BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

"Continuos Indescomponibles"

T E S I S

que para obtener el título de:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

presenta:

Germán Montero Rodríguez.

Director de tesis:

Dr. David Herrera Carrasco

PUEBLA, PUE. *DICIEMBRE 2012*

Para mi mamá y papá

Sra. Francisca Rodríguez Ortiz, Sr. Alberto Montero Bañuelos

Agradecimientos

Principalmente a mi mamá la Sra. Francisca Rodríguez Ortiz y a mi papá el Sr. Alberto Montero Bañuelos que siempre, sin importar que tan difícil fuera, me dieron el apoyo que necesitaba para que pudiera seguir adelante con mis estudios. De ellos obtuve más que un hombro en el que yo me pudiera apoyar, me dieron mis ojos para poder ver la vida, me dieron mis oídos para escuchar los buenos consejos y me dieron la vida para vivir. Por esto y muchas razones más. Gracias.

A mis hermanos Ale, Jesús pero en especial a Luis Alberto que a pesar de estar muy lejos de su familia siempre mantuvo firme su fe en mi y también aconsejándome para que lo lograra. A mis hermanas Alondra, Ley y Vianey por esos ánimos que día a día me brindaron. A mi tío, el Dr. Juan rodríguez, por el apoyo incondicional que siempre me brindó. También, a mi amigo Rey que siempre estuvo apoyándome. Gracias.

A mis amigos Yazmín, Gladys, Laura, Ana, Gilberto, Alejandro que siempre durante la carrera estuvimos juntos para salir adelante como un gran equipo apoyándonos unos a los otros en cualquier momento de trabajo duro, y por supuesto también por los momentos alegres que vivimos juntos. Gracias

También, no pueden faltar Mary, Noemi, Paco, Luis, Pily y Tania por la ayuda y el tiempo que me brindaron. Gracias.

Al prestigiado grupo de profesores que tuve como sinodales que se tomaron la molestia de hacer las correcciones de mi tesis, así como también haciendo sugerencias necesarias con el fin de que el trabajo que realicé tuviera una mejor calidad. Gracias.

A mi director de tesis, el Dr. David Herrera Carrasco por darme la dichosa oportunidad de trabajar bajo su autoridad y pudiera salir adelante con mi trabajo de tesis. Gracias.

Índice general

Introducción

El material que se presenta en esta tesis está basado sobre resultados conocidos de los **"continuos indescomponibles"**, esta temática pertenece a la rama de la topología llamada teoría de los continuos. La intención es exponer la teoría con detalle, esperando que el lector tenga un mejor entendimiento de los conceptos que se tratan.

La presentación de esta tesis la hacemos en dos capítulos. En el primer capítulo mencionamos algunas definiciones básicas de Topología General que son de nuestro interés tales como conjunto cerrado, la cerradura de un conjunto, conjunto denso, conjunto denso en ninguna parte, espacio perfecto, espacio Hausdorff, espacio regular, la componente de un punto en un conjunto, espacio totalmente disconexo, espacio compacto, espacio conexo, espacio localmente conexo, la definición de continuo, y continuo de condensación. También damos y citamos resultados que involucran los conceptos mencionados anteriormente. Por último presentamos algunos ejemplos de continuos.

En el segundo capítulo en primer lugar presentamos la definición de continuo descomponible y ejemplos de éstos. Posteriormente algunas definiciones como las siguientes: cadena simple, la composante de un punto en un espacio, la casicomponente de un punto en un espacio. Dentro de este capítulo hacemos la demostración detallada de varios resultados sobre los continuos indescomponibles que al mismo tiempo están relacionados con las definiciones de los conceptos antes mencionados. Así como también la construcción de dos ejemplos de continuos indescomponibles, uno de los cuales es conocido como el Arcoiris de

Knaster.

También, cabe mencionar que los resultados que aparecen en esta tesis son extraídos de los textos que tenemos como referencias, en particular, el texto que lleva por título **Historia y desarrollo de la teoría de los continuos indescomponibles** del autor Francis Leon Jones. Los resultados que aparecen sin una prueba citamos una referencia en la cual se puede encontrar una.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Compacidad y conexidad

Comenzamos estudiando la estructura de los **espacios topológicos** y en particular los **espacios métricos** que son de gran importancia durante el desarrollo de nuestro trabajo.

En este capítulo se enuncian algunos conceptos y resultados que son necesarios para el desarrollo de esta tesis. En todo este trabajo si X es un espacio topológico y A un subconjunto de X, los símbolos $fr(A)$ e $int(A)$ denotan la frontera de A y el interior de A en X, respectivamente. Si $A \subset Y \subset X$, entonces $fr_Y(A)$ e $int_Y(A)$ denotan la frontera de A y el interior de A en el subespacio Y de X, respectivamente.

Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. El conjunto de **puntos de acumulación de** A es

$A' = \{x \in X\colon$ para todo abierto U en X que contiene a x, se cumple que $U \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset\}$,

la **cerradura** de A en X es $\overline{A} = A \cup A'$. Es conocido que A es cerrado en X si y sólo si $A = \overline{A}$, vea [1, (1.E.5), pág. 26]. Un subconjunto A de X es **perfecto** si A es cerrado en X y $A = A'$.

Como es usual, los símbolos $\emptyset$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^+$, representan el conjunto vacío, el conjunto de los números naturales, el conjunto de los números racionales, el conjunto de los números reales y el conjunto de los números reales positivos, respectivamente. Un espacio topológico es **no degenerado** si tiene más de un punto.

Un subconjunto A de un espacio topológico X es **denso** en X si $\overline{A}$=X, o lo que es equivalente, que A es denso en X si para todo abierto, no vacío, U en X, se cumple que $U \cap A \neq \emptyset$. Además, A es **denso en ninguna parte** en X si $A \subset \overline{X - \overline{A}}$.

El siguiente resultado muestra una relación entre un conjunto denso en ninguna parte y su complemento.

Lema 1.1. *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Si A es denso en ninguna parte en X, entonces $\overline{X - \overline{A}} = X$. Si además A es cerrado en X, entonces $\overline{X - A} = X$.*

Demostración. Como A es denso en ninguna parte en X se tiene que $A \subset \overline{X - \overline{A}}$. Luego, se tiene que $\overline{A} \subset \overline{X - \overline{A}}$. Además, $X - \overline{A} \subset \overline{X - \overline{A}}$, de donde, $X = \overline{A} \cup (X - \overline{A}) \subset \overline{X - \overline{A}}$. Por tanto, $X = \overline{X - \overline{A}}$.

Si A es cerrado en X, se tiene que $A = \overline{A}$ y por tanto, $\overline{X - A} = X$. $\square$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $d_n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ como

$$d_n(x, y) = ||x - y|| \, .$$

Se puede verificar que d_n es una métrica en $\mathbb{R}^n$, vea [1, pág. 20]. Por lo tanto, $(\mathbb{R}^n, d_n)$ es un espacio métrico, d_n se conoce como la **métrica usual** en $\mathbb{R}^n$.

Hay muchas métricas que se pueden definir sobre $\mathbb{R}^n$, no obstante, a menos que se exprese lo contrario, cuando se considere a $\mathbb{R}^n$ como espacio métrico, se entenderá que la métrica definida sobre $\mathbb{R}^n$ es la métrica usual.

Para ver que un espacio métrico llega a ser un espacio topológico se necesita de la siguiente noción.

Definición 1.2. *Sean* (X, d) *un espacio métrico,* $x_0 \in X$ *y* $\varepsilon > 0$*. La* ***bola abierta*** *con centro en* x_0 *y radio* ε*, denotado por* $B_X(x_0, \varepsilon)$*, se define como*

$$B_X(x_0, \varepsilon) = \{x \in X \colon d(x_0, x) < \varepsilon\}.$$

Es posible construir una topología para un espacio métrico como a continuación se muestra:

Sean (X, d) un espacio métrico y $\tau = \{A \subset X \colon \text{ para todo } x \in A, \text{ existe } \varepsilon > 0 \text{ tal que } B_X(x, \varepsilon) \subset A\}$.

Notemos que τ es una topología en X, es decir, (X, τ) es un espacio topológico. A τ se le conoce como la **topología inducida** por d. Recíprocamente, podemos determinar cuándo un espacio topológico es un espacio métrico, mediante la siguiente definición:

Definición 1.3. *Un espacio topológico* (X, τ) *es* ***metrizable*** *si existe una métrica,* d*, para* X *tal que* τ *es la topología inducida por* d*.*

Otro concepto importante es el de compacidad, para definir este concepto necesitamos la siguiente noción.

Definición 1.4. *Sean* X *un espacio topológico y* $A \subset X$*. Si* $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$*, donde cada* U_α *es un conjunto abierto en* X*, la familia* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *es una* ***cubierta abierta*** *de* A*. Si* $J \subset I$ *es tal* *que* $A \subset \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$*, la subfamilia* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ *es una* ***subcubierta*** *de* A*. Si* J *es un conjunto finito, la subfamilia es una* ***subcubierta finita*** *de* A*.*

Definición 1.5. *Sean* X *un espacio topológico y* $A \subset X$*, se dice que* A *es* ***compacto*** *si toda cubierta abierta de* A *tiene una subcubierta finita.*

Un resultado que establece condiciones necesarias y suficientes para que un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ sea compacto es el Teorema de Heine-Borel. Hacemos uso de él en el transcurso de esta tesis y lo mencionamos a continuación.

Teorema 1.6. *(Teorema de Heine-Borel).[1, 2.G.12, pág. 66] Sea* $A \subset \mathbb{R}^n$*. Entonces* A *es compacto si y sólo si* A *es cerrado y acotado en* $\mathbb{R}^n$*.*

En $\mathbb{R}$ los intervalos abiertos no son compactos; el intervalo unitario $[0, 1]$ es compacto, de hecho todos los intervalos cerrados y acotados son compactos, vea el Teorema de Heine-Borel (Teorema 1.6); también resulta que $\mathbb{R}$ no es compacto porque la cubierta abierta $\{(-n, n) \colon n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$ no contiene una subcubierta finita.

Definición 1.7. *Sea* X *un espacio topológico. Una* ***separación*** *de* X *es un par,* U *y* V*, de conjuntos ajenos, no vacíos y abiertos en* X *tales que* $X = U \cup V$*. Se dice que* X *es* ***conexo*** *si no existe una separación de* X*.*

Se puede ver que en $\mathbb{R}$ los únicos conjuntos conexos son los conjuntos singulares y los intervalos, de lo contrario si X es conexo y si suponemos que X no es un intervalo, existen $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a, b \in X$ y $c \notin X$ tales que $a < c < b$. Luego

$X = (X \cap \{x \in \mathbb{R} \colon x < c\}) \cup (X \cap \{x \in \mathbb{R} \colon c < x\})$. De donde X resulta ser no conexo, lo cual es una contradicción, (vea [2, Teorema 1.2, pág. 107]). Sin embargo, los conjuntos que son uniones de intervalos no necesariamente son conexos, por ejemplo, el subespacio $Y = [-1, 0) \cup (0, 1]$ de la recta real $\mathbb{R}$ no es conexo porque los conjuntos $[-1, 0)$ y $(0, 1]$ son no vacíos, ajenos y abiertos en Y (aunque no lo son en $\mathbb{R}$), por lo que forman una separación de Y.

A continuación mencionamos un par de resultados que nos sirven para simplificar algunas de las demostraciones.

Lema 1.8. *Un subconjunto Y de un espacio topológico X es conexo si y sólo si no existen dos subconjuntos no vacíos A y B de Y tales que $Y = A \cup B$ y $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que Y es conexo y que existen dos subconjuntos no vacíos A y B de Y tales que $Y = A \cup B$ y $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset$. Como $\overline{A} \cap B = \emptyset$, se tiene que $B \subset X - \overline{A}$ y como $A \cap \overline{B} = \emptyset$ se tiene que $A \subset X - \overline{B}$. Luego, $Y = A \cup B \subset (X - \overline{B}) \cup (X - \overline{A})$. Así,

$$Y = [(X - \overline{B}) \cup (X - \overline{A})] \cap Y = [(X - \overline{B}) \cap Y] \cup [(X - \overline{A}) \cap Y].$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} [(X - \overline{B}) \cap Y] \cap [(X - \overline{A}) \cap Y] &= [(X - \overline{B}) \cap (X - \overline{A})] \cap Y \\ &= [X - (\overline{A} \cup \overline{B})] \cap Y \\ &\subset [X - Y] \cap Y \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

La última contención se da ya que $Y = A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ implica que $X - (\overline{A} \cup \overline{B}) \subset X - Y$.

Note que $X-\overline{A}$ es un abierto en X y $X-\overline{B}$ es un abierto en X. Así, $(X-\overline{B})\cap Y$ y $(X-\overline{A})\cap Y$ son abiertos en Y. Además, $\emptyset \neq B \subset (X-\overline{A})\cap Y$ y $\emptyset \neq A \subset (X-\overline{B})\cap Y$. Luego $(X-\overline{B})\cap Y$ y $(X-\overline{A})\cap Y$ forman una separación de Y. Por tanto, Y no es conexo, lo cual es una contradicción.

Supongamos que no existen subconjuntos no vacíos A y B de Y tales que $Y = A\cup B$ y $(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap\overline{B}) = \emptyset$ y que Y no es conexo. Entonces existen dos abiertos U y V en X tales que $Y = (U\cap Y)\cup(V\cap Y)$ y $(U\cap Y)\cap(V\cap Y) = \emptyset$, donde $(U\cap Y)$ y $(V\cap Y)$ son no vacíos.

Sean $M = U\cap Y$ y $N = V\cap Y$.
Ahora,

$$\begin{aligned}\overline{M}\cap N &= \overline{(U\cap Y)}\cap(V\cap Y)\\ &\subset (\overline{U}\cap\overline{Y})\cap(V\cap Y)\\ &= (\overline{U}\cap V)\cap Y.\end{aligned}$$

Veamos que $(\overline{U}\cap V)\cap Y = \emptyset$. Supongamos que existe $x \in (\overline{U}\cap V)\cap Y$, entonces $x\in\overline{U}$ y $x \in V\cap Y$. Entonces cualquier abierto en Y que contenga a x, intersecta a U. Como $x\in V\cap Y$ y $V\cap Y$ es un abierto en Y, se tiene que $U\cap(V\cap Y)\neq\emptyset$. Esto es una contradicción. Luego,

$$(\overline{U}\cap V)\cap Y = \emptyset.$$

Por tanto, $\overline{M}\cap N = \emptyset$. De manera análoga se llega a que $M\cap\overline{N} = \emptyset$. Así, hemos probado que existen subconjuntos no vacíos M y N de Y tales que $Y = M\cup N$ y $(\overline{M}\cap N)\cup(M\cap\overline{N}) = \emptyset$. Lo cual es una contradicción. □

Lema 1.9. *Sea Y un subconjunto conexo de un conjunto conexo X. Si M y N forman una separación de $X-Y$, entonces $Y\cup M$*

y $Y \cup N$ *son conexos. Más aún, si* Y *es cerrado en* X, *entonces* $Y \cup M$ *y* $Y \cup N$ *son cerrados en* X.

Demostración. Como M y N forman una separación de $X - Y$, procediendo como en la prueba de el Lema 1.8, se llega a que $(\overline{M} \cap N) \cup (M \cap \overline{N}) = \emptyset$. Supongamos que $Y \cup M$ no es conexo. Así, por el Lema 1.8, existen dos subconjuntos no vacíos A y B de $Y \cup M$ tales que $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset$, y que $Y \cup M = A \cup B$. Como Y es conexo, podemos suponer $Y \cap A = \emptyset$, de donde $A \subset M$. Ahora vamos a desconectar a X. Como $X - Y = M \cup N$ y $Y \cup M = A \cup B$, se tiene que $X = (Y \cup M) \cup N = (A \cup B) \cup N = A \cup (B \cup N)$. Además, A y $B \cup N$ son no vacíos tales que

$$\begin{aligned} A \cap (\overline{B \cup N}) &= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{N}) \subset (A \cap \overline{B}) \cup (M \cap \overline{N}) = \emptyset; \\ \overline{A} \cap (B \cup N) &= (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap N) \subset (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{M} \cap N) = \emptyset. \end{aligned}$$

Luego, por el Lema 1.8, se tiene que X no es conexo, lo cual es una contradicción. Por tanto, $Y \cup M$ es conexo. Análogamente, se obtiene que $Y \cup N$ es conexo.

Supongamos que Y es cerrado en X. Entonces

$$\begin{aligned} \overline{Y \cup M} = \overline{Y} \cup \overline{M} &= Y \cup \overline{M} \\ &= (Y \cup \overline{M}) \cap X \\ &= (Y \cup \overline{M}) \cap (Y \cup (X - Y)) \\ &= Y \cup (\overline{M} \cap (X - Y)) \\ &= Y \cup (\overline{M} \cap (M \cup N)) \\ &= Y \cup ((\overline{M} \cap M) \cup (\overline{M} \cap N)) \\ &= Y \cup M, \end{aligned}$$

ya que $\overline{M} \cap N = \emptyset$. Por tanto, $Y \cup M$ es cerrado. De la misma manera se muestra que $Y \cup N$ es cerrado. □

Cuando tenemos un conjunto conexo, cualquier conjunto que se encuentre entre él y su cerradura resulta que también es conexo, en particular la cerradura de un conexo es conexa. Para esto, es necesario el siguiente resultado.

Lema 1.10. *[4, Lema 23.2, pág. 149] Sean A, B una separación del espacio topológico X. Si K es subespacio conexo de X, entonces $K \subset A$ o $K \subset B$.*

Teorema 1.11. *[4, Torema 23.4, pág. 150] Sea A un subconjunto conexo de un espacio topológico X. Si $B \subset X$ tal que $A \subset B \subset \overline{A}$, entonces B es conexo.*

La **componente** de $x \in X$, denotada por $C(x)$, es la unión de todos los subconjuntos conexos de X que contienen a x. Si para cada $x \in X$, la componente $C(x) = \{x\}$, entonces se dice que X es **totalmente disconexo**.

Los conjuntos cerrados son compactos siempre que estén dentro de un espacio topológico compacto. Además, los compactos para que sean cerrados basta que estén dentro de un espacio topológico de Hausdorff, tal como lo muestran los siguientes dos resultados.

Teorema 1.12. *[4, Teorema 26.2, pág. 165] Sean X un espacio topológico compacto y $A \subset X$. Si A es cerrado en X, entonces A es compacto.*

Teorema 1.13. *[4, Teorema 26.3, pág. 165] Sean X un espacio topológico de Hausdorff y $A \subset X$. Si A es compacto, entonces A es cerrado en X.*

1.2. Continuos

Dentro de la topología, como en todas las ramas de la matemática, existen diversas áreas de estudio, una de ellas es la conocida como Teoría de los Continuos, en ella se abordan conceptos particulares como se muestran a continuación.

Definición 1.14. *Un* ***continuo*** *es un espacio topológico no vacío que es compacto y conexo. Un* ***subcontinuo*** *es un subconjunto de un espacio topológico que a su vez es un continuo.*

Dentro de el desarrollo de esta tesis, algunas veces se trabaja con espacios compactos, conexos y que además son métricos. Cuando sea el caso, se hace mención de manera explicita como **continuo métrico.**

El intervalo unitario $[0,1]$ es un espacio métrico que es conexo y compacto, por lo que éste es un continuo métrico.

La conexidad y la compacidad son propiedades topológicas, es decir, que si un espacio topológico X tiene alguna de estas propiedades entonces cualquier espacio topológico Y que sea homeomorfo a X, también tiene esta propiedad. Así, resulta que el ser un continuo también es una propiedad topológica.

Mencionamos unas definiciones más. Un conjunto A es llamado un **conjunto frontera** en X si $A \subset \overline{X - A}$. Un subcontinuo K de un continuo X es llamado un **continuo de condensación** si $K \subset \overline{X - K}$. De donde, si K es un continuo de condensación de X, entonces es denso en ninguna parte en X, ya que es cerrado en X (como lo muestra el Lema 1.15). Por último, un continuo X es **localmente conexo** si para cada punto $x \in X$ y cada conjunto abierto U en X que contiene a x, existe, un conjunto abierto en X y conexo V que contiene a x y esta contenido en

U, es decir, $x \in V \subset U$.

Note los siguientes resultados que son inmediatos de la definición de continuo de condensación. Pero antes de esto daremos un ejemplo de un continuo de condensación ya que este concepto es muy utilizado en esta tesis.

Sea $X = [0,1]\times[0,1]$. Se puede verificar que X es un continuo. Cualquier segmento de recta Y contenido en X resulta ser un continuo de condensación; por ejemplo vea la Figura 1.1

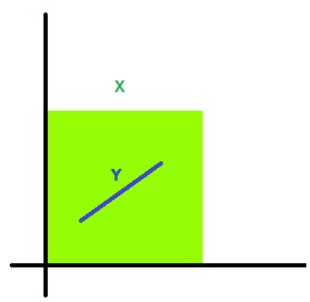

Figura 1.1: Ejemplo de continuo de condensación

Lema 1.15. *Sean X un continuo de Hausdorff y $K \subset X$ continuo de condensación de X. Entonces K es denso en ninguna parte en X.*

Demostración. Como K es un continuo de condensación de X se tiene que

$$K \subset \overline{X - K}.$$

Dado que K es continuo, K es compacto y por tanto cerrado, es decir, $K = \overline{K}$. Así, $K \subset \overline{X - K} = \overline{X - \overline{K}}$, de donde,

$$K \subset \overline{X - \overline{K}}.$$

Por tanto, K es denso en ninguna parte en X, como se deseaba.

La reciproca del Lema 1.15 se sigue de la definición de condensación en ninguna parte porque $A \subset \overline{A}$ implica $X - \overline{A} \subset X - A$ y esto implica $A \subset \overline{X - \overline{A}} \subset \overline{X - A}$. □

Lema 1.16. *Sean X un continuo y $K \subset X$ subcontinuo de X. Entonces K es continuo de condensación de X si y sólo si $\overline{X - K} = X$.*

Demostración. Para mostrar esto, observemos que si K es un continuo de condensación de X, entonces

$$X = K \cup (X - K) \subset K \cup \overline{X - K} = \overline{X - K}.$$

Por tanto, $X = \overline{X - K}$.

Ahora, supongamos que $X = \overline{X - K}$. Como K es subcontinuo de X, es claro que $K \subset X = \overline{X - K}$, de donde, $K \subset \overline{X - K}$. Por tanto, K es continuo de condensación de X. □

Más aún, cuando hablamos de continuos de condensación, éstos son tal que su interior es vacío. Y un conjunto denso en ninguna parte es tal que el interior de su cerradura es vacío. Tal y como lo muestran los siguientes dos resultados.

Lema 1.17. *Sea K un continuo de condensación del continuo X. Entonces $int(K) = \emptyset$.*

Demostración. Dado que K es continuo de condensación, se tiene que,

$$K \subset \overline{X - K}.$$

Así, por Lema 1.16, $\overline{X - K} = X$. Como $X - int(K) = \overline{X - K}$, se tiene que

$$X - int(K) = X.$$

Por tanto, $int(K) = \emptyset$. $\square$

Lema 1.18. *Sean X espacio topológico y $A \subset X$. Si A es denso en ninguna parte en X, entonces $int(\overline{A}) = \emptyset$.*

Demostración. Sea A denso en ninguna parte en X, luego $A \subset \overline{X - \overline{A}}$, de donde, $\overline{A} \subset \overline{X - \overline{A}}$. Pero esto pasa si y sólo si $\overline{X - \overline{A}} = X$. Como $X - int(\overline{A}) = \overline{X - \overline{A}}$, entonces $int(\overline{A}) = \emptyset$. $\square$

A continuación presentamos algunos ejemplos de continuos métricos.

(1) Un **arco** es cualquier espacio el cual es homeomorfo a el intervalo cerrado [0,1]. Ya que [0,1] es un continuo, se tiene que un arco es también un continuo.

Figura 1.2: Arco

(2) Sea $\mathbb{R}^n$ el espacio euclidiano de dimensión n, para cada punto $x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, sea

$$\| x \| = \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Ahora, una **n-celda** es un espacio el cual es homeomorfo a la bola cerrada de dimensión n, B^n en $\mathbb{R}^n$, donde

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}, \qquad \text{para cada } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Como B^n es un continuo, se tiene que una n-celda también es un continuo.

(3) Una **n-esfera** es un espacio el cual es homeomorfo a la esfera de dimensión n, S^n en $\mathbb{R}^{n+1}$, donde

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}\colon\ \|x\| = 1\}, \qquad \text{para cada } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Una n-esfera es un continuo ya que la esfera de dimensión n es un continuo. Una 1-esfera es llamada una curva cerrada simple.

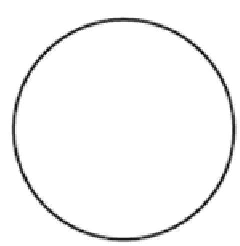

Figura 1.3: 1-esfera

(4) La clausura, $\overline{W}$, del conjunto W donde

$$W = \{(x, sen(1/x)) \in \mathbb{R}^2\colon 0 < x \leq 1\}$$

es un continuo. Al continuo $\overline{W}$ se conoce como el **continuo** $sen(1/x)$.

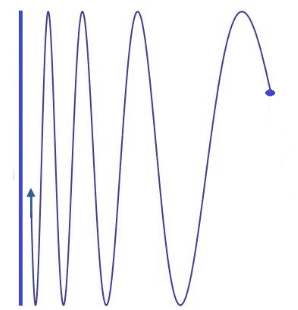

Figura 1.4: Continuo $sen(1/x)$

(5) La **circunferencia de Varsovia** Z. Este continuo se obtiene de la siguiente manera. Sean $\overline{W}$ el continuo $sen(1/x)$ y A un arco con punto inicial (0,-1) y punto final (1,$sen(1)$) de tal manera que $\overline{W} \cap A = \{(0,-1),(1,sen(1))\}$. Así, $Z = \overline{W} \cup A$. La Figura 1.5 muestra una representación de una circunferencia de Varsovia.

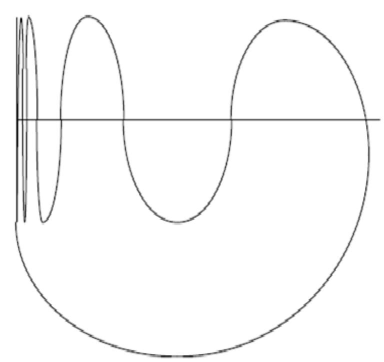

Figura 1.5: Circunferencia de Varsovia

Capítulo 2

Indescomponibilidad

Existe una infinidad de continuos, a saber algunos, un arco, una n-celda, el continuo $sen(1/x)$, vea [5, pág, 3-4]. Existen dos tipos diferentes de continuos, los descomponibles y los indescomponibles.

Definición 2.1. *Sea X un continuo. Se dice que X es* ***descomponible*** *si existen U, V subcontinuos propios de X tales que $X = U \cup V$. Un continuo que no es descomponible se dice ser* ***indescomponible****.*

Un ejemplo de un continuo descomponible es el intervalo cerrado [0,1]. Ahora, se puede observar que existen muchas maneras diferentes en que podemos descomponer a este continuo. Por ejemplo una posible manera es la siguiente. Sean

$$U = [0, \tfrac{3}{4}] \text{ y } V = [\tfrac{1}{4}, 1].$$

Es claro que U y V son subcontinuos propios de [0,1] y que además $[0, 1] = U \cup V$. Por lo que podemos concluir que [0,1] es un continuo descomponible.

El concepto de descomponibilidad pareciera no causar problemas para comprenderlo; sin embargo, el de indescomponibilidad es muy difícil de ver o imaginar que tales continuos realmente existen. Quizá una persona que no esté familiarizada con la teoría de los continuos le parecería que todos los continuos son descomponibles, con excepción de los continuos de un punto (los espacios X de un punto son continuos indescomponibles ya que no existen dos subcontinuos propios de X tales que su unión sea X). Entonces ¿existen los continuos indescomponibles? En la sección 2.1 presentamos la construcción de un continuo indescomponible.

Cuando se trabaja con continuos, por ejemplo, un arco, una n-celda, una n-esfera, etc. La mayoría de estos resultan ser descomponibles. [5, pág. 3-4]. Otros continuos descomponibles son las gráficas finitas.

La Figura 2.1 muestra un par de continuos que son descomponibles.

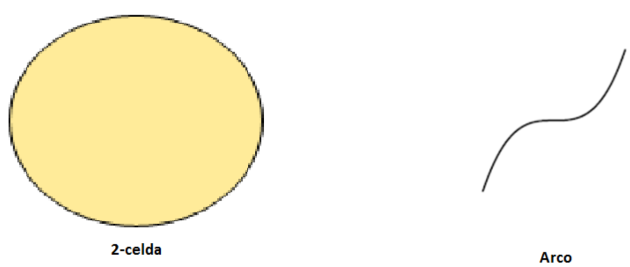

Figura 2.1: Continuos descomponibles

Ahora veamos un concepto que nos ayuda a construir continuos indescomponibles.

Definición 2.2. *Una familia* $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ *de subconjuntos de un espacio topológico* X *es una* ***cadena simple*** *en* X *si se tiene que* $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ *si y sólo si* $|i - j| \leq 1$*, donde* $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$*. Una cadena simple* $C = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ *se dice que conecta los puntos* a *y* b *en* X *si y sólo si* $a \in A_1$ *y* $b \in A_n$*. A los elementos* A_i *de la cadena simple se les llama* ***eslabones****.*

Si $C = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ es una cadena simple que conecta a los puntos a y b en un espacio topológico X y además $d \in A_i$, donde $i \notin \{1, n\}$, decimos que C conecta a a y b pasando por d.

A continuación, presentamos la construcción (usando intersecciones anidadas) de un continuo indescomponible X en el espacio $\mathbb{R}^2$. Pero antes necesitamos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 2.3. *Sea* Λ *un conjunto (bien ordenado) de índices con* λ_0 *como primer elemento de* Λ*. Supongamos que* $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *es una familia de continuos no vacíos y de Hausdorff tal que* $X_{\lambda_0} \supset X_{\lambda_1} \supset \ldots \supset X_{\lambda_k} \supset X_{\lambda_{k+1}} \supset \ldots$*, entonces*

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \text{ es un continuo.}$$

Demostración. Si $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \emptyset$, entonces $\bigcup_{\lambda \in \Lambda - \lambda_0} (X_{\lambda_0} - X_\lambda) = X_{\lambda_0}$. Como X_{λ_0} es compacto y cada $X_{\lambda_0} - X_\lambda$ es un abierto en X_{λ_0}, existe una colección finita $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} \subset \Lambda$ tal que $\bigcup_{j=1}^{n} (X_{\lambda_0} - X_{\lambda_j}) = X_{\lambda_0}$. En consecuencia, $\bigcap_{j=1}^{n} X_{\lambda_j} = \emptyset$, de donde $X_{\lambda_n} = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Esta contradicción muestra que $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$.

Ahora, como cada X_λ es cerrado en X_{λ_0}, $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ es un conjunto cerrado en el compacto X_{λ_0}, y, por tanto, compacto. Supongamos que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ no es conexa. Luego, existen conjuntos no vacíos, disjuntos K_1 y K_2, cerrados en $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ tales que

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = K_1 \cup K_2.$$

Como K_1 y K_2 son cerrados en $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, también son cerrados en X_{λ_0}, por lo que son compactos, y como X_{λ_0} es de Hausdorff, existen O_1 y O_2 abiertos en X_{λ_0} y disjuntos tales que $K_1 \subset O_1$ y $K_2 \subset O_2$, vea [2, propiedad 1.5(b), pág. 225].

Como $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \subset O_1 \cup O_2$, se tiene que $X_{\lambda_0} - (O_1 \cup O_2) \subset X_{\lambda_0} - \bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, de donde

$$(X_{\lambda_0} - O_1) \cap (X_{\lambda_0} - O_2) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (X_{\lambda_0} - X_\lambda).$$

Note que $(X_{\lambda_0} - O_1) \cap (X_{\lambda_0} - O_2)$ es compacto, de donde existe $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\} \subset \Lambda$ tales que $(X_{\lambda_0} - O_1) \cap (X_{\lambda_0} - O_2) \subset \bigcup_{j=1}^{m} (X_{\lambda_0} - X_{\lambda_j})$. Por tanto, se sigue que

$$X_{\lambda_m} = \bigcap_{j=1}^{m} X_{\lambda_j} \subset O_1 \cup O_2.$$

Por otra parte, $\emptyset \neq K_t = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \cap K_t \subset X_{\lambda_m} \cap O_t$, con $t \in \{1,2\}$, y además, $(X_{\lambda_m} \cap O_1) \cap (X_{\lambda_m} \cap O_2) = \emptyset$. De donde resulta que X_{λ_m} no es conexo, lo cual es una contradicción. Esta contradicción muestra que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ es conexa. Por tanto, $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ es un continuo. $\square$

2.1. Un continuo indescomponible

Sean a, b, c tres puntos distintos en $\mathbb{R}^2$. Existen cadenas simples $\mathcal{C}_n$ en $\mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$, donde los eslabones son $2-$*celdas* (discos) de diámetro menor que 2^{-n}. Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, la unión de los eslabones de $\mathcal{C}_n$, $\cup\mathcal{C}_n$, es un continuo. Tales cadenas satisfacen las siguientes dos propiedades:

(1) Para cada $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la cadena $\mathcal{C}_{3i+1}$ conecta al punto a con el punto c pasando por el punto b, la cadena $\mathcal{C}_{3i+2}$ conecta al punto b con el punto c pasando por el punto a, y la cadena $\mathcal{C}_{3i+3}$ conecta al punto a con el punto b pasando por el punto c.

(2) Para cada $i \in \mathbb{N}$, tenemos que $\cup\mathcal{C}_{3i+1} \supset \cup\mathcal{C}_{3i+2} \supset \cup\mathcal{C}_{3i+3} \supset \cup\mathcal{C}_{3(i+1)+1}$. Es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\cup\mathcal{C}_n \supset \cup\mathcal{C}_{n+1}$.

Sea X la intersección anidada de las uniones de estas cadenas, es decir,

$$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\cup\mathcal{C}_n).$$

Por Teorema 2.3, X es un continuo. Observemos que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (\cup\mathcal{C}_n) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} (\cup\mathcal{C}_{3n+1}). \tag{2.1.1}$$

Ahora, si $x \notin X$, entonces existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin \cup\mathcal{C}_{3j+2}$ o $x \notin \cup\mathcal{C}_{3j+3}$. Como $\cup\mathcal{C}_{3j+2} \supset \cup\mathcal{C}_{3(j+1)+1}$ y $\cup\mathcal{C}_{3j+3} \supset \cup\mathcal{C}_{3(j+1)+1}$, entonces

$$x \notin \cup\mathcal{C}_{3(j+1)+1} \supset \bigcap_{i=0}^{\infty}(\cup\mathcal{C}_{3i+1})$$

es decir, $x \notin \bigcap_{i=0}^{\infty}(\cup\mathcal{C}_{3i+1})$, esto prueba, por la contrarrecíproca, que

$$\textit{Si } x \in \bigcap_{i=0}^{\infty}(\cup\mathcal{C}_{3i+1}),\ \textit{entonces } x \in X. \tag{2.1.2}$$

Así por (2.1.1) y (2.1.2) tenemos que

$$X = \bigcap_{i=0}^{\infty}(\cup\mathcal{C}_{3i+1}).$$

Veamos que no existe un subcontinuo propio Y de X tal que $\{a, c\} \subset Y$. Para esto, supongamos que existe tal Y. Sea $p \in X - Y$ y

$$d(p, Y) = \epsilon > 0, \tag{2.1.3}$$

entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N$, $\dfrac{1}{2^k} < \epsilon$. Sea $\ell > N$ y supongamos que el eslabón C de la cadena $\mathcal{C}_{3\ell+1}$ que contiene a p intersecta a Y. Sea $t \in C \cap Y$, por construcción se tiene que $\text{diám}(C) < \dfrac{1}{2^\ell} < \epsilon$. Entonces

$$d(p, Y) \leq d(p, t) \leq \text{diám}(C) < \epsilon,$$

y con esto último $d(p, Y) < \epsilon$ lo cual contradice a la ecuación (2.1.3). Por lo tanto, para $k \geq N$ los eslabones de la cadena $\mathcal{C}_{3k+1}$ que contienen a p no intersectan a Y.

Ahora, $Y \subset \bigcap_{n=0}^{\infty}(\cup\mathcal{C}_{3n+1})$, en particular, para $\ell > N$, $Y \subset \cup\mathcal{C}_{3\ell+1}$.

Supongamos que

$$\cup\mathcal{C}_{3\ell+1} = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_m \cup \cdots \cup C_s$$

donde $a \in C_1$ y $c \in C_s$ y supongamos que $p \in C_m$. Como $\ell > N$, el eslabón de la cadena $\mathcal{C}_{3\ell+1}$ que contiene a p no intersecta a Y. De donde

$$C_m \cap Y = \emptyset.$$

Entonces

$$Y = (Y \cap (C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_{m-1})) \bigcup (Y \cap (C_{m+1} \cup C_{m+2} \cdots \cup C_s)),$$

es decir, que Y se escribe como la unión de dos conjuntos cerrados, ajenos y no vacíos, ya que por lo menos $a \in Y \cap (C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_{m-1})$ y $b \in Y \cap (C_{m+1} \cup C_{m+2} \cdots \cup C_s)$ pero esta unión no puede ser ya que Y es un subcontinuo propio de X.

Por lo tanto no puede existir tal subcontinuo propio Y de X tal que $a, c \in Y$.

De manera similar se puede demostrar que

(1) $X = \bigcap_{n=0}^{\infty}(\cup\mathcal{C}_{3n+2})$ y que no existe un subcontinuo propio Y de X tal que $b, c \in Y$.

(2) $X = \bigcap_{n=0}^{\infty}(\cup\mathcal{C}_{3n+3})$ y que no existe un subcontinuo propio Y de X tal que $a, b \in Y$.

Se sigue de esto que no existen subcontinuos propios de X que contengan a dos de los tres puntos a, b, c. Con esta última afirmación y de acuerdo al Teorema 2.26 tenemos que X es un continuo indescomponible.

La Figura 2.2 da un bosquejo de la manera en que se va construyendo el continuo indescomponible.

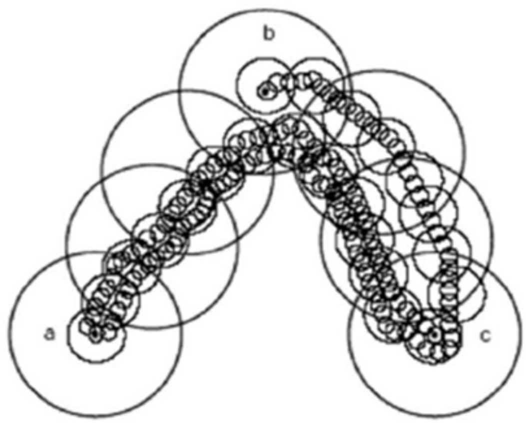

Figura 2.2: Continuo indescomponible

2.2. Composante y casicomponente

Ahora, mencionamos dos conceptos que son de gran importancia dentro de nuestro trabajo, el concepto de composante y el concepto de casicomponente los cuales definimos a continuación.

Definición 2.4. *Sean X un continuo y $a \in X$. Se define la* ***composante*** *de a en X como*

$$P(a, X) = \{x \in X : a \text{ y } x \text{ pueden ser unidos por un subcontinuo propio de } X\}.$$

De la definición 2.4 se sigue que para cada $a \in X$

$$P(a, X) = \bigcup \{K : a \in K \text{ y } K \text{ es un subcontinuo propio de X}\}.$$

Para comprender este concepto, presentamos un ejemplo. Sea el continuo $X = [0, 1]$. Luego, por definición de composante, $P(0, X) = \bigcup\{K\colon 0 \in K$ y K subcontinuo propio de $X\} = \bigcup\{[0, x]\colon x \in (0, 1)\} = [0, 1)$.

Análogamente, la composante del punto 1 es el intervalo (0,1], y la composante de cualquier punto en X diferente de 0 y 1 es todo el intervalo [0,1]. Ahora, cabe mencionar que la composante $P(q, X)$ de un punto q en X es la unión de subcontinuos propios de X que contienen a q por lo que resulta que $P(q, X)$ es conexa, pues es la unión de conexos que contienen al menos un punto en común.

Definición 2.5. *Sea X un espacio topológico. Dado $x \in X$, la* ***casicomponente*** *de X que contiene al punto x es*

$$Q(x) = \bigcap \{K \subset X\colon x \in K y\ K \text{ es abierto y cerrado en } X\}.$$

Teorema 2.6. *Sean X es un espacio compacto y de Hausdorff y $a \in X$. Entonces la componente de a coincide con la casicomponente de a, es decir, $C(x) = Q(x)$.*

Demostración. Sea $x \in X$. Veamos que $C(x) = Q(x)$.

Primero veamos que $C(x) \subset Q(x)$. Sea A un subconjunto abierto y cerrado en X que contiene a x, supongamos que $C(x) \not\subset A$. Luego, $C(x) = A \cup (C(x) - A)$, como $C(x) - A$ también es abierto y cerrado en X, los conjuntos A y $C(x) - A$

forman una separación de $C(x)$, esto contradice la conexidad de $C(x)$. Por tanto, $C(x) \subset A$. Así, $C(x) \subset Q(x)$.

Ahora, veamos que $Q(x) \subset C(x)$. Por la maximalidad (el conexo mas grande que contiene a x) de $C(x)$, basta probar que $Q(x)$ es conexo para obtener la contención deseada.

Supongamos, por el contrario, que $Q(x)$ no es conexo. Así, existen A y B subconjuntos no vacíos, cerrados en $Q(x)$ y disjuntos tales que $Q(x) = A \cup B$. Como $Q(x)$ es cerrado en X, se tiene que A y B son cerrados en X. Como X es compacto, por Teorema 1.12, A y B son compactos. Siendo X un espacio de Hausdorff, existen U y V subconjuntos abiertos en X y disjuntos tales que $A \subset U$ y $B \subset V$, vea [2, Propiedad 1.5(b), pág. 225].

Sea $M = X - (U \cup V)$, de donde M es cerrado en X. Sea $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ la familia de todos los subconjuntos abiertos y cerrados de X que contienen a x. Por tanto, $Q(x) = \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$. Notemos que

$$\begin{aligned}
\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(M \cap F_\lambda) &= M \cap (\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda) \\
&= M \cap (A \cup B) \\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

Tomando complementos, $X = X - \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}(M \cap F_\lambda)$. Como X es compacto, existe $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\} \subset \Lambda$ tal que $X = X - \bigcap\limits_{j=1}^{m}(M \cap F_{\lambda_j})$. Nuevamente tomando complementos,

$$\emptyset = \bigcap_{j=1}^{m}(M \cap F_{\lambda_j}) = M \cap (\bigcap_{j=1}^{m} F_{\lambda_j}).$$

Por tanto, $\bigcap_{j=1}^{m} F_{\lambda_j} \subset U \cup V$.

Afirmación: $(\bigcap_{j=1}^{m} F_{\lambda_j}) \cap U$ es tanto abierto como cerrado en X.

Para ver que esta afirmación es verdadera, notemos que $\bigcap_{j=1}^{m} F_{\lambda_j}$ es tanto abierto como cerrado en X y, en consecuencia, $(\bigcap_{j=1}^{m} F_{\lambda_j}) \cap U$ es abierto en X. Ahora, $(\bigcap_{j=1}^{m} F_{\lambda_j}) \cap \overline{U}$ es cerrado en X. Como $(\bigcap_{j=1}^{m} F_{\lambda_j}) \subset U \cup V$ y $\overline{U} \cap V = \emptyset$, se tiene

$$(\bigcap_{j=1}^{m} F_{\lambda_j}) \cap U = (\bigcap_{j=1}^{m} F_{\lambda_j}) \cap \overline{U}.$$

Por tanto, la afirmación es verdadera.

Como A es no vacío y $A \subset (\bigcap_{j=1}^{m} F_{\lambda_j}) \cap U$, existe un punto w en $Q(x)$ tal que también pertenece a $(\bigcap_{j=1}^{m} F_{\lambda_j}) \cap U$. Por otra parte, como B es no vacío, existe un punto z en $Q(x)$ tal que $z \in X - \left[(\bigcap_{j=1}^{m} F_{\lambda_j}) \cap U\right]$. Por lo anterior, se tiene que tanto $(\bigcap_{j=1}^{m} F_{\lambda_j}) \cap U$ como $X - \left[\bigcap_{j=1}^{m} F_{\lambda_j} \cap U\right]$ son subconjuntos abiertos, diferentes del vacío y disjuntos de X, uno de los cuales contiene a w y el otro a z, contradiciendo el hecho de que $Q(x)$ era una casicomponente de X. Así, $Q(x)$ es conexo. Por tanto, $Q(x) \subset C(x)$. □

Lema 2.7. *[2, pág. 223] Si un espacio topológico es compacto y de Hausdorff, entonces es regular.*

Para demostrar el siguiente resultado utilizamos el Teorema 2.6 y el Lema 2.7

Lema 2.8. *Si K es un subcontinuo propio de un continuo de Hausdorff X, entonces existe un subcontinuo propio L de X tal que $K \subset L \subset X$ y $K \neq L$.*

Demostración. Como X es un espacio compacto y de Hausdorff, se sigue del Lema 2.7, que X es un espacio regular. De donde, si $x \in X - K$ entonces existe un abierto V de X tal que $x \in V$ y $\overline{V} \cap K = \emptyset$. Por tanto, $K \subset X - \overline{V}$. Si $\overline{X - \overline{V}} = X$, por el Lema 1.18, $int(\overline{V}) = \emptyset$, de donde $V = int(V) = \emptyset$ lo cual es una contradicción. Por tanto, $\overline{X - \overline{V}} \neq X$. Sea L la componente de $\overline{X - \overline{V}}$ que contiene a K. Como L es una componente, L es conexo y cerrado en el conjunto cerrado $\overline{X - \overline{V}}$, de donde L es también cerrado en el conjunto compacto X. Así, L es un subcontinuo propio de X. Falta probar que $L \neq K$.

Por un lado $K \cap \overline{(X - \overline{(X - \overline{V})})} = \emptyset$, debido a

$$\begin{aligned}
K \cap \overline{(X - \overline{(X - \overline{V})})} &\subset K \cap \overline{(X - (X - \overline{V}))} \\
&= K \cap (X - (X - \overline{V})) \\
&= K \cap \overline{V} \\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

Por otro lado, $L \cap (\overline{X - (\overline{X - \overline{V}})}) \neq \emptyset$. Supongamos que $L \cap (\overline{X - (\overline{X - \overline{V}})}) = \emptyset$. Como X es un espacio compacto y de Hausdorff, $\overline{X - \overline{V}}$ es compacto y de Hausdorff. Por el Teorema 2.6, L es una casicomponente y, así, es la intersección de todos los subconjuntos abiertos y cerrados de $\overline{X - \overline{V}}$ conteniendo a un punto dado y de K. De esta forma, $L = \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$, donde cada G_λ es un subconjunto tanto abierto como cerrado de $\overline{X - \overline{V}}$. Notemos que

$$\begin{aligned} L \cap (\overline{X - (\overline{X - \overline{V}})}) &= (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda) \cap (\overline{X - (\overline{X - \overline{V}})}) \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

Tomando complementos,

$$X = (X - \bigcap_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda) \cup (X - (\overline{X - (\overline{X - \overline{V}})})).$$

Como X es compacto, existe $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\} \subset \Lambda$ tal que $X = (X - \bigcap\limits_{j=1}^{m} G_{\lambda_j}) \cup (X - (\overline{X - (\overline{X - \overline{V}})}))$. Nuevamente, tomando complementos se tiene que

$$\emptyset = (\bigcap_{j=1}^{m} G_{\lambda_j}) \cap (\overline{X - (\overline{X - \overline{V}})}). \tag{2.2.1}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} X &= (\overline{X-\overline{\overline{V}}}) \cup (\overline{X-(\overline{X-\overline{\overline{V}}})}) \\ &= (\bigcap_{j=1}^{m} G_{\lambda_j}) \bigcup \left[((\overline{X-\overline{\overline{V}}}) - \bigcap_{j=1}^{m} G_{\lambda_j}) \cup (\overline{X-(\overline{X-\overline{\overline{V}}})} \right] \end{aligned}$$

Así, tenemos que $(\bigcap_{j=1}^{m} G_{\lambda_j}) \cap \left[(\overline{X-\overline{\overline{V}}}) - \bigcap_{j=1}^{m} G_{\lambda_j} \right] = \emptyset$ y por la Ecuación (2.2.1), $(\bigcap_{j=1}^{m} G_{\lambda_j}) \cap (\overline{X-(\overline{X-\overline{\overline{V}}})}) = \emptyset$.

De lo anterior resulta que

$$(\bigcap_{j=1}^{m} G_{\lambda_j}) \bigcap \left[((\overline{X-\overline{\overline{V}}}) - \bigcap_{j=1}^{m} G_{\lambda_j}) \cup (\overline{X-(\overline{X-\overline{\overline{V}}})} \right] = \emptyset.$$

Ahora, $\bigcap_{j=1}^{m} G_{\lambda_j}$ por ser cerrado en $(\overline{X-\overline{\overline{V}}})$, es cerrado en X. También, $[((\overline{X-\overline{\overline{V}}}) - \bigcap_{j=1}^{m} G_{\lambda_j}) \cup (\overline{X-(\overline{X-\overline{\overline{V}}})})]$ es un cerrado en X. De donde, X es disconexo. Esta contradicción demuestra que $L \cap (\overline{X-(\overline{X-\overline{\overline{V}}})} \neq \emptyset$. En conclusión tenemos que

(1) $K \cap (\overline{X-(\overline{X-\overline{\overline{V}}})} = \emptyset$.

(2) $L \cap (\overline{X-(\overline{X-\overline{\overline{V}}})} \neq \emptyset$.

Por tanto, $L \neq K$. □

Teorema 2.9. *Si $P(a, X)$ es la composante de a en un continuo Hausdorff X, entonces el conjunto $P(a, X)$ es denso en X.*

Demostración. Sean $q \in X$ y $P(q, X)$ la composante de q en X. Mostremos que el conjunto $P(q, X)$ es denso en X.

Supongamos que $\overline{P(q, X)} \neq X$. Como $P(q, X)$ es conexa tenemos que $\overline{P(q, X)}$ es un subcontinuo propio de X, entonces por el Lema 2.8 existe un subcontinuo propio H de X tal que $\overline{P(q, X)} \neq H$ y $\overline{P(q, X)} \subset H$. Pero esto implica que

$$P(q, X) \neq H \text{ y } P(q, X) \subset H.$$

Así, resulta que H es un subcontinuo propio de X y que además contiene a q. Por definición de composante, $P(q, X)$, tenemos que $H \subset P(q, X)$. Por lo que $H = P(q, X)$ y esto es una contradicción. Por lo tanto $\overline{P(q, X)} = X$, es decir, $P(q, X)$ es denso en X. $\square$

Como consecuencia del Teorema 2.9 se tiene el siguiente resultado.

Corolario 2.10. *En un continuo de Hausdorff X, una composante no es un subcontinuo propio de X.*

Demostración. Sea X un continuo de Hausdorff y $P(a, X)$ la composante de a en X. Por Teorema 2.9, $\overline{P(a, X)} = X$. Supongamos que $P(a, X)$ es un subcontinuo propio de X. Entonces $P(a, X)$ es cerrado en X, de donde

$$X = \overline{P(a, X)} = P(a, X)$$

Por tanto, $P(a, X) = X$, lo cual es una contradicción. $\square$

El siguiente resultado muestra que los continuos que son descomponibles son la composante de alguno de sus puntos, situación que no se da en los continuos indescomponibles.

Teorema 2.11. *Si X es un continuo descomponible, entonces X es la composante de alguno de sus puntos.*

Demostración. Sean U y V subcontinuos propios de X tal que $X = U \cup V$. Entonces tenemos que

$$U \cap V \neq \emptyset.$$

Pues de lo contrario, si la intersección fuera el conjunto vacío, tendríamos que U y V forman una separación de X lo que nos diría que X es disconexo lo cual es absurdo ya que X es un continuo. Ahora, sea $x \in U \cap V$ y $P(x, X)$ la composante de x en X. Así, tenemos que $x \in U$, $x \in V$ y además que U y V son subcontinuos propios de X, por definición de $P(x, X)$, resulta que

$$U \subset P(x, X) \text{ y } V \subset P(x, X)$$

de donde

$$X = U \cup V \subset P(x, X).$$

Y por tanto que $X = P(x, X)$. Esto último nos dice que X es la composante de x. □

Ahora mostremos cómo se comportan las composantes en un continuo indescomponible, también situación que no sucede en los continuos descomponibles.

Teorema 2.12. *Sean X un continuo indescomponible, $p \in X$ y $P(p, X)$ la composante de p en X, entonces $P(p, X)$ es composante de cada uno de sus elementos.*

Demostración. Sean $p \in X$ y $P(p, X)$ la composante de p en X. Tomemos $x \in P(p, X)$, con $x \neq p$, y mostremos que $P(p, X)$ también es la composante de x en X.

Como $x \in P(p, X)$ existe un subcontinuo propio A de X tal que $x, p \in A$. Ahora, sea $P(x, X)$ la composante de x en X y sea $y \in P(x, X)$, entonces existe un subcontinuo propio B de X

tal que $x, y \in B$. Así, $x \in A \cap B$. Además, $p \in A \cup B$ y $A \cup B$ es un subcontinuo propio de X ya que X es indescomponible. Por definición de composante, $A \cup B \subset P(p, X)$. Por tanto, $y \in P(p, X)$, es decir,

$$P(x, X) \subset P(p, X).$$

Por otra parte, sea $l \in P(p, X)$ entonces existe un subcontinuo propio, H, de X tal que $p, l \in H$. De manera similar se tiene que $A \cup H$ es un subcontinuo propio de X tal que $x, l \in A \cup H$. Esto implica que $l \in P(x, X)$. Así,

$$P(p, X) \subset P(x, X).$$

Por tanto, $P(p, X) = P(x, X)$. $\square$

El Teorema 2.12 muestra que dado un continuo indescomponible X y una composante K en X, K es la composante de todos y cada uno de sus elementos, cosa que no sucede con los continuos descomponibles; por ejemplo en el continuo $X = [0, 1]$ se tiene que $P(1, X) = (0, 1]$. Observe que cualquier punto $a \in P(1, X)$, con $a \neq 1$, la composante $P(a, X) = [0, 1]$, de donde $P(1, X) \neq P(a, X)$. Por tanto, $P(1, X)$ no es composante de todos sus puntos.

2.3. Irreducibilidad

Definición 2.13. *Sean X un continuo y $p, q \in X$. Decimos que X es **irreducible** entre p y q si ninguno de los subcontinuos propios de X contiene a los puntos p y q.*

Este concepto aparentemente distinto del concepto de indescomponibilidad no sólo está relacionado matemáticamente con él sino que comparten un origen común.

Podemos mencionar un par de ejemplos de continuos que son irreducibles entre algún par de sus puntos. Por ejemplo el intervalo [0,1] es irreducible entre los puntos 0 y 1, ya que no existe un subcontinuo propio de $[0,1]$ que contiene a ambos. El continuo $sen(1/x)$ es irreducible entre el punto con coordenadas (1,0) y cualquier punto de la forma (0,y) con $|y| \leq 1$.

De alguna manera los conceptos de irreducible y de composante estan relacionados. A saber, si p y q son puntos de un continuo X de tal manera que p no pertenece a la composante de q, (o viceversa), entonces el continuo resulta ser irreducible entre estos dos puntos, ya que si X no es irreducible entre p y q, existe un subcontinuo propio A de X tal que $p, q \in A$. Luego, $q \in A \subset P(p, X)$, de donde $q \in P(p, X)$, lo cual es una contradicción.

Igualmente, si un continuo X es irreducible entre dos de sus puntos, digamos a y b, entonces cada uno de estos puntos no pertenece a la composante del otro, ya que si $a \in P(b, X)$, existe un subcontinuo propio B de X tal que $a, b \in B$, de donde X no es irreducible entre a, b, lo cual es una contradicción.

Lema 2.14. *Sean X un continuo indescomponible y K cualquier subcontinuo propio de X. Entonces $X - K$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $X - K$ es disconexo. Entonces por el Lema 1.8, existen dos subconjuntos no vacíos M y N de $X - K$ tales que $(\overline{M} \cap N) \cup (M \cap \overline{N}) = \emptyset$ y que $X - K = M \cup N$. Por el Lema 1.9, $K \cup M$ y $K \cup N$ son conexos y cerrados. Por el Teorema 1.12, son continuos tales que

$$\begin{aligned}(K \cup M) \cup (K \cup N) &= K \cup (M \cup N) \\ &= K \cup (X - K) \\ &= X.\end{aligned}$$

Note que si $K \cup M = \emptyset$, entonces $K = \emptyset$ y $M = \emptyset$ lo cual es una contradicción. Ahora, supongamos que $K \cup M = X$. Luego, $M = (K \cup M) - K = X - K = M \cup N$, de donde, $M = M \cup N$. Por lo que $N \subset M$ lo cual es una contradicción.

Por esto último se tiene que $K \cup M$ es un subcontinuo propio de X. De manera análoga se prueba que $K \cup N$ es un subcontinuo propio de X. Por tanto, X es la unión de dos subcontinuos propios de X, es decir, X es descomponible. Esto es una contradicción. Por tanto, $X - K$ es conexo. $\square$

Observación 2.15. *Es importante mencionar que en los continuos indescomponibles, cualquiera que sea un subcontinuo, su complemento siempre sera conexo. Sin embargo, esto no siempre sucede con los continuos descomponibles tal y como se muestra a continuación.*

Sean $X = I \times I$, donde $I = [0,1]$, $Y = [1/3, 2/3] \times [0,1]$ y $Z = [1/3, 2/3] \times [1/3, 2/3]$ como lo muestra la Figura 2.3

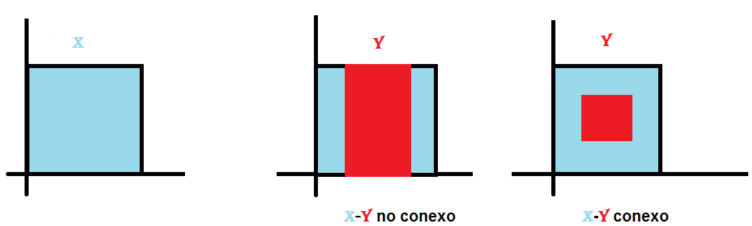

Figura 2.3: Complemento no conexo y otro conexo

Notemos que $X - Y$ no es conexo y que $X - Z$ si es conexo.

El siguiente teorema probado por Janiszewski muestra una equivalencia para continuos indescomponibles.

Teorema 2.16. *Sea X un continuo de Hausdorff. Entonces X es indescomponible si y sólo si cada uno de los subcontinuos propios de X es un continuo de condensación.*

Demostración. Supongamos que X es indescomponible y que K es un subcontinuo propio de X que no es continuo de condensación de X, esto es, $\overline{X - K} \neq X$. Observamos que $X = K \cup (X - K) = K \cup (\overline{X - K})$. Como K es un subcontinuo propio del continuo indescomponible X se tiene, por el Lema 2.14, que $X - K$ es conexo. Por Teorema 1.11, $\overline{X - K}$ también es conexo.

Observar que $X - K \neq \emptyset$ por que K es propio. Como $\emptyset \neq X - K \subset \overline{X - K}$, se tiene que $\overline{X - K} \neq \emptyset$. Ahora, $\overline{X - K}$ es cerrado en X, por Teorema 1.12, se tiene que $\overline{X - K}$ es compacto.

Así, K y $\overline{X - K}$ son dos subcontinuos propios de X tales que $X = K \cup (\overline{X - K})$, lo cual es una contradicción. Por tanto, todos los subcontinuos propios de X son de condensación.

Ahora veamos el recíproco. Supongamos que todo subcontinuo propio de X es de condensación y supongamos también que X es descomponible. Entonces se tiene que $X = A \cup B$, donde A y B son subcontinuos propios de X. Así, $X - A \subset B$, es decir, $\overline{X - A} \subset \overline{B} = B \neq X$. Por tanto, se tienen que $\overline{X - A} \neq X$. Por el Lema 1.16, A no es de condensación lo cual es una contradicción. $\square$

Observación 2.17. *De acuerdo al Lema 1.17 los continuos de condensación tienen interior vacío. Así, en el Teorema 2.16 puede sustituirse el término de continuo de condensación por* *subcontinuos propios con interior vacío, es decir, para que un continuo de Hausdorff X sea indescomponible es necesario y suficiente que cada uno de los subcontinuos propios de X tenga interior vacío.*

El siguiente resultado muestra la similitud entre los continuos indescomponibles y los continuos que no son localmente conexos en ninguno de sus puntos.

Teorema 2.18. *Sea X un continuo de Hausdorff indescomponible y no degenerado. Entonces X no es localmente conexo en ninguno de sus puntos.*

Demostración. Supongamos que existe un punto $p \in X$ tal que X es localmente conexo en p. Como X es no degenerado existe $b \in X - \{a\}$. Como X es de Hausdorff, existen dos abiertos ajenos, U y V, de X conteniendo a p y a b, respectivamente. Como X es localmente conexo en p, existe un conjunto abierto K de X, conexo tal que $p \in K \subset U$. Observar que $\overline{K}$ es cerrado en X. Por el Teorema 1.12, se tiene que $\overline{K}$ es compacto. Así, $\overline{K}$ es subcontinuo de X tal que $\overline{K} \cap V = \emptyset$ ya que si $p \in \overline{K} \cap V$, entonces $p \in \overline{K}$ y $p \in V$. Entonces cualquier abierto que contenga a p intersecta a K y como $p \in V$, se tiene que $K \cap V \neq \emptyset$. Como $K \cap V \subset U \cap V$, resulta que $U \cap V \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción. De donde, $\overline{K}$ es un subcontinuo propio de X.

Como $K \subset \overline{K}$, $X - \overline{K} \subset X - K$. Luego, $K \cap (X - \overline{K}) \subset K \cap (X - K) = \emptyset$, de donde, $K \cap (X - \overline{K}) = \emptyset$. Así, $K \cap (\overline{X - \overline{K}}) = \emptyset$. Luego,

$$\overline{X - \overline{K}} \neq X.$$

Por el Lema 1.16, $\overline{K}$ es un subcontinuo propio de X que no es de condensación lo cual contradice al Teorema 2.16. Por tanto, X no es localmente conexo en ninguno de sus puntos. $\square$

Por definición, se tiene que un continuo indescomponible no puede escribirse como la unión de dos subcontinuos propios. Sorprendentemente "dos"puede ser sustituído por "numerable", siempre que el continuo sea de Hausdorff, la prueba de este hecho se llega utilizando el Teorema 2.16, el Lema 2.7 y los siguientes resultados.

Lema 2.19. *[2, pág. 141] Si X es un espacio regular, x es un punto de X y U es un abierto en X que contiene a x, entonces existe un abierto V en X que contiene a x tal que $\overline{V} \subset U$.*

Teorema 2.20. *[Teorema de la Categoría de Baire] Si X es un continuo de Hausdorff, entonces X no es la unión de una cantidad numerable de subconjuntos cerrados y densos en ninguna parte en X.*

Demostración. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una colección de subconjuntos cerrados y densos en ninguna parte en X y supongamos que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, de donde $\bigcap_{n=1}^{\infty}(X - A_n) = \emptyset$, lo cual veremos que es falso.

Como cada A_n es cerrado y denso en ninguna parte en X. Por el Lema 1.1 se tiene que $X - A_n$ es un abierto denso de X, para cada $n \in \mathbb{N}$. Vamos a mostrar que $\bigcap_{n=1}^{\infty}(X - A_n)$ es denso en X.

Sea U un abierto no vacío de X. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, $U \cap (X - A_n) \neq \emptyset$. De esta manera, $U \cap (X - A_1)$ es un subconjunto abierto y no vacío de X. Sea $x \in U \cap (X - A_1)$, por los Lemas 2.7 y 2.19, existe un subconjunto abierto B_1 en X tal que $x \in B_1 \subset \overline{B_1} \subset U \cap (X - A_1)$. De la misma forma, existe un subconjunto abierto y no vacío B_2 en X tal que $B_2 \subset \overline{B_2} \subset B_1 \cap (X - A_2)$.

Inductivamente, obtenemos una sucesión, $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, de conjuntos abiertos tales que $\overline{B_{n+1}} \subset B_n \cap (X - A_{n+1})$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\bigcap\limits_{n=1}^{k} \overline{B_n} = \overline{B_k} \neq \emptyset$, la colección $\{\overline{B_n} \colon n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de cerrados en X con la propiedad de la intersección finita, como X es compacto, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} \neq \emptyset$.

Por otra parte se tiene que $\overline{B_1} \subset U \cap (X - A_1)$ y $\overline{B_{n+1}} \subset B_n \cap (X - A_{n+1})$, lo cual implica que,

$$\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} \subset U \cap \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} (X - A_n)\right].$$

En consecuencia, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (X - A_n)$ es denso y no vacío. Por tanto $\bigcup\limits_{n^1}^{\infty} A_n \neq X$. $\square$

Ahora mencionaremos el resultado importante que gracias al Teorema 2.16 y al Lema 2.20 se facilita su demostración.

Lema 2.21. *Ningún continuo de Hausdorff e indescomponible es la unión de una cantidad numerable de subcontinuos propios.*

Demostración. Sea X un continuo de Hausdorff e indescomponible. Si $\{K_n\}_{n+1}^{\infty}$ es una familia numerable de subcontinuos propios de X entonces por el Teorema 2.16 cada K_n es un continuo de condensación de X y por el Lema 1.15, cada K_n es denso en ninguna parte en X. Como K_n es compacto, cada K_n es cerrado en X. Por Teorema 2.20, $X \neq \bigcup\limits_{n+1}^{\infty} K_n$. $\square$

Mencionemos otro resultado muy interesante que relaciona el concepto de composante con continuos indescomponibles.

Teorema 2.22. *Si a, b son dos puntos de un continuo indescomponible X, entonces $P(a, X) \cap P(b, X) = \emptyset$ o $P(a, X) = P(b, X)$.*

Demostración. Supongamos que el resultado no es cierto, es decir, que existen a y b puntos de X tales que sus composantes, $P(a, X)$ y $P(b, X)$, de a y b, respectivamente, $P(a, X) \cap P(b, X) \neq \emptyset$ y $P(a, X) \neq P(b, X)$.

Supongamos que $P(a, X) \not\subset P(b, X)$ y $P(a, X) \cap P(b, X) \neq \emptyset$. Sean $c \in P(a, X) - P(b, X)$ y $d \in P(a, X) \cap P(b, X)$. Por definición de composante, existe un subcontinuo propio C_1 de X tal que $a, c \in C_1$. De manera similar, existen subcontinuos propios C_2, C_3 de X tales que $a, d \in C_2$ y $b, d \in C_3$.

(1) Como C_1, C_2, C_3 son compactos, se tiene que $C_1 \cup C_2 \cup C_3$ es un compacto.

(2) Como $a \in C_1 \cap C_2$, se tiene que $C_1 \cup C_2$ es conexo y también como $d \in (C_1 \cup C_2) \cap C_3$, $C_1 \cup C_2 \cup C_3$ es conexo.

Por lo que $C_1 \cup C_2 \cup C_3$ es un subcontinuo de X y $b, c \in C_1 \cup C_2 \cup C_3$. Por otro lado como $c \notin P(b, X)$, no existe un subcontinuo propio de X que contenga a b y c. Así, $C_1 \cup C_2 \cup C_3 = X$. De esto último consideramos los dos casos posibles:

(i) $C_3 \subset C_1 \cup C_2$. Así, $X = C_1 \cup C_2$.

(ii) $C_3 \not\subset C_1 \cup C_2$. Luego como $C_1 \cup C_2$ es subcontinuo propio, $X = (C_1 \cup C_2) \cup C_3$.

De los dos casos se tiene que X es descomponible. Pero esto es una contradicción. $\square$

Teorema 2.23. *Si $a \in X$, donde X es un continuo métrico indescomponible, entonces el conjunto $P(a, X)$ es de la primera categoría y es un conjunto frontera de X.*

Demostración. Sean $a \in X$ y $P(a, X)$ la composante de a en X. Primero mostremos que el conjunto $P(a, X)$ es de la primera categoría, esto es, que $P(a, X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, donde para toda $n \in \mathbb{N}$, X_n es cerrado y denso en ninguna parte en X.

Dado que X es métrico, $X - \{a\}$ es un abierto y tiene una base numerable $\{O_i\}_{i=1}^{\infty}$ [2, pág. 233]. Ya que X es no degenerado, $X - \{a\} \neq \emptyset$.

Dado $b \in X - \{a\}$, existe O_m elemento de la base tal que $b \in O_m \subset \overline{O_m} \subset X - \{a\}$.

$$\text{Sea } \mu = \{m \in \mathbb{N} : O_m \subset \overline{O_m} \subset X - \{a\}\}$$

Para $n \in \mu$, sea $K_n(a)$ la componente de $X - \overline{O_n}$ que contiene a a. Luego, por el Teorema 1.11, $\overline{K_n(a)}$ es conexo, y como X es compacto, por el Teorema 1.12, $\overline{K_n(a)}$ es compacto. Más aún, este es un subcontinuo propio (métrico) de X puesto que, como $K_n(a) \subset X - \overline{O_n}$,

$$\overline{K_n(a)} \subset \overline{X - \overline{O_n}} \subset \overline{X - O_n} = X - O_n \neq X.$$

Por tanto, $\overline{K_n(a)} \subset P(a, X)$, para cada $n \in \mu$. Así, que

$$\bigcup_{n \in \mu} \overline{K_n(a)} \subset P(a, X). \tag{2.3.1}$$

Por otra parte, si $x \in P(a, X)$ existe un subcontinuo propio C_1 de X tal que $a, x \in C_1$. Sea $p \in X - C_1$; notemos que $X - C_1$ es un subconjunto abierto de $X - \{a\}$ y que, por otra parte, $p \neq a$ muestra que $p \in X - \{a\}$. Por tanto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $p \in O_n$ y que $\overline{O_n} \subset X - C_1$. Como $\{a\} \subset C_1$ entonces $X - C_1 \subset X - \{a\}$. Por lo que $n \in \mu$.

Como $\overline{O_n} \subset X - C_1$, se tiene que $C_1 \subset X - \overline{O_n}$. Luego, por definición de $K_n(a)$, se tiene que

$$C_1 \subset K_n(a) \subset \overline{K_n(a)}.$$

Por tanto, $x \in P(a, X)$ implica $x \in K_n(a)$ para cada $n \in \mu$. En consecuencia,

$$P(a, X) \subset \bigcup_{n \in \mu} \overline{K_n(a)}. \tag{2.3.2}$$

Por el Teorema 2.16, para cada $n \in \mu$, $\overline{K_n}$ es cerrado y denso en ninguna parte en X. Así, por las Ecuaciones (2.3.1) y (2.3.2), $P(a, X)$ es de la primera categoría, esto es,

$$P(a, X) = \bigcup_{n \in \mu} \overline{K_n(a)}. \tag{2.3.3}$$

Ahora mostremos que $P(a, X)$ es un conjunto frontera en X.

De la Ecuación (2.3.3) se tiene que $X - P(a, X) = \bigcap_{n \in \mu}(X - \overline{K_n(a)})$. Además, cada $X - \overline{K_n(a)}$ es abierto. Como $K_n(a)$ es denso en ninguna parte en X, se tiene que $X - \overline{K_n(a)}$ es denso en X. Como en la demostración del Teorema 2.20, tenemos que $\bigcap_{n \in \mu}(X - \overline{K_n(a)})$ es denso en X.

Por otra parte, como $X - P(a, X) = \bigcap_{n \in \mu}(X - \overline{K_n(a)})$, se tiene que

$$\overline{X - P(a, X)} = \overline{\bigcap_{n\in\mu}(X - \overline{K_n(a)})} = X.$$

Luego, $\overline{X - P(a, X)} = X$. Así, $P(a, X) \subset X = \overline{X - P(a, X)}$, es decir, $P(a, X) \subset \overline{X - P(a, X)}$. Por tanto, $P(a, X)$ es un conjunto frontera en X. $\square$

Teorema 2.24. *Si X es un continuo métrico indescomponible, entonces la cantidad de composantes en X es no numerable.*

Demostración. Por el Teorema 2.23, dada $a \in X$, se tiene que $P(a, X)$ es la unión numerable de conjuntos cerrados y densos en ninguna parte en X, es decir, $P(a, X) = \bigcup_{n\in\Lambda} A_n$, con A_n cerrado y denso en ninguna parte en X y Λ un conjunto numerable.

Si existe sólo una cantidad numerable de composantes en X, entonces X es la unión numerable de conjuntos cerrados y densos en ninguna parte en X, es decir,

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} P(a_i, X) = \bigcup_{i=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n\in\Lambda_i}(A_n)\right)$$

Lo cual contradice el Teorema 2.20. Por tanto, X tiene una cantidad no numerable de composantes. $\square$

La prueba anterior junto con la del Teorema 2.22 muestran que un continuo métrico indescomponible tiene una cantidad no numerable de composantes que además son disjuntas. Con estas composantes podemos encontrar tres puntos en X tales que X es irreducible entre cualesquiera dos de ellos.

Teorema 2.25. *Si X es un continuo métrico indescomponible, entonces existen tres puntos en X tales que X es irreducible entre cualesquiera dos de ellos.*

Demostración. Por el Teorema 2.24, X tiene una cantidad no numerable de composantes. Por tanto, podemos elegir $a, b, c \in X$ tales que $P(a, X)$, $P(b, X)$ y $P(c, X)$ son distintas dos a dos. Por el Teorema 2.22, $P(a, X) \cap P(b, X) = \emptyset$. Luego $a \notin P(b, X)$, de donde no existe un subcontinuo propio U de X tal que $a, b \in U$. Así, X es irreducible entre a y b. De manera análoga se prueba que X es irreducible entre a y c y también que X es irreducible entre b y c. $\square$

Utilizando los Teoremas 2.23 y 2.25, Janiszewski y Kuratowski probaron el siguiente resultado, el cual contiene condiciones necesarias y suficientes para que un continuo sea indescomponible.

Teorema 2.26. *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) Un continuo métrico X es indescomponible.

(b) Para cada $a \in X$, existe un punto $x \in X$ tal que X es irreducible entre a y x.

(c) Existe $a \in X$ tal que $P(a, X)$ es un conjunto frontera en X, esto es, $P(a, X) \subset \overline{X - P(a, X)}$.

(d) Existen tres puntos de X tales que X es irreducible entre cualesquiera dos de ellos.

Demostración. La prueba de que la condición (a) implica la condición (b) es análoga a la demostración del Teorema 2.25. Por el Teorema 2.23, la condición (a) implica la condición (c). Por el Teorema 2.25, se satisface la condición (a) implica la condición (d).

Mostremos que la condición (b) implica la condición (a). Supongamos que X es descomponible, entonces existen dos subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$. Sea $a \in A \cap B$, de donde $a \in A$ y $a \in B$. Entonces, por definición de composante, $A \subset P(a, X)$ y $B \subset P(a, X)$, de donde $X = A \cup B \subset P(a, X)$. Por tanto, X no es irreducible entre a y ningún otro punto de X. Lo cual es una contradicción.

Mostremos que la condición (c) implica la condición (a). Supongamos que X es descomponible, entonces existen dos subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$. Sea $a \in X$ tal que $P(a, X)$ es un conjunto frontera en X, esto es, $P(a, X) \subset \overline{X - P(a, X)}$. Como $a \in X$ y $X = A \cup B$, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a \in A$. Así, $A \subset P(a, X)$, de donde

$$X - P(a, X) \subset X - A \subset B.$$

Como B es cerrado, obtenemos que $\overline{X - P(a, X)} \subset B$. De donde

$$P(a, X) \subset B.$$

De esta manera, resulta que $A \subset B$, de donde $X = A \cup B = B$. Pero esto contradice el hecho de que B es subcontinuo propio de X. Por tanto, X es indescomponible.

Mostremos que la condición (d) implica la condición (a). Sea $A = \{x, y, z\} \subset X$ de tal manera que X es irreducible entre cualesquiera dos puntos de A y supongamos que X es descomponible. Entonces, existen B y C subcontinuos propios de X tales que

$$X = B \cup C.$$

Ahora, como

$$A \subset X.$$

Se tiene que

$$A = \{x, y, z\} \subset B \cup C :$$

observamos que alguno de los dos subcontinuos propios U ó V, contiene dos elementos de A. Por lo que no es irreducible entre estos dos puntos, pero esto es una contradicción. Por tanto X es indescomponoible. $\square$

Ahora, mencionamos un par de caracterizaciones de continuos indescomponibles, una que relaciona el concepto de irreducible con los conjuntos densos y otra usando el término de composante.

Corolario 2.27. *Si X es un continuo métrico, entonces X es indescomponible si y sólo si X es irreducible entre algún punto $p \in X$ y cada punto $q \in D$, donde D es un subconjunto denso de X.*

Demostración. Sean X un continuo indescomponible, $p \in X$ y $P(p, X)$ la composante de p en X. Entonces por el Teorema 2.23, $P(p, X)$ es un conjunto frontera. Por tanto, $X = \overline{X - P(a, X)}$. Sea $q \in X - P(p, X)$. Notemos que X es irreducible entre p y q.

Inversamente, sea D un subconjunto denso de X tal que X es irreducible entre algún punto $p \in X$ y cada puntos $q \in D$. Por tanto, $D \subset X - P(p, X)$. De donde, $X = \overline{D} \subset \overline{X - P(p, X)}$. En particular, se tiene que $P(p, X) \subset \overline{X - P(p, X)}$. Así, $P(p, X)$ es un conjunto frontera. Por el Teorema 2.26 (c) implica (a), se tiene que X es indescomponible. $\square$

Teorema 2.28. *Sea X un continuo métrico. Se tiene que X es indescomponible si y sólo si X contiene dos composantes disjuntas.*

Demostración. Por los Teoremas 2.22 y 2.24, X tiene una cantidad no numerable de composantes disjuntas y en consecuencia tiene dos.

Ahora, inversamente, supongamos que $P(a, X)$ y $P(b, X)$ son dos composantes disjuntas en X con $a, b \in X$ y supongamos que X es descomponible. Existen C_1 y C_2 subcontinuos propios de X tal que $X = C_1 \cup C_2$.

Observemos que $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, de lo contrario X es disconexo, lo cual es absurdo porque X es un continuo.

(1) Como $a \in X$ y $X = C_1 \cup C_2$ se tiene que $a \in C_1$ o $a \in C_2$. En cualquier caso, por definición de $P(a, X)$, se tiene que $C_1 \subset P(a, X)$ o $C_2 \subset P(a, X)$. Ahora ya que $C_1 \cap C_2 \subset C_1$ y $C_1 \cap C_2 \subset C_2$, resulta que $C_1 \cap C_2 \subset P(a, X)$.

(2) De una manera similar se tiene $C_1 \cap C_2 \subset P(b, X)$.

Por lo tanto $C_1 \cap C_2 \subset P(a, X) \cap P(b, X)$. Así $P(a, X) \cap P(b, X) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción, ya que $P(a, X)$ y $P(b, X)$ son disjuntas. Por lo tanto X es indescomponible. $\square$

En consecuencia, de los Teoremas 2.9 y 2.23, se tiene el siguiente resultado

Corolario 2.29. *Si X es un continuo métrico indescomponible, entonces para cada $a \in X$, $\overline{P(a, X)} = X$ y $P(a, X) \subset \overline{X - P(a, X)} = X$.*

Demostración. El Teorema 2.9 establece que el conjunto $P(a, X)$ es denso en X, es decir, $\overline{P(a, X)} = X$ y el Teorema 2.23 establece que $P(a, X) \subset \overline{X - P(a, X)} = X$. $\square$

De esta manera, un continuo indescomponible X, en un espacio métrico es "muy irreducible"en el sentido de que dado cualquier punto $a \in X$, existe un $x \in X$, arbitrariamente cercano a a, tal que X es irreducible entre a y x. Lo anterior es debido a que dado $a \in X$, el conjunto de todos los punto $x \in X$

tales que X es irreducible entre a y x es denso en X. Por otra parte, dado un punto $a \in X$, X no es irreducible entre a y ninguno de los puntos de un subconjunto denso de X.

Más aún, un continuo indescomponible X es "muy conexo"en el sentido de que cualquier subcontinuo propio K de X puede ser removido sin desconectar a X (vea Lema 2.14). Knaster y Kuratowski probaron un resultado similar el cual muestra que cualquier punto podía ser removido de un continuo indescomponible (por supuesto no degenerado) sin desconectarlo. R.L. Moore estableció un resultado aún más fuerte para continuos de Hausdorff, a saber:

Teorema 2.30. *Sean X un continuo de Hausdorff indescomponible y K cualquier subcontinuo propio de X. Si L es cualquier subconjunto de K entonces $X - L$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $X - L$ no es conexo. Entonces, por el Lema 1.8, existen dos subconjuntos abiertos no vacíos, U y V, de $X - L$ tales que

(1) $X - L = U \cup V$.

(2) $(\overline{U} \cap V) \cup (U \cap \overline{V}) = \emptyset$.

Por el Lema 2.14, $X - K$ es conexo. Note que $L \subset K$ implica $X - K \subset X - L = U \cup V$. Por el Lema 1.10, $X - K \subset U$ o $X - K \subset V$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $X - K \subset U$. Como $U \cap V = \emptyset$, $U \subset X - V$, de donde $X - K \subset U \subset X - V$. Así, $V \subset K$.

Como K es subcontinuo propio de X, por el Teorema 2.16, K es continuo de condensación y por el Lema 1.16 se tiene que $\overline{X - K} = X$. Entonces,

$$X = \overline{X - K} \subset \overline{A}.$$

En consecuancia, $K \subset \overline{A}.$ Así, $B \subset K \subset \overline{A}$, de donde $B \subset \overline{A}$ lo cual es una contradicción. Por tanto, $X - L$ es conexo. $\square$

2.4. Continuo de Knaster

En esta sección, como resultado final, probaremos que el Arcoiris de Knaster (construido con semicircunferencias) es realmente un continuo indescomponible. El simbolo " * "representa la multiplicaación usual en los números reales.

Sea $I = [0, 1]$. Geométricamente, el conjunto de Cantor puede construirse quitando los tercios medios de I. En el primer paso quitamos el intervalo $(1/3, 2/3)$, dejando los intervalos cerrados $J_{1,1} = [0, 1/3]$ y $J_{1,2} = [2/3, 1]$. Sea $F_1 = J_{1,1} \cup J_{1,2}$. En el segundo paso quitamos los intervalos $(1/9, 2/9)$ y el intervalo $(7/9, 8/9)$, dejando los intervalos cerrados $J_{2,1} = [0, 1/9]$, $J_{2,2}[2/9, 3/9]$ y los intervalos $J_{2,3} = [6/9, 7/9]$, $J_{2,4} = [8/9, 1]$. Sea $F_2 = J_{2,1} \cup J_{2,2} \cup J_{2,3} \cup J_{2,4}$. Así, en el n-ésimo paso, $F_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} J_{n,k}$, donde $J_{n,1}, \ldots, J_{n,2^n}$ son intervalos cerrados, cada uno de longitud 3^{-n}.

En el paso (n+1)-ésimo se quita, de cada $J_{n,k}$, un intervalo abierto de longitud $3^{-(n+1)}$. Entonces tomamos $F_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{2^{n+1}} J_{n,k}$, y, el conjunto de Cantor, se define como

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Sea D_0 la familia de semicircunferencias con ordenadas no negativas, centradas en el punto (1/2,0) y teniendo como puntos extremos a los puntos del conjunto de Cantor, F. Para cada

$n \geq 1$, sea $G_n = \{x \in F\colon (\frac{2}{3^n}) \leq x \leq (\frac{3}{3^n})\}$. Para cada $n \geq 1$, sea D_n el conjunto de semicunferencias con ordenadas no positivas, centradas en el punto $(\frac{5}{2*3^n}, 0)$ y teniendo como puntos extremos los puntos de G_n. Definimos el siguiente conjunto,

$$B = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n.$$

Cabe mencionar que el conjunto B es conocido como el Arcoiris de Knaster. Vamos a demostrar que el Arcoiris de Knaster es un continuo indescomponible.

Sea $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, donde $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión infinita de semicircunferencias utilizadas en la construcción de B, tales que:

(1) Los puntos (0,0) y (1,0) pertenecen a S_1;

(2) Para $n \geq 1$, $S_n \cap S_{n+1}$ es el punto de F que es común a ambos.

Denotemos por K a los puntos del conjunto de Cantor, F, que son puntos extremos de los intervalos $J_{n,k}$. Notemos que para $n = 1$, $F_1 = J_{1,1} \cup J_{1,2} = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. Luego, F_1 tiene $2^1 = 2$ intervalos y por tanto tiene $2 * (2^1) = 4$ puntos extremos los cuales son $A_1 = \{0, 1/3, 2/3, 1\}$. Entonces, $A_1 \subset K$. Como $\{0, 1\} \subset S_1$, $\{1, 2/3\} \subset S_2$ y $\{2/3, 1/3\} \subset S_3$, se tiene que

$$A_1 \subset S_1 \cup S_2 \cup S_3 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = S.$$

Luego, $A_1 \subset S$.

Para $n = 2$, $F_2 = J_{2,1} \cup J_{2,2} \cup J_{2,3} \cup J_{2,4}$. Luego, F_2 tiene $(2^2) = 4$ intervalos y por tanto $2(2^2) = 8$ puntos extremos los cuales son $A_2 = \{0, 1/9, 2/9, 1/3, 2/3, 7/9, 8/9, 1\}$. Entonces $A_2 \subset K$. Como $\{0,1\} \subset S_1$, $\{1, 2/3\} \subset S_2$, $\{2/3, 1/3\} \subset S_3$, $\{1/3, 2/9\} \subset S_4$, $\{2/9, 7/9\} \subset S_5$, $\{7/9, 8/9\} \subset S_6$, y $\{8/9, 1/9\} \subset S_7$, se tiene que

$$A_2 \subset S_1 \cup \cdots \cup S_7 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = S.$$

Luego, $A_2 \subset S$.

Siguiendo este procedimiento se observa que cada vez que se tiene un subconjunto A_n de K, $A_n \subset S$. Por tanto, $K \subset S$; esto es, para cada punto extremo en F, existe una semicírculo S_m teniéndole como punto extremo. La demostración del hecho de que F es perfecto muestra también que K es denso en F. Por tanto, $K \subset S$ y $\overline{K} = F$, de donde $\overline{S} = B$. Claramente S es conexo, por lo que B es conexo a su vez. $\overline{S}$ es compacto por el Teorema de Heine-Borel, de esta manera hemos demostrado que B es un continuo.

A continuación veremos que $\overline{F - K} = F$. Dados $x \in K$ y $\epsilon > 0$, debemos encontrar un punto $y \in F - K$ tal que $\mid x - y \mid < \epsilon$. Como $x \in K$, se tiene que $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n}$, donde $b_n \in \{0, 2\}$ y existe un N tal que para toda $n \geq N$, $b_n = 0$ o $b_n = 2$. Tomemos $N_1 \geq N$ tal que $\frac{1}{3^{N_1 - 1}} < \epsilon$. Cualquier elemento $y \in F - K$ tiene una expansión ternaria de la forma $y = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$. Para la $y \in F - K$ buscada, sea

$$a_n = \begin{cases} b_n, & \text{si } n < N_1; \\ 0, & \text{si } n \text{ es par y mayor o igual que } N_1; \\ 2, & \text{si } n \text{ es impar y mayor o igual que } N_1. \end{cases}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\mid x-y \mid &= \mid \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n} \mid \\
&\leq \sum_{n=N_1}^{\infty} \frac{\mid a_n - b_n \mid}{3^n} \\
&< \sum_{n=N_1}^{\infty} \frac{2}{3^n} \\
&= \frac{1}{3^{N_1-1}} \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

Como $\overline{F-K} = K$, entonces $\overline{B-S} = B$. Por tanto, $B-S$ es denso en B. Por el Corolario 2.27, basta mostrar que B es irreducible entre (0,0) y cualquier punto de $B-S$. Para esto, primero probaremos el siguiente:

Lema 2.31. *Si L es un subcontinuo propio de B, donde B es el continuo de Knaster, tal que $L \cap S \neq \emptyset$, entonces existe un n tal que $L \subset \bigcup_{k=1}^{n} S_k$.*

Demostración. Sea $q \in L \cap S$. Como S es denso en B, existe un punto $p \in S$ tal que está en el subconjunto abierto y no vacío $B-L$. De hecho, p puede ser tomado de tal manera que si A denota el arco en S entre (0,0) y p entonces $q \in A$. Esto puede ser hecho simplemente añadiendo el arco de (0,0) a q al continuo L.

Vamos a probar que $L \subset A$. Supongamos que $L \not\subset A$ y sea $r \in L - A$. Tomemos un número natural n_0 de tal manera que la distancia de p a L sea mayor que 3^{-n_0} (y, en consecuencia, la distancia de r a A también será mayor que 3^{-n_0}) y tal que $A \subset \bigcup_{k=1}^{2^{n_0-1}} S_k$.

Consideremos la banda P formada por todos los círculos de radio $\frac{4}{3^{n_0+2}}$ centrados en los puntos de A. La frontera de P está compuesta por dos líneas paralelas a A y dos semicircunferencias centradas en (0,0) y p, respectivamente.

Las primeras tres de estas líneas son ajenas a B, ya que sus puntos de intersección con el eje x están en los intervalos que fueron quitados en la construcción de F (ya que $A \subset \bigcup_{k=1}^{2^{n_0-1}} S_k$). La cuarta es ajena a L, debido a que la distancia de p a L es mayor que $\frac{1}{3^{n_0}} > \frac{4}{3^{n_0+2}}$.

Por tanto, la frontera de P es ajena a L. Como L es un continuo, se tiene que $L \subset P$ o $L \cap P = \emptyset$, contradiciendo los hechos: $r \in L - P$ y $q \in L \cap P$.

En consecuencia, $L \subset A \subset \bigcup_{k=1}^{2^{n_0-1}} S_k$. □

Para verificar la irreducibilidad de B, donde B es el continuo de Knaster, entre (0,0) y cualquier punto de $B-S$, supongamos que existe un subcontinuo propio L de B tal que $(0,0) \in L$ y que $y \in L$, para algún punto $y \in B - S$. Entonces, $L \cap S \neq \emptyset$ y $L \cap (B - S) \neq \emptyset$, de donde $L \not\subset S$. Esto contradice el Lema 2.31. Por tanto, podemos concluir que ningún subcontinuo propio L de B conteniendo a (0,0) e intersectando a $B-S$ puede existir. Como consecuencia de lo anterior, tenemos que B es irreducible entre (0,0) y cada punto de $B - S$, lo que prueba la indescomponibilidad de B.

La Figura 2.4 muestra un bosquejo de la manera en que se va construyendo el continuo de Knaster, en el plano cartesiano. El continuo de Knaster es conocido como el Arcoiris de Knaster.

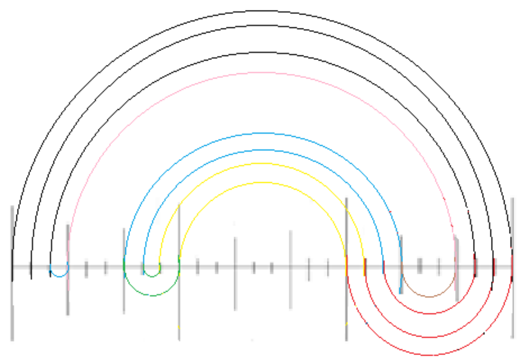

Figura 2.4: Arcoiris de Knaster

Bibliografía

[1] C. O. Christenson, William L. Voxman, *Aspects of topology,* Monographs, Textbooks, and Lecture Notes, Vol. 39, Marcel Dekker, inc. New York and Basel. 1977.

[2] J. Dugundji, *Topology,* Allyn and Bacon, 1966.

[3] F. L. Jones, *Historia y desarrollo de la teoría de los continuos indescomponibles,* Aportaciones Matemáticas No. 27, Sociedad Matemática Mexicana, 2004.

[4] J. R. Munkres, *Topology,* Second Edition, Massachusetts Institute of Technology, 2009.

[5] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introducction,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Mercel Dekker, New York, 1992.

Índice alfabético