Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

Dinámica en el intervalo y en su hiperespacio de compactos

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA
Felipe de Jesús Aguilar Romero

DIRECTORES DE TESIS
Dr. David Herrera Carrasco
Dr. Fernando Macías Romero

PUEBLA, PUE. 9 de diciembre de 2019.

A mi Madre.
Gracias por tanto amor.

Agradecimientos

Agradezco infinitamente a mi madre Juanita que nunca perdío la confianza en mi y nunca se rindio. Eres mi super heroe. Es por ella y para ella cada logro en mi vida.

Agradezco inmensamente a mi Anyeli que ha estado conmigo en las buenas y malas . Nunca terminare de pagarte lo buena que has sido conmigo, tqm.

Agradezco la amistad de mis compaẽros durante todo este tiempo, en especial al grupo de Métricos y Puebla 33, me ayudaron a crecer mucho, estoy feliz de coincidir con ustedes. Un agradecimiento especial para David ALV, que se tomó el tiempo de pensar y respoder muchas de mis preguntas, gracias. Y al compañero Libreros por todos sus consejos para la elaboración de este trabajo, gracias.

Agradezco a mis asesores de tesis. Dr. Fernando Macías Romero y Dr David Herrera Carrasco por permitirme trabajar bajo sus dirección. Estoy muy complacido de poder trabajar con ustedes, gracias por los consejos y el apoyo.

Agradezco a mis sinodales Dra. Patricia Dómiguez Soto, Dr. Alexander Bikov y M.C. Antonio de Jesús Libreros López por sus observaciones y comentarios para mejorar este trabajo.

Introducción

Las funciones siempre han sido de gran interés y utilidad, porque relaciona a los elementos de un conjunto con los elementos de otro conjunto. Por ejemplo, en las materias de cálculo diferencial e integral se estudian funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. En este caso, estudiamos un problema al que se le denomina dinámica, este consiste en observar el comportamiento que tienen las funciones sobre los puntos del espacio cuando estas se iteran infinitamente, a este proceso lo llamamos sistema dinámico. Lo sistemas dinámicos discretos, aparecen en áreas científicas, de gran auge e importancia en la actualidad, como lo son la biología matemática y la economía. En particular los sistemas dinámicos discretos aparecen de forma natural en todo lo relacionado al estudio de crecimiento de poblaciones.

Los sistemas dinámicos son un área de las matemáticas, que se remontan a Isac Newton con sus estudios sobre mecánica celeste, y a Henri Poincaré, quien inició el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales. Por otra parte, hace 50 años que los sistemas dinámicos se establecieron como un área propiamente dicha, gracias al trabajo de matemáticos como S. Smale, Sinai, Lyapunov, A. Douady, M. Herman, D. Sullivan y V. I. Arnold, entre otros.

Si bien, varios de los resultados en este trabajo se presentan para espacios métricos compactos, hacemos énfasis en el intervalo $[0,1]$ y en las funciones continuas de este intervalo sobre sí mismo, para luego definir una función, que depende de la que ya se tenía sobre el conjunto de los subconjuntos cerrados, no vacíos, del intervalo $[0,1]$, y así observar qué propiedades se mantienen sobre esta nueva función, a este nuevo conjunto se le denomina como hiperespacio. La teoría de hiperespacios tuvo sus inicios a principio del siglo XX con los trabajos de F. Hausdorff y L. Vietoris. A partir de esos trabajos estudiamos la dinámica en hiperespacios.

Finalmente en este trabajo de tesis estudiamos el *conjunto omega límite*, éste es de especial interés, porque nos da una relación entre un espacio y su hiperespacio. Además, de una equivalencia que nos ayuda a diferenciar ciertas funciones.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera:

El capítulo 1 contiene los conceptos y teoremas importantes de la teoría de espacios métricos, en particular cuando estos son compactos. En el capítulo 2 abordamos la dinámica de funciones de un espacio métrico compacto en otro espacio métrico compacto, tratando la naturaleza de los puntos fijos de la función y el comportamiento de sus puntos periódicos, y presentamos el Teorema de *Li-Yorke*, para funciones en intervalos de los números reales. Se estudia la función *tienda* y se exponen algunas de sus propiedades. Finalmente, se enuncia la definición de sistema dinámico caótico según Devaney, con algunos ejemplos.

En el capítulo 3 dado X un métrico compacto, estudiamos al hiperespacio de los subconjutos no vacíos y compactos de X, denotado por 2^X. Demostramos que 2^X es un espacio métrico y estudiamos la dinámica de la función inducida que va de 2^X en 2^X. Abordamos las propiedades que se preservan de la función de X en X a la función inducida y viceversa. Cuando no se preserva alguna propiedad se muestra un ejemplo.

En el capítulo 4 se demuestran algunas propiedades del conjunto omega límite de un punto. Este conjunto nos ayuda a definir una función de un espacio métrico compacto a su hiperespacio de subconjuntos compactos no vacíos. Nuestro objetivo en esta parte del trabajo es dar condiciones necesarias y suficientes para que la función sea continua cuando X es el intervalo $[0,1]$.

Índice general

Dinámica en el intervalo y en su hiperespacio de compactos

Felipe de Jesús Aguilar Romero

9 de diciembre de 2019

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo enunciaremos algunas definiciones y teoremas que se necesitarán para poder estudiar un sistema dinámico. Sugerimos al lector revisar [6] y [8] para este capítulo. Antes que todo revisaremos el material necesario para poder abordar los sistemas dinámicos, empezando con el concepto de *distancia*.

Definición 1.1. *Un* ***espacio métrico*** *es una pareja (X,d), donde X es un conjunto no vacío y* $d : X \times X \to [0, \infty)$ *es una función que satisface la siguientes condiciones:*

(i) Para cada $x, y \in X, d(x, y) = 0$ *si, y sólo si* $x = y$*,*

(ii) Para cada $x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$*,*

(iii) Para cada $x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$*.*

La función d se llama métrica en X. Cuando no haya necesidad de referirse a la métrica solo escribiremos X en vez de (X,d).

Dado $x \in X$ y $\delta > 0$, denotamos por $B(x, \delta) = \{y \in X : d(x, y) < \delta\}$ a la bola abierta con centro en x y radio δ .

Definición 1.2. *Sea* X *un espacio métrico y* $A \subset X$*, definimos la* ***cerradura*** *de* A *por*

$$cl(A) = \{x \in X : \textit{para cada } \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Decimos que A es un subconjunto cerrado de X si cl(A)=A.

Definición 1.3. *Sea X un espacio métrico, $x \in X$ es un* ***punto de acumulación*** *de X si para toda $\varepsilon > 0$,*

$$(B(x, \varepsilon) - \{x\}) \cap X \neq \emptyset.$$

Un punto que no es de acumulación es un punto ***aislado****.*

La acción de iterar ha estado presente en matemáticas desde hace mucho, esta acción es lo que da vida a los sistemas dinámicos.

Definición 1.4. *Sea X un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua, para cada $x \in X$ el conjunto*

$$\mathcal{O}(x, f) = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), ...\}$$

es la ***órbita de x bajo f****.*

Dado $n \in \mathbb{N}$, f^n denota la composición de f consigo misma n veces, y f^0 es la función identidad. De esta manera la órbita de un punto siempre nos da una sucesión y por tanto sería intersante saber si converge o no converge, esto lo trataremos en el capítulo 4 (véase la Definición 4.1).

Podemos interpretar $f^n(x)$ como el $n - \acute{e}simo$ momento de x, de esta manera la órbita de x nos da el desplazamiento de x sobre el espacio.

En base a esto la pareja (X, f) nos da un módelo matemático del movimiento, y esto es lo que entenderemos como *sistema dinámico discreto*. La palabra *discreto* hace referencia a que únicamente conocemos la posición del objeto en movimiento, cuando los momentos toman valores de números enteros no negativos. En lo que sigue solo diremos sistema dinámico.

Los resultados que se enuncian a continuación son bien conocidos en la topología y nos serán útiles a lo largo de este trabajo.

Teorema 1.5. *[6, Teorema 2, 6.2] Sean X, Y espacios métricos y $f : X \to Y$ una función. Entonces f es continua si, y sólo si para todo abierto V de Y se tiene que $f^{-1}(V)$ es un abierto de X.*

Teorema 1.6. *[9, Teorema 8.6] (Teorema de Baire) Sea X un espacio métrico completo. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una colección de conjuntos no vacíos, abiertos y densos en X, entonces*

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset.$$

Teorema 1.7. *[9, Teorema 3.2] Sean I un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : I \to I$ una función continua. Sean $[a,b]$ y $[c,d]$ dos intervalos contenidos en I. Si $[c,d] \subset f([a,b])$, entonces existe un subintervalo $[\alpha, \beta]$, contenido en $[a,b]$ tal que $f([\alpha,\beta]) = [c,d]$.*

La siguiente definición es fundamental pare este trabajo, esta nos da una noción de estabilidad entre órbitas. Se verá su importancia en el capítulo 4 (véase el Teorema 4.15).

Definición 1.8. *Sean X un espacio métrico y $f : X \longrightarrow X$ una función. Decimos que f es **equicontinua** en un punto x si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $y \in B(x,\delta)$, entonces $f^n(y) \in B(f^n(x),\varepsilon)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Se puede ver fácilmente que si f es una función equicontinua en x entonces f es continua en x, sin embargo el recíproco no es cierto, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.9. *La función $f : [0,1] \to [0,1]$ definida por $f(x) = x^2$, es continua en 1, pero no es equicontinua en 1.*

Supongamos que f si es equicontinua en 1. Para $\varepsilon = \frac{1}{2}$ existe $\delta > 0$ tal que si $y \in B(1,\delta)$, entonces $f^n(y) \in B(f^n(1), \frac{1}{2})$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Dado $y \in (0,1)$. Como los naturales no son acotados existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$N > \frac{ln(\frac{1}{2})}{2ln(y)}.$$

De aquí,

$$\begin{aligned} 2Nln(y) < ln(\tfrac{1}{2}) &\Leftrightarrow e^{ln(y^{2N})} < e^{ln(\frac{1}{2})}, \\ &\Leftrightarrow y^{2N} < \frac{1}{2}, \\ &\Leftrightarrow 1 - y^{2N} > \frac{1}{2}, \\ &\Leftrightarrow |f^N(1) - f^N(y)| > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Así, para cada y en $B(1,\delta)$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(y) \notin B(f^N(1), \frac{1}{2})$. Esta es una contradicción, por lo tanto f no es equicontinua en 1.

1.1. Compacidad

En esta sección estudiamos una de las propieddes más importantes de los espacios métricos denominada compacidad, a pesar de que la definición es un poco difícil de endender nos ayuda a obtener bastantes resultados útiles, como los que enunciamos a continuación.

Dado X un espacio métrico. Una subcolección $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X es una **cubierta** de X si $X = \bigcup \mathcal{U}$. Si además cada uno de los elementos de $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de X, entonces $\mathcal{U}$ se llama una **cubierta abierta**. Por otro lado, si $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ con $X = \bigcup \mathcal{V}$, decimos que $\mathcal{V}$ es una **subcubierta** de $\mathcal{U}$.

Definición 1.10. *Sea X un espacio métrico. Decimos que X es* ***compacto*** *si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.*

Teorema 1.11. *Sea X es un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces A es compacto si, y sólo si para toda colección de abiertos en X, $\mathcal{U}$, con $A \subset \bigcup \mathcal{U}$ existe $\mathcal{U}^* \subset \mathcal{U}$ tal que $A \subset \bigcup \mathcal{U}^*$ y $\mathcal{U}^*$ es finita.*

Demostración. Supongamos que A es compacto, y sea $\mathcal{U}$ una colección de abiertos en X, tal que $A \subset \bigcup \mathcal{U}$. Notar que $\mathcal{V} = \{A \cap U : U \in \mathcal{U}\}$ es una cubierta abierta de A, por lo que existe $\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}$ finito, tal que $A = \bigcup \mathcal{V}^*$, si $\mathcal{U}^* = \{U \in \mathcal{U} : A \cap U \in \mathcal{V}^*\}$, se tiene que $\mathcal{U}^* \subset \mathcal{U}$, $A \subset \bigcup \mathcal{U}^*$ y $\mathcal{U}^*$ es finito. Así se tiene lo deseado.

Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de A, como $A \subset X$ entonces si $U \in \mathcal{U}$ tenemos que $U = V \cap A$, donde V es un abierto en X. Definamos

$$\mathcal{V} = \{V : V \cap A \in \mathcal{U} \ \text{ y } \ V \text{ es abierto en X}\}.$$

Es claro que $A \subset \bigcup \mathcal{V}$, entoncs existe $\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}$ tal que $A \subset \bigcup \mathcal{V}^*$ y $\mathcal{V}^*$ es finito. Si $\mathcal{U}^* = \{V \cap A : V \in \mathcal{V}^*\}$, tenemos que $A = \bigcup \mathcal{U}^*$, $\mathcal{U}^* \subset \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}^*$ es finito. Por lo tanto A es compacto. □

Ejemplo 1.12. *Sea X un espacio métrico y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X que converge a un punto $a \in X$. Entonces $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ es compacto.*

Tomemos $\mathcal{U}$ una colección de abiertos en X tal que $A \subset \bigcup \mathcal{U}$. Entonces $a \in U_0$, para algún $U_0 \in \mathcal{U}$. Dado que U_0 es abierto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, sí $m \geq N$ entonces $a_m \in U_0$. Para cada a_i con $i < N$ existe $U_i \in \mathcal{U}$ tal que $a_i \in U_i$, tomando $\mathcal{U}^* = \{U_0, U_1, ..., U_{N-1}\}$, es claro que

$$A \subset \bigcup \mathcal{U}^*,\ \mathcal{U}^* \subset \mathcal{U} \ \text{ y } \ \mathcal{U}^* \text{ es finito.}$$

De esto concluimos que A es compacto.

Teorema 1.13. *Sean X, Y espacios métricos y $f : X \to Y$ una función continua. Si $A \subset X$ es compacto, entonces $f(A)$ también es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una colección de abiertos en Y tal que $f(A) \subset \bigcup \mathcal{U}$. Consideremos el conjunto $\mathcal{V} = \{(f)^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$, como f es continua, por el Teorema 1.5 los elementos de $\mathcal{V}$ son abiertos en X. Además podemos ver que $A \subset \bigcup \mathcal{V}$. Como A es compacto existe $\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}$ finito tal que $A \subset \bigcup \mathcal{V}^*$. Si definimos $\mathcal{U}^* = \{U \in \mathcal{U} : (f)^{-1}(U) \in \mathcal{V}^*\}$ no es difícil ver que $f(A) \subset \bigcup \mathcal{U}^*$. Por lo tanto $f(A)$ es compacto. $\square$

Teorema 1.14. *Sea X un espacio métrico compacto. Si $A \subset X$ es cerrado, entonces A es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una colección de abiertos tal que $A \subset \bigcup \mathcal{U}$. Tenemos que $\mathcal{U} \cup \{X - A\}$ es una cubierta abierta de X, por ser X compacto existe $\mathcal{U}^* \subset \mathcal{U}$, finito tal que $\bigcup \mathcal{U}^* \cup (X - A) = X$, se puede ver que $A \subset \bigcup \mathcal{U}^*$, por lo tanto A es compacto. $\square$

Teorema 1.15. *(Teorema de Weiestrass) Sean X un espacio métrico y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Si X es compacto, entonces f tiene un máximo y un mínimo.*

Demostración. Por el Teorema 1.13 $f(X)$ es compacto en $\mathbb{R}$ y por el Teorema de Heine-Borel $f(X)$ es cerrado y acotado. Por ser acotado podemos garantizar la existencia de $\alpha = \sup f(X)$ y $\beta = \inf f(X)$. Veamos que estos pertenecen a $f(X)$.

Sea $\varepsilon > 0$, es claro que $\alpha - \varepsilon < \alpha$, como α es la mínima cota superior de $f(X)$ debe existir $y \in f(X)$ tal que $\alpha - \varepsilon < y \leq \alpha$. De esto tenemos que para todo $\varepsilon > 0$, $B(\alpha, \varepsilon) \cap f(X) \neq \emptyset$, por lo que α es un elemento de la cerradura de $f(X)$. Como $f(X)$ es cerrado tenemos finalmente que $\alpha \in f(X)$. Con argumentos análogos al caso anterior se tiene que $\beta \in f(X)$. De esta manera deben existir puntos $a, b \in X$ tales que $f(a) = \alpha$ y $f(b) = \beta$. Se cumple así que $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$ para toda $x \in X$, es decir, f alcanza en b un mínimo y en a un máximo. $\square$

Los siguientes resultados son muy conocidos y serán de gran útilidad para este trabajo, por lo cual se invita al interesado a revisar las referencias si desea ver la demostración.

Teorema 1.16. *[8, Teorema 27.3](Heine-Borel) Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si, y sólo si A es cerrado y acotado.*

Teorema 1.17. *[6, Teorema 4, 5.1] Si X un espacio métrico compacto, entonces toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente.*

Teorema 1.18. *[8, Teorema 26.6] Sean X, Y espacios métricos y $f : X \to Y$ una función continua y biyectva. Si X es compacto, entonces f es un homeomorfismo.*

1.2. Conexidad

Otra propiedad bastante útil como la compacidad es la bien conocida conexidad. Intuituvamente un espacio es conexo cuando es de una sola pieza, por poner un ejemplo, en $\mathbb{R}$ los únicos espacios conexos son los intervalos. Sin embargo en espacios más complicados la intuición ya no es muy confiable, véase el Ejemplo 1.22, por ello es importante dar la definición.

Definición 1.19. *Sea X un espacio métrico. Diremos que X es* ***disconexo*** *si existen dos abiertos U y V en X, no vacíos tales que:*

(a) $U \cap V = \emptyset$,

(b) $X = U \cup V$.

Si X no es disconexo decimos que X es ***conexo****.*

El siguiente resultado es trivial, basta con fijarse en la topológia heredada, por lo cual se deja como ejercicio mental al interesado.

Teorema 1.20. *Sea X un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces A es disconexo si, y sólo si existen dos abiertos U y V en X tales que $A \cap V$ y $A \cap U$ son ajenos, no vacíos y $A \subset U \cup V$.*

Teorema 1.21. *Sean X un espacio métrico y Y subconjunto conexo de X. Si $B \subset X$ es tal que $Y \subset B \subset cl(Y)$, entonces B es conexo.*

Demostración. Sea $B \subset X$ tal que $Y \subset B \subset \mathrm{cl}(Y)$. Supongamos que B es disconexo. Entonces existen U y V abiertos en X, tales que $B \cap U$, $B \cap V$ son ajenos, no vacíos y $B \subset U \cup V$. Luego, $Y \subset U \cup V$. Como Y es conexo, tenemos que $Y \cap U = \emptyset$ ó $Y \cap V = \emptyset$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $Y \cap V = \emptyset$, entonces $Y \subset X - V$. Así, $Y \subset B \subset cl(Y) \subset X - V$. De esto, $B \cap V = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, B es conexo. □

El teorema anterior en particular nos dice que la clausura de un conjunto conexo también es conexo, hecho que utilizaremos a continuación.

Ejemplo 1.22. *Sean* $S = \{(x, sen(\frac{1}{x})) : x \in (0, 1]\}$ *y* $J = \{0\} \times [-1, 1]$. *Entonces* $cl(S) = J \cup S$ *es conexo y se le conoce como el* **seno del topólogo***, véase la Figura 1.1.*

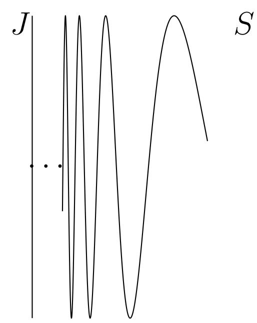


Figura 1.1: Seno del topólogo

El ejemplo anterior es interesante ya que este espacio pareciera no ser de una pieza, sin embargo el Teorema 1.21 nos afirma que es conexo. Por esto, se recomienda al lector no fiarse en la intuición y pensar en espacios complejos como este.

Teorema 1.23. *Sean X y Y espacios métricos. Si* $f : X \to Y$ *es una función continua y* $A \subset X$ *es conexo, entonces* $f(A)$ *es conexo.*

Demostración. Supongamos que $f(A)$ no es conexo, entonces existen U y V abiertos en Y, tales que $U \cap f(A)$, $V \cap f(A)$ son ajenos, no vacios y $f(A) \subset U \cup V$. Tenemos que, $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ son abiertos, no vacíos, en X, no es difícil probar lo siguiente: $A \subset f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$, $A \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$ y $A \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$, además, $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \cap A = \emptyset$. De esto A es disconexo, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $f(A)$ es conexo. □

Capítulo 2

La dinámica de f

Con el material visto en el capítulo anterior estamos listos para estudiar algunas propiedades de las funciones, para luego comenzar con la dinámica de las funciones. Este capítulo esta centrado en los denominados puntos fijos y puntos peródicos, así como algunas de sus propiedades. Presentamos la función tienda, un ejemplo usual en la dinámica, junto con algunas de sus propiedades como la transitividad, para así definir un tipo de caos en sistemas dinámicos.

En la presente sección el símbolo X denota un espacio métrico compacto.

2.1. Puntos fijos

Definición 2.1. *Sea $f : X \to X$ una función continua, decimos que x_0 es un **punto fijo de f** si $f(x_0) = x_0$.*

A la colección de los puntos fijos de una función f lo denotaremos por

$$\mathcal{F}(f) = \{x \in X : f(x) = x\}.$$

Si x_0 es un punto fijo bajo f, se tiene que $\mathcal{O}(x_0, f) = \{x_0\}$. A pesar de que la órbita de un punto fijo es muy simple, los puntos fijos juegan un papel importante en la dinámica inducida por f.

Teorema 2.2. *Si $f : X \to X$ una función continua, entonces $\mathcal{F}(f)$ es un conjunto cerrado en X.*

Demostración. Si $cl(\mathcal{F}(f)) = \emptyset$ se tiene lo deseado. Supongamos que $cl(\mathcal{F}(f)) \neq \emptyset$. Sea $x \in \mathrm{cl}(\mathcal{F}(f))$, podemos construir una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenida en $\mathcal{F}(f)$ que converge a x. Como f es continua, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, dado que $x_n \in \mathcal{F}(f)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $f(x_n) = x_n$. Se sigue que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, y por unicidad del límite en espacios métricos, concluimos que $f(x) = x$ y así, $x \in \mathcal{F}(f)$, por lo tanto $\mathcal{F}(f) = cl(\mathcal{F}(f))$, es decir, $\mathcal{F}(f)$ es cerrado en X. □

El siguiente resultado se puede interpretar como la covergencia de las órbitas a un punto fijo.

Teorema 2.3. *Sea $f : X \to X$ un función continua y sean $x_0, y_0 \in X$. Si la sucesión $\{f^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a y_0, entonces y_0 es un punto fijo de f.*

Demostración. Como f es una función continua, entonces

$$f(y_0) = f(\lim_{n\to\infty} f^n(x_0)) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x_0) = y_0.$$

Con estas igualdades se termina la prueba. □

El siguiente resultado es un criterio de existencia de puntos fijos, en el cual es muy importante el uso del Teorema del valor intermedio, de esto que la función se defina en un intervalo de $\mathbb{R}$.

Teorema 2.4. *Sea J un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : J \to J$ una función continua. Sea $[a, b] \subset J$.*

(i) Si $f([a, b]) \subset [a, b]$, entonces f tiene un punto fijo en $[a, b]$.

(ii) Si $[a, b] \subset f([a, b])$, entonces f tiene un punto fijo en $[a, b]$.

Demostración. (i) Como $f([a, b]) \subset [a, b]$, entonces

$$a \leq f(a) \text{ y } f(b) \leq b.$$

Sea $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = f(x) - x$. La función h es continua en el intervalo $[a, b]$ y además,

$$h(b) \leq 0 \leq h(a).$$

Por el Teorema del valor intermedio existe $c \in [a, b]$, tal que $h(c) = 0$. Así, $f(c) = c$.

(*ii*) Como $[a,b] \subset f([a,b])$, entonces existen α y β en $[a,b]$, tales que $f(\alpha) = a$ y $f(\beta) = b$, luego

$$f(\alpha) \leq \alpha \ y \ f(\beta) \geq \beta.$$

Supongamos sin perder generalidad que $\alpha \leq \beta$, definiendo la función $h : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, con $h(x) = f(x) - x$, tenemos que

$$h(\alpha) \leq 0 \leq h(\beta).$$

Nuevamente, por el Teorema del valor intermedio existe $c \in [\alpha, \beta] \subset [a,b]$ tal que $h(c) = 0$. Por lo tanto $f(c) = c$. □

El siguiente resultado es inmediato del teorema anterior, sin embargo es imporante enunciarlo, ya que lo citaremos más adelante.

Corolario 2.5. *Sea $f : [a,b] \to [a,b]$ una función continua y suprayectiva, entonces f tiene un punto fijo en $[a,b]$.*

Los siguientes resultados, además de ser interesantes, serán de gran utilidad en el capítulo final. Por comodidad se han enunciado para el intervalo $[0,1]$, pero se cumplen para cualquier intervalo cerrado.

Teorema 2.6. *Sea $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ una función continua. Si $\mathcal{F}(f)$ es disconexo, entonces $\mathcal{F}(f^2)$ es disconexo.*

Demostración. Notar que $\mathcal{F}(f) \neq \emptyset$ a que el conjunto vaces conexo. Además $\mathcal{F}(f)$ no puede constar de un único elemento, por lo que podemos tomar $a, b' \in \mathcal{F}(f)$ tal que $a < b'$. Sea $b = \text{ínf}\{x \in \mathcal{F}(f) : a < x\}$, b está bien definido ya que ese conjunto es no vacío, porque b' es un elemento de este y a es cota inferior. De la definición de b, se tiene que $f(x) \neq x$ para cada $x \in (a,b)$. Como $\mathcal{F}(f)$ es cerrado, podemos construir una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}(f)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. De la continuidad de f se tiene:

$$f(b) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = b.$$

Por lo que $b \in \mathcal{F}(f)$. Por el Teorema del valor intermedio podemos asegurar que, para toda $x \in (a,b)$, $f(x) < x$ o bien para toda $x \in (a,b)$, $f(x) > x$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $f(x) < x$ para cada $x \in (a,b)$.

Es claro que $a, b \in f([a,b])$, como f es continua y $[a,b]$ es conexo tenemos que $f([a,b])$ es conexo, así $[a,b] \subset f([a,b])$. Dado $x \in (a,b)$, existe $y_0 \in (a,b)$

tal que $x = f(y_0)$, luego tenemos que $f(x) = f^2(y_0) < f(y_0) < y$, es decir, $f^2(y_0) < y_0$. De aquí, $\mathcal{F}(f^2)$ no puede ser conexo, en caso contrario como $a, b \in \mathcal{F}(f^2)$ se tendria que $y_0 \in [a, b] \subset \mathcal{F}(f^2)$ y esto no es posible. Por lo tanto, $F(f^2)$ es disconexo. $\square$

Teorema 2.7. *Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una función continua y suprayectiva. Si $\mathcal{F}(f^2)$ es conexo, entonces $f^2 = Id$.*

Demostración. Del Corolario 2.5 se tiene que $\mathcal{F}(f^2) \neq \emptyset$. Sean $a = \min \mathcal{F}(f^2)$ y $b = \max \mathcal{F}(f^2)$. Como $\mathcal{F}(f^2)$ es conexo, se tiene que $F(f^2) = [a, b]$. Supongamos que $f^2 \neq Id$. Luego, tenemos alguno de los siguientes dos casos:

Caso 1 $a > 0$.
Note que $f^2(0) > 0$. Si existe $t_0 \in (0, a)$ tal que $f^2(t_0) < t_0$, entonces por el Teorema del valor intermedio, existe c en $(0, t_0)$ tal que $f^2(c) = c$. Esto último contradice el hecho de que $\mathcal{F}(f^2) = [a, b]$. De este modo, cada $t \in [0, a)$ satisface que $f^2(t) > t$. Por tanto, $0 \notin f^2([0, a))$ y, claramente, $0 \notin f^2([a, b]) = [a, b]$; es decir, $0 \notin f^2([0, b])$. Como f^2 es sobreyectiva (ya que f lo es), $f^2([0, 1]) = [0, 1]$, si $b = 1$, tendríamos que $0 \notin f^2([0, 1])$, lo cual es una contradicción, así $b < 1$.

Caso 2 $b < 1$.
Note que $f^2(1) < 1$. Se puede probar de manera análoga al caso 1 que $f^2(t) < t$ para toda $t \in (b, 1]$. Por lo tanto $1 \notin f^2((b, 1])$ y también $1 \notin f^2([a, b]) = [a, b]$; es decir, $1 \notin f^2([a, 1])$ luego por argumentos similares al caso 1 tenemos que $a > 0$.

Tenemos lo siguiente, $0 < a \leq b < 1$, $0 \notin f^2([0, b])$ y $1 \notin f^2([a, 1])$.

Observe que, dado cualquier $x \in [a, b]$, $f^2(f(x)) = f(f^2(x)) = f(x)$ y, por ende $f(x) \in \mathcal{F}(f^2) = [a, b]$. De este modo, $f([a, b]) \subset [a, b]$.

Como $\mathcal{F}(f) \subset \mathcal{F}(f^2)$, tenemos que $0, 1 \notin \mathcal{F}(f)$ así, $f(0) > 0$ y $f(1) < 1$. Veamos que para cada $t \in [0, a)$, $f(t) > t$. Si existe $t_0 \in (0, a)$ tal que $f(t_0) < t_0$, entonces existe $c \in (0, t_0)$ tal que $f(c) = c$ y, por ende, $c \in \mathcal{F}(f^2) = [a, b]$, esta es una contradicción . De esto que $f(t) > t$ para cada $t \in [0, a)$. De forma similar, $f(t) < t$ para cada $t \in (b, 1]$. De lo anterior tenemos que $0 \notin f([0, a))$ y $1 \notin f((b, 1])$.

Del hecho $f([a, b]) \subset [a, b]$, tenemos que $0, 1 \notin f([a, b])$ y así $0 \notin f([0, b])$ y $1 \notin f([a, 1])$. Como f es sobreyectiva, existen $s_0 \in (b, 1]$ y $s_1 \in [0, a)$ tales que $f(s_0) = 0$ y $f(s_1) = 1$.

Veamos que $[0, a] \subset f([b, 1])$. Como $f(b) \in [a, b]$, es claro que $a \leq f(b)$, de esto $[0, a] \subset [f(s_0), f(b)]$. Además $f(s_0), f(b) \in f([b, s_0])$ y $f([b, s_0])$

es conexo, así se tienen las contenciones $[f(s_0), f(b)] \subset f([b, s_0]) \subset f([b, 1])$. De esto que, $[0, a] \subset f([b, 1])$.

Ahora probaremos que $f([0, a)) \subset (b, 1]$. Supongamos que existe $r \in [0, a)$ tal que $f(r) \leq b$. Consideremos $a' = \max\{r, s_1\}$ y así tenemos lo siguiente $[b, 1] \subset [f(r), 1] = [f(r), f(s_1)] \subset f([0, a'])$, de esto que $f([b, 1]) \subset f^2([0, a'])$. Como $[0, a'] \subset [0, a] \subset f([b, 1])$, se cumple que

$$[0, a'] \subset f([b, 1]) \subset f^2([0, a']).$$

Por el Teorema 2.4 existe $p \in [0, a']$ tal que $f^2(p) = p$, esto es una contradicción ya que $p \notin [a, b] = \mathcal{F}(f^2)$. Por lo tanto $f([0, a)) \subset (b, 1]$.

Similarmente se prueba que $f((b, 1]) \subset [0, a)$. Así,

$$f^2([0, a)) \subset f((b, 1]) \subset [0, a).$$

De lo anterior, $1 \notin f^2([0, a))$ y como $1 \notin f^2([a, 1])$, tenemos que $1 \notin f^2([0, 1])$, esto contradice al hecho de que f^2 es sobreyectiva. Por ende $f^2 = Id$. $\square$

2.2. Puntos fijos atractores y repulsores

En la presente sección J denota un intervalo y f es una función continua de J en J. Al hablar de puntos fijos una pregunta usual es ¿hay diferentes tipos? pues resulta que si, los cuales dan información sobre la dinámica de manera local que definimos a continuación.

Definición 2.8. *Sea x_0 un punto fijo de f. Decimos que x_0 es un* ***punto fijo atractor*** *si existe un intervalo abierto (a, b), con $x_0 \in (a, b)$ tal que*

$$f((a, b) \cap J) \subset (a, b) \cap J$$

y para toda $x \in (a, b) \cap J$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$.

Dado un punto fijo atractor, podemos decir que la órbita de puntos cercanos a él convergen a este.

Definición 2.9. *Dado x_0 un punto fijo de f, decimos que es un* ***punto fijo repulsor*** *si existe un intervalo (a, b) con $x_0 \in (a, b)$, tal que para cada $x \in (a, b) \cap A$, con $x \neq x_0$, existe $n_x \in \mathbb{N}$ de tal manera que $f^{n_x}(x) \notin (a, b) \cap J$.*

Si tenemos un punto fijo repulsor, podemos decir que la órbita de puntos cercanos a él se aleja en tiempo finito. El siguiente resultdo nos da un criterio para saber cuando un punto fijo es repulsor o atractor, aunque como ya veremos hay casos especiales que se escapan de las posibilidades de este.

Teorema 2.10. *Sea $x_0 \in J$ tal que $f(x_0) = x_0$. Supongamos que f es derivable en x_0.*

(i) Si $|f'(x_0)| < 1$, entonces x_0 es un punto fijo atractor.

(ii) Si $|f'(x_0)| > 1$, entonces x_0 es un punto fijo repulsor.

Demostración. (i) Si $|f'(x_0)| < 1$, entonces

$$\left| \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| < 1.$$

Como $f(x_0) = x_0$, tenemos

$$\left| \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - x_0}{x - x_0} \right| < 1.$$

Como la función valor absoluto es continua y f es derivable en x_0, entonces

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x) - x_0}{x - x_0} \right| < 1.$$

Podemos tomar $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x) - x_0}{x - x_0} \right| = l < c < 1.$$

Dado $\varepsilon = c - l > 0$, existe $\delta > 0$ de tal manera que si $x \in B(x_0, \delta)$ entonces

$$\left| \frac{f(x) - x_0}{x - x_0} - l \right| < \varepsilon.$$

de aquí,

$$\left| \frac{f(x) - x_0}{x - x_0} \right| < \varepsilon + l = c.$$

Así, para $x \in B(x_0, \delta) \cap J$ con $x \neq x_0$, se tiene

$$\left| \frac{f(x) - x_0}{x - x_0} \right| < c,$$

o bien,

$$|f(x) - x_0| < c|x - x_0|. \tag{2.1}$$

Como $|x - x_0| < \delta$ y $c < 1$, de (2,1) se tiene $|f(x) - x_0| < \delta$. Por lo que,

$$f(B(x_0, \delta) \cap J) \subset B(x_0, \delta) \cap J.$$

Entonces $f(x) \in B(x_0, \delta) \cap J$, en consecuencia cumple (2.1) y por tanto

$$|f^2(x) - x_0| \leq c|f(x) - x_0| < c^2|x - x_0|.$$

De manera recursiva obtenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$|f^n(x) - x_0| \leq c^n|x - x_0|.$$

Luego para todo punto $x \in B(x_0, \delta) \cap J$, se tiene que $f^n(x)$ converge a x_0 cuando n tiende a infinito, esto ya que $\{c^n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a cero. Luego x_0 es un punto fijo atractor bajo f.

(ii) Si $|f'(x)| > 1$ podemos tomar $c \in \mathbb{R}$ tal que $1 < c < |f'(x)|$. Usando argumentos similares al caso anterior, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B(x_0, \delta) \cap J$, con $x \neq x_0$, entonces

$$|f(x) - x_0| > c|x - x_0|.$$

Si suponemos que $f^n(x) \in B(x_0, \delta)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\delta > |f^n(x) - x_0| > c^n|x - x_0|.$$

Pero esta situación no es posible ya que $\{c^n\}_{n=1}^{\infty}$ diverge, por lo que debe existir $N_x \in \mathbb{N}$, tal que $f^{N_x}(x) \notin B(x_0, \delta) \cap J$. Por lo tanto x_0 es un punto fijo repulsor de f. $\square$

Note que las desigualdades estrictas en el teorema anteior son necesarias ya que estas nos aseguran la existencia un número positivo c entre 1 y $|f'(x)|$, y con el cual se prueba el resultado. De aquí que sí $|f'(x)| = 1$, no se puede determinar la naturaleza del punto fijo, más aún x puede ser atractor o bien repulsor como se puede ver en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.11. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = x + x^3$. Notar que 0 es punto fijo de f, y $f'(0) = 1$. Veamos que 0 es un punto repulsor.*

Consideremos el intervalo $(-1,1)$. Tomemos $x \in (0,1)$, demostraremos por inducción sobre n que,

$$f^n(x) > x + (n-1)x^3.$$

Como $f(x) = x + x^3 > x + (1-1)x^3$, tenemos que la afirmación se cumple para n=1. Ahora supongamos que para algún $k \in \mathbb{N}$, $f^k(x) > x + (k-1)x^3$. Veamos que la afirmación se cumple para $k+1$. Como f es estrictamente creciente sobre el intervalo $(0,1)$, tenemos que

$$f^{k+1}(x) > f(x+(k-1)x^3) = x+(k-1)x^3+(x+(k-1)x^3)^3 \geq x+((k+1)-1)x^3.$$

Por lo tanto se cumple la afirmación. En consecuencia la suseción $\{f^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ diverge. Más aun, toda $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{1-x}{x^3} + 1$, satisface que $f^n(x) > 1$.

Para $x \in (-1,0)$, probemos por inducción sobre n que,

$$f^n(x) < x + (n-1)x^3.$$

Como $x^3 < 0$ se tiene que $f(x) = x + x^3 < x$, así tenemos que la afirmación se cumple para n=1. Ahora supongamos que para algún $k \in \mathbb{N}$, $f^k(x) < x + (k-1)x^3$. Veamos que la afirmación se cumple para $k+1$. Es claro que la función f es estrictamente decreciente en $(-1,0)$. Así,

$$\begin{aligned} f^{k+1}(x) &< f(x + (k-1)x^3) \\ &= x + (k-1)x^3 + (x + (k-1)x^3)^3 \\ &= x + kx^3 + [3(k-1)x^5 + 3(k-1)^2x^7 + (k-1)^3x^9]. \end{aligned}$$

La expesión entre corchetes resulta ser un número negativo, por lo tanto $f^{k+1}(x) < f(x + (k-1)x^3) < x + ((k+1)-1)x^3$. Por ende la sucesión $\{f^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ diverge. Más aun, toda $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{-1-x}{x^3} + 1$, satisface que $f^n(x) < -1$.

Finalmete, dado $x_0 \in (-1,1)$ con $x_0 \neq 0$, podemos asegurar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}(x) \notin (-1,1)$. Por lo tanto 0 es un punto fijo repulsor de f.

Ejemplo 2.12. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = x - x^3$. Notar que 0 es punto fijo de f y $f'(0) = 1$. Veamos que 0 es un punto atractor.*

Nuevamente consideremos el intervalo $(-1,1)$. Primero veamos que $f((-1,1)) \subset (-1,1)$, para esto tomemos $x \in (-1,1)$, tenemos dos casos:

1. *Si* $0 \leq x < 1$, *entonces* $0 \leq x^3 < x$, *por lo que* $-x < -x^3 \leq 0$ *y así* $0 < x - x^3 \leq x < 1$, *es decir,* $0 \leq f(x) < 1$.

2. *Si* $-1 < x < 0$, *entonces* $-1 < x < x^3 < 0$, *luego* $0 < -x^3 < -x < 1$ *y así* $-1 < x < x - x^3 < 0$, *es decir,* $-1 < f(x) < 0$.

De lo anterior se tiene que $f((-1,1)) \subset (-1,1)$. *Más aún, para cada* $n \in \mathbb{N}$ $f^n((-1,0)) \subset (-1,0)$ *y* $f^n((0,1)) \subset (0,1)$. *Sea* $x \in (-1,1)$ *con* $x \neq 0$, *veamos los siguientes casos:*

1. *Si* $0 < x < 1$, *veamos que* $f^{n+1}(x) < f^n(x)$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *Sea* $n \in \mathbb{N}$. *Sabemos que* $0 \leq f^n(x) < 1$, *por lo tanto,* $0 < (f^n(x))^3$, *así* $f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) = f^n(x) - (f^n(x))^3 < f^n(x)$.

2. *Si* $-1 < x < 0$ *se cumple que* $f^n(x) < f^{n+1}(x)$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$, *esto se prueba con argumentos similares al caso anteior.*

Entonces $\{f^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *es estrictamente decreciente o estrictamente creciente según sea el caso y además es acotada, por ende converge a un elemento* L *el cual pertenece al intervalo* $(-1,1)$, *es decir,* $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = L$. *Como* f *es continua tenemos*

$$f(L) = f(\lim_{n\to\infty} f^n(x)) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x) = L.$$

Es decir, L *es un punto fijo de* f, *pero* 0 *es el único punto fijo de* f *en* $(-1,1)$, *así* $\{f^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *converge a* 0. *Por lo tanto* 0 *es un punto fijo atractor.*

2.3. Puntos periódicos

Si pensamos en la órbita de un punto como un conjunto, son de interés los puntos cuya órbita es un conjunto finito. Estos son elementos que siguen una trayectoria cerrada ya que visitan cada punto de la órbita una infinidad de ocasiones.

En esta sección X denota un espacio métrico compacto.

Definición 2.13. *Sea* $f : X \to X$ *una función continua y* $x_0 \in X$. *Decimos que* x_0 *es un* ***punto periódico*** *de* f *si existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^n(x_0) = x_0$. *Al conjunto de todos los puntos periódicos de f lo denotamos con Per(f). Si* $x \in Per(f)$, *decimos que* $\mathcal{O}(x,f)$ *es una* ***órbita periódica***.

Dado $x_0 \in Per(f)$. Definimos el periodo de x_0 como

$$p = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : f^n(x_0) = x_0\}.$$

Dado $x \in X$ y $y \in Per(f)$, conviene dar la siguiente notación

$$\delta(x, y) = \text{mín}\{d(x, a) : a \in \mathcal{O}(y, f)\}.$$

Haciendo analogía a lo realizado para conjunto $\mathcal{F}(f)$, nos preguntamos ¿$Per(f)$ es un conjunto cerrado? La respuesta es negativa y se estudia un ejemplo de ello en la siguiente sección (véase Teorema 2.22).

Teorema 2.14. *Sea $f : X \to X$ una función continua. Si $x \in Per(f)$ es de periodo p, entonces cada punto en la órbita de x es también un punto periódico de f con periodo p.*

Demostración. Dado $f^j(x) \in \mathcal{O}(x, f) = \{x, f(x), f^2(x), ..., f^{p-1}\}$, tenemos que $j \in \{0, 1, 2, ..., p-1\}$. Es claro que $f^p(f^j(x)) = f^j(x)$. Supongamos que existe $q \in \mathbb{N}$ con $q < p$ tal que $f^q(f^j(x)) = f^j(x)$. Notar que $f^{p-j}(f^j(x)) = x$, de aquí,

$$f^{p-j}(f^q(f^j(x))) = x.$$

Luego $f^{p+q}(x) = x$, por lo que $f^q(f^p(x)) = x$, es decir, $f^q(x) = x$, esto contradice el hecho de que p sea el periodo de x. Por lo tanto p es el periodo de $f^j(x)$. □

Observación. Si p es un punto periódico y $r \in \mathcal{O}(p, f)$, entonces $\mathcal{O}(p, f) = \mathcal{O}(r, f)$. De esto que, si p y q son puntos periódicos tales que, $\mathcal{O}(p, f) \cap \mathcal{O}(q, f) \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{O}(p, f) = \mathcal{O}(q, f)$.

Los siguientes teoremas son criterios de existenica para puntos periódicos en intervalos. El primero de ellos usa como herramienta principal el Teorema del valor intermedio y los dos siguientes el Teorema 1.7.

Teorema 2.15. *Sean A un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : A \to A$ una función continua. Si f tiene un punto de periodo $n \geq 2$, entonces f tiene un punto de periodo 1.*

Demostración. Tomemos un punto de periodo $n \geq 2$ y ordenemos los puntos de su órbita de menor a mayor, es decir,

$$x_1 < x_2 < ... < x_n.$$

De aquí,

$$x_1 < f(x_1) \;\; y \;\; f(x_n) < x_n.$$

Definiendo $h : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ por $h(x) = f(x) - x$, tenemos que h es continua y además

$$h(x_n) < 0 < h(x_1).$$

Por el Teorema del valor intermedio existe $x_0 \in (x_1, x_n) \subset A$ tal que $h(x_0) = 0$ luego, $f(x_0) = x_0$ y por lo tanto existe un punto en A de periodo 1. □

Teorema 2.16. *Sea A un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : A \to A$ una función continua. Si f tiene un punto de periodo* 3, *entonces f tiene un punto de periodo 2.*

Demostración. Sea $a \in A$, tal que $\mathcal{O}(a, f) = \{a, f(a), f^2(a)\}$ y supongamos sin perder generalidad que $a < f(a) < f^2(a)$. Pongamos $I = [a, f(a)]$ y $J = [f(a), f^2(a)]$, luego se tienen las siguientes contenciones

$$J \subset f(I) \;\; y \;\; [a, f^2(a)] = I \cup J \subset f(J).$$

De la contención $I \subset I \cup J \subset f(J)$ y el Teorema 1.7 se sigue que existe un intervalo cerrado $A_1 \subset J$ tal que $f(A_1) = I$.

De la contención $A_1 \subset J \subset f(I)$ se tiene nuevamente del Teorema 1.7 que existe un intervalo cerrado $A_2 \subset I$ tal que $f(A_2) = A_1$. De aquí que $f^2(A_2) = I$ y con ello $A_2 \subset f^2(A_2)$. Por el Teorema 2.4 existe $x_0 \in A_2 \subset I$ tal que $f^2(x_0) = x_0$, notar que $f(x_0) \in A_1 \subset J$. Si $f(x_0) = x_0$, tenemos que $x_0 \in A_1 \cap A_2 \subset I \cap J = \{f(a)\}$, de esto que $f(a)$ sea un punto fijo, lo cual es imposible ya que por el Teorema 2.14 $f(a)$ tiene periodo 3. Por lo tanto, $f(x_0) \neq x_0$ y $f^2(x_0) = x_0$, es decir, x_0 es de periodo 2. □

Teorema 2.17. *(Li-Yorke) Sean A un intervalo en $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ y $f : A \to A$ una función continua. Si f tiene un punto de periodo 3, entonces f tiene un punto de periodo n.*

Demostración. Sea $a \in A$ de periodo es 3, es decir, $\mathcal{O}(a, f) = \{a, f(a), f^2(a)\}$ y supongamos sin perder generalidad que $a < f(a) < f^2(a)$ y consideremos nuevamente los intervalos $I = [a, f(a)]$ y $J = [f(a), f^2(a)]$.

De los dos teoremas anteriores tenemos que existen puntos de periodo 2 y 1, por hipótesis existe un punto de periodo 3. Por lo que tomamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 3$. Se cumplen las siguientes contenciones

$$J \subset f(I) \;\; y \;\; [a, f^2(a)] = I \cup J \subset f(J).$$

Como $I \subset I \cup J \subset f(J)$ por el Teorema 1.7, tenemos que existe un intervalo cerrado $A_1 \subset J$ tal que $f(A_1) = I$. A su vez como $A_1 \subset I \cup J \subset f(J)$, nuevamente por el Teorema 1.7 existe $A_2 \subset J$ intervalo cerrado tal que $f(A_2) = A_1$. De la misma contención se sigue que existe un intervalo cerrado $A_3 \subset J$ tal que $f(A_3) = A_2$.

Siguiendo con este proceso definimos los intervalos cerrados $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$, todos contenidos en J, tales que $f(A_i) = A_{i-1}$ para $i \in \{2, 3, .., n-1\}$.

Como $A_{n-1} \subset J \subset f(I)$, existe $A_n \subset I$ tal que $f(A_n) = A_{n-1}$. Por la forma en que construimos los intervalos tenemos que

$$A_n \subset I = f^n(A_n).$$

Por el Teorema 2.4, existe $x_0 \in A_n$ tal que $f^n(x_0) = x_0$. Por la construcción de los intervalos A_i tenemos que $x_0 \in I$ y $f^i(x_0) \in J$ para toda $i \in \{1, .., n-1\}$. Si $x_0 = f^i(x_0)$ para algún $i \in \{1, .., n-1\}$, entonces $x_0 \in I \cap J = \{f(a)\}$, luego $f(x_0) = f(f(a)) = a$, de esto que $a \in J$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $f^n(x_0) = x_0$ y $f^i(x_0) \neq x_0$ para toda $i \in \{1, .., n-1\}$, por ende el periodo de x_0 es n. □

Dado X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua ¿será que siempre ocurre $\mathcal{F}(f) \neq \emptyset$ y $Per(f) \neq \emptyset$? El siguiente ejemplo es muestra de que esto no siempre es cierto.

Ejemplo 2.18. *Consideremos $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ la circunferencia unitaria. Se sabe que S^1 es un espacio métrico, compacto y conexo.*

En coordenadas polares, cada punto z en S^1, se puede expresar de la forma $e^{i\theta} = cos(\theta) + isen(\theta)$, para algún $\theta \in [0, 2\pi]$. Dado $\alpha \in [0, 2\pi]$ definamos la función

$$\begin{aligned} R_\alpha : S^1 &\longrightarrow S^1 \\ e^{i\theta} &\longmapsto e^{i(\theta+\alpha)} \end{aligned}$$

Esta función toma un punto en S^1 y lo rota α radianes en sentido contrario a las manecillas del reloj sobre la circunferencia unitaria. Esta función es continua.

No es difícil convencerse de que $R_\alpha(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$ si α es 0 o 2π, para cualquier otro $\alpha \in (0, 2\pi)$, se tiene que $R_\alpha(e^{i\theta}) \neq e^{i\theta}$ para todo $\theta \in [0, 2\pi]$, es decir, $\mathcal{F}(R_\alpha) = \emptyset$.

Tomemos $\alpha \in (0, 2\pi)$, de tal manera que $\frac{2\pi}{\alpha} \notin \mathbb{N}$. Si suponemos que existe un punto $e^{i\theta_0}$ con $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $(R_\alpha)^n(e^{i\theta_0}) = e^{i\theta_0}$, se tiene

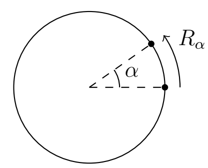


Figura 2.1: Dinámica de R_α.

que $e^{i\theta_0} = e^{i\theta_0 + in\alpha}$*, luego* $e^{in\alpha} = 1 = e^{i2\pi}$ *así,* $in\alpha = i2\pi$*, es decir,* $n = \frac{2\pi}{\alpha}$ *lo cual es una contradicción. Esto nos dice que* $Per(R_\alpha) = \emptyset$ *siempre que* $\alpha \in (0, 2\pi)$ *y* $\frac{2\pi}{\alpha} \notin \mathbb{N}$*.*

2.4. La función tienda

La gráfica de la siguiente función es muy simple (véase Figura 2.2) y por su forma recibe el nombre de función tienda (no por tienda de conveniencia sino por tienda de acampar). Sin embargo esta resulta tener una dinámica complicada, como veremos más adelante tiene muchas de las propiedades que se estudian en la dinámica. Es un ejemplo modular en los sistemas dinámicos y será el principal ejemplo de este capítulo.

La función tienda denotada por $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define como

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x & \text{si } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dado que para puntos $x \notin [0,1]$ la sucesión $\{T^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ diverge, lo interesante ocurre para puntos en el intervalo $[0,1]$, y es en donde restringiremos la función para estudiarla. Una observación rápida de esta función es que tiene dos puntos fijos, $x = 0$ y $x = \frac{2}{3}$, ambos son repulsores ya que $T'(0) = 2$ y $T'(\frac{2}{3}) = -2$.

Para la función tienda restringida al intervalo $[0,1]$ se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.19. *Sea* T *la función tienda. Si* $x \in [0,1]$*, entonces* $T(x) \in [0,1]$*.*

Demostración. Sea $x \in [0,1]$, si $x \leq \frac{1}{2}$, se tiene que $T(x) = 2x \leq 2(\frac{1}{2}) = 1$. Por otro lado, sí $x > \frac{1}{2}$, entonces $-2x < -1$ y luego $T(x) = 2 - 2x < 1$. Por lo tanto $T(x) \in [0,1]$. $\square$

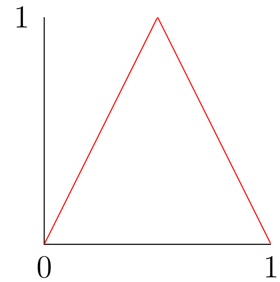


Figura 2.2: Gráfica de T.

De esto se tiene que para toda $n \in \mathbb{N}, T^n(x) \in [0,1]$. Parte de la maravilla de esta función es gracias a como se comportan las iteraciones de esta, veamos como se ven las gráficas de T^2 y T^3.

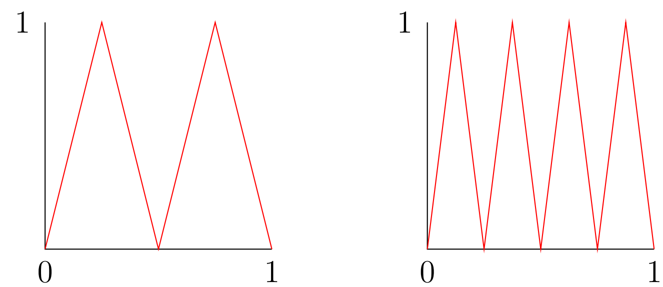


Figura 2.3: Gráficas de T^2 y T^3.

De la gráfica de T^2 podemos ver que, al dividir el intervalo $[0,1]$ en 2^2 subintervalos de longitud $\frac{1}{2^2}$, tenemos que T^2 restringida a cada intervalo de a forma $[\frac{l}{2^2}, \frac{l+1}{2^2}]$ con $l \in \{0,1,2,3\}$, es un homeomorfismo al intervalo $[0,1]$. Algo similar se puede decir para T^3, solo que ahora el intervalo $[0,1]$ se divide en 2^3 subintervalos de longitud $\frac{1}{2^3}$, al restringir T^3 a cada uno de esos subintervalos también se tiene un homeomorfismo al intervalo $[0,1]$. El siguiente teorema nos dice que esto se mantine para cuaquier T^n con $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.20. *Para toda $n \in \mathbb{N}$ y para cada $l \in \{0,1,2,...,2^n-1\}$ se tiene que la función T^n restringida al intervalo $[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}]$,*

$$T^n|_{\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right]} : \left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right] \to [0,1]$$

es un homeomorfismo.

Demostración. Usaremos inducción matemática. Para $n = 1$, tenemos que $l \in \{0, 1\}$. Si $l = 0$, se tiene que $T : [0, \frac{1}{2}] \to [0, 1]$ y $T(x) = 2x$, es claro que T definida así es un homeomorfismo. Si $l = 1$, entonces $T : [\frac{1}{2}, 1] \to [0, 1]$ y se define por $T(x) = 2 - 2x$, esta función así definida también es un homeomorfismo.

Supongamos que se cumple para algún $k \in \mathbb{N}$. Así, para cada $l \in \{0, 1, 2, ..., 2^k - 1\}$

$$T^k|_{[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}]} : \left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right] \to [0, 1]$$

es un homeomorfismo.

Sea $n = k + 1$ y $l \in \{0, 1, 2, ..., 2^{k+1} - 1\}$. Tenemos dos casos:

Caso 1. Si $l \leq 2^k - 1$, se tiene que $\frac{l+1}{2^{k+1}} \leq \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$ y además $0 \leq \frac{l}{2^{k+1}}$, por lo que:

$$\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}\right] \subset [0, \frac{1}{2}],$$

Sea $t = T|_{[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}]}$, veamos que t es un homeomorfismo de $[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}]$ en $[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}]$. Es claro que $t(x) = 2x$ y no es dificil ver que t es una función es continua e inyectiva. Dada $y \in [\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}]$ es claro que $t(\frac{y}{2}) = y$, no es dificil ver que $\frac{y}{2} \in [\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}]$, por ende t es sobreyectiva. Por el Teorema 1.18, t es un homeomorfismo. Por hipótesis de inducción $T^k|_{[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}]}$ es un homeomorfismo entre $[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}]$ y $[0, 1]$. Como $T^{k+1} = T^k(T)$ se tiene que T^{k+1} es un homeomorfismo de $[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}]$ en $[0, 1]$.

Caso 2. Si $2^k \leq l \leq 2^{k+1} - 1$, tenemos $\frac{1}{2} = \frac{2^k}{2^{k+1}} \leq \frac{l}{2^{k+1}} \leq \frac{l+1}{2^{k+1}} \leq \frac{2^{k+1}}{2^{k+1}} = 1$, por lo que

$$\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}\right] \subset [\frac{1}{2}, 1].$$

Sea $t = T|_{[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}]}$, veamos que t es un homeomorfismo de $[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}]$ en $[\frac{2^{k+1}-l-1}{2^k}, \frac{2^{k+1}-l}{2^k}]$. Tenemos que $t(x) = 2 - 2x$, veamos que esta bien definida, sea $x \in [\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}]$, entonces $\frac{l}{2^{k+1}} \leq x \leq \frac{l+1}{2^{k+1}}$, luego $\frac{-l}{2^k} \geq -2x \geq \frac{-l-1}{2^k}$, así

$\frac{-l}{2^k}+2 \geq 2-2x \geq \frac{-l-1}{2^k}+2$, por ende $t(x) \in [\frac{2^{k+1}-l-1}{2^k}, \frac{2^{k+1}-l}{2^k}]$. Es claro que t es continua e inyectiva, con un proceso similiar al del caso 1 se puede ver que t es sobreyectiva. Por tanto por el Teorema 1.18, t es un homeomorfismo. Como $2^k \leq l \leq 2^{k+1}-1$ se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} -2^k \geq -l &\geq 1-2^{k+1} \\ 2^{k+1}-2^k-1 \geq 2^{k+1}-l-1 &\geq 0 \\ 2^k-1 \geq 2^{k+1}-l-1 &\geq 0. \end{aligned}$$

Así, $2^{k+1}-l-1 \in \{0,1,...,2^k-1\}$. Entonces por hipótesis de inducción, $T^k|_{[\frac{2^{k+1}-l-1}{2^k}, \frac{2^{k+1}-l}{2^k}]}$ es un homeomorfismo de $[\frac{2^{k+1}-l-1}{2^k}, \frac{2^{k+1}-l}{2^k}]$ en $[0,1]$ y por lo tanto $T^{k+1}|_{[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}]}$ es un homeomorfismo de $[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}]$ en $[0,1]$. Finalmente podemos concluir que se cumple para toda $n \in \mathbb{N}$. □

El siguiente lema combinado con el teorema anterior, son herramientas fundamentales para probar una de las propiedades más importantes de la función tienda, la densidad de los puntos periódicos.

Lema 2.21. *Si $(a,b) \subset [0,1]$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ y $k \in \{1,...,2^N-2\}$ tal que*

$$[\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N}] \subset (a,b).$$

Demostración. Podemos tomar $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \frac{b-a}{2}$, consideremos el conjunto $\{l \in \{1,2,...,2^N-2\} : \frac{l}{2^N} > a\}$, este conjunto es no vacío, ya que al menos 2^N-2 pertenece a este, de lo contrario tendriamos que $b > 1$. Así, podemos tomar el mínimo de este conjunto, digamos k. Se tiene que $\frac{k}{2^N} - a \leq \frac{1}{2^N}$, de ahí que $\frac{k+1}{2^N} - a < 2(\frac{1}{2^N}) < 2(\frac{b-a}{2})$, luego $\frac{k+1}{2^N} < b$. Es decir,

$$[\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N}] \subset (a,b).$$

Se cumple lo deseado. □

A continuación presentamos unas de las propiedades más interesantes de la función tienda y que son de gran utilidad.

Teorema 2.22. *Sea T la función tienda.*

1. *Si $(a,b) \subset [0,1]$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^N((a,b)) = [0,1]$.*

2. El conjunto $Per(T)$ es denso en $[0,1]$.

Demostración. Para 1. Por el Lema 2.21, existe $N \in \mathbb{N}$ y $k \in \{1,...,2^N-2\}$ tal que $[\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N}] \subset (a,b)$. Finalmente, por el Teorema 2.20 podemos concluir que $T^N((a,b)) = [0,1]$

Para 2. Tomemos un intervalo abierto $(a,b) \subset [0,1]$, por el Lema 2.21, existe $N \in \mathbb{N}$ y $k \in \{1,...,2^N-2\}$ $N \in \mathbb{N}$ y $k \in \{1,..,2^N-2\}$ tal que $[\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N}] \subset (a,b)$, con $T^N([\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N}]) = [0,1]$. Por (ii) del Teorema 2.4, T^N tiene un punto fijo en $[\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N}]$. Así existe

$$x_0 \in [\tfrac{k}{2^N}, \tfrac{k+1}{2^N}] \subset (a,b).$$

Tal que $T^N(x_0) = x_0$, por ende $Per(f) \cap (a,b) \neq \emptyset$. □

Por lo anterior $cl(Per(T)) = [0,1]$, sin embargo $\frac{1}{2} \notin Per(T)$, es decir, $Per(T) \neq cl(Per(T))$ y así $Per(T)$ no es cerrado.

2.5. Transitividad topológica

Otra propiedad de interes en la dinámica es la denominada transitividad. Intuitivamente nos dice que algunos puntos del espacio en algún momento esta cerca de cualquier otro punto del espacio, es decir, su "trayecto es denso"por decirlo de alguna manera.

Definición 2.23. *Sean X un espacio métrico y $f: X \to X$ una función continua en X. Decimos que f es **topológicamente transitiva** en X (o trasitiva en X) si para cada par de conjuntos abiertos y no vacíos de X, U y V, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Los siguientes dos teoremas servirán para familiarizarnos con la definición.

Teorema 2.24. *Sea X un espacio métrico no finito y $f: X \to X$ una función continua. Si f es transitiva, entonces todo punto $x \in X$ es punto de acumulación.*

Demostración. Supongamos que existe un punto aislado $x_0 \in X$, luego existe $\varepsilon > 0$ tal que $(B(x,\varepsilon) - x_0) \cap X = \emptyset$. De aquí se tiene que $B(x_0,\varepsilon) = \{x_0\}$, es decir, $\{x\}$ es un abierto no vacío.

Como f es transitiva, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(\{x_0\}) \cap \{x_0\} \neq \emptyset$, de aquí se obtiene que $f^n(x_0) = x_0$, es decir, x_0 es un punto periódico y por ende $\mathcal{O}(x_0,f)$ es un conjunto finito, por lo que $\mathcal{O}(x_0,f)$ es un conjunto cerrado.

Como X no es finito se tiene $X - \mathcal{O}(x_0, f)$ es un conjunto abierto y no vacío. Aplicando la transitividad de f una vez más, tenemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(\{x_0\}) \cap (X - \mathcal{O}(x_0, f)) \neq \emptyset$. Esto es una contradicción, por lo tanto todo punto en X es punto de acumulación.

□

Teorema 2.25. *Sea X un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. Si f es transitiva, entonces para cada U y V abiertos en X, no vacíos, se tiene que el conjunto*

$$N(U, V) = \{n \in \mathbb{N} : f^n(U) \cap V \neq \emptyset\},$$

es infinito.

Demostración. Como f es transtiva existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Probaremos que existe $N \in \mathbb{N}$ con $N > n$ tal que $f^N(U) \cap V \neq \emptyset$.

Como $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ existe un $x \in U \subset X$ tal que $f^n(x) \in V$, es decir, $(f^n)^{-1}(V) \neq \emptyset$. Como f^n es una función continua tenemos que $(f^n)^{-1}(V)$ es abierto. Aplicando de nuevo la transitividad de f tenemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U) \cap (f^n)^{-1}(V) \neq \emptyset$. De aquí que exista $y \in U$ tal que $f^m(y) \in (f^n)^{-1}(V)$, entonces $f^n(f^m(y)) \in V$, luego $f^{n+m}(y) \in V$, es decir, $f^{n+m}(U) \cap V \neq \emptyset$. Poniendo $N = n+m$ se tiene lo deseado. Lo que probamos es, si $n \in N(U, V)$ entonces existe $N > n$ tal que $N \in N(U, V)$, es decir, $N(U, V)$ no es acotado y por lo tanto es infinito. □

No debe ser extraño que nuestro primer ejemplo de función transitiva sea la función tienda.

Teorema 2.26. *La función tienda $T : [0, 1] \to [0, 1]$ es transitiva en el intervalo $[0, 1]$.*

Demostración. Sean U y V dos subconjuntos del intervalo $[0, 1]$ abiertos y no vacíos. Podemos tomar un intervalo abierto (a, b) contenido en U. Por el Teorema 2.22 inciso 1, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^N(a, b) = [0, 1]$. De aquí se sigue que $T^N(U) = [0, 1]$ y , por lo tanto, $T^N(U) \cap V \neq \emptyset$. □

La siguiente proposición relaciona la transitividad topológica con la existencia de órbitas densas en un sistema dinámico.

Teorema 2.27. *Sea X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Si f es transitiva en X, entonces existe $x_0 \in X$ tal que la órbita $\mathcal{O}(x_0, f)$ es un conjunto denso en X.*

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$, consideremos $\mathcal{U}_k = \{B(x, \frac{1}{k}) | x \in X\}$, esta es una cubierta abierta de X, como X es compacto, podemos tomar una subcubierta finita de $\mathcal{U}_k$, digamos $\mathcal{U}_k^* = \{B(x_{1_k}, \frac{1}{k}), B(x_{2_k}, \frac{1}{k}), ..., B(x_{n_k}, \frac{1}{k})\}$ tal que,

$$X = \bigcup \mathcal{U}_k^*.$$

Sea $\mathcal{U} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{U}_k^*$, notar que $\mathcal{U}$ es numerable, dado $B \in \mathcal{U}$ es claro que B es un conjunto abierto, definamos el siguiente conjunto,

$$A_B = \bigcup_{m=1}^{\infty} (f^m)^{-1}(B).$$

Es claro que A_B es un conjunto abierto. Veamos que A_B es denso. Tomemos V un subconjunto abierto de X, como B es abierto y f es transitiva existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(V) \cap B \neq \emptyset$, es decir, existe $f^m(x) \in B$ con $x \in V$. Notar que $x \in (f^m)^{-1}(B)$, así $(f^m)^{-1}(B) \cap V \neq \emptyset$, por lo que $A_B \cap V \neq \emptyset$. Por ende A_B es denso en X. Por el Teorema de Baire (Teorema 1.6), se tiene que,

$$A = \bigcap_{B \in \mathcal{U}} A_B \neq \emptyset.$$

Afirmamos que para toda $y \in A$, $\mathcal{O}(y, f)$ es un conjunto denso en X.

Sea $U \subset X$ abierto, distinto del vacío. Sean $z \in U$ y $\varepsilon > 0$ tales que $B(z, \varepsilon) \subset U$. Podemos tomar $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $\mathcal{U}_k^*$ es una cubierta abierta de X, existe $x_z \in \{x_{1_k}, x_{2_k}, ..., x_{n_k}\}$ tal que

$$z \in B(x_z, \tfrac{1}{k}).$$

Dado $w \in B(x_z, \frac{1}{k})$, $d(w, z) \leq d(w, x_z) + d(z, x_z) < \varepsilon$. Por lo que

$$B(x_z, \tfrac{1}{k}) \subset B(z, \varepsilon) \subset U.$$

Como $y \in A$, entonces $y \in \bigcup_{m=1}^{\infty} f^{-m}(B(x_z.\frac{1}{k}))$, ya que $B(x_z.\frac{1}{k}) \in \mathcal{U}$. Por lo que existe $l \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^l(y) \in B(x_z, \tfrac{1}{k}) \subset U.$$

Es decir, $\mathcal{O}(y, f) \cap U \neq \emptyset$, por lo que $\mathcal{O}(y, f)$ es conjunto denso en X. $\square$

El siguiente teorema muestra que el regreso del teorema anterior es cierto cuando X, además de ser compacto, no tiene puntos aislados. Se enuncia aparte para hacer énfasis, que en el primero solo se requiere que X sea compacto y en el segundo solo necesitamos que X no tenga puntos aislados.

Teorema 2.28. *Sean X un espacio métrico sin puntos aislados, $f : X \to X$ una función continua y $x_0 \in X$. Si $\mathcal{O}(x_0, f)$ es denso, entonces se cumple que*

1. *Para cada $k \in \mathbb{N}$, la órbita de $f^k(x_0)$, $\mathcal{O}(f^k(x_0), f)$, es densa en X.*

2. *f es transitiva en X.*

Demostración. Para 1. Sea $k \in \mathbb{N}$, tomemos $z_0 \in X$ y $\varepsilon_0 > 0$, notar que $\mathcal{O}(f^k(x_0), f) = \{f^k(x_0), f^{k+1}(x_0), f^{k+2}(x_0), ...\}$. Podemos ver que

$$\mathcal{O}(x_0, f) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), ..., f^{k-1}(x_0)\} \cup \mathcal{O}(f^k(x_0), f).$$

Por la densidad de $\mathcal{O}(x_0, f)$ podemos tomar $y_1 \in B(z_0, \varepsilon_0) \cap \mathcal{O}(x_0, f)$. Tomando $\varepsilon_1 = \text{mín}\{d(z_0, y_1), \varepsilon_0 - d(z_0, y_1)\}$ aseguramos que $B(y_1, \varepsilon_1) \subset B(z_0, \varepsilon_0)$. Podemos tomar $z_1 \in B(y_1, \varepsilon_1) - \{y_1\}$, ya que y_1 es punto de acumulación, definiendo ahora $\varepsilon_2 = \text{mín}\{d(z_1, y_1), \varepsilon_1 - d(z_1, y_1)\}$, podemos hallar $y_2 \in \mathcal{O}(x_0, f)$ tal que

$$y_2 \in B(z_1, \varepsilon_2) \subset B(y_1, \varepsilon_1).$$

Notar que $y_2 \neq y_1$. Podemos seguir haciendo este procedimiento $k + 1$ veces hasta obtener el conjunto

$$Y = \{y_1, y_2, ..., y_{k+1}\}.$$

Donde $y_i \neq y_j$ siempre que $i \neq j$ y además $Y \subset B(z_0, \varepsilon)$. Así tenemos la certeza de que $Y \cap \mathcal{O}(f^k(x_0), f) \neq \emptyset$. Por lo tanto $\mathcal{O}(f^k(x_0), f) \cap B(z_0, \varepsilon) \neq \emptyset$. Como z_0 y ε se tomaron arbitrarios se tiene el resultado.

Para 2. Sean U, V abiertos en X, como $\mathcal{O}(x_0, f)$ es un conjunto denso, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(x_0) \in V$, por el ejercicio anterior tenemos que $\mathcal{O}(f^m(x_0), f)$ es un conjunto denso, por ende existe $l \in \mathbb{N}$, tal que $f^{m+l}(x_0) \in U$. Por lo tanto $f^{m+l}(x_0) \in f^{m+l}(V) \cap U$. $\square$

2.6. Sistema dinámico caótico

Dada $f : X \to X$ una función , decimos que $x_0 \in X$ tiene *órbita estable*, si f es equicontinua en x_0. Podemos pensar que un sistema dinámico (X, f) se *comporta bien*, si todas sus órbitas son estables. La presencia de algunas órbitas no estables provoca problemas en el sentido de que, si queremos estudiar una órbita, al iterar f podemos alejarnos significativamente de esa órbita. Este tipo de sistema no es muy útil si se requiere hacer alguna predicción válida de este, sin embargo estos aprecen de manera frecuente. En esta sección presentamos condiciones para que un sistema tenga órbitas no estables dando paso a los sistemas dinámicos caóticos.

La siguiente definición la podemos entender como una *no estabilidad* del sistema.

Definición 2.29. *Sean X un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. Decimos que f es* ***sensible a las condiciones iniciales*** *en X si existe $\delta > 0$ tal que, para toda $x \in X$ y para cualquier $\varepsilon > 0$, existen $y \in B(x, \varepsilon)$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que:*

$$d(f^n(x), f^n(y)) \geq \delta.$$

Al número δ se le llama ***constante de sensibilidad*** *de f.*

Una función que es sensible a las condiciones iniciales nos dice que ninguna de sus órbitas son *estables*. No solo eso, hay además uniformidad en este fenómeno ya que la constante de sensibilidad es la misma para cada órbita.

Veamos un ejemplo de una función que no es sensible a las condiciones iniciales.

Ejemplo 2.30. *Veamos que $f : [0, 1] \to [0, 1]$ definida por $f(x) = x^2$, no es sensible a las condiciones iniciales en $[0, 1]$.*

Sea $\delta > 0$, veamos que existe $\varepsilon > 0$, tal que para cualquier $y \in B(0, \varepsilon)$ y toda $n \in \mathbb{N}$ cumple que

$$|f^n(0) - f^n(y)| < \delta.$$

Basta con tomar $\delta = \varepsilon$. $f^n(0) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y además f es estrictamente decreciente en $(0, 1)$. Si $y \in B(0, \varepsilon)$, tenemos que $0 \leq y < \varepsilon$, luego $0 \leq f^n(y) < y < \varepsilon$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Es decir, $|0 - f^n(y)| < \delta$. Así f no es sensible a las condiciones iniciales.

La sensibilidad de condiciones iniciales en un sistema dinámico es un indicio de *caos*, ya que no tenemos control sobre las órbitas. Notar que si X es finito o tiene un punto aislado, cualquier función de X en X no será sensible a las condiciones iniciales.

Teorema 2.31. *Sea X un espacio métrico finito y $f : X \to X$ una función continua. Si f es transitiva, entonces $Per(f)$ es denso en X.*

Demostración. Sea $\delta = \text{mín}\{d(x, y) : x, y \in X\}$. Dado $x \in X$ tenemos que $B(x, \delta) = \{x\}$, por lo tanto $\{x\}$ es abierto para toda $x \in X$. Fijemos $x_0 \in X$, dado $y \in X$ por la transitividad de f, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x_0) \cap \{y\} \neq \emptyset$, es decir, $f^n(x_0) = y$. Así temos que $X \subset \mathcal{O}(x_0, f)$, por lo que $X = \mathcal{O}(x_0, f)$, esto implica que todos los puntos de X son periódicos y por ende $Per(f)$ es denso en X. □

La siguiente definición de caos fue por R. L. Devaney en 1995. (ver [2]). Esta describe la presencia de una gran cantidad de puntos con órbitas cuyo comportamiento, de alguna manera es, extraño o complejo. No es la única forma de definir este tipo de comportamiento. Sin embargo, esta definición es de las más populares.

Definición 2.32. *Sea X un espacio métrico que no tiene puntos aislados y $f : X \to X$ una función continua. Decimos que f es una función **caótica** o que **genera un sistema dinámico caótico** en X si se cumplen:*

1. *El conjunto $Per(f)$ es denso en X.*
2. *f es transitiva en X.*
3. *f es sensible a las condiciones iniciales en X.*

Teorema 2.33. *La función tienda $T : [0, 1] \to [0, 1]$ es caótica en $[0, 1]$.*

Demostración. Por los Teoremas 2.26 y 2.22, sabemos que T es transitiva y $Per(T)$ es denso. Resta probar que T es sensible a las condiciones iniciales.

Sea $\delta = \frac{1}{2}$. Tomemos $x \in [0, 1]$ y $\varepsilon > 0$, sea $B(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap [0, 1]$ por el Teorema 2.22, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^N(B(x, \varepsilon)) = [0, 1].$$

Luego existen $x_0, x_1 \in B(x, \varepsilon)$, tales que $T^N(x_0) = 0$ y $T^N(x_1) = 1$. Tenemos dos casos

1. Si $T^N(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$ se tendrá que $|T^N(x) - T^N(x_0)| \geq \frac{1}{2}$.
2. Si $T^N(x) \in [0, \frac{1}{2}]$ se tendrá que $|T^N(x_1) - T^N(x)| \geq \frac{1}{2}$.

Por lo tanto la función T es sensible a las condiciones iniciales y por ende T es caótica. $\square$

La función definida en el Ejemplo 2.18 no es caótica, ya que $Per(R_\alpha)$ no es denso y la función del Ejemplo 2.30 tampoco es caótica ya que no es sensible a las condiciones iniciales.

Lema 2.34. *Sean X un espacio métrico sin puntos aislados y $f : X \to X$ una función continua. Si $Per(f)$ es denso, entonces existen $q_1, q_2 \in Per(f)$ tal que para toda $x \in X$ se cumple*

$$\delta(x, q_1) \geq \tfrac{\delta_0}{2} \quad o \quad \delta(x, q_2) \geq \tfrac{\delta_0}{2}.$$

Donde $\delta_0 = \text{mín}\{d(a,b) : a \in \mathcal{O}(q_1, f) \;\; y \;\; b \in \mathcal{O}(q_2, f)\}$.

Demostración. Tenemos que X es infinito y $Per(f)$ es denso, así podemos hallar $q_1, q_2 \in Per(f)$ tales que $\mathcal{O}(q_1, f) \cap \mathcal{O}(q_2, f) = \emptyset$, de esto $\delta_0 > 0$.

Definamos los siguientes conjuntos,

$$U = \bigcup_{a \in \mathcal{O}(q_1, f)} B(a, \tfrac{\delta_0}{2}) \;\text{ y }\; V = \bigcup_{b \in \mathcal{O}(q_2, f)} B(b, \tfrac{\delta_0}{2}).$$

Notar que $V \cap U = \emptyset$. Dado $x \in X$ se tiene que, $x \in X - (U \cup V)$ ó $x \in U \cup V$.

Si $x \in X - (U \cup V)$, entonces $d(x, a) \geq \frac{\delta_0}{2}$ para toda $a \in \mathcal{O}(q_1, f)$ y $d(x, b) \geq \frac{\delta_0}{2}$ para toda $b \in \mathcal{O}(q_2, f)$. En este caso se cumplen las dos desigualdades deseadas.

Cuando $x \in U \cup V$ tenemos que, si $x \in U$ entonces $x \notin V$ y así $d(x, b) \geq \frac{\delta_0}{2}$ para toda $b \in \mathcal{O}(q_2, f)$. Es decir, $\delta(x, q_2) \geq \frac{\delta_0}{2}$. Si $x \in V$ se tiene la desigualdad $\delta(x, q_1) \geq \frac{\delta_0}{2}$. $\square$

El siguiente teorema muestra que, para tener un sistema dinámico caótico basta con que la función sea transitiva y que haya densidad de puntos periódicos.

Teorema 2.35. *Sean X un espacio métrico sin puntos aislados y $f : X \to X$ una función continua. Si f es transitiva y tiene densidad de puntos periódicos, entonces f es sensible a las condiciones iniciales.*

Demostración. Por el Lema 2.34 existen $q_1, q_2 \in Per(f)$ tales que

$$\delta(x, q_1) \geq \frac{\delta_0}{2} \quad \text{o} \quad \delta(x, q_2) \geq \frac{\delta_0}{2},$$

para toda $x \in X$, con $\delta_0 = \text{mín}\{d(a, b) : a \in \mathcal{O}(q_1, f) \ \ \text{y} \ \ b \in \mathcal{O}(q_2, f)\}$. Veamos que f tiene como constante de sensibilidad $\delta = \frac{\delta_0}{8}$.

Sea $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, denotemos $B = B(x, \delta) \cap B(x, \varepsilon)$, es claro que B es abierto no vacío. Por la densidad de $Per(f)$ existe $p \in Per(f)$ tal que $p \in B$. Denotemos por n al periodo de p. Supongamos sin perder generalidad que

$$\delta(x, q_1) \geq \frac{\delta_0}{2} = 4\delta. \tag{2.2}$$

Cosideremos el siguiente conjunto,

$$V = \bigcap_{i=0}^{n} (f^i)^{-1}(B(f^i(q_1), \delta)).$$

Tenemos que V es un conjunto abierto no vacío ya que $q_1 \in V$. Por la transitividad de f, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^k(B) \cap V \neq \emptyset.$$

Es decir, existe $y \in B$ tal que $f^k(y) \in V$.

Sea j la parte entera de $\frac{k}{n} + 1$, así $1 \leq nj - k \leq n$. Por construcción tenemos,

$$f^{nj}(y) = f^{nj-k}(f^k(y)) \in f^{nj-k}(V) \subset B(f^{nj-k}(q_1), \delta).$$

Aplicando la desigualdad del triángulo tenemos las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} d(x, f^{nj-k}(q_1)) &\leq d(x, f^{nj}(y)) + d(f^{nj-k}(q_1), f^{nj}(y)) \\ &\leq d(x, p) + d(f^{nj}(y), p) + d(f^{nj-k}(q_1), f^{nj}(y)). \end{aligned}$$

De lo anterior y como $f^{nj}(p) = p$, se tiene que,

$$d(f^{nj}(y), f^{nj}(p)) = d(f^{nj}(y), p) \geq d(x, f^{nj-k}(q_1)) - d(x, p) - d(f^{nj-k}(q_1), f^{nj}(y)).$$

Como $p \in B(x, \delta)$, $f^{nj}(y) \in B(f^{nj-k}(q_1), \delta)$ y por la desigualdad (2,2) tenemos,

$$d(f^{nj}(y), f^{nj}(p)) > 4\delta - \delta - \delta = 2\delta.$$

Aplicando la desigualdad del triángulo nuevamente,

$$d(f^{nj}(x), f^{nj}(p)) + d(f^{nj}(x), f^{nj}(y)) \geq d(f^{nj}(y), f^{nj}(p)) > 2\delta.$$

Esto es posible cuando,

$$d(f^{nj}(x), f^{nj}(p)) > \delta \;\text{ o }\; d(f^{nj}(x), f^{nj}(y)) > \delta.$$

En cualquier caso, existe un punto en B y por ende en $B(x, \varepsilon)$ tal que la $nj-$*ésima* iteración de este punto dista de $f^{nj}(x)$ en más que δ. Por lo tanto f es sensible a las condiciones iniciales. $\square$

Resulta que para funciones definidas sobre un intervalo de la recta real, la transitividad es una condición muy fuerte, ya que esta implica densidad de puntos periódicos y por el teorema anterior también sensibilidad a las condiciones iniciales. La demostración del siguiente teorema se puede consultar en el artículo *On Intervals, Transitivity= Chaos* publicado en 1994 por M. Vellekoop y R. Berglund.

Teorema 2.36. *[11] Sea A un intervalo en $\mathbb{R}$. Sea $f : A \to A$ una función continua. Si f es transitiva, entonces $Per(f)$ es un conjunto denso en A.*

De los Teoremas 2.35 y 2.36 se tiene que, dado A un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : A \to A$ una función, si f es transitiva, entonces f es caótica en A.

Capítulo 3

Dinámica colectiva

Sea X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua, f no solamente mueve los puntos de X en X, también puede mover subconjuntos de X en X. Si $A \subset X$, entonces la imagen de A bajo f, denotada por $f(A)$, es otro subconjunto de X, esto nos permite aplicar la función en repetidas ocasiones y obtener una sucesión de subconjuntos de X.

$$\{A, f(A), f^2(A), f^3(A), ...\}.$$

En este capítulo estudiamos las órbitas de conjuntos, esto es a lo que algunos autores llaman estudiar la dinámica colectiva. Para ser más precisos tomaremos A un subconjunto compacto de X, como ya sabemos $f(A)$ también es un conjunto compacto, ya que f es continua. Así, con ayuda de la función f, podemos definir una función del conjunto de todos los subconjuntos compactos de X en el mismo. Antes de definir esta función, aclaramos como es su dominio.

3.1. El hiperespacio de los compactos

Sea X un espacio métrico compacto. Un hiperespacio de X es una familia de subconjuntos de X que cumplen una propiedad. El hiperespacio que será de nuestro interés es

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ } es \text{ } cerrado \text{ } y \text{ } A \neq \emptyset\}.$$

Los espacios estudiados en el capítulo 2, son espaciós métricos compactos. Nos gustaría que los teoremas ahí enunciados también se cumplan aquí, para ello definimos a continuación una métrica en 2^X.

Sean $A, B \in 2^X$. Fijemos un punto $a \in A$. Definiendo $g : B \to \mathbb{R}$ por $g(b) = d(a, b)$ para toda $b \in B$, donde d es la métrica de X, podemos ver que g es una función continua y como B es compacto por el Teorema de Weiestrass podemos tomar

$$d(a, B) = \text{mín}\{d(a, b) : b \in B\}.$$

Definamos $d(A, B)$ como:

$$d(A, B) = \text{máx}\{d(a, B) : a \in A\}.$$

Por un argumento similar al anterior tenemos certeza de que este máximo esta bien definido. Análogamente se puede demostrar que existe

$$d(B, A) = \text{máx}\{d(b, A) : b \in B\}.$$

A pesar de que $d(A, B)$ parece ser un buen candidato a métrica de 2^X, no lo es. Consideremos A y B elementos de 2^X tales que $A \subset B$ con $A \neq B$. Entonces no es difícil convencerse de que $d(A, B) = 0$ y $A \neq B$, además de que no cumple la propiedad de simetria. Sin embargo si definimos la función $H : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}$ por

$$H(A, B) = \text{máx}\{d(A, B), d(B, A)\},$$

esta cumple con ser una métrica en 2^X, la cual llamamos métrica de Hausdorff. A continuación se prueba este hecho.

Teorema 3.1. *La función H es una métrica en 2^X.*

Demostración. Debemos probar que la función H satisface la Definición 1.1. Sean $A, B \in 2^X$, tales que $H(A, B) = 0$, entonces $d(A, B) = 0 = d(B, A)$. Sea $a \in A$, como $d(A, B) = 0$ tenemos que $d(a, B) = 0$, así existe $b_0 \in B$ tal que $d(a, b_0) = 0$, dado que d es una métrica $a = b_0$ y por tanto $a \in B$. Dado $b \in B$, haciendo pasos análogos a lo anterior tenemos que $b \in A$, luego $A = B$.

Si $A = B$, entonces $d(a, B) = 0$ para cada $a \in A$ y $d(b, A) = 0$ para cada $b \in B$, de esta manera $d(A, B) = 0 = d(B, A)$ y por ende $H(A, B) = 0$.

Es claro que H cumple la propiedad de simétria.

Sea $A, B, C \in 2^X$. Consideremos que $d(A, B) = d(a_0, B)$ para algún $a_0 \in A$, que $d(a_0, C) = d(a_0, c_0)$ para algún $c_0 \in C$ y $d(c_0, B) = d(c_0, b_0)$

para algún $b_0 \in B$. Tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} d(a_0, B) \leq d(a_0, b_0) \leq& d(a_0, c_0) + d(c_0, b_0) \\ =& d(a_0, C) + d(c_0, B) \\ \leq& d(A, C) + d(C, B). \end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple la siguiente desigualdad

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B).$$

Con un procedimiento análogo al anterior podemos probar que se cumple

$$d(B, A) \leq d(B, C) + d(C, A).$$

En consecuencia

$$d(A, B) \leq H(A, C) + H(C, B) \ \text{ y } \ d(B, A) \leq H(A, C) + H(C, B).$$

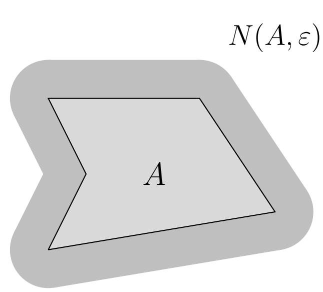
Por lo tanto

$$H(A, B) \leq H(A, C) + H(C, B).$$

Por lo tanto H es una métrica en 2^X. $\square$

Definición 3.2. *Sea X un espacio métrico compacto. Dados $A, B \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, definimos la **nube** de radio ε alrededor de A como,*

$$N(A, \varepsilon) = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon) = \{x \in X : \textit{existe } a \in A, \ d(x, a) < \varepsilon\}.$$



Sea $D : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$D(A, B) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : A \subset N(B, \varepsilon) \ \textit{y} \ B \subset N(A, \varepsilon)\}.$$

Desde ahora cuando se hable de la función D, se esta haciendo referencia a la función anterior. Resulta que D también es una métrica para 2^X, del porqué definimos D se explica en breve. Antes damos algunas propiedades de las nubes que son útiles.

Teorema 3.3. *Sean X un espacio métrico compacto, $\varepsilon > 0$ y $A, B \in 2^X$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) $N(A,\delta) \subset N(A,\varepsilon)$ *para* $\delta > 0$ *tal que* $\delta < \varepsilon$.

(b) $N(A,\varepsilon) = \bigcup\limits_{0<\delta<\varepsilon} N(A,\delta)$.

(c) Si $A \subset B$, *entonces* $N(A,\varepsilon) \subset N(B,\varepsilon)$.

(d) Si $A \cap B = \emptyset$, *entonces existe* $\delta > 0$ *tal que* $N(A,\delta) \cap N(B,\delta) = \emptyset$.

(e) Si U *es un subconjunto abierto de* X *y* $A \subset U$, *entonces existe* $\delta > 0$ *tal que* $N(A,\delta) \subset U$.

Demostración. Sea d la métrica de X.

(a) Sea $\delta > 0$ tal que $\delta < \varepsilon$. Si $x \in N(\delta, A)$, entonces existe $a \in A$ tal que $d(x,a) < \delta < \varepsilon$, y por lo cual $x \in N(\varepsilon, A)$. Por lo tanto, $N(\delta, A) \subset N(\varepsilon, A)$.

(b) Sea $x \in N(A,\varepsilon)$, entonces existe $a \in A$ tal que $d(x,a) < \varepsilon$. Sea $\delta > 0$ tal que $d(x,a) < \delta < \varepsilon$. Luego, $x \in N(A,\delta) \subset \bigcup\limits_{0<\delta<\varepsilon} N(A,\delta)$, y en consecuencia $N(A,\varepsilon) \subset \bigcup\limits_{0<\delta<\varepsilon} N(A,\delta)$. Por el inciso ($a$) se tiene la igualdad deseada.

(c) Sea $x \in N(A,\varepsilon)$, entonces existe $a \in A$ tal que $d(x,a) < \varepsilon$. Como $a \in B$, se tiene que $x \in N(B,\varepsilon)$. Por lo tanto, $N(A,\varepsilon) \subset N(B,\varepsilon)$.

(d) Sea $r = \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\}$. Como A y B son compactos y ajenos, se puede probar que $r > 0$. Sea $\delta = \frac{r}{2} > 0$. Supongamos que existe $x \in N(A,\delta) \cap N(B,\delta)$, entonces existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $d(x,a) < \delta$ y $d(x,b) < \delta$. Luego, $d(a,b) \leq d(x,a) + d(b,x) < \delta + \delta = r$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $N(A,\delta) \cap N(B,\delta) = \emptyset$.

(e) Sea $D = X - U$. Notemos que $A \cap D = \emptyset$. Por el inciso (d), existe $\delta > 0$ tal que $N(\delta, A) \cap N(\delta, D) = \emptyset$. Luego $N(\delta, A) \cap D = \emptyset$. Por lo tanto, $N(\delta, A) \subset U$. $\square$

Teorema 3.4. *Sea X un espacio métrico compacto. La función D es una métrica para 2^X.*

Demostración. Sean $A, B, C \in 2^X$. Note que por definición $D(A,B) \geq 0$. Veamos que $D(A,A) = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, siempre se cumple que $A \subset N(A, \varepsilon)$, es decir, $0 \leq D(A,A) \leq \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, de esta manera $D(A,A) = 0$. Ahora supongamos que $D(A,B) = 0$. Tomemos $a \in A$ y $\varepsilon > 0$. Notemos que $D(A,B) < \varepsilon$. Luego existe $0 < \delta < \varepsilon$ tal que $A \subset N(B, \delta)$. Así existe $b \in B$ tal que $d(a,b) < \delta < \varepsilon$. De esta manera hemos probado que $B(a,\varepsilon) \cap B \neq \emptyset$ para cualquier $\varepsilon > 0$, por ende a pertenece a la cerradura de B, como B es cerrado $a \in B$. Se tiene entonces que $A \subset B$. Para probar que $B \subset A$ se procede de manera simililar al caso anterior. Por lo tanto $A = B$.

La propiedad de simétria claramente se cumple.

Veamos que D satisface la desigualdad del triángulo, primero veamos que dado $\varepsilon > 0$ se cumple

$$A \subset N(D(A,B) + \varepsilon, B).$$

Dado que $D(A,B) < D(A,B) + \varepsilon$, existe $\delta > 0$ tal que $D(A,B) < \delta < D(A,B) + \varepsilon$ y $A \subset N(\delta, B)$, $B \subset N(\delta, A)$. Luego por el Teorema 3.3 (a)

$$A \subset N(D(A,B) + \varepsilon, B) \ \text{ y } \ B \subset N(D(A,B) + \varepsilon, A).$$

Así, se tiene lo deseado. Sea $a \in A$ y $\varepsilon > 0$, por lo anterior existe $b \in B$ tal que

$$d(a,b) < D(A,B) + \varepsilon.$$

De la misma manera dado $b \in B$ existe $c \in C$ tal que

$$d(b,c) < D(B,C) + \varepsilon.$$

Por lo que se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} d(a,c) \leq & d(a,b) + d(b,c) \\ \leq & D(A,B) + D(B,C) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Puesto que a es arbitrario podemos decir que

$$A \subset N(D(A,B) + D(B,C) + 2\varepsilon, C).$$

De manera análoga tenemos que

$$C \subset N(D(A,B) + D(B,C) + 2\varepsilon, A).$$

Así,

$$D(A,C) \leq D(A,B) + D(B,C) + 2\varepsilon.$$

Ya que ε se tomo de manera arbitraria tenemos lo deseado. $\square$

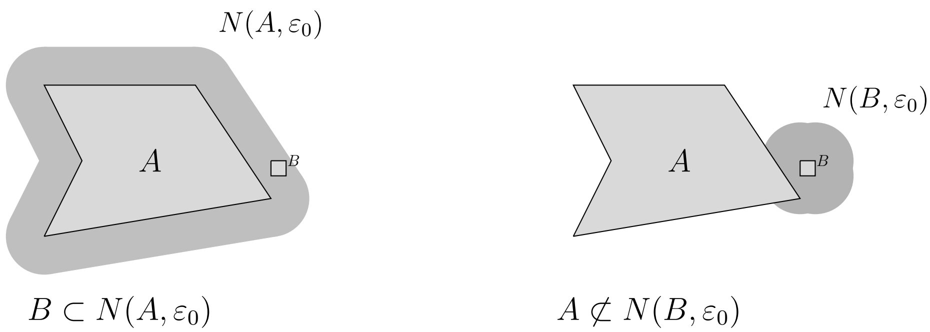


Figura 3.1: Nubes de A y B de radio ε_0

De las ilustraciones podemos ver que $\varepsilon_0 < D(A, B)$ y apesar de que las nubes son del mismo radio, la nube de B no cubre al conjunto A. Para hallar $D(A, B)$ necesitamos encontrar el primer valor δ, para el cual $A \subset N(B, \delta)$.

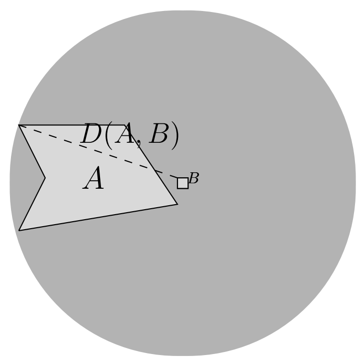


Figura 3.2: Nube de B tal que $A \subset N(B, \delta)$

Veamos ahora que la métrica de Hausdorff es equivalente a la métrica D.

Teorema 3.5. *Sean X un espacio métrico compacto y $A, B \in 2^X$, entonces $D(A, B) = H(A, B)$.*

Demostración. Sea $\delta = H(A, B)$, entonces

$$d(A, B) \leq \delta \ \text{ y } \ d(B, A) \leq \delta.$$

Para todo $\varepsilon > \delta$ se cumple que, dado $a \in A$, $d(a, B) < \varepsilon$, por lo que existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \varepsilon$, así $A \subset N(B, \varepsilon)$. Con argumentos similares se puede ver que $B \subset N(A, \varepsilon)$. Por lo tanto $D(A, B) \leq \delta$

Por otro lado, sin perder generalidad podemos suponer que $d(A, B) = \delta$, entonces existe $a_0 \in A$ tal que $d(a_0, B) = \delta$, de aquí $d(a_0, b) \geq \delta$ para toda $b \in B$.

Esto nos dice que si $A \subset N(B, \varepsilon)$, entonces $\varepsilon > \delta$, esto implica que $D(A, B) \geq \delta$. Por lo tanto $D(A, B) = H(A, B)$. $\square$

La definición de la función D nos es útil en las pruebas, pero la definición de H es mejor opción para calcular la distancia entre dos elementos de 2^X. Cuando hagamos referencia a la métrica de 2^X hablaremos de H indistintamente las definiciones anteriores.

Si X es un espacio métrico compacto se prueba que 2^X es compacto, esto se puede encontrar en [10] Teorema 4,13. Así los teoremas del capítulo 2 son validos si damos una función continua de 2^X en 2^X.

3.2. Función inducida

Sea X un espacio métrico compacto, una función continua $f : X \to X$ nos da de manera natural una función en el hiperespacio 2^X, a saber

$$2^f : 2^X \to 2^X.$$

Con regla de correspondencia,

$$2^f(A) = f(A).$$

Como f es continua, 2^f esta bien definida,es decir, $2^f(A) \in 2^X$. La función 2^f es conocida como la *función inducida* por f. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $A \in 2^X$ se tiene que

$$(2^f)^n(A) = f^n(A).$$

Al aplicar 2^f varias veces lo que se va moviendo se puede interpretar desde dos perspectivas:

1. Desde el punto de vista del espacio 2^X, la sucesión

   $$A, 2^f(A), (2^f)^2(A), ...$$

   es una sucesión de puntos. Todos ellos formando la órbita del punto $A \in 2^X$ bajo la función 2^f.

2. Desde el punto de vista del espacio X, la sucesión
$$A, 2^f(A), (2^f)^2(A), ...$$
se ve como una sucesión de conjuntos compactos,
$$A, f(A), f^2(A), ...$$
Una sucesión de manchas recorriendo el espacio X.

Veamos que en efecto 2^f es una función continua.

Teorema 3.6. *La función inducida $2^f : 2^X \to 2^X$ es continua.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Probaremos que existe $\delta > 0$ tal que si $A, B \in 2^X$ cumplen que $H(A, B) < \delta$ entonces $H(2^f(A), 2^f(B)) < \varepsilon$.

Como f es continua y X es un espacio métrico compacto, por el Teorema de Heine, f es uniformemente continua en X. Luego existe $\delta^* > 0$ tal que si $x_1, x_2 \in X$ cumplen que $d(x_1, x_2) < \delta^*$, entonces $d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

Sea $\delta = \delta^*$. Tomemos $A, B \in 2^X$ tales que:
$$H(A, B) < \delta.$$
Para cada $z \in f(A)$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = z$ y dado que $A \subset N(B, \delta)$ podemos tomar $b \in B$ tal que $d(a, b) < \delta$.

Entonces $d(f(a), f(b)) < \varepsilon$, así $f(a) \in N(f(B), \varepsilon)$ y por lo tanto,
$$f(A) \subset N(f(B), \varepsilon).$$
De manera análoga, se tiene que
$$f(B) \subset N(f(A), \varepsilon).$$
Luego,
$$H(f(A), f(B)) < \varepsilon.$$
Por lo tanto 2^f es continua. $\square$

Dado X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función cotinua, como se vio en el capítulo 2 Teorema 2.2 $\mathcal{F}(f)$ es un conjunto cerrado. Si $\mathcal{F}(f) \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{F}(f) \in 2^X$. Es claro que $2^f(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}(f)$, es decir, $\mathcal{F}(f)$ es un punto fijo de 2^f. Como se puede ver cualquier subconjunto cerrado, no vacío, de $\mathcal{F}(f)$ también será un punto fijo de 2^f. Podemos preguntar ¿estos son los únicos puntos fijos de 2^f? la respuesta a esta pregunta es negativa, si $Per(f) \neq \emptyset$, dado $x \in Per(f)$ tenemos que $\mathcal{O}(x, f)$ es un conjunto finito y por ende es cerrado, además $2^f(\mathcal{O}(x, f)) = \mathcal{O}(x, f)$, es decir, cualquier órbita de un punto periódico es un punto fijo de 2^X, más aún, cualquier unión finita de órbitas de puntos periódicos también será un punto fijo de 2^f.

Lo anterior tiene una desventaja, esta es la suposición de $\mathcal{F}(f) \neq \emptyset$ y $Per(f) \neq \emptyset$, si no se diera alguno de estos casos no podemos asegurar de forma inmediata que 2^f tenga un punto fijo. Este inconveniente no será problema en el siguiente capítulo, ahí aseguramos la existencia de al menos un punto fijo de 2^f (véase Teorema 4.5).

Dada la relación estrecha que existe entre las reglas de correspondencia de f y 2^f, la pregunta que nos hacemos es ¿cuál es la relación entre las propiedades dinámicas de f y las propiedades dinámicas de 2^f? Esta pregunta es muy amplia, daremos algunos resultados que la responden parcialmente.

El estudio de un ejemplo ayuda de manera significativa a la exposición de un tema con tintes abstractos. No debe sorprendernos que tomemos a la función *tienda* como guía.

Sea $T : [0,1] \to [0,1]$ la función *tienda*, y consideremos $2^{[0,1]}$. Dados $A, B \in 2^{[0,1]}$, $D(A, B)$ denota la distancia entre A y B, construida a partir de la métrica usual en $\mathbb{R}$. La función inducida por T en $2^{[0,1]}$ la denotaremos por 2^T y para cada $A \in 2^{[0,1]}$ se tiene que,

$$2^T(A) = \{T(a) : a \in A\} = T(A).$$

En el Teorema 2.22 se ve que T tiene densidad de puntos periódicos, el siguiente teorema dice que esta propiedad la preserva la función inducida.

Teorema 3.7. *Sea T la función tienda. El conjunto de puntos periódicos de la función inducida 2^T es denso en $2^{[0,1]}$.*

Demostración. Sean $A \in 2^{[0,1]}$ y $\varepsilon > 0$. Bastará probar que existen

$$B \in 2^{[0,1]} \ y \ M \in \mathbb{N},$$

tales que

$$D(A, B) < \varepsilon \ \ y \ \ (2^T)^M(B) = B.$$

Como A es compacto, existen $a_1, a_2, ..., a_k \in A$ tal que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(a_i, \tfrac{\varepsilon}{2}).$$

Por el Teorema 2.22, $Per(T)$ es denso en $[0,1]$, así para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$ existe $b_i \in Per(T)$, tal que $|a_i - b_i| < \frac{\varepsilon}{2}$. De esto podemos observar que $\bigcup_{i=1}^{k} B(a_i, \frac{\varepsilon}{2}) \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(b_i, \varepsilon)$. Entonces

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(b_i, \varepsilon) = N(\{b_1, b_2, ..., b_k\}, \varepsilon) \ \ y \ \ \{b_1, b_2, ..., b_k\} \subset N(A, \varepsilon).$$

Por lo tanto, $H(A, \{b_1, b_2, ..., b_k\}) < \varepsilon$. Para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$, sea m_i el periodo del punto b_i. Definamos por M al mínimo común múltiplo de la colección $\{m_1, m_2, ..., m_k\}$. Entonces $T^M(b_i) = b_i$ para cada i. Definiendo $B = \{b_1, b_2, ..., b_k\}$ tenemos lo siguiente,

$$H(A, B) < \varepsilon, \ \ B \in 2^{[0,1]} \ y \ (2^T)^M(B) = T^M(B) = B.$$

Por lo tanto, $Per(2^T)$ es denso en $2^{[0,1]}$. $\square$

En la demostración anterior solo fue necesaria la densidad de puntos periódicos de f. El siguiente teorema es más general y se demuestra con argumentos similares al anterior.

Teorema 3.8. *Sea X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Si $Per(f)$ es un conjunto denso en X, entonces $Per(2^f)$ es un conjunto denso en 2^X.*

Otra propiedad que tiene la función T, es la de ser transitiva. Los siguientes lemas nos ayudan a probar que la función inducida de T es transtiva.

Lema 3.9. *Sean a_1, a_2, b_1, b_2 cuatro puntos en $[0,1]$, y sea $\varepsilon > 0$. Entonces existen dos puntos $c_1, c_2 \in [0,1]$ y existe $N \in \mathbb{N}$ tales que:*

(a) $H(\{a_1, a_2\}, \{c_1, c_2\}) < \varepsilon$,

(b) $H(\{b_1, b_2\}, \{T^N(c_1), T^N(c_2)\}) < \varepsilon$.

Demostración. Consideremos los siguientes conjuntos

$$U = [0,1] \cap (a1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon), V = [0,1] \cap (a_2 - \varepsilon, a_2 + \varepsilon).$$

Por el Teorema 2.22, podemos asegurar la existencia de $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que:

$$T^{n_1}(U) = [0,1] \ \ y \ \ T^{n_2}(V) = [0,1].$$

Sea $N = \text{mín}\{n_1, n_2\}$. Como $T^N(U) = [0,1]$, existe $c_1 \in U$ tal que

$$T^N(c_1) \in (b_1 - \varepsilon, b_1 + \varepsilon) \cap [0,1].$$

De manera análoga podemos tomar $c_2 \in V$, $c_1 \neq c_2$, tal que

$$T^N(c_2) \in (b_2 - \varepsilon, b_2 + \varepsilon) \cap [0,1].$$

De lo anterior se cumple que $d(a_1, c_1) < \varepsilon, d(a_2, c_2) < \varepsilon, d(T^N(c_1), b_1) < \varepsilon$ y $d(T^N(c_2), b_2) < \varepsilon$. Así,

$$d(\{a_1, a_2\}, \{c_1, c_2\}) < \varepsilon \ \ y \ \ d(\{c_1, c_2\}, \{a_1, a_2\}) < \varepsilon$$

Además

$$d(\{b_1, b_2\}, \{T^N(c_1), T^N(c_2)\}) < \varepsilon \ \ y \ \ d(\{T^N(c_1), T^N(c_2)\}, \{b_1, b_2\}) < \varepsilon$$

Por lo tanto los puntos c_1 y c_2 cumplen lo deseado. □

Lema 3.10. *Sean $A = \{a_1, a_2, ..., a_{n_1}\}$ y $B = \{b_1, b_2, ..., b_{n_2}\}$ dos colecciones de puntos en $[0,1]$, con $n_1 \geq n_2$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe una colección de n_1 puntos, $C = \{c_1, c_2, ..., c_{n_1}\}$, y existe $N \in \mathbb{N}$ tales que*

$$H(A, C) < \varepsilon \ \ y \ \ H(B, (2^T)^N(C)) < \varepsilon.$$

Demostración. Por un procedimiento análogo al anterior podemos encontrar n_1 puntos, $c_1, c_2, ..., c_{n_1}$, tales que

$$\begin{aligned} c_1 \in & (a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon) \cap [0,1], \\ c_2 \in & (a_2 - \varepsilon, a_2 + \varepsilon) \cap [0,1], \\ & . \\ & . \\ & . \\ c_{n_1} \in & (a_{n_1} - \varepsilon, a_{n_1} + \varepsilon) \cap [0,1]. \end{aligned}$$

tales que

$$\begin{aligned} T^N(c_1) &\in (b_1-\varepsilon, b_1+\varepsilon)\cap[0,1],\\ T^N(c_2) &\in (b_2-\varepsilon, b_2+\varepsilon)\cap[0,1],\\ &.\\ &.\\ &.\\ T^N(c_{n_2-1}) &\in (b_{n_2-1}-\varepsilon, b_{n_2-1}+\varepsilon)\cap[0,1],\\ \{T^N(c_{n_2}),...,T^N(c_{n_1})\} &\subset (b_{n_2}-\varepsilon, b_{n_2}+\varepsilon)\cap[0,1]. \end{aligned}$$

La colección $C=\{c_1,c_2,...,c_{n_1}\}$ cumple con la condición que se pide, □

La demostración del siguiente teorema es similar al anterior.

Lema 3.11. *Sean $A=\{a_1,a_2,...,a_{n_1}\}$ y $B=\{b_1,b_2,...,b_{n_2}\}$ dos colecciones de puntos en $[0,1]$, con $n_1<n_2$. Sea $\varepsilon>0$. Entonces existe una colección de n_2 puntos, $C=\{c_1,c_2,...,c_{n_2}\}$, y existe $N\in\mathbb{N}$ tales que*

$$H(A,C)<\varepsilon \;\; y \;\; H(B,(2^T)^N(C))<\varepsilon.$$

Ahora estamos listos para demostrar la transitividad de la función inducida por la función tienda.

Teorema 3.12. *Sea T la función tienda. La función inducida 2^T es transitiva en el hiperespacio $2^{[0,1]}$.*

Demostración. Sean U,V dos abiertos en 2^X. Podemos tomar $A\in U$, $B\in V$ y $\varepsilon>0$ tales que

$$B^H(A,\varepsilon)\subset U \;\; y \;\; B^H(B,\varepsilon)\subset V.$$

Como A y B son compactos existen dos colecciones de puntos

$$\{a_1,a_2,...,a_{n_1}\}\subset A \;\; y \;\; \{b_1,b_2,...,b_{n_2}\}\subset B$$

tales que

$$A\subset\bigcup_{i=1}^{n_1}B(a_i,\tfrac{\varepsilon}{2}) \;\; y \;\; B\subset\bigcup_{i=1}^{n_2}B(b_i,\tfrac{\varepsilon}{2}).$$

Por los 2 teoremas anteriores podemos tomar una colección de M puntos, $C=\{c_1,c_2,...,c_M\}$ con $M=\max\{n_1,n_2\}$, y existe $N\in\mathbb{N}$ tales que

$$H(\{a_1,a_2,...,a_{n_1}\},\{c_1,c_2,...,c_M\})<\tfrac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

y
$$H(\{b_1, b_2, ..., b_{n_2}\}, \{T^N(c_1), ..., T^N(c_M)\}) < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$
Dado $a \in A$, existe $a_i \in \{a_1, a_2, ..., a_{n_1}\}$ tal que
$$a \in B(a_i, \tfrac{\varepsilon}{2}).$$
Por (1) existe $c_j \in \{c_1, c_2, ..., c_M\}$ tal que $d(a_i, c_j) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por la desigualdad del triángulo tenemos $d(a, c_j) < \varepsilon$, con esto tenemos que
$$A \subset N(C, \varepsilon).$$
También por (1) $C \subset N(A, \varepsilon)$. Así $H(A, C) < \varepsilon$ y por tanto $C \in B^H(A, \varepsilon)$. Con argumentos similares a los anteriores tenemos que $H(B, (2^T)^N(C)) < \varepsilon$ y por ende,
$$(2^T)^N(C) \in B^H(B, \varepsilon).$$
Luego
$$(2^T)^N(C) \in (2^T)^N(B^H(A, \varepsilon)) \cap B^H(B, \varepsilon).$$
Así, $(2^T)^N(U) \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto la función 2^T es transitiva en $2^{[0,1]}$. $\square$

Nos preguntamos ahora, en general si f es transitiva en X, será que ¿ 2^f es transitiva en 2^X? Esto sería una propiedad muy interesante, pero lamentablemente este hecho no necesariamente se cumple. Para ver esto definamos la siguiente función. Sea $g : [0, 1] \to [0, 1]$ definida por
$$g(x) = \begin{cases} 2x + \frac{1}{2} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{4}], \\ -2x + \frac{3}{2} & \text{si } x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \\ 1 - x & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Ejemplo 3.13. *La función g es trasitiva pero la función inducida 2^g no es transitiva.*

No es difícil probar que $g([0, \frac{1}{2}]) = [\frac{1}{2}, 1]$ y $g([\frac{1}{2}, 1]) = [0, \frac{1}{2}]$. Así,
$$g^2([0, \frac{1}{2}]) = [0, \frac{1}{2}] \text{ y } g^2([\frac{1}{2}, 1]) = [\frac{1}{2}, 1].$$
Por esta razón es que consideramos g de esta manera, ya que g va de un intervalo a otro en cada iteración y g^2 se mantiene en el mismo a cada iteración. Si dibujamos la gráfica de g^2 podemos notar que en el intervalo

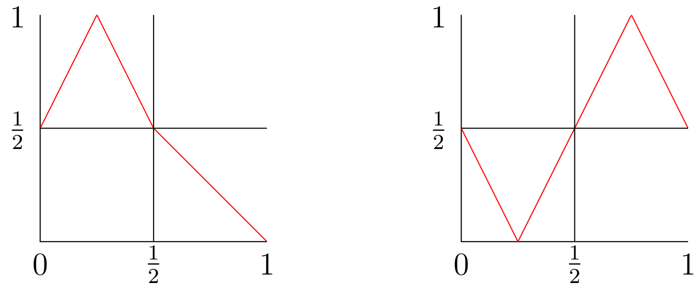


Figura 3.3: Gráficas de g y g^2.

$[\frac{1}{2}, 1]$ *la dinámica de* g^2 *es en esencia, la misma que la dinámica de la función tienda en el intervalo* $[0, 1]$*. Así, dado un intervalo abierto* (a, b) *contenido en* $[\frac{1}{2}, 1]$*, se puede probar que existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$(g^2)^N(a, b) = [\frac{1}{2}, 1].$$

Este hecho nos ayudará a demostrar que g *es transitiva en* $[0, 1]$*.*

Sean U, V *dos conjuntos abiertos, no vacíos, en* $[0, 1]$*. Si* $U \cap [\frac{1}{2}, 1] \neq \emptyset$*, entonces existe un intervalos abierto* $(a, b) \subset U \cap [\frac{1}{2}, 1]$*. Luego por lo dicho antes existe* $N_0 \in$ *tal que* $g^{2N_0}(a, b) = [\frac{1}{2}, 1]$ *y además* $g^{2N_0+1}(a, b) = [0, \frac{1}{2}]$*, de esto que*

$$[\tfrac{1}{2}, 1] \subset g^{2N_0}(U) \quad y \quad [0, \tfrac{1}{2}] \subset g^{2N_0+1}(U),$$

entonces una de estas dos opciones es válida:

$$g^{2N_0}(U) \cap V \neq \emptyset \quad ó \quad g^{2N_0+1}(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Así existe $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $g^N(U) \cap V \neq \emptyset$*.*

Si $U \cap [\frac{1}{2}, 1] = \emptyset$*, entonces* $U \subset [0.\frac{1}{2}]$ *y por ende* $g(U) \subset [\frac{1}{2}, 1]$*. Notar que* $g(U)$ *es abierto ya que* g *es continua. Por lo tanto existe un intervalo abierto* (a, b) *tal que*

$$(a, b) \subset g(U) \subset [\tfrac{1}{2}, 1].$$

Como existe $N_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $g^{2N_0}(a, b) = [\frac{1}{2}, 1]$*, se sigue que*

$$[\tfrac{1}{2}, 1] = g^{2N_0+1}(U) \quad y \quad g^{2N_0+2}(U) = [0, \tfrac{1}{2}].$$

Es decir, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$g^N(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Por lo tanto g es transitiva.

Ahora veamos que $2^g : 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ no es transitiva en $2^{[0,1]}$.

Observación. *Sea $A \in 2^{[0,1]}$, si $A \subset [0, \frac{1}{2}]$ o $A \subset [\frac{1}{2}, 1]$, entonces $H(A, [0,1]) \geq \frac{1}{2}$.*

Consideremos los siguientes conjuntos abiertos en $2^{[0,1]}$:

$$B^H(\{0\}, \tfrac{1}{2}) \;\; y \;\; B^H([0,1], \tfrac{1}{2}).$$

Observemos que si $A \in B^H(\{0\}, \frac{1}{2})$, entonces $A \subset [0, \frac{1}{2}]$ y para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$g^{2n}(A) \subset [0, \tfrac{1}{2}] \;\; y \;\; g^{2n-1}(A) \subset [\tfrac{1}{2}, 1].$$

Por la observación anterior, para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$H(g^n(A), [0,1]) \geq \tfrac{1}{2}.$$

Es decir, $g^n(A)$ nunca es elemento de $B^H([0,1], \frac{1}{2})$. De esto se concluye que para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$(2^g)^n(B^H(\{0\}, \tfrac{1}{2})) \cap B^H([0,1], \tfrac{1}{2}) = \emptyset.$$

Por lo tanto la función inducida 2^g no es transitiva en $2^{[0,1]}$.

Como g es transitiva en $[0,1]$, por el Teorema 2.36 g es caótica . Sin embargo 2^g no es caótica. Es decir, la siguiente implicación no es cierta en general, si $f : X \to X$ es caótica, entonces la función inducida 2^f es caótica.

En el siguinte teorema comenzamos a ver la influencia de la dinámica de 2^f en la dinámica de f. Este nos dice que el recíproco de la pregunta anterior es cierto.

Teorema 3.14. *Si la función inducida $2^f : 2^X \to 2^X$ es transitiva en 2^X, entonces la función $f : X \to X$ es transitiva en X.*

Demostración. Sean U, V abiertos en X. Tomando $a \in A$ y $b \in B$, podemos hallar $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(a, \varepsilon) \subset U \;\; \text{y} \;\; B(b, \varepsilon) \subset V.$$

Consideremos las bolas abiertas en 2^X con centros en estos puntos,

$$B^H(\{a\}, \varepsilon) \;\; y \;\; B^H(\{b\}, \varepsilon).$$

Estos conjuntos son abiertos en 2^X, como 2^f es transitiva, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $(2^f)^N(B^H(\{a\},\varepsilon)) \cap B^H(\{b\},\varepsilon) \neq \emptyset$, por lo tanto existe $A \in 2^X$ tal que

$$H(\{a\},A) < \varepsilon \ \ y \ \ H(\{b\},(2^f)^N(A)) < \varepsilon.$$

Tomemos un punto $x \in A$. Entonces $d(a,x) < \varepsilon$ y $d(b,f^N(x)) < \varepsilon$, esto nos dice que $f^N(x) \in f^N(B(a,\varepsilon)) \cap B(b,\varepsilon)$ y por tanto

$$f^N(B(a,\varepsilon)) \cap B(b,\varepsilon) \neq \emptyset.$$

De esto que

$$f^N(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Así f es transitiva. $\square$

En términos generales, la densidad de $Per(2^f)$ en 2^X no implica la densidad de $Per(f)$ en X. Un ejemplo de ello se puede encontrar en [9, 18.6].

Resulta que si el espacio donde estamos trabajando es el intervalo $[0,1]$ entonces la densidad de puntos periódicos en el hiperespacio sí implica densidad de puntos periódicos en $[0,1]$.

Teorema 3.15. *Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua. Si 2^f tiene densidad de puntos periódicos en $2^{[0,1]}$, entonces f tiene densidad de puntos periódicos en $[0,1]$.*

Demostración. Sean (a,b) un intervalo abierto contenido en $[0,1]$. Tenemos que $(a,b) = (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ donde $x_0 = \frac{a+b}{2}$ y $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Como $2^f : 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ tiene densidad de puntos periódicos en $2^{[0,1]}$, existen $A \in 2^{[0,1]}$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que

$$H(\{x_0\},A) < \varepsilon \ \ y \ \ f^N(A) = A.$$

Luego, $A \subset (a,b)$. Sean $\alpha = \text{mín}A$ y $\beta = \text{máx}A$, tenemos que $a < \alpha \leq \beta < b$. Como $f^N(A) = A$, entonces

$$f^N(\alpha) \geq \alpha \ \ y \ \ f^N(\beta) \leq \beta.$$

Dado que f^N es una función continua en el intervalo $[0,1]$, por el Teorema del valor intermedio existe $c \in [\alpha,\beta]$, tal que $f^N(c) = c$. Por lo tanto $Per(f) \cap (a,b) \neq \emptyset$. $\square$

Teorema 3.16. *Sea X un espacio métrico compacto. Si $2^f : 2^X \to 2^X$ es sensible a las condiciones iniciales en 2^X, entonces $f : X \to X$ es sensible a las condiciones inciales en X.*

Demostración. Supongamos que 2^f es sensible a las condiciones iniciales, entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo $A \in 2^X$ y para todo $\varepsilon > 0$, existen $B \in 2^X$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $H(A, B) < \varepsilon$ y $H((2^f)^N(A), (2^f)^N(B)) \geq \delta$.

Sea $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, existen $B \in 2^X$ y $N_x \in \mathbb{N}$ tales que

$$H(\{x\}, B) < \varepsilon \text{ y } H((2^f)^{N_x}(\{x\}), (2^f)^{N_x}(B)) \geq \delta.$$

Así $\{x\} \subset N(B, \varepsilon)$, es decir, existe $b \in B$ tal que $d(x, b) < \varepsilon$ y $d(\{f^{N_x}(x)\}, f^{N_x}(B)) \geq \delta$ luego, $d(f^{N_x}(x), f^{N_x}(B)) \geq \delta$ y esto implica $d(f^{N_x}(x), f^{N_x}(b)) \geq \delta$.

Por lo tanto f tiene sensibilidad a las condiciones inicales en X. □

No es difícil convenserce de que $2^{[0,1]}$ no tiene puntos aislados. El siguiente resultado es consecuencia inmediata de los Teoremas 3,15, 3,14 y 3,16. Este nos dice que el caos de 2^f es heredado a f, cuando $X = [0, 1]$.

Teorema 3.17. *Si la función inducida $2^f : 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ es caótica en el hiperespacio $2^{[0,1]}$, entonces $f : [0, 1] \to [0, 1]$ es caótica en $[0, 1]$.*

Capítulo 4

El conjunto omega límite

En este capítulo consideramos a X un espacio métrico y a f una función continua de X en X. Dado un punto $x \in X$, estudiaremos la convergencia de la órbita $\mathcal{O}(x, f)$, el lugar a donde converge es el llamado conjunto omega límite de x.

Definición 4.1. *Sea $x_0 \in X$. Decimos que $y \in X$ es un punto límite de la órbita $\mathcal{O}(x_0, f)$, si existe una sucesión estrictamente creciente de números naturales*

$$\{n_i\}_{i=1}^{\infty},\ n_1 < n_2 < n_3...$$

tal que

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x_0) = y.$$

La colección de todos los puntos límites de $\mathcal{O}(x_0, f)$ se llama conjunto omega límite de x_0 bajo f. Denotado por,

$$\omega(x_0, f) = \{y \in X : y \text{ es un punto límite de } \mathcal{O}(x_0, f)\}.$$

En este sentido es que decimos que $\mathcal{O}(x_0, f)$ converge a $\omega(x_0, f)$ ya que con el tiempo los puntos de la órbita estan muy cercanos a los puntos de conjunto omega límite. Tenemos la siguiente proposición que es inmediata de la definición.

Teorema 4.2. *Si x_0 es un punto periódico de f, entonces $\omega(x_0, f) = \mathcal{O}(x_0, f)$.*

Demostración. Supongamos que el periodo de x_0 es p. Sea $y \in \mathcal{O}(x_0, f)$, entonces $y = f^m(x_0)$, para algún $m \in \{0, .., p-1\}$, consiredemos la sucesión

$\{n_i\}_{i=0}^{\infty}$ donde $n_i = m + ip$, esta es creciente y además,

$$f^{n_i}(x_0) = f^{m+ip}(x_0) = f^{ip}(f^m(x_0)) = f^{ip}(y) = y.$$

Así, la sucesión $\{f^{n_i}\}_{i=0}^{\infty}$ es una sucesión constante, y converge a y. En consecuencia $\mathcal{O}(x_0, f) \subset \omega(x_0, f)$.

Sea $y \in \omega(x_0, f)$, entonces existe $\{n_i\}_{i=0}^{\infty}$ sucesión creciente tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f^{n_i}(x_0) = y$. Supongamos que $y \notin \mathcal{O}(x_0, f)$, como $\mathcal{O}(x_0, f)$ es finito podemos tomar $\varepsilon = \min\{d(y, z) : z \in \mathcal{O}(x_0, f)\}$. Para $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $i > N$, $d(y, f^{n_i}(x_0)) < \varepsilon$. Esto contradice la definición de ε. Por lo tanto $y \in \mathcal{O}(x_0, f)$. □

Teorema 4.3. *Sean $f : X \to X$ una función continua y $x \in X$. Se cumple lo siguiente*

(*a*) *$\omega(x, f)$ es un conjunto cerrado.*

(*b*) *Si X es compacto, entonces $\omega(x, f) \neq \emptyset$.*

Demostración. Para (*a*). Si $\omega(x, f) = \emptyset$, entonces es cerrado. Supongamos que $\omega(x, f) \neq \emptyset$. Demostraremos que toda sucesión convergente en $\omega(x, f)$, converge a un punto de $\omega(x, f)$. Sea $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión contenida en $\omega(x, f)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Veamos que $y \in \omega(x, f)$.

Como la sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(y_{n_1}, y) < \frac{1}{2}$. Como $y_{n_1} \in \omega(x, f)$, existe $l_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^{l_1}(x) \in B(y_{n_1}.\tfrac{1}{2}) \subset B(y, 1).$$

Análogamente, elegimos $n_2 > n_1$ tal que $d(y_{n_2}, y) < \frac{1}{2^2}$. Como $y_{n_2} \in \omega(x, f)$, entonces existe $l_2 > l_1$ tal que,

$$f^{l_2}(x) \in B(y_{n_2}, \tfrac{1}{2^2}) \subset B(y, \tfrac{1}{2}).$$

De manera recursiva encontramos una sucesión creciente de números naturales $\{l_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que para toda j,

$$f^{l_j}(x) \in B(y, \tfrac{1}{2^{j-1}}),$$

es decir,

$$\lim_{i\to\infty} f^{l_i} = y.$$

Por lo tanto, y pertenece al conjunto $\omega(x, f)$

Para 2. Por el Teorema 1.17 tenemos el resultado. □

Teorema 4.4. *Sea X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Para toda $x \in X$, se tiene que $f(\omega(x, f)) = \omega(x, f)$. Es decir, $\omega(x, f)$ es un conjunto estrictamente invariante bajo f.*

Demostración. Tomemos $x_0 \in X$. Veamos primero que $f(\omega(x_0, f)) \subset \omega(x_0, f)$. Sea $y_0 \in f(\omega(x_0, f))$. Entonces existe $z_0 \in \omega(x_0, f)$ tal que $f(z_0) = y_0$ y existe una sucesión $\{n_i\}_{1=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ monótona tal que

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x_0) = z_0.$$

Por la continuidad de f

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i+1}(x_0) = f(z_0) = y_0.$$

Así, y_0 esta en el $\omega(x_0, f)$. Por lo tanto, $f(\omega(x_0, f)) \subset \omega(x_0, f)$. Veamos ahora que $\omega(x_0, f) \subset f(\omega(x_0, f))$. Sea $a_0 \in \omega(x_0, f)$, entonces existe una sucesión $\{n_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ monótona tal que

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x_0) = a_0.$$

Podemos suponer que cada n_i es mayor o igual a 2. Como X es compacto y la sucesión $\{f^{n_i-1}(x_0)\}_{i=1}^{\infty}$ esta contenida en X, entonces existe una subsucesión $\{n_{i_j} - 1\}_{j=1}^{\infty}$ de $\{n_i - 1\}_{i=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} f^{n_{i_j}-1}(x_0) = b_0.$$

Así, $b_0 \in \omega(x_0, f)$ y

$$f(b_0) = f(\lim_{j\to\infty} f^{n_{i_j}-1}(x_0)) = \lim_{j\to\infty} f^{n_{i_j}}(x_0) = a_0.$$

Por lo tanto $a_0 \in f(\omega(x_0, f))$. $\square$

Como se mencionó en el capítulo anterior, el siguiente teorema nos asegura que la función inducida 2^f tiene al menos un punto fijo y nos dice como es.

Teorema 4.5. *Sea X un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. Si X es compacto, entonces 2^f tiene al menos un punto fijo.*

Demostración. Dado $x \in X$ por el Teorema 4.3 tenemos que $\omega(x, f) \neq \emptyset$ y $\omega(f, x)$ es cerrado, así tenemos que $\omega(x, f) \in 2^X$, por el Teorema 4.4 $f(\omega(f, x)) = \omega(f, x)$, es decir, $2^f(\omega(f, x)) = \omega(f, x)$. $\square$

El siguiente teorema aclara la idea de cuando decimos que la órbita de x converge al cojunto omega límite.

Teorema 4.6. *Sean X un espacio métrico compacto, $f : X \to X$ una función continua, $x_0 \in X$ y U un subconjunto abierto de X tal que*

$$\omega(x_0, f) \subset U,$$

entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se tiene que $f^n(x_0) \in U$.

Demostración. Dado que U es un conjunto abierto, $X - U$ es un conjunto cerrado y por ser X compacto, $X - U$ también es compacto. Consideremos el siguiente conjunto,

$$A = \{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in X - U\}.$$

Supongamos que la cardinalidad de A es infinta, podemos tomar una sucesión creciente $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $f^{n_i}(x) \in X - U$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 1.17 podemos suponer sin perder generalidad que $\{f^{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ converge a un punto $z \in X - U$, por que $X - U$ es cerrado. Por otro lado $z \in \omega(x, f) \subset U$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto A es finito y así tomando $N = \max A$, se tendrá que para toda $n \geq N$ $f^n(x) \in U$. □

Teorema 4.7. *Sean X un espacio métrico compacto, $f : X \to X$ una función continua y x un punto en X. Si el conjunto $\omega(x, f)$ es finito, entonces existe y en $\omega(x, f)$ tal que y es un punto periódico bajo f. Además*

$$\omega(x, f) = \mathcal{O}(y, f).$$

Demostración. Supongamos que $\omega(x, f)$ tiene exactamente k elementos. Digamos

$$\omega(x, f) = \{x_1, x_2, ..., x_k\}.$$

Tomemos a x_1, por el Teorema 4.4 se tiene que $\mathcal{O}(x_1, f) \subset \omega(x, f)$. Podemos suponer que

$$\mathcal{O}(x_1, f) = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$$

com $m \leq k$. Demostraremos que $\mathcal{O}(x_1, f) = \omega(x, f)$. Supongamos que $m < k$. Es claro que el conjunto $f(\mathcal{O}(x_1, f)) = \mathcal{O}(x_1, f)$ y por lo tanto el conjunto $\{x_{m+1}, x_{m+2}, .., x_k\}$ es invariante bajo f. Podemos tomar $\delta > 0$ de tal manera que $cl(B(x_1, \delta)), cl(B(x_2, \delta)), ..., cl(B(x_k, \delta))$ son ajenos dos a dos.

Sean
$$U = \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \delta) \text{ y } W = \bigcup_{i=m+1}^{k} B(x_i, \delta)$$
Tenemos lo siguiente $\mathcal{O}(x_1, f) \subset U$ y $U \cup W$ es un conjunto abierto que contiene a $\omega(x, f)$ y además $cl(U) \cap cl(W) = \emptyset$. Por el Teorema 4.6, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $f^n(x) \in U \cup W$.

Consideremos los conjuntos
$$E = \{n \geq N : f^n(x) \in U\} \text{ y } F = \{n \geq N : f^n(x) \in W\}.$$
Podemos tomar una sucesión de números naturales $\{n_i\}_{i=0}^{\infty}$ creciente, de tal manera que
$$f^{n_i}(x) \in U \text{ y } f^{n_i+1}(x) \in W.$$
Por el Teorema 1.17 podemos suponer que $\{f^{n_i}\}_{i=0}^{\infty}$ es convergente a un punto z en $cl(U)$. Como
$$cl(U) \cap \omega(x, f) = \{x_1, x_2, ..., x_m\} = \mathcal{O}(x_1, f),$$
y $z \in \omega(x, f)$, entonces $z \in \mathcal{O}(x_1, f)$. Por otro lado, dado que f es continua,
$$\lim_{i \to \infty} f^{n_i+1}(x) = f(z).$$
Como la sucesión $\{f^{n_i+1}(x)\}$ esta contenida en W, entonces $f(z) \in cl(W)$. Dado que $f(z) \in \mathcal{O}(x_1, f) \subset U$, tenemos que $cl(U) \cap cl(W) \neq \emptyset$. Esto es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{O}(x_1, f) = \omega(x, f)$. $\square$

Veamos un caso donde el conjunto omega límite es un conjunto infinito.

Teorema 4.8. *Sea $T : [0, 1] \to [0, 1]$ la función tienda. Existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $\omega(x_0, T) = [0, 1]$.*

Demostración. Por el Teorema 2.26 la función tienda es transitiva y sabemos que el intervalo $[0, 1]$ es compacto, por el Teorema 2.27 existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $\mathcal{O}(x_0, f)$ es un conjunto denso en $[0, 1]$. Veamos ahora que $\omega(x_0, f) = [0, 1]$.

Sea $x \in [0, 1]$, como $\mathcal{O}(x_0, f)$, es densa en $[0, 1]$, por el Teorema 2.28 para cada $k \in \mathbb{N}$, fijo, $\mathcal{O}(T^k(x_0), T)$ también es un conjunto denso en $[0, 1]$. Podemos construir la siguiente sucesión creciente de números naturales $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $|T^{n_i}(x_0) - x| < \frac{1}{i}$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

Tenemos que $\lim\limits_{i\to\infty} T^{n_i}(x_0) = x$, por lo tanto $x \in \omega(x_0, T)$. Por otro lado es claro que $\omega(x_0, T) \subset [0,1]$. Por lo tanto $\omega(x_0, T) = [0,1]$. $\square$

En la anterior demostración la clave fue que la función *tienda* es transtiva en $[0,1]$ y que el intervalo $[0,1]$ no tiene puntos aisados. El siguiente teorema es aún mas general. La demostración de siguiente teorema es análoga al teorema anterior, haciendo los respectivos cambios.

Teorema 4.9. *Sean X un espacio métrico compacto sin puntos aislados y $f : X \to X$ una función continua. Si f es transitiva en X, entonces existe $x_0 \in X$ tal que $\omega(x_0, f) = X$.*

4.1. La función ω_f

Sea X un espacio métrico compacto. Ya se han estudiado funciones continuas de X en X y de 2^X en 2^X. Dada una función $f : X \to X$ continua sabemos que $\omega(x, f)$ es un conjunto cerrado, motivados por ello podemos definir la función $\omega_f : X \to 2^X$ con la siguiente regla de correspondencia

$$\omega_f(x) = \omega(x, f).$$

Es de interes saber si w_f es continua, esta sección la dedicamos a determinar las condiciones bajo las cuales w_f es continua, en particular cuando $X = [0,1]$.

Teorema 4.10. *Sea X un espacio métrico compacto. Si $f : X \longrightarrow X$ es equicontinua, entonces $\omega_f : X \longrightarrow 2^X$ es continua.*

Demostración. Sea $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Como f es equicontinua en x, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta$, entonces $d(f^n(x), f^n(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sea $y \in X$ tal que $d(x,y) < \delta$, veamos que $H(w_f(x), w_f(y)) < \varepsilon$. Dado $y_0 \in \omega_f(y)$, existe una sucesión creciente de naturales $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f^{k_n}(y) = y_0$. Como $\{f^{k_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en el compacto X, existe $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f^{l_n}(x) = x_0$, para algún $x_0 \in \omega_f(x)$. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^{l_N}(x), x_0) < \frac{\varepsilon}{3}$ y $d(f^{l_N}(y), y_0) < \frac{\varepsilon}{3}$. Así,

$$d(x_0, y_0) \leq d(x_0, f^{l_N}(x)) + d(f^{l_N}(x), f^{l_N}(y)) + d(f^{l_N}(y), y_0) < \varepsilon.$$

En consecuencia, $y_0 \in N(\omega_f(x), \varepsilon)$. Por tanto, $\omega_f(y) \subset N(\omega_f(x), \varepsilon)$. Similarmente, se tiene que $\omega_f(x) \subset N(\omega_f(y), \varepsilon)$. Luego, $H(\omega_f(x), \omega_f(y)) < \varepsilon$. Por lo tanto, ω_f es continua. $\square$

El siguiente teorema es fundamental para caracterizar las funciones de $f : [0,1] \to [0,1]$ tales que ω_f es continua.

Teorema 4.11. *Si $f\colon [0,1] \to [0,1]$ y $\omega_f\colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ son funciones continuas, entonces $\mathcal{F}(f^2)$ es conexo.*

Demostración. Si $\mathcal{F}(f^2)$ consta de un solo elemento el resultado se cumple. Supongamos que $\mathcal{F}(f^2)$ tiene al menos dos elementos y que $\mathcal{F}(f^2)$ no es conexo.

Sean $a, b \in \mathcal{F}(f^2)$ tales que $x \notin \mathcal{F}(f^2)$ para todo $x \in (a,b)$, es decir, $f^2(x) \neq x$. Como f^2 es continua, entonces $f^2(x) < x$ para todo $x \in (a,b)$ ó $f^2(x) > x$, para todo $x \in (a,b)$. Sin perder generalidad, supongamos que $f^2(x) > x$ para todo $x \in (a,b)$. Tenemos dos casos.

Caso I. Para todo $x \in (a,b)$, $f^2(x) < b$. Entonces dado $x \in (a,b)$ tenemos que $a < x < f^2(x) < b$. Luego $f^4(x) = f^2(f^2(x)) > f^2(x)$, de esta manera se observa que $\{f^{2n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es un a sucesión creciente y acotada por b, luego converge al $\sup\{f^{2n}(x)\colon n \in \mathbb{N}\} := h$. Como b es cota superior, entonces $h \leq b$. Supongamos que $h < b$. Como $\{f^{2n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a h, entonces por el Teorema 2.3 h es un punto fijo de f^2 lo cual es una contradicción, por tanto $h = b$.

Por continuidad de f la sucesión $\{f^{2n+1}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(b)$. Así, $\omega_f(x) = \{b, f(b)\}$. De esto tenemos que para cualquier sucesión en (a,b) convergente a a se cumple sus imagenes bajo ω_f convergen a $\omega_f(b)$, esto contradice la continuidad de ω_f.

Caso II. Existe $x_1 \in (a,b)$ tal que $f^2(x_1) = b$. Sea $x_2 \in (a, x_1)$ tal que $f^2(x_2) = x_1$. De esta manera podemos contruir una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a a tal que $f^2(x_{n+1}) = x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Note que $f^{2n}(x_n) = b$ pues $f^2(x_{n+1}) = x_n$ y en particular $f^2(x_1) = b$. Luego, $f^{2n+1}(x_n) = f(b)$ pues $f^{2n+1}(x_n) = f(f^{2n}(x_n)) = f(b)$. Así, $\omega_f(x_n) = \{b, f(b)\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\omega_f(a) = \{a, f(a)\}$ nuevamente se contradice la continuidad de ω_f en a.

En cualquiera de los dos casos, llegamos a que ω_f no es continua, lo cual es una contradicción. Por tanto $\mathcal{F}(f^2)$ es conexo. $\square$

El siguiente corolario es inmediato del teorema anterior y del Teorema 2.6.

Corolario 4.12. *Si* $f\colon [0,1] \to [0,1]$ *y* $\omega_f\colon [0,1] \to 2^{[0,1]}$ *son funciones continuas, entonces* $\mathcal{F}(f)$ *es conexo.*

Pregunta: ¿Con las mismas hipótesis del teorema $\mathcal{F}(f^n)$ es conexo, para cada $n \in \mathbb{N}$?

Teorema 4.13. *Sea* X *un espacio métrico y* $f : X \to X$ *es una función continua y periódica (en el sentido* $f^n = f$, *para algún* $n \in \mathbb{N}$ *con* $n \geq 2$*), entonces* f *es equicontinua.*

Demostración. Sea n el periodo de f. Luego, dado $\varepsilon > 0$ y $x \in X$, existe $\delta_i > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta_i$, entonces $d(f^i(x), f^i(y)) < \varepsilon$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, esto ya que cada f^i es continua en x. Tomemos $\delta = \text{mín}(\delta_i)$. Luego, si $k \in \mathbb{N}$, existen $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $k = nm + i$. Así, $f^k = f^i$. Luego, $d(f^k(x), f^k(y)) = d(f^i(x), f^i(y)) < \varepsilon$ si $d(x,y) < \delta$, y con esto tenemos la equicontinuidad de f. □

En el sentido de que una función es periódica cuando existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $f(x+t) = f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$, el teorema anterior no se cumple, pues si consideremos la función tienda T, la función T^2 es periódica y no es equicontinua. Sin embargo, la función *sen* es periodica y equicontinua.

Teorema 4.14. *Sean* X *un espacio métrico compacto y* $f : X \longrightarrow X$ *una función continua. Entonces* f^2 *es equicontinua si y solo si* f *es equicontinua.*

Demostración. Supongamos que f^2 es equicontiua. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $\eta > 0$ tal que

$$\text{si } d(x,y) < \eta, \text{ entonces } d(f^{2n}(x), f^{2n}(y)) < \varepsilon$$

Como f es continua sobre el compacto X, tenemos que f es uniformemente continua. Luego, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } d(x,y) < \delta, \text{ entonces } d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

□

El siguiente teorema nos da condiciones necesarias y suficientes para que ω_f sea continua si $X = [0,1]$.

Teorema 4.15. *Sea $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continua y suprayectiva. Las siguientes condiciones son equivalentes*

1. *f es equicontinua,*
2. *$\omega_f : [0,1] \longrightarrow 2^{[0,1]}$ es continua,*
3. *$\mathcal{F}(f^2)$ es conexo.*

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$ Esto se obtiene de forma directa del Teorema 4.10

$(2 \Rightarrow 3)$ Esta implicación se obtiene del Teorema 4.11.

$(3 \Rightarrow 1)$ Como $\mathcal{F}(f^2)$ es conexo, por el Teorema 2.7 $f^2 = Id$, de esto que $f^3 = f$, es decir, f es periódica. Luego por el Teorema 4.13 f es equicontinua. $\square$

Ahora veamos que funciones $f : [0,1] \to [0,1]$ satisfacen que ω_f es continua.

Notar que si $f^2 = Id$, implica que f es inyectiva, ya que dados $x, y \in X$ tales que $f(x) = f(y)$ se tiene que $f^2(x) = f(f(x)) = f(f(y)) = f^2(y)$, es decir, $x = y$. El siguiente teorema nos da una mejor idea de como deben ser estas funciones.

Teorema 4.16. *Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ continua y suprayectiva. Entonces f es biyectiva si y solo si f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ Primero veamos que $f(0), f(1) \in \{0,1\}$. Supongamos que $f(0) \notin \{0,1\}$, así $f(0) \in (0,1)$. Como f es sobreyectiva existen $r, s \in (0,1]$ con $r \neq s$ tales que $f(r) = 0$ y $f(s) = 1$, supongamos sin perder generalidad que $r < s$. Definiendo la función $h(x) = f(x) - f(0)$, tenemos que $h(r) < 0 < h(s)$, por lo que existe $c \in [r,s]$ tal que $f(c) = f(0)$ y así $c = 0$, esto es una contradicción. Por lo tanto, $f(0) \in \{0,1\}$. De forma análoga se prueba que $f(1) \in \{0,1\}$.

De la inyectividad de f tenemos dos casos,

1. Si $f(0) = 1$ y $f(1) = 0$, entonces f es estrictamente decreciente.

   Supongamos que existen $x_0, y_0 \in (0,1)$ con $x_0 < y_0$ tales que $f(1) < f(x_0) < f(y_0) < f(0)$, de esto se puede ver que existe $z \in [0, x_0]$ tal que $f(z) = f(y_0)$, de aquí que $z = y_0$ y esto es una contradicción. Por lo tanto $f(x) > f(y)$ siempre que $x < y$.

2. Si $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$, entonces f es estrictamente creciente.

   Los argumentos son similares al caso anterior.

($\Leftarrow$) La demostración de esto es directa de las definiciones. $\square$

Corolario 4.17. *Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ contiua y suprayectiva. Si $\mathcal{F}(f^2)$ es conexo, entonces f es una función estricatmente creciente o estrictamente decreciente.*

Teorema 4.18. *Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ continua, biyectiva y estrictamente creciente. Si $f^2 = Id$, entonces $f = Id$.*

Demostración. Como f es estrictamente creciente, por la demostración anterior tenemos que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. Sea $x_0 \in (0,1)$ y supongamos que $f(x_0) < x_0$, de esto tendríamos que $f^2(x_0) < f(x_0)$, es decir, $x_0 < f(x_0)$, lo cual es una contradicción. Si suponemos que $f(x_0) > x_0$ también se llega a una contradicción. Por lo tanto $f(x_0) = x_0$ para toda $x_0 \in [0,1]$. $\square$

Llegado a este punto podemos pensar que cambiando la hipótesis de estrictamente creciente por estrictamente decreciente, deberiamos de obtener una única función que satisfaga las hipótesis, incluso podemos pensar que esta función es $f(x) = 1 - x$. Sin embargo, esto no ocurre, daremos dos ejemplos de esto y después una caracterización de estas.

Ejemplo 4.19. *Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ definida como sigue:*

$$f(x) = \begin{cases} -3x + 1 & si\ x \in [0, \frac{1}{4}], \\ -\frac{1}{3}(x-1) & si\ x \in [\frac{1}{4}, 1]. \end{cases}$$

Sea $g : [0,1] \to [0,1]$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 2(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} & si\ x \in [0, \frac{1}{2}], \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + \frac{1}{2} & si\ x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Estas funciones son continuas, biyectivas y estrictamente decrecientes, además se puede ver que $f^2 = Id$ y $g^2 = Id$.

Estos dos ejemplos tienen en común que la segunda parte de la función es una reflexión de la primera respecto a la función identidad. El siguiente teorema muestra que esto es cierto.

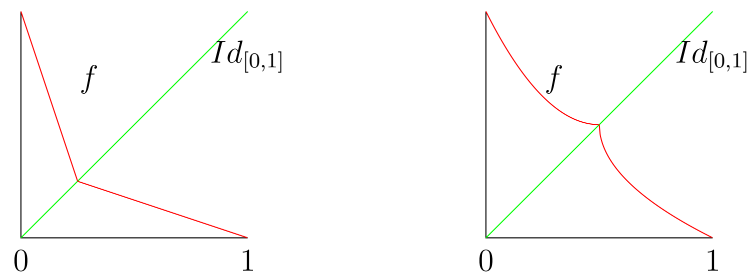


Figura 4.1: Gráficas de f y g.

Teorema 4.20. *Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua, suprayectiva y estrictamente decreciente. Entonces $f^2 = Id$ si y solo si existe $b \in (0,1)$ y $g : [0,b] \to [b,1]$ continua, suprayectiva y estrictamente decreciente tal que*

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \textit{si } x \in [0,b], \\ g^{-1}(x) & \textit{si } x \in [b,1]. \end{cases}$$

Demostración. ($\Leftarrow$) Sea $x \in [0,1]$, tenemos dos casos:

1. Si $x \in [0,b]$ tenemos que $f(x) = g(x)$, como $g(x) \in [b,1]$, se tiene que $f^2(x) = f(g(x)) = g^{-1}(g(x)) = x$.

2. Si $x \in [b,1]$ tenemos que $f(x) = g^{-1}(x)$, como $g(x)^{-1} \in [0,b]$, se tiene que $f^2(x) = f(g^{-1}(x)) = g(g^{-1}(x)) = x$.

Por lo tanto $f^2 = Id$.

($\Rightarrow$) Por el Corolario 2.5 existe $b \in [0,1]$ tal que $f(b) = b$, por lo visto en la prueba del Teorema 4.16, $b \in (1,0)$. Definamos $g : [0,b] \to [b,1]$ por $g(x) = f(x)$. Veamos que g esta bien definida, es decir, $g([0,1]) \subset [b,1]$, como $f^2 = Id$ y f es estrictamente decreciente tenemos que f es inyectiva y además, $f(0) = 1$ y $f(1) = 0$. Supongamos que existe $x_0 \in (0,b)$ tal que $g(x) \in (0,b)$. f restringida a $[b,1]$ es continua y se cumple que $f(1) < g(x) < f(b)$, así existe $c \in (b,1)$ tal que $f(c) = g(x_0) = f(x_0)$, esto contradice el hecho de que f es inyectiva. Por tanto $g([0,b]) \subset [b,1]$. Es claro que $b, 1 \in g([0,b])$, como $f([0,b]) = g([0,b])$ se tiene que $g([0,b])$ es conexo y por ello $[b,1] \subset g([0,1])$. Por lo tanto $g([0,b]) = [b,1]$, es decir, g es suprayectiva. Por como se define la función g es continua y estrictamente decreciente.

Por esto, la función g es continua y biyectiva, luego su función inversa $g^{-1} : [b,1] \to [0,b]$ esta bien definida, es continua, biyectiva y estrictamente decreciente. Veamos que $f(x) = g^{-1}(x)$ para $x \in [b,1]$. Sea $x \in [b,1]$, $g^{-1}(x) \in [0,b]$, luego como f y g coinciden en el intervalo $[0,b]$ se tiene que $f(g^{-1}(x)) = g(g^{-1}(x)) = x$ y así $g^{-1}(x) = f^2(g^{-1}(x)) = f(x)$. Esto completa la demostración. $\square$

De aquí podemos ver que hay una infinidad de funciones que cumplen con ser continua, biyectiva, estrictamente decreciente y $f^2 = Id$.

Tomando como referencia las funciones definidas en el Ejemplo 4.19, tenemos que $\omega_f(x) = \{x, f(x)\}$, de esto que podemos represenar a las funciones ω_f y ω_g como sigue,

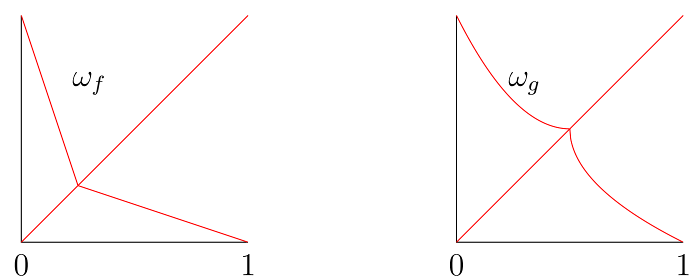


Figura 4.2: Gráficas de ω_f y ω_g.

Motivados por esto, nos preguntamos si existe $h : [0,1] \to [0,1]$ tal que la representación de ω_h sea de la siguinte manera

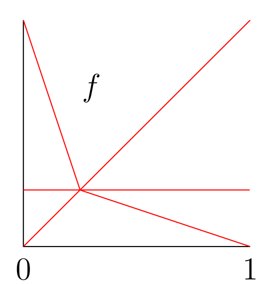


Figura 4.3: Gráfica de ω_h.

Es decir, que $\omega_h = \{x, f(x), f^2(x)\}$ o bien $h^3 = Id$. La respuesta es negativa, ya que de existir h tendría un punto de periodo 3 y por el Teorema 2.17 h debe tener un punto de periodo 2, lo cual contradice que $h^3 = Id$.

De aquí que nos preguntemos ¿Existe una función $h : [0,1] \to [0,1]$ continua y suprayectiva tal que $h^n = Id$ para $n \geq 4$? El argumento que se utilizó para cuando $n = 3$ ya no es válido en estos casos, sin embargo, el teorema siguiente responde de forma negativa a esta pregunta.

Teorema 4.21. *Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua y suprayectiva. Si $f^n = Id$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $f^2 = Id$.*

Demostración. Si $f^n = Id$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $f^{n+1} = f$, por el Teorema 4.13 se tiene que f es equicontinua, luego por el Teorema 4.15 $\mathcal{F}(f^2)$ es conexo, finalmente por el Teorema 2.7 $f^2 = Id$. $\square$

El anterior teorema nos dice que una función continua y suprayectiva de $[0,1]$ en $[0,1]$, tal que $f^n = Id$ para algún $n \in \mathbb{N}$, no tiene más opción que ser la función identidad o ser una función como las que se describen en el Teorema 4.20.

Capítulo 5

Conclusiones

La dinámica en intervalos de los números reales es intuitiva y de ahí su riqueza, ejemplo de ello fue la función tienda, como se expuso tiene propiedades dinámicas peculiares y fue un ejemplo primordial para esta tesis.

Estudiamos las propiedades dinámicas que se preservan de la función f a la función 2^f y viceversa, claro en el intervalo $[0, 1]$ se preservan algunas más (véase Teorema 3.15).

Todos los resultados obtenidos para el espacio $X = [0, 1]$, ya sean para la función $f : X \to X$ o para 2^f, son en general, para cualquier espacio homeomorfo al intervalo $[0, 1]$ al cual denominan arco. Este concepto es estudiado ampliamente en la teoría de continuos. Ya estudiado el intervalo $[0, 1]$ podemos utilizar estos resultados para comenzar el estudio de otros entes de la teoría de continuos como los son los *árboles*, *abanicos* o *gráficas finitas* ya que estos dependen de los arcos.

Se logró caracterizar a las funciones definidas en el intervalo $[0, 1]$, que hacen continua a la función ω_f. Con ayuda de esto queda ver si es posible caracterizar a estas funciones para otros espacios como lo son los *árboles*, *abanicos* o *gráficas finitas*.

Bibliografía

[1] Banks J., Brooks J., Cairns G., Davis G. y Stacey P.,*On Devaney's Definition of Chaos*, American Mathematical Monthly, Vol. 99, (1992), 332 - 334.

[2] Devaney R. L., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Second Edition, Addison-Wesley, Redwood City, 1989.

[3] Gutú O., *Pequeña guía de ortografía y estilo para escribir matemáticas en español*, Miscelánea Matemática 54, (2012), págs. 69-80.

[4] Hernández P., King J. y Méndez H., *Compact sets with dense orbit in* 2^X, Topology Proceedings, Vol. 40, (2012), 319-330.

[5] Illanes A., *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos N. 28, Sociedad Matemática, ISBN:968-36-3594-6,2004.

[6] Iribarren I., *Topología de espacios métricos*, Limusa-Wiley, México, 1973.

[7] Hocking J. G., Young G. S., *Topology*, Dover Publications, New York, 1996

[8] Munkres J. R., *Topología*, Massachusetts Institute of Technology, Prentice-Hall. 2da edición, 2002.

[9] King J., Méndez H., *Sistemas dinámicos discretos*, Las prensas de la ciencia, Temas de Matemáticas, ISBN: 978-607-02-5263-1, 2014.

[10] Nadler S.B. Jr., *Continuum Theory. An Introduction*, Monographs and Texbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, ISBN:0-8247-8659-9, 1992.

[11] Vellekoop M., Berglund R., *On Intervals, Transitivity = Chaos*, Amer. Math. Monthly, Vol. 101, (1994), 353-355.

Índice alfabético