



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
COLEGIO DE MATEMÁTICAS APLICADAS

LA FÓRMULA DE BLACK-SCHOLES: UN ENFOQUE A TRAVÉS DE
MARTINGALAS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA
FERNANDO BRIONES CORTÉS

DIRECTOR DE TESIS
DR. HUGO ADÁN CRUZ SUÁREZ

PUEBLA, PUE.

AGOSTO 2017

A mi madre

Agradecimientos

Agradezco a mi familia y amigos, quienes me han apoyado incondicionalmente a lo largo de estos años.

A mi director de tesis, Dr. Hugo Adán Cruz Suárez, quien me brindó la confianza de trabajar bajo su tutela y me orientó en el transcurso de la licenciatura. Le agradezco la paciencia y el apoyo al compartirme sus conocimientos.

A mis sinodales, Dr. Fernando Velasco Luna, Dr. Francisco Solano Tajonar Sanabria y Dr. Víctor Hugo Vázquez Guevara por haber aceptado ser parte del jurado y revisar esta tesis para mejorar el trabajo.

Introducción

En el contexto de mercados financieros, las opciones son cada vez más usadas en transacciones financieras por instituciones a nivel mundial. Dichos contratos forman parte de los derivados, los cuales son instrumentos financieros cuyo valor se deriva del valor de otro instrumento, llamado activo subyacente. En el caso de una opción de alguna acción, ésta funge como derivado que depende del precio de dicha acción en el mercado.

Existen diversos tipos de contratos de opciones que otorgan a su poseedor derechos de compra o venta. En particular, el presente trabajo se enfoca en las opciones europeas, las cuales sólo pueden ser ejercidas por el titular en la fecha de vencimiento y se clasifican en opciones de compra (*call*) y venta (*put*).

Una opción europea de tipo call le da al titular el derecho a comprar una determinada acción en la fecha de vencimiento a un precio establecido. Mientras que una opción financiera de tipo put le da el derecho al titular de vender una determinada acción en la fecha de vencimiento al precio convenido [5].

El problema de la valuación de opciones se genera a partir de la necesidad de conocer el precio de una opción financiera de acuerdo a una tasa de interés y a la volatilidad en el precio de la acción subyacente. Dicho problema, puede ser abordado mediante ecuaciones en derivadas parciales, así como desde un punto de vista probabilístico calculando una esperanza condicional de una función continua aplicada a procesos estocásticos. Siendo éste último, el enfoque utilizado para desarrollar la solución al problema de la valuación de opciones financieras dada por Black, Scholes y Merton en la ecuación de Black-Scholes, a través de un cambio de medida de probabilidad, manteniendo como objetivo principal de ésta tesis utilizar el Teorema de Girsanov, considerando las opciones europeas tipo call y put que toman precios de acciones como activos subyacentes.

Dentro del marco teórico, consideramos la teoría de probabilidad, procesos estocásticos, proceso de Wiener, fórmula de Itô, ecuaciones diferenciales estocásticas, cambio de medida, teorema de Girsanov, movimiento Browniano geométrico y la ecuación de Black-Scholes, conceptos necesarios para la valuación de opciones europeas de tipo call y put.

En el Capítulo 1 se presentan los conceptos preliminares necesarios de la teoría de la probabilidad, procesos estocásticos, proceso de Wiener, integral de Itô y ecuaciones diferenciales estocásticas.

En el Capítulo 2 se presenta el tema de cambio de medida, así como propiedades de éste, y el uso de la fórmula de Itô para la demostración del teorema de Girsanov.

En el Capítulo 3 se presentan los conceptos financieros requeridos para el análisis del modelo de donde se deriva la ecuación de Black-Scholes.

En el Capítulo 4 se presentan aplicaciones de la fórmula de Black-Scholes sobre dos acciones en particular, las acciones de Amazon.com, Inc. y de eBay Inc.

Finalmente, se presentan las conclusiones del trabajo.

Índice general

Introducción	1
1. Conceptos Preliminares	1
1.1. Procesos Estocásticos	1
1.2. Movimiento Browniano	2
1.2.1. Reseña Histórica	2
1.2.2. Proceso de Wiener	3
1.2.3. Propiedades	4
1.3. Integral de Itô	5
1.4. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas	7
1.4.1. Fórmula de Itô	8
1.4.2. Fórmula de Itô Multivariada	9
2. Teorema de Girsanov	11
2.1. Cambio de Medida Condicional en un Paso	11
2.2. Cambio de Medida Incondicional	12
2.3. Proceso de Densidad del Cambio de Medida	12
2.4. Teorema de Girsanov	13
3. Modelo de Black-Scholes	17
3.1. Opción Call Europea	18
3.2. Opción Put Europea	21
4. Aplicaciones	25
4.1. Amazon.com, Inc.	26
4.2. eBay Inc.	30
Conclusiones	35
Apéndice	37
4.3. Prueba Kolmogorov-Smirnov de Bondad de Ajuste para una Muestra . . .	37
4.3.1. Cálculos para la Prueba	38
4.3.2. Interpretación del Resultado	38

Capítulo 1

Conceptos Preliminares

1.1. Procesos Estocásticos

En esta sección enunciaremos los conocimientos básicos de procesos estocásticos requeridos para la comprensión de los conceptos posteriores.

Consideremos al espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) donde Ω es el espacio muestral que contiene a todos los posibles resultados de algún experimento aleatorio, \mathcal{F} es una σ -álgebra de subconjuntos de Ω , cuyos elementos son denominados eventos o conjuntos medibles, y que cumple:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$.
2. Si $A \in \mathcal{F}$ entonces $A^C \in \mathcal{F}$.
3. Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

La siguiente componente; P , es una medida de probabilidad definida en \mathcal{F} , y es tal que $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ satisface:

1. $P(\Omega) = 1$.
2. $P(A) \geq 0$, para cualquier $A \in \mathcal{F}$.
3. Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, tal que $A_n \cap A_m = \emptyset$ para $n \neq m$, entonces $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Definición 1.1. Un *proceso estocástico* $\{X_t : t \in T\}$ es una colección de variables aleatorias definidas en un espacio de probabilidad con parámetros en un conjunto de índices T , donde las variables toman valores en un conjunto S llamado espacio de estados. El espacio parametral T comúnmente puede tomarse como el conjunto continuo $T = [0, \infty)$. Se dice entonces que el proceso es a tiempo continuo y se denota por $\{X_t : t \geq 0\}$.

Definición 1.2. Una *filtración* a tiempo continuo, es una colección no numerable de sub σ -álgebras $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ tal que $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ cuando $0 \leq s \leq t$. La *filtración canónica* de un proceso a tiempo continuo $\{X_t : t \geq 0\}$ es la colección de σ -álgebras $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ dadas por $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s : 0 \leq s \leq t\}$, es decir, $\{\mathcal{F}_t\}$ es la mínima σ -álgebra que hace medibles a cada

una de las variables X_s , para s en $[0, t]$. Se dice que un proceso estocástico $\{X_t : t \geq 0\}$ definido en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) es *adaptado* a una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ si para cada $t \geq 0$ la función $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ satisface:

$$X_t^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{F}_t, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Podemos pensar en una filtración como la información disponible del proceso, por lo que \mathcal{F}_t representa la información disponible hasta el instante t , lo cual quiere decir que si el proceso $\{X_t : t \geq 0\}$ es adaptado a la filtración, su valor al tiempo t depende solamente de la información a ese instante.

Definición 1.3. Un proceso a tiempo continuo $\{X_t : t \geq 0\}$ es una *martingala* respecto a una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ si:

- a) $\{X_t\}$ es integrable $\forall t \geq 0$.
- b) $\{X_t : t \geq 0\}$ es adaptado a la filtración.
- c) Para $0 \leq s \leq t$, $E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$. *c.s.*

Observación 1.4. Cuando $E(X_t | \mathcal{F}_s) \leq X_s$, se dice que el proceso es una supermartingala, y si $E[X_t | \mathcal{F}_s] \geq X_s$, entonces es una submartingala.

Notación 1.5. Usaremos indistintamente $E[X_t | \mathcal{F}_s]$ y $E_s[X_t]$ para referirnos a la esperanza del proceso X_t condicionado a la filtración \mathcal{F}_s .

Proposición 1.6. Sea $\{X_{t_1} : 0 \leq t_1 \leq T\}$ un proceso estocástico tal que

$$X_{t_1} = E_{t_1}[X_{t_2}] \quad \text{para } 0 \leq t_1 < t_2 \leq T.$$

Si $E[X_T] < \infty$ entonces el proceso $\{X_{t_1} : 0 \leq t_1 \leq T\}$ es una martingala.

Demostración. Usando propiedades de esperanzas iteradas, con $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k < t$, obtenemos:

$$\begin{aligned} X_{t_1} &= E_{t_1}[X_{t_2}] = E_{t_1}[E_{t_2}[X_{t_3}]] = \dots \\ &= E_{t_1}[E_{t_2}[\dots E_{t_k}[X_t]]] = E_s[X_t]. \end{aligned}$$

Entonces, $X_s = E_s[X_t] = E[X_t | \mathcal{F}_s]$ y por lo tanto, el proceso $\{X_t\}$ es una martingala. \square

1.2. Movimiento Browniano

1.2.1. Reseña Histórica

En 1827, Robert Brown escribió un manuscrito acerca de las partículas contenidas en el polen de plantas y sobre la existencia general de moléculas activas en cuerpos orgánicos e inorgánicos. La planta de la cual tomó granos de polen fue *Clarkia Pulchella* y mientras examinaba la forma de estas partículas sumergidas en agua, observó que muchas de éstas estaban evidentemente en movimiento. Éste movimiento consistía no sólo de un cambio de lugar en fluido, manifestado por alteraciones en sus posiciones relativas, sino de repetitivos cambios de forma en la partícula misma. Extendió sus observaciones a numerosas

especies de plantas y tejido animal, tanto vivos como muertos, así como a varios productos de cuerpos orgánicos y sustancias minerales y todos manifestaron movimientos similares a aquellos ya descritos. Compartió su investigación con varios de sus colegas y realizó experimentos subsecuentes para el movimiento sin darle a éste una explicación [2].

En 1900, el matemático francés Louis Bachelier completó su tesis doctoral, usando el movimiento Browniano en un modelo para la variación de precios de bienes y rendimientos de acciones. Las ecuaciones que Bachelier obtuvo de este modelo corresponden a las del fenómeno físico que conocemos como movimiento Browniano a pesar de que no había una teoría matemática formalizada de éste. Sin embargo, a Bachelier se le acredita ser el primero en usar el movimiento Browniano en finanzas, siendo precursor de las finanzas cuantitativas modernas [1].

Fue hasta 1926 cuando Albert Einstein realizó una publicación en la cual propuso una teoría sobre el movimiento Browniano. En ésta, muestra que el movimiento observable de los cuerpos suspendidos en una solución vistos a través de un microscopio, se debe al comportamiento molecular del calor, provocando que las moléculas choquen unas con otras, generando dicho movimiento [4].

La teoría matemática del movimiento Browniano como un proceso estocástico fue formalizada por Norbert Wiener en una publicación póstuma en 1966, en la que relaciona el fenómeno físico con la teoría, definiendo las condiciones y propiedades de las trayectorias de partículas, aportando una herramienta con numerosas aplicaciones en distintas ciencias. Es por esta razón que al movimiento Browniano también se le conoce como proceso de Wiener [9].

1.2.2. Proceso de Wiener

Un movimiento aleatorio con trayectorias continuas y desplazamientos independientes en intervalos de tiempo disjuntos, puede ser descrito mediante la estructura matemática de un proceso estocástico a tiempo continuo $\{B_t : t \geq 0\}$, donde la variable B_t representa la posición de la partícula al tiempo t .

Definición 1.7. Sea un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) . Un movimiento Browniano o proceso de Wiener unidimensional de parámetro σ^2 es un proceso estocástico $\{B_t : t \geq 0\}$ con valores en \mathbb{R} tal que

1. $P(B_0 = 0) = 1$.
2. La variable incremento $B_t - B_s$, para cualquier $0 \leq s < t$, tiene distribución $N(0, \sigma^2(t-s))$, i.e.,

$$P(a \leq B_t - B_s \leq b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_a^b e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2(t-s)}} dx, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

3. El proceso tiene incrementos independientes, es decir, para cualesquiera $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ los incrementos $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, B_{t_{n-1}} - B_{t_{n-2}}, \dots, B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_1}$, son variables aleatorias independientes.
4. Las trayectorias $t \mapsto B_t$ son continuas *c.s.*

Observación 1.8. Se dice que un movimiento Browniano es estándar cuando $\sigma^2 = 1$. A través del cambio de variable $\tau = \sigma^2 t$, un movimiento Browniano no estándar puede convertirse en uno estándar. De aquí en adelante, trabajaremos con movimientos Brownianos estándar.

1.2.3. Propiedades

Proposición 1.9. Para cualquier $t > 0$, B_t está normalmente distribuido con media 0 y varianza t . Para cualquier $s, t \geq 0$, $E[B_s B_t] = \min\{s, t\}$.

Demostración. Por la condición (1) de la Definición 1.7 tenemos que

$$B_t - B_0 = B_t - 0 = B_t$$

y por la condición (2):

$$P(a \leq B_t - B_0 \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2t}} dx,$$

por lo que B_t tiene distribución normal con media 0 y varianza t .

Para mostrar que $E[B_s B_t] = \min\{s, t\}$, asumimos que $s < t$. Así, por (2) y (3) de la Definición 1.7,

$$\begin{aligned} E[B_s B_t] &= E[B_s B_t - B_s^2 + B_s^2] \\ &= E[B_s(B_t - B_s) + B_s^2] \\ &= E[B_s] E[B_t - B_s] + E[B_s^2] \\ &= 0 + 0 + s = s = \min\{s, t\}. \end{aligned}$$

□

Proposición 1.10. Sea $t_0 \geq 0$ fijo, el proceso estocástico $\tilde{B}_t = B_{t+t_0} - B_{t_0}$ es también un movimiento Browniano.

Demostración. El proceso estocástico \tilde{B}_t cumple la condición (1) y (4) de un movimiento Browniano. Ahora, para cualesquiera $s < t$,

$$\tilde{B}_t - \tilde{B}_s = B_{t+t_0} - B_{s+t_0}. \quad (1.1)$$

Como B_t es movimiento Browniano, cumple (2) de la Definición 1.7, entonces $\tilde{B}_t - \tilde{B}_s$ se distribuye normalmente con media 0 y varianza $(t - t_0) - (s - t_0) = t - s$, por lo que \tilde{B}_t también satisface la condición (2).

Para verificar que \tilde{B}_t cumple (3), asumimos que $t_0 > 0$. Así, para cualquier $0 \leq t_1 < \dots < t_n$, tenemos que $0 < t_0 \leq t_1 + t_0 < \dots < t_n + t_0$.

Entonces, como B_t cumple (3), $B_{t_k+t_0} - B_{t_{k-1}+t_0}$, $k = 1, \dots, n$ son variables independientes. Así, por la ecuación (1.1), las variables aleatorias $\tilde{B}_{t_k} - \tilde{B}_{t_{k-1}}$, $k = 1, \dots, n$ son independientes, por lo que \tilde{B}_t satisface la condición (3) de un movimiento Browniano. □

Teorema 1.11 (Caracterización de Paul Lévy). Un proceso estocástico $\{X_t : t \geq 0\}$ es un movimiento Browniano si y sólo si, tanto $\{X_t : t \geq 0\}$ como $\{X_t^2 - t : t \geq 0\}$ son martingalas.

Demostración. Sea $\{X_t : t \geq 0\}$ un movimiento Browniano, adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$,

$$X_t = X_t - X_s + X_s$$

$$\begin{aligned}
E[X_t|\mathcal{F}_s] &= E[X_t - X_s + X_s|\mathcal{F}_s] \\
&= E[X_t - X_s|\mathcal{F}_s] + E[X_s|\mathcal{F}_s] \\
&= 0 + X_s \\
&= X_s,
\end{aligned}$$

por lo tanto, el movimiento Browniano $\{X_t : t \geq 0\}$ es una martingala.

Ahora,

$$\begin{aligned}
E[X_t^2 - t|\mathcal{F}_s] &= E[(X_t - X_s + X_s)^2 - t|\mathcal{F}_s] \\
&= E[(X_t - X_s + X_s)^2|\mathcal{F}_s] - E[t|\mathcal{F}_s] \\
&= E[(X_t - X_s)^2 + 2X_s(X_t - X_s) + X_s^2|\mathcal{F}_s] - t \\
&= E[(X_t - X_s)^2|\mathcal{F}_s] + E[2X_s(X_t - X_s)|\mathcal{F}_s] + E[X_s^2|\mathcal{F}_s] - t \\
&= t - s + 0 + X_s^2 - t \\
&= X_s^2 - s,
\end{aligned}$$

por lo tanto, $\{X_t^2 - t : t \geq 0\}$ es una martingala. □

1.3. Integral de Itô

Fijemos un movimiento Browniano $\{B_t : 0 \leq t \leq T\}$ y una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ que satisfaga las siguientes condiciones:

- (a) Para cada t , B_t es \mathcal{F}_t -medible.
- (b) Para cualquier $s \leq t$, la variable aleatoria $B_t - B_s$ es independiente de la σ -álgebra \mathcal{F}_s .

Por notación, usaremos $L_{ad}^2([0, T] \times \Omega)$ para denotar el espacio de todos los procesos estocásticos $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$, que satisfacen las siguientes condiciones:

- (1) X_t es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$.
- (2) $\int_0^T E(|X_t|^2)dt < \infty$.

Definición 1.12. Supongamos que $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ es un proceso estocástico escalonado dado por

$$X_t = \sum_{i=1}^n \xi_{i-1} 1_{[t_{i-1}, t_i)}(t),$$

en donde ξ_{i-1} es $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ medible, $1_{[t_{i-1}, t_i)}(t)$ denota a la función indicadora en el intervalo $[t_{i-1}, t_i)$ y $E(\xi_{i-1}^2) < \infty$. En este caso, definimos:

$$I(X_t) = \sum_{i=1}^n \xi_{i-1} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}). \quad (1.2)$$

Lema 1.13. Sea $I(X_t)$ definida como en la ecuación 1.2. Entonces $E[I(X_t)] = 0$ y

$$E(|I(X_t)|^2) = \int_0^T E(|X_t|^2)dt. \quad (1.3)$$

Demostración. Para cada $1 \leq i \leq n$ de la ecuación 1.2, obtenemos:

$$\begin{aligned} E\{\xi_{i-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})\} &= E\{E[\xi_{i-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}]\} \\ &= E\{\xi_{i-1}E[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}]\} \\ &= E\{\xi_{i-1}E(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $E[I(X_t)] = 0$. Ahora, tenemos que

$$|I(X_t)|^2 = \sum_{i,j=1}^n \xi_{i-1}\xi_{j-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}).$$

Notemos que para $i \neq j$, digamos $i < j$,

$$\begin{aligned} &E\{\xi_{i-1}\xi_{j-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\} \\ &= E\{E[\xi_{i-1}\xi_{j-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \mid \mathcal{F}_{t_{j-1}}]\} \\ &= E\{\xi_{i-1}\xi_{j-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})E[(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \mid \mathcal{F}_{t_{j-1}}]\} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

porque $E[(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \mid \mathcal{F}_{t_{j-1}}] = E(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) = 0$, como en la ecuación anterior. Por otro lado, para $i = j$ tenemos:

$$\begin{aligned} &E\{\xi_{i-1}^2(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2\} \\ &= E\{E[\xi_{i-1}^2(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}]\} \\ &= E\{\xi_{i-1}^2E[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})]\} \\ &= E\{\xi_{i-1}^2(t_i - t_{i-1})\} \\ &= (t_i - t_{i-1})E(\xi_{i-1}^2). \end{aligned} \tag{1.5}$$

De (1.4) y (1.5):

$$\begin{aligned} E(|I(X_t)|^2) &= E\left[\sum_{i,j=1}^n \xi_{i-1}\xi_{j-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right] \\ &= \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})E(\xi_{i-1}^2) \\ &= E\left[\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})\xi_{i-1}^2\right] \\ &= \int_0^T E\left[\sum_{i,j=1}^n (\xi_{i-1}\xi_{j-1}1_{[t_{i-1},t_i)}(t)1_{[t_{j-1},t_j)}(t))\right] \\ &= \int_0^T E\left[\left|\sum_i \xi_{i-1}1_{[t_{i-1},t_i)}(t)\right|^2\right] dt \\ &= \int_0^T E[|X_t|^2] dt. \end{aligned}$$

□

Lema 1.14. Suponga que $X_t \in L^2_{ad}([0, T] \times \Omega)$. Entonces existe una sucesión $\{X_t(n); n \geq 1\}$ de procesos estocásticos escalonados en $L^2_{ad}([0, T] \times \Omega)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T E\{|X_t - X_t(n)|^2\} dt = 0. \quad (1.6)$$

Demostración. La demostración de éste lema puede encontrarse en [6], p.p. 45-47. \square

Usamos el Lema 1.14 para obtener la sucesión $\{X_t(n); n \geq 1\}$ de procesos estocásticos escalonados adaptados. Por la Definición 1.12, $I(X(n))$ está definida para cada n , y por el Lema 1.13 tenemos,

$$E(|I(X_t(n)) - I(X_t(m))|^2) = \int_0^T E(|X_t(n) - X_t(m)|^2) dt \rightarrow 0$$

cuando $n, m \rightarrow \infty$.

Por lo que la sucesión $\{I(X_t(n))\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega)$ [6] p.47. Definimos

$$I(X_t) := \lim_{n \rightarrow \infty} I(X_t(n)), \quad \text{en } L^2(\Omega). \quad (1.7)$$

Definición 1.15. El límite definido en la ecuación (1.7) es llamado la Integral de Itô de X y está denotada por

$$I(X_t) = \int_0^T X_t dB_t. \quad (1.8)$$

1.4. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

En lo siguiente, asumiremos a (Ω, \mathcal{F}, P) como espacio de probabilidad y a $\{B_t : t \geq 0\}$ movimiento Browniano unidimensional adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.

Definición 1.16. Sean $\mu(t, x)$ y $\sigma(t, x)$ dos funciones de $[0, T] \times \mathbb{R}$ en \mathbb{R} . Una ecuación diferencial estocástica es una ecuación de la forma

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t,$$

en donde $\mu(t, X_t)$ se le llama tendencia y a $\sigma(t, X_t)$ volatilidad, definidas para valores de t en el intervalo $[0, T]$, y con condición inicial la variable aleatoria X_0 que se supone \mathcal{F}_0 -medible e independiente del movimiento Browniano. La ecuación anterior se interpreta como la ecuación integral

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$$

en donde la primera es una integral de Riemann, mientras que la segunda es una integral estocástica de Itô. Al proceso $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ se le llama proceso de Itô.

Ejemplo: Movimiento Browniano con tendencia

En una ecuación diferencial estocástica, cuando μ y σ son constantes en el tiempo, el proceso $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ se considera un movimiento Browniano con tendencia:

$$\begin{aligned} dX_s &= \mu ds + \sigma dB_s, \\ X_t - X_0 &= \int_0^t dX_s = \int_0^t \mu ds + \int_0^t \sigma dB_s, \\ X_t &= X_0 + \mu t + \sigma (B_t - B_0). \end{aligned}$$

La palabra “tendencia” significa que el cambio esperado de X incrementa con el tiempo:

$$E[X_t - X_0] = \mu t + E[\sigma(B_t - B_0)] = \mu t.$$

Como la distribución de $B_t - B_0$ es normal con media 0 y varianza t , podemos ver que

$$X_t - X_0 \sim N(\mu t, \sigma^2 t).$$

Si reemplazamos 0 con un tiempo arbitrario s , $s < t$, concluimos que, condicionado a \mathcal{F}_s , la variable aleatoria $X_t - X_s$ tiene distribución normal con media $\mu(t - s)$ y varianza $\sigma^2(t - s)$.

1.4.1. Fórmula de Itô

La fórmula de Itô es una herramienta de gran utilidad para agilizar y simplificar los cálculos de las integrales estocásticas.

Teorema 1.17 (Fórmula de Itô). Sea $f(x)$ una función diferenciable, $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ un proceso de Itô. Si $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$ entonces

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \sigma_s^2 ds.$$

Esta fórmula es una versión estocástica de la regla de la cadena del cálculo diferencial usual, y es común escribirla en su forma diferencial

$$df(X_t) = f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) \sigma_t^2 dt,$$

la cual debe entenderse en el sentido de su forma integral dada por la expresión previa.

El cálculo usual $df(X_t) = f'(X_t) dX_t$ se usa cuando f es lineal en $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ o cuando el proceso $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ es localmente no estocástica, $\sigma_t = 0$, [3].

Es equivalente usar la siguiente expresión, en donde podemos reemplazar $\sigma_t^2 dt$ por la varianza condicional de dX_t :

$$df(X_t) = f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) \text{Var}_t^2(dX_t). \quad (1.9)$$

Demostración. (Teorema 1.17) Usemos la expansión de Taylor de segundo orden para la función $f(X)$ alrededor de X_t ,

$$df(X_t) = f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) (dX_t)^2.$$

Recordemos que X_t , μ_t y σ_t son conocidos en el tiempo t y que $dB_t \sim N(0, dt)$, con lo que

$$E_t[dB_t] = 0, \quad E_t[(dB_t)^2] = dt, \quad E_t[(dB_t)^3] = 0, \quad E_t[(dB_t)^4] = 3(dt)^2.$$

Obtenemos la esperanza de $(dX_t)^2$,

$$\begin{aligned} E_t[(dX_t)^2] &= E_t[(\mu_t dt + \sigma_t dB_t)^2] \\ &= E_t[(\mu_t dt)^2 + 2\mu_t dt \sigma_t dB_t + (\sigma_t dB_t)^2] \\ &= (\mu dt)^2 + 2\mu\sigma_t E_t[dB_t] + \sigma_t^2 E_t[(dB_t)^2] \\ &= (\mu dt)^2 + \sigma_t^2 dt, \end{aligned}$$

y aplicandola para calcular la varianza tenemos:

$$\begin{aligned} Var_t((dX_t)^2) &= E_t[(dX_t)^4] - (E_t[(dX_t)^2])^2 \\ &= E_t[(\mu_t dt + \sigma_t dB_t)^4] \\ &= E_t[(\mu_t dt)^4 + 4(\mu_t dt)^3(\sigma_t dB_t) + 6(\mu_t dt)^2(\sigma_t dB_t)^2 \\ &\quad + 4(\mu_t dt)(\sigma_t dB_t)^3 + (\sigma_t dB_t)^4] \\ &= (\mu dt)^4 + 4(\mu dt)^3 \sigma_t E_t[dB_t] + 6(\mu dt)^2 \sigma_t^2 E_t[(dB_t)^2] \\ &\quad + 4(\mu dt) \sigma_t^3 E_t[(dB_t)^3] + \sigma_t^4 E_t[(dB_t)^4] \\ &= (\mu dt)^4 + 6(\mu\sigma_t)^2 (dt)^3 + 3\sigma_t^4 (dt)^2 - ((\mu dt)^2 + \sigma_t^2 dt)^2. \end{aligned}$$

El único término de orden dt es $\sigma_t^2 dt$. Entonces podemos escribir

$$(dX_t)^2 = \sigma_t^2 dt = Var_t(dX_t)$$

y sustituyendo en la expansión de Taylor obtenemos

$$\begin{aligned} df(X_t) &= f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)\sigma_t^2 dt \\ &= f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)Var_t(dX_t), \end{aligned} \tag{1.10}$$

la cual es la fórmula de Itô. □

1.4.2. Fórmula de Itô Multivariada

Si f es una función de m procesos de Itô $X_t(1), X_t(2), \dots, X_t(m)$ generados por m movimientos Brownianos:

$$\begin{aligned} dX_t(1) &= \mu_t(1)dt + \sigma_t(1)dB_t(1), \\ dX_t(2) &= \mu_t(2)dt + \sigma_t(2)dB_t(2), \\ &\vdots \\ dX_t(m) &= \mu_t(m)dt + \sigma_t(m)dB_t(m). \end{aligned}$$

Entonces la fórmula de Itô se vuelve

$$df(X_t) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial X_t(i)} dX_t(i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1, j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial X_t(i) \partial X_t(j)} Cov_t(dX_t(i), dX_t(j)),$$

donde

$$Cov_t(dX_t(i), dX_t(j)) = \sigma_t(i)\sigma_t(j)\rho_t(i, j)dt$$

con $\rho_t(i, j)$ la correlación entre $dB_t(i)$ y $dB_t(j)$.

Cuando el tiempo aparece como una de las variables determinando el valor de f :

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial X_t(i)} dX_t(i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1, j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial X_t(i) \partial X_t(j)} Cov_t(dX_t(i), dX_t(j)). \quad (1.11)$$

Demostración. Con la expansión de Taylor de segundo orden en forma matricial para la función de múltiples variables $f(X_t(1), \dots, X_t(m))$:

$$df(X_t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial X_t(1)} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial X_t(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_t(1) \\ \vdots \\ dX_t(m) \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} dX_t(1) & \cdots & dX_t(m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial (X_t(1))^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial X_t(1) \partial X_t(m)} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial X_t(m) \partial X_t(1)} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial (X_t(m))^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_t(1) \\ \vdots \\ dX_t(m) \end{bmatrix},$$

$$df(X_t) = \frac{\partial f}{\partial X_t(1)} dX_t(1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial X_t(m)} dX_t(m) + \frac{1}{2} [X] \begin{bmatrix} dX_t(1) \\ \vdots \\ dX_t(m) \end{bmatrix},$$

en donde el vector $[X]$ es igual a:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2 f}{\partial (X_t(1))^2} dX_t(1) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial X_t(m) \partial X_t(1)} dX_t(m) \right. \\ & \quad \left. \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial X_t(1) \partial X_t(m)} dX_t(1) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial (X_t(m))^2} dX_t(m) \right], \end{aligned}$$

por lo tanto, obtenemos:

$$df(X_t) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial X_t(i)} dX_t(i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1, j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial X_t(i) \partial X_t(j)} dX_t(i) dX_t(j).$$

□

Capítulo 2

Teorema de Girsanov

En finanzas es posible trabajar con dos medidas de probabilidad, la objetiva y la de riesgo neutral. Las probabilidades objetivas determinan que tan probable es un estado particular del mercado antes de que ocurra, mientras que las probabilidades de riesgo neutral, relacionadas a los precios del estado, se refieren a qué tan costoso es comprar bienes antes de ese estado particular. La razón de dos medidas de probabilidad

$$\frac{\text{Probabilidad de riesgo neutral}}{\text{Probabilidad objetiva}}$$

es llamada cambio de medida.

En éste capítulo se presenta el desarrollo teórico para el cambio de medida, motivado en la referencia [3].

Lema 2.1. Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad con la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ tal que $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Sea $X_T > 0$ tal que $E(X_T) = 1$ y $X_t := E(X_T | \mathcal{F}_t)$, $0 \leq t \leq T$. Entonces si definimos a la probabilidad de riesgo neutral como $Q(A) := E(1_A X_T)$, $\forall A \in \mathcal{F}$ e Y una variable aleatoria \mathcal{F}_t -medible tal que $E^Q(|Y|) < \infty$ entonces, para todo $s \leq t$,

$$E^Q(Y | \mathcal{F}_s) = \frac{1}{X_s} E(Y X_t | \mathcal{F}_s).$$

Demostración. Sea $A \in \mathcal{F}_s$ entonces,

$$\begin{aligned} E^Q(1_A Y) &= E(1_A Y X_T) = E(1_A E(Y X_t | \mathcal{F}_s)) \\ &= E^Q(1_A \frac{1}{X_s} E(Y X_t | \mathcal{F}_s)). \end{aligned}$$

□

2.1. Cambio de Medida Condicional en un Paso

Definición 2.2. Denotemos a la densidad condicional de riesgo neutral en un paso al tiempo t por

$$q_{t+1|t}$$

y a la densidad condicional objetivo en un paso al tiempo t por

$$p_{t+1|t}.$$

Entonces definimos el cambio de medida condicional en un paso como la razón de las probabilidades de riesgo neutral y objetivo,

$$m_{t+1|t} := \frac{q_{t+1|t}}{p_{t+1|t}}.$$

2.2. Cambio de Medida Incondicional

Las densidades incondicionales $p_{T|0}$ y $q_{T|0}$ cumplen:

$$p_{T|0} = p_{1|0} \cdots p_{T-1|T-2} p_{T|T-1},$$

$$q_{T|0} = q_{1|0} \cdots q_{T-1|T-2} q_{T|T-1}.$$

Definición 2.3. El cambio de medida incondicional se define como:

$$m_T = \frac{q_{T|0}}{p_{T|0}} = \frac{q_{T|T-1} q_{T-1|T-2} \cdots q_{1|0}}{p_{T|T-1} p_{T-1|T-2} \cdots p_{1|0}} = m_{T|T-1} m_{T-1|T-2} \cdots m_{1|0}.$$

y usualmente también lo escribimos de la forma

$$m_T = \frac{dQ}{dP},$$

el cual es la derivada Radon-Nikodym de la medida Q con respecto a la medida P , [8] p.p. 382-383.

2.3. Proceso de Densidad del Cambio de Medida

Definimos el proceso de densidad del cambio de medida, el cual nos da el cambio de medida desde el tiempo 0 al tiempo t , como:

$$M_t := m_{1|0} \cdots m_{t|t-1}.$$

Si queremos evaluar el cambio de medida entre los tiempos $s < t$ podemos tomar M_t y quitar las probabilidades del intervalo de tiempo $[0, s]$ dividiendo entre M_s ,

$$M_{t|s} = m_{s+1|s} \cdots m_{t|t-1} = \frac{M_t}{M_s},$$

cuando $M_s \neq 0$.

Así, podemos escribir a la esperanza bajo la medida Q como una esperanza bajo la medida P :

$$E_s^Q[Y] = E_s \left[\frac{q_{t|s}}{p_{t|s}} Y \right] = E_s[M_{t|s} Y],$$

para todo $s < t$ y cualquier variable aleatoria Y conocida al tiempo t . En particular, si $Y = 1$ entonces

$$E_s[M_{t|s}] = 1.$$

2.4. Teorema de Girsanov

La idea central de el Teorema de Girsanov es la transformación de medidas de probabilidad, descritas en la sección anterior, para asegurar que un movimiento Browniano bajo la medida Q sea una martingala y además mostrar que el mismo cambio de medida no afecta la volatilidad.

Proposición 2.4. Sea $\{B_t : 0 \leq t \leq T\}$ movimiento Browniano y $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ una filtración. Suponga que la variable aleatoria X es conocida al tiempo T y que $E[X^2] < \infty$. Entonces existe un proceso $\{\theta_t : 0 \leq t \leq T\}$ adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ tal que

$$X = E[X] + \int_0^T \theta_t dB_t.$$

La Proposición anterior puede encontrarse en [3], p.p. 220.

Proposición 2.5. Sea $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ proceso adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$. Suponga que el proceso de densidad $M_t := m_{1|0} \cdots m_{t|t-1}$ es estrictamente positivo para todo t . Entonces $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ es una martingala bajo la medida Q si y sólo si $\{M_t X_t : 0 \leq t \leq T\}$ es una martingala bajo la medida P .

Demostración. Como el proceso $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$, la variable aleatoria X_t debe ser conocida al tiempo t , entonces

$$E_s^Q[X_t] = E_s[M_{t|s} X_t] = E_s \left[\frac{M_t}{M_s} X_t \right]$$

y como M_s es conocida al tiempo s entonces obtenemos

$$M_s E_s^Q[X_t] = E_s[M_t X_t], \quad \text{para todo } s < t.$$

Si $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ es una martingala bajo Q entonces $E_s^Q[X_t] = X_s$, lo que implica que

$$M_s E_s^Q[X_t] = E_s[M_t X_t] = M_s X_s, \quad \text{para todo } s < t.$$

Por lo tanto, $\{M_t X_t : 0 \leq t \leq T\}$ es una martingala bajo P .

Ahora supongamos que $\{M_t X_t : 0 \leq t \leq T\}$ es una martingala bajo P , entonces $E_s[M_t X_t] = M_s X_s$ con lo que $M_s E_s^Q[X_t] = M_s X_s$, y como $M_s > 0$ tenemos que:

$$E_s^Q[X_t] = X_s, \quad \text{para todo } s < t,$$

así, $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ es una martingala bajo Q . □

Proposición 2.6. Supongamos que el proceso de Itô $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ sigue un movimiento Browniano geométrico

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$$

con coeficientes determinados μ_t y σ_t . Entonces el proceso $\{\ln X_t : 0 \leq t \leq T\}$ sigue un movimiento Browniano con tendencia y volatilidad determinadas

$$d \ln X_t = \left(\mu_t - \frac{1}{2} \sigma_t^2 \right) dt + \sigma_t dB_t.$$

Demostración. Tenemos que $f(X_t) = \ln X_t$, usaremos la ecuación (1.9) del Teorema 1.17, por lo que calculamos

$$\begin{aligned} f'(X_t) &= 1/X_t, \\ f''(X_t) &= -1/X_t^2, \end{aligned}$$

así, la fórmula de Itô es

$$d \ln X_t = \frac{dX_t}{X_t} - \frac{1}{2} \frac{\text{Var}_t(dX_t)}{X_t^2},$$

donde $\text{Var}_t(dX_t)$ es la varianza condicional a la filtración $\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T$ al tiempo t .

Calculemos la varianza condicional $\text{Var}_t(dX_t)$ tomando:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t.$$

Usando propiedades de varianza, consideramos a $\mu X_t dt$ y a σX_t como constantes por ser conocidas al tiempo t , tenemos que

$$\begin{aligned} \text{Var}_t(dX_t) &= \text{Var}_t(\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t) \\ &= \text{Var}_t(\sigma X_t dB_t) \\ &= (\sigma X_t)^2 \text{Var}_t(dB_t) \\ &= (\sigma X_t)^2 dt. \end{aligned}$$

De esta forma, sustituyendo en la fórmula de Itô, obtenemos

$$d \ln X_t = \left(\mu_t - \frac{1}{2} \sigma_t^2 \right) dt + \sigma_t dB_t.$$

□

Teorema 2.7 (Teorema de Girsanov). Sea el proceso de Itô B_t^Q tal que:

$$dB_t^Q = \frac{\mu - r}{\sigma} dt + dB_t$$

1. El único cambio de medida $M_T = dQ/dP$ que hace a B_t^Q una martingala, está dado por

$$\ln M_T = \int_0^T -\frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 dt - \int_0^T \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right) dB_t.$$

2. $f(t, B_t^Q) = (B_t^Q)^2 - t$ es una martingala bajo Q , lo que implica que B_t^Q es movimiento Browniano bajo Q . Así

$$\text{Var}_t(dB_t^Q) = \text{Var}_t^Q(dB_t^Q) = dt,$$

es decir, el cambio de medida no afecta la volatilidad.

Demostración. 1. Por la Proposición 2.4, podemos expresar a M_T como

$$M_T = E[M_T] + \int_0^T \lambda_s dB_s = 1 + \int_0^T \lambda_s dB_s.$$

Sea $M_t = E_t[M_T]$ proceso de densidad de cambio de medida, $E_s[dB_s] = 0$

$$M_t = E_t[M_T] = 1 + \int_0^t \lambda_s dB_s,$$

derivando,

$$dM_t = \lambda_t dB_t. \quad (2.1)$$

Ahora, por la Proposición 2.5, B_t^Q es una martingala bajo Q si y sólo si $M_t B_t^Q$ es una martingala bajo la medida P . Por lo que, aplicando la fórmula de Itô multivariada (1.11) a $f(M_t, B_t^Q) = M_t B_t^Q$ obtenemos

$$\begin{aligned} d(M_t B_t^Q) &= M_t dB_t^Q + B_t^Q dM_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial M_t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial M_t \partial B_t^Q} Cov_t(dM_t, dB_t^Q) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial (B_t^Q)^2} Var_t(dB_t^Q). \end{aligned}$$

Sabemos que $dB_t^Q = \frac{\mu - r}{\sigma} dt + dB_t$ y además por la ecuación (2.1) que $dM_t = \lambda_t dB_t$, por lo que

$$Cov_t(dM_t, dB_t^Q) = Cov_t\left(\lambda_t dB_t, \frac{\mu - r}{\sigma} dt + dB_t\right) = \lambda_t Cov(dB_t, dB_t) = \lambda_t dt.$$

Así,

$$d(M_t B_t^Q) = \left(M_t \frac{\mu - r}{\sigma} + \lambda_t\right) dt + (M_t + B_t^Q \lambda_t) dB_t,$$

entonces

$$E[d(M_t B_t^Q)] = \left(M_t \frac{\mu - r}{\sigma} + \lambda_t\right) dt.$$

El proceso $M_t B_t^Q$ es una martingala bajo P si y sólo si $E_t[d(M_t B_t^Q)] = 0$, por lo cual

$$M_t \frac{\mu - r}{\sigma} + \lambda_t = 0.$$

Despejando λ_t y sustituyendo en la ecuación (2.1) tenemos

$$\frac{dM_t}{M_t} = -\frac{\mu - r}{\sigma} dB_t,$$

M_t es un movimiento Browniano geométrico único, de esta forma, por la Proposición 2.6, la ecuación diferencial estocástica para $\ln M_t$ es

$$d \ln M_t = -\frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 dt - \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) dB_t.$$

Por lo tanto, integrando obtenemos:

$$\ln M_T = \int_0^T -\frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 dt - \int_0^T \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right) dB_t.$$

2. Tomemos $f(t, B_t^Q) = (B_t^Q)^2 - t$, sustituyendo en la fórmula de Itô (1.11):

$$\begin{aligned} df(t, B_t^Q) &= 2B_t^Q dB_t^Q - dt + \frac{1}{2} 2 \text{Var}_t(dB_t^Q) \\ &= 2B_t^Q dB_t^Q - dt + dt \\ &= 2B_t^Q dB_t^Q. \end{aligned}$$

Sabemos por la Proposición 2.5 que B_t^Q es una martingala bajo Q , entonces:

$$\begin{aligned} E[df(t, B_t^Q)] &= E[2B_t^Q dB_t^Q] \\ &= 2B_t^Q E[dB_t^Q] = 0, \end{aligned}$$

y usando también la Proposición 1.6, tenemos que $f(t, B_t^Q) = (B_t^Q)^2 - t$ es a su vez una martingala bajo Q . Por lo que los procesos B_t^Q y $(B_t^Q)^2 - t$, son martingalas, y por el Teorema 1.11, B_t^Q es un movimiento Browniano bajo Q .

□

Capítulo 3

Modelo de Black-Scholes

Alrededor de 1970, las ideas aportadas por Bachelier y Wiener fueron consolidadas y sistematizadas por Fischer Black, Myron Scholes y Robert Merton en el contexto de las opciones financieras y la resolución al problema de estimar el precio de las opciones europeas. En 1973, Fischer Black y Myron Scholes realizaron una publicación en la que exponen la ahora llamada ecuación Black-Scholes, la cual estima el precio de la opción europea a un determinado tiempo.

En los últimos años, los mercados de opciones han alcanzado una importancia sumamente relevante en el mundo financiero. Éstas son ampliamente utilizadas por los profesionales y expertos en finanzas para otorgar al titular de la opción el derecho a hacer algo, sin estar obligado a ello.

Una opción financiera de tipo *call* es un contrato en el cual se establece que el titular, al pagar una prima, obtiene el derecho a comprar el activo subyacente al precio determinado K , en una fecha establecida o tiempo de ejercicio T . En cambio, al adquirir una opción financiera de tipo *put* el titular obtiene el derecho a vender el activo subyacente a un precio convenido en una fecha determinada, usando la misma notación. Aunque existen distintos tipos de opciones, nos centraremos en las opciones Europeas, las cuales sólo pueden ser ejercidas en la fecha de vencimiento.

En este contexto, estableceremos el significado de cada uno de los términos financieros que utilizaremos:

- Activo subyacente: activo real o financiero en el que se basa el derivado.
- Precio subyacente: precio actual del activo subyacente en el mercado.
- Tasa de interés libre de riesgo: rendimiento que proporciona una inversión en la que no existe riesgo.
- Tendencia: dirección en la que se mueve el precio del activo subyacente.
- Volatilidad: representa el rango posible de movimientos del precio subyacente. Siendo, estadísticamente hablando, la dispersión del movimiento.

3.1. Opción Call Europea

Sea S_t el precio del activo en el tiempo $t \in [0, T]$ y K el precio de ejecución. El payoff es la función de pago, la cual representa la ganancia del que adquiere la opción, y depende del valor del activo subyacente.

El *payoff* para una opción Europea call es:

$$C_T = \max \{S_T - K, 0\}.$$

Consideremos un modelo con rendimientos logarítmicos independientes e idénticamente distribuidos

$$d \ln S_t = \tilde{\mu} dt + \sigma dB_t,$$

donde B_t es un movimiento Browniano bajo la probabilidad objetiva, es decir, P . Asumamos que la tasa libre de riesgo r es constante.

Usando la Proposición 2.6, si $\tilde{\mu} = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$, entonces $\tilde{\mu} + \frac{1}{2}\sigma^2 = \mu$. De esta forma,

$$\frac{dS_t}{S_t} = \left(\tilde{\mu} + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dB_t = \mu dt + \sigma dB_t,$$

sumando y restando rdt obtenemos que

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma \left(\frac{\mu - r}{\sigma} dt + dB_t \right). \quad (3.1)$$

Además, sabemos de [3], p. 234 que:

$$E_t^Q \left[\frac{dS_t}{S_t} \right] = rdt. \quad (3.2)$$

Definamos un nuevo proceso de Itô, B^Q , tal que:

$$dB_t^Q = \frac{\mu - r}{\sigma} dt + dB_t.$$

Sabemos por las ecuaciones (3.1) y (3.2) que B^Q es una martingala bajo Q . Ahora, por el teorema de Girsanov, $Var_t^Q (dB_t^Q) = dt$. Por lo tanto, B^Q es movimiento Browniano bajo la medida de riesgo neutral Q .

Encontremos la distribución de $\ln S_T$ bajo la medida Q .

Tenemos, por la Proposición 2.6 que $d \ln X_t = (\mu_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2) dt + \sigma_t dB_t$. Además, $\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dB_t^Q$, por lo tanto,

$$d \ln S_t = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dB_t^Q,$$

en donde integrando, obtenemos que

$$\ln S_T = \ln S_t + \int_t^T \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) ds + \int_t^T \sigma dB_s^Q$$

y como

$$B_T^Q - B_t^Q \sim N(0, T - t),$$

entonces, el proceso

$$\frac{\ln S_T - \left(\ln S_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T - t) \right)}{\sigma \sqrt{T - t}},$$

tiene una distribución $N(0, 1)$.

Por lo tanto,

$$\ln S_T | \mathcal{F}_t \sim^Q N \left(\ln S_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T - t), \sigma^2 (T - t) \right).$$

El proceso de precio descontado de todos los activos sin dividendos es una martingala bajo Q , en específico para la opción tenemos

$$\frac{C_t}{\beta_t} = E_t^Q \left[\frac{C_T}{\beta_T} \right],$$

donde $C_T = \max(S_T - K, 0)$ y $\beta_t = e^{rt}$. Podemos usar esta condición de martingala para expresar el precio de la opción como una esperanza de riesgo neutral

$$C_t = \beta_t E_t^Q \left[\frac{\max(S_T - K, 0)}{\beta_T} \right],$$

la tasa es determinada y entonces

$$C_t = e^{-r(T-t)} E_t^Q [\max(S_T - K, 0)]. \quad (3.3)$$

Ahora, para una variable aleatoria $X \sim N(m, s^2)$ evaluemos la esperanza

$$E \left[(e^X - e^a) 1_{\{X > a\}} \right] \quad (3.4)$$

con

$$1_{\{X > a\}} = \begin{cases} 1 & , X > a \\ 0 & , X \leq a \end{cases}$$

Para facilitar el cálculo, escribamos a X en términos de una variable aleatoria normal estándar Z , $X = m + sZ$ donde $Z \sim N(0, 1)$. Así, sustituyendo en la ecuación (3.4) obtenemos:

$$\begin{aligned}
E [(e^X - e^a) 1_{\{X>a\}}] &= E [(e^{\{m+sZ\}} - e^a) 1_{\{m+sZ>a\}}] \\
&= e^m E [e^{sZ} 1_{\{Z>(a-m)/s\}}] - e^a E [1_{\{Z>(a-m)/s\}}] \\
&= E_1 - E_2.
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
E_1 &= e^m \int_{(a-m)/s}^{\infty} e^{sz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{m+s^2/2} \int_{(a-m)/s}^{\infty} e^{-\frac{(z-s)^2}{2}} dz \\
&= e^{m+s^2/2} E [1_{\{Y>(a-m)/s\}}] = e^{m+s^2/2} P \left(Y > \frac{a-m}{s} \right)
\end{aligned}$$

con $y = z$ y $Y \sim N(s, 1)$. Estandarizando a Y ,

$$\begin{aligned}
e^{m+s^2/2} P \left(Y > \frac{a-m}{s} \right) &= e^{m+s^2/2} \left(1 - \Phi \left(\frac{a-m-s^2}{s} \right) \right) \\
&= e^{m+s^2/2} \Phi \left(\frac{m+s^2-a}{s} \right),
\end{aligned}$$

y

$$E_2 = e^a P \left(Z > \frac{a-m}{s} \right) = e^a \left(1 - \Phi \left(\frac{a-m}{s} \right) \right) = e^a \Phi \left(\frac{m-a}{s} \right).$$

Por lo tanto, para $X \sim N(m, s^2)$

$$E [(e^X - e^a) 1_{\{X>a\}}] = e^{m+s^2/2} \Phi \left(\frac{m+s^2-a}{s} \right) - e^a \Phi \left(\frac{m-a}{s} \right). \quad (3.5)$$

Así, cuando $a = \ln K$, sustituyendo en (3.5) tenemos que:

$$\begin{aligned}
E [\text{máx}(e^X - K, 0)] &= \exp \left(m + \frac{1}{2}s^2 \right) \Phi \left(\frac{m+s^2-\ln K}{s} \right) \\
&\quad - K \Phi \left(\frac{m-\ln K}{s} \right),
\end{aligned}$$

donde Φ es la distribución acumulada normal estándar.

Tomemos $X = \ln S_T$, $m = \ln S_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)$ y $s^2 = \sigma^2(T-t)$. De esta forma,

$$\begin{aligned}
E_t^Q [\text{máx}(S_T - K, 0)] &= \exp \left(\ln S_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) \right) \\
&\quad \Phi \left(\frac{\ln S_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma^2(T-t) - \ln K}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \\
&\quad - K \Phi \left(\frac{\ln S_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) - \ln K}{\sigma\sqrt{T-t}} \right). \quad (3.6)
\end{aligned}$$

El resultado de sustituir (3.6) en (3.3) es la fórmula de Black-Scholes para opciones call europeas:

$$C_t = S_t \phi \left(\frac{\ln \frac{S_t}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) - Ke^{-r(T-t)} \phi \left(\frac{\ln \frac{S_t}{K} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right), \quad (3.7)$$

en donde C_t , el precio de una opción al tiempo t , depende de las variables: T tiempo restante para la ejecución, S_t precio del activo al tiempo t , σ^2 la tasa de variación instantánea en el precio de la acción, K el precio de ejecución marcado en la opción y r la tasa de interés libre de riesgo.

3.2. Opción Put Europea

En el caso de una opción Put Europea, el payoff es:

$$P_T = \text{máx} \{K - S_T, 0\}.$$

De manera análoga al cálculo efectuado para la opción call, podemos usar la condición de martingala para expresar el precio de la opción put como una esperanza de riesgo neutral

$$P_t = \beta_t E_t^Q \left[\frac{\text{máx}(K - S_T, 0)}{\beta_T} \right],$$

la tasa es determinada y entonces

$$P_t = e^{-r(T-t)} E_t^Q [\text{máx}(K - S_T, 0)]. \quad (3.8)$$

Ahora, para una variable aleatoria $X \sim N(m, s^2)$ evaluemos la esperanza

$$E [(e^a - e^X) 1_{\{a > X\}}] \quad (3.9)$$

con

$$1_{\{a > X\}} = \begin{cases} 1 & , a > X \\ 0 & , a \leq X \end{cases}$$

Para facilitar el cálculo, escribamos a X en términos de una variable aleatoria normal estándar Z , $X = m + sZ$ en donde $Z \sim N(0, 1)$. Así, sustituyendo en (3.9) obtenemos:

$$\begin{aligned} E [(e^a - e^X) 1_{\{a > X\}}] &= E [(e^a - e^{m+sZ}) 1_{\{a > m+sZ\}}] \\ &= e^a E [1_{\{(a-m)/s > Z\}}] - e^m E [e^{sZ} 1_{\{(a-m)/s > Z\}}] \\ &= E_1 - E_2. \end{aligned}$$

en donde:

$$E_1 = e^a P \left(Z < \frac{a-m}{s} \right) = e^a \phi \left(\frac{a-m}{s} \right)$$

y

$$\begin{aligned}
E_2 &= e^m \int_{-\infty}^{(a-m)/s} e^{sz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
&= e^{m+s^2/2} \int_{-\infty}^{(a-m)/s} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-s)^2}{2}} dz \\
&= e^{m+s^2/2} E \left[1_{\{Y < (a-m)/s\}} \right] \\
&= e^{m+s^2/2} P \left(Y < \frac{a-m}{s} \right),
\end{aligned}$$

en donde $y = z$ y $Y \sim N(s, 1)$. Ahora, estandarizando a Y ,

$$\begin{aligned}
e^{m+s^2/2} P \left(Y < \frac{a-m}{s} \right) &= e^{m+s^2/2} \phi \left(\frac{a-m-s^2}{s} \right) \\
&= e^{m+s^2/2} \phi \left(-\frac{m+s^2-a}{s} \right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para $X \sim N(m, s^2)$

$$E \left[(e^a - e^X) 1_{\{a > X\}} \right] = e^a \phi \left(-\frac{m-a}{s} \right) - e^{m+s^2/2} \phi \left(-\frac{m+s^2-a}{s} \right). \quad (3.10)$$

Así, cuando $a = \ln K$, sustituyendo en (3.10) tenemos que:

$$\begin{aligned}
E \left[\max(K - e^X, 0) \right] &= K \phi \left(-\frac{m-\ln K}{s} \right) \\
&\quad - \exp \left(m + \frac{1}{2}s^2 \right) \phi \left(-\frac{m+s^2-\ln K}{s} \right),
\end{aligned}$$

en donde ϕ es la distribución acumulada normal estándar.

Ahora, si $X = \ln S_T$, $m = \ln S_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)$ y $s^2 = \sigma^2(T-t)$. Tenemos

$$\begin{aligned}
E_t^Q \left[\max(K - S_T, 0) \right] &= K \phi \left(-\frac{\ln S_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) - \ln K}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \\
&\quad - \exp \left(\ln S_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) \right) \\
&\quad \phi \left(-\frac{\ln S_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma^2(T-t) - \ln K}{\sigma\sqrt{T-t}} \right). \quad (3.11)
\end{aligned}$$

El resultado de sustituir (3.11) en (3.8) es la fórmula de Black-Scholes para opciones put europeas:

$$\begin{aligned}
P_t &= K e^{-r(T-t)} \phi \left(-\frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \\
&\quad - S_t \phi \left(-\frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right), \quad (3.12)
\end{aligned}$$

en donde P_t , el precio de una opción al tiempo t , depende de las variables: T tiempo restante para la ejecución, S_t precio del activo al tiempo t , σ^2 la tasa de variación instantánea en el precio de la acción, K el precio de ejecución marcado en la opción y r la tasa de interés libre de riesgo.

Capítulo 4

Aplicaciones

El objetivo de este capítulo es aplicar el modelo de Black-Scholes a datos históricos de precios de dos acciones, obtenidos de la bolsa de valores NASDAQ (National Association of Securities Dealers Automated Quotation), desde enero a febrero de 2017, con la finalidad de valorar las opciones *call* y *put* de dichas acciones.

Para poder calcular el precio de las opciones tomaremos como el precio subyacente al precio diario de una determinada acción, por lo que se considera una muestra S_0, S_1, \dots, S_n , usando los siguientes conceptos para los cálculos correspondientes:

- $n + 1$: Número de observaciones.
- S_i : Precio de la acción al tiempo i .
- τ : Longitud del intervalo en años.

Calcularemos el precio relativo mediante:

$$P_r = \frac{S_i}{S_{i-1}},$$

donde S_i es el precio de la acción al tiempo i . Con esto ahora podemos obtener el rendimiento diario

$$x_i = \ln(P_r) = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right).$$

La media muestral está dada por:

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right).$$

Para la estimación insesgada de la varianza muestral de la variable X usaremos:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2,$$

de donde se tiene para nuestra muestra que;

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left[\ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) - \mu \right]^2,$$

por lo que la desviación estándar de los rendimientos logarítmicos diarios es,

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left[\ln \left(\frac{S_i}{S_{i-1}} \right) - \mu \right]^2}.$$

La desviación estándar de las x_i 's es igual a $\sigma\sqrt{\tau}$ y una estimación de ésta es la variable s , por lo que la volatilidad histórica σ puede estimarse como

$$\sigma = \frac{s}{\sqrt{\tau}}. \quad (4.1)$$

4.1. Amazon.com, Inc.

Elegimos como activo subyacente la acción de Amazon.com, Inc. que cotiza en NASDAQ, obteniendo 31 observaciones del precio al cierre de la acción, en el periodo del 3 de enero la 15 de febrero de 2017. Para poder aplicar la ecuación de Black-Scholes y valuar la opción call, necesitamos determinar el valor de los cinco parámetros mencionados en el capítulo anterior.

Tomaremos a S_0 como el precio de la acción al día 15 de febrero, es decir, $S_0 = 842.7$. Asumiendo un año con 245 días hábiles en la bolsa de valores como en 2016, la fecha de vencimiento T se tomará a 31 días expresados en años, por lo que $T = 31/245$. El precio de ejercicio será $K = 850.0$. La tasa de interés libre de riesgo r la tomaremos como el promedio de las tasas diarias de interés del Tesoro de EE.UU. a un mes durante el periodo seleccionado, por lo que $r = 0.0049935483$. Para calcular la volatilidad histórica, usaremos la ecuación (4.1), de aquí que $\sigma = 0.03227599$.

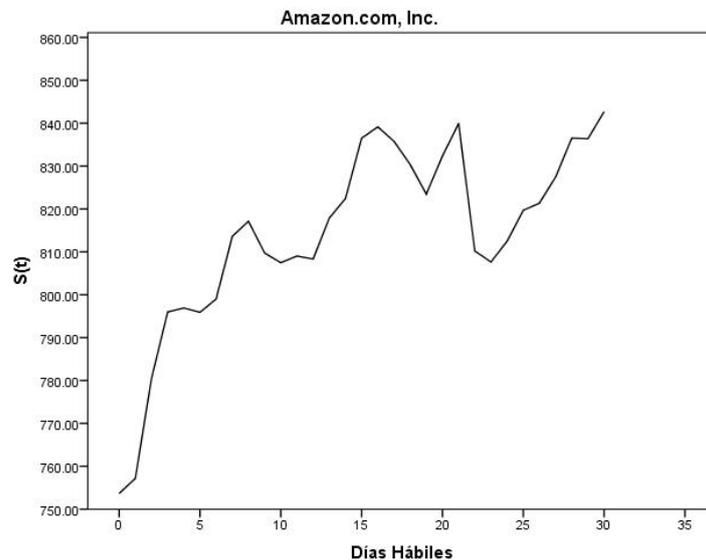


Figura 4.1: Gráfico del precio diario de las acciones de Amazon.com, Inc.

Día Hábil	Precio de la acción	Rendimiento logarítmico	Tasa de interés
0	753.67		0.52
1	757.18	0.004646399	0.49
2	780.45	0.030269671	0.51
3	795.99	0.019715947	0.5
4	796.92	0.001167674	0.5
5	795.9	-0.001280748	0.51
6	799.02	0.003912427	0.51
7	813.64	0.018132031	0.52
8	817.14	0.004292431	0.52
9	809.72	-0.00912193	0.52
10	807.48	-0.002770222	0.48
11	809.04	0.001930073	0.47
12	808.33	-0.000877969	0.46
13	817.88	0.011745236	0.46
14	822.44	0.005559905	0.5
15	836.52	0.016974898	0.48
16	839.15	0.003139045	0.49
17	835.77	-0.004036019	0.49
18	830.38	-0.006470028	0.49
19	823.48	-0.008344165	0.5
20	832.35	0.010713763	0.5
21	839.95	0.009089341	0.5
22	810.2	-0.036061235	0.49
23	807.64	-0.003164716	0.48
24	812.5	0.0059995	0.51
25	819.71	0.008834705	0.52
26	821.36	0.002010884	0.51
27	827.46	0.007399265	0.51
28	836.53	0.010901616	0.5
29	836.39	-0.000167372	0.51
30	842.7	0.007516011	0.53

Cuadro 4.1: Tabla de precios, rendimientos logarítmicos y tasas de interés correspondientes a los días hábiles de la acción Amazon.com, Inc. del 3 de enero al 15 de febrero de 2017.

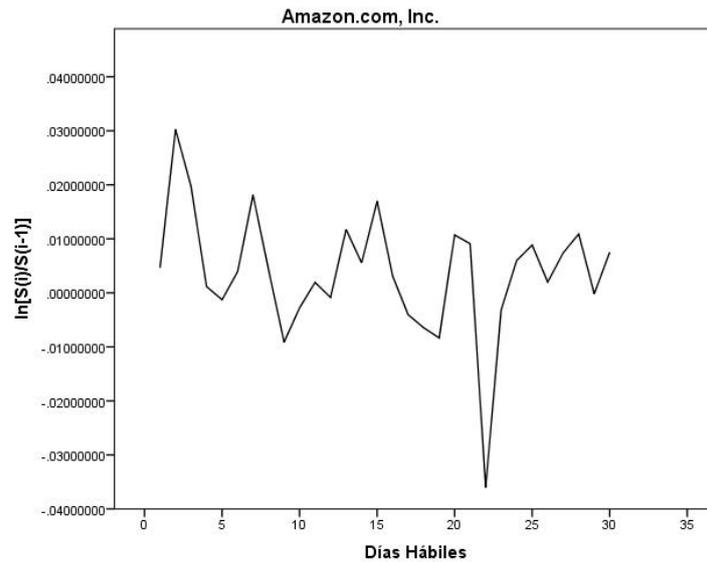


Figura 4.2: Gráfico de los rendimientos logarítmicos de las acciones de Amazon.com, Inc.

Para que podamos emplear el modelo de Black-Scholes se requiere que los rendimientos logarítmicos $\ln \left[\frac{S(i)}{S(i-1)} \right]$ de la muestra S_0, S_1, \dots, S_{30} , sigan una distribución normal. Para comprobar ésto, emplearemos la Prueba Kolmogorov-Smirnov de bondad de ajuste para una muestra, que nos determinará si la distribución de los rendimientos logarítmicos se ajusta a una distribución de probabilidad normal.

Usando dicha prueba, encontramos que los rendimientos logarítmicos de Amazon.com, Inc. se ajustan a una distribución normal con un nivel de significancia de 0.05 como puede verse en Figura 4.3.

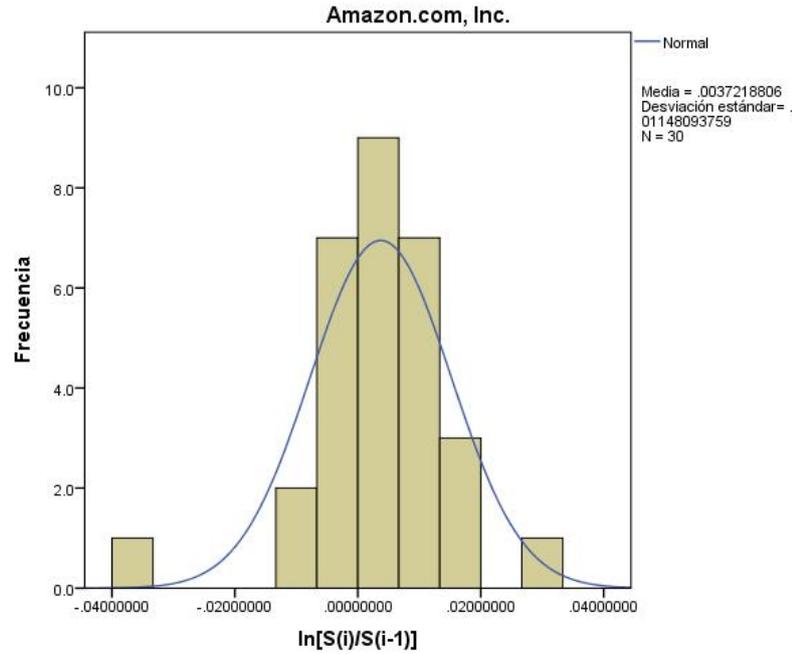


Figura 4.3: Histograma de los rendimientos logarítmicos de Amazon.com, Inc. comparados con la distribución normal.

Aplicaremos la ecuación de Black-Scholes (3.7) con los datos obtenidos para calcular el precio de la opción call al tiempo 0, por lo que tenemos:

$$\begin{aligned}
 C_0 &= (842.7)\phi\left(\frac{\ln\frac{842.7}{850} + (0.00499354 + \frac{1}{2}(0.03227599)^2)(0.12653)}{0.03227599\sqrt{0.12653}}\right) \\
 &\quad - (850)e^{-(0.00499354)(0.12653)}\phi\left(\frac{\ln\frac{842.7}{850} + (0.00499354 - \frac{1}{2}(0.03227599)^2)(0.12653)}{0.03227599\sqrt{0.12653}}\right) \\
 &= (842.7)\phi(-0.690502) - (850)e^{-(0.00499354)(0.12653)}\phi(-0.701983) \\
 &= (842.7)(.2449) - (850)e^{-(0.00499354)(0.12653)}(0.2413) = 1.3967
 \end{aligned}$$

Así, el precio de la opción call es de \$1.3967.

Analizaremos el parámetro K , tomando diferentes valores y observando las consecuencias en el precio de las opciones.

En la Figura 4.4 presentamos la tabla y el gráfico de distintos precios de ejercicio K junto con sus respectivos precios de opciones call y put. Calculando el precio de las opciones call con la fórmula de Black-Scholes y el precio de las opciones put mediante la paridad call-put

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0.$$

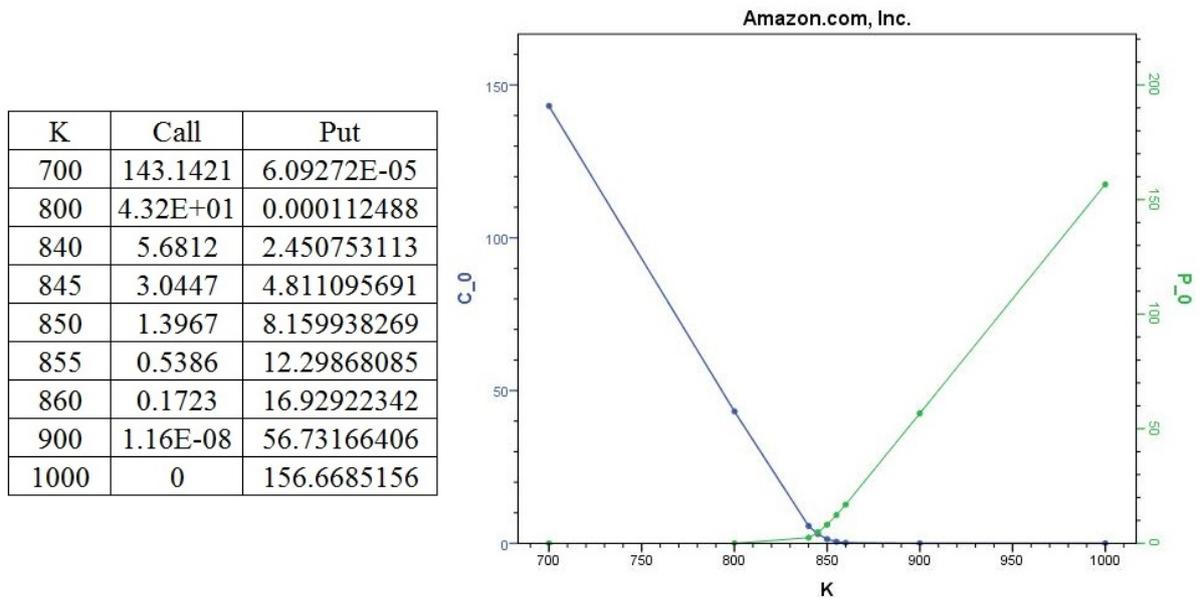


Figura 4.4: Tabla y gráfico del precio de las opciones call y put al tiempo $t=0$ de Amazon.com, Inc.

Observamos que el precio de la opción call disminuye conforme K aumenta, lo cual corresponde a lo esperando en un principio, porque al incrementar el valor de K , el valor de $\max\{S_T - K, 0\}$ disminuye hasta llegar a 0.

4.2. eBay Inc.

Para este ejemplo, elegimos como activo subyacente la acción de eBay Inc. que cotiza en NASDAQ, obteniendo 31 observaciones del precio al cierre de la acción, en el periodo del 3 de enero al 15 de febrero de 2017. Para poder aplicar la ecuación de Black-Scholes y valuar la opción put, necesitamos determinar el valor de los cinco parámetros mencionados en el capítulo anterior.

Tomaremos a S_0 como el precio de la acción al día 15 de febrero, es decir, $S_0 = 34.01$. Asumiendo un año con 245 días hábiles en la bolsa de valores como en 2016, la fecha de vencimiento T se tomará a 31 días expresados en años, por lo que $T = 31/245$. El precio de ejercicio será $K = 35.0$. La tasa de interés libre de riesgo r la tomaremos como el promedio de las tasas diarias de interés del Tesoro de EE.UU. a un mes durante el periodo seleccionado, por lo que $r = 0.0049935483$. Para calcular la volatilidad histórica, usaremos la ecuación (4.1), de aquí que $\sigma = 0.04062378$.

Día Hábil	Precio de la acción	Rendimiento logarítmico	Tasa de interés
0	753.67		0.52
1	757.18	0.004646399	0.49
2	780.45	0.030269671	0.51
3	795.99	0.019715947	0.5
4	796.92	0.001167674	0.5
5	795.9	-0.001280748	0.51
6	799.02	0.003912427	0.51
7	813.64	0.018132031	0.52
8	817.14	0.004292431	0.52
9	809.72	-0.00912193	0.52
10	807.48	-0.002770222	0.48
11	809.04	0.001930073	0.47
12	808.33	-0.000877969	0.46
13	817.88	0.011745236	0.46
14	822.44	0.005559905	0.5
15	836.52	0.016974898	0.48
16	839.15	0.003139045	0.49
17	835.77	-0.004036019	0.49
18	830.38	-0.006470028	0.49
19	823.48	-0.008344165	0.5
20	832.35	0.010713763	0.5
21	839.95	0.009089341	0.5
22	810.2	-0.036061235	0.49
23	807.64	-0.003164716	0.48
24	812.5	0.0059995	0.51
25	819.71	0.008834705	0.52
26	821.36	0.002010884	0.51
27	827.46	0.007399265	0.51
28	836.53	0.010901616	0.5
29	836.39	-0.000167372	0.51
30	842.7	0.007516011	0.53

Cuadro 4.2: Tabla de precios, rendimientos logarítmicos y tasas de interés correspondientes a los días hábiles de la acción eBay Inc. del 3 de enero al 15 de febrero de 2017.

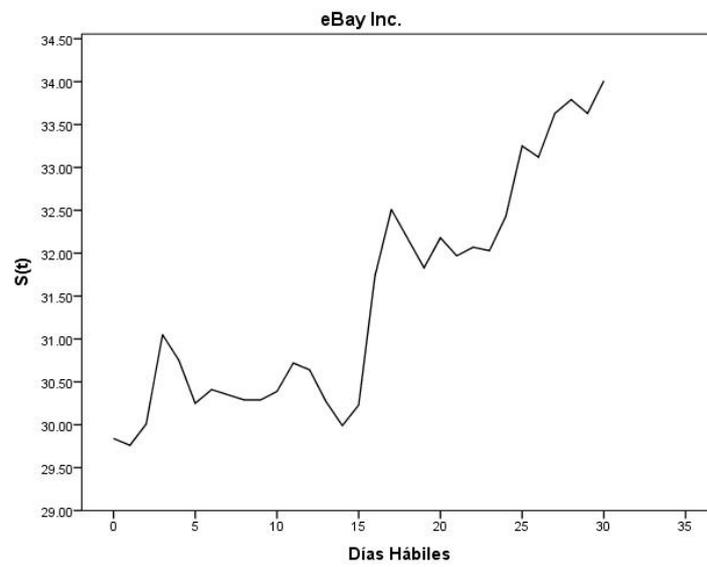


Figura 4.5: Gráfico del precio diario de las acciones de eBay Inc.

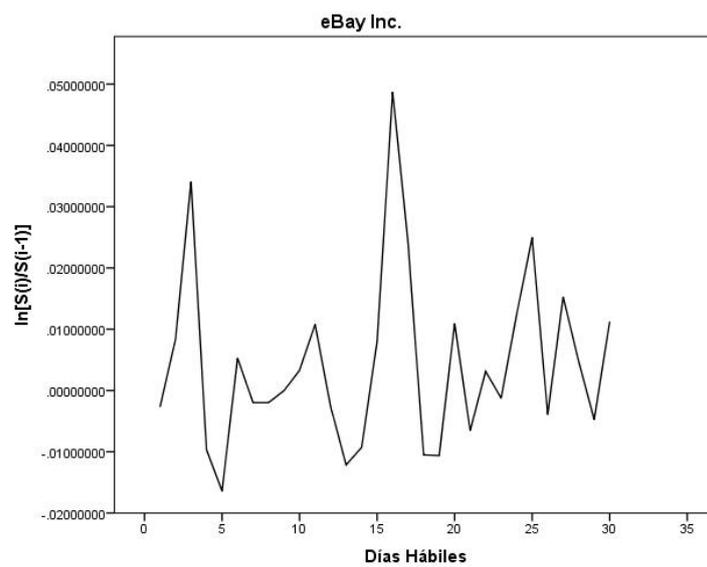


Figura 4.6: Gráfico de los rendimientos logarítmicos de las acciones de eBay Inc.

Para que podamos emplear el modelo de Black-Scholes se requiere que los rendimientos logarítmicos $\ln \left[\frac{S(i)}{S(i-1)} \right]$ de la muestra S_0, S_1, \dots, S_{30} , sigan una distribución normal. Para comprobar ésto, emplearemos la Prueba Kolmogorov-Smirnov de bondad de ajuste para una muestra, que nos determinará si la distribución de los rendimientos logarítmicos se ajusta a una distribución de probabilidad normal.

Usando dicha prueba, encontramos que los rendimientos logarítmicos de eBay, Inc. se ajustan a una distribución normal con un nivel de significancia de 0.05 como puede verse en Figura 4.7.

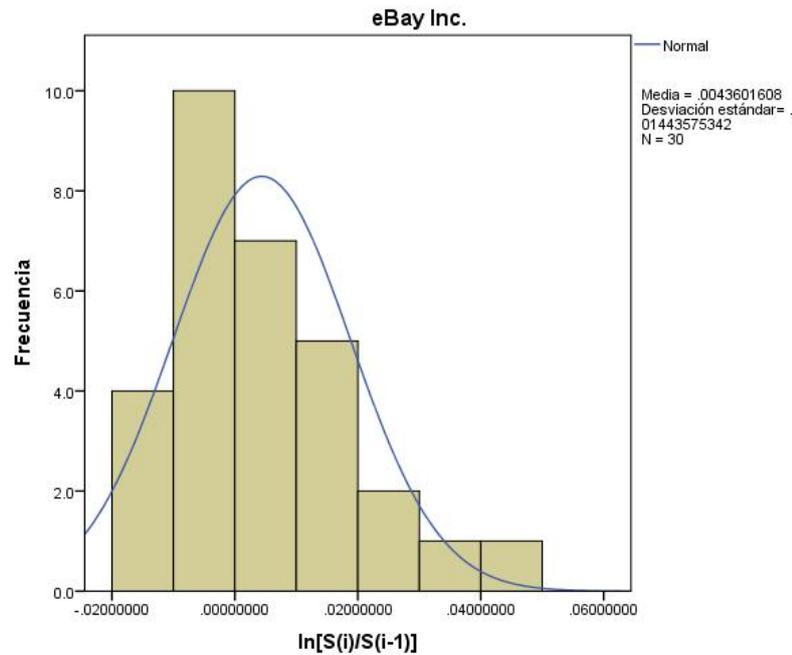


Figura 4.7: Histograma de los rendimientos logarítmicos de eBay Inc. comparados con la distribución normal.

Aplicaremos la ecuación de Black-Scholes (3.12) con los datos obtenidos para calcular el precio de la opción put al tiempo 0, por lo que tenemos:

$$\begin{aligned}
 P_0 &= (35)e^{-(0.00499354)(0.12653)} \phi \left(-\frac{\ln \frac{34.01}{35} + (0.00499354 - \frac{1}{2}(0.04062378)^2)(0.12653)}{0.04062378\sqrt{0.12653}} \right) \\
 &\quad - (34.01)\phi \left(-\frac{\ln \frac{34.01}{35} + (0.00499354 + \frac{1}{2}(0.04062378)^2)(0.12653)}{0.04062378\sqrt{0.12653}} \right) \\
 &= (35)e^{-(0.00499354)(0.12653)} \phi(1.9492) - (34.01)\phi(1.9347) \\
 &= (35)e^{-(0.00499354)(0.12653)}(0.9744) - (34.01)(0.9735) = 0.9728
 \end{aligned}$$

Así, el precio de la opción put es de \$0.9728.

De manera análoga al ejemplo anterior, analizaremos el parámetro K , tomando diferentes valores y observando las consecuencias en el precio de las opciones.

En la Figura 4.8 presentamos la tabla y el gráfico de distintos precios de ejercicio K junto con sus respectivos precios de opciones call y put. Calculando el precio de las opciones put con la fórmula de Black-Scholes y el precio de las opciones call mediante la paridad call-put.

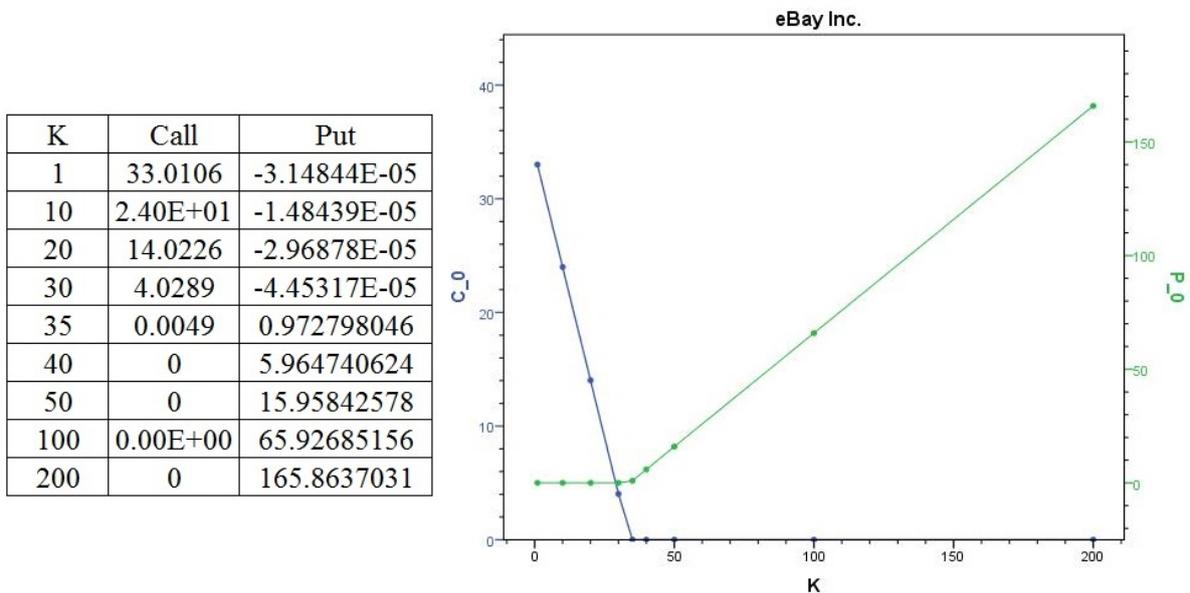


Figura 4.8: Tabla y gráfico del precio de las opciones call y put al tiempo $t=0$ de eBay Inc.

Observamos que el precio de la opción put aumenta conforme K aumenta, lo cual corresponde a lo esperado en un principio, porque al incrementar el valor de K , el valor de $\max\{K - S_T, 0\}$ aumenta.

Conclusiones

El objetivo de ésta tesis fue deducir la fórmula de Black-Scholes a través de martingalas y del Teorema de Girsanov. Posteriormente, aplicamos dicha fórmula para valorar las opciones call y put europeas.

En el primer capítulo discutimos los conceptos básicos de teoría de probabilidad, para así poder definir el movimiento Browniano junto con algunas propiedades, las cuales son esenciales en el tema de interés. Posteriormente, definimos la integral de Itô y las fórmulas necesarias para las ecuaciones diferenciales estocásticas, así como su aplicación en la demostración del Teorema de Girsanov, que junto con el cambio de medida de probabilidad se estudió en el segundo capítulo. En el tercer capítulo utilizamos los conceptos de capítulos previos y se presentan las definiciones necesarias para deducir mediante un cambio de medida de probabilidad y martingalas, las ecuaciones que Black, Scholes y Merton. Finalmente, realizamos aplicaciones de éste modelo, empleando datos reales recopilados en el periodo del 3 de enero de 2017 a 15 de febrero de 2017 de los precios de acciones de Amazon.com, Inc. y de eBay Inc., así como de la tasa de interés del Tesoro Nacional de EE.UU. Con la información obtenida, pudimos establecer los parámetros y supuestos necesarios, como la volatilidad histórica, así como corroborar que los rendimientos logarítmicos diarios siguen una distribución normal.

Realizamos los cálculos necesarios utilizando las ecuaciones de Black-Scholes obtenidas y así valorar el precio de las opciones call y put.

Para un trabajo futuro consideramos la valuación de opciones barrera, en la cual la opción deja de existir o comienza a existir cuando el activo subyacente alcanza cierto valor; y la opción canasta, la cual se basa en una media ponderada de distintos activos subyacentes [5].

Apéndice

4.3. Prueba Kolmogorov-Smirnov de Bondad de Ajuste para una Muestra

La Prueba de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov para una muestra sirve para determinar si la distribución de datos en una muestra proviene o se ajusta a una distribución de probabilidad de algún tipo en específico, en este caso, a una distribución de probabilidad normal, ya que en las fórmulas de Black-Scholes que veremos mas adelante, se requiere que los datos sigan una distribución de este tipo.

Esta prueba es usada con variables continuas y es categorizada dentro de las empleadas para datos ordinales, ya que requiere la construcción de la distribución de frecuencia acumulada.

En las pruebas de bondad de ajuste se busca retener la hipótesis nula H_0 , es decir, queremos demostrar que la distribución de la muestra es derivada de una distribución normal, por lo que:

$$H_0 : F(X) = F_0(X), \text{ para todos los valores de } X,$$

donde $F(X)$ representa la distribución de probabilidad acumulada de los datos de nuestra muestra, mientras que $F_0(X)$ representa la distribución normal.

Lo cual significa que en ningún punto la distancia vertical entre la distribución acumulada de la muestra y la distribución acumulada normal es mas grande de lo esperado, si la muestra proviene de la distribución normal. De ésta forma, el estadístico de prueba será el punto que representa la distancia vertical más grande entre las dos distribuciones en cualquier punto.

Para la hipótesis alternativa H_a , consideramos los siguientes casos, de los cuales solo emplearemos uno:

- a) $H_a : F(X) \neq F_0(X)$, para algún valor de X . Ésta es una hipótesis alternativa bilateral que se evalúa con una prueba de dos colas. En el punto donde existe máxima separación entre las distribuciones, la distribución de probabilidad acumulada de la muestra es significativamente mayor o menor que la distribución de probabilidad acumulada normal.
- b) $H_a : F(X) > F_0(X)$, para algún valor de X . Ésta es una hipótesis alternativa direccional que se evalúa con una prueba de una cola. En el punto donde existe máxima separación entre las distribuciones, la distribución de probabilidad acumulada de la muestra es significativamente mayor que la distribución de probabilidad acumulada normal.

- c) $H_a : F(X) < F_0(X)$, para algún valor de X . Ésta es una hipótesis alternativa direccional que se evalúa con una prueba de una cola. En el punto donde existe máxima separación entre las distribuciones, la distribución de probabilidad acumulada de la muestra es significativamente menor que la distribución de probabilidad acumulada normal.

4.3.1. Cálculos para la Prueba

Para realizar la prueba de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov contrastaremos ambas distribuciones, por lo que necesitamos calcular:

$z = (X - \mu)/\sigma$, donde X es la variable de los datos, μ la media poblacional y σ la desviación estándar poblacional.

p , la cual representa la proporción de casos en la distribución normal que están entre la media poblacional y z calculada a partir de X .

$F_0(X_i) = p \pm 0.5$, la proporción acumulada para algún dato de X y z asociado a éste en la distribución normal, donde i representa la i -ésima fila en los datos.

$S(X_i)$, la proporción acumulada para algún dato de X en la distribución muestral.

$|S(X_i) - F_0(X_i)|$, la distancia entre las proporciones de las distribuciones.

$|S(X_{i-1}) - F_0(X_i)|$, el valor absoluto de la diferencia entre la proporción acumulada en la distribución normal y la proporción acumulada para el dato anterior.

Denotaremos como M al mayor de $|S(X_i) - F_0(X_i)|$, y como M' al mayor de $|S(X_{i-1}) - F_0(X_i)|$. Usaremos como estadístico de prueba para la prueba de bondad de ajuste Kolmogorovo-Smirnov para una sola muestra al mayor de los valores M y M' .

4.3.2. Interpretación del Resultado

Evaluamos la hipótesis nula de acuerdo a la hipótesis alternativa elegida:

- a) Si elegimos la hipótesis alternativa bidireccional $H_a : F(X) \neq F_0(X)$, rechazamos la hipótesis nula si el valor del estadístico de prueba es igual o mayor que el valor crítico tabulado para dos colas de M con el nivel de significancia previamente establecido.
- b) Si elegimos la hipótesis alternativa direccional $H_a : F(X) > F_0(X)$, rechazamos la hipótesis nula si el valor del estadístico de prueba es igual o mayor que el valor crítico tabulado para una cola de M con el nivel de significancia previamente establecido. La diferencia entre las dos distribuciones de probabilidad acumulada respecto al punto del estadístico de prueba, debe ser tal que la distribución de la muestra sea mayor que la distribución normal.
- c) Si elegimos la hipótesis alternativa direccional $H_a : F(X) < F_0(X)$, rechazamos la hipótesis nula si el valor del estadístico de prueba es igual o mayor que el valor crítico tabulado para una cola de M con el nivel de significancia previamente establecido. La diferencia entre las dos distribuciones de probabilidad acumulada respecto al punto del estadístico de prueba, debe ser tal que la distribución de la muestra sea menor que la distribución normal.

Bibliografía

- [1] BACHELIER, L. *Théorie de la spéculation*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 3 (17), pp. 21-86.
- [2] BROWN, R. *A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies*, 1827.
- [3] CERNÝ, A. *Mathematical Techniques in Finance*, segunda edición, Princeton University Press, EEUU., 2009.
- [4] EINSTEIN, A. *Investigations on the theory of the Brownian movement*, traducido por A. D. Cowper, USA: Dover Publications, (publicado en 1956).
- [5] HULL, J.C. *Options, Futures, and Other Derivatives*, quinta edición, Pearson/Prentice Hall, EEUU., 2006.
- [6] KUO, H. *Introduction to Stochastic Integration*, Editorial Board, EEUU., 2006.
- [7] RINCÓN, L. *Introducción a los procesos estocásticos*, primera edición, Facultad de Ciencias, UNAM., 2012.
- [8] ROYDEN, H.L., FITZPATRICK, P.M., *Real Analysis*, cuarta edición, Pearson Education, 2010.
- [9] WIENER, N. *Differential Space*, 1923.