Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Fisico-Matemáticas

Valuación de Opciones Barreras Dobles Bajo el Método de Transformadas

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

por

C. Fiorella Aguilar Saavedra

asesorada por

Dr.Francisco Solano Tajonar Sanabria

Puebla Pue.
Mayo de 2011

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Fisico-Matemáticas

Valuación de Opciones Barreras Dobles Bajo el Método de Transformadas

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

por

C. Fiorella Aguilar Saavedra

asesorada por

Dr.Francisco Solano Tajonar Sanabria

Puebla Pue.
Mayo de 2011

Dedicatoria

Para mi querida familia por su apoyo constante en los momentos buenos y malos, en especial para las tres mujeres que más quiero y admiro

Emma Saavedra Velázquez
Nohemí Aguilar Saavedra
María Velázquez Lorenzo.

Sin olvidar a los que me vieron emprender este viaje y que desgraciadamente ya no estan conmigo.

No estudio para saber más, sino para ignorar menos
Sor Juana Inés de la Cruz

Agradecimientos

Gracias a Dios por cada rayo de luz que ilumina mi camino permitiendome llegar hasta este momento y cumplir con una meta más.

Culminar con esta etapa en mi vida da lugar a reconocer el esfuerzo de mis padres por formar a una hija, una mujer y ahora una profesional. No es el logro de una sóla persona, ustedes siempre estuvieron junto a mí. Llena de gratitud dedico unas palabras a mi madre esperando recompensen un poco el amor, la paciencia y los consejos que me da día a día, gracias por el apoyo incondicional. A mi compañera de juegos, desvelos y aventuras, por ser siempre mi sostén te doy gracias hermanita.

Agradezco a los profesores que han contribuido en mi formación, en especial a mi tutora la Dra. Lidia Hernández que ha tenido la tarea de guiarnos durante nuestra estancia en la facultad, al Dr. Agustín Contreras en quién me apoyé más de una vez cuando las dudas me invadían y a mi director de tesis Dr. Francisco Tajonar por la enseñanza, el tiempo y amistad brindada.

La estancia en la universidad no sólo me deja una formación académica, también una formación personal en la que intervinieron mis compañeros y amigos. La carrera que decidí estudiar requería de esfuerzo y disciplina, pero con un amigo junto siempre fué más fácil, gracias chicos, me quedo con un poco de cada uno de ustedes.

Índice general

Introducción **1**

1. Preeliminares **3**

1.1. Procesos Estocásticos y Cálculo Estocástico 3

1.1.1. Procesos Estocásticos 3

1.1.2. Filtración 4

1.1.3. Martingalas 5

1.1.4. Movimiento Browniano 5

1.2. Proceso de Wiener 6

1.3. Movimiento Browniano Geométrico 7

1.3.1. Cálculo Estocástico 7

1.3.2. Integral de Itô 7

1.3.3. Reglas Básicas de Diferenciación Estocástica 9

1.3.4. Lema de Itô 9

1.4. Opciones 10

1.4.1. ¿Qué es una Opción? 10

1.4.2. Tipos de Opciones 10

1.5. Modelo de Black-Scholes 12

1.5.1. El Precio de un Activo como una Ecuación Diferencial Estocástica . 13

1.5.2. Dinámica del Precio del Subyacente 14

1.5.3. Modelo de Black-Scholes 14

1.6. Dinámica del Precio de la Opción 15

1.6.1. De la ecuación de Black- Scholes a la Ecuación del Calor 17

1.6.2. Función de Densidad Condicional del Precio de un Activo 19

1.6.3. Ecuación Backward (Hacia Atrás) 20

2. Funciones de Densidad **23**

2.1. Función de Densidad de Transición 23

2.2. Densidades de las Barreras 29

2.2.1. Derivación de g^+ 30

2.2.2. Derivación de g^- 34

3. Fórmulas de Valuación **37**

3.1. Rebaja al Alcance 38

3.2. Doble knock-out en su Versión Call 39

Conclusiones **41**

Bibliografía **43**

Introducción

En el marco ofrecido por el mundo de las finanzas, la matemática juega un papel de suma importancia, su tarea es construir modelos matemáticos de los procesos que se presentan en los mercados financieros. Uno de ellos es conocer el comportamiento del precio del activo subyacente, es justo aquí donde comienza nuestra tarea.

Las fórmulas de valuación de precios se han desarrollado con el paso de los años. La primera fórmula de valuación de un contrato de opción fue una contribución de Louis Bachelier [1]. Sin embargo, su trabajo tenía limitaciones pues los precios de los activos podían tomar valores negativos. Para el año de 1965, Paul Samuelson [18], introduce el concepto de lo que hoy se conoce como movimiento Browniano geométrico, este garantiza que un activo no tenga un precio negativo. Años más tarde (1973), Black y Scholes [2] obtienen una fórmula para valuar una opción europea sobre una acción que no paga dividendos. Merton [13], por su parte tuvo resultados similares, pero su trabajo era aún más extenso, incluyendo la valuación de opciones con barrera.

En el mercado de derivados, uno de los más usados usado y conocidos son precisamente las opciones barrera. Una de las razones por la cuales las opciones barrera son muy populares, se debe al hecho de ser más baratas que las opciones estándar, además ofrecen un tipo de protección similar a las estándar. Una extensión natural de opciones con una barrera,es considerar las opciones barreras dobles, estas últimas son opciones que tienen una barrera por encima y por debajo del precio del bien subyacente, y la opción deja de tener valor dentro y fuera, tan pronto como una de las dos barreras es alcanzada. Aún cuando las opciones barrera doble de tipo knock-out en su versión call y put ya han sido analizadas ver Kunitomo e Ikeda (1992) [11] y Geman y Yor(1996) [16], nuestro objetivo es encontrar fórmulas de valuación para opciones barrera doble de tipo knock-out en su versión call, las cuales tienen una rebaja al alcance de alguna de las barreras y aquellas que no tocan ninguna barrera durante el tiempo de madurez.

Partiendo del modelo de Black-Scholes, se resuelve la ecuación backward a través del método de separación de variables con el fin de hallar la función de densidad que permite valuar opciones barreras dobles del tipo knock-out, que se anulan tan pronto una de las barreras se alcanza. Para el caso de las opciones que ofrecen un pago distinto de cero tan pronto se toca una de sus barreras, se encuentra la función de densidad de alcanzar la barrera superior partiendo de la ecuación backward; considerando la transformada de Laplace, se logra reducir la ecuación diferencial parcial a una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. Para encontrar la solución de dicha ecuación es necesario invertir

ÍNDICE GENERAL

la transformada de Laplace, en diversos artículos se han utlizado métodos numéricos para aproximar la inversa de la transformada de Laplace, el presente trabajo pretende encontrarla convirtiendo la integral de línea en una integral de contorno, lo cuál permitirá encontrar expresiones cerradas para la valuación de opciones. Finalmente, para determinar el valor de la integral de contorno hallada, se utiliza el Teorema de los Residuos de Cauchy. De manera similar, se encuentra la función de densidad de alcanzar la barrera inferior. Lo anterior nos permite obtener fórmulas de valuación para opciones call doble barrera del tipo knock-out, sin embargo, sólo nos centraremos en aquellas que ofrecen un reembolso al alcance de una de sus barreras y en aquellas que sobreviven hasta el tiempo de madurez.

La estrucutura de la tesis es la siguiente:

El capítulo 1, expone las bases para el desarrollo del trabajo. Primero se revisan conceptos de cálculo estocástico, luego se define el concepto de opción y se concluye con un análisis de la fórmula de valuación de Black y Scholes.

En el capítulo 3, se obtienen las funciones de densidad de transición y las densidades de barrera.

El capítulo 4, exhibe las expresiones analíticas encontradas para valuar las opciones call barreras dobles del tipo knock-out.

Finalmente en el capítulo 5, se presentan las conclusiones obtenidas a través del desarrollo de la tesis.

Capítulo 1

Preeliminares

En este capítulo se presentan en primer lugar las bases necesarias para el desarrollo del trabajo de tesis. La teoría de procesos estocásticos es indispensable para modelar la dinámica de las variables financieras, se hace énfasis en el concepto de movimiento Browniano geométrico pues es la base para construir un modelo que describa el precio de los activos y se observa la diferencia entre el cálculo diferencial y el cálculo estocástico.

Una vez revisados los conocimientos matemáticos primordiales para la lectura de éste trabajo, nuestra tarea es exponer conceptos financieros, se dá la definición de opción, una clasificación general y describimos los tipos de opciones que son utilizados frecuentemente en el mercado de derivados.

Finalmente, se hace un breve análisis de la fórmula de Black y Scholes para la valuación de opciones.

1.1. Procesos Estocásticos y Cálculo Estocástico

1.1.1. Procesos Estocásticos

Considere un sistema que puede caracterizarse por estar en cualquiera de un conjunto de estados previamente especificado. Suponga que el sistema evoluciona o cambia de un estado a otro a lo largo del tiempo de acuerdo a una cierta ley de movimiento, y sea X_t el estado del sistema al tiempo t. Si se considera que la forma en que el sistema evoluciona no es determinista sino provocada por algún mecanismo al azar, se puede considerar entonces que X_t es una variable aleatoria para cada valor del índice t. Esta colección de variables aleatorias define a un proceso estocástico, y sirve como modelo para representar la evolución aleatoria de un sistema a lo largo del tiempo.

La definición de proceso estocástico, puede enunciarse de la siguiente forma:

Definición 1.1.1. *Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias $\{X_t : t \in T\}$ parametrizada por un conjunto T, llamado espacio parametral, y con valores en un conjunto S llamado espacio de estados.*

`Observación 1.1.1.` *Se toma como espacio parametral al conjunto $T = \{0, 1, 2, .. \ldots\}$ o $T = [0, \infty)$, los elementos de T se interpretan como tiempos. En el primer caso se dice que el proceso es a tiempo discreto, y en general este tipo de procesos se denota por*

$\{X_n : n = 0, 1, ...\}$, *mientras que en el segundo caso el proceso es a tiempo continuo, y se denota por* $\{X_t : t \geq 0\}$ *[17]..*

`Observación 1.1.2.` *Cada* X_t*, está definido sobre un espacio medible* $(\Omega, \mathcal{F})$ *y toma valores en otro espacio de medida* $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$*, en donde* $B(\mathbb{R})$ *es la* σ*-álgebra de Borel sobre* $\mathbb{R}$ *(la* σ*-álgebra de Borel es la mínima* σ*-álgebra que contiene a todos los intervalos de la forma* $(-\infty, x]$*, con* $x \in \mathbb{R}$*).*

`Observación 1.1.3.` *Sean*

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espacio de probabilidad, es decir,* Ω *es un espacio muestral,* $\mathcal{F}$ *una* σ*-álgebra sobre* Ω *y* $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ *es una medida de probabilidad,*
- T *un intervalo de tiempo (*$T = [0, \infty)$*).*

Un proceso estocástico (de dimensión 1) es un mapeo $X : \Omega \times T \to \mathbb{R}$*, tal que para cada* $t \in T$ *la función*

$$X_t : \omega \to X(\omega, t) \equiv X_t(\omega) : \Omega \to \mathbb{R},$$

satisface que $X_t^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{F}$ *para toda* $x \in \mathbb{R}$*, es decir,* X_t *es una función* $\mathcal{F}$ *-medible.*

`Observación 1.1.4.` *Si* X_t *es un proceso estocástico, entonces para cada* $\omega \in \Omega$ *la función* $t \to X(\omega, t)$*, es llamada una trayectoria del proceso.*

`Observación 1.1.5.` *Un proceso es continuo si cada trayectoria es continua en cada punto de* T*.*

En general un proceso estocástico sirve como modelo para representar la evolución aleatoria de un sistema a lo largo del tiempo, por lo tanto, es útil para describir el comportamiento de las variables aleatorias en el tiempo.

1.1.2. Filtración

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad para modelar cierto experimento aleatorio. La σ-álgebra $\mathcal{F}$ es la estructura que agrupa a los eventos del experimento aleatorio a los cuales se les puede calcular su probabilidad. Suponga ahora que se consideran dos sub σ-álgebras $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ tales que $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F}_2$ contiene más información que $\mathcal{F}_1$, en el sentido de que un mayor número de conjuntos son considerados como eventos.

Podemos definir una filtración como sigue:

Definición 1.1.2. *Una filtración es una familia* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ *de* σ*-álgebras tales que* $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ *para toda* $t \in T$*.*

La familia $\mathbb{F}$ es creciente en el sentido de que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ cuando $s, t \in T$ y $s \leq t$. Se puede ver a una filtración como una estructura de información dinámica. La interpretación es que representa la información disponible en función del tiempo.

Definición 1.1.3. *La filtración natural o canónica de un proceso* X_n *es la sucesión de* σ*-álgebras definidas por* $\mathcal{F}_n = \{X_1, ..., X_n\}, n \geq 1$*.*

Nótese que se puede adaptar un proceso estocástico a una filtración, la definición se da a continuación.

Definición 1.1.4. *Se dice que un proceso X es adaptado a una filtración $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ si la variable X_t es $\mathcal{F}_t$-medible, para todo t.*

1.1.3. Martingalas

El concepto de martingala desempeña un papel esencial en el modelado de los mercados financieros y en la valuación teórica de muchos instrumentos financieros. Podemos definir una martingala a tiempo discreto como sigue:

Definición 1.1.5 (Martingala a tiempo discreto). *El proceso estocástico $X = (X_n,\ n = 0, 1, ...,)$ es llamado una martingala a tiempo discreto con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_n, n = 0, 1, ...,)$, denotada por $(X, (\mathcal{F}_n))$, si*

- *$E|X_n| < \infty$, para toda $n = 0, 1, ..,$*
- *X es adaptado a $(\mathcal{F}_n)$,*
- *$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$, para todo $n = 0, 1, ...$.*

Por otro lado, a tiempo continuo se tiene,

Definición 1.1.6 (Martingala a tiempo continuo). *El proceso estocástico $X = (X_t,\ t \geq 0)$ es llamado una martingala a tiempo continuo con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$, denotada por $(X, (\mathcal{F}_t))$, si*

- *$E|X_t| < \infty$, para toda $t \geq 0$,*
- *X es adaptado a $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$,*
- *$E(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$, para todo $0 \leq s < t$.*

1.1.4. Movimiento Browniano

En 1828, el botánico Robert Brown [3] reportó en una revista científica que granos de polen suspendidos en una cierta sustancia y vistos a través de un microscopio, realizaban un movimiento irregular e inexplicable, al cual se le conoce hoy en día como movimiento Browniano. El extraño movimiento fué objeto de discusión y controversia a partir de su divulgación a la comunidad científica. Para dar una explicación satisfactoria de dicho fenómeno tomó años, pues debió aceptarse la teoría cinético molecular de la materia y el trabajo de Einstein de 1905 [7].

Sin embargo, en 1900, Luis Bachelier en su tesis *Theorie de la spéculation*, la cual trata sobre el modelado del comportamiento aleatorio de los precios correpondientes a las acciones en la bolsa de París, se anticipó a Einstein con la formulación matemática del movimiento Browniano, abordando un problema distinto al de la mecánica estadística o al del movimiento errático de partículas de polen.

Para el desarrollo del trabajo, es necesario definir a continuación el concepto de movimiento Browniano.

Definición 1.1.7. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad fijo, el movimiento Browniano (estándar y unidimensional) es una función*

$$W : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R},$$

tal que para cada $t \geq 0$, la función

$$W(t, .) : \Omega \to \mathbb{R},$$

es una variable aleatoria definida en $(\Omega, \mathcal{F})$, la familia de variables aleatorias $W(t,)$, se denotará como $\{W_t\}_{t \geq 0}$. Mientras que para cada $\omega \in \Omega$ la función

$$W(., \omega) : \Omega \to \mathbb{R},$$

es continua en $[0, \infty)$, las funciones $W(., \omega)$ son llamadas trayectorias y se denotan por $\omega(t)$. La familia $\{W_t\}_{t \geq 0}$ satisface adicionalmente las siguientes condiciones:

1. *El proceso empieza en $t = 0$ con probabilidad 1, es decir,*

$$P\{\omega \in \Omega | W_0(\omega) = 0\} = 1.$$

2. *Para cualquier conjunto de tiempos $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$, los incrementos $W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, ..., W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ son independientes.*

3. *Para cualesquiera tiempos t y s con $0 \leq s < t$, $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.*

4. *W_t es una función continua en t.*

1.2. Proceso de Wiener

Las condiciones que aparecen en la definición de movimiento Browniano son consecuencia de las observaciones del fenómeno físico, pero no garantiza que tal objeto matemático exista. En 1923, el matemático Norbert Wiener (para mayores detalles consultar [19], de origen norteamericano, demostró la existencia y unicidad de un proceso con tales condiciones.

Una primera diferencia entre el proceso de Wiener y el movimiento es que el primero considera una filtración $\mathbb{F}$ y el segundo no. Es decir, el movimiento Browniano es independiente del concepto de filtración. La segunda diferencia que se observa es la ausencia del requerimiento de incrementos independientes en el proceso de Wiener [19].

Definición 1.2.1. *Un proceso estocástico W_t es un proceso de Wiener relativo a la filtración $\mathbb{F}$ si cumple las siguientes condiciones:*

- $P\{\omega \epsilon \Omega | W_0(\omega) = 0\} = 1,$
- *W_t es continuo en t,*
- *W_t es adaptado a $\mathbb{F}$,*
- *Si $0 \leq s < t$, entonces $W_t - W_s$ es independiente de $\mathcal{F}$ y*
  $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s).$

1.3. Movimiento Browniano Geométrico

En 1900, Bachelier en su tesis *Theorie de la spéculation* describió los precios de las acciones de la bolsa de París por medio del movimiento Browniano, sin embargo, los precios de los activos no pueden ser descritos por el movimieno Browniano estándar, ya que los precios no parten de cero [19]. En 1973, Black-Sholes [2] y Merton [12] sugirieron otro proceso estocástico como un modelo para especular precios.

El movimiento Browniano geométrico se obtiene mediante una transformación exponencial del movimiento Browniano estándar. Específicamente, si W_t es un movimiento Browniano estándar, μ es una constante (tendencia), σ es una constante positiva (volatilidad) y S_0 es el precio inicial conocido, entonces el proceso

$$S_t = S_0 e^{\{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\}},$$

es llamado movimiento Browniano geométrico. Este proceso se utiliza para describir el cambio porcentual del precio de un activo. Note que

$$ln(S_t) = ln(S_0) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t.$$

Por lo tanto, la distribución de $ln(S_t)$ es normal con

- $E[ln(S_t)] = ln(S_0) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t,$
- $Var[ln(S_t)] = \sigma^2 t.$

1.3.1. Cálculo Estocástico

El cálculo estocástico o cálculo de Itô es una de las herramientas más útiles en la matemática financiera moderna, sobre la cual descansa prácticamente toda la teoría económica.

En términos estrictos, el objeto de estudio del cálculo estocástico es la integral y no la diferencial. Cuando se escribe una ecuación diferencial estocástica, se está pensando en una integral estocástica, así pues, una ecuación diferencial estocástica es una notación simplificada de una integral estocástica [19].

1.3.2. Integral de Itô

La integral estocástica o integral de Itô, denotada como,

$$V_t \equiv \int_0^t f(s)dW_s, \tag{1.1}$$

es el proceso estocástico tal que

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) - V_t\right]^2 = 0 \tag{1.2}$$

donde $(W_t)_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano estándar y $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = t$ es una partición del intervalo $[0, t]$, tal que $t_i - t_{i-1} = \frac{t}{n}$, $i = 1, 2, ..., n$. La convergencia es en media cuadrática, es decir, en $\mathcal{L}_t^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, en general la convergencia en media q se define a continuación.

Definición 1.3.1 (Convergencia en $\mathcal{L}^q$). *Sea $X_{n n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias definidas sobre algún espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tales que $E\left[|X_n|^q\right] < \infty$ y*

$$E\left[|X_n - X|^q\right] \to 0$$

cuando $n \to \infty$.

Es sumamente importante enfatizar que el integrando, $f(s)$, el cual puede ser determinista o estocástico, está evaluado en el extremo izquierdo del intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Esta elección es natural en finanzas, ya que se asegura que el futuro no interviene en las acciones presentes. La definición de integral estocástica requiere que la función $f(s)$, se valúe siempre en t_{i-1}. Cuando $f(s) = g(W_s)$, se supondrá que el valor de $f(s)$ depende sólo de los valores pasados de W_u, $u \leq s$. Así mismo, se supondrá que

1. $\int_0^t f(s)^2 ds < \infty$, casi donde quiera,

2. $\int_0^t E\left[f^2(s)\right]\, ds < \infty$.

La condición 1) garantiza que la integral de Itô, $\int_0^t f(s)dW_s$, esté bien definida y la condición 2) asegura que la varianza de $\int_0^t f(s)dW_s$, se mantenga finita.

La integral de Itô cumple las siguientes propiedades:

- Linealidad: Si f y g son funciones tales que sus integrales de Itô existen y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces,

$$\int_0^t (\alpha f(s) + \beta g(s))\, dW_s = \alpha \int_0^t f(s)dW_s + \beta \int_0^t g(s)dW_s.$$

- Isometría: Si f es una función tal que la integral de Itô existe, entonces

$$E\left[(\int_0^t f(s)dW_s)^2\right] = E\left[\int_0^t f(s)^2 ds\right] = \int_0^t E\left[f(s)^2\right] ds.$$

- Propiedad de Martingala: Si f es una función tal que la integral de Itô existe, entonces

$$E\left[\int_0^t f(s)dW_s | \mathcal{F}_u\right] = \int_0^u f(s)dW_s,$$

  siempre que $0 < u < t$.

Recordemos que la convergencia es en media cuadrática, así

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\sum_{i=1}^n (\Delta W_{t_i})^2 - t\right]^2 = 0.$$

En consecuencia

$$\int_0^t (dW_s)^2 \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\Delta W_{t_i})^2 = t.$$

Es decir,

$$\int_0^t (dW_s)^2 = t.$$

Por otro lado, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\sum_{i=1}^{n} W_{t_{i-1}}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) - \frac{1}{2}(W_t^2 - t)\right] = 0.$$

De esta manera

$$\int_0^t W_s\, dW_s \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} W_{t_{i-1}}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) = \frac{1}{2}(W_t^2 - t).$$

En general, la integral estocástica es el límite en media cuadrática de una suma de términos que comprenden incrementos independientes de un movimiento Browniano geométrico. Sin embargo, en finanzas y economía, con frecuencia se simplifica esta notación a una ecuación diferencial estocástica de la forma

$$dS_t = \mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t. \tag{1.3}$$

la cual tiene sentido cuando se lleva a su forma integral.

1.3.3. Reglas Básicas de Diferenciación Estocástica

La diferencia principal entre el cálculo de variables reales y el cálculo estocástico, radica en que el cuadrado de una cantidad infinitesimal es significativo en el segundo, mientras que no lo es para el primero. Podemos resumir con lo anterior, que las reglas básicas de diferenciación estocástica, son como sigue

	dt	dW_t
dt	0	0
dW_t	0	dt

1.3.4. Lema de Itô

Definición 1.3.2. *Sea una función $y = f(S_t, t)$, cuyas derivadas parciales de segundo orden son continuas. Entonces*

$$y_t = y_0 + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial u} du + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial S_u} dS_u + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial S_u^2}(dS_t)^2. \tag{1.4}$$

Es decir, dado que $(dW_t)^2 = dt$, conviene calcular la diferencial de $y = f(S_t, t)$ considerando los términos de segundo orden en una expansión en serie de Taylor, [13].

$$
\begin{aligned}
dy &= \frac{\partial f}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial f}{\partial t} dt \\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}(dS_t)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial S_t \partial t}(dS_t)(dt) + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2\right).
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

1.4. Opciones

Las opciones son ejemplos de valores derivados que cotizan en la bolsa de valores, es decir, los valores cuyo valor depende del precio de los otros valores más básicos denominados valores primarios, como acciones o bonos. Aún cuando las opciones han cambiado con el paso de los siglos, la expansión sin precedentes del mercado de opciones ha comenzado recientemente con la introducción en 1973 de las opciones que cotizan en la bolsa en Estado Unidos [14].

1.4.1. ¿Qué es una Opción?

Una opción es un contrato que da a su poseedor el derecho a vender o comprar un bien subyacente a un precio fijo [14].

1.4.2. Tipos de Opciones

En general, se pueden dividir las opciones en dos clases:

- Una opción (financiera) call (de compra), o contrato de opción de compra, es un acuerdo entre dos partes que obliga (legalmente) a una de las partes a vender un activo financiero, mientras que a la contraparte le otorga el derecho, más no la obligación de comprar dicho activo a un precio preestablecido en una fecha futura. Se supone que la compra-venta sólo se puede llevar a cabo en la fecha de vencimiento. Se acostumbra decir que el comprador toma una posición larga y el vendedor una posición corta [19].

- Una opción put (de venta), dá al propietario el derecho de vender un activo en una fecha dada a un precio determinado [14].

Suponga que el contrato de una opción se establece al tiempo t (el presente) y que la compra-venta del activo en un precio predeterminado K, se lleva a cabo en una fecha futura, T. El precio pactado K, es llamado el precio del ejercicio (de la opción). En este caso, es importante mencionar que en el momento en que se celebra el contrato no se paga la prima (o precio del derecho) sino hasta su vencimiento.

Puesto que el valor que puedan tener las opciones depende de otro bien, que es el bien subyacente, se conocen como derivados financieros.

Las opciones más comerciales son las siguientes:

Opción Europea. Para una opción europea, la fecha de vencimiento T y el precio de ejercicio K están dados de antemano. En particular, el tenedor no puede ejercer la opción con anterioridad a la fecha de vencimiento. Igual que para la mayoría de las opciones, tiene sus versiones put y call.

Opción Americana. Otorga al tenedor el derecho de ejercer en cualquier momento, antes de la fecha de vencimiento y en el vencimiento.

Opción Asiática. Le da al tenedor el derecho de comprar (para un call) o de vender (para un put) las acciones subyacentes al precio que es el promedio del precio de la acción hasta la fecha de vencimiento especificada T.

Opción Compuesta. Una opción compuesta es una opción cuyo sub-yacente es otra opción. Evidentemente, la prima por ejercer una opción compuesta involucra el valor de otra opción, en consecuencia tiene dos fechas de vencimiento y dos precios del ejercicio.

Opción Lookback. Le dan al tenedor el derecho de vender o de comprar (según sea put o call) en un precio igual al máximo o mínimo del precio de la acción hasta la fecha pre-especificada T.

Opción Potencia. Una opción potencia es una contrato en el que una de las partes (la posición larga) adquiere el derecho de recibir, en una fecha futura la diferencia entre el precio de una activo elevado a una potencia y el precio del ejercicio; como contraprestación el tenedor entrega una prima a la contraparte (la posición corta).

Opciones Vanilla o Estándar. Una opción vanilla simple es el tipo estándar de la opción, uno con una fecha de vencimiento simple y precio de ejercicio y sin características adicionales.

Opciones con Barrera. Las opciones con barreras se pueden ejercer si durante la vida de la opción el precio de la acción subyacente es siempre mayor (o siempre menor) que cierto valor X_0 (la barrera) o alternativamente, si esta barrera se alcanza durante la vida de la opción. El valor del derecho contingente de una opción barrera, depende de toda la historia bursátil.

Las opciones barreras dependen de las trayectorias. Una opción que depende de la trayectoria es una opción cuyo pago no sólo depende del precio del bien subyacente al expirar; si no que también depende de la historia pasada.

Las opciones barreras difieren de las opciones vainilla en que parte del contrato de la opción es ocasionado si el precio del bien subyacente, S, alcanza una cierta barrera, B, en un tiempo anterior a expirar. El derecho a ejercer la opción puede ser abandonado en esta barrera, una barrera out, o la barrera sólo existe si el precio del bien cruza un cierto valor, una barrera in. Las opciones barrera pueden ser una opción put o una opción call y son clasificadas como:

Up-and-out (Sube y sale): La opción caduca sin valor si el precio de la acción sube hasta la barrera $S = X_0$, (i.e., la barrera es alcanzada desde abajo) antes del día de vencimiento.

Down-and-in (Baja y entra): La opción caduca sin valor a menos que la barrera $S = X_0$ sea alcanzada desde arriba antes del vencimiento.

Down-and-out (Baja y sale): La opción caduca sin valor si el precio de la acción cae hasta la barrera $S = X_0$ (i.e., la barrera es alcanzada desde arriba) antes del vencimiento.

Up-and-in (Sube y entra): La opción caduca sin valor a menos que la barrera $S = X_0$ sea alcanzada desde abajo antes del vencimiento.

Opciones Barrera Doble: Estas opciones son similares a la opciones barrera, la diferencia es que las opciones barrera doble, tienen una barrera por encima y por debajo del precio del subyacente.

El inversionista podrá fijar dos límites (barreras absorbentes) a los cuales considere que el activo pueda llegar. Si el activo toca alguno de ellos, el inversionista será acreedor al valor predeterminado, de lo contrario la opción valdrá cero. Este tipo de opción es bastante popular en el mercado de divisas - FOREX (el mercado FOREX es el mercado financiero de mayor tamaño y liquidez, la mayoría de las transacciones se llevan a cabo entre el dólar estadounidense (USD), el euro (EUR), el yen (JPY), la libra esterlina (GBP), el franco suizo (CHF) y los dólares australiano (AUD) y canadiense (CAD))- y es utilizado por inversionistas que predicen cambios bruscos pero no saben con exactitud en qué dirección.

Existen cuatro tipos de opciones doble barrera:

- *Call up-and-out-down-and-out:* si el subyacente toca la barrera superior o inferior la opción se desactiva.
- *Call up-and-in-down-and-in:* si el subyacente toca cualquiera de las dos barreras la opción se activa.
- *Put up-and-out-down-and-out:* si el subyacente toca la barrera superior o inferior la opción se desactiva.
- *Put up-and-in-down-and-in:* si el subyacente toca cualquiera de las dos barreras la opción se activa.

El presente trabajo de tesis se centra precisamente en éste tipo de opciones debido al hecho de ofrecer una protección similar a las opciones estándar y ser más baratas que estas últimas. Nuestra tarea ahora es describir el precio de una opción con un modelo matemático.

1.5. Modelo de Black-Scholes

En 1973, Fisher Black y Myros Scholes publicaron su artículo *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* [2]. En su investigación, bajo el supuesto de un equilibrio general (condiciones de no arbitraje), desarrollaron un modelo para valuar opciones europeas sobre una acción que no paga dividendos y cuya dinámica es conducida por un movimiento geométrico Browniano. Black y Scholes obtienen una ecuación diferencial parcial de segundo orden (parabólica) y lineal cuya solución es el precio de una opción europea. Esta ecuación es muy popular en el sector financiero y representa la base para valuar diversos productos derivados [19].

1.5.1. El Precio de un Activo como una Ecuación Diferencial Estocástica

Antes del análisis, véase que se puede modelar el comportamiento del precio de un activo financiero mediante una ecuación diferencial estocástica. Una de las formas más sencillas para presentar una ecuación estocástica, para modelar el comportamiento del precio de un activo financiero consiste en describir primero su componente determinista o de tendencia y luego destacar la necesidad de agregar una componente de difusión o estocástica que modele los movimientos que se observan diariamente en precios.

Sean S_t el precio de un activo financiero al tiempo t, S_0 el precio inicial del activo y μ es el rendimiento (anualizado) medio esperado.

Al tiempo $t = 1$, el precio del activo será S_0 más el rendimiento esperado, es decir, $S_1 = S_0 + S_0\mu$. De la misma manera, al tiempo $t = 2$, $S_2 = S_1 + S_1\mu = S_0 + S_0\mu + (S_0 + S_0\mu)\mu = S_0(1+\mu)^2$.

En general, el precio al tiempo t, está dado por

$$S_t = S_{t-1} + S_{t-1}\mu = S_0(1+\mu)^t. \tag{1.6}$$

Si se sustituye una tasa de crecimiento compuesta n veces en cada periodo en (1.6), se tiene que

$$S_t = S_{t-1} + S_{t-1}\mu = S_0(1+\frac{\mu}{n})^{nt}. \tag{1.7}$$

Si se fija t y $nt \to \infty$, entonces

$$S_t = S_0(1+\frac{\mu}{n})^{nt} \to S_0 e^{\mu t}. \tag{1.8}$$

De esta manera, el precio del activo que crece geométricamente con tiempo discreto a una tasa constante μ, ahora crece exponencialmente en tiempo continuo. Nótese que hemos encontrado una solución de la ecuación diferencial siguiente

$$\frac{dS_t}{dt} = \mu S_t. \tag{1.9}$$

Una forma equivalente de escribir la ecuación anterior es

$$\frac{dS_t}{S_t}\frac{1}{dt} = \mu. \tag{1.10}$$

Es decir, la tasa de crecimiento por unidad de tiempo es constante.

Para darle realismo al comportamiento de la dinámica del precio de un activo, se agrega un parámetro σ que representa la volatilidad (anualizada) del activo en cuestión. También se agrega la variable aleatoria dW_t, la cual modela el riesgo de mercado, es decir, las fluctuaciones en los rendimientos que se observan todos los días. Observe que ahora S_t es función de la variable continua t. Se dice, en este caso que el precio del activo sigue un movimiento Browniano o simplemente, que el precio S_t es log-normal. Finalmente, se puede modelar la dinámica del precio de un activo como

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t. \tag{1.11}$$

1.5.2. Dinámica del Precio del Subyacente

A continuación, se presenta formalmente el modelo de la dinámica del precio de un activo.

Considere un movimiento Browniano geométrico $(W_t)_{t\in[0,T]}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada i.e., $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^W)_{t\in[0,T]}, P)$. Se supone que el precio del activo subyacente al tiempo t, S_t, es conducido por el movimiento Browniano geométrico, esto es,

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \tag{1.12}$$

El parámetro de tendencia $\mu \in \mathbb{R}$, representa el rendimiento medio esperado y $\sigma > 0$, es la volatilidad instantánea por unidad de tiempo.

Si $y = lnS_t$, entonces aplicando el Lema de Itô en su fórmula diferencial, se tiene

$$dlnS_t = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_t, \tag{1.13}$$

lo que implica que

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}. \tag{1.14}$$

1.5.3. Modelo de Black-Scholes

Los supuestos básicos del modelo de Black-Scholes son los siguientes:

1. El activo subyacente no paga dividendos durante la vida del contrato.
2. El precio es log-normal, es decir, el precio del activo es conducido por el movimiento Browniano geométrico.
3. La volatilidad del precio del activo permanece constante a través del tiempo.
4. Las ventas en corto del subyacente son permitidas.
5. El subyacente se puede vender o comprar en cualquier fracción de unidad.
6. No hay costos de transacción.
7. El mercado opera en forma continua.
8. Existe un mercado de crédito.
9. No hay oportunidades de arbitraje, es decir, los mercados están en equilibrio.

1.6. Dinámica del Precio de la Opción

El valor de una opción call europeo es función de distintos parámetros que interviene en las cláusulas del contrato

- El precio del ejercicio K.
- La vida del contrato $T-t$, donde T es la fecha de vencimiento y t es la fecha de inicio del contrato.
- S_t, el precio del activo subyacente.
- μ, rendimiento esperado.
- σ, la volatilidad.
- r, la tasa de interés.

Por lo anterior, se puede escribir el valor de una opción como

$$c = c(S_t, t; K, T, \sigma, \mu, r). \tag{1.15}$$

Simplificando la notación anterior, esto es: $c = c(S_t, t)$.

En el intervalo de tiempo $[t, t+dt]$, el activo cambia de S_t a $S_t + dS_t$, el precio de la opción cambia de $c(S_t, t)$ a $c + dc$. Mediante el lema de Itô, el cambio marginal del precio se obtiene como

$$dc = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S_t}\sigma S_t dW_t. \tag{1.16}$$

Considere ahora un portafolio con ω_1 unidades del activo con precio S_t y ω_2 unidades de una opción de compra sobre el subyacente con precio $c(S_t, t)$. Sea Π_t el valor actual del portafolio, entonces

$$\Pi_t = \omega_1 S_t + \omega_2 c(S_t, t). \tag{1.17}$$

El cambio en el valor del portafolio, durante el instante dt, está dado por

$$d\Pi_t = \omega_1 dS_t + \omega_2 dc. \tag{1.18}$$

Sustituyendo (1.12) y (1.17) en (1.18) se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= \left(\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial c}{\partial S_t}\right) \mu S_t dt + \left(\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial c}{\partial S_t}\right) \sigma S_t dW_t \\ &+ \omega_2 \left(\frac{\partial c}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 {S_t}^2 \right) dt. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Con el fin de eliminar el riesgo de mercado de dicho portafolio, se seleccionan ω_1 y ω_2, tales que se anule el término estocástico de la ecuación (1.18), así

$$\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial c}{\partial S_t} = 0. \tag{1.20}$$

Claramente, existen infinidad de posibilidades para lograr este objetivo (Véase [19]). Tómese a $\omega_2 = 1$ y $\omega_1 = -\frac{\partial c}{\partial S_t} := -\Delta$, de esta manera

$$d\Pi_t{}^{(\Delta)} = \left(\frac{\partial c}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t{}^2 \right) dt. \tag{1.21}$$

Esta elección del portafolio se conoce como cobertura Delta, dicha cobertura es aplicable sólo durante un instante de tiempo dt. Si empleamos esta cobertura en (1.17), el valor del portafolio resultante es

$$\Pi_t^{(\Delta)} = c - \Delta S_t, \tag{1.22}$$

esto significa que se cubre una venta en corto con una opción de compra. Si esta cantidad se deposita en un banco que paga una tasa de interés r, entonces el cambio en el valor del portafolio, durante dt, es

$$d\Pi_t^{(r)} = \Pi_t^{(\Delta)} r dt = (c - \Delta S_t) r dt. \tag{1.23}$$

Bajo el supuesto de equilibrio general, se tiene

$$d\Pi_t^{(\Delta)} = d\Pi_t^{(r)}. \tag{1.24}$$

De forma equivalente se puede escribir como

$$\left(\frac{\partial c}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t{}^2 \right) dt = \left(-\frac{\partial c}{\partial S_t} S_t + c \right) r dt. \tag{1.25}$$

De forma equivalente

$$\frac{\partial c}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t{}^2 + \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t r - rc = 0, \tag{1.26}$$

esta ecuación es conocida como la ecuación diferencial de Black-Scholes. Las condiciones de frontera y final para determinar una solución única están dadas, respectivamente, por

$$c(0, t) = 0, \text{ y } c(S_t, T) = \text{máx}(S_t - K, 0).$$

La ecuación (1.26) es una ecuación diferencial parcial lineal parabólica, lo que significa que se puede llevar a una ecuación de difusión de calor, como la siguiente [10],

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.27}$$

con $-\infty < x < \infty$, $\tau > 0$, junto con la condición de frontera

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

La ecuación de Black-Scholes contiene todas las variables que determinan el valor del contrato y los parámetros tales como el precio de contado del activo subyacente, el tiempo y la volatilidad, pero no hace mención al rendimiento medio esperado μ. Cualquier dependencia sobre μ se ha eliminado al anular el coeficiente dW_t en el cambio del valor del portafolio, observe que en su lugar aparece la tasa de interés libre de riesgo r.

1.6.1. De la ecuación de Black- Scholes a la Ecuación del Calor

Considere la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes del precio de una opción europea de compra, $c = c(S_t, t)$, la cuál está dada por

$$\frac{\partial c}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 {S_t}^2 + \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t r - rc = 0, \tag{1.28}$$

junto con las condiciones de frontera $c(0,t) = 0$, $c(S_t, t) \approx S_t$ cuando $S_t \to \infty$ y $c(S_t, T) = max(S_t - K, 0)$.

Para transformar la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes en la ecuación de difusión de calor se requieren varios cambios de variables. Considere primero los siguientes cambios de variables y la definición de un parámetro adimensional:

$$S_t = Ke^{x_t}, \tag{1.29}$$

$$t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2}, \tag{1.30}$$

$$k = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}. \tag{1.31}$$

Las variables x_t y τ representan respectivamente, el diferencial de los logaritmos entre el precio del activosubyacente y el precio del ejercicio y el tiempo invertido yendo de la fecha de vencimiento hacia atrás, salvo el valor constante $\frac{1}{2}\sigma^2$. Bajo estos cambios de variable el precio de la opción se denotará por

$$c(S_t, t) = Kv(x_t, \tau)$$

De manera inmediata se puede ver que el valor intrínseco de la opción de compra safisface:

$$\begin{aligned} (S_t, T) &= max(S_t - K, 0) \\ &= max(Ke^{x_t} - K, 0) \\ &= Kmax(e^{x_t} - 1, 0) \\ &= Kv(x_t, 0) \end{aligned} \tag{1.32}$$

De (1.29) y (1.30) se sigue que

$$x_t = ln(\frac{S_t}{K}) \tag{1.33}$$

$$\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T - t). \tag{1.34}$$

En consecuencia,

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} Kv(x_t, \tau) = K\frac{\partial v}{\partial \tau}(\frac{1}{2}\sigma^2). \tag{1.35}$$

$$\frac{\partial c}{\partial S_t} = \frac{\partial}{\partial S_t} Kv(x_t, \tau) = e^{-x_t}\frac{\partial v}{\partial x_t} \tag{1.36}$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} = \frac{\partial}{\partial S_t}(e^{-x_t}\frac{\partial v}{\partial x_t}) = \frac{1}{K}(e^{-2x_t}\frac{\partial^2 v}{\partial x_t^2} - e^{-2x_t}\frac{\partial v}{\partial x_t}). \tag{1.37}$$

Sustituyendo (1.35),(1.36) y (1.37) en (1.28) se obtiene el siguiente resultado

$$-\frac{1}{2}K\sigma^2\frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{1}{2}K^2e^{2x_t}\sigma^2(e^{2x_t}\frac{\partial^2 v}{\partial x_t^2} - e^{-2x_t}\frac{\partial v}{\partial x_t})\frac{1}{K} + rKe^{x_t}\frac{\partial v}{\partial x_t}e^{-x_t} - rKv = 0 \tag{1.38}$$

Equivalentemente

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_t^2} + \frac{\partial v}{\partial x_t} - \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}\frac{\partial v}{\partial x_t} + \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}v = 0 \tag{1.39}$$

En virtud de la definición de k, se tiene

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_t^2} + (k-1)\frac{\partial v}{\partial x_t} - kv \tag{1.40}$$

Se requiere de un segundo cambio de variable, defina ahora

$$v(x_t,\tau) = e^{\alpha x_t + \beta\tau}u(x_t,\tau) \tag{1.41}$$

calculando las parciales

$$\frac{\partial v}{\partial x_t} = e^{\alpha x_t + \beta\tau}(\frac{\partial u}{\partial x_t} + \alpha u), \tag{1.42}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_t^2} = e^{\alpha x_t + \beta\tau}(\frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2} + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial x_t} + \alpha^2 u), \tag{1.43}$$

Además,

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = e^{\alpha x_t + \beta\tau}(\frac{\partial u}{\partial \tau} + \beta u), \tag{1.44}$$

Si se sustituyen las ecuaciones (1.42), (1.43) y (1.44) en (1.40), se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \beta u = \sigma^2 u + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial x_t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2} + (k-1)(\frac{\partial u}{\partial x_t} + \alpha u) - ku, \tag{1.45}$$

o bien,

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u[\beta - \alpha^2 - (k-1)\alpha + k] = \frac{\partial u}{\partial x_t}(2\alpha + k - 1) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2}. \tag{1.46}$$

Si α y β en (1.46) de tal manera que

$$2\alpha + k - 1 = 0 \tag{1.47}$$

y

$$\beta - \alpha^2 - (k-1)\alpha + k = 0 \tag{1.48}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}(k-1) \tag{1.49}$$

y

$$\beta = -k - \alpha^2 \tag{1.50}$$

Finalmente si se sustituyen estos últimos valores en (1.46), se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2}, \tag{1.51}$$

$-\infty < x_t < \infty$, $\tau > 0$ junto con la condición de frontera

$$u(x_t, 0) = u_0(x_t) = max(e^{\frac{1}{2}(k+1)x_t - \frac{1}{4}(k-1)x_t}, 0) \tag{1.52}$$

1.6.2. Función de Densidad Condicional del Precio de un Activo

Aplicando el lema de Itô a la ecuación

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t. \tag{1.53}$$

se produce que

$$d(lnS_t) = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_t. \tag{1.54}$$

Si se discretiza a (1.53) con $\Delta t = T - t$, se puede escribir como

$$lnS_T - lnS_t = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\mathcal{E}\sqrt{T-t}, \tag{1.55}$$

donde $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Por lo tanto,

$$ln(\frac{S_T}{S_t}) \sim \mathcal{N}((r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t), \sigma^2(T-t)). \tag{1.56}$$

Ahora, si se define a

$$g(\mathcal{E}) := S_T = S_t e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma\mathcal{E}\sqrt{T-t}}. \tag{1.57}$$

Se tiene que

$$g^{-1}(S_T) := \frac{ln(\frac{S_T}{S_t}) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \tag{1.58}$$

La función de densidad de S_T dado S_t está dada por la expresión siguiente

$$f_{S_T|S_t}(s|S_t) = \phi_{\mathcal{E}}(g^{-1}(s)) \left| \frac{dg^{-1}(s)}{ds} \right|, \tag{1.59}$$

donde $\phi_{\mathcal{E}}(\cdot)$ es la función de densidad de una variable aleatoria normal estándar. Por otro lado, el Jacobiano de la transformación satisface que

$$\left| \frac{dg^{-1}(s)}{ds} \right| = \frac{1}{s\sigma\sqrt{T-t}}. \tag{1.60}$$

En consecuencia, la función de densidad de S_T condicional a S_t está dada por la expresión:

$$
\begin{aligned}
f_{S_T|S_t}(s|S_t) &= \frac{1}{s\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \\
&\times \; exp\{-\frac{1}{2}(\frac{ln(\frac{s}{S_t})-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}})^2\}.
\end{aligned} \tag{1.61}
$$

1.6.3. Ecuación Backward (Hacia Atrás)

Sea $x = S_t$ y $y = s$, las cantidades t y x son llamadas variables hacia atrás, luego (1.61) se escribe como

$$
\begin{aligned}
p(t,x;T,y) &= \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \\
&\times \; exp\{-\frac{1}{2}(\frac{ln(\frac{y}{x})-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}})^2\}.
\end{aligned} \tag{1.62}
$$

En este caso $p(t,x;T,y)$ satisface la ecuación diferencial parcial hacia atrás, esto es

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + rx\frac{\partial p}{\partial x} = 0. \tag{1.63}$$

Note que el precio de una opción europea de compra satisface lo siguiente

$$c = E\{e^{-r(T-t)}\text{máx}(S_T - K, 0)|\mathcal{F}_t\}, \tag{1.64}$$

es decir, que

$$
\begin{aligned}
c &= e^{-r(T-t)}\int_0^\infty \text{máx}(s-K,0) f_{S_T|S_t}(s|S_t)ds \\
&= e^{-r(T-t)}\int_K^\infty (s-K) f_{S_T|S_t}(s|S_t)ds,
\end{aligned} \tag{1.65}
$$

en términos de la notación de (1.62)

$$c(x,t) = e^{-r(T-t)}\int_K^\infty (y-K)p(t,x;T,y)dy, \tag{1.66}$$

entonces

$$e^{r(T-t)}c(x,t) = \int_K^\infty (y-K)p(t,x;T,y)dy \tag{1.67}$$

lo anterior nos conduce a que

$$e^{r(T-t)}\frac{\partial c}{\partial x} = \int_K^\infty (y-K)\frac{\partial p}{\partial x}dy, \tag{1.68}$$

$$e^{r(T-t)}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \int_K^\infty (y-K)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}dy, \tag{1.69}$$

y

$$e^{r(T-t)}\frac{\partial c}{\partial t} - re^{r(T-t)}c = \int_K^\infty (y-K)\frac{\partial p}{\partial t}dy. \tag{1.70}$$

Las ecuaciones (1.69),(1.70) y (1.71) implican que

$$\begin{aligned} & e^{r(T-t)}(\frac{\partial c}{\partial t} + rx\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - rc) \\ = & \int_K^\infty (y-K)(\frac{\partial p}{\partial t} + rx\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2})dy. \end{aligned} \tag{1.71}$$

Sin embargo, la expresión del lado izquierdo es la ecuación de Black Scholes y, por lo tanto, es igual a cero, como consecuencia se tiene

$$\frac{\partial p}{\partial t} + rx\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \tag{1.72}$$

La ecuación (1.73) es conocida como una ecuación diferencial parcial hacia atrás de Kolmogorov o ecuación backward. Denotemos con $\tau = T - t$ y con $p = p(\tau; x, y)$, luego se sigue que

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = rx\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \tag{1.73}$$

En el caso de la ecuación forward se tiene que

$$\begin{aligned} q(t,y;T,x) &= \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \\ &\times \ exp\{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln(\frac{x}{y}) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2\}, \end{aligned} \tag{1.74}$$

y se cumple que

$$\frac{\partial q}{\partial T} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 (y^2 q)}{\partial y^2} - r\frac{\partial (yp)}{\partial y}. \tag{1.75}$$

Capítulo 2

Funciones de Densidad

Una de las formas más sencillas para presentar una ecuación diferencial estocástica, que nos permita modelar el comportamiento del precio de un activo financiero, consiste en describir su componente de tendencia y luego agregar una componente estocástica capaz de modelar los movimientos que se observan diariamente. Si se supone que los activos subyacentes de la opción pueden ser modelados con un movimiento Browniano geométrico, encontramos el logaritmo del precio de un activo a través de la siguiente ecuación diferencial.

$$dz = \mu dt + \sigma dW, \tag{2.1}$$

donde μ y σ son constantes.

Sin embargo, nuestro interés se centra en opciones barrera doble, estas se pueden modelar asumiendo que el proceso z termina tan pronto una de sus dos barreras es alcanzada. Suponga que tenemos dos barreras, en 0 se encuentra la barrera inferior y en el nivel l la barrera superior. Dichas barreras son llamadas barreras absorbentes.

2.1. Función de Densidad de Transición

Sea $p(t, x; s, y)$ la función de densidad de transición, esta función describe la densidad de probabilidad de que el proceso z empiece en el tiempo t en $z(t) = x$ sobreviva hasta el tiempo s y termine al tiempo s en $z(s) = y$, donde $t \leq s$ y $0 \leq x, y \leq l$. Esta función de densidad de transición satisface las ecuaciones forward y backward [5].

Recordar que la ecuación backward está dada por

$$p_t + \mu p_x + \frac{1}{2}\sigma^2 p_{xx} = 0, \tag{2.2}$$

(los subíndices denotan derivadas parciales) sujeta a las condiciones de contorno $p(t, 0; ., .) = p(t, l; ., .) = 0$ y $p(s, x; s, y) = \delta(y - x)$, donde δ es la función delta de Dirac.

La ecuación forward está dada por

$$p(.,.,;s,y) = -p_s - \mu p_y + \frac{1}{2}\sigma^2 p_{yy} = 0, \tag{2.3}$$

sujeta a las condiciones de frontera $p(.,.;s,0) = p(.,.;s,l) = 0$ y $p(t,x;t,y) = \delta(x-y)$.

Se encuentra la solución para la ecuación backward a través del método de separación de variables [9].

Suponga que $p(t,s;.,.) = G(x)H(t)$, y sean

$$p_t = \frac{\partial p}{\partial t} = G(x)H'(t), \tag{2.4}$$

$$p_x = \frac{\partial p}{\partial x} = G'(x)H(t), \tag{2.5}$$

$$p_{xx} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = G''(x)H(t). \tag{2.6}$$

Notar que nos interesan la soluciones no triviales. De las condiciones de frontera, se puede observar lo siguiente:

`Observación 2.1.1.` *Como $p(t,0;.,.) = 0$, tenemos que*

$$p(t,0;.,.) = G(0)H(t) = 0.$$

Si $H(t) = 0$, entonces para todo t se tiene que $p(t,x;.,.) = 0$, por lo tanto, es una solución trivial, luego nuestro interés se centra en el caso en el que

$$G(0) = 0$$

`Observación 2.1.2.` *Por otro lado, $p(t,l;.,.) = 0$, así*

$$p(t,l;.,.) = G(l)H(t) = 0.$$

De manera similar, si $H(t) = 0$, entonces para todo t se tiene que $p(t,x;.,.) = 0$, lo que es una solución trivial, en consecuencia se toma en cuenta el caso en el que

$$G(l) = 0.$$

Si se sustituye (2.4), (2.5) y (2.6) en (2.2),entonces se tiene que

$$G(x)H'(t) + \mu G'(x)H(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 G''(x)H(t) = 0,$$

esto implica que

$$2G(x)H'(t) + 2\mu G'(x)H(t) + \sigma^2 G''(x)H(t) = 0,$$

es decir,

$$2G(x)H'(t) + H(t)[2\mu G'(x) + \sigma^2 G''(x)] = 0,$$

separando variables, se obtiene

$$-\frac{2H'(t)}{H(t)} = \frac{2\mu G'(x) + \sigma^2 G''(x)}{G(x)}. \tag{2.7}$$

Ambos miembros de la ecuación (2.7) son iguales a una misma constante k (constante de separación).

$$-2\frac{H'(t)}{H(t)} = \frac{\sigma^2 G''(x) + 2\mu G'(x)}{G(x)} = k. \tag{2.8}$$

De (2.8) se obtienen las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$-2H'(t) - kH(t) = 0, \tag{2.9}$$

$$\sigma^2 G''(x) + 2\mu G'(x) - kG(x) = 0. \tag{2.10}$$

Resolviendo primero la ecuación (2.9), se tiene que

$$-2H'(t) = kH(t),$$

o bien

$$\frac{H'(t)}{H(t)} = -\frac{k}{2},$$

así

$$ln[H(t)] = -\frac{k}{2}t + c,$$

donde c es una constante y $t \leq s$. Finalmente, la solución de $H(t)$ es

$$H(t) = Ae^{-\frac{kt}{2}}, \tag{2.11}$$

donde A es una constante.

Por otra parte, se puede observar que (2.10) es una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes. Para encontrar su solución, considerese su ecuación característica que se describe a continuación.

$$\sigma^2 r^2 + 2\mu r - k = 0.$$

En consecuencia, las raíces del polinomio característico son:

$$r = \frac{-2\mu \pm \sqrt{4\mu^2 + 4\sigma^2 k}}{2\sigma^2} = -\frac{\mu}{\sigma^2} \pm \frac{\sqrt{\mu^2 + \sigma^2 k}}{\sigma^2}$$

Puesto que nos interesan las soluciones no triviales, la siguiente tarea es analizar las soluciones posibles.

`Caso 1.` *Si $\mu^2 + \sigma^2 k = 0$, entonces la solución es*

$$G(x) = B_1 e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}x},$$

donde B_1 es una constante y $x \in [0, l]$. Como consecuencia de las condiciones de frontera, en particular de la observación 2.1.1, se tiene que

$$G(0) = B_1 e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}(0)} = 0.$$

Nótese que $e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}(0)}$ nunca es cero, así

$$B_1 = 0.$$

Luego, se concluye que si $\mu^2 + \sigma^2 k = 0$ se tiene una solución trivial.

`Caso 2.` *Considere el caso en el que $\mu^2 + \sigma^2 k > 0$, la solución de la ecuación (2.10) es*

$$G(x) = Be^{(-\frac{\mu}{\sigma^2}+\frac{\sqrt{\mu^2+\sigma^2 k}}{\sigma^2})x} + Ce^{(-\frac{\mu}{\sigma^2}-\frac{\sqrt{\mu^2+\sigma^2 k}}{\sigma^2})x},$$

donde B y C son constantes y $x \in [0, l]$. Una vez más, por la observación 2.1.1, se puede notar que

$$G(0) = B + C = 0.$$

Sin embargo, la única posibilidad es que $B = C = 0$, la cuál también es una solución trivial.

`Caso 3.` *Finalmente considere el caso cuando $\mu^2 + \sigma^2 k < 0$, para B_1 y C_1 constantes reales, en este caso la solución para (2.10) es*

$$\begin{aligned}
G(x) &= B_1 e^{(-\frac{\mu}{\sigma^2}+i\frac{\sqrt{\mu^2+\sigma^2 k}}{\sigma^2})x} + C_1 e^{(-\frac{\mu}{\sigma^2}-i\frac{\sqrt{\mu^2+\sigma^2 k}}{\sigma^2})x} \\
&= e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}x}[B_1 e^{(i\frac{\sqrt{\mu^2+\sigma^2 k}}{\sigma^2})x} + C_1 e^{(-i\frac{\sqrt{\mu^2+\sigma^2 k}}{\sigma^2})x}] \\
&= e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}}\{B_1[cos(\frac{\sqrt{\mu^2+\sigma^2 k}}{\sigma^2}x) + isen(\frac{\sqrt{\mu^2+\sigma^2 k}}{\sigma^2}x)] \\
&+ C_1[cos(\frac{\sqrt{\mu^2+\sigma^2 k}}{\sigma^2}x) - isen(\frac{\sqrt{\mu^2+\sigma^2 k}}{\sigma^2}x)]\} \\
&= e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}x}\{(B_1+C_1)cos(\frac{\sqrt{\mu^2+\sigma^2 k}}{\sigma^2}x) + (iB_1 - iC_1)sen(\frac{\sqrt{\mu^2+\sigma^2 k}}{\sigma^2}x)\} \\
&= e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}x}\{Bcos(\frac{\sqrt{\mu^2+\sigma^2 k}}{\sigma^2}x) + Csen(\frac{\sqrt{\mu^2+\sigma^2 k}}{\sigma^2}x)\}.
\end{aligned}$$

donde $B = B_1 + C_1$, $C = iC_1 - iB_1$ y $x \in [0, l]$. Ésta es una solución no trivial, por lo tanto, es la de nuestro interés.

Luego, la solución para $p(t, x, ; ., .)$ está dada por

$$\begin{aligned}
p(t,x,;.,.) &= H(t)G(x), \\
&= Ae^{-\frac{kt}{2}}(Be^{-\frac{\mu}{\sigma^2}x}cos(\frac{\sqrt{\mu^2+\sigma^2 k}}{\sigma^2}x)) \\
&+ Ae^{-\frac{kt}{2}}(Ce^{-\frac{\mu}{\sigma^2}x}sen(\frac{\sqrt{\mu^2+\sigma^2 k}}{\sigma^2}x)) \\
&= Ae^{-\frac{kt}{2}-\frac{\mu}{\sigma^2}x}(Bcos(\frac{\sqrt{\mu^2+\sigma^2 k}}{\sigma^2}y) + Csen(\frac{\sqrt{\mu^2+\sigma^2 k}}{\sigma^2}y)).
\end{aligned}$$

Debido al hecho de que A, B y C son contantes, se pueden agrupar y renombrar como $D = AB$ y $E = AC$, entonces

$$p(t,x,;.,.) = e^{-\frac{kt}{2}-\frac{\mu}{\sigma^2}x}\left[Dcos(\frac{\sqrt{\mu^2+\sigma^2 k}}{\sigma^2}x) + Esen(\frac{\sqrt{\mu^2+\sigma^2 k}}{\sigma^2}x)\right].$$

Recuerde que esta ecuación está sujeta a las condiciones de frontera $p(t,0;.,.) = p(t,l;.,.) = 0$ y $p(s,x;s,y) = \delta(y-x)$, de la primera se tiene que

$$p(t,0,;.,.) = e^{-\frac{1}{2}kt}(Dcos(0) + Esen(0)) = De^{-\frac{1}{2}kt} = 0,$$

pero $e^{-\frac{1}{2}kt}$ nunca es cero, de donde se deduce que $D = 0$.

Considerando la segunda condición de frontera, se asume que

$$p(t,l;.,.) = e^{-\frac{kt}{2}-\frac{\mu}{\sigma^2}l}(Dcos(\frac{\sqrt{\mu^2+\sigma^2 k}}{\sigma^2}l) + Esen(\frac{\sqrt{\mu^2+\sigma^2 k}}{\sigma^2}l)) = 0,$$

como ya se sabe que $D = 0$, se sigue que

$$p(t,l,;.,.) = e^{-\frac{kt}{2}-\frac{\mu}{\sigma^2}l}Esen(\frac{\sqrt{\mu^2+\sigma^2 k}}{\sigma^2}l) = 0,$$

es claro que si $E = 0$, se ha encontrado una solución trivial, así pues nos interesa el caso cuando $E \neq 0$, es decir,

$$sen(\frac{\sqrt{\mu^2+\sigma^2 k}}{\sigma^2}l) = 0,$$

$n = 1,2,3,....,$
lo que es lo mismo que

$$\frac{\sqrt{\mu^2+\sigma^2 k}}{\sigma^2}l = n\pi,$$

de forma equivalente

$$\sqrt{\mu^2 + \sigma^2 k} = \frac{n\pi\ \sigma^2}{l},$$

si y sólo si

$$\left|\mu^2 + \sigma^2 k\right| = \frac{n^2\pi^2\ \sigma^4}{l^2}.$$

Sin embargo, un número elevado al cuadrado no puede ser negativo, así que

$$\mu^2 + \sigma^2 k = -\frac{n^2\pi^2\ \sigma^4}{l^2},$$

de donde se tiene que

$$k = -\frac{n^2\pi^2\ \sigma^2}{l^2} - \frac{\mu^2}{\sigma^2}.$$

Luego en términos de series de Fourier

$$p_n(t, x, ., .) = e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}x - \lambda_n t} E_n sen(\frac{n\pi x}{l}),$$

donde $\lambda_n = \frac{1}{2}(\frac{\mu^2}{\sigma^2} + \frac{n^2\pi^2\sigma^2}{l^2})$.

Así, la solución de la ecuación backward en términos de series de Fourier es como sigue

$$p(t, x; ., .) = e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}x} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} E_n sen(\frac{n\pi x}{l}).$$

De la última condición de frontera se tiene

$$p(s, x; s, y) = e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}x} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n s} E_n sen(\frac{n\pi x}{l}) = \delta(y - x).$$

Resta calcular los coeficientes E_n los cuales se obtienen resolviendo por el mismo método la ecuación forward, dicha solución está dada por

$$p(., .; s, y) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(., .; s, y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{\lambda_n s + \frac{\mu}{\sigma^2}y} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} y,$$

además la condición $p(t, x; t, y) = \delta(x - y)$ es equivalente a

$$p(t, x; t, y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{\lambda_n t + \frac{\mu}{\sigma^2}y} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} y = \delta(x - y).$$

Para calcular los coeficientes es necesario considerar lo siguiente.

`Observación 2.1.3.` *La función Delta de Dirac cumple las siguientes propiedades:*

1. $\delta(x) = \delta(-x)$,

2.

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)dx \quad = \quad \begin{cases} f(x_0)\ ,\ si\ \ a<x_0<b, \\ 0,\ si\ \ x_0<a\ \ \acute{o}\ \ b<x_0. \end{cases} \tag{2.12}$$

De manera inmediata se observa que

$$\begin{aligned} p(s,x;s,y) &= e^{\frac{\mu}{\sigma^2}x}\sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n s} E_n sen(\frac{n\pi x}{l}) \\ &= \delta(y-x) \\ &= \delta(-(x-y)) \\ &= \delta(x-y), \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{\lambda_n t+\frac{\mu}{\sigma^2}y} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}y \\ &= p(t,x;t,y) \end{aligned}$$

en resumen se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-\lambda_n s-\frac{\mu}{\sigma^2}x} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x = \sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{\lambda_n t+\frac{\mu}{\sigma^2}y} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}y = \delta(x-y)\ .$$

Es decir, los coeficientes E_n se pueden calcular utilizando la propiedad 2 de la observación 2.1.3

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{2}{l}\int_0^l e^{-\lambda_n t+\frac{\mu}{\sigma^2}y} sen(\frac{n\pi y}{l})\delta(x-y)dx \\ &= \frac{2}{l}e^{-\lambda_n t+\frac{\mu}{\sigma^2}y} sen(\frac{n\pi y}{l}). \end{aligned}$$

Finalmente, la función de densidad de transición está dada por

$$p(t,x;s,y) = e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(y-x)}\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n(s-t)} sen(\frac{n\pi x}{l}) sen(\frac{n\pi y}{l}), \tag{2.13}$$

con λ_n definido como antes.

2.2. Densidades de las Barreras

Con lo anterior se caracteriza la función de densidad de sobrevivir hasta el tiempo s. Ahora nos interesa la función de densidad de tocar la barrera superior e inferior, dichas densidades se usan para valuar opciones que pagan un valor distinto de cero tan pronto una de sus barreras es alcanzada.

Con $g^+(t,x;s)$ se denota a la función de densidad de probabilidad de tocar primero la barrera superior al tiempo s antes de alcanzar la barrera inferior dado que el proceso empieza en (t,x) y $g^-(t,x;s)$ denota a la función de densidad de probabilidad de tocar primero la barrera inferior antes de alcanzar la barrera superior.

Dado que el proceso z (definido en la ecuación (2.1)) puede alcanzar cualquiera de las dos barreras o sobrevivir, se pude derivar la siguiente identidad para $T > t$

$$\int_t^T g^+(t,x;s)ds + \int_t^T g^-(t,x;s)ds + \int_0^l p(t,x;T,y)dy \equiv 1, \tag{2.14}$$

luego, derivando con respecto a T, se tiene que

$$g^+(t,x;T) + g^-(t,x;T) = -\frac{\partial}{\partial T}\int_0^l p(t,x;T,y)dy \equiv 1. \tag{2.15}$$

Usando el resultado (2.13) para expresar la suma de las dos densidades como

$$\begin{aligned} g^+(t,x;s) + g^-(t,x;s) &= e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x)}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n(s-t)} n\pi sen(n\pi\frac{l-x}{l}) \\ &+ e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}x}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n(s-t)} n\pi sen(n\pi\frac{x}{l}). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Sin embargo, de esta expresión no se consigue determinar lo que son las densidades debarrera. Ahora el objetivo es derivar estas expresiones para las densidades individuales usando un enfoque diferente [16].

2.2.1. Derivación de g^+

La densidad $g^+(t,x;T)$ debe satisfacer la ecuación backward:

$$g_t^+ + \mu g_x^+ + \frac{1}{2}\sigma^2 g_{xx}^+ = 0. \tag{2.17}$$

Note que g^+ depende solamente de $s-t$, ya que μ y σ son constantes. Haciendo un pequeño cambio de variable en (2.17), $\tau = s-t$, $\tau \geq 0$, así, $g^+(t,x;s) = g^+(\tau,x)$, de donde se tiene que,

$$-g_\tau^+ + \mu g_x^+ + \frac{1}{2}\sigma^2 g_{xx}^+ = 0, \tag{2.18}$$

sujeto a las condiciones de contorno $g^+(\tau,l) = \delta(\tau)$, $g^+(0,x) = \delta(l-x)$ y $g^+(\tau,0) = 0$.

La tarea es encontrar ahora la solución de la ecuación (2.18) considerando la transformada de Laplace $\gamma^+(x)$

$$\gamma^+(x;v) = \int_0^\infty e^{-v\tau} g^+(\tau,x)d\tau, \tag{2.19}$$

con $v \geq 0$. Sustituyendo en (2.18), se obtiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria,

$$-v\gamma^+ + \mu\gamma_x^+ + \frac{1}{2}\sigma^2\gamma_{xx}^+ = 0, \tag{2.20}$$

sujeto a las condiciones de contorno $\gamma^+(0) = 0$ y $\gamma^+(l) = l$.

Se ha logrado reducir la ecuación (2.17), será más fácil encontrar la solución para (2.20). Considere su polinomio característico

$$\frac{1}{2}\sigma^2 r^2 + \mu r - v,$$

Las raíces del polinomio están determinadas por

$$r = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 v}}{\sigma^2}.$$

Como nos interesan los casos no triviales, por las observaciones hechas en la sección anterior, se considera el caso cuando $\mu^2 + 2\sigma^2 v < 0$, de esta manera las raices son complejas y la solución es

$$\gamma^+(x) = e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}x}(A \operatorname{senh}(\theta x) + B \cosh(\theta x)),$$

donde $\theta = \frac{1}{\sigma^2}\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 v}$. De las condiciones de frontera se determina el valor de A y B como sigue

$$\gamma^+(0) = B = 0,$$

además

$$\gamma^+(l) \quad = \quad e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}l} A \operatorname{senh}(\theta l) = 1,$$

así,

$$A = \frac{e^{\frac{\mu}{\sigma^2}l}}{\operatorname{senh}(\theta l)},$$

Note que θ depende sólo de v, entonces se puede expresar de la siguiente forma,

$$\theta(v) = \frac{1}{\sigma^2}\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 v}, \tag{2.21}$$

y por tanto,

$$\gamma^+(x) = e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x)} \frac{\operatorname{senh}(\theta(v)x)}{\operatorname{senh}(\theta(v)l)}. \tag{2.22}$$

El siguiente paso, consiste en invertir la transformada de Laplace para obtener g^+, de tal forma que

$$g^+(\tau, x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\tau z}\gamma^+(x; z)dz. \tag{2.23}$$

Ahora, $\gamma^+(x; z)$ es una función en la variable z la cual es compleja y x es un parámetro real, [6].

Para evaluar la integral (2.24), es necesario transformar la integral de línea en una integral de contorno sobre un arco circular en el segundo y tercer cuadrante. Haciendo uso del Teorema del residuo de Cauchy se consigue hallar el valor de la integral de contorno. Para recordar éste teorema, se enuncia a continuación.

Teorema 2.2.1 (Teorema del Residuo de Cauchy). *Si $f(z)$ es una función analítica en un contorno cerrado C excepto en los puntos z_k donde f tiene singula–ridades, entonces*

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_k \text{ Residuos de } f(z) \text{ en } z_k.$$

Para más detalles se recomienda ver [6].

`Observación 2.2.1.` *Recuerde que el residuo de una singularidad z_k es igual al coeficiente a_{-1} del desarrollo de la expansión de Laurent*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_n)^n,$$

alrededor de la singularidad z_k. La parte positiva de la suma es la expansión de Taylor, la parte negativa involucra la potencia negativa de $z - z_k y$ da el comportamiento de la singularidad.

Usando la expansión de Laurent, para un polo de orden n, se tiene que

$$Res[f(z)] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_j} \frac{d^{(n-1)}}{dz^{n-1}} [(z - z_j)^n f(z)].$$

En nuestro caso tenemos una singularidad de primer orden, entonces

$$Res[f(z)] = \lim_{z \to z_j} [(z - z_j) f(z)].$$

Se puede apreciar que las singularidades de la función $e^{\tau z}\gamma^+(x; z)$ son generadas cuando el denominador de γ^+ tiende a cero. Por otra parte, note que $senh(z) = -isen(iz)$, de lo cuál se sigue que

$$senh(\theta(z)l) = -isen(i\theta(z)l) = 0,$$

esto pasa cuando

$$i\theta(z)l = n\pi,$$

es decir,

$$\theta(z) = \frac{n\pi}{il},$$

sustituyendo el valor de $\theta(z)$, se tiene que

$$\frac{1}{\sigma^2}\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 z} = \frac{n\pi}{il},$$

noindent finalmente

$$z = -\frac{n^2\pi^2\sigma^4}{2\sigma^2 l^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} = -\frac{1}{2}(\frac{n^2\pi^2\sigma^2}{l^2} + \frac{\mu^2}{\sigma^2}).$$

Así, para $n = 0, 1, 2, ...$; las singularidades z_n de la función $\gamma^+(x; z)$ están dadas por

$$z_n = -\frac{1}{2}(\frac{k^2\pi^2\sigma^2}{l^2} + \frac{\mu^2}{\sigma^2}).$$

Luego, el residuo para cada singularidad z_n se obtiene como

$$\begin{aligned} Res(z_n) &= \lim_{z \to z_n} e^{\tau z} e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x)} senh(\theta(z)x) \frac{z - z_n}{senh(\theta(z))l} \\ &= e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x)} \lim_{z \to z_n} e^{\tau z} senh(\theta(z)x) \frac{z - z_n}{senh(\theta(z))l}. \end{aligned}$$

Para calcular el límite se utiliza una herramienta muy usada en cálculo, la Regla de L´Hopital, que se menciona abajo.

Teorema 2.2.2 (Regla de L´Hopital). *Suponga que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \to a} g(x) = 0,$$

suponga además que existe $\frac{f'(x)}{g'(x)}$. *Entonces existe* $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, *y*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ y } \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Es importante notar lo siguiente, en primer lugar, véase que

$$\lim_{z \to z_k} e^{\tau z} = e^{\tau z_k}.$$

Por otro lado, se observa que

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_n} senh(\theta(z)x) &= \lim_{z \to z_n} senh(\frac{1}{\sigma^2}\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 z}x) \\ &= senh(\frac{1}{\sigma^2}\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 z_n}x) \\ &= senh(\frac{1}{\sigma^2}\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2(-\frac{1}{2}(\frac{n^2\pi^2\sigma^2}{l^2} + \frac{\mu^2}{\sigma^2}))}x) \\ &= senh(\frac{1}{\sigma^2}\sqrt{-\frac{n^2\pi^2\sigma^4}{l^2}}x) \\ &= senh(\frac{1}{\sigma^2}\sqrt{\frac{i^2n^2\pi^2\sigma^4}{l^2}}x) \\ &= senh(\frac{in\pi}{l}x). \end{aligned}$$

Se observa que se satisfacen las condiciones de la regla de L´Hopital, así, se puede calcular el siguiente límite

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_n} \frac{z-z_n}{senh(\theta(z))l} &= \lim_{z\to z_n} \frac{1}{cosh(\theta(z)l)\frac{\partial\theta(z)}{\partial z}l} \\
&= \lim_{z\to z_n} \frac{1}{cosh(\theta(z)l)\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sigma^2}\sqrt{\mu^2+2\sigma^2 zl}} \\
&= \lim_{z\to z_n} \frac{1}{cosh(\theta(z)l)\frac{l}{\sqrt{\mu^2+2\sigma^2 zl}}} \\
&= \frac{1}{cosh(in\pi)\frac{l}{\sqrt{\mu^2+2\sigma^2 z_n}}} \\
&= \frac{1}{cosh(in\pi)}\frac{in\pi\sigma^2}{l^2} \\
&= (-1)^n\frac{\sigma^2}{l^2}in\pi.
\end{aligned}$$

En consecuencia, se obtiene que

$$\begin{aligned}
Res(z_n) &= \lim_{z\to z_n} e^{\tau z}e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x)}senh(\theta(z)x)\frac{z-z_n}{senh(\theta(z))l} \\
&= e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x)}\lim_{z\to z_n} e^{\tau z}senh(\theta(z)x)\frac{z-z_n}{senh(\theta(z))l} \\
&= e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x)}\lim_{z\to z_n} e^{\tau z}\lim_{z\to z_n} senh(\theta(z)x\lim_{z\to z_n}\frac{z-z_n}{senh(\theta(z))l} \\
&= e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x)}e^{\tau z_n}senh(\frac{in\pi}{l}x)(-1)^n\frac{\sigma^2}{l^2}in\pi \\
&= e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x)}e^{\tau z_n}\frac{\sigma^2}{l^2}n\pi(-1)^n isenh(\frac{in\pi}{l}x) \\
&= e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x)}e^{\tau z_n}\frac{\sigma^2}{l^2}\pi sen(n\pi\frac{l-x}{l}).
\end{aligned}$$

Se ha encontrado finalmente, la función de densidad de alcanzar primero la barrera superior, dicha función está dada por

$$g^+(t,x;s) = e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x)}\frac{\sigma^2}{l^2}\sum_{n=1}^{\infty} e^{z_n(s-t)}n\pi sen(n\pi\frac{l-x}{l}). \tag{2.24}$$

para $x \in [0,l]$.

2.2.2. Derivación de g^-

Se deriva de manera similar la función de densidad de alcanzar primero la barrera inferior. La transformada de Laplace γ^- también debe satisfacer la ecuación (3.19) pero ahora sujeto a las condiciones de frontera $\gamma^-(0) = 1$ y $\gamma^-(l) = 0$. Resolviendo la ecuación bajo estas condiciones se obtiene que,

$$\gamma^-(x;v) = e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}x}\frac{senh(\theta(v)(l-x))}{senh(\theta(v)l)}. \tag{2.25}$$

Observe que $\gamma^-(x) = e^{-2\frac{\mu}{\sigma^2}x}\gamma^+(l-x)$, así se obtiene inmediatamente que

$$g^-(t,x;s) = e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}x}\frac{\sigma^2}{l^2}\sum_{n=1}^{\infty} e^{z_n(s-t)} k\pi sen(n\pi\frac{x}{l}). \tag{2.26}$$

para $x \in [0,l]$.

Capítulo 3

Fórmulas de Valuación

Las expresiones derivadas para la función de densidad de p y las densidades de barrera g^+ y g^- sirven para calcular precios de una gran variedad de tipos de opciones barreras dobles.

Para los dos casos que se analizan en el presente trabajo, asumiremos lo siguiente:

- $S(t)$ es el tipo de cambio del día de hoy.
- r_d representa el interés domestico.
- r_f representa el interés extranjero.
- U denota la barrera superior.
- L denota la barrera inferior.
- T denota la fecha de madurez para todas las opciones.
- K el precio del ejercicio.
- $L < S(t) < U$.

Si dividimos entre L la última desigualdad y tomamos logaritmos, obte-nemos para $s > t$ que

$$z(s) = ln(\frac{S(s)}{L}), \tag{3.1}$$

donde z es precisamente el proceso que se define en (3.1), además $x = z(t) = ln(\frac{S(s)}{L})$ y $l = ln(\frac{U}{L})$. El término μ del proceso z es igual a

$$\mu = r_d - r_f - \frac{1}{2}\sigma^2. \tag{3.2}$$

Recordemos que el titular de una opción call no está obligado a ejercerla. Luego, si al tiempo T el precio $S(T)$ es menor que K, el titular de la opción obviamente no la ejercerá, además la opción expira y el contrato se vuelve improductivo.

Por otro lado, si el precio $S(T)$ excede a K, vale la pena ejercer el call, es decir, se paga la opción al precio K, luego lo vendemos al precio $S(T)$ obteniendo una ganancia neta de $S(T) - K$. En resumen, el comprador de una opción call tiene derecho a un pago de

$$\max(S(T)-K,0)=\begin{cases} S(T), \text{ si } S(T)>K, \\ 0, \text{ si } S(T)\leq K. \end{cases}$$

3.1. Rebaja al Alcance

En las opciones knock-out, frecuentemente se usa un plan de pago para ofrecer un reembolso tan pronto la opción alcance una de las barreras. Supóngase que se alcanza primero la barrera superior, y considere a

- t la fecha de celebración del contrato.
- T fecha de vencimiento del contrato.
- s la fecha de alcance de la barrera superior.
- K_U el monto que se recibe en el momento que se alcanza la barrera superior.

Nótese que $T>t$ y $T\geq s$, luego $[t,s]$ es el intervalo de tiempo desde la celebración del contrato hasta alcanzar la barrera superior, además la tasa de interés doméstico está dada por $e^{-r_d(s-t)}$, ya que depente de $s-t$.

Sea V_{RAHU} el valor de dicha opción y calcule dicho valor como sigue

$$V_{RAHU}=K_UP[s\leq Te^{-r_d(s-t)}]=K_U\int_t^T e^{-r_d(s-t)}g^+(t,x;s)ds. \tag{3.3}$$

Calculando el valor de dicha integral obtenemos

$$\begin{aligned}
V_{RAHU} &= K_U\int_t^T e^{-r_d(s-t)}g^+(t,x;s)ds \\
&= K_U\int_t^T e^{-r_d(s-t)}e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x)}\frac{\sigma^2}{l^2}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda_k(s-t)}k\pi sen(k\pi\frac{l-x}{l})ds \\
&= K_Ue^{\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x)}\frac{\sigma^2}{l^2}\sum_{k=1}^{\infty}k\pi sen(k\pi\frac{l-x}{l})\int_t^T e^{-r_d(s-t)}e^{-\lambda_k(s-t)}ds \\
&= K_Ue^{\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x)}\frac{\sigma^2}{l^2}\sum_{k=1}^{\infty}k\pi sen(k\pi\frac{l-x}{l})\int_t^T e^{-(r+\lambda_k)(s-t)}ds.
\end{aligned}$$

No se tomará en cuenta el interés extranjero, asi se tiene que $r_d=\mu+\frac{1}{2}\sigma^2$ y $\lambda_k=\frac{1}{2}(\frac{\mu^2}{\sigma^2}+\frac{n^2\pi^2\sigma^2}{l^2})$.

Luego,

$$\begin{aligned}
r_d+\lambda_k &= \mu+\frac{1}{2}\sigma^2+\frac{1}{2}(\frac{\mu^2}{\sigma^2}+\frac{k^2\pi^2\sigma^2}{l^2}), \\
&= \frac{1}{2}(\frac{2\sigma^2r_d}{\sigma^2}+\frac{\mu^2}{\sigma^2}+\frac{k^2\pi^2\sigma^2}{l^2}).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Defínase a,

$$\mu'=\sqrt{\mu^2+2\sigma^2r_d},$$

así,

$$\lambda'_k = \frac{1}{2}(\frac{\mu'^2}{\sigma^2} + \frac{k^2\pi^2\sigma^2}{l^2}).$$

Ahora sea g'^2 la densidad de barrera con media

$$\begin{aligned} V_{RAHU} &= K_U e^{\frac{\mu-\mu'}{\sigma^2}(l-x)} \int_t^T g'^+(t,x;s)ds \\ &= K_U e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x)}(\frac{senh(\frac{\mu'}{\sigma^2}x)}{senh}) \\ &- \frac{\sigma^2}{l^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda'_k(T-t)}}{\lambda'_k}k\pi sen(k\pi\frac{l-x}{l}). \end{aligned} \tag{3.5}$$

De manera similar, encontramos el valor de la opción si se toca primero la barrera inferior, el cual denotaremos como K_L, tal que

$$\begin{aligned} V_{RAHU} &= K_L e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}x}(\frac{senh(\frac{\mu'}{\sigma^2}(l-x))}{senh(\frac{\mu'}{\sigma^2}l)}) \\ &- \frac{\sigma^2}{l^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda'_k(T-t)}}{\lambda'_k}k\pi sen(k\pi\frac{x}{l}). \end{aligned} \tag{3.6}$$

3.2. Doble knock-out en su Versión Call

Considere que se tiene un call doble knock-out con un pago igual al máx$\{S(T)-K,0\}$, siempre y cuando el precio de S no alcance ninguna de las barreras durante el tiempo de vida de la opción $[t,T]$. El valor de ésta opción al tiempo t, dado por

$$V_{DKOC}(t) = e^{-r_{d(T-t)}}\int_0^l \text{máx}\{Le^y - K, 0\}p(t,x;T,y)dy, \tag{3.7}$$

para $Le^y > K \Leftrightarrow y > ln(\frac{K}{L}) = d$.

Asumimos que, $0 \leq d \leq l$, pues el otro caso es trivial. Antes de evaluar la opción recuerde que:

Observación 3.2.1.

$$\int e^{ay}sen(by)dy = e^{ay}\frac{asen(by) - bcos(by)}{a^2+b^2} \tag{3.8}$$

De de la observación, se tiene que

$$\begin{aligned} V_{DKOC}(t) &= e^{-r_{d(T-t)}}\int_d^l (Le^y - K)p(t,x;T,y)dy \\ &= e^{-r_{d(T-t)}}[\int_d^l Le^y p(t,x;T,y)dy \\ &- \int_d^l Kp(t,x;T,y)dy]. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Sea

$$
\begin{aligned}
Q(\alpha, y) &= \int e^{\alpha y} p(t, x; T, y) dy \\
&= \int e^{\alpha y} e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(y-x)} \frac{2}{l} \sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda_n (T-t)} sen(\frac{n\pi x}{l}) sen(\frac{n\pi y}{l}) dy \\
&= \int e^{-\frac{\mu}{\sigma^2} x} e^{y(\frac{\mu}{\sigma^2}+\alpha)} \frac{2}{l} \sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda_n (T-t)} sen(\frac{n\pi x}{l}) sen(\frac{n\pi y}{l}) dy \\
&= e^{-\frac{\mu}{\sigma^2} x} \frac{2}{l} \sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda_n (T-t)} sen(\frac{n\pi x}{l}) \int e^{y(\frac{\mu}{\sigma^2}+\alpha)} sen(\frac{n\pi y}{l}) dy \\
&= e^{-\frac{\mu}{\sigma^2} x} \frac{2}{l} \sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda_n (T-t)} sen(\frac{n\pi x}{l}) e^{y(\frac{\mu}{\sigma^2}+\alpha)} \\
&\times (\frac{(\frac{\mu}{\sigma^2}+\alpha) sen(\frac{n\pi y}{l}) - \frac{n\pi}{l} cos(\frac{n\pi y}{l})}{(\frac{\mu}{\sigma^2}+\alpha)^2 + (\frac{n\pi}{l})^2})
\end{aligned}
$$

Finalmente, el valor de una opción doble knock-out en su versión call está dado por

$$V_{DKOC} = e^{-r\,d(T-t)}[L(Q(1,l) - Q(1,d)) - K(Q(0,l) - Q(0,d))]. \tag{3.10}$$

La fórmula de arriba también sirve para opciones que dan un pago que depende de S_T^α El pago de una opción call se tiene cuando $\alpha = 1$. Sin embargo, un contrato llamado "bull/bear" tiene un pago de $max\{0, \frac{S_T - K}{S_T}\} = max\{0, 1 - KS_T^{-1}\}$ que puede ser valuado con nuestro trabajo en $\alpha = -1$.

Conclusiones

De forma muy general, la matemática financiera estudia el valor del dinero en el tiempo, al combinar elementos fundamentales (capital, tasa y tiempo) para conseguir un rendimiento o interés, al brindarle herramientas y métodos que permitan tomar la decisión más correcta a la hora de una inversión. El auge de ésta rama, data del año 1973 con el trabajo de Black y Sholes [2] y por otra parte Merton [12]para la valuación de opciones. Más tarde otras aportaciones llegaron; Cox y Rubinstein [5], Ritchken [4], Chance [15], por mencionar algunos.

En trabajos recientes, el objeto de estudio son las opciones barreras dobles debido a que su costo es menor que las opciones estándar y ofrecen una protección similar. Kunitomo e Ikeda [11] y por otro lado Geman y Yor [16], analizaron opciones doble knock - out en su versión call y put usando métodos diferentes, sin embargo, en ambos casos se recurre a métodos de inverión numérica.

En este trabajo de tesis se han presentado fórmulas de valuación para opciones barreras dobles knock-out en su versión call que ofrecen un reembolso tan pronto la opción alcanza una de las barreras y para aquellas que no alcanzan ninguna de las barreras durante su tiempo de vida. Derivamos dichas expresiones, invirtiendo analíticamente la transformada de Laplace mediante la integración de contorno. Con las expresiones analíticas obtenidas, se calculan los valores para las opciones barreras dobles eliminando la necesidad de recurrir a métodos de inversión numérica.

Para trabajos posteriores, se pretende:

1. Encontrar fórmulas de valuación para opciones barreras dobles mediante expresiones analíticas cerradas.

2. Realizar la implementación numérica para comparar la eficiencia de los resultados obtenidos.

Bibliografía

[1] Bachelier, L. *Théorie de la Speculation Thésis de Docteur ès Sciences Mathématiques.* Université Paris Sorbonne. 1900.

[2] Black, F., M. Scholes. *The Pricing of Options and Corporate Liabilities.* Journal of Political Economy. 1973.

[3] Brown, R. *A Brief Account on the Particles Contained in the pollen of plants, and on the General Existence of Active Molecules Inorganic Bodies.* Edinburgh New Philosophical Journal. 1828

[4] Chriss, N. A. *Black-Scholes and Beyond Option Princing Models.* McGraw-Hill.1997.

[5] Cox, D.R. and Miller, H.D. *The Theory of Stochastic Processes.* Chapman and Hall. 1984.

[6] Duffy, D. *Transform Methods for Solving Partial Equation.* CRC Press. 1994.

[7] Einstein, A. *Sobre el Movimiento Requerido por la Teor?a Cin?tica Molecular del Calor de Peque?as Part?culas Suspendidas en un L?quido Estacionario.* Annaler der Physik. 1905.

[8] Fima C. Klebaner. *Introduction to Stochastic Calculus with Applications.* Imperial College. 2005.

[9] Hernández, O. *Métodos de Fourieren la Física y la Ingeniería.* Editorial Trillas. 1974.

[10] Kiseliov, A., Krasnov, M., Makarenko, G. *Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.* Editorial Mir Mosc?. 1979.

[11] Kunitomo, N. and Ikeda, M. *Pricing Opcions with Curved Boundaries.* Mathematical Finance. 1992.

[12] Merton, L.*Theory of Rational Option Pricing.* Bell Journal of Economics and Management Science". 1973.

[13] Mikosch, T. *Elementary Stochastic Calculus with Finance in view.* 1998.

[14] Musiela, Marek y Rutkowski, Marek. *Martingale Methods in Financial Modelling.* Editorial Springer. 1997.

[15] Panjer, Harry H. Willmot Gordon E., *Insurance Risk Models.* Society of Actuaries. 1992.

[16] Pelsser, Antoon. *Pricing Double Barrier Options: An Analytical Approach*. Ed. Erasmus University Rotterdam Department of Finance. 1999.

[17] Rincón, Luis. *Procesos Estocásticos*. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias de la UNAM. 2007.

[18] Samuelson, P. *Rational Theory of Warrat Prices*. Industrial Managemente. 1965.

[19] Venegas Martínez, Francisco. *Riesgos financieros y económicos: Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*. Ed. Thomson. 1997.