsymbol{M}$ es transitivo, el axioma de extensión es verdadero en $\boldsymbol{M}$.*

Lema 3.1.5. *Si para cada fórmula $\phi(x, z, w_1, \ldots, w_n)$ cuyas variables libres pertenecen al conjunto $\{x, z, w_1, \ldots, w_n\}$, se cumple*

$$\forall z, w_1, \ldots, w_n \in \boldsymbol{M}(\{x \in z : \phi^{\boldsymbol{M}}(x, z, w_1, \ldots, w_n)\} \in \boldsymbol{M}),$$

entonces el Axioma de Comprensión es verdadero en $\boldsymbol{M}$.

Demostración. Sea ϕ una fórmula como en el enunciado del lema, se debe demostrar que

$$\forall z, w_1, \ldots, w_n \in \mathbf{M}\ \exists\ y \in \mathbf{M}\ \forall\ x(x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \phi^{\mathbf{M}}(x, z, w_1, ..., w_n)).$$

Dados $z, w_1, ..., w_n$ sea $y = \{x \in z : \phi^{\mathbf{M}}(x, z, w_1, ..., w_n)\}$. Entonces, $y \in \mathbf{M}$ por hipótesis y, para todo $x \in \mathbf{M}$,

$$x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \phi^{\mathbf{M}}(x, z, w_1, ..., w_n).$$

∎

La aplicación del Lema 3.1.5 puede causar dificultades puesto que se debe considerar a todas las posibles fórmulas relativizadas a $\mathbf{M}$. Sin embargo, en muchos de los modelos que se consideran en este capítulo, el Axioma de Comprensión se cumple aplicando el siguiente resultado.

Corolario 3.1.6. *Si para cada z en $\boldsymbol{M}$ se cumple que $\mathscr{P}(z) \subset \boldsymbol{M}$ entonces, el Axioma de Comprensión se cumple en $\boldsymbol{M}$.*

Demostración. Sea ϕ una fórmula cuyas variables libres pertenecen al conjunto $\{x, z, w_1, \ldots, w_n\}$, se debe probar que la instancia del Axioma de Comprensión para ϕ se cumple, esto es,

$$\forall z, w_1, ..., w_n \in \mathbf{M}\ \exists\ y \in \mathbf{M}\ \forall x \in \mathbf{M}(x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \phi^{\mathbf{M}}).$$

Por el Axioma de Comprensión en $\mathbf{V}$, $\exists\ y\ \forall\ x(x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \phi)$. Así, tal y es un subconjunto de z. Luego, ya que por hipótesis $z \in \mathbf{M}$, se tiene, por hipótesis que $y \in \mathbf{M}$.

■

Teorema 3.1.7. *ZF^{-}. Si $\boldsymbol{M} = \{0\}$, entonces los axiomas 0-2 y $\forall y(y = 0)$, se cumplen en $\boldsymbol{M}$.*

Demostración. El hecho de que $\mathbf{M}$ es no vacía implica la validez del Axioma 0, por ser $\mathbf{M}$ transitiva se cumple el Axioma 1 y por el Corolario 3.1.6 se cumple el Axioma 2. Luego, $\forall y(y = 0)$ es una abreviación de $\forall y \forall x(x \notin y)$ la cual es verdadera en $\mathbf{M}$.

■

Así, por el Lema 3.1.3 se cumple:

Corolario 3.1.8. *$Con(ZF^{-}) \rightarrow$ Con(Extensión + Comprensión + $\forall y(y = 0)$).*

Se deduce que, los axiomas $0-2$ son insuficientes para demostrar la existencia de conjuntos no vacíos.

Notar que la relativización se definió para fórmulas básicas en el lenguaje de la teoría de conjuntos. Entonces, si se desea relativizar una fórmula ésta se debe expresar en el lenguaje original. Por ejemplo, para $x, z \in \mathbf{M}$ la fórmula $z \subset x$ es una abreviación de

$$\forall v(v \in z \rightarrow v \in x),$$

así $(z \subset x)^{\mathbf{M}}$ es una abreviación de

$$\forall v \in \mathbf{M}(v \in z \rightarrow v \in x),$$

lo que es equivalente a $z \cap \mathbf{M} \subset x$.
Si se desea verificar cuándo una proposición que incluya $\subset$, por ejemplo, el Axioma del Conjunto Potencia,

$$\forall x \exists y \forall z(z \subset x \rightarrow z \in y),$$

se cumpla en $\mathbf{M}$, no es necesario escribir $\subset$ en su forma básica.
El Axioma del Conjunto Potencia relativizado a $\mathbf{M}$ es equivalente a

$$\forall x \in \mathbf{M}\ \exists y \in \mathbf{M}\ \forall z \in \mathbf{M}(z \cap \mathbf{M} \subset x \rightarrow z \in y).$$

En el caso particular de que $\mathbf{M}$ sea transitiva, se cumple $z \cap \mathbf{M} = z$ para $z \in \mathbf{M}$, así para $z, y \in \mathbf{M}$, se cumple

$$(z \subset y)^{\mathbf{M}} \leftrightarrow z \subset y.$$

Por lo tanto, si $\mathbf{M}$ transitiva, el Axioma del Conjunto Potencia se cumple si y sólo si,

$$\forall x \in \mathbf{M}\ \exists y \in \mathbf{M}\ \forall z \in \mathbf{M}(z \subset x \to z \in y),$$

lo cual es equivalente a la siguiente proposición.

Lema 3.1.9. *Si $\boldsymbol{M}$ es transitiva, el Axioma del Conjunto Potencia se cumple en $\boldsymbol{M}$ si y sólo si,*

$$\forall x \in \boldsymbol{M}\ \exists y \in \boldsymbol{M}(\mathscr{P}(x) \cap \boldsymbol{M} \subset y).$$

Para considerar la relativización de operaciones y constantes, en una clase $\mathbf{M}$, se debe tener cuidado en que éstas estén bien definidas en $\mathbf{M}$. Si S es un conjunto de axiomas y

$$S \vdash \forall x_1, ..., x_n \exists ! y \phi(x_1, ..., x_n, y),$$

entonces se puede definir $F(x_1, ..., x_n)$ como el único conjunto y tal que $\phi(x_1, ..., x_n, y)$.
Por ejemplo, supongamos que S contiene a los Axiomas de Comprensión, del Par y de Extensión, y sea $\phi(x, y, v)$ definida por $v = x \vee v = y$. Si x, y son conjuntos, por el Axioma del Par, existe un conjunto z tal que $x \in z \wedge y \in z$. Luego, por el Axioma de Comprensión

$$\exists u \forall v(v \in u \leftrightarrow v \in z \wedge \phi(x, y, v)).$$

Entonces $u = \{v \in z : v = x \vee v = y\} = \{x, y\}$. Por el Axioma de Extensión el conjunto u es único.
Así se ha demostrado $S \vdash \forall x, y\ \exists ! z(\psi(x, y, z))$ donde $\psi(x, y, z)$ es

$$x \in z \wedge y \in z \wedge \forall v \in z(v = x \vee v = y).$$

Entonces, se puede definir $F : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ como $F(x, y) = z$ y, por lo establecido anteriormente, F es una función.

Si F es una función tal que está definida como el único y tal que $\phi(x_1, ..., x_n, y)$ para alguna fórmula ϕ entonces, antes de considerar relativizaciones de expresiones que contengan a F se debe verificar que,

$$\forall x_1, ..., x_n \exists ! y \phi(x_1, ..., x_n, y), \tag{3.1}$$

es verdadero en $\mathbf{M}$. Para ello $\mathbf{M}$ tendrá que satisfacer los axiomas de la teoría de conjuntos que se usan para demostrar (3.1).
Si se cumple (3.1) en $\mathbf{M}$, se considerará $F^{\mathbf{M}}$ como la única $y \in \mathbf{M}$ tal que $\phi^{\mathbf{M}}(x_1, \ldots, x_n, y)$.
Por ejemplo, si $\mathbf{M}$ cumple los Axiomas de Comprensión, Extensión y Par entonces, es posible considerar la relativización de expresiones que contengan $F(x, y)$ donde $F(x, y) = \{x, y\}$.

Lema 3.1.10. *Si* $\forall x, y \in \boldsymbol{M}\, \exists z \in \boldsymbol{M}(x \in z \wedge y \in z)$ *y* $\forall x \in \boldsymbol{M}\, \exists z \in \boldsymbol{M}(\bigcup x \subset z)$*, entonces los Axiomas del Par y de Unión son verdaderos en* $\boldsymbol{M}$*.*

Demostración. Sea $\mathbf{M}$ como en el enunciado del lema. Es inmediato que se cumple el Axioma del Par en $\mathbf{M}$. Para el axioma de la unión, se debe demostrar que

$$\forall \mathscr{F}\ \exists A\ \forall Y \forall x (x \in Y \wedge Y \in \mathscr{F} \rightarrow x \in A), \tag{3.2}$$

es verdadero en $\mathbf{M}$. Sean $\mathscr{F}$ y $z \in \mathbf{M}$ tal que $\bigcup \mathscr{F} \subset z$. Entonces, para $A = z$ se cumple la condición (3.2). ■

Lema 3.1.11. *Supóngase que para cada fórmula* $\phi(x, y, A, w_1, \ldots, w_n)$ *y cada* $A, w_1, \ldots w_n$ *en* $\boldsymbol{M}$ *se cumple que, si*

$$\forall x \in A \exists\ !\ y \in \boldsymbol{M} \textit{ tal que } \phi^{\boldsymbol{M}}(x, y, A, w_1, \ldots w_n),$$

entonces

$$\exists Y \in \boldsymbol{M}(\{y : \exists x \in A \phi^{\boldsymbol{M}}(x, y, A, w_1, \ldots, w_n)\} \subset Y).$$

Entonces, el Esquema de Reemplazo es verdadero en $\boldsymbol{M}$*.*

Lema 3.1.12. *El Axioma de Fundación se cumple para* $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{WF}$*.*

Demostración. Sea $\mathbf{M}$ como en el enunciado del lema. El Axioma de Fundación relativizado a $\mathbf{M}$ es:

$$\forall x \in \mathbf{M}(\exists y \in \mathbf{M}(y \in x) \rightarrow \exists y \in \mathbf{M}(y \in x \wedge \neg \exists z \in \mathbf{M}(z \in x \wedge z \in y))).$$

Sea $x \in \mathbf{M}$ si $\exists z \in \mathbf{M}$, tal que $z \in x$, usando que la relación $\in$ es bien fundada en $\mathbf{WF}$, sea y un elemento $\in$-minimal de $x \cap \mathbf{M}$. Así $y \in x \cap \mathbf{M}$ y $\neg \exists w \in x \cap \mathbf{M}(w \in y)$.

■

Lema 3.1.13. (ZF^-). $\boldsymbol{WF}$ *y* $R(\omega)$ *son modelos de* $ZF - Inf$

Demostración. Sea $\mathbf{N}$ igual a $R(\omega)$ o $\mathbf{WF}$. Puesto que estamos trabajando en ZF^-, existe 0 y por definición de $\mathbf{N}$, $0 \in \mathbf{N}$, con lo cual el Axioma de Existencia es verdadero en $\mathbf{N}$. Luego, $\mathbf{N}$ es transitiva así que cumple el Axioma de Extensión. Por el Lema 3.1.12 $\mathbf{N}$ cumple el Axioma de Fundación.
Luego, si $z \in \mathbf{N}$ entonces, $\mathscr{P}(z) \in \mathbf{N}$ (Teorema 2.1.8), así $\mathscr{P}(z) \subset \mathbf{N}$, ya que $\mathbf{N}$ es transitiva. Entonces, por el Corolario 3.1.6, $\mathbf{N}$ cumple el Axioma de Comprensión.
Notemos que, $\mathbf{N}$ es cerrada bajo las operaciones par y unión, así que por el Lema 3.1.10 $\mathbf{N}$ cumple los Axiomas del Par y Unión.
Para verificar que $\mathbf{N}$ satisface el Esquema de Reemplazo, se demostrará que $\mathbf{N}$ satisface las hipótesis del Lema 3.1.11. Sea $\phi(x, y, A, w_1, \ldots, w_n)$ y supóngase que para cada $A, w_1, \ldots, w_n \in \mathbf{N}$ se cumple,

$$\forall x \in A \exists! y \in \mathbf{N} \text{ tal que } \phi^{\mathbf{N}}(x, y, A, w_1, \dots w_n).$$

Entonces, sea

$$Y = \{y \in \mathbf{N} : \exists x \in A \phi^{\mathbf{N}}(x, y, A, w_1, \dots w_n)\}.$$

Así $Y \subset \mathbf{N}$ y se cumple que si $\mathbf{N} = \mathbf{WF}, Y \in \mathbf{N}$ por el Lema 2.1.9; en otro caso, si $\mathbf{N} = R(\omega)$, entonces $|Y| \leq |A|$, pero $A \in \mathbf{N}$ por hipótesis, así $|Y| \leq |A| < \omega$, por lo que Y es finito. Entonces, se obtiene que $Y \subset R(n)$ para algún n, luego $Y \in R(n+1)$. Por lo tanto, se cumple el Axioma de Reemplazo en $\mathbf{N}$.
$\mathbf{N}$ satisface las hipótesis del Lema 3.1.9 por lo tanto el Axioma del Conjunto Potencia se cumple en $\mathbf{N}$. Así $\mathbf{N}$ es modelo de $ZF - Inf$.

■

El axioma de Infinitud

$$\exists x(0 \in x \wedge \forall y \in x(S(y) \in x)),$$

contiene las nociones 0 y S. Intuitivamente se podría pensar que el axioma de Infinitud se cumple en $\mathbf{WF}$, tomando $x = \omega$ y no se cumple en $R(\omega)$, y en efecto así es, pues las nociones 0 y S "significan" lo mismo en $\mathbf{V}$ que en $\mathbf{WF}$ y $R(\omega)$. En este caso se dice que 0, y S son absolutas para $\mathbf{WF}$ y $R(\omega)$.
En general, no se cumple que la noción 0 tenga el mismo significado en las clases, por ejemplo, si $\mathbf{M} = \{\{0\}\}$, entonces $0^{\mathbf{M}} = \{0\}$.
En la siguiente sección se estudia la absolutez en general.

3.2. Absolutez

Definición 3.2.1. *Sea ϕ una fórmula cuyas variables libres pertenecen al conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$.*
(1)Si $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{N}$, ϕ es absoluta para $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ si y sólo si,

$$\forall x_1, \dots, x_n \in \boldsymbol{M}(\phi^{\boldsymbol{M}}(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \phi^{\boldsymbol{N}}(x_1, \dots, x_n)).$$

(2) ϕ es absoluta para $\boldsymbol{M}$ si y sólo si, ϕ es absoluta para $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{V}$ esto es,

$$\forall x_1, \dots, x_n \in \boldsymbol{M}(\phi^{\boldsymbol{M}}(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \phi(x_1, \dots, x_n)).$$

De la definición de absolutez se sigue que, si ϕ es absoluta para $\mathbf{M}$ y absoluta para $\mathbf{N}$ y $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$ entonces, ϕ es absoluta para $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$.

A continuación, se desarrollan métodos para mostrar algunas fórmulas que son absolutas para modelos que se estudiarán. Una de las técnicas es, partiendo de la absolutez de fórmulas básicas, deducir inductivamente la absolutez de fórlmulas más complejas.

Lema 3.2.2. *Si $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{N}$ y ϕ, ψ son absolutas para $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ entonces, $\neg\phi$ y $\phi \wedge \psi$ son también absolutas.*

Demostración. Se sigue de la relativización de $\neg\phi$ y $\phi \wedge \psi$. ■

Ya que las fórmulas atómicas, $x = y$ y $x \in y$, son absolutas para toda clase $\mathbf{M}$ y, una fórmula sin cuantificadores es construida a partir de fórmulas atómicas usando $\neg$ y $\wedge$ entonces, se cumple el siguiente resultado.

Lema 3.2.3. *Si ϕ es una fórmula sin cuantificadores entonces, ϕ es absoluta para toda clase $\boldsymbol{M}$.*

Sin embargo, fórmulas simples como $x \subset y$ $(\forall z(z \in x \to z \in y))$ usan cuantificadores, y puede ser que no sean absolutas, por ejemplo si $\mathbf{M} = \{0, a\}$, donde $a = \{\{0\}\}$, entonces $(a \subset 0)^{\mathbf{M}}$ pero $a \not\subset 0$. Afortunadamente, en clases transitivas que son las que se estudiarán, se demostrará que la noción $\subset$ es absoluta.

Lema 3.2.4. *Si $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{N}$ son clases transitivas y ϕ es absoluta para $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ entonces, también lo es $\exists x(x \in y \wedge \phi)$.*

Demostración. Sea $\phi(x, y, z_1, \ldots, z_n)$, donde $x, y, z_1, \ldots, z_n$ son sus variables libres. Entonces para $y, z_1, \ldots, z_n \in \mathbf{M}$ se cumple,

$$[\exists x(x \in y \wedge \phi(y, z_1, \ldots, z_n))]^{\mathbf{M}} \leftrightarrow \exists x(x \in y \wedge \phi^{\mathbf{M}}(y, z_1, \ldots, z_n))$$

$$\leftrightarrow \exists x(x \in y \wedge \phi^{\mathbf{N}}(y, z_1, \ldots, z_n)) \leftrightarrow [\exists x(x \in y \wedge \phi(y, z_1, \ldots, z_n))]^{\mathbf{N}}.$$

El primer $\leftrightarrow$ es por la transitividad de $\mathbf{M}$, ya que escribimos $\exists x(x \in y \wedge ...)$ en lugar de $\exists x \in \mathbf{M}(x \in y \wedge ...)$. El segundo $\leftrightarrow$ se cumple por la absolutez de ϕ. El tercer $\leftrightarrow$ es por la transitividad de $\mathbf{N}$.

■

Definición 3.2.5. *De manera inductiva se define el conjunto de fórmulas que son Δ_0 como sigue:*

(1) $x \in y$ y $x = y$ son Δ_0.

(2) Si ϕ, ψ son Δ_0, también lo son $\neg\phi$ y $\phi \wedge \psi$.

(3) Si ϕ es Δ_0, lo es $\exists x(x \in y \wedge \phi)$

Así, por el Corolario 3.2.3, y los Lemas 3.2.2 y 3.2.4, se cumple:

Corolario 3.2.6. *Si $\boldsymbol{M}$ es transitiva y ϕ es Δ_0, entonces ϕ es absoluta para $\boldsymbol{M}$.*

El uso de este resultado es limitado ya que, difícilmente una fórmula de la teoría de conjuntos es de la forma Δ_0, por ejemplo $x \subset y$ es $\forall z(z \in x \to z \in y)$, la cual abrevia

$$\neg\exists z \neg(z \in x \to z \in y),$$

ésta no es Δ_0, sin embargo es lógicamente equivalente a

$$\neg\exists z \in x(\neg z \in y),$$

la cual es Δ_0.

El siguiente resultado establece que la propiedad de absolutez se preserva bajo equivalencias lógicas. Por lo tanto, una forma de garantizar que una fórmula dada es absoluta será identificándola con una fórmula Δ_0 lógicamente equivalente.

Lema 3.2.7. *Supóngase que $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{N}$ son modelos de un conjunto de sentencias S tal que,*

$$S \vdash \forall x_1, \ldots, x_n(\phi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \ldots, x_n)).$$

Entonces ϕ es absoluta para $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ si y sólo si, ψ es absoluta.

Demostración. Usando que $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$ son modelos de S y que

$$S \vdash \forall x_1, \ldots, x_n(\phi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \ldots, x_n)),$$

se cumple

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{M}(\phi^{\mathbf{M}}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi^{\mathbf{M}}(x_1, \ldots, x_n))$$

y

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{N}(\phi^{\mathbf{N}}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi^{\mathbf{N}}(x_1, \ldots, x_n)). \tag{3.3}$$

Así, si ϕ es absoluta, entonces

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{M}(\psi^{\mathbf{M}}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \phi^{\mathbf{M}}(x_1, \ldots, x_n)) \leftrightarrow \phi^{\mathbf{N}}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi^{\mathbf{N}}(x_1, \ldots, x_n).$$

El primer y tercer $\leftrightarrow$, se sigue de (3.3), y el segundo $\leftrightarrow$ se sigue de la absolutez de ϕ, así ψ absoluta. De manera análoga si ψ es absoluta se cumple que ϕ lo es.

■

Aplicando el Lema 3.2.7, para $\mathbf{M}$ transitiva, $\mathbf{N} = \mathbf{V}$, y S el conjunto vacío de sentencias, se cumple que $x \subset y$ es absoluta para $\mathbf{M}$ y si φ es Δ_0 entonces $\forall x \in y\ \varphi$ es absoluta para $\mathbf{M}$, ya que es lógicamente equivalente a $\neg\exists x \in y \neg\varphi$ que es absoluta en $\mathbf{M}$ por ser Δ_0.

Si $\phi(x_1, \ldots, x_n, y)$ una fórmula tal que se cumple $\forall x_1, \ldots, x_n\ \exists\,!\ y\ \phi(x_1, \ldots, x_n)$, se puede definir una función F, tal que $F(x_1, \ldots, x_n)$ sea la única y tal que $\phi(x_1, \ldots, x_n, y)$.

Definición 3.2.8. *Si $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{N}$ y $F(x_1, \ldots, x_n)$ es una función, se dirá que F es absoluta para $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ si y sólo si, $F^{\boldsymbol{M}}(x_1, \ldots, x_n) = F^{\boldsymbol{N}}(x_1, \ldots, x_n)$.*

Formalmente, F se define de tal forma que $F(x_1, \ldots, x_n)$ es la única y tal que $\phi(x_1, \ldots, x_n, y)$ para una fórmula ϕ dada. Antes de considerar la absolutez para $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ de expresiones que contengan a F, se debe probar que

$$\forall x_1, ..., x_n \ \exists \, ! \ y \ \phi(x_1, ..., x_n, y),$$

es verdadera en $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$. Asumiendo ésto, F es absoluta para $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ si y sólo si ϕ lo es si y sólo si, para todo $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{M}, F^{\mathbf{M}}(x_1, \ldots, x_n) = F^{\mathbf{N}}(x_1, \ldots, x_n)$.

Teorema 3.2.9. *Las siguientes relaciones y funciones son absolutas para modelos transitivos de ZF^{-}-P-Inf.*

(a) $x \in y$,	*(f)* $\langle x, y\rangle$,	*(k)* $S(x)$, *esto es* $x \cup \{x\}$,
(b) $x = y$,	*(g)* 0,	*(l)* x *es transitivo*,
(c) $x \subset y$,	*(h)* $x \cup y$,	*(m)* $\bigcup x$,
(d) $\{x, y\}$,	*(i)* $x \cap y$,	*(n)* $\bigcap x (\bigcap 0 = 0)$.
(e) $\{x\}$,	*(j)* $x \setminus y$,	

Observación. Las funciones y relaciones, como $F(x, y) = \{x, y\}$ y $F(x) = \bigcup x$ que se enuncián en el teorema, se definen a partir de ZF^{-}-P-Inf y por lo tanto, para un modelo $\mathbf{M}$ de ZF^{-}-P-Inf estas nociones están bien definidas, luego tiene sentido preguntarnos acerca de su absolutez. Lo mismo pasa con la constante 0.

Demostración. (del Teorema 3.2.9). Se demostrará que cada noción está definida mediante una fórmula que es lógicamente equivalente a una fórmula Δ_0, de donde se seguirá que la noción es absoluta. La absolutez de (a),(b) y (c) ya se demostró anteriormente. Para demostrar (d), de la definición de $\{x, y\}$, se tiene que

$$z = \{x, y\} \leftrightarrow [x \in z \wedge y \in z \wedge \forall w \in z (w = x \vee w = y)].$$

donde la fórmula de la derecha es lógicamente equivalente a una fórmula Δ_0.

Para demostrar (e), $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, esto es

$$z = \langle x, y\rangle \leftrightarrow [\exists w \in z (w = \{x\}) \wedge \exists w \in z (w = \{x, y\}) \wedge \forall w \in z (w = \{x\} \vee w = \{x, y\})],$$

y la fórmula del lado derecho es equivalente a una fórmula Δ_0 que se obtiene por sustituir las ocurrencias de $w = \{x\}$ y $w = \{x, y\}$ por fórmulas que son equivalentes a fórmulas Δ_0. Para (g), (h), (i) y (k), se tiene

$$z = 0 \leftrightarrow [\forall w \in z (w \neq w)].$$
$$z = x \cup y \leftrightarrow [\forall w \in z (w \in x \vee w \in y) \wedge x \subset z \wedge y \subset z].$$
$$z = x \cap y \leftrightarrow [\forall w \in x (w \in y \to w \in z) \wedge z \subset x \wedge z \subset y].$$
$$z = S(x) \leftrightarrow [x \in z \wedge x \subset z \wedge \forall w \in z (w = x \vee w \in x)].$$

(j) es similar a (i).

Finalmente para (l)-(n),

$$x \text{ es transitivo} \leftrightarrow [\forall v \in x \forall z \in v (z \in x)].$$
$$y = \bigcup x \leftrightarrow [\forall v \in x (v \subset y) \wedge \forall z \in y \exists v \in x (z \in v)].$$
$$y = \bigcap x \leftrightarrow [\forall v \in x (y \subset v) \wedge \forall v \in x \forall z \in v (\forall w \in x (z \in w) \to z \in y) \wedge (x = 0) \to y = 0].$$

Notar que en (n), $\bigcap 0$ debería ser $\mathbf{V}$, pero la redefinimos de tal manera que sea 0.

Así, para cada función F del teorema anterior, por ejemplo $F(x,y) = \{x,y\}$, se probó que $F^{\mathbf{M}}(x,y) = F^{\mathbf{V}}(x,y) = F(x,y)$, en nuestro ejemplo, $\{x,y\}^{\mathbf{M}} = \{x,y\}$.

■

Se puede hacer una demostración más rápida del Teorema 3.2.9(f) una vez que se conoce que la pareja no ordenada significa lo mismo en $\mathbf{M}$ que en $\mathbf{V}$, lo mismo se debe cumplir para cualquier composición de estas operaciones, en particular para la pareja ordenada. Lo anterior se establece en el lema siguiente.

Lema 3.2.10. *Las nociones absolutas son cerradas bajo composición. Esto es, si $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$ y la fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ y las funciones $F(x_1, \ldots, x_n)$, $G_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, G_n(y_1, \ldots, y_m)$ son absolutas para $\mathbf{M}$ $\mathbf{N}$ entonces, también lo es la fórmula*

$$\phi(G_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, G_n(y_1, \ldots, y_m))$$

y la función

$$F(G_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, G_n(y_1, \ldots, y_m)).$$

Demostración. Por simplicidad, la demostración se hará para el caso $m = n = 1$, la demostración para el caso general es análogo. Si $y \in \mathbf{M}$, entonces

$$(\phi(G(y)))^{\mathbf{M}} \leftrightarrow \phi^{\mathbf{M}}(G^{\mathbf{M}}(y)) \leftrightarrow \phi^{\mathbf{N}}(G^{\mathbf{N}}(y)) \leftrightarrow (\phi(G(y)))^{\mathbf{N}}.$$

La segunda equivalencia de la linea anterior se sigue del hecho de que $G^{\mathbf{M}}(y) = G^{\mathbf{N}}(y)$ y ϕ es absoluta para $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$. De manera análoga,

$$F(G(y))^{\mathbf{M}} = F^{\mathbf{M}}(G^{\mathbf{M}}(y)) = F^{\mathbf{N}}(G^{\mathbf{N}}(y)) = F(G(y))^{\mathbf{N}}.$$

■

Por lo tanto, una forma sencilla de mostrar la absolutez de $\langle x,y \rangle$ es escribiéndola como

$$\langle x,y \rangle = F(G_1(x,y), G_2(x,y)),$$

donde $G_1(x,y)$ es $\{x\}$ y $G_2(x,y) = F(x,y) = \{x,y\}$ y empleando el hecho que G_1, G_2 y F son absolutas, por el Teorema 3.2.9 incisos (d) y (e).

Así, el Lema 3.2.10 proporciona otra técnica para obtener nociones absolutas.

Teorema 3.2.11. *Las siguientes relaciones y funciones son absolutas para un modelo transitivo de ZF^{-}-P-Inf:*

(a) z es una pareja ordenada,
(b) $A \times B$,
(c) R es una relación,
(d)dom(R),

(e)rango(R), *(g)R(x),*
(f) R es una función, *(h) R es una función inyectiva.*

Demostración. Las relaciones y funciones del enunciado del teorema se definen a partir de ZF^{-}-P-Inf, así que si $\mathbf{M}$ es un modelo de ZF^{-}-P-Inf, las fórmulas (a)-(h) están definidas en $\mathbf{M}$, con lo cual tiene sentido preguntarse sobre la absolutez de éstas.
Para (a),

$$z \text{ es una pareja ordenada} \leftrightarrow \phi(G_1(z), G_2(z), G_3(z)),$$

donde $G_1(z) = G_2(z) = \bigcup z$ que es absoluta por el Teorema 3.2.9, $G_3(z) = z$ y $\phi(a, b, c)$ es

$$\exists x \in a \exists y \in b(c = \langle x, y\rangle),$$

la cual es absoluta, ya que se obtiene cuantificando sobre la fórmula absoluta $c = \langle x, y\rangle$. Así, $\phi(G_1(z), G_2(z), G_3(z))$ es absoluta, por el Lema 3.2.10. Luego "z es una pareja ordenada" es absoluta, ya que es lógicamente equivalente a una fórmula que es absoluta.
En lo que sigue se reemplazará este formalismo por las palabras "por sustitución".

Para (b)-(f):

$$C = A \times B \leftrightarrow [\forall x \in A \forall y \in B(\langle x, y\rangle \in C) \wedge \forall z \in C\ \exists x \in A\ \exists y \in B(z = \langle x, y\rangle)].$$

$$R \text{ es una relación} \leftrightarrow [\forall z \in R(z \text{ es una pareja ordenada})].$$

$$A = \mathrm{dom}(R) \leftrightarrow [\forall x \in A \exists y \in \bigcup\bigcup R(\langle x, y\rangle \in R) \wedge \forall x \in \bigcup\bigcup R\ \forall y \in \bigcup\bigcup R(\langle x, y\rangle \in R \rightarrow x \in A)].$$

R es una función $\leftrightarrow [R$ es una relación $\wedge\ \forall x \in \bigcup\bigcup R\ \forall y \in \bigcup\bigcup R\ \forall y' \in \bigcup\bigcup R(\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle x, y'\rangle \in R \rightarrow y = y')]$.

Estas nociones son absolutas ya que se forman a partir de fórmulas absolutas, por sustitución, por cuantificadores acotados, y conectivos proposicionales. Los demas incisos que se omiten son similares a las anteriores. ■

Con los resultados sobre absolutez, se puede verificar el Axioma de Infinitud en un modelo dado.

Lema 3.2.12. *Sea $\mathbf{M}$ un modelo transitivo de ZF^{-}-P-Inf. Si $\omega \in \mathbf{M}$, entonces el Axioma de Infinitud se cumple en $\mathbf{M}$.*

Demostración. Por la absolutez de 0 y S (Teorema 3.2.9), el Axioma de Infinitud relativizado a $\mathbf{M}$ es equivalente a

$$\exists x \in \mathbf{M}(0 \in x \wedge \forall y \in x(S(y) \in x)),$$

lo cual es verdadero, considerando a $x = \omega$.

■

El argumento de la demostración anterior muestra que el Axioma de Infinitud es falso en $R(\omega)$, ya que un $x \in \mathbf{WF}$ que contenga al 0, y sea cerrado bajo la operación S tiene rank infinito.
Por lo tanto, se cumple lo siguiente.

Teorema 3.2.13. (ZF^-) *$R(\omega)$ es un modelo de $ZFC - Inf + (\neg Inf)$.*

Demostración. Por los Lemas 3.2.12 y 3.1.13 sólo se necesita probar que el axioma de elección es verdadero en $R(\omega)$. Es decir, se debe probar que

$$\forall A \in R(\omega) \exists R \in R(\omega)[(R \text{ bien ordena } A)^{R(\omega)}].$$

Sea $A \in R(\omega)$. Se cumple que A es finito, así que puede ser bien ordenado. Sea $R \subset A \times A$ un buen orden en A, entonces $R \in R(\omega)$. Sólo resta probar que $(R \text{ bien ordena } A)^{R(\omega)}$, ésto es una consecuencia del siguiente lema. ■

Lema 3.2.14. (ZF^-). *Sea $\mathbf{M}$ un modelo transitivo de ZF^--P-Inf. Sean A $R \in \mathbf{M}$, tal que R bien ordena A. Entonces $(R$ bien ordena $A)^{\mathbf{M}}$.*

Demostración. Se cumple que

$$(R \text{ es un orden total en A}) \leftrightarrow$$
$$[(R \text{ es una relación en A}) \wedge (R \text{ satisface tricotomía}) \wedge (R \text{ es antirreflexiva})],$$

aplicando el Teorema 3.2.11 al consecuente de la equivalencia anterior, se obtiene que, “R es un orden total en A” es absoluta para $\mathbf{M}$. Luego, sea $\phi(X, A, R)$

$$X \subset A \wedge X \neq 0 \rightarrow \exists y \in X \forall z \in X(\langle z, y \rangle \notin R).$$

ϕ también es absoluta para $\mathbf{M}$ por el Teorema 3.2.11.
Por definición,

$$(R \text{ bien ordena A})^{\mathbf{M}} \leftrightarrow ((R \text{ es un orden total en A})^{\mathbf{M}} \wedge \ \forall X \in \mathbf{M}\ \phi^{\mathbf{M}}(X, A, R)).$$

Por hipótesis, R bien ordena A, de donde se sigue que R es un orden total en A. Entonces, por la absolutez de “R es un orden total en A” se tiene que $(R \text{ es un orden total en A})^{\mathbf{M}}$. Nuevamente, por hipótesis se cumple $\forall X \in \mathbf{M}\ \phi(X, A, R)$. Entonces, por la absolutez de ϕ, se cumple $\forall X \in \mathbf{M}\ \phi^{\mathbf{M}}(X, A, R)$.

■

Notar que el teorema anterior no afirma la absolutez de la noción “ buen orden”, sino que afirma que

$$\forall A, R \in \mathbf{M}(R \text{ bien ordena A} \rightarrow (R \text{ bien ordena A})^{\mathbf{M}}).$$

Se demostrará en el Teorema 3.2.23 que el buen orden es absoluto si se supone el Axioma de Fundación.

El Teorema 3.2.13 implica el siguiente resultado.

Corolario 3.2.15. $Con(ZF^-) \to Con(ZFC - Inf + \neg Inf)$.

Por el Corolario 3.2.15 se concluye que el Axioma de Infinitud es un Axioma independiente de ZFC-Inf.

Teorema 3.2.16. (ZF^-) *Todos los axiomas de* ZF *son verdaderos en* $\boldsymbol{WF}$.

Demostración. Se obtiene de los Lemas 3.1.13 y 3.2.12. ∎

Lema 3.2.17. *Sea* $A \in \boldsymbol{WF}$ *entonces,* A *puede ser bien ordenado si y sólo si* (A *puede ser bien ordenado*)$^{\boldsymbol{WF}}$.

Demostración. Supongamos que A puede ser bien ordenado y sea $R \subset A \times A$ un buen orden para A. Entonces, usando que $A \in \mathbf{WF}$, $A \times A \in \mathbf{WF}$ por el Lema 2.1.8 y $R \in \mathbf{WF}$ por el Lema 2.1.9. Así, por el Lema 3.2.14, (R bien ordena A)$^{\mathbf{WF}}$, por lo cual (A puede ser bien ordenado)$^{\mathbf{WF}}$.
Luego, supongamos que (A puede ser bien ordenado en)$^{\mathbf{WF}}$, sea R tal que (R bien ordena A)$^{\mathbf{WF}}$. Entonces, así como en la demostración del Lema 3.2.14, se prueba que R es un orden total en A y que todo subconjunto B no vacío de A, tal que $B \in \mathbf{WF}$ tiene un R-primer elemento. Pero todo subconjunto de A está en $\mathbf{WF}$ por el Lema 2.1.9. Por lo tanto R bien ordena A.

∎

Por lo tanto, se cumple el siguiente resultado.

Corolario 3.2.18. (ZF^-) $AC \to (AC)^{\boldsymbol{WF}}$.

Ya antes se probó, en ZF^-, que $\mathbf{WF}$ es un modelo para ZF. Este resultado junto con el Corolario 3.2.18 prueba que, en ZFC^-, $\mathbf{WF}$ es un modelo para ZFC.

Corolario 3.2.19. $Con(ZF^-) \to Con(ZF)$ *y* $Con(ZFC^-) \to Con(ZFC)$.

Notar que el Corolario 3.2.19, justifica el hecho de considerar al Axioma de Fundación como un axioma básico.

A partir de esta sección se asumirá el Axioma de Fundación, esto es, supondremos que $\mathbf{V} = \mathbf{WF}$, y el sistema básico de axiomas será ZF o ZFC. Considerando al Axioma de Fundación como un axioma básico, la relación $\in$ es bien fundada, usando estos hechos se pueden establecer nuevos resultados sobre absolutez.

Teorema 3.2.20. *Las siguientes relaciones y funciones se definen a partir de* ZF-P, *mediante formulas equivalentes a fórmulas* Δ_0. *Por lo tanto, son absolutas para modelos transitivos de* $ZF - P$.

(a) x es un ordinal.
(b) x es un ordinal límite.
(c) x es un ordinal sucesor.
(d) x es un ordinal finito.
(e) 0.
(f) 1.

Las fórmulas y relaciones del enunciado del teorema se definen en $ZF-P$, con lo cual están bien definidas en un modelo de $ZF-P$, luego, tiene sentido hablar sobre su absolutez. Para demostrar que una noción del enunciado del teorema es absoluta, se demostrará que está definida mediante una fórmula ϕ que es equivalente a una fórmula Δ_0. Se concluirá de esta forma que ϕ es absoluta.

Demostración. En $ZF-P$, x es un ordinal si y sólo si x es transitivo y totalmente ordenada por $\in$, (ver Teorema 2.3.2). Luego, "x es transitivo " es equivalente a una fórmula Δ_0 (Teorema 3.2.9), y x es totalmente ordenada por $\in$ es:

$$\forall y \in x \forall z \in x(y \in z \vee y = z \vee z \in y) \wedge (\forall y \in x(\neg(y \in y))),$$

la cual es una fórmula Δ_0. Así, se cumple que "x es un ordinal" es equivalente a una fórmula que es Δ_0.
Para demostrar (b),

$$x \text{ es un ordinal límite} \leftrightarrow x \text{ es un ordinal} \wedge \forall y \in x \exists z \in x(y \in z) \wedge x \neq 0,$$

donde, la fórmula de la derecha es una fórmula Δ_0.
Para (c), x es un ordinal sucesor si y sólo si x es un ordinal, $x \neq 0$ y x no es un ordinal sucesor.
Para (d) x es un ordinal finito, se expresa como:

$$(x = 0 \ \vee x \text{ es un ordinal sucesor}) \wedge (\forall y \in x(y = 0 \ \vee y \text{ es un ordinal sucesor}))),$$

la cual es una fórmula Δ_0.
La validez de (e) se probó en el Teorema 3.2.9.
Para (f), usaremos que $x = S(y)$ es Δ_0 (por Teorema 3.2.9), $x = 1 \leftrightarrow \exists y \in x(y = 0 \wedge x = S(y))$. ■

Lema 3.2.21. *Si $\mathbf{M}$ es un modelo transitivo de ZF-P, entonces todo subconjunto finito de $\mathbf{M}$ está en $\mathbf{M}$.*

Demostración. Por inducción en n se mostrará que:

$$\forall x \subset \mathbf{M} \ (|x| = n \to x \in \mathbf{M}).$$

Para $n = 0$, si $|x| = 0$, entonces $x = 0$ y a partir del Teorema 3.2.20(f) se obtiene que $x \in \mathbf{M}$. Luego, supóngase que el enunciado del lema se cumple para $x \subset \mathbf{M}$ con $|x| = n$.
Sea $x \subset \mathbf{M}$ con $n+1$ elementos. Sea $y \in x$, entonces $y \in \mathbf{M}$, así $\{y\} \in \mathbf{M}$ (usando el Teorema 3.2.9(e)). Además, por hipótesis de inducción, $x \setminus \{y\} \in \mathbf{M}$. Así, por el Teorema 3.2.9(h), se tiene que $x = x \setminus \{y\} \cup \{y\} \in \mathbf{M}$. ■

Teorema 3.2.22. *Si* $\boldsymbol{M}$ *es un modelo de* $ZF - P$*, la noción,* x *es finito, es absoluta para* $\boldsymbol{M}$*.*

Demostración. En $ZF - P$, x es finito si y sólo si $\exists f\ \phi(x, f)$, donde $\phi(x, f)$ es:

$$f \text{ es una función inyectiva y } \mathrm{dom}(f) = x \text{ y } \mathrm{rango}(f) \in \omega.$$

Así, se desea probar que, para $x \in \mathbf{M}$

$$(\exists f \phi(x, f))^{\mathbf{M}} \leftrightarrow \exists f \phi(x, f).$$

Pero la fórmula ϕ es absoluta, por los Teoremas 3.2.11 y 3.2.20. Así que la fórmula de arriba es equivalente a :

$$\exists f\ \in \mathbf{M}(\phi(x, f)) \leftrightarrow \exists\ f\ \phi(x, f).$$

La implicación $\rightarrow$ es inmediata, por lo que probaremos únicamente $\leftarrow$. Supóngase que existe f tal que $\phi(x, f)$, entonces

$$f = \{\langle y, n\rangle :\ y \in x \wedge n \in\ \mathrm{rango}(f)\}.$$

Notar que f es un conjunto finito en $\mathbf{V}$. Luego, usando que $x \in \mathbf{M}$, por la transitividad de $\mathbf{M}$, se tiene que para $\langle y, n\rangle$ en f, y está en $\mathbf{M}$. Usando que $\mathbf{M}$ es un modelo de ZF-P, para n natural, $n^{\mathbf{M}} \in \mathbf{M}$. Pero, $x = n$ es absoluta para $\mathbf{M}$. Así, se tiene que $n \in \mathbf{M}$. Luego, por la absolutez de la pareja ordenada se tiene que $f \subset \mathbf{M}$, entonces, por el Lema 3.2.21, se tiene que $f \in \mathbf{M}$. ■

Teorema 3.2.23. *Si* $\boldsymbol{M}$ *es un modelo transitivo de ZF-P, las siguientes nociones son absolutas para* $\boldsymbol{M}$*.*

(a) R *bien ordena* A*.*

(b) tipo$\langle A, R\rangle$*.*

Demostración. Las nociones (a) y (b) están definidas en $ZF - P$.
Para demostrar (a), sean A y R en $\mathbf{M}$. Se desea probar que

$$(R \text{ bien ordena A})^{\mathbf{M}} \leftrightarrow (R \text{ bien ordena} A).$$

Por el Lema 3.2.14, se tiene la condición de suficiencia de la equivalencia anterior.
Luego, es un resultado en $ZF - P$ que todo conjunto bien ordenado es isomorfo a un ordinal, este resultado se puede consultar en [2]. Así que, si $(R \text{ bien ordena } A)^{\mathbf{M}}$, como $\mathbf{M}$ es un modelo de $ZF - P$, existen f, α en $\mathbf{M}$ tal que:

$$(\alpha \text{ es un ordinal y } f \text{ es un isomorfismo de } \langle A, R\rangle \text{ a } \alpha)^{\mathbf{M}}.$$

Esta fórmula es absoluta (Teoremas 3.2.11 y 3.2.20), esto es, si α es un ordinal y f es un isomorfismo en $\mathbf{M}$, entonces α es un ordinal y f es un isomorfismo en $\mathbf{V}$. Así que, R bien ordena A y su tipo es α. Este argumento también establece la absolutez de *tipo*$\langle A, R\rangle$.

■

A continuación, se estudian las condiciones para que una noción definida por Recursión transfinita sea absoluta. Ya que el Teorema de Recursión Transifinita 2.4.7, fue establecido en términos de clases, se dirá el significado de la relativización y absolutez de clases. Formalmente una clase $\mathbf{A}$ es una fórmula, $A(x)$, $A = \{x : \mathbf{A}(x)\}$. Así, si $\mathbf{M}$ es una clase, se define $\mathbf{A}^{\mathbf{M}}$ como $\{x \in \mathbf{M} : (\mathbf{A}(x))^{\mathbf{M}}\}$. Diremos que $\mathbf{A}$ es absoluta para $\mathbf{M}$, si y sólo si $\mathbf{A}^{\mathbf{M}} = \mathbf{A} \cap \mathbf{M}$. Por ejemplo, la fórmula $\mathbf{V}(x) : x = x$ es absoluta para toda clase $\mathbf{M}$, ya que $\mathbf{V}^{\mathbf{M}} = \mathbf{M}$.
Si $\mathbf{M}$ es un modelo transitivo de $ZF - P$ se cumple que la noción "ser ordinal" es absoluta entonces, $\mathbf{ON}^{\mathbf{M}} = \mathbf{ON} \cap \mathbf{M}$.
Las clases que incluyen más de una variable se tratan similarmente. Por ejemplo, si $\mathbf{R} \subset \mathbf{V} \times \mathbf{V}$, entonces $\mathbf{R}^{\mathbf{M}} = \{\langle x, y\rangle \ \in \mathbf{M} \times \mathbf{M} : (\mathbf{R}(x, y))^{\mathbf{M}}\}$, y $\mathbf{R}$ es absoluta para $\mathbf{M}$ si y sólo si $\mathbf{R}^{\mathbf{M}} = \mathbf{R} \cap (\mathbf{M} \times \mathbf{M})$. Se desea relativizar clases que son funciones. Sea $\mathbf{G} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ (es decir, $\mathbf{G}(x, y)$ es una fórmula y para cada x, existe una única y tal que $\mathbf{G}(x, y)$). Podemos pensar a $\mathbf{G}$ como $\{\langle x, y\rangle : \mathbf{G}(x, y)\}$.
No se considerará la función $\mathbf{G}^{\mathbf{M}}$ a menos que la fórmula, $\forall x \exists\, !y\ \mathbf{G}(x, y)$, sea verdadera en $\mathbf{M}$, en ese caso $\mathbf{G}^{\mathbf{M}} : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ y $\mathbf{G}$ es absoluta para $\mathbf{M}$ si y sólo si $\mathbf{G}^{\mathbf{M}} = \mathbf{G} \restriction \mathbf{M}$.

Teorema 3.2.24. *Sean $\boldsymbol{R}$ una relación bien fundada y set-like en $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{F} : \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$. Sea $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{V}$ tal que*

$$\forall x \in \boldsymbol{A}[\boldsymbol{G}(x) = \boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{G} \restriction \ pred(\boldsymbol{A}, x, \boldsymbol{R}))].$$

Sea $\boldsymbol{M}$ un modelo transitivo de $ZF - P$ tal que
(1)$\boldsymbol{F}$ es absoluta para $\boldsymbol{M}$.
(2)$\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{A}$ son absolutas para $\boldsymbol{M}$, ($\boldsymbol{R}$ es set- like en $\boldsymbol{A}$)$^{\boldsymbol{M}}$ y

$$\forall x \in \boldsymbol{M}(pred(\boldsymbol{A}, x, \boldsymbol{R}) \subset \boldsymbol{M}).$$

Entonces $\boldsymbol{G}$ es absoluta para $\boldsymbol{M}$.

Demostración. Por la absolutez de $\mathbf{A}$, $\mathbf{R}$ se cumple que ($\mathbf{R}$ es bien fundada en $\mathbf{A}$)$^{\mathbf{M}}$, pues si $k \subset \mathbf{A}^{\mathbf{M}} = \mathbf{A} \cap \mathbf{M}$, k admite un a-$\mathbf{R}$ primer elemento, $a \in k$, luego $a \in \mathbf{M}$, así a es un $\mathbf{R}^{\mathbf{M}}$ primer elemento.
Por lo tanto, se tiene que ($\mathbf{R}$ es bien fundada y set-like enA)$^{\mathbf{M}}$ y $\mathbf{F}^{\mathbf{M}} : \mathbf{A}^{\mathbf{M}} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$. Luego, puesto que $\mathbf{M}$ es un modelo de $ZF - P$, el Teorema 2.4.7 se cumple en $\mathbf{M}$, así existe una única función $\mathbf{H} : \mathbf{A}^{\mathbf{M}} \to \mathbf{M}$ tal que

$$\forall x \in \mathbf{A}^{\mathbf{M}}[\mathbf{H}(x) = \mathbf{F}^{\mathbf{M}}(x, \mathbf{H} \restriction pred^{\mathbf{M}}(\mathbf{A}^{\mathbf{M}}, x, \mathbf{R}^{\mathbf{M}}))].$$

Por inducción transfinita sobre x se probará que, para cada x en $\mathbf{A}^{\mathbf{M}}$: $\mathbf{H}(x) = \mathbf{G}(x)$.
Sea $x \in \mathbf{A}^{\mathbf{M}}$, supongamos que $\forall y(y\mathbf{R}x \to \mathbf{H}(x) = \mathbf{G}(x))$. Entonces

$$\mathbf{H}(x) = \mathbf{F}^{\mathbf{M}}(x, \mathbf{H} \restriction pred^{\mathbf{M}}(\mathbf{A}^{\mathbf{M}}, x, \mathbf{R}^{\mathbf{M}})).$$

Usando que $\text{pred}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) \subset \mathbf{M}$, la absolutez de $\mathbf{R}$ y la absolutez de $\mathbf{A}$ se sigue que $\text{pred}^{\mathbf{M}}(\mathbf{A}^{\mathbf{M}}, x, \mathbf{R}^{\mathbf{M}})) = pred(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$.

Por lo tanto, se cumple:

$$\mathbf{H}(x) = \mathbf{F}^{\mathbf{M}}(x, \mathbf{H} \restriction pred(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})) = \mathbf{G}(x).$$

La última igualdad de la ecuación anterior se obtiene usando la hipótesis de inducción y la absolutez de $\mathbf{F}$. Se obtiene así la absolutez de $\mathbf{G}$. ■

Teorema 3.2.25. *Las siguientes nociones son absolutas para modelos transitivos de $ZF - P$.*

(a) $\alpha + 1$.

(b) $\alpha - 1$.

(c) $\alpha + \beta$.

(d) $\alpha \cdot \beta$.

(e) α^{β}.

(f) $rank(x)$.

Demostración. Para (a), basta notar que $\alpha + 1$ es $S(\alpha)$ luego, por el Teorema 3.2.20(c) se cumple el Teorema para (a). Para (b),

$$x = \alpha - 1 \leftrightarrow (\alpha \text{ es un ordinal sucesor} \wedge \alpha = x + 1) \vee (\alpha \text{ no es un ordinal sucesor } \wedge\ x = \alpha).$$

Dado $\alpha \in \mathbf{ON}$ definiremos por recursión transfinita sobre β a $\alpha + \beta$, $\alpha \cdot \beta$ y α^{β}, de acuerdo a la notación del Teorema de Recursión Transfinita (Teorema 2.4.7) sea $\mathbf{R}$ igual a $\in$ y $\mathbf{A} = \mathbf{ON}$.
Para (c):

$$\mathbf{F}_1(\beta, h) = \begin{cases} \alpha & \text{si } \beta = 0, \\ S(h(\eta)) & \text{si } h : pred(\mathbf{ON}, \beta, \in) \to \mathbf{ON} \text{ y } \beta = \eta + 1, \\ \bigcup\{h(\eta) : \eta \in \beta\} & \text{si } h : pred(\mathbf{ON}, \beta, \in) \to \mathbf{ON}\text{y } \beta \text{ es un ordinal límite}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para (d):

$$\mathbf{F}_2(\beta, h) = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta = 0, \\ h(\eta) + \alpha & \text{si } h : pred(\mathbf{ON}, \beta, \in) \to \mathbf{ON} \text{ y } \beta = \eta + 1, \\ \bigcup\{h(\eta) : \eta \in \beta\} & \text{si } h : pred(\mathbf{ON}, \beta, \in) \to \mathbf{ON}\text{y } \beta \text{ es un ordinal límite}, \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para (e):

$$\mathbf{F}_3(\beta, h) = \begin{cases} 1 & \text{si } \beta = 0, \\ h(\eta) \cdot \alpha & \text{si } h : pred(\mathbf{ON}, \beta, \in) \to \mathbf{ON} \text{ y } \beta = \eta + 1, \\ \bigcup\{h(\eta) : \eta \in \beta\} & \text{si } h : pred(\mathbf{ON}, \beta, \in) \to \mathbf{ON}\text{y } \beta \text{ es un ordinal límite}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por lo tanto, en cada uno de los casos se satisfacen las condiciones para aplicar el Teorema de la Recursión Transfinita (2.4.7). Definimos $\alpha+\beta = \mathbf{G}_1(\beta)$, $\alpha\cdot\beta = \mathbf{G}_2(\beta)$ y $\alpha^\beta = \mathbf{G}_3(\beta)$, donde $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ y $\mathbf{G}_3$ son las funciones garantizadas por el Teorema de la Recursión para las funciones $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ respectivamente.
Luego, demostraremos que se cumplen las condiciones para aplicar el Teorema 3.2.24 a $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$.
Si $\mathbf{M}$ es un modelo transitivo de $ZF-P$, usando que ser ordinal es absoluto para $\mathbf{M}$, se sigue que $\mathbf{ON}$ es absoluto para $\mathbf{M}$. También, es inmediato que $\in$ es absoluto para $\mathbf{M}$ y que se cumple que ($\in$ es set-like)$^{\mathbf{M}}$. Por la transitividad de $\mathbf{M}$ se cumple que para cada x en $\mathbf{A}$, $(pred(\mathbf{ON}, x, \in) \subset \mathbf{M})$. Por lo tanto se cumple la condición (2) del Teorema 3.2.24.
Luego, por los Teoremas 3.2.9, 3.2.11, 3.2.20 e incisos anteriores de este teorema, se sigue que las funciones $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ son absolutas. Así, por el Teorema 3.2.24 se cumple que (c), (d) y (e) son absolutas.
Para (f), rank(x) está definida por recursión en x, ver Definición, 2.4.8. Así análogo a los incisos anteriores se demuestra que es absoluta. ■

Lema 3.2.26. *Si $\boldsymbol{M}$ es un modelo transitivo para ZF, entonces*
(a) $\mathscr{P}(x)^{\boldsymbol{M}} = \mathscr{P}(x) \cap \boldsymbol{M}$ si $x \in \boldsymbol{M}$.
(b) $R(\alpha)^{\boldsymbol{M}} = R(\alpha) \cap \boldsymbol{M}$ si $\alpha \in \boldsymbol{M}$.

Demostración. (a) se sigue de la absolutez de $\subset$.
(b) se sigue de la absolutez de $rank$ y de $R(\alpha) = \{x : rank(x) < \alpha\}$. ■

3.3. Modelos de ZFC-P

En esta sección se estudia una forma de producir modelos, en ZFC, de $ZFC - P$.

Definición 3.3.1. *Para κ un cardinal infinito, $H(\kappa) = \{x : |tr\ cl(x)| < \kappa\}$.*

Para cada cardinal infinito, $H(\kappa)$ es un conjunto y no una clase propia, esto es consecuencia del siguiente lema. Recordar que estamos asumiendo que $\mathbf{WF} = \mathbf{V}$, así, es factible considerar para todo x, $rank(x)$.

Lema 3.3.2. *Para cada cardinal infinito, $H(\kappa) \subset R(\kappa)$.*

Demostración. Sea $x \in H(\kappa)$ y probemos que $rank(x) < \kappa$. Notar que lo anterior, garantiza, por el Lema 2.1.5, que $x \in R(\kappa)$. Sean $t = tr\ cl(x)$ y $S = \{rank(y) : y \in t\}$, entonces $S \subset \mathbf{ON}$. Notar que por el Lema 2.1.6(a), para todo $\beta \in S$, $\beta < rank(t)$, con lo cual $rank(t) \notin S$. Por lo tanto, $\{\alpha \in \mathbf{ON} : \alpha \notin S\} \neq 0$.
Sea α el primer ordinal que no está en S, entonces $\alpha \subset S$. Si $\alpha \neq S$, sea $\beta = min(S \setminus \alpha)$ y fijemos $y \in t$ con $rank(y) = \beta$. Luego, ya que t es transitiva, si $z \in y$ entonces $z \in t$, con lo cual $rank(z) < rank(y) = \beta$. Luego, se cumple que $rank(z) > \alpha$ o $rank(z) = \alpha$ o $rank(z) < \alpha$, la primera opción no se cumple ya que β es el primer elemento de S más

grande que α y $rank(z) \in S$ es menor que β. Más aún, la segunda opción no se cumple ya que $\alpha \notin S$. Así se cumple que $rank(z) < \alpha$. Entonces,

$$rank(y) = sup\{rank(z) + 1 : z \in y\} \leq \alpha,$$

lo cual es una contradicción, con $rank(y) = \beta > \alpha$. Por lo tanto, $\alpha = S$.
Se cumple así que $|\alpha| < |t|$, y ya que $x \in H(\kappa)$, entonces $|t| < \kappa$, de lo cual se concluye que $|\alpha| < \kappa$. Pero κ es un cardinal, asi que $\alpha < \kappa$. Entonces, dado que $x \subset t \subset R(\alpha)$, se cumple que $rank(x) \leq \alpha < \kappa$.

■

Lema 3.3.3. *(AC). Si κ es regular, entonces $H(\kappa) = R(\kappa)$ si y sólo si $\kappa = \omega$ o κ es fuertemente inaccesible.*

Demostración. Sea κ un cardinal regular.
($\leftarrow$). Supongamos que $\kappa = \omega$ o κ es fuertemente inaccesible. Entonces, se cumple:

$$\forall \alpha < \kappa(|R(\alpha)| < \kappa). \tag{3.4}$$

En efecto, si $\kappa = \omega$ por el Lema 2.1.10 se verifica lo anterior. Si κ, un ordinal límite, entonces es fuertemente inaccesible. Por inducción sobre $\alpha < \kappa$ demostraremos (3.4).
Sea $\alpha < \kappa$ y supongamos que $|R(\beta)| < \kappa$ para cada $\beta < \alpha$. Si $\alpha = \delta + 1, R(\alpha) = \mathscr{P}(R(\delta))$, así $|\mathscr{P}(R(\delta))| = 2^{|R(\delta)|}$. Pero, por hipótesis de inducción $|R(\delta)| < \kappa$, entonces usando que κ es fuertemente inaccesible se cumple que $|R(\alpha)| = 2^{|R(\delta)|} < \kappa$.
Por otro lado, si α es un ordinal límite, entonces

$$|R(\alpha)| = |\bigcup\{R(\delta) : \delta < \alpha\}|.$$

Por hipótesis de inducción, se cumple que para cada $\delta < \alpha$, $|R(\delta)| < \kappa$. También, se está suponiendo que $\alpha < \kappa$ y que κ es regular. Entonces, por el Lema 1.3.21 aplicado a κ, se obtiene que $|R(\alpha)| < \kappa$.

Probaremos ahora que $R(\kappa) \subset H(\kappa)$. Sean $x \in R(\kappa) = \{x \in \mathbf{V} : rank(x) < \kappa\}$ y $\alpha = rank(x)$, entonces $\alpha < \kappa$. Se cumple $tr\ cl(x) \subset R(\alpha)$ (por inducción sobre n se demuestra que $A^n(x) \subset R(\alpha)$), así $|tr\ cl(x)| \leq |R(\alpha)|$ y $|R(\alpha)| < \kappa$ por (3.4). Entonces $x \in H(\kappa)$, con lo cual $R(\kappa) \subset H(\kappa)$. Luego, por el Lema 3.3.2 se concluye que $R(\kappa) = H(\kappa)$.

($\rightarrow$). Probemos la proposición contrarrecíproca del enunciado del teorema, esto es:

$$\neg(\kappa = \omega \vee \kappa \text{ es fuertemente inaccesible}) \rightarrow \neg(H(\kappa) = R(\kappa)).$$

Supongamos el antecedente de la proposición anterior. Entonces, $\kappa > \omega$, κ es regular (por hipótesis) y no es fuertemente inaccesible. Entonces, la condición que no se cumple para que κ sea fuertemente inaccesible es:

$$\forall \lambda < \kappa : 2^{\lambda} < \kappa.$$

Así, fijemos un $\lambda < \kappa$ tal que $2^\lambda \geq \kappa$. Usando el hecho de que $\kappa = R(\kappa) \cap \mathbf{ON}$, se cumple que $\lambda \in R(\kappa)$. Luego, por el Lema 2.1.7, $rank(\lambda) = \lambda$, entonces $\mathscr{P}(\lambda) \in R(\lambda + 2)$. Ya que κ es regular, κ es un ordinal límite, así $\lambda + 2 < \kappa$, luego $\mathscr{P}(\lambda) \in R(\kappa)$.
Por otro lado, $\mathscr{P}(\lambda) \subset tr\ cl(\mathscr{P}(\lambda))$ y $|\mathscr{P}(\lambda)| = 2^\lambda > \kappa$. De esta forma se obtiene que $|tr\ cl(\mathscr{P}(\lambda))| \geq \kappa$, por lo tanto $\mathscr{P}(\lambda) \notin H(\kappa)$. ■

A continuación se enuncian algunas propiedades de los conjuntos $H(\kappa)$. En el siguiente lema se nota la importancia de definir $tr\ cl$.

Lema 3.3.4. *(a) $H(\kappa)$ es transitivo.*
(b) $H(\kappa) \cap \boldsymbol{ON} = \kappa$.
(c) Si $x \in H(\kappa)$, entonces $\bigcup x \in H(\kappa)$.
(d) Si $x, y \in H(\kappa)$, entonces $\{x, y\} \in H(\kappa)$.
(e) Si $x \in H(\kappa)$ y $y \subset x$, entonces $y \in H(\kappa)$.
(f) (AC) Si κ es regular, entonces $\forall x(x \in H(\kappa)) \leftrightarrow x \subset H(\kappa) \wedge |x| < \kappa$.

Demostración. (a) se cumple debido a que si $y \in x$ entonces $tr\ cl(y) \subset tr\ cl(x)$.
Para (b), por inducción transfinita sobre α se verifica que para cada α en $\mathbf{ON}$, $tr\ cl(\alpha) = \alpha$. Entonces, si $\alpha \in \kappa$, $|trcl(\alpha)| = |\alpha| \leq \alpha < \kappa$, así $\alpha \in H(\kappa)$, por lo tanto $\kappa \subset H(\kappa) \cap \mathbf{ON}$. Por otro lado $H(\kappa) \cap \mathbf{ON} \subset \kappa$ se sigue de $\alpha \subset trcl(\alpha)$ y de que κ es un cardinal.
(c) es consecuencia de $tr\ cl(\bigcup x) \subset tr\ cl(x)$.
Para (d). Basta considerar la equivalencia:

$$trcl(\{x, y\}) = \{x, y\} \cup trcl(x) \cup trcl(y)$$

y el hecho de κ es un cardinal infinito.
(e) se sigue, ya que si $y \subset x$, entonces $trcl(y) \subset trcl(x)$.
Para demostrar (f). En general, para todo cardinal infinito κ, se cumple que para cada $x \in H(\kappa)$, $x \subset H(\kappa)$ y $|x| < \kappa$. Supongamos ahora, que κ es regular, que $x \subset H(\kappa)$ y $|x| < \kappa$. Por el Lema 2.2.5,

$$tr\ cl(x) = x \cup \bigcup\{tr\ cl(y) : y \in x\}.$$

Así, $trcl(x)$ es la unión de $< \kappa$ conjuntos de cardinalidad $< \kappa$ luego, por el Lema 1.3.21, $tr\ cl(x)$ tiene cardinalidad $< \kappa$. ■

Teorema 3.3.5. *(AC). Si κ es regular y mayor que ω, entonces $H(\kappa)$ es un modelo de $ZFC - P$.*

Demostración. Sea κ un cardinal regular no numerable. El Axioma de Existencia se cumple trivialmente, pues $0 \in H(\kappa)$. El Axioma de Extensionalidad se cumple, ya que $H(\kappa)$ es transitivo. El Axioma de Fundación se cumple por el Lema 3.1.12, ya que estamos suponiendo $\mathbf{V} = \mathbf{WF}$. Por el Lema 3.3.4(e), se cumple la condición del Corolario 3.1.6. Por lo tanto, se satisface el Axioma de Comprensión. Por el Lema 3.3.4(d) se vale el Axioma del Par y por el Lema 3.3.4(c) se cumple el Axioma de la Unión.

Para el Axioma de Reemplazo, se demostrará que se satisfacen las condiciones del Lema 3.1.11. Sea ϕ una fórmula cuyas variables libres están en el conjunto $\{x, y, A, w_1, \cdot, w_n\}$, supóngase que $\forall A, w_1, \cdot, w_n \in H(\kappa)$ y que se cumple:

$$\forall x \in A \exists \,!\; y \in H(\kappa) \text{ tal que } \phi^{H(\kappa)}(x, y, A, w_1, \dots w_n).$$

Pongamos

$$Y = \{y \in H(\kappa) : \phi^{H(\kappa)}(x, y, A, w_1, \dots w_n)\}.$$

Entonces, $|Y| \leq |A|$. Debido a que $A \in H(\kappa)$, se sigue que $|A| < \kappa$. Así, $Y \subset H(\kappa)$ y $|Y| < \kappa$. Entonces, usando el Lema 3.3.4(f), se tiene que $Y \in \mathbf{M}$. Así, por el Lema 3.1.10 se cumple el Axioma de Reemplazo.
Por lo tanto, $H(\kappa)$ es un modelo de $ZF - P - Inf$. Más aún, $\omega \in H(\kappa)$ por Lema 3.3.4(b) entonces, por el Lema 3.2.12, se cumple el Axioma de Infinitud.
Por último, para demostrar que AC se cumple en $H(\kappa)$, es suficiente mostrar que

$$\forall A \in H(\kappa) \exists\; R \in H(\kappa)(R \text{ bien ordena } A),$$

ya que "bien ordena" es absoluto para $H(\kappa)$ (Teorema 3.2.23).
Sean $A \in H(\kappa)$ y R_1 un buen orden para A. Conviene notar que es válido suponer la existencia de tal R_1, puesto que se está suponiendo el Axioma de Elección en $\mathbf{V}$. Sea $R = R_1 \cap (A \times A)$, entonces R es un buen orden para A y $R \subset A \times A$.
Así, si $\langle x, y \rangle \in R$, $x, y \in A$, entonces por el Lema 3.3.4(d), se cumple que $\{x, y\} \in H(\kappa)$. Luego, ya que $\{x\} \subset \{x, y\}$ entonces, por el Lema 3.3.4(e) se tiene $\{x\} \in H(\kappa)$. Así, nuevamente por el Lema 3.3.4(d) $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \langle x, y \rangle \in H(\kappa)$. Entonces, $R \subset H(\kappa)$.
Ya que $A \in H(\kappa)$, se tiene $|A| < |tr\ cl(A)| < \kappa$, entonces $|A \times A| < \kappa$ (como una consecuencia de que κ es un cardinal infinito). Entonces, $|R| < \kappa$. Así, por el Lema 3.3.4(f), $R \in H(\kappa)$.

■

Teorema 3.3.6. *Si κ es regular y mayor que ω, las siguientes proposiciones son equivalentes.*
(a)$H(\kappa)$ satisface ZFC.
(b)$H(\kappa) = R(\kappa)$.
(c)κ es fuertemente inaccesible.

Demostración. Sea κ como en el enunciado del lema. El Lema 3.3.3 afirma la equivalencia entre (b) y (c).
El Teorema 3.3.5 enuncia que $H(\kappa)$ es un modelo de $ZFC - P$ así, para $(b) \to (a)$, sólo se verificará el Axioma del Conjunto Potencia.
Si $z \subset x \in H(\kappa)$, por el Lema 3.3.4(e), $z \in H(\kappa)$. Así, puesto que en $H(\kappa)$ se vale el Axioma de Comprensión, en $H(\kappa)$ se cumple el Axioma del conjunto Potencia si y sólo si,

$$\forall x \in H(\kappa)(\mathscr{P}(x) \in H(\kappa)).$$

También, se cumple que si κ es un ordinal límite, entonces $R(\kappa) = \bigcup_{\eta<\kappa} R(\eta)$, así, si $x \in R(\kappa)$, entonces $x \in R(\eta)$, para algún $\eta \in \kappa$, luego, $\mathscr{P}(x) \in R(\eta{+}2) \subset R(\kappa)$. Así $\mathscr{P}(x) \in R(\kappa)$.
Entonces, si $H(\kappa) = R(\kappa)$, en $H(\kappa)$ se cumple el Axioma del conjunto Potencia, así se tiene que (b) implica (a).
Por último, probemos que (a) implica (c). Si κ no es fuertemente inaccesible, sea $\lambda \in \kappa$ tal que $2^\lambda \geq \kappa$, entonces $\lambda \in H(\kappa)$, pero $\mathscr{P}(\lambda) \notin H(\kappa)$. ■

Por el Teorema anterior se cumple que

$$Con(ZFC) \to Con(ZFC - P + \neg P).$$

Lo anterior nos permite concluir que el Axioma del Conjunto Potencia no se demuestra en $ZFC - P$, pues si fuera un teorema de $ZFC - P$, se cumpliría en $H(\kappa)$, como consecuencia de que $H(\kappa)$ es un modelo de $ZFC - P$. Dicho de otra manera, este axioma es independiente de $ZFC - P$, por lo que es correcto incluirlo como Axioma.

Notemos además que ω_1 no es fuertemente inaccesible, pues $\omega \in \omega_1$ y $2^\omega \geq \omega_1$ (ésto es por la definición de ω_1).

Corolario 3.3.7. *$Con(ZFC) \to Con(ZFC - P + \forall x(x \text{ es numerable}))$.*

Demostración. Puesto que ω_1 es regular entonces en ZFC, se demuestra que $H(\omega_1)$ es un modelo para $ZFC - P$ (Teorema 3.3.5). Si $x \in H(\omega_1)$, entonces $|x| \leq |trcl(x)| < \omega_1$, entonces por la definición de ω_1, $|x| \leq \omega$. Es decir, x es numerable, así, en $\mathbf{V}$ existe $f : x \to \omega$ inyectiva.
Se cumple que $\omega \in H(\omega_1)$, ya que $H(\omega_1)$ satisface Infinitud y $x = \omega$ es absoluta. Entonces, $x \times \omega \in H(\omega_1)$. Además $f \subset x \times \omega$ entonces, por el Lema 3.3.4(e), $f \in H(\omega_1)$. Así (x es numerable)$^{H(\omega_1)}$. Por lo que se tiene que $H(\omega_1)$ es un modelo, en ZFC, de $ZFC - P + \forall x(x \text{ es numerable})$.
■

Del resultado anterior se deduce que la existencia de conjuntos no numerables no se puede demostrar en $ZFC - P$.

Lema 3.3.8. *Si κ es fuertemente inaccesible, entonces "α es fuertemente inaccesible " es absoluta en $H(\kappa)$.*

En particular, si κ es el primer cardinal fuertemente inaccesible, entonces $H(\kappa)$ es un modelo de ZFC más la no existencia de cardinales fuertemente inaccesibles.

Corolario 3.3.9. *$Con(ZFC) \to Con(ZFC + \neg\exists\alpha(\alpha \text{ es fuertemente inaccesible}))$.*

Demostración. Sea Fi(κ) la abreviación de "κ es fuertemente inaccesible". (Formalmente, en ZFC no se demuestra $\exists\kappa$ Fi(κ), por este corolario, así no se puede hablar del menor cardinal fuertemente inaccesible, en lugar de eso se define $\mathbf{M}$ como sigue). Sea

$$\mathbf{M} = \{x : \forall\kappa(\mathrm{Fi}(\kappa) \to x \in H(\kappa))\}.$$

Si $\{\kappa : \mathrm{Fi}(\kappa)\} = 0$, entonces $\mathbf{M} = \mathbf{V}$.
Por otro lado si $\{\kappa : \mathrm{Fi}(\kappa)\} \neq 0$ entonces sea κ_0 el mínimo de tal conjunto. Entonces si κ es fuertemente inaccesible se tiene que $\kappa_0 < \kappa$, entonces $H(\kappa_0) \subset H(\kappa)$, se sigue que $H(\kappa_0) = \mathbf{M}$. Así por el Lema 3.3.8 en $H(\kappa_0)$ se cumple $\neg\exists\alpha\ \mathrm{Fi}(\alpha)$. Luego, en ambos casos $\mathbf{M}$ satisface $ZFC + \neg\exists\alpha\mathrm{Fi}(\alpha)$.

■

Se concluye que en ZFC, no es posible demostrar la existencia de cardinales fuertemente inaccesibles.

3.3.1. Modelos de fragmentos finitos de ZFC.

Por el Teorema de Inconsistencia de Gödel (Teorema 1.1.6) no es posible demostrar la consistencia de ZFC a partir de la misma teoría. Esto es, por el Teorema de Completitud (Teorema 1.1.4) , no se puede demostrar la existencia, en ZFC, de un modelo para ZFC. Por esta razón, a partir de los resultados de la última sección, se afirma que no se puede demostrar la existencia de cardinales fuertemente inaccesibles. Una razón esencial para que suceda esto es que, por construcción, la Teoría de conjuntos admite una cantidad infinita, a saber numerable, de Axiomas. Sin embargo, por lo que se desarrollará en este sección, es posible garantizar la consistencia de fragmentos finitos de ZFC, tan grandes como se desee. También, es importante mencionar que cuando se hace una prueba de una proposición se consideran sólo una cantidad finita de Axiomas, así que para ciertos casos esta consistencia parcial será suficiente.

Definición 3.3.10. *Una lista de fórmulas, $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ es cerrada bajo subfórmulas si y sólo si toda subfórmula de una fórmula de la lista, también está en la lista.*

Ya que toda fórmula tiene una cantidad finita de subfórmulas, una lista finita de fórmulas puede ser expandida a una lista cerrada bajo subfórmulas.

Lema 3.3.11. *Sean $\boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{N}$ clases con $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{N}$ y $\phi_1, \ldots, \phi_n$ una lista cerrada bajo subfórmulas, entonces son equivalentes:*
(a) $\phi_1, \ldots, \phi_n$ son absolutas para $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$.
(b) Si ϕ_i es de la forma $\exists x\phi_j(x, y_1, \ldots, y_t)$ ($x, y_1, \ldots, y_t$ son variables libres de ϕ_j), entonces

$$\forall y_1, \ldots, y_t \in \boldsymbol{M}[\exists x \in \boldsymbol{N}\phi_j^{\boldsymbol{N}}(x, y_1, \ldots, y_t) \to \exists x \in \boldsymbol{M}\phi_j^{\boldsymbol{N}}(x, y_1, \ldots, y_t)].$$

Demostración. Sean $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ y $\phi_1, \ldots \phi_n$ como en el enunciado del lema. Supongamos (a). Sea ϕ_i como en (b). Sean $y_1, \ldots, y_t \in \mathbf{M}$ tales que $\exists x \in \mathbf{N}\phi_j^{\mathbf{N}}(x, y_1, \ldots, y_t)$. Entonces, se tiene $\phi_i^{\mathbf{N}}(y_1, \ldots, y_t)$. Luego, por la absolutez de ϕ_i se tiene $\phi_i^{\mathbf{M}}(y_1, \ldots, y_t)$, esto es, existe x en $\mathbf{M}$ tal que $\phi_j^{\mathbf{M}}(x, y_1, \ldots, y_t)$. Finalmente, a partir de la absolutez de ϕ_j se concluye que existe x en $\mathbf{M}$ tal que $\phi_j^{\mathbf{N}}(x, y_1, \ldots, y_t)$.

$(b) \to (a)$. Por inducción sobre la longitud de ϕ_i se probará que ϕ_i es absoluta para $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$. Si ϕ_i es atómica lo anterior se cumple, pues ϕ_i es absoluta para $\mathbf{M}$, $\mathbf{V}$ y $\mathbf{N}$, $\mathbf{V}$. Supongamos ahora que se ha probado la absolutez para $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ de todas las fórmulas de la lista de longitud menor que ϕ_i. Si ϕ_i es de la forma $\phi_j \wedge \phi_k$, la absolutez de ϕ_j, ϕ_k implican la absolutez de ϕ_i. De forma análoga el resultado se cumple si ϕ_i es de la forma $\neg\phi_j$.
Por último, si ϕ_i es de la forma $\exists x \phi_j(x, y_1, \ldots, y_t)$. Sean $y_1, \ldots, y_t \in \mathbf{M}$, entonces

$$\phi_i^{\mathbf{M}}(y_1, \ldots, y_t) \leftrightarrow \exists x \in \mathbf{M} \phi_j^{\mathbf{M}}(x, y_1, \ldots, y_t) \leftrightarrow \exists x \in \mathbf{M} \phi_j^{\mathbf{N}}(x, y_1, \ldots y_t) \leftrightarrow \exists x \in \mathbf{N} \phi_j^{\mathbf{N}}(x, y_1, \ldots, y_y) \leftrightarrow \phi_i^{\mathbf{N}}(y_1, \ldots, y_t).$$

La primera y última equivalencia de la fórmula anterior, se obtienen por la definición de relativización, la segunda equivalencia aplicando la absolutez de ϕ_j. $\to$ de la tercera equivalencia se sigue de que $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$, y $\leftarrow$, de (b).

■

Teorema 3.3.12. *Sean $\phi_1, \ldots, \phi_n$ fórmulas. Entonces:*

$$ZF \vdash \forall \alpha \exists \beta > \alpha(\phi_1, \ldots, \phi_n \textit{ son absolutas para } R(\beta)).$$

Demostración. Recordar que se está suponiendo el Axioma de Fundación por lo que $\mathbf{V} = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{ON}} R(\alpha)$. Con $\mathbf{N} = \mathbf{V}$ y $M = R(\beta)$ para un β adecuado, se demostrará que se cumple (b) del Lema 3.3.11. Sin pérdida de generalidad supongamos que la lista $\phi_1, \ldots, \phi_n$ es cerrada bajo subfórmulas.
Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, si ϕ_i es de la forma $\exists x \phi_j(x, y_1, \ldots, y_t)$ definimos,
$G_i : \mathbf{V}^t \to \mathbf{ON}$ y $F_i : \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ como sigue:

$$\mathbf{G}_i(y_1, \ldots, y_t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \neg\exists x \in \mathbf{V}(\phi_j(x, y_1, \ldots y_t)), \\ \min\{\eta : \exists x \in R(\eta)(\phi_j(x, y_1, \ldots y_t))\} & \text{si } \exists x \in \mathbf{V}(\phi_j(x, y_1, \ldots y_t)). \end{cases}$$

$F_i(\xi) = \sup\{G_i(y_1, \ldots, y_t) : y_1, \ldots y_t \in R(\xi)\}$, este supremo existe por el Axioma de Reemplazo.
Si ϕ_i no es de la forma $\exists x \phi_j(x, y_1, \ldots, y_n)$, definimos
$F_i : \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}, F_i(\xi) = 0 \ \forall \xi \in \mathbf{ON}$.

Sea β un ordinal límite tal que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ se cumple:

$$\forall \xi < \beta(F_i(\xi) < \beta), \tag{3.5}$$

entonces, se cumple el Lema 3.3.11(b) para $\mathbf{M} = R(\beta)$ y $\mathbf{N} = \mathbf{V}$. Lo anterior se cumple por el hecho de que si ϕ_i es de la forma $\exists x \phi_j(x, y_1, \ldots, y_t)$ y $y_1, \ldots, y_t \in R(\beta)$ tal que $\exists x \phi_j(x, y_1, \ldots y_t)$. Entonces, $y_1 \in R(\eta_1), \ldots, y_t \in R(\eta_t)$. Sea $\eta = \max\{\eta_1, \ldots, \eta_t\}$. Entonces, $y_1, \ldots, y_t \in R(\eta)$ y porque β es ordinal límite se cumple que $\eta < \beta$. Luego, por definición $G_i(y_1, \ldots, y_n) \leq F_i(\eta)$. Notar que $G_i(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$. Si $\alpha = G_i(y_1, \ldots, y_t)$, por definición de G_i, $\exists x \in R(\alpha)$ tal que $\phi_j(x, y_1, \ldots, y_t)$. Pero, $\alpha \leq F_i(\eta) < \beta$, de donde $R(\alpha) \subset R(\beta)$. Así que tal x está en $R(\beta)$.

Así, se ha demostrado (b) del Lema 3.3.11 por lo que se sigue que $\phi_1, \ldots, \phi_n$ son absolutas para $R(\beta)$.

Si se demuestra que, para cada α existe $\beta > \alpha$ ordinal límite tal que para cada i se cumple (3.5), hemos terminado la demostración. Así demostraremos este hecho, para ello, fijemos un ordinal α. Sea $\beta_0 = \alpha$, luego, por recursión en n definimos $\beta_{p+1} = \text{máx}\{\beta_p + 1, F_1(\beta_p), \ldots, F_n(\beta_p)\}$. Sea $\beta = \sup\{\beta_p : p \in \omega\}$. Luego, puesto que $\alpha = \beta_0 < \beta_1 < \beta_2, \ldots$, β es un ordinal límite y $> \alpha$. Fijemos $i \in 1, \ldots, n$. Por definición de la función F_i se cumple que

$$\xi < \xi' \to \mathbf{F}_i(\xi) \leq \mathbf{F}_i(\xi'),$$

ya que $R(\xi) \subset R(\xi')$. Luego, si $\xi < \beta$, entonces $\xi < \beta_p$ para algún $p \in \omega$, así $F_i(\xi) \leq F_i(\beta_p) \leq \beta_{p+1} < \beta$. Por lo tanto se cumple la condición (3.5) para β.

■

La prueba del Teorema 3.3.12 usa sólo parcialmente la estructura de $R(\alpha)$, para $\alpha \in$ **ON**, por lo que, se puede generalizar como sigue.

Teorema 3.3.13. *Sean* $\boldsymbol{Z}$ *una clase y para cada* $\alpha \in \boldsymbol{ON}$, $Z(\alpha)$ *un conjunto. Si se cumple:*

(1) Si $\alpha < \beta$*, entonces* $Z(\alpha) \subset Z(\beta)$.

(2) Si γ *es un ordinal límite entonces,* $Z(\gamma) = \bigcup_{\alpha<\gamma} Z(\alpha)$.

(3) $\boldsymbol{Z} = \bigcup_{\alpha \in \boldsymbol{ON}} Z(\alpha)$.

Entonces, para fórmulas $\phi_1, \ldots, \phi_n$ *se cumple*

$$\forall \alpha \exists \beta > \alpha(\phi_1, \ldots, \phi_n \textit{ son absolutas para } Z(\beta), \boldsymbol{Z}).$$

La demostración del Teorema 3.3.13 es similar a la del Teorema 3.3.12, únicamente en lugar de **V** es **Z** y $Z(\alpha)$ en lugar de $R(\alpha)$.

En lo que sigue, se escribirá $\bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i$ en lugar de $\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_n$.

Como caso particular del Teorema 3.3.12, si $\phi_1, \ldots, \phi_n$ es una lista de axiomas, entonces $ZF \vdash \phi_i$, así $ZF \vdash \forall \alpha \exists \beta > \alpha(\bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i)$.

Se puede probar que, dada una lista de fórmulas $\phi_1, \ldots, \phi_n$ existe un conjunto numerable A tal que $\phi_1, \ldots, \phi_n$ son absolutas. Los conjuntos $R(\beta)$ no son numerables, así que A no puede ser un $R(\beta)$ para $\beta > \omega$.

Teorema 3.3.14. *Sean* $\boldsymbol{Z}$ *una clase y* $\phi_1, \ldots, \phi_n$ *fórmulas. Entonces,*

$$\forall X \subset \boldsymbol{Z}\, \exists A[X \subset A \subset \boldsymbol{Z} \wedge (\phi_1, \dots, \phi_n \textit{ son absolutas para } A, \boldsymbol{Z}) \wedge |A| \leq \textit{máx}(\omega, |X|)].$$

Demostración. Sean $\mathbf{Z}$ una clase y $\phi_1, \dots, \phi_n$ una lista cerrada bajo subfórmulas. Definamos $Z(\alpha) = \mathbf{Z} \cap R(\alpha)$. De que $\mathbf{Z} \subset \mathbf{WF} = \mathbf{V}$ se sigue que $\mathbf{Z}$ y la familia de conjuntos $\{Z(\alpha) : \alpha \in \mathbf{ON}\}$ satisfacen las condiciones del Lema 3.3.13. Sea $X \subset \mathbf{Z}$, $X \in \mathbf{V}$, luego $X \in R(\eta)$ para algún $\eta \in \mathbf{ON}$. Luego, $X \subset R(\eta)$, así que $X \subset R(\eta) \cap \mathbf{Z} = Z(\eta)$. Fijemos un α tal que $X \subset Z(\alpha)$. Usando el Teorema 3.3.13 fijemos $\beta > \alpha$ tal que $\phi_1, \dots, \phi_n$ son absolutas para $Z(\beta), \mathbf{Z}$. Usando AC, sea $\lhd$ un buen orden de $Z(\beta)$.
Si ϕ_i tiene l_i variables libres definimos $H_i : Z(\beta)^{l_i} \to Z(\beta)$ como sigue. Si ϕ_i es $\exists x \phi_j(x, y_1, \dots, y_{l_i})$ y

$$\exists x \in \mathbf{Z}(\beta) \phi_j^{Z(\beta)}(x, y_1, \dots, y_{l_i})$$

sea $H_i(y_1, \dots y_{l_i})$ el $\lhd$ primero de tales x. Si

$$\neg \exists x \in \mathbf{Z}(\beta) \phi_j^{Z(\beta)}(x, y_1, \dots, y_{l_i}),$$

o si ϕ_i no es un cuantificador existencial, sea $H_i(y_1, \dots y_{l_i})$ el $\lhd$ primer elemento de $Z(\beta)$. Por el Lema 3.3.11 si A es cerrado bajo H_i, esto es, si $H_i : Z(\beta)^{l_i} \to Z(\beta)$, $H_i(A^{l_i}) \subset A$, entonces cada ϕ_i es absoluta para $A, Z(\beta)$. Luego, como cada ϕ_i es absoluta para $Z(\beta), \mathbf{Z}$, se seguiría que ϕ_i es absoluta para $A, \mathbf{Z}$. Sea A la clausura de X bajo $H_1, \dots, H_n$, por el Lema 1.3.24, $A \leq \text{máx}\{|X|, \omega\}$.

■

Lema 3.3.15. *Si G es un isomorfismo entre $(A, \in)$ y $(M, \in)$, entonces para cada fórmula $\phi(x_1, \dots, x_n)$, se cumple*

$$\forall x_1, \dots, x_n \in A[\phi(x_1, \dots, x_n)^A \leftrightarrow \phi(G(x_1), \dots, G(x_n))^M].$$

Demostración. Se demuestra por inducción sobre la longitud de ϕ. ■

Corolario 3.3.16. *Sean $\boldsymbol{Z}$ una clase transitiva y $\phi_1, \dots, \phi_n$ sentencias. Entonces,*

$$\forall X \subset \boldsymbol{Z}[X \textit{ es transitiva} \to \exists M[X \subset M \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} (\phi_i^M \leftrightarrow \phi_i^{\boldsymbol{Z}}) \wedge M \textit{ es transitiva} \wedge |M| \leq \textit{máx}(\omega, |X|)]].$$

Demostración. Sean $\mathbf{Z}$ y $\phi_1, \dots, \phi_n$ como en el enunciado del corolario. Supongamos que ϕ_n es el Axioma de Extensionalidad, si no lo es lo agregamos. Sea $X \subset \mathbf{Z}$. Sea A como en el Teorema 3.3.14 para X, entonces $\phi_i^A \leftrightarrow \phi_i^{\mathbf{Z}}$. Ya que $\mathbf{Z}$ es transitiva, Extensionalidad se cumple en $\mathbf{Z}$ luego en A. Así, por el Corolario 2.4.17, existe un conjunto transitivo, M, y un isomorfismo, $G : (A, \in) \to (M, \in)$. Para $x \in X$, se cumple

$$G(x) = \{G(y) : y \in x\},$$

ya que X es transitivo. Luego, por inducción en x con la relación $\in$, se demuestra que, $G(x) = x$ para cada $x \in X$, así $X \subset \mathbf{M}$. Lo demás se sigue por el Lema 3.3.15 y porque G es un isomorfismo.

$\blacksquare$

Como un caso particular del Corolario 3.3.16 consideremos $\mathbf{Z} = \mathbf{V}$ y $X = \omega$. Entonces, se cumple el siguiente corolario.

Corolario 3.3.17. *Sean $\phi_1, \ldots, \phi_n$ un conjunto de axiomas de ZFC, entonces*

$$\exists M[|M| = \omega \wedge M \textit{ es transitiva} \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i].$$

Bibliografía

[1] L.J. Halbeisen, *Combinatorial Set Theory*, Springer Monographs in Mathematics., Springer, London 2012.

[2] F. Hernández, *Teoría de conjuntos*, Aportaciones Matemáticas., Sociedad Matemática Mexicana 1998.

[3] T. Jech, *Set Theory*, Springer Monographs in Mathematics., Springer, 2002.

[4] W. Just, M.Weese, *Discovering Modern Set Theory. I The basics*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 8, American Mathematical Society, 1966.

[5] W. Just, M. Weese, *Discovering Modern Set Thoery. II Set-Theoretic Tools for Every Mathematician* Graduate Studies in Mathematics., Vol. 18, American Mathematical Society, 1977.

[6] K. Kunen, *Set theory An introduction to independence Proofs*, Studies in Logic and the foundations of mathematics, Vol 102, NorthHolland.,Amsterdam, 1980.

[7] K. Kunen, *Set theory*, Studies in Logic, Vol 34, College Publications., USA, 2011.

[8] E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, Fourth Edition, CHAPMAN HALL/CRC., United States of America, 1997.

[9] J. R. Newmann, *El mundo de las matemáticas*, Sigma 5, Ediciones Grijalbo., Barcelona Buenos Aires-México D.F 1983, p 7-57.

[10] G. Tourlakis, *Lectures in logic and Set Theory*, Vol 2, Cambridge University Press, New York, 2003.

[11] H. Weyl, *Filosofía de las matemáticas y de la ciencia natural*, Centro de Estudios Filosóficos UNAM 1965.