



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

*Transformada de Fourier y su aplicación en
procesamiento digital de imágenes*

TESIS

para obtener el Título de

Licenciada en Matemáticas Aplicadas

presenta

Flor Angelica Trinidad Torres

Directores de Tesis

Dra. Areli Montes Pérez

M.C. Pedro Tolentino Eslava

*Puebla, Pue.
Diciembre 2017*

El análisis matemático es tan extenso como la naturaleza misma; define todas las relaciones sensibles, mide el tiempo, los espacios, las fuerzas, las temperaturas: su atributo principal es la claridad; no tiene en absoluto signos para expresar nociones confusas. Relaciona los fenómenos más diversos y descubre las analogías secretas que los une.

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

Dedicatoria

A mis padres.

Agradecimientos

*Pues él da la sabiduría
y de su boca sale
la inteligencia y la ciencia.*

Proverbios 2,6

Antes que nada, quiero agradecer a Dios, porque con su gracia e infinito poder, me ayuda a salir adelante en cada momento de mi vida. A mis padres, mis super héroes Gabino y Ciria, por ser el pilar que me sostiene y mi motivación para no desistir del ámbito profesional. A mi hermano consentido, Juan Manuel, por apoyarme en cada decisión que tomo por muy descabellada que parezca. A mi cuñada Ariana y a mis sobrinos José Armando y Emmanuel por llenarme de alegría con su llegada. A esa persona que apareció cuando menos lo esperaba y ahora forma parte de mis planes, Jorge.

A todas aquellas personas que de alguna forma me han apoyado durante mis estudios, amigos, compañeros y maestros, de manera especial a mis asesores de tesis, Dra. Areli Montes Pérez y M.C. Pedro Tolentino Eslava, por guiarme durante el trabajo de investigación. Al Dr. Julián Torres Jácome y la Dra. Alondra Albarado Ibañez pertenecientes al Instituto de Fisiología de la BUAP, por habernos proporcionado las imágenes para dicho trabajo.

A los miembros del Jurado, Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna, Dr. Carlos Guillén Galván, Dr. Julián Torres Jácome y Dra. Alondra Albarado Ibañez por dedicar un poco de su tiempo para revisar mi tesis, por las correcciones y aportaciones de cada uno de ellos.

Finalmente, agradezco el apoyo parcial de Beca-Tesis, a Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado (VIEP) de la BUAP, con número de clave MOPA-EXC17-G.

Introducción

“La mejor estructura, no garantizará los resultados ni el rendimiento. Pero la estructura equivocada es una garantía de fracaso”.

Peter Drucker

La Transformada de Fourier¹ (TF, como nos referiremos a ella), es una herramienta muy poderosa que tiene una gran variedad de aplicaciones, en diversas ramas de la matemática y la física matemática, desde la teoría de números y geometría hasta mecánica cuántica, así como en otras áreas de la ciencia e ingeniería tales como procesamiento de señales (electrónica), comunicaciones, óptica, procesamiento de imágenes y medicina, por mencionar algunos.

Históricamente, las series de Fourier aparecen de forma natural en Astronomía, de hecho, Neugebauer (1952) descubrió que los Babilonios utilizaron una forma primitiva de ellas en la predicción de ciertos eventos celestiales. En 1747, la historia de las series de Fourier inicia de manera formal, con D’Alembert y su tratado de las oscilaciones de las cuerdas del violín. Años más tarde, fue Fourier quien perfeccionó las ideas de Bernoulli y las aplicó en 1807, en el estudio del problema de la conducción de calor. Esto quedó plasmado por escrito en el libro clásico *“Théorie analytique de la Chaleur”*, publicado en 1822. Los razonamientos realizados por Fourier en dicho libro, plantearon de manera inmediata numerosas controversias y cuestiones que han tenido una influencia significativa en la historia de las Matemáticas [1].

Por otro lado, hoy en día, existe una inmensa gama de áreas donde se utiliza el Procesamiento Digital de Imágenes (PDI), como telecomunicaciones, medicina, química, astronomía, industria, litografía, microscopía, microscopía de fluorescencia y microscopía de luz, entre otros. El interés en el procesamiento digital de imágenes se basa en extraer información contenida de una imagen. La Transformada de Fourier juega un papel muy importante en el PDI, ya que es una herramienta que nos permite obtener la representación de información en el espacio de frecuencias y aplicando un operador en éste dominio, se puede operar sobre la imagen, para detectar y realzar bordes, eliminar ruido, etc. [2, 3].

¹En algunos textos se encuentra como *FT*, por sus siglas en inglés (Fourier Transform)

0.1. Objetivos de la tesis

Los objetivos son los siguientes:

1. Presentar una revisión del estado del arte de los antecedentes de la Transformada de Fourier y la Transformada Inversa de Fourier.
2. Desarrollar de forma general algunas aplicaciones de la Transformada de Fourier.
3. Mostrar la aplicación de la Transformada Fourier en el Procesamiento Digital de Imágenes, fijando nuestra atención en imágenes de microscopía de fluorescencia.

0.2. Contexto del trabajo

El presente trabajo, forma parte de una línea de investigación del grupo de óptica, de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM), de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP). El objetivo general es realizar una revisión de los antecedentes matemáticos de lo que hoy se conoce como la transformada de Fourier, así como su aplicación en el Procesamiento Digital de Imágenes de microscopía de fluorescencia. La presente línea de investigación ha sido parcialmente apoyada por Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado (VIEP) de la BUAP, con número de clave MOPA-EXC17-G.

0.3. Contenido de la tesis

El desarrollo de la escritura de la presente tesis se divide en 5 capítulos, se propone el estudio del estado del arte de la Transformada de Fourier, desde sus antecedentes históricos, partiendo de series de Fourier, funciones de cuadrado sumable y espacios de Hilbert, hasta lo que hoy se conoce como la Transformada de Fourier, así como sus aplicaciones en distintos campos, principalmente la aplicación en PDI.

En el primer capítulo se presenta una breve reseña sobre la vida de Fourier, así como, el origen de los métodos de Fourier, partiendo desde el Siglo XVIII hasta lo que hoy se conoce como series de Fourier.

En el segundo capítulo se muestra la definición formal de la Transformada de Fourier, Transformada inversa de Fourier (TIF) y sus propiedades básicas en una y dos variables.

En el tercer capítulo, se mencionan de forma general algunas de las aplicaciones de la Transformada de Fourier y se hace énfasis en el PDI como una aplicación.

En el cuarto capítulo se muestran resultados numéricos de imágenes de microscopía de fluorescencia, procesadas numéricamente aplicando un filtro pasa banda.

En el quinto capítulo se mencionan las conclusiones generales.

Se muestra un índice general, un índice de figuras y las citas bibliográficas se denotan con un número encerrado entre corchetes (al final de la tesis se muestra una lista con los datos completos de la referencia correspondiente).

Índice general

Introducción	VII
0.1. Objetivos de la tesis	VIII
0.2. Contexto del trabajo	VIII
0.3. Contenido de la tesis	VIII
Índice general	XI
Índice de figuras	XIII
1. Origen de los Métodos de Fourier	1
1.1. ¿Quién fue Fourier?	1
1.2. Un poco de Historia sobre series de Fourier	3
1.2.1. La cuerda vibrante	3
1.2.2. Difusión del calor	7
1.3. Presentación actual de series de Fourier	8
1.3.1. Espacio de funciones de cuadrado integrable L^2	9
1.3.2. Serie de Fourier	12
1.4. Paso de la Serie a la Transformada de Fourier	13
2. La Transformada de Fourier en el espacio L^2	15
2.1. Transformada de Fourier en una variable	15
2.2. Propiedades de la Transformada de Fourier	16
2.3. Teorema de Convolución	17
2.3.1. Convolución en la frecuencia	17
2.3.2. Convolución en el tiempo	18
2.4. Teorema de Correlación	18
2.5. TF y TIF en dos variables	18
3. Aplicaciones de la Transformada de Fourier	21
3.1. Introducción	21
3.2. Algunas aplicaciones de la Transformada de Fourier	21
3.3. Procesamiento Digital de Imágenes (PDI)	23
3.3.1. Formación de imágenes	24
3.3.2. Filtrado de una imagen	25
3.4. Microscopía de Fluorescencia	27

3.4.1. Tipos de Microscopía	27
4. Resultados Numéricos	29
4.1. Algoritmo	29
4.2. PDI de Microscopía de Fluorescencia	31
5. Conclusiones generales	51
Bibliografía	53

Índice de figuras

1.1. Cuerda vibrante	3
1.2. Movimiento de la cuerda	5
3.1. Sistema formador de imágenes $4f$	24
3.2. Filtro pasa banda	26
4.1. Código de Matlab para procesar imágenes	31
4.2. Imágenes de Microscopía de Fluorescencia	32
4.3. Procesamiento de la imagen (a) con el filtro $r_a = 30/255, r_b = 10/255$	33
4.4. Procesamiento de la imagen (a) con el filtro $r_a = 60/255, r_b = 40/255$	34
4.5. Procesamiento de la imagen (a) con el filtro $r_a = 110/255, r_b = 5/255$	35
4.6. Procesamiento de la imagen (a) con el filtro $r_a = 115/255, r_b = 2/255$	36
4.7. Procesamiento de la imagen (b) con el filtro $r_a = 50/255, r_b = 10/255$	37
4.8. Procesamiento de la imagen (b) con el filtro $r_a = 90/255, r_b = 10/255$	38
4.9. Procesamiento de la imagen (b) con el filtro $r_a = 120/255, r_b = 70/255$	39
4.10. Procesamiento de la imagen (b) con el filtro $r_a = 125/255, r_b = 10/255$	40
4.11. Procesamiento de la imagen (c) con el filtro $r_a = 80/255, r_b = 5/255$	41
4.12. Procesamiento de la imagen (c) con el filtro $r_a = 100/255, r_b = 40/255$	42
4.13. Procesamiento de la imagen (c) con el filtro $r_a = 120/255, r_b = 12/255$	43
4.14. Procesamiento de la imagen (c) con el filtro $r_a = 127/255, r_b = 1/255$	44
4.15. Procesamiento de la imagen (d) con el filtro $r_a = 34/255, r_b = 3/255$	45
4.16. Procesamiento de la imagen (d) con el filtro $r_a = 100/255, r_b = 30/255$	46
4.17. Procesamiento de la imagen (d) con el filtro $r_a = 120/255, r_b = 5/255$	47
4.18. Procesamiento de la imagen (d) con el filtro $r_a = 125/255, r_b = 25/255$	48

Capítulo 1

Origen de los Métodos de Fourier

El propósito de este capítulo es hacer una revisión general de los antecedentes de la Transformada de Fourier, a partir de series trigonométricas. Daremos inicio, mostrando una breve reseña sobre la vida de Fourier, basada en los textos [4, 5, 6] y [7].

1.1. ¿Quién fue Fourier?

Jean Baptiste Joseph Fourier matemático y físico francés, nació en Auxerre (Francia) el 21 de marzo de 1768, fué el noveno hijo de los doce hijos que tuvo su padre (sastre) en su segundo matrimonio. Empezó sus estudios en la *Escuela de Pallais*, donde estudió latín y francés con gran aprovechamiento. Su madre murió cuando él tenía nueve años y al siguiente año murió su padre. Quedando huérfano, Fourier fue recomendado al obispo de Auxerre, quien lo envió al Colegio militar local regido por los benedictinos, donde mostró interés por la literatura y más tarde por las matemáticas.

A la edad de 12 años escribía los magníficos sermones que pronunciaban los benedictinos, a los 14 años ya había completado el estudio de los seis volúmenes del *Cours de Matemáticas de Bezout* y a los 15 años recibió el primer premio por su estudio de *Mécanique en général de Bossut*.

Siempre había deseado ser soldado, pero sabía que los buenos cargos no eran concedidos a los hijos de los sastres, así que en 1787 ingresó en la *Abadía de San Benito* para hacer el noviciado con la idea de hacerse religioso. Más tarde, debatiendo entre su amor por las matemáticas y sus ideas religiosas, en 1789 Fourier no tomó los votos y dejó el monasterio. Ocupando al año siguiente un puesto de profesor en la *École Royale Militaire de Auxerre*, donde había estudiado con anterioridad.

En 1793, poco tiempo después del comienzo de la Revolución Francesa, se involucró en política, uniéndose al Comité Revolucionario local, con gran entusiasmo acerca de las ideas revolucionarias de libertad. Fue arrestado en 1794 como

CAPÍTULO 1. ORIGEN DE LOS MÉTODOS DE FOURIER

1.1. ¿QUIÉN FUE FOURIER?

consecuencia de sus acciones políticas y estuvo en prisión a punto de enfrentarse a la guillotina. Al final de ese mismo año, gracias a los cambios políticos, Fourier quedó en libertad.

En 1795 fue admitido en la *École Normale de París*, donde fue alumno de *Lagrange y Laplace*. En ese mismo año ocupó una cátedra en la prestigiosa *École Polytechnique de París*, en la que duró poco tiempo ya que, en 1798 Fourier se incorporó a la Armada de Napoleón como un consejero científico en la invasión de Egipto. Allí creó el *Instituto de El Cairo*, siendo unos de los doce miembros de la división matemática. Además, tuvo una destacada actividad tanto científica como administrativa (fue nombrado gobernador del Bajo Egipto). La expedición volvió a Francia en 1801, militarmente derrotada, pero fruto de su trabajo científico y cultural fue la monumental obra *Description de l'Égypte*, comenzada a publicar en 1809.

Fourier volvió a París en 1801 y retomó su puesto como profesor de Análisis en la *École Polytechnique*. Sin embargo, Napoleón (por aquel entonces con poder absoluto en Francia) le nombró Prefecto (gobernador) del Departamento de Isère, cuya capital es Grenoble. Fue durante este tiempo en Grenoble cuando Fourier hizo su contribución matemática sobre la propagación del calor que presentó a la Academia de Ciencias en 1807 y la cual desató grandes controversias. Fourier, no volvió a ser profesor, pero siguió trabajando en investigaciones científicas mientras ocupaba su cargo.

Dejó la prefectura de *Isère* en 1814 y fue prefecto del departamento de *Rhône* durante unos meses, pero los cambios políticos le hicieron abandonar sus cargos y se trasladó nuevamente a París. Allí trabajó como director de la Oficina Estadística del Sena. En 1817 fue elegido miembro de la Academia de Ciencias en la sección de Física y en 1822, el mismo año en que publicó su famoso libro *Théorie Analytique de la Chaleur*, fue nombrado secretario perpetuo de la Academia, lo que le permitió hacer pública su memoria premiada de 1811.

Durante sus ocho últimos años en París reanudó sus investigaciones matemáticas y publicó una serie de documentos, algunos en matemáticas puras y otros sobre temas de matemáticas aplicadas. Su influencia en el mundo científico francés había crecido notablemente. Él fue el que descubrió las series matemáticas y el teorema integral que llevan su nombre. En 1826 fue elegido miembro de la Academia Francesa. Falleció en París el 16 de marzo 1830.

El trabajo de Fourier proporcionó un gran impulso para posteriores investigaciones sobre series trigonométricas y la teoría de funciones de variable real.

1.2. Un poco de Historia sobre series de Fourier

Las series trigonométricas surgieron en la Matemática en el siglo *XVIII*, en relación con el estudio de las pequeñas oscilaciones de medios elásticos. Más precisamente, con el siguiente problema que consiguió la atención y el esfuerzo de numerosos físicos y matemáticos del momento. Para el desarrollo de esta sección, nos basamos en los textos [3, 8] y [9].

1.2.1. La cuerda vibrante

Fue *Brook Taylor* (1685 – 1731) quien, en 1715, propuso, en su obra *Methodus incrementorum directa et inversa*, el problema de la cuerda vibrante y a partir del desarrollo del Cálculo en el siglo *XVIII*, este problema se había convertido en la principal herramienta para estudiar y modelizar la Naturaleza. Se trata de determinar el movimiento de una cuerda elástica, así como el tiempo de vibración de la misma, si esta es tensada mediante la aplicación de cierta fuerza externa y luego se deja libre. Este problema puede describirse en la situación más elemental de la siguiente forma:

Supongamos que una cuerda flexible se estira hasta quedar tensa y que sus extremos se fijan (por conveniencia) en los puntos $(0, 0)$ y $(\pi, 0)$ del eje de abscisas. Luego, se tira de la cuerda hasta que ésta adopte la forma de una curva dada por la ecuación $y = f(x)$ y se suelta (ver Figura 1.1). La cuestión es: ¿Cuál es el movimiento descrito por la cuerda? Si los desplazamientos de ésta se hallan siempre en un mismo plano y el vector del desplazamiento es perpendicular, en cualquier momento, al eje de las abscisas, dicho movimiento vendrá dado por una función $u(x, t)$ donde $u(x, t)$ representará el desplazamiento vertical de la cuerda, en la coordenada x ($0 \leq x \leq \pi$) y el tiempo t ($t \geq 0$). Así, el problema que se plantea es obtener $u(x, t)$ a partir de $f(x)$.

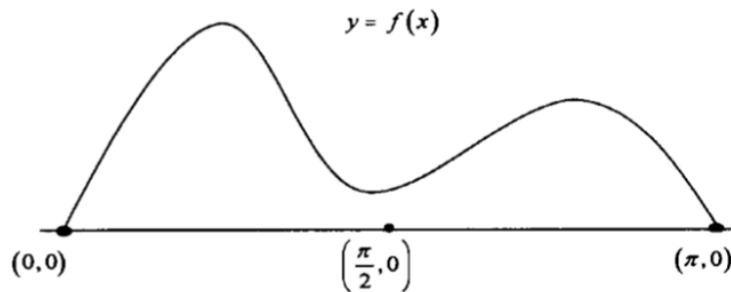


Figura 1.1: Cuerda vibrante

CAPÍTULO 1. ORIGEN DE LOS MÉTODOS DE FOURIER

1.2. UN POCO DE HISTORIA SOBRE SERIES DE FOURIER

Periodo de D'Alembert-Euler-Bernoulli.

El primer matemático que elaboró un modelo apropiado para el problema anterior fue Jean Le Rond D'Alembert¹, quien en 1747 demostró (haciendo referencia a vibraciones pequeñas) que la función u debe satisfacer las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= 0, & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 & t \geq 0\end{aligned}\tag{1.1}$$

La primera condición en (1.1) es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden, conocida como **Ecuación de onda** (o *ecuación del cable*, como se refieren a ella Hodgkin y Huxley en [10]). La segunda relación representa la posición inicial de la cuerda, mientras que la tercera significa que la velocidad inicial es cero (debido a que después de ser llevada a la posición $f(x)$, la cuerda se suelta). La última relación expresa el hecho de que, para cualquier tiempo, los extremos de la cuerda se mantienen fijos.

D'Alembert también demostró que la solución de (1.1) está dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\tilde{f}(x+t) + \tilde{f}(x-t)]\tag{1.2}$$

donde \tilde{f} es “una extensión conveniente de la función f ”. De manera más precisa, y con el lenguaje de hoy en día, el *Teorema de D'Alembert* (Teorema (1.1)) confirmó que la posición futura de la cuerda está determinada por su posición inicial.

Teorema 1.1. *Sea f en $C^2[0, \pi]$ tal que $f(0) = f(\pi) = f''(0^+) = f''(0^-) = 0$ entonces (1.1) tiene una única solución $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ donde $\Omega = (0, \pi) \times (0, +\infty)$. Además, u viene dada por la fórmula (1.2) donde \tilde{f} es la extensión a \mathbb{R} (conjunto de los números reales), impar y 2π -periódica de la función f (ver Figura 1.2).*

¹Científico y pensador francés de la Ilustración (1717 – 1783). Sus investigaciones en matemáticas, física y astronomía le llevaron a formar parte de la Academia de Ciencias con sólo 25 años de edad.

CAPÍTULO 1. ORIGEN DE LOS MÉTODOS DE FOURIER
1.2. UN POCO DE HISTORIA SOBRE SERIES DE FOURIER

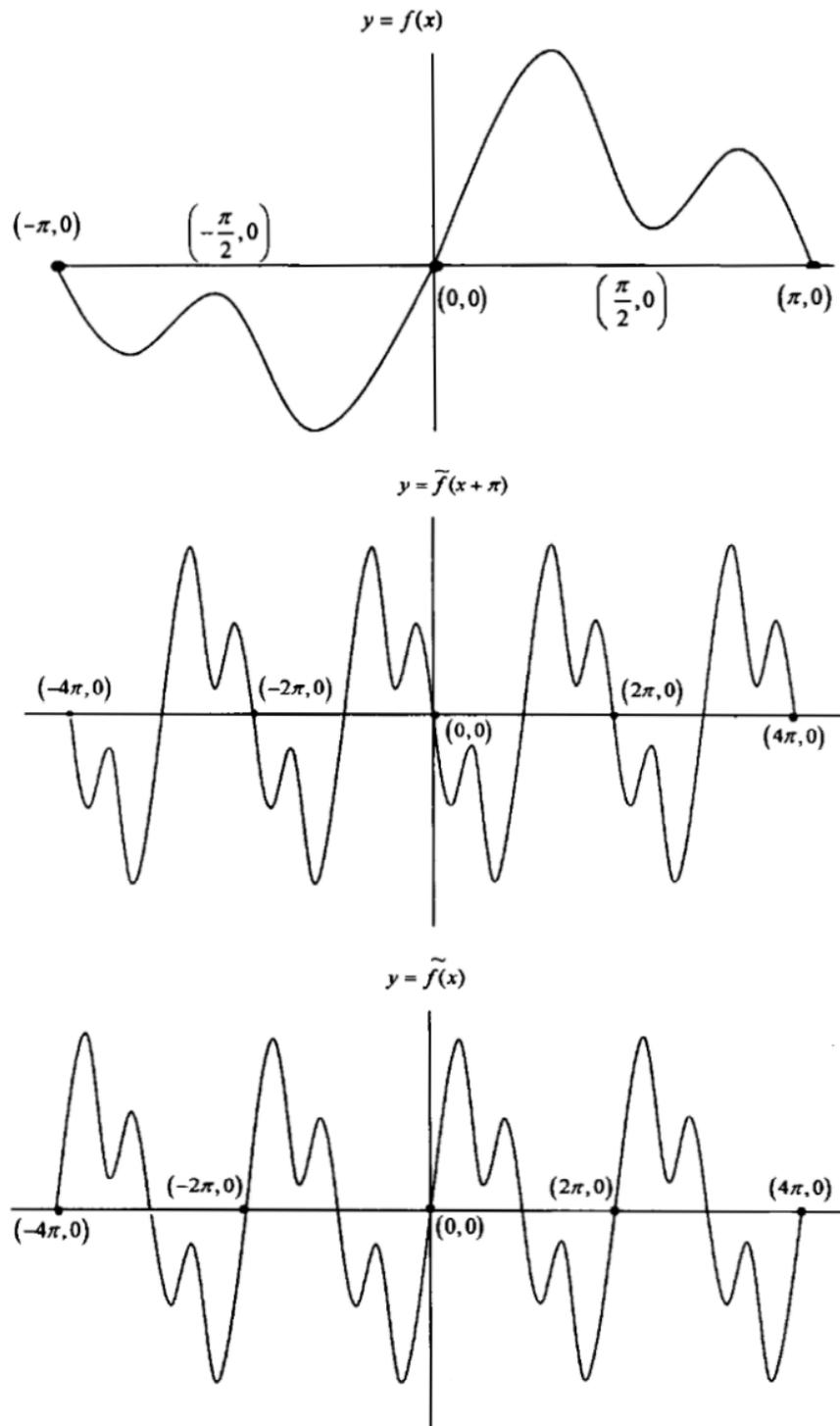


Figura 1.2: Movimiento de la cuerda

CAPÍTULO 1. ORIGEN DE LOS MÉTODOS DE FOURIER

1.2. UN POCO DE HISTORIA SOBRE SERIES DE FOURIER

La fórmula (1.2) también fue demostrada por Leonhard Euler², quien difería de D'Alembert principalmente en el tipo de funciones iniciales f que deberían ser consideradas. De hecho, estas diferencias pueden considerarse como unas de las primeras manifestaciones escritas sobre los problemas que han llevado consigo la definición de la noción de “función”. Mientras que para D'Alembert, f debería tener una fórmula concreta o expresión analítica, Euler defendía que no había ninguna razón física para no admitir como posiciones iniciales f a aquellas, que en diferentes partes de $[0, \pi]$ viniesen definidas por expresiones distintas, siempre que al considerarlas unidas la posición inicial resultante tuviese una aproximada regularidad. En resumen, Euler defendía que cualquier gráfica podía considerarse como curva inicial, tesis que no era compartida por D'Alembert.

Otra manera de obtener la solución de (1.1), completamente distinta a la anterior, fue dada por Daniel Bernoulli³ en 1753. La idea clave es obtener la solución de (1.1) mediante superposición de ondas sencillas, concretamente las que son de la forma:

$$u_n(x, t) = \sin(nx) \cos(nt), \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.3)$$

donde \mathbb{N} es el conjunto de los números naturales y para cada tiempo t fijo, la función (1.3) es un múltiplo de la función $\sin(nx)$ que se anula exactamente en $n - 1$ puntos del intervalo $(0, \pi)$.

¿Cómo concibió Bernoulli la idea anterior? Parece ser que una posibilidad es que usase sus conocimientos musicales, que matemáticamente expresaban que la solución de (1.1) debe poder expresarse de la forma:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \cos(nt) \quad (1.4)$$

donde los coeficientes a_n deben de elegirse de tal manera que satisfagan (1.1). Sin embargo, hay otra manera de llegar a la expresión anterior (que es posible que fuese también usada por Bernoulli). El punto de partida de este segundo planteamiento puede ser la siguiente pregunta elemental: ¿Cuáles son las soluciones más sencillas posibles de (1.1)?

Al ser la solución de (1.1) una función $u(x, t)$ de dos variables, tales soluciones han de ser producto de una función de x por una función de t ; es decir, $u(x, t) = X(x)T(t)$, o lo que es lo mismo, **funciones con variables separadas**. Derivando y sustituyendo de manera formal en (1.1), se obtienen los dos problemas siguientes de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad x \in (0, \pi) \quad y \quad X(0) = X(\pi) = 0 \quad (1.5)$$

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0 \quad t > 0 \quad (1.6)$$

² Matemático y físico suizo (1707 – 1783).

³ Matemático, estadístico, físico y médico suizo (1700 – 1782).

CAPÍTULO 1. ORIGEN DE LOS MÉTODOS DE FOURIER

1.2. UN POCO DE HISTORIA SOBRE SERIES DE FOURIER

En la expresión anterior, λ hace el papel de parámetro real.

Bernoulli publicó una memoria donde afirmaba que el desplazamiento $u(x, t)$ de la cuerda, con velocidad inicial $u_t(x, 0) = 0$, es expresable en la forma (1.4), para $t = 0$, la relación se reduce a

$$u(x, 0) = \sum_1^{\infty} a_n \sin (nx),$$

y por tanto,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin (nx), \quad \forall x \in [0, \pi], \quad (1.7)$$

para “una adecuada elección de los coeficientes a_n ”.

Sin embargo, a pesar de su publicación, las ideas de Bernoulli no tuvieron aceptación en su tiempo. En particular, recibió duras contestaciones por parte de D’Alembert y Euler, quienes no admitían que una función con una expresión analítica pudiera representarse en la forma (1.7) (D’Alembert) y menos aún cualquier función (Euler) [3].

1.2.2. Difusión del calor

Las ideas de Bernoulli fueron tomadas en cuenta, 54 años más tarde, por Fourier, quien se interesó por la teoría del calor en los cuerpos sólidos.

Periodo Fourier.

En 1807, Fourier envió un artículo a la Academia de Ciencias de París que trataba sobre la difusión del calor. Más concretamente,

Fourier consideró una varilla delgada de longitud dada, digamos π cuyos extremos se mantienen a 0° centígrados y cuya superficie lateral está aislada. Si la distribución inicial de temperatura en la varilla viene dada por una función $f(x)$ (se supone que la temperatura de la varilla en cada sección transversal de la misma es constante) ¿Cuál será la temperatura de cualquier punto x de la varilla en el tiempo t ?

Suponiendo que la varilla sigue condiciones físicas apropiadas, Fourier demostró que si $u(x, t)$ representa la temperatura de la varilla en la sección x y en el tiempo t , entonces la función u debe satisfacer:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, & 0 < x < \pi, 0 < t < T \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, & 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq \pi \end{aligned} \quad (1.8)$$

CAPÍTULO 1. ORIGEN DE LOS MÉTODOS DE FOURIER

1.3. PRESENTACIÓN ACTUAL DE SERIES DE FOURIER

la primera condición es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden, conocida con el nombre de **Ecuación del Calor**. La segunda significa que la temperatura en los extremos de la varilla se mantiene en 0° centígrados y la tercera representa la distribución inicial de temperatura en la varilla considerada [9].

Partiendo de las ideas de Bernoulli (para la ecuación de ondas) Fourier buscó las soluciones más sencillas que pueden presentar la ecuación del calor: aquellas que son de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$. Ambos se preguntaron, ¿será posible elegir adecuadamente los coeficientes a_n de tal forma que la única solución de (1.8) sea:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 t) \sin(nx) \quad (1.9)$$

Fourier afirmó en su artículo que si era posible y a diferencia de Bernoulli, obtuvo la fórmula

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi) \sin(n\xi) d\xi, \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.10)$$

para el cálculo de los coeficientes a_n llamados desde entonces *coeficientes de Fourier*.

Observese que se tiene la misma cuestión para dos problemas completamente diferentes: el de la cuerda vibrante (1.1) y el de la conducción de calor (1.8).

El artículo de Fourier fue estudiado por Lagrange, Laplace y Legendre y rechazado por la Academia Francesa, básicamente por la manera en que dedujo la ecuación del calor y por la falta de rigor en la obtención de sus conclusiones. Debido a que los miembros de tan prestigiosa institución estaban convencidos de la importancia que tenían los problemas relacionados con la propagación del calor, en el año 1811 el *Institut de France* convocó un concurso cuyo objetivo era “proporcionar una teoría matemática de las leyes de propagación del calor y comparar esta teoría con experimentos”. El ganador del premio fue Fourier, pero a pesar de ello, siguió siendo criticado por los miembros de la Academia, por lo que, no pudo publicar su trabajo en la *célebre serie “Mémoires”* de la Academia Francesa.

Fourier siguió trabajando en el tema, acumuló evidencias empíricas a favor de su tesis y en 1822 publicó la clásica obra *Théorie Analytique de la Chaleur* donde incorporó parte de su artículo escrito en 1812, prácticamente sin cambio [3]. En reconocimiento a la tenacidad pionera de Fourier, es por lo que este tipo de series se conocen como *series de Fourier*.

1.3. Presentación actual de series de Fourier

En la actualidad, la teoría de series de Fourier puede presentarse usando los conceptos y métodos de Análisis Funcional. Más concretamente está íntimamente relacionado con la Integral de Lebesgue, los espacios de Hilbert (extensión a dimensión infinita de espacio euclídeo) y el espacio de funciones cuadrado integrable. Fue Hilbert quien identificó una función dada f con sus coeficientes de Fourier $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$.

CAPÍTULO 1. ORIGEN DE LOS MÉTODOS DE FOURIER

1.3. PRESENTACIÓN ACTUAL DE SERIES DE FOURIER

Estos coeficientes satisfacen, en general, la condición $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 < +\infty$ (si f es de cuadrado integrable). Hilbert introdujo además el espacio l^2 de sucesiones de números reales a_n tales que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ es convergente. Posteriormente, Riesz y Fischer demostraron la existencia de una aplicación biyectiva entre el conjunto de las funciones de cuadrado integrable $L^2(a, b)$ (en un intervalo finito dado (a, b)) y el conjunto l^2 (a cada función se le hace corresponder sus coeficientes de Fourier) [9]. A continuación se exponen algunas de las ideas fundamentales.

1.3.1. Espacio de funciones de cuadrado integrable L^2

Para poder hablar del espacio L^2 , definiremos algunos conceptos necesarios, basándonos en [1, 4, 9, 11, 12] y [13].

Definición 1.1. Sea X un espacio vectorial sobre un campo K . Un **producto interno (o producto escalar)** en X es una asociación tal que a cada par de elementos de x y y en X se le asocia un escalar,

$$\begin{aligned} \langle, \rangle : X \times X &\rightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\rightarrow \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

que satisface:

PI.1 $\forall x, y \in X : \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

PI.2 $\forall x, y \in X$ y para todo escalar $\alpha : \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle$.

PI.3 $\forall x, y, z \in X : \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

PI.4 Si $x \neq 0$, se tiene $\langle x, x \rangle > 0$

En el caso en que $K = \mathbb{R}$, el espacio X se denomina *espacio euclídeo real*. En este caso, la expresión $\overline{\langle x, y \rangle}$ coincide, obviamente con la expresión $\langle x, y \rangle$ y el axioma PI,1 adquiere una forma más sencilla: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

Si $K = \mathbb{C}$, el espacio X se llama *espacio complejo*.

Se dice que los elementos $x, y \in X$ son *ortogonales (o perpendiculares)* si $\langle x, y \rangle = 0$.

Ejemplo 1. Sea $X = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua} \}$, X es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Definimos $\langle, \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt \tag{1.11}$$

para cada $f, g \in X$.

Definición 1.2. Un espacio vectorial X dotado de un producto escalar, es un **espacio prehilbertiano** [4].

CAPÍTULO 1. ORIGEN DE LOS MÉTODOS DE FOURIER
1.3. PRESENTACIÓN ACTUAL DE SERIES DE FOURIER

Definición 1.3. Sea X un espacio vectorial con producto interno. Una **norma** en X es una función $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $\|x\| = (\langle x, x \rangle)^{1/2}$, $x \in X$, que satisfice:

N.1 $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in X$ y $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

N.2 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$ (desigualdad triangular)

N.3 $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $x \in X$

Además, podemos definir una distancia en X haciendo,

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

Recordemos que todo producto escalar verifica la **desigualdad de Cauchy-Schwarz** [12]:

$$\|(x, y)\| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x, y \in X.$$

teniendo lugar la igualdad cuando, y sólo cuando, los vectores x y y son linealmente independientes.

Definición 1.4. Si en X existen n vectores no nulos ortogonales, ellos constituyen una base ortogonal del espacio X . Más aún, si la norma de cada uno de estos vectores es igual a 1, a esta base se le llama ortonormal.

Definición 1.5. $\{x_n\}$ es convergente a x si $\forall \varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geq n_0$, entonces $\|x_n - x\| < \varepsilon$

Definición 1.6. Diremos que $(X, \|\cdot\|)$ es un **espacio normado completo** (o espacio de Banach), si cualquier sucesión de Cauchy en X es convergente en X .

Definición 1.7. Un **espacio de Hilbert** es un espacio vectorial X dotado de un producto escalar $\langle x, y \rangle$ y que es completo para la norma $\|x\|$ [12]. Es decir, si $(X, \|\cdot\|)$, donde $\|\cdot\|$ indica la norma anterior definida a partir del producto escalar, es un espacio normado completo, diremos que $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio de Hilbert real [9].

Definición 1.8. $L^2(a, b)$ es el conjunto de funciones medibles $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, para los que la integral $\int_a^b f^2(x) dx$ existe y se define como

$$L^2(a, b) = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible} : \int_a^b f^2(x) dx < +\infty \right\}$$

Si el lector desea estudiar a profundidad este tipo de funciones, puede consultar [13].

$L^2(a, b)$ es un espacio vectorial real, con las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un número real por una función. Además, su dimensión es

CAPÍTULO 1. ORIGEN DE LOS MÉTODOS DE FOURIER
1.3. PRESENTACIÓN ACTUAL DE SERIES DE FOURIER

infinita; es decir, es posible encontrar subconjuntos de $L^2(a, b)$ que sean linealmente independientes y conteniendo infinitos elementos.

Esto transforma al espacio $L^2(a, b)$ en un espacio prehilbertiano [12]. En definitiva tenemos que $L^2(a, b)$ con el producto escalar (1.11) es un **Espacio de Hilbert Real de dimensión infinita**.

Lebesgue probó que el conjunto de funciones:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(nx), n \in \mathbb{N} \right\} \quad (1.12)$$

es una base de $L^2(-\pi, \pi)$.

Ahora, nos concentraremos en el espacio $L^2(S^1)$, donde S^1 denota la circunferencia unidad. El espacio S^1 puede interpretarse como el intervalo unidad $0 \leq x \leq 1$, con los extremos 0 y 1 identificados. Las funciones definidas en S^1 pueden verse como funciones de variable real periódicas de período 1, i.e., funciones que satisfacen $f(x+1) = f(x)$, para $0 \leq x < 1$. El espacio $L^2(S^1)$ es el espacio de Hilbert de todas las funciones complejas medibles f definidas en S^1 que satisfacen

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |f|^2 \right)^{1/2} < \infty \quad (1.13)$$

En este espacio, el producto interno está definido por

$$(f, g) = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$$

El principal resultado referente a este espacio, es el teorema:

Teorema 1.2. *La familia de funciones definidas por*

$$e_n(x) = e^{2\pi i n x} = \cos(2\pi n x) + i \sin(2\pi n x)$$

forman una base ortonormal para $L^2(S^1)$. En consecuencia, toda función $f \in L^2(S^1)$ puede ser expandida mediante una serie de Fourier en la forma

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e_n$$

con coeficientes

$$\hat{f}(n) = (f, e_n) = \int_0^1 f \overline{e_n} = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx.$$

CAPÍTULO 1. ORIGEN DE LOS MÉTODOS DE FOURIER
1.3. PRESENTACIÓN ACTUAL DE SERIES DE FOURIER

1.3.2. Serie de Fourier

Definición 1.9. Si $f \in L^2(-\pi, \pi)$, entonces, se define la **serie de Fourier** de f respecto del sistema ortonormal (1.12) como

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (1.14)$$

con

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ b_n &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Cada uno de los a_n y b_n se llaman **Coefficientes de Fourier** de la función f .

A continuación se verá otra manera de representar la serie de Fourier que será de utilidad en el momento de introducir la transformada de Fourier.

Forma compleja de la Serie de Fourier

Haciendo uso de las identidades trigonométricas

$$\begin{aligned} \cos nx &= \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) \\ \sin nx &= \frac{1}{2}i(e^{inx} - e^{-inx}) \end{aligned}$$

tenemos que la Serie de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (1.15)$$

se convierte en

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (1.16)$$

donde

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n).$$

CAPÍTULO 1. ORIGEN DE LOS MÉTODOS DE FOURIER

1.4. PASO DE LA SERIE A LA TRANSFORMADA DE FOURIER

A la forma (1.16) se le conoce como la **Serie Compleja de Fourier de f** .

La Serie de Fourier constituye una poderosa herramienta en el análisis frecuencial de funciones periódicas, pero para muchos problemas prácticos las funciones son no-periódicas, y es conveniente hacer un análisis del mismo tipo (frecuencial) para tal tipo de funciones.

1.4. Paso de la Serie a la Transformada de Fourier

Formalmente se puede deducir la expresión de la Transformada de Fourier a partir de la serie, haciendo tender a infinito el periodo T .

Supongamos que $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función periódica⁴ de periodo T , sabemos que podemos expresar f como suma de senos y cosenos, como se muestra en la ecuación (1.14) pero también podemos expresarla como una serie de Fourier en forma compleja:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{in\omega_0 t}, \quad (1.17)$$

donde

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\omega_0 x} dx \quad (1.18)$$

Tomando en cuenta que $\omega_0 = 2\pi/T$ y sustituyendo (1.18) en (1.17), se tiene

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\omega_0 x} dx \right] e^{in\omega_0 t} \quad (1.19)$$

Hemos utilizado la variable comodín x en la integral, para evitar confusión con t .

Puesto que $1/T = \omega_0/2\pi$, la ecuación (1.19) se puede expresar como

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left[\frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\omega_0 x} dx \right] e^{in\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\omega_0 x} dx \right] \omega_0 e^{in\omega_0 t} \end{aligned} \quad (1.20)$$

⁴ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es periódica con periodo T si $f(x+T) = f(x)$.

CAPÍTULO 1. ORIGEN DE LOS MÉTODOS DE FOURIER

1.4. PASO DE LA SERIE A LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Ahora bien, como $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, si $T \rightarrow \infty$ entonces ω_0 tiende a cero.

Sea $\omega_0 = \Delta\omega$; entonces, la frecuencia de cualquier armónico $n\omega_0$ debe corresponder a la variable general de frecuencia que describe el espectro continuo. En otras palabras, $n \rightarrow \infty$ a medida que $\omega_0 = \Delta\omega \rightarrow 0$, tal que el producto es finito; esto es,

$$n\omega_0 = n\Delta\omega \rightarrow \omega$$

De este modo, (1.20) se convierte en

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\Delta\omega x} dx \right] e^{in\Delta\omega t} \Delta\omega$$

En el límite, $T \rightarrow \infty$, $\Delta\omega \rightarrow d\omega$ y la sumatoria se convierte en la integral sobre ω ; es decir, la función no periódica $f(t)$ se convierte en:

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right] e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right] e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Si definimos

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1.22)$$

(1.21) se convierte en

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.23)$$

A la forma (1.22) se le conoce con el nombre de **Transformada de Fourier de una función** f y a la forma (1.23) como **Transformada Inversa de Fourier**.

Capítulo 2

La Transformada de Fourier en el espacio L^2

En este capítulo, enunciaremos la definición de Transformada y Transformada Inversa de Fourier en una y dos variables, así como algunas de sus propiedades. Los textos revisados para el desarrollo de este capítulo, fueron [2, 14].

2.1. Transformada de Fourier en una variable

Definición 2.1. *Dada una función $f \in L^2(\mathbb{R})$, integrable en sentido Lebesgue, definida de \mathbb{R} a \mathbb{C} . Se define la Transformada de Fourier de f como la función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por :*

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i\omega t} dt. \quad (2.1)$$

Típicamente, $f(t)$ se conoce como función de la variable del tiempo y $F(\omega)$ como función de la variable frecuencia. Además, un símbolo minúsculo representa una función de tiempo y las transformadas de Fourier de este tiempo están representadas por el mismo símbolo en mayúscula como función de la frecuencia. La definición varía según los gustos en la aparición de ciertas constantes: el exponente puede ser $-i\omega t$; la fórmula de inversión (2.1) lleva un factor $1/2\pi$ multiplicativo a la integral, para recuperar la simetría.

CAPÍTULO 2. LA TRANSFORMADA DE FOURIER EN EL ESPACIO L^2

2.2. PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

En general, la Transformada de Fourier es una función compleja:

$$F(\omega) = R(\omega) + iI(\omega) = |F(\omega)|e^{i\theta(\omega)}$$

donde

$R(\omega)$ es la parte real de la FT

$I(\omega)$ es la parte imaginaria de la FT

$|F(\omega)|$ es la amplitud del espectro de Fourier de $f(t)$ que está dada por $\sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)}$ y

$\theta(\omega)$ es el ángulo de fase de la transformada de Fourier y está dada por $\tan^{-1} \left[\frac{I(\omega)}{R(\omega)} \right]$.

Transformada Inversa de Fourier (TIF)

La transformada de Fourier es una operación matemática que transforma a una función del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, pero sin alterar su contenido de información. Con base en lo anterior, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.1. Teorema de Inversión.

Si f y F son integrables en sentido Lebesgue, entonces

$$\mathcal{F}^{-1} \{F(\omega)\} = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{2\pi i \omega t} d\omega. \quad (2.2)$$

El término de la derecha es una función continua en ω , de modo que f coincide en casi todo punto con una función continua y se da la igualdad en los puntos de continuidad de f .

A f se le llama *Transformada Inversa (o antitransformada) de Fourier de F* .

2.2. Propiedades de la Transformada de Fourier

Proposición 2.2.1. Linealidad. Si $F_1(\omega) = \mathcal{F} \{f_1(t)\}$ y $F_2(\omega) = \mathcal{F} \{f_2(t)\}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, entonces

$$\mathcal{F} \{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega).$$

Proposición 2.2.2. Simetría. Si $F(\omega)$ es la transformada de $f(t)$, la transformada de $F(t)$ es $f(-\omega)$.

Proposición 2.2.3. Escalado en el tiempo. Si $a \in \mathbb{R}$ y $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$, entonces

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

En particular, $\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-\omega)$.

Proposición 2.2.4. Desplazamiento en el tiempo. Sea $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ y sea $t_0 \in \mathbb{R}$, entonces

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = e^{-i\omega t_0} F(\omega).$$

Proposición 2.2.5. Desplazamiento en la frecuencia. Si $\omega_0 \in \mathbb{R}$ y $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$, entonces

$$\mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t} f(t)\} = F(\omega - \omega_0)$$

Las propiedades anteriores son fundamentales para la TF. Sin embargo, existe una clase de relaciones cuya importancia supera estas propiedades. Nos referimos a los teoremas de convolución y correlación, que se muestran a continuación.

2.3. Teorema de Convolución

La convolución de dos funciones es un concepto físico significativo en muchos campos científicos diversos. Sin embargo, como en el caso de muchas relaciones matemáticas importantes, la integral de convolución no se revela fácilmente en cuanto a sus verdaderas implicaciones. Más específicamente, la integral de convolución viene dada por [2]

Teorema 2.2. Sean $x(t)$ y $h(t)$ absolutamente integrables en \mathbb{R} , su convolución está dada por

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = x(t) * h(t) \quad (2.3)$$

Se dice que la función $y(t)$ es la convolución¹ de las funciones $x(t)$ y $h(t)$.

2.3.1. Convolución en la frecuencia

Si multiplicamos dos funciones en el tiempo y calculamos la transformada, equivale a realizar la operación de convolución entre las transformadas de ambas funciones, esto es

¹* es el operador de convolución.

Si $F_1(\omega) = \mathcal{F}\{f_1(t)\}$ y $F_2(\omega) = \mathcal{F}\{f_2(t)\}$ entonces

$$\mathcal{F}\{f_1(t)f_2(t)\} = F_1(\omega) * F_2(\omega) \quad (2.4)$$

2.3.2. Convolución en el tiempo

La operación de convolución en el tiempo equivale a la multiplicación en frecuencias

Si $F_1(\omega) = \mathcal{F}\{f_1(t)\}$ y $F_2(\omega) = \mathcal{F}\{f_2(t)\}$ entonces

$$\mathcal{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(\omega)F_2(\omega) \quad (2.5)$$

2.4. Teorema de Correlación

Otra ecuación integral de importancia tanto en la aplicación teórica como práctica es la integral de correlación:

Si $F_1(\omega) = \mathcal{F}\{f_1(t)\}$ y $F_2(\omega) = \mathcal{F}\{f_2(t)\}$ entonces

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t + \tau)d\tau \quad (2.6)$$

Para el caso especial donde ya sea que $x(t)$ o $h(t)$ es una función par, la convolución y la correlación son equivalentes; esto se debe a que una función par y su imagen son idénticas.

2.5. TF y TIF en dos variables

El concepto de la transformada de Fourier, considerado anteriormente para funciones de una variable, puede ser extendido al caso de funciones de varias variables. Únicamente nos enfocaremos en definir el caso de dos variables.

Definición 2.2. Sea $f(x, y)$ una función integrable en todo el espacio \mathbb{R}^2 . La **Transformada de Fourier de f** está dada por

$$\mathcal{F}\{f(x, y)\} = F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)e^{-2\pi i(ux+vy)} dx dy \quad (2.7)$$

CAPÍTULO 2. LA TRANSFORMADA DE FOURIER EN EL ESPACIO L^2
2.5. TF Y TIF EN DOS VARIABLES

y la **Transformada inversa de Fourier de f** se define como

$$\mathcal{F}^{-1}\{f(u, v)\} = f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{2\pi i(ux+vy)} du dv \quad (2.8)$$

Ahora, la **convolución** $g(x, y)$ de dos funciones $g_1(x, y)$ y $g_2(x, y)$ se define como

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x', y') g_2(x - x', y - y') dx' dy' \\ &= g_1(x, y) * g_2(x, y) \end{aligned} \quad (2.9)$$

y la **correlación** $s(x, y)$ de dos funciones $s_1(x, y)$ y $s_2(x, y)$ es definida como

$$\begin{aligned} s(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(x', y') s_2(x + x', y + y') dx' dy' \\ &= s_1(x, y) * s_2(x, y) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Capítulo 3

Aplicaciones de la Transformada de Fourier

3.1. Introducción

La Transformada de Fourier es una operación matemática que transforma a una función del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, pero sin alterar su contenido de información. La idea básica, radica en que es posible formar cualquier función como una suma de una serie de términos seno y coseno de frecuencia creciente. En otras palabras, cualquier espacio o tiempo que varía datos puede ser transformado en un dominio diferente llamado el *espacio de frecuencia* [15].

En el presente capítulo se muestran algunas aplicaciones concretas de la Transformada de Fourier, poniendo mayor atención en el PDI como aplicación de interés para la presente tesis, también se habla de la formación de imágenes y filtrado en el dominio de la frecuencia y se concluye con un acercamiento al tema de microscopía de fluorescencia como aplicación del PDI. Los textos revisados para el desarrollo de este capítulo fueron [15, 16] y [17].

3.2. Algunas aplicaciones de la Transformada de Fourier

Sus aplicaciones son muy extensas, ya que abarcan diversas ramas de la matemática y la física matemática, desde la teoría de números y geometría hasta óptica y mecánica cuántica, así como otras áreas de la ciencia tales como medicina, comunicaciones, ingeniería biomédica, ingeniería mecánica y de control, campos electromagnéticos, procesamiento de señales de audio y procesamiento de imágenes.

CAPÍTULO 3. APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

3.2. ALGUNAS APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

La Transformada de Fourier también se utiliza para:

- Analizar contenido de frecuencia de las señales.
- Determinar como cambia la amplitud y las fases de las señales sinusoidales cuando éstas pasan a través de un sistema lineal e invariante en el tiempo.
- Generar formas de onda de corriente o tensión eléctrica por medio de la superposición de senoides generados por osciladores electrónicos de amplitud variable cuyas frecuencias ya están determinadas.
- Analizar el comportamiento armónico de una señal.

Algunos ejemplos concretos de aplicación, son los siguientes [15]:

En el campo electromagnético y de microondas la Transformada de Fourier esta relacionada con: el cálculo del campo cercano transitorio irradiado por dispositivos electrónicos, el análisis de fenómenos de inspiración óptica novedosos en microondas, el cálculo del campo electromagnético de rayos, la formación de haz y la radiación de microondas solares.

En medicina el análisis de la transformada de Fourier está relacionado con: el análisis espectral del comportamiento global de los cromosomas, el análisis espectral de la variabilidad de la frecuencia cardiaca, el procesamiento de imágenes generadas por econogramas, resonancias magnéticas y tomografía axial.

En comunicaciones se usa para analizar la frecuencia de señales, diseñar los sistemas de transmisión de señales para transmitir información, diseñar supresores y canceladores de ecos en líneas telefónicas.

En ingeniería mecánica se utiliza para balancear rotores y eliminar la vibración que generan cuando o están balanceados, estudiar los problemas relacionados con vibraciones mecánicas en los motores, generadores y equipos rotatorios en general.

En procesamiento de señales de audio se usa para compactar las señales de audio (MP3 y MP4), Producir efectos de sonido, diseñar sintetizadores de audio y ecualizadores.

En procesamiento de imágenes la FT se utiliza para filtrar imágenes, extraer características de interés, realizar transformaciones de imágenes y compactar imágenes.

En esta última aplicación es en la que nos enfocaremos el resto del capítulo.

3.3. Procesamiento Digital de Imágenes (PDI)

El termino imagen se refiere a una función bidimensional de intensidad de luz $f(x, y)$ donde x e y denotan las coordenadas espaciales y el valor de f en cualquier punto (x, y) es proporcional al brillo (o nivel de gris) de la imagen en ese punto.

El valor o la amplitud de f en las coordenadas espaciales (x, y) es una cantidad escalar positiva cuyo significado físico está determinado por la fuente de la imagen. Cuando se genera una imagen a partir de un proceso físico, sus valores de intensidad son proporcionales a la energía irradiada por una fuente física (por ejemplo, ondas electromagnéticas). Como consecuencia, $f(x, y)$ debe ser finito y distinto de cero; es decir,

$$0 < f(x, y) < \infty \quad (3.1)$$

La función $f(x, y)$ se puede caracterizar por dos componentes:

- la cantidad incidente que ilumina la fuente en la escena que se está viendo y
- la cantidad de iluminación reflejada por los objetos en la escena

Estos, se llaman componentes de *iluminación* y *reflectancia* y se denotan por $i(x, y)$ y $r(x, y)$ respectivamente. Las dos funciones se combinan como un producto para formar $f(x, y)$:

$$f(x, y) = i(x, y) r(x, y) \quad (3.2)$$

donde

$$0 < i(x, y) < \infty \quad (3.3)$$

y

$$0 < r(x, y) < 1 \quad (3.4)$$

La ecuación (3.4) indica que la reflectancia está limitada por 0 (absorción total) y 1 (reflectancia total). La naturaleza de $i(x, y)$ está determinado por la fuente de iluminación, y $r(x, y)$ está determinado por las características de la imagen objeto.

Una imagen digital puede considerarse como una matriz cuyos índices del renglón y columna identifican un punto en la imagen y el correspondiente valor del elemento de la matriz que identifica el nivel de intensidad de luz en ese punto.

En general, el valor de la imagen en cualquier coordenada (x, y) se denota $f(x, y)$, donde x y y son enteros. La sección del plano real abarcada por las coordenadas de una imagen se denomina *dominio espacial*, y x e y se denominan variables espaciales o coordenadas espaciales.

CAPÍTULO 3. APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

3.3. PROCESAMIENTO DIGITAL DE IMÁGENES (PDI)

3.3.1. Formación de imágenes

Es importante ver en que consiste el proceso de formación de imágenes, desde el punto de vista de la óptica, para poder aterrizar en el PDI como aplicación de la Transformada de Fourier, tal como nos interesa.

Consideremos el sistema de dos lentes ilustrado en la Figura(3.1), este sistema es llamado *sistema 4f* o procesador óptico coherente.

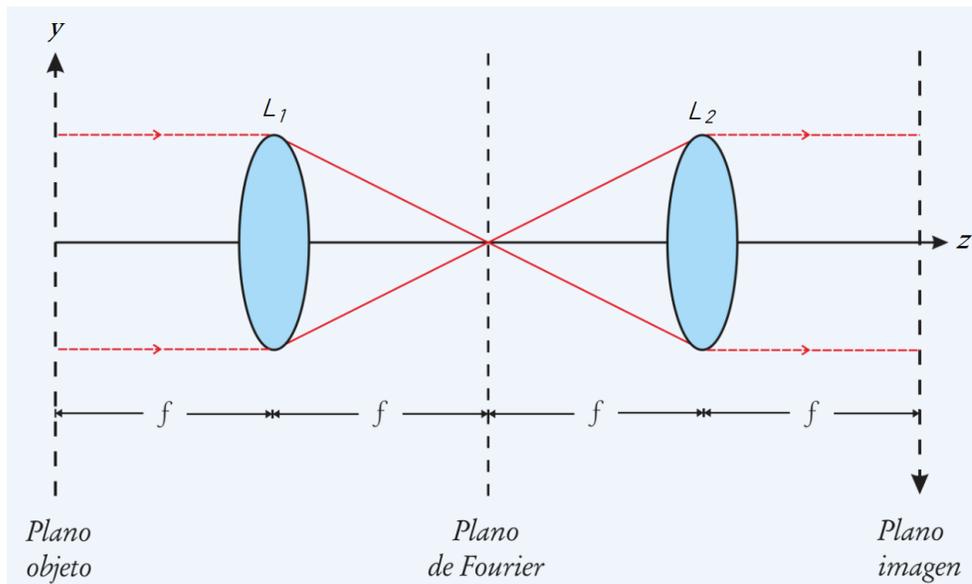


Figura 3.1: Sistema $4f$ usado para generar imágenes con luz coherente.

El análisis de propagación de ondas a través de este sistema se vuelve simple si reconocemos a éste como una cascada de dos subsistemas transformadores de Fourier. El primer subsistema (entre el plano objeto y el plano de Fourier) forma una transformada de Fourier, y el segundo (entre el plano de Fourier y el plano imagen) forma una transformada de Fourier inversa, donde el sistema coordenado en el plano imagen es invertido. Más explícitamente, en el plano objeto se coloca una imagen $f(x, y)$, posteriormente la lente L_1 genera la transformada de Fourier de la imagen sobre el plano de Fourier, el espectro obtenido, ahora actúa como objeto para la lente L_2 , la cual genera la transformada de Fourier inversa y finalmente se obtiene la imagen invertida.

Este sistema formador de imágenes puede ser simulado mediante procesamiento numérico usando algoritmos computacionales basados en la teoría de la Transformada de Fourier y la Transformada rápida de Fourier (Fast Fourier Transform). Es importante mencionar que en el Plano de Fourier se pueden insertar máscaras o filtros para evitar que ciertas frecuencias espaciales lleguen al plano imagen, este proceso se conoce como filtrado frecuencial.

CAPÍTULO 3. APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

3.3. PROCESAMIENTO DIGITAL DE IMÁGENES (PDI)

3.3.2. Filtrado de una imagen

Una de las ramas donde más aplicación ha tenido la óptica de Fourier es justamente en el procesado de imágenes. Usualmente los sistemas ópticos proporcionan imágenes inadecuadas para su utilización debido a que no contienen la formación que deseamos o bien porque han sufrido cierto tipo de degradación en su proceso de registro.

El *filtrado digital*, es una operación de convolución, de la imagen original con la función filtro. Definiendo la operación de **convolución** de dos funciones $f(x, y)$ y $h(x, y)$ como

$$f(x, y) * h(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x', y') h(x - x', y - y') dx' dy',$$

se cumple que si multiplicamos dos funciones en el tiempo y calculamos la transformada, equivale a realizar la operación de convolución entre las transformadas de ambas funciones; la operación de convolución en el tiempo equivale a la multiplicación en frecuencias.

De esta forma, si denotamos a la imagen original como la función $f(x, y)$ y al filtro como la función $h(x, y)$, tenemos que se cumple

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(x, y) * h(x, y)\} &= F(u, v)H(u, v) \\ \mathcal{F}\{f(x, y)h(x, y)\} &= F(u, v) * H(u, v)\end{aligned}$$

Más aún, una imagen digital se puede filtrar en el dominio del espacio o en el dominio de la frecuencia como se menciona a continuación.

Filtrado en el dominio espacial

Los filtros espaciales tienen como objetivo modificar la contribución de determinados rangos de frecuencias de una imagen. El término espacial se refiere al hecho de que el filtro se aplica directamente a la imagen y no a una transformada de la misma, es decir, el nivel de gris de un pixel se obtiene directamente en función del valor de sus vecinos. Los filtros espaciales pueden clasificarse basándose en su linealidad, en filtros lineales y no lineales.

CAPÍTULO 3. APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

3.3. PROCESAMIENTO DIGITAL DE IMÁGENES (PDI)

Filtrado en el dominio de la frecuencia

Una imagen puede ser considerada como una función no periódica y definirse en un espacio bidimensional cuyos ejes vengan determinados por la amplitud y la frecuencia para cada dirección de la imagen. Este nuevo espacio de referencia para la descripción de la imagen, se conoce como *dominio de la frecuencia*. Los filtros en el dominio de la frecuencia se usan para eliminar altas o bajas frecuencias de la imagen, o bien, para realzar o detectar bordes.

Los principales filtros frecuenciales son:

Filtros de paso bajo. Los filtros de paso bajo atenúan las componentes de medias-altas frecuencias y dejan intactas las bajas en función de la frecuencia de corte que se elija. Gráficamente eliminan todo lo que no sean variaciones suaves de nivel de gris.

Filtros de paso alto. Deja inalterables las altas frecuencias y atenúa o elimina las bajas frecuencias. Las áreas de nivel de gris constantes o con poca variación se corresponden con bajas frecuencias, que se suprimen.

Filtros de pasa banda. Un filtro de pasa banda atenúa las frecuencias que están por encima y por debajo de las frecuencias de corte, pero mantiene intactas las frecuencias que se encuentran en una banda determinada.

Filtros rechazo de banda. Estos filtros atenúan las frecuencias de la banda pero se mantienen las frecuencias fuera de ella.

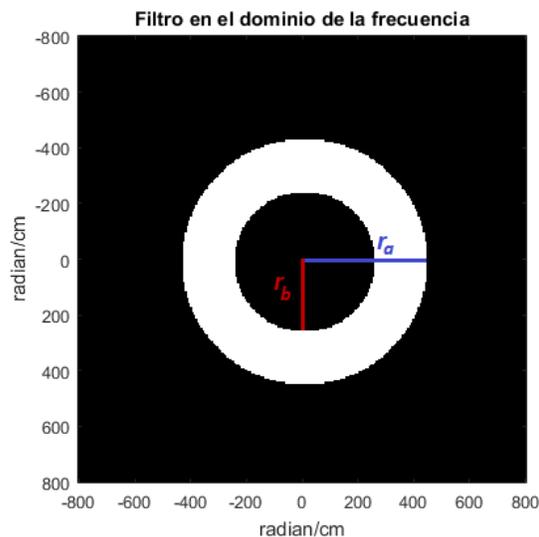


Figura 3.2: Filtro pasa banda generado en MatLab

CAPÍTULO 3. APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

3.4. MICROSCOPIA DE FLUORESCENCIA

Nuestro interés se centra en el filtrado de imágenes en el dominio de la frecuencia, y muy particularmente nos enfocaremos en filtros pasa banda como el de la Figura (3.2), diseñados mediante un código numérico en *MatLab*¹, r_a y r_b representaran la medida de los radios exterior e interior respectivamente. Cabe mencionar que la zona pintada de negro (en el código representada por “ceros”) corresponde a las frecuencias que el filtro elimina y la pintada de blanco (en el código representada por “unos”), corresponde a la información que logra pasar.

3.4. Microscopía de Fluorescencia

Como el objetivo de la presente tesis es generar numéricamente un código que haga procesamiento digital de imágenes con aplicaciones en microscopía de fluorescencia, a continuación haremos un acercamiento a este tema de forma muy general.

El estudio detallado de los componentes de células y tejidos animales o vegetales, por el tamaño que poseen, requiere el uso de instrumentos que permitan ampliar muchas veces más la imagen de las estructuras que los constituyen. El instrumento que fue empleado por los primeros biólogos para estudiar la célula y los tejidos, es el microscopio. El nombre deriva etimológicamente de dos raíces griegas: “*mikrós*”, que significa pequeño y “*skopéoo*”, que significa observar. Es decir, el microscopio es un instrumento que sirve para observar objetos o estructuras pequeñas. El adelanto tecnológico que se ha logrado en el diseño y construcción de microscopios, es el resultado de la interacción de diversas disciplinas que han permitido el avance de la **microscopía**, la cual es una disciplina que consiste en ver objetos y especímenes muy pequeños con la finalidad de formar imágenes aumentadas de los mismos para facilitar su estudio. Las células no son solamente minúsculas, también son incoloras y translúcidas en su mayoría. Aclarar este hecho, permitió el desarrollo de técnicas colorantes que asegurarían un contraste suficiente para poder visualizar las células en toda su estructura y complejidad, y más adelante, en el siglo *XX*, la observación de detalles de la ultraestructura de los componentes más finos del citoplasma, gracias al empleo de la microscopía electrónica.

3.4.1. Tipos de Microscopía

- *Microscopía óptica normal (de campo brillante coloreado)*: El material a observar se colorea con colorantes específicos que aumentan el contraste y revelan detalles que no aprecian de otra manera.

¹(Abreviatura de MATrix LABoratory, “laboratorio de matrices”) es una herramienta de software matemático, con un lenguaje de programación propio.

CAPÍTULO 3. APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

3.4. MICROSCOPIA DE FLUORESCENCIA

- *Microscopía de campo brillante*: el material se observa sin coloración. La luz pasa directamente y se aprecian detalles que estén naturalmente coloreados.
- *Microscopía en contraste de fase*: se usa principalmente para aumentar el contraste entre las partes claras y oscuras de las células sin colorear. Es ideal para especímenes delgados, o células aisladas. Este tipo de microscopio es muy útil a la hora de examinar tejidos vivos, por lo que se utiliza con frecuencia en biología y medicina.
- *Nomarski, microscopía diferencial de contraste de interferencia (DIC)*. Utiliza dos rayos de luz polarizada y las imágenes combinadas aparecen como si la célula estuviera proyectando sombras hacia un lado. Fue diseñado para observar relieves de especímenes muy difíciles de manejar, es muy utilizado en los tratamientos de fertilización in-vitro actuales.
- *Microscopía de fluorescencia*: una sustancia natural en las células o un colorante fluorescente aplicado al corte es estimulado por un haz de luz, emitiendo parte de la energía absorbida como rayas luminosas: esto se conoce como fluorescencia. La luz fluorescente de mayor longitud de onda se observa como si viniera directamente del colorante.

La **fluorescencia** es uno de los fenómenos físicos más utilizados en microscopía biológica y analítica, sobre todo por su alto grado de sensibilidad y especificidad ya que es una forma de luminiscencia.

Finalmente tenemos que, la **microscopía de fluorescencia** se basa en los mismos principios de óptica de la microscopía común, con diferencias en el manejo y el diseño relacionadas con la generación y transmisión de longitudes de onda adecuadas a los fluorocromos que se quieren visualizar, ya sean propios de la muestra o de la coloración utilizada. Incluso permite a los usuarios determinar la distribución de una sola especie de molécula, su cantidad y su ubicación dentro de una célula. Además de que se pueden realizar estudios de colocación e interacción, y observar las concentraciones de iones y procesos intra y extracelulares como la endocitosis y la exocitosis.

Bajo la idea de un sistema óptico formador de imágenes $4f$, el objetivo de la presente tesis es generar un código numérico procesador de imágenes, considerando que en el dominio frecuencial (dominio de Fourier) se coloca un filtro pasa banda para tratar imágenes de microscopía de fluorescencia, esto numéricamente.

En el siguiente capítulo, mostramos los resultados numéricos del código generado para procesar imágenes de microscopía de fluorescencia.

Capítulo 4

Resultados Numéricos

En este capítulo mostramos los resultados numéricos de un tratamiento digital de imágenes con el código numérico usando un filtro pasa banda [18], aplicado a imágenes de microscopía de fluorescencia.

4.1. Algoritmo

Se utiliza la modelación numérica para el estudio de un sistema formador de imágenes $4f$, con un filtro anular en el plano frecuencial.

El código numérico se genera en el ambiente de *MatLab*¹, tal como se muestra en la Figura (4.1). Tomando en cuenta el sistema formador de imágenes $4f$, enunciado en el capítulo anterior, inicialmente se lee una imagen de entrada, en seguida se aplica la TF (haciendo el papel de la lente L_1), después se genera un filtro pasa banda coherente con radio exterior $r_a = a/(N - 1)$ y radio interior $r_b = b/(N - 1)$ (el valor de N va a depender de las dimensiones de la matriz de entrada, en nuestro caso $N = 256$), cabe mencionar que variando los valores de a y b varía el tamaño de los radios del filtro. En seguida, se realiza la operación de convolución en el dominio de la frecuencia y posteriormente se aplica la Transformada Inversa de Fourier (haciendo el papel de la lente L_2). Finalmente se obtiene como salida, la imagen filtrada.

¹MATLAB (Versión prueba MathWorks Account) [software]. (2016). The MathWorks, Inc.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS NUMÉRICOS

4.1. ALGORITMO

```
1 clear
2
3 L=1;
4 N=256;
5 dx=1/(N-1);
6
7 img=imread('imagen_original.bmp','bmp');
8 img=double(img(:,:,1));
9
10 %Escala de los ejes
11 for k=1:256
12     X(k)=1/255*(k-1)-L/2;
13     Y(k)=1/255*(k-1)-L/2;
14
15     Kx(k)=(2*pi*(k-1))/((N-1)*dx)-((2*pi*(256-1))/((N-1)*dx))/2;
16     Ky(k)=(2*pi*(k-1))/((N-1)*dx)-((2*pi*(256-1))/((N-1)*dx))/2;
17 end
18
19 %Voltea la imagen
20 img=fliplr(img); %alrededor de un eje vertical
21 img=flipud(img); %alrededor de un eje horizontal
22 S_img=zeros(256);
23 S_img=img;
24
25 %Transformada de Fourier de la imagen de entrada
26 FT=fft2(S_img);
27 F_Input=(1/256)^2*FT;
28 F_Input=fftshift(F_Input);
29
30 %Filtro pasa banda
31 filt=zeros(256);
32
33 a=40; %Radio exterior = a / 255 cm
34 b=25; %Radio interior = b / 255 cm
35 for n=1:256
36     for m=1:256
37         if (n-127)^2+(m-127)^2<a^2
38             filt(n,m)=1;
39         end
40     end
41 end
42
43 for n=1:256
44     for m=1:256
45         if (n-127)^2+(m-127)^2<b^2
46             filt(n,m)=0;
47         end
48     end
49 end
50 %Fin del filtro pasa banda
```

CAPÍTULO 4. RESULTADOS NUMÉRICOS

4.2. PDI DE MICROSCOPIA DE FLUORESCENCIA

```
53
54 -   filt=fliplr(filt); %voltea con respecto a y
55 -   filt=flipud(filt);% voltea con respecto a x
56
57 -   filt_S=zeros(256);
58 -   filt_S=filt;
59
60   %Muestra el filtro
61 -   figure(1)
62 -   image(Kx,Ky ,256*filt_S)
63 -   colormap(gray(256))
64 -   title('Filtro en el dominio de la frecuencia')
65 -   xlabel('radian/cm');
66 -   ylabel('radian/cm');
67 -   axis square
68
69   %Convolución
70 -   F_Output=F_Input.*filt_S;
71
72   %Transformada inversa de Fourier
73 -   Output =ifft2(F_Output);
74 -   Output=(256^2)*Output;
75
76   %Muestra la imagen filtrada
77 -   figure(3)
78 -   image(X,Y,256*abs(Output)/max(max(abs(Output))))
79 -   colormap(gray(256))
80 -   title('Imagen filtrada')
81 -   xlabel('cm');
82 -   ylabel('cm');
83 -   axis square
```

Figura 4.1: Código de MatLab para procesar imágenes.

4.2. PDI de Microscopía de Fluorescencia

Las imágenes de microscopía de fluorescencia, mostradas en la Figura (4.2), son imágenes de tejidos biológicos del nodo senoricular del corazón de una rata con síndrome metabólico, y fueron proporcionadas por investigadores del Instituto de Fisiología de la BUAP.

Este tipo de imágenes se obtienen mediante cámaras digitales especializadas, pero la resolución de estas cámaras, no alcanza a captar los detalles que se observan con los microscopios. Por ello, se tiene la necesidad de aplicarles algún tipo de procesamiento digital para poder resaltar aquella información que contiene cada imagen.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS NUMÉRICOS

4.2. PDI DE MICROSCOPIA DE FLUORESCENCIA

Como se puede observar, en las imágenes (b), (c) y (d), de la Figura (4.2) se alcanzan a ver tres colores, el rojo, representa los nervios del sistema nervioso autónomo, la parte teñida de azul representa a los núcleos y lo que se muestra en gris, es tejido.

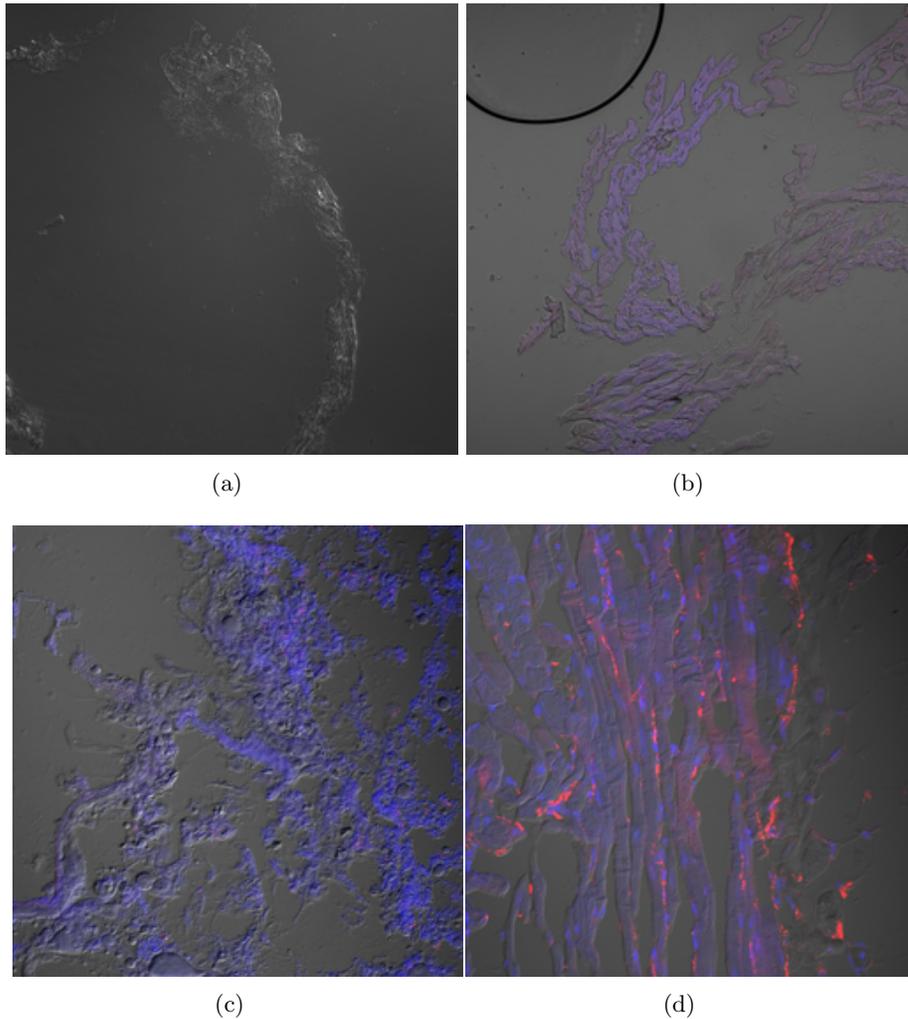
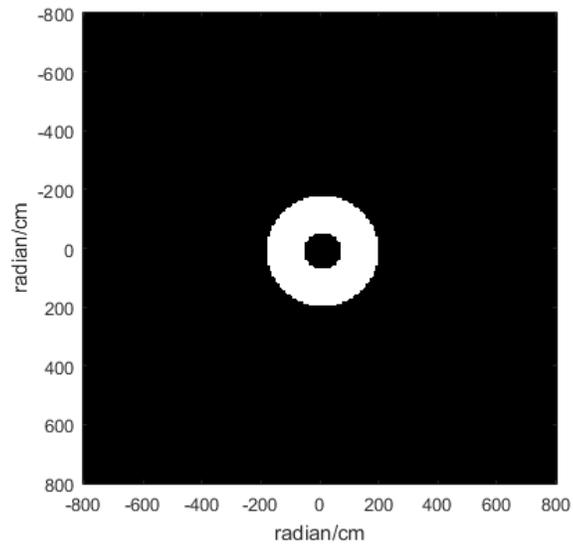


Figura 4.2: Imágenes de Microscopía de Fluorescencia que se van a procesar.

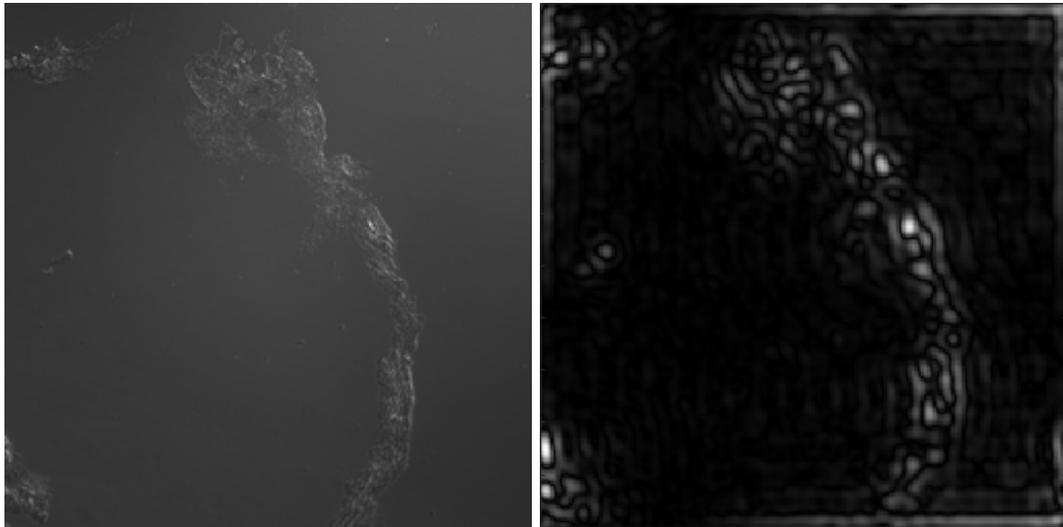
Ahora mostraremos, el resultado de procesar cada una de las imágenes de la Figura (4.2) variando los radios del filtro r_a y r_b , que como ya se había mencionado, representan la medida de los radios exterior e interior respectivamente.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS NUMÉRICOS
4.2. PDI DE MICROSCOPIA DE FLUORESCENCIA

En las Figuras (4.3-4.6), se muestran los resultados que se obtienen al procesar la imagen (a) de la Figura (4.2) al variar los radios del filtro.



(a) Filtro en el dominio de la frecuencia

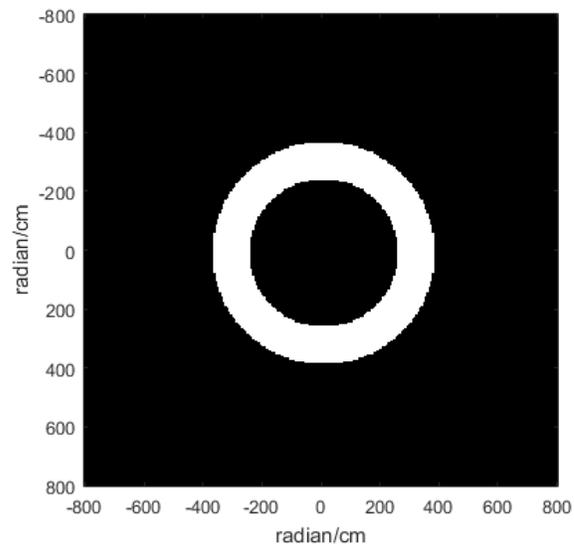


(b) Imagen original

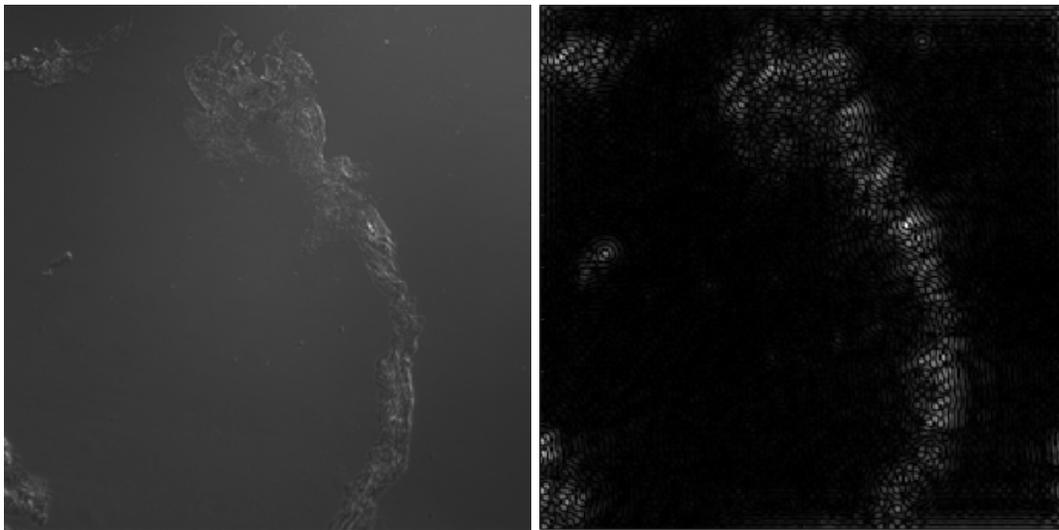
(c) Imagen filtrada

Figura 4.3: Resultado de procesar la imagen (a) de la Figura (4.2)
(a) Filtro con radios $r_a = 30/255$, $r_b = 10/255$, (b) Imagen original, (c) Resultado de la imagen original procesada con el filtro mencionado en el inciso (a).

CAPÍTULO 4. RESULTADOS NUMÉRICOS
4.2. PDI DE MICROSCOPIA DE FLUORESCENCIA



(a) Filtro en el dominio de la frecuencia

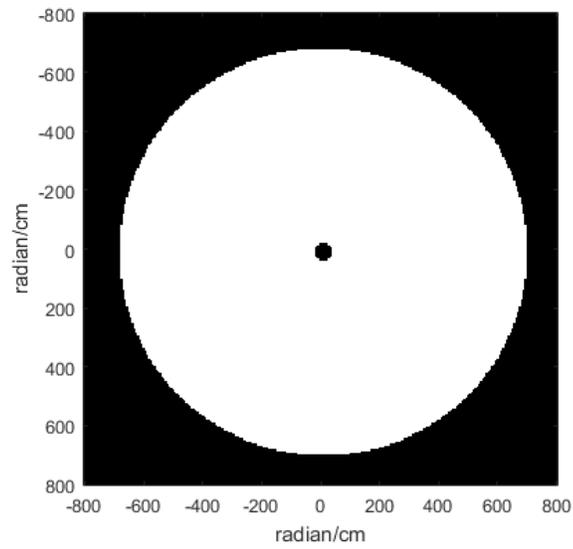


(b) Imagen original

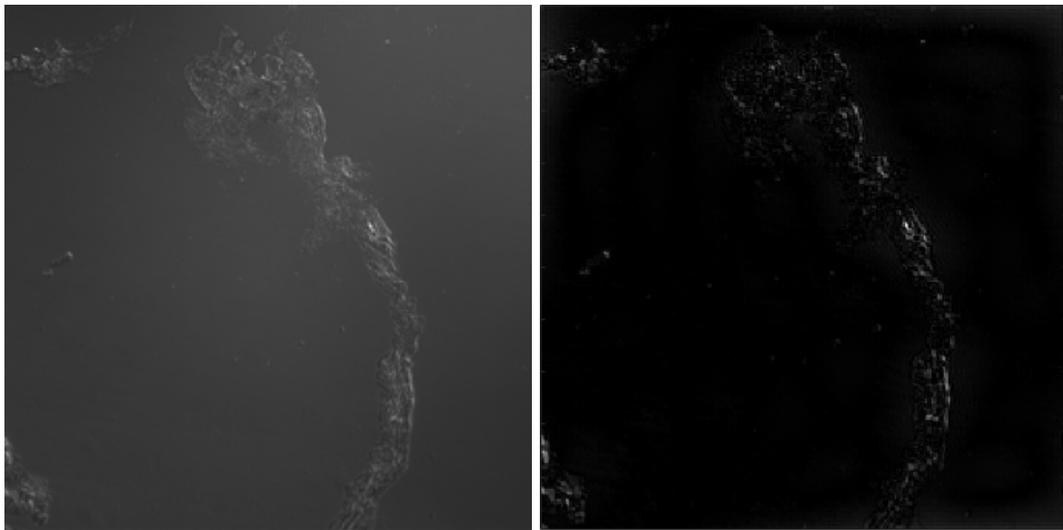
(c) Imagen filtrada

Figura 4.4: Resultados de procesar la imagen (a) de la Figura (4.2)
(a) Filtro con radios $r_a = 60/255$, $r_b = 40/255$, (b) Imagen original, (c) Resultado de la imagen original procesada con el filtro mencionado en el inciso (a).

CAPÍTULO 4. RESULTADOS NUMÉRICOS
4.2. PDI DE MICROSCOPIA DE FLUORESCENCIA



(a) Filtro en el dominio de la frecuencia

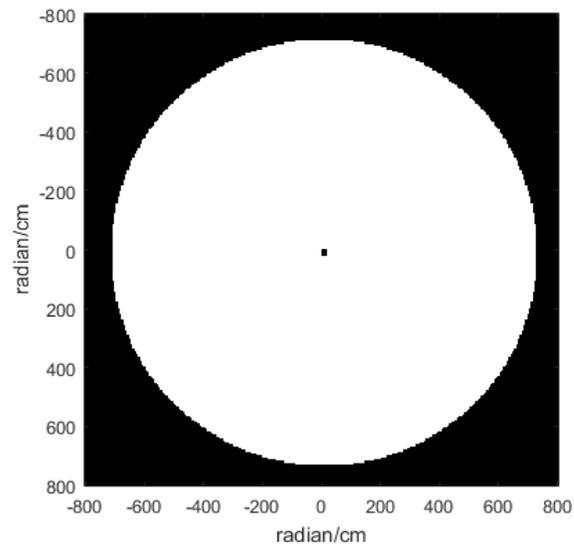


(b) Imagen original

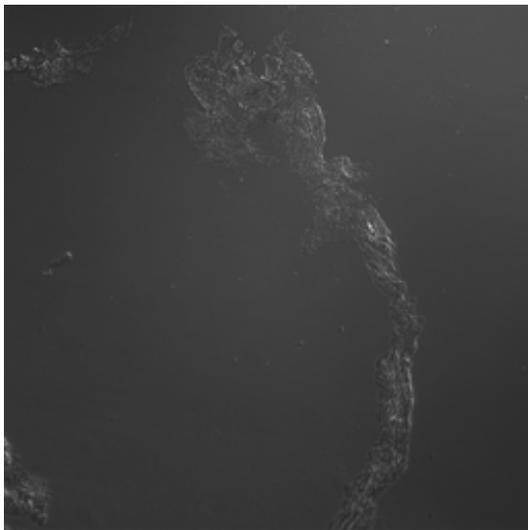
(c) Imagen filtrada

Figura 4.5: Resultados de procesar la imagen (a) de la Figura (4.2)
(a) Filtro con radios $r_a = 110/255$, $r_b = 5/255$, (b) Imagen original, (c) Resultado de la imagen original procesada con el filtro mencionado en el inciso (a).

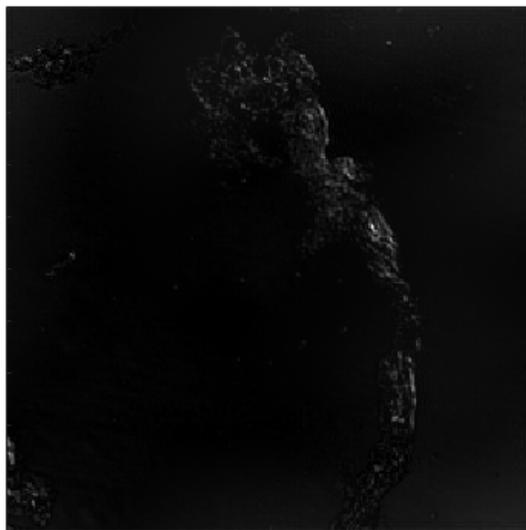
CAPÍTULO 4. RESULTADOS NUMÉRICOS
4.2. PDI DE MICROSCOPIA DE FLUORESCENCIA



(a) Filtro en el dominio de la frecuencia



(b) Imagen original



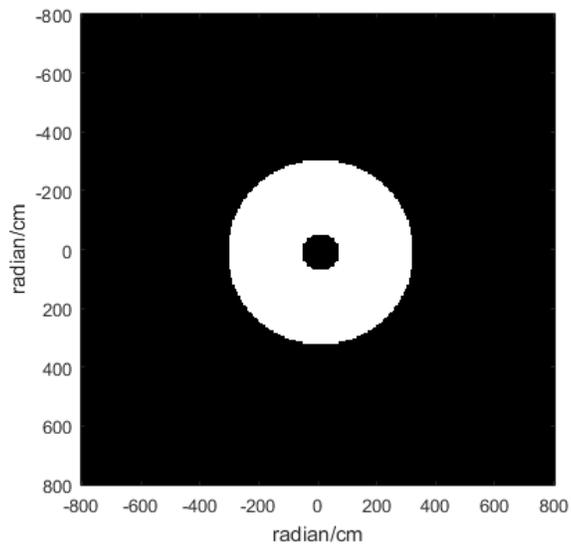
(c) Imagen filtrada

Figura 4.6: Resultados de procesar la imagen (a) de la Figura (4.2)
(a) Filtro con radios $r_a = 115/255$, $r_b = 2/255$, (b) Imagen original, (c) Resultado de la imagen original procesada con el filtro mencionado en el inciso (a).

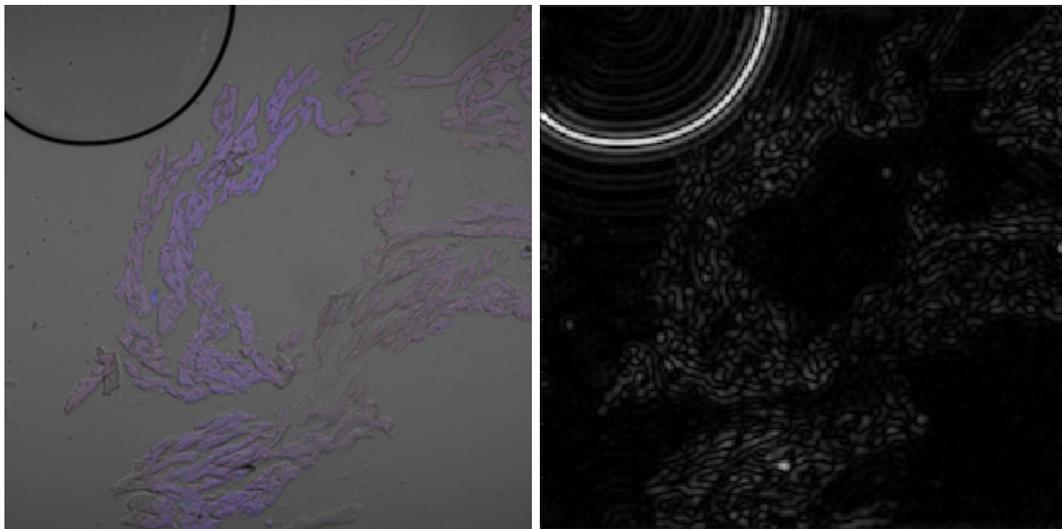
CAPÍTULO 4. RESULTADOS NUMÉRICOS

4.2. PDI DE MICROSCOPIA DE FLUORESCENCIA

En las Figuras (4.7-4.10), se muestran los resultados que se obtienen al procesar la imagen (b) de la Figura (4.2) al variar los radios del filtro.



(a) Filtro en el dominio de la frecuencia

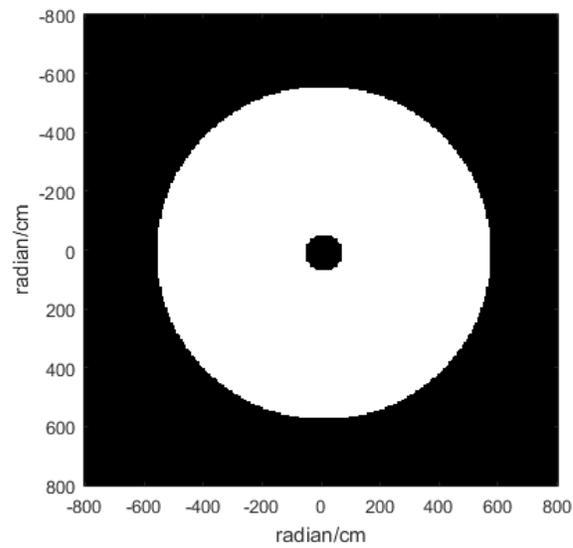


(b) Imagen original

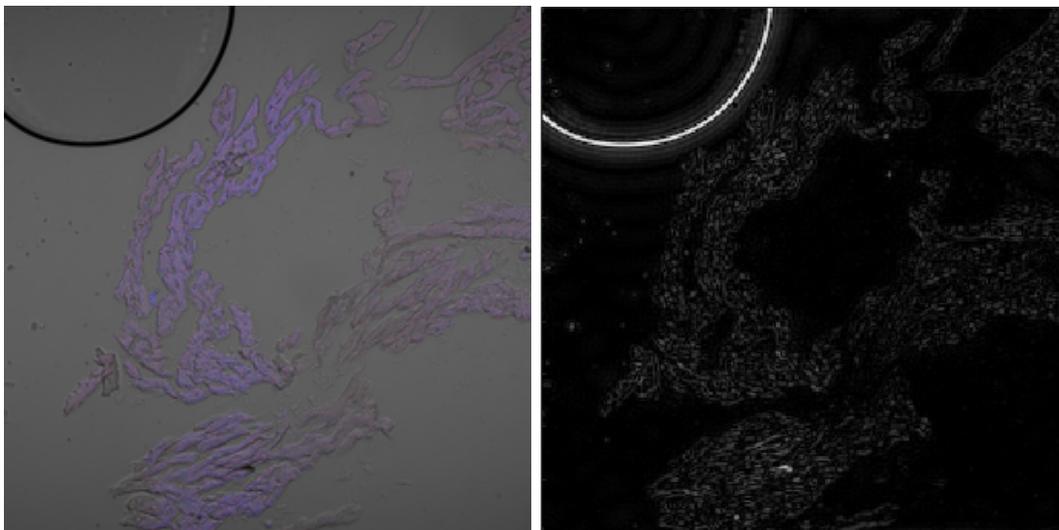
(c) Imagen filtrada

Figura 4.7: Resultados de procesar la imagen (b) de la Figura (4.2)
(a) Filtro con radios $r_a = 50/255$, $r_b = 10/255$, (b) Imagen original, (c) Resultado de la imagen original procesada con el filtro mencionado en el inciso (a).

CAPÍTULO 4. RESULTADOS NUMÉRICOS
4.2. PDI DE MICROSCOPIA DE FLUORESCENCIA



(a) Filtro en el dominio de la frecuencia

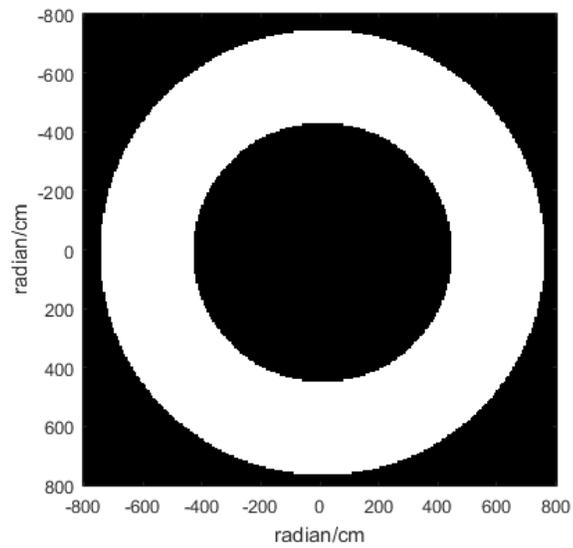


(b) Imagen original

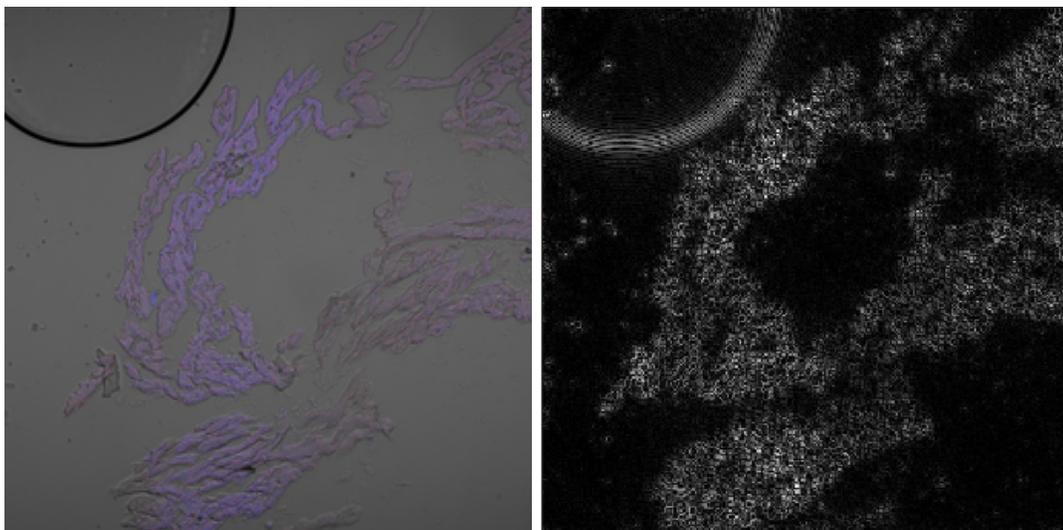
(c) Imagen filtrada

Figura 4.8: Resultados de procesar la imagen (b) de la Figura (4.2)
(a) Filtro con radios $r_a = 90/255$, $r_b = 10/255$, (b) Imagen original, (c) Resultado de la imagen original procesada con el filtro mencionado en el inciso (a).

CAPÍTULO 4. RESULTADOS NUMÉRICOS
4.2. PDI DE MICROSCOPIA DE FLUORESCENCIA



(a) Filtro en el dominio de la frecuencia

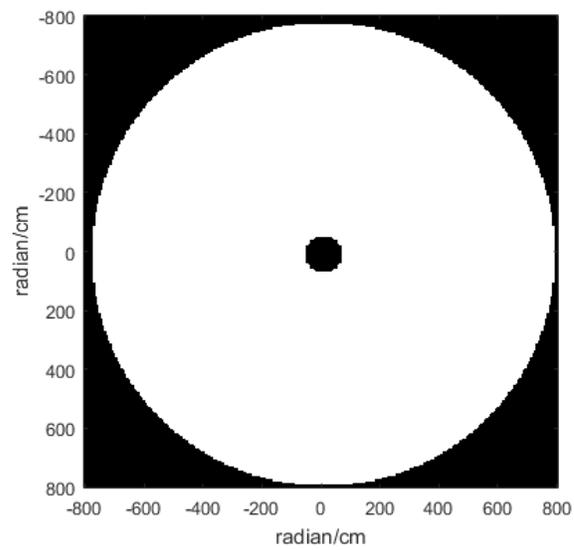


(b) Imagen original

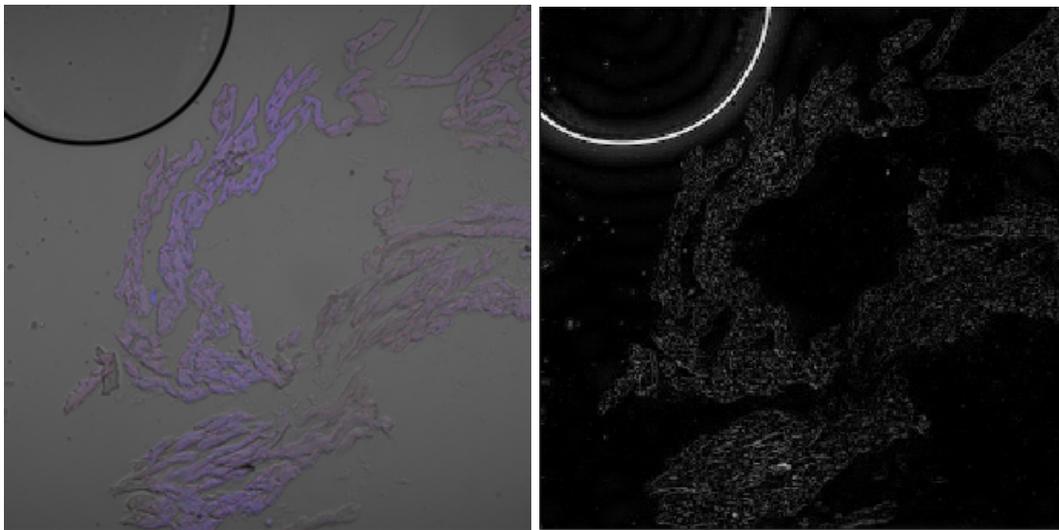
(c) Imagen filtrada

Figura 4.9: Resultados de procesar la imagen (b) de la Figura (4.2)
(a) Filtro con radios $r_a = 120/255$, $r_b = 70/255$, (b) Imagen original, (c) Resultado de la imagen original procesada con el filtro mencionado en el inciso (a).

CAPÍTULO 4. RESULTADOS NUMÉRICOS
4.2. PDI DE MICROSCOPIA DE FLUORESCENCIA



(a) Filtro en el dominio de la frecuencia



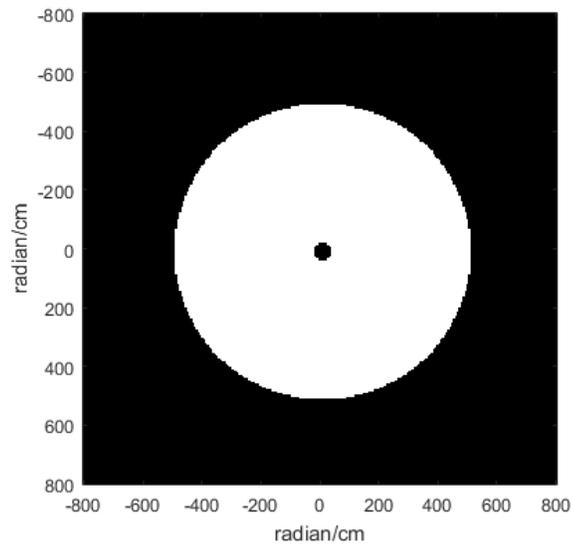
(b) Imagen original

(c) Imagen filtrada

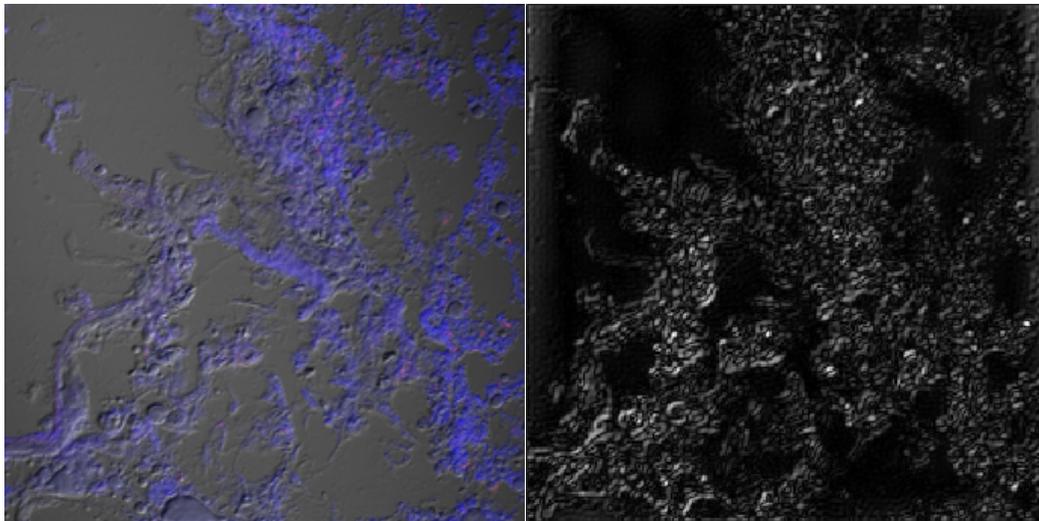
Figura 4.10: Resultados de procesar la imagen (b) de la Figura (4.2)
(a) Filtro con radios $r_a = 125/255$, $r_b = 10/255$, (b) Imagen original, (c) Resultado de la imagen original procesada con el filtro mencionado en el inciso (a).

CAPÍTULO 4. RESULTADOS NUMÉRICOS
4.2. PDI DE MICROSCOPIA DE FLUORESCENCIA

En las Figuras (4.11-4.14), se muestran los resultados que se obtienen al procesar la imagen (c) de la Figura (4.2) al variar los radios del filtro.



(a) Filtro en el dominio de la frecuencia

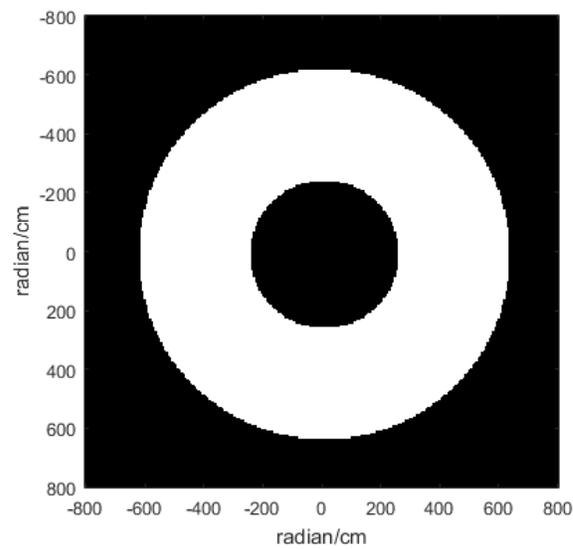


(b) Imagen original

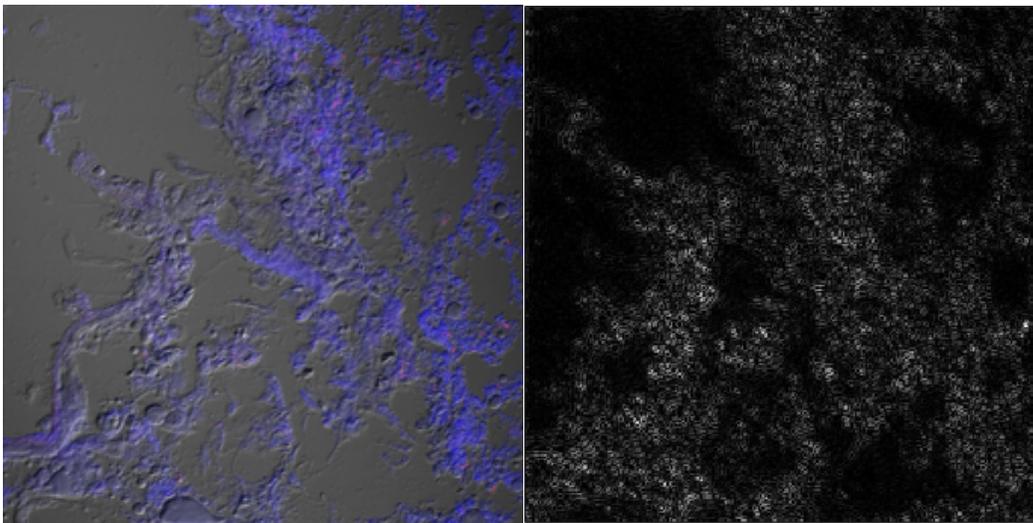
(c) Imagen filtrada

Figura 4.11: Resultados de procesar la imagen (c) de la Figura (4.2)
(a) Filtro con radios $r_a = 80/255$, $r_b = 5/255$, (b) Imagen original, (c) Resultado de la imagen original procesada con el filtro mencionado en el inciso (a).

CAPÍTULO 4. RESULTADOS NUMÉRICOS
4.2. PDI DE MICROSCOPIA DE FLUORESCENCIA



(a) Filtro en el dominio de la frecuencia

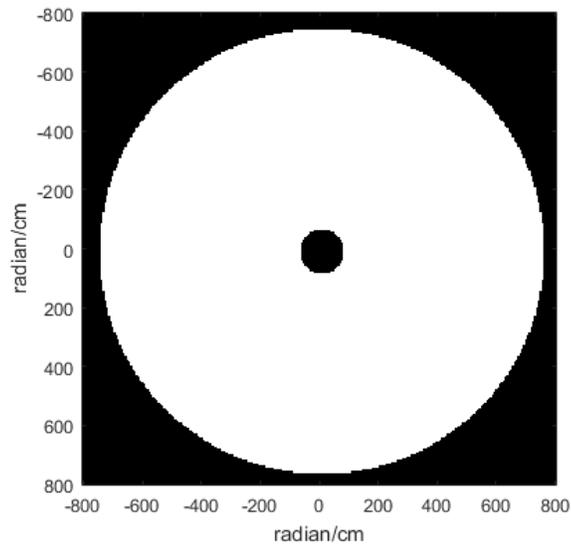


(b) Imagen original

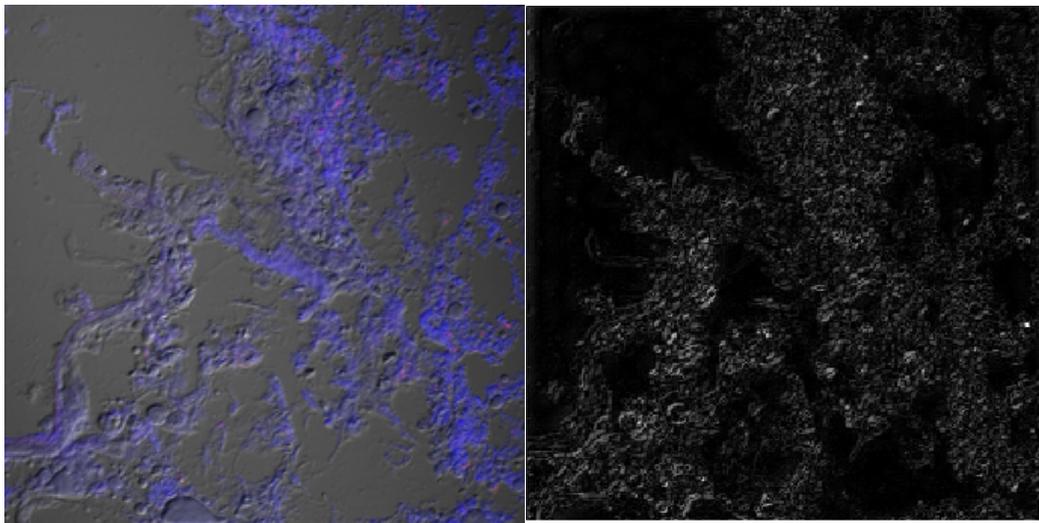
(c) Imagen filtrada

Figura 4.12: Resultados de procesar la imagen (c) de la Figura (4.2)
(a) Filtro con radios $r_a = 100/255$, $r_b = 40/255$, (b) Imagen original, (c) Resultado de la imagen original procesada con el filtro mencionado en el inciso (a).

CAPÍTULO 4. RESULTADOS NUMÉRICOS
4.2. PDI DE MICROSCOPIA DE FLUORESCENCIA



(a) Filtro en el dominio de la frecuencia

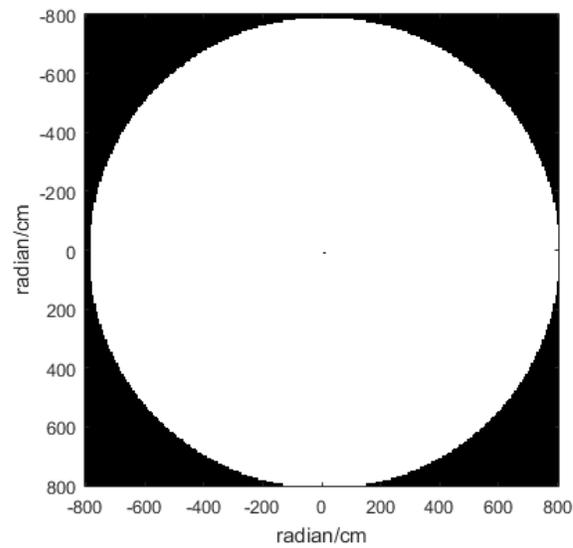


(b) Imagen original

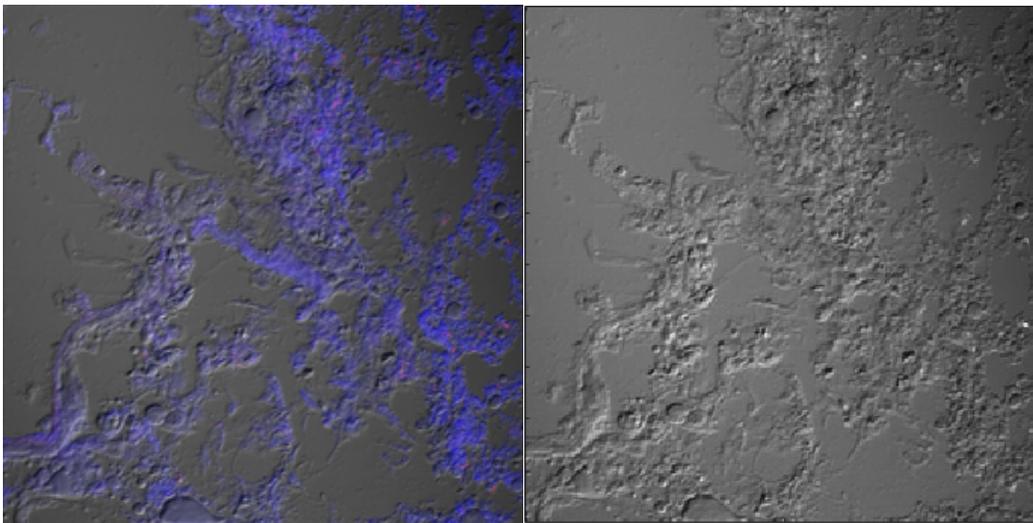
(c) Imagen filtrada

Figura 4.13: Resultados de procesar la imagen (c) de la Figura (4.2)
(a) Filtro con radios $r_a = 120/255$, $r_b = 12/255$, (b) Imagen original, (c) Resultado de la imagen original procesada con el filtro mencionado en el inciso (a).

CAPÍTULO 4. RESULTADOS NUMÉRICOS
4.2. PDI DE MICROSCOPIA DE FLUORESCENCIA



(a) Filtro en el dominio de la frecuencia



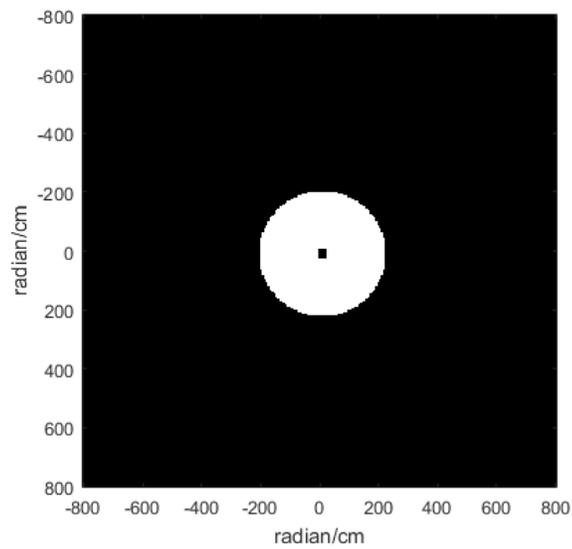
(b) Imagen original

(c) Imagen filtrada

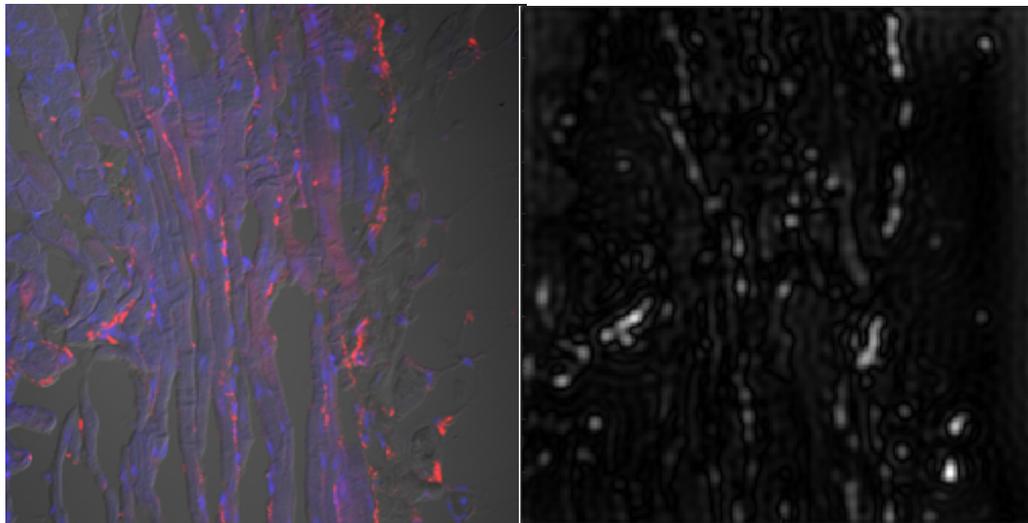
Figura 4.14: Resultados de procesar la imagen (c) de la Figura (4.2)
(a) Filtro con radios $r_a = 127/255$, $r_b = 1/255$, (b) Imagen original, (c) Resultado de la imagen original procesada con el filtro mencionado en el inciso (a).

CAPÍTULO 4. RESULTADOS NUMÉRICOS
4.2. PDI DE MICROSCOPIA DE FLUORESCENCIA

En las Figuras (4.15-4.18), se muestran los resultados que se obtienen al procesar la imagen (d) de la Figura (4.2) al variar los radios del filtro.



(a) Filtro en el dominio de la frecuencia

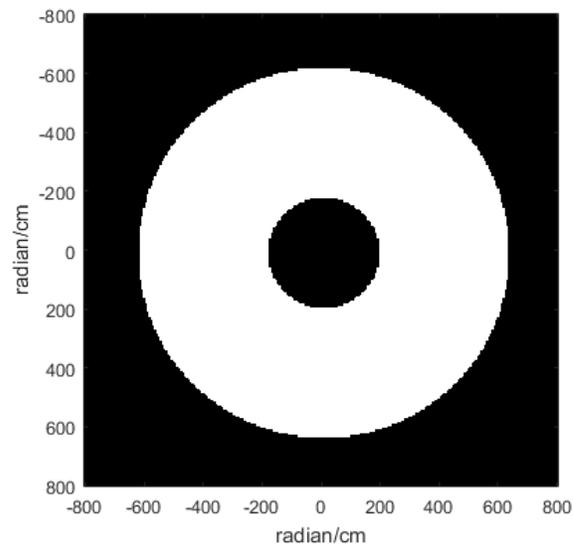


(b) Imagen original

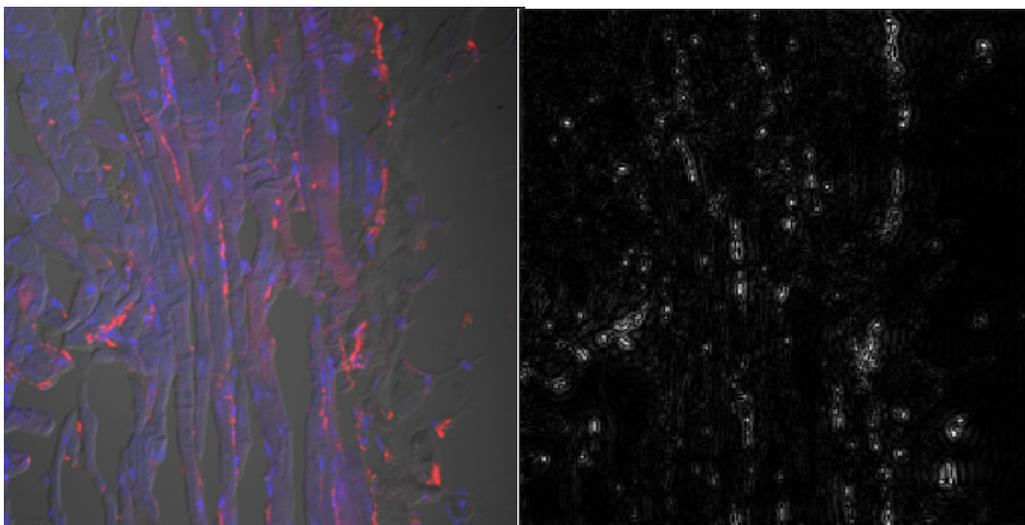
(c) Imagen filtrada

Figura 4.15: Resultados de procesar la imagen (d) de la Figura (4.2)
(a) Filtro con radios $r_a = 34/255$, $r_b = 3/255$, (b) Imagen original, (c) Resultado de la imagen original procesada con el filtro mencionado en el inciso (a).

CAPÍTULO 4. RESULTADOS NUMÉRICOS
4.2. PDI DE MICROSCOPIA DE FLUORESCENCIA



(a) Filtro en el dominio de la frecuencia

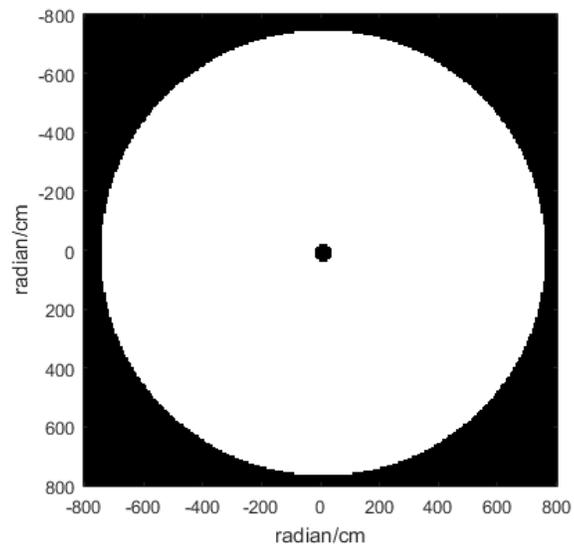


(b) Imagen original

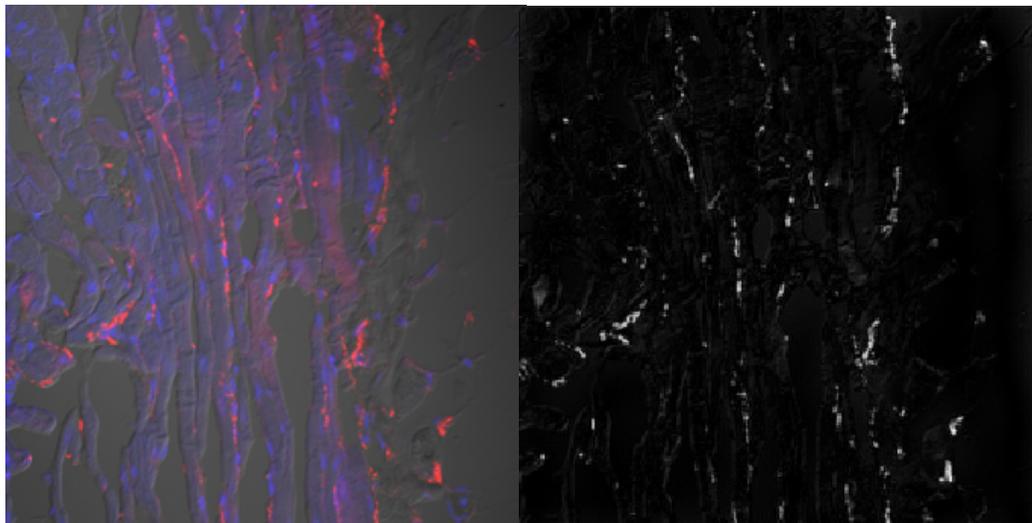
(c) Imagen filtrada

Figura 4.16: Resultados de procesar la imagen (d) de la Figura (4.2)
(a) Filtro con radios $r_a = 100/255$, $r_b = 30/255$, (b) Imagen original, (c) Resultado de la imagen original procesada con el filtro mencionado en el inciso (a).

CAPÍTULO 4. RESULTADOS NUMÉRICOS
4.2. PDI DE MICROSCOPIA DE FLUORESCENCIA



(a) Filtro en el dominio de la frecuencia

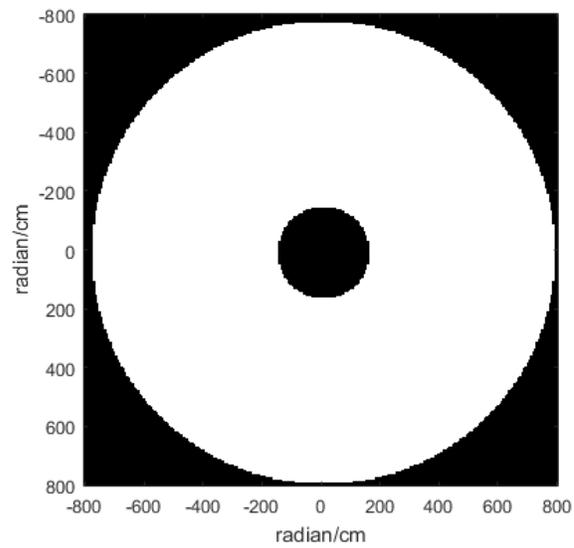


(b) Imagen original

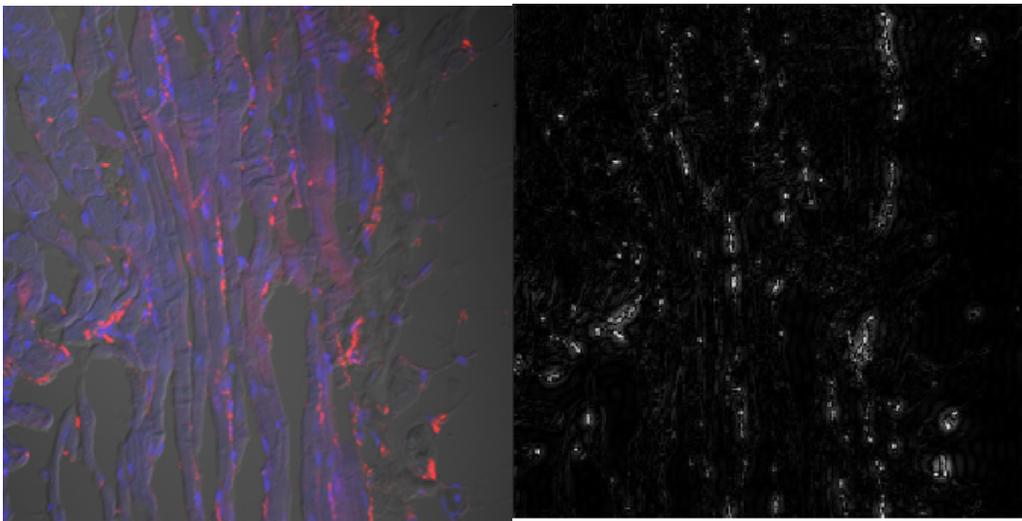
(c) Imagen filtrada

Figura 4.17: Resultados de procesar la imagen (d) de la Figura (4.2)
(a) Filtro con radios $r_a = 120/255$, $r_b = 5/255$, (b) Imagen original, (c) Resultado de la imagen original procesada con el filtro mencionado en el inciso (a).

CAPÍTULO 4. RESULTADOS NUMÉRICOS
4.2. PDI DE MICROSCOPIA DE FLUORESCENCIA



(a) Filtro en el dominio de la frecuencia



(b) Imagen original

(c) Imagen filtrada

Figura 4.18: Resultados de procesar la imagen (d) de la Figura (4.2)
(a) Filtro con radios $r_a = 125/255$, $r_b = 25/255$, (b) Imagen original, (c) Resultado de la imagen original procesada con el filtro mencionado en el inciso (a).

CAPÍTULO 4. RESULTADOS NUMÉRICOS

4.2. PDI DE MICROSCOPIA DE FLUORESCENCIA

En los resultados de éstas imágenes, existe información relevante para los investigadores expertos en el área, que permite determinar un diagnóstico del tejido biológico. Es importante recalcar que durante el proceso numérico de estas imágenes de microscopía de fluorescencia, se observó que cuando se varía el radio interno y externo del filtro, se realzan ciertas características de cada una de las imágenes, esto significa que un filtro con la misma banda de paso, no puede ser aplicado a todas las imágenes pues cada una tiene su propia información.

En este capítulo se ha mostrado una aplicación de la Transformada de Fourier en procesamiento digital de imágenes, en este caso, de microscopía de fluorescencia.

Capítulo 5

Conclusiones generales

En el presente trabajo de tesis, se ha realizado una revisión del estado del arte de la Transformada de Fourier, en la cual se mencionan a matemáticos no menos importantes que Fourier, tales como *Euler*, *D’alembert* y *Bernoulli* (los que aportaron diversas demostraciones al problema de la cuerda vibrante, también conocido como la Teoría del cable en el área de fisiología) y otros más como *Lagrange* y *Laplace* los cuales fueron el sostén (e inspiración) de Fourier mientras estudiaba en la *École Normale de París*. Así mismo, mostramos a la serie de Fourier en sus diferentes representaciones y como a partir de ella, podemos pasar, a lo que hoy conocemos como la Transformada de Fourier. Se enunciaron las definiciones de Transformada y Transformada Inversa de Fourier en una y dos variables, así como algunas propiedades. También fue necesario hacer una revisión sobre el procesamiento digital de imágenes, por lo que, extendiéndonos en el tema, nos vimos en la necesidad de hablar un poco más sobre algunas aplicaciones de la Transformada de Fourier, en otras áreas. Hacer mención del tema de microscopía, fue indispensable para conocer el tipo de imágenes con el que teníamos que trabajar. Se realizó un código numérico en el entorno de MatLab, y se procesaron imágenes de microscopía de fluorescencia, variando los radios exterior e interior del filtro pasa banda. Concretamente, hablamos del procesamiento digital de imágenes de microscopía de fluorescencia, y muy particularmente, se procesaron imágenes de tejidos biológicos del nodo senoauricular del corazón de una rata con síndrome metabólico. Es importante mencionar, que la variación de los radios del filtro no es estrictamente la misma para todas las imágenes a tratar, ya que cada imagen del tejido tiene sus propias características de información. Por último, mencionamos que estos resultados obtenidos, son interpretados por expertos en el área, ya que nuestro interés no es dar una interpretación si no por el contrario, mostrar una aplicación de la Transformada de Fourier a problemas reales mediante procesamiento digital de imágenes.

Bibliografía

- [1] González, G., (1997) Fourier series, Fourier Transforms and Applications. *Divulgaciones Matemáticas*, 5(1/2), 43-60.
- [2] E. Oram Brigham, *The Fast Fourier Transform and its applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632.
- [3] Cañada, A., (2000) Una perspectiva historica de las series de Fourier: de las ecuaciones de ondas y del calor a los operadores compactos y autoadjuntos. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, 3(003), 293-320.
- [4] López M. (2016) *Una perspectiva histórica de los métodos de Fourier*. Trabajo fin de grado de Matemáticas no publicado. Universidad de Granada, Andalucía, España.
- [5] Ortíz, M. Agustín., (2006) *Estudio sobre Joseph Fourier*. Universidad Autónoma de Madrid.
- [6] Duoandikoetxea, Javier., (2003) *Lecciones sobre las Series y Transformadas de Fourier*. UNAN-Managua.
- [7] Bell, E. T., *Los grandes Matemáticos(desde Zenón hasta Poincaré) su vida y sus obras*, Losada, Buenos Aires.
- [8] Hernández, L. O., (1973) *Métodos de Fourier en la Física y en la Ingeniería*. México: Trillas.
- [9] Cañada V. A., (2002) *Series de Fourier y Aplicaciones*. Madrid: Pirámide.
- [10] Hodgkin, A. L. y Huxley, A. F., (1952) A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol.*, (1952) 117 , 500-544.
- [11] Máltsev, A. I., (1978) *Fundamentos de Algebra Lineal*. URSS: Mir Moscú.
- [12] Brézis H., (1984) *Análisis Funcional*. Madrid: Alianza Universidad Textos.

- [13] Rynne B. P. y Youngson M. A., (2008). *Linear Functional Analysis*. London: Springer.
- [14] Pérez M. V. (2009) *La definición de la Transformada de Fourier y sus desigualdades en norma con pesos*. Tesis de Licenciatura no publicada. Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina.
- [15] Mohammed S. (2012) *Fourier Transform Applications*. Janeza Trdine, Rijeka, Croatia: Vana Persen.
- [16] Chacón M., Mario I., (2007) *Procesamiento Digital de Imágenes*, Editorial TRILLAS.
- [17] Pinilla, C., Alcalá, A. y Ariza F. J. (1997) Filtrado de imágenes en el dominio de la frecuencia. *Revista de Teledetección*. Universidad de Jaén.
- [18] Poon T. C. y Banerjee P. P., (2001). *Contemporary Optical Image Processing with MATLAB*. Oxford: ELSEVIER.