

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS



DINÁMICA POLINOMIAL ALTERNADA

TESIS PRESENTADA QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA

EDUARDO MONTIEL ORTEGA

DIRECTOR DE TESIS:

M. C. JUAN FRANCISCO ESTRADA GARCÍA

PUEBLA, PUE.

DICIEMBRE 2015

## DEDICATORIA

A mi esposa Lulú, al Maestro Estrada, a mis padres... en general a todos y a todo aquello que me ha permitido conservar mi paz mental, asesinar al dragón y encontrar el corazón sagrado.

## AGRADECIMIENTOS

“I accept chaos, i´m not sure whether it accepts me” Bob Dylan.

Seré breve, para los que me conocen, no deber ser difícil imaginar la razón de otorgarle una inmensa gratitud a mi esposa, que tiene que lidiar conmigo durante muchas horas cada día, aunque supongo que mi compañía, en ocasiones le causa alguna emoción o sentimiento al menos semejante a la felicidad.

El segundo personaje con el que estoy enteramente agradecido es el maestro Estrada que me ha enseñado a dilucidar un panorama más allá de los lineamientos generales hablando no solamente de la cuestión matemática.

Por último al M.C. Julio Erasto Poissot Macias, al Dr. Francisco Javier Mendoza Torres y al Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna que me hicieron favor de revisar ésta tesis y de ser mis sinodales, además de ser profesores de algunos de mis cursos y brindarme su apoyo.

## Introducción

Esta tesis presenta un tema reciente, aunque no nuevo, que ha acaparado la atención de propios y extraños, la dinámica holomorfa, es decir el tratado de las propiedades cualitativas de los sistemas dinámicos generados por la iteración de funciones holomorfas, en particular nos enfocaremos al caso polinomial cuadrático y luego daremos un pequeño giro al asunto para intentar generar una novedad.

La historia de esta teoría empieza con el trabajo en ecuaciones diferenciales de Isaac Newton que intentaba solucionar el problema del movimiento de  $n$  cuerpos, luego en 1890 Poincaré en lugar de buscar las soluciones explícitas, se ocupó del estudio cualitativo de los sistemas dinámicos. En la década de 1920 los franceses Pierre Fatou y Gaston Julia, separadamente, continuaron con el estudio de la dinámica de funciones analíticas complejas, de hecho lograron describir globalmente el comportamiento de su dinámica, produciendo una dicotomía, el conjunto de Fatou y su complemento el conjunto de Julia; pero el trabajo se detuvo debido a la falta de imágenes de computadora. En los últimos 35 años se ha tenido un auge, motivado por los resultados obtenidos mediante computadora en 1980 por Mandelbrot, en especial el descubrimiento del conjunto que lleva su apellido, y por las poderosas herramientas del análisis complejo, desarrolladas principalmente en los trabajos de A. Douady, J. Hubbard y D. Sullivan. El estudio de esta teoría es muy bello y enriquecedor; Uno es premiado con imágenes estupendas, obras de arte, surgidas de la naturaleza matemática, ya uno sumergido en el trance onírico originado por éstas, es atraído sin remedio (como insecto a la orquídea) a entender su origen, sus características, su esencia, y finalmente uno acaba con las patas llenas de polen (para continuar con la analogía del bicho) fecundando la misma flor o incluso otras, tales como ecuaciones diferenciales, teoría de números, grupos, análisis, topología, etcétera; En la aquí presentada, después de la confusión de no poder escapar tan fácil de la orquídea se intentara fecundar una de la misma especie o ¿será incluso la misma flor?.

En el capítulo 1, se presenta un poco del material necesario para la comprensión de esta teoría, el lector debe observar desde un principio la versatilidad del tema, y más tarde quedara claro el rol que juegan, por ejemplo el teorema sobre familias normales de Montel o el por demás utilizado teorema de la transformación de Riemann. Además en este capítulo se dan las definiciones básicas de la teoría de iteración y una herramienta que será utilizada con frecuencia, la conjugación. Por último se dan a conocer las funciones racionales, este tipo de funciones es donde muchos de los teoremas sobre iteración son validos, y por consecuencia son útiles en nuestro caso donde solo nos fijamos en polinomios.

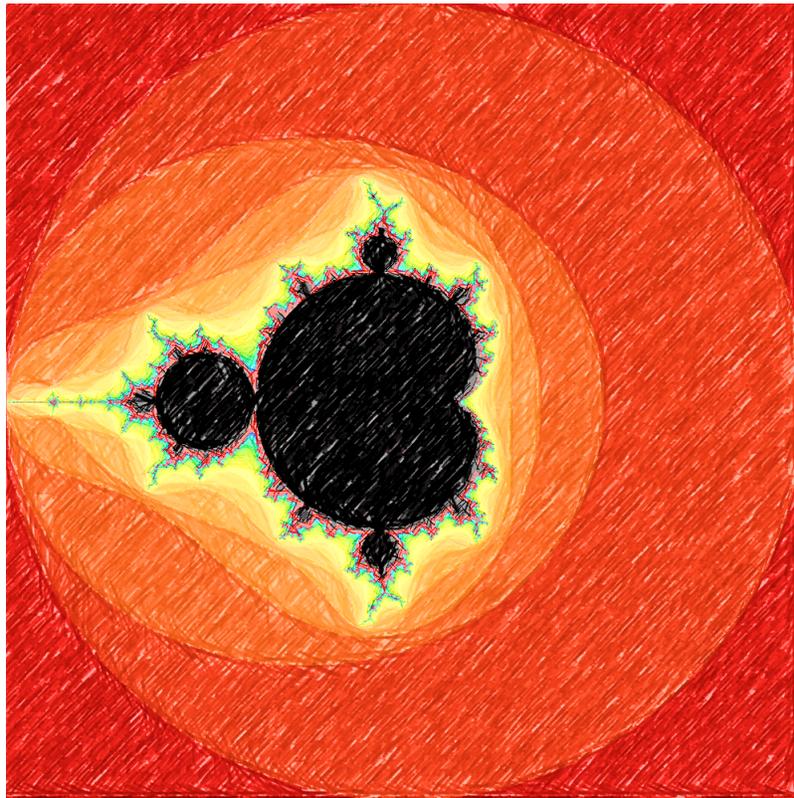
En el capítulo 2, se exponen las definiciones del conjunto de Fatou y del conjunto de Julia, desde el punto de vista de las familias normales, y se manifiestan los resultados clásicos obtenidos por Fatou y Julia. Luego se revela la importancia del teorema de Montel, siendo parte esencial en las demostraciones de resultados que conciernen al conjunto de Julia. Después usando hechos topológicos se muestra la estructura de ambos conjuntos. Posteriormente se esclarece la importancia de los puntos fijos y la conjugación, analizando el fenómeno localmente, como se hiciera al inicio del desarrollo de esta teoría con los teoremas de Koenigs y Bötcher. Se sigue con más propiedades de nuestros conjuntos de estudio, obtenidos en gran medida al restringir nuestro campo de trabajo a funciones racionales y en ocasiones a polinomios. Finalmente hace su aparición (al menos de cierto modo) el caso de un polinomio cuadrático.

En el último capítulo, se intenta analizar un caso bastante peculiar, la dinámica polinomial alternada, la cual dependerá de dos parámetros. Por tanto dividiremos el estudio en tres partes, la primera cuando ambos parámetros son cero, donde se usará la conjugación para reducir nuestro problema al caso cuadrático. Luego se tratará el caso cuando solo uno de los dos sea cero, otra vez se mostrará que una conjugación aligera el problema. Por último se dan algunos resultados cuando ambos parámetros no son cero, y su relación con el caso cuadrático.

Fecha: Diciembre, 2015.

Eduardo Montiel Ortega

**DINÁMICA POLINOMIAL ALTERNADA**



**EDUARDO MONTIEL ORTEGA**

DICIEMBRE 2015

## Índice

Introducción	4
Índice de símbolos	8
Capítulo 1. Preliminares	9
1.1. Análisis Complejo	9
1.2. Sistemas dinámicos discretos	21
1.3. Funciones racionales	26
Capítulo 2. Conjuntos de Julia y Fatou	30
2.1. Definición y primeros resultados	30
2.2. Propiedades del conjunto de Julia	33
2.3. Estructura topológica de los conjuntos de Fatou y de Julia	37
2.4. Teoría local de los puntos fijos	39
2.5. Más propiedades de los Conjuntos de Julia y de Fatou	48
2.6. El espacio de parámetros	53
Capítulo 3. Dinámica polinomial alternada	59
Introducción mínima y observaciones	59
3.1. Dinámica del polinomio $P(z) = z^4$	61
3.2. Dinámica de la familia de funciones $z^4 + c$	65
3.3. Dinámica de la familia de funciones $(z^2 + c_1)^2 + c_2$	79
Conclusión	94
Apéndice	95
Programa A	95
Programa B	97
Programa C	98
Programa D	100
Programa E	102
Programa F	103
	106
Bibliografía	

## Índice de símbolos

$\mathbb{R}$	Números reales
$\mathbb{Z}$	Números enteros
$\mathbb{N}$	Números naturales
$\mathbb{C}$	Plano complejo
$\bar{\mathbb{C}}$	Esfera de Riemann
$\mathbb{C}^*$	Plano perforado
$\mathbb{D}$	Disco abierto unitario
$\bar{\mathbb{D}}$	Disco cerrado unitario
$\mathbb{D}^*$	Disco Perforado
$\mathbb{S}^1$	Circunferencia unitaria
$\mathbb{S}^2$	Esfera unitaria
$\mathcal{O}^+(z)$	Órbita hacia adelante de $z_0$
$\mathcal{O}^-(z)$	Órbita hacia adelante de $z_0$
$\mathcal{GO}(z)$	Órbita grande de $z_0$
$F \circ F(R)$	Conjunto de Fatou (de $R$ )
$J \circ J(R)$	Conjunto de Julia (de $R$ )
$K(P)$	Conjunto de Julia lleno de $P$
$o Z^n $	Término residual cuyo radio a $ z^n $ tiende a cero

## CAPÍTULO 1

# Preliminares

En este capítulo introduciremos los conceptos básicos utilizados en la teoría de iteración de las transformaciones holomorfas conocida como dinámica holomorfa, se introducen también algunas ideas y resultados que se usarán en los capítulos posteriores.

Desde muchos puntos de vista esta teoría es muy bella y ofrece grandes recompensas, tal vez la primera de ellas es descubrir toda la matemática inmersa en ella, la segunda recompensa sería por consecuencia comprender ésta matemática; Y bueno uno de los objetivos de estos preliminares es exactamente exhibir esas primeras recompensas.

### 1.1. Análisis Complejo

En esta primera sección puesto que hemos mencionado que nos enfocaremos en las transformaciones holomorfas parece bastante natural hablar de análisis complejo y la relación existente con nuestro estudio. Algunos teoremas aparecerán sin demostración, en ocasiones por no ser largos y en otras por la complejidad del teorema lo que nos llevaría a caer en la primera situación. Empecemos con algunas definiciones.

DEFINICIÓN. Una transformación  $f$  uno a uno y sobreyectiva de  $A$  en  $B$  es un *homeomorfismo* si ambas  $f$  y  $f^{-1}$  son continuas.

Por ejemplo  $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}$  es un *homeomorfismo* entre el intervalo  $(0, 1)$  y  $\mathbb{R}$ .

Dado la naturaleza de las transformaciones complejas como veremos más adelante cuando definamos por ejemplo las transformaciones racionales, nos es conveniente introducir el símbolo  $\infty$  para representar al infinito con las convenciones usuales, pero como sabemos no hay donde acomodar un nuevo punto en el plano, exceptuando esto por el momento, presentemos a  $\infty$  como una idealización de un punto, el cual llamaremos el *punto en el infinito*, de éste modo podemos dar la siguiente definición:

DEFINICIÓN. Los puntos del plano complejo junto con el punto en el infinito  $\infty$  constituyen al plano complejo extendido, denotado por  $\bar{\mathbb{C}}$ .

Es inmediata la necesidad de una representación geométrica en la cual todos nuestros puntos tengan cabida, para solventar ésta utilicemos el concepto de la esfera unitaria, es decir de

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) = x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 1\}$$

también llamada la esfera de Riemann. Para asociar cada punto en el plano con uno en  $\mathbb{S}^2$ , usamos la siguiente idea geométrica: tomamos al plano  $x_3 = 0$  como el plano complejo y la recta que proyecta el polo norte  $e_3 = (0, 0, 1)$  de la esfera de Riemann a cualquier otro punto  $x = (x_1, x_2, x_3)$  en la misma esfera, ésta línea cruza al plano complejo el único punto  $(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}, 0)$ , con esto en mente se define la transformación  $\psi : \mathbb{S}^2 - \{e_3\} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$$

la cual es una biyección entre  $\mathbb{S}^2 - \{e_3\}$  y  $\mathbb{C}$ , además si hacemos corresponder a  $e_3$  con  $\infty$  obtenemos una biyección entre  $\mathbb{S}^2$  y  $\bar{\mathbb{C}}$  a la que llamamos *proyección estereográfica*. Geométricamente es evidente que el hemisferio sur ( $x_3 < 0$ ) corresponde al disco abierto unitario  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  y el hemisferio norte ( $x_3 > 0$ ) al exterior de éste disco. La ventaja de éste modelo es que el punto al infinito no es un punto distinguido, aunque la suma y el producto ya no son fáciles de interpretar. Si acordamos que toda recta incluye al punto  $\infty$ , podemos observar que bajo la proyección estereográfica rectas en  $\bar{\mathbb{C}}$  y círculos en  $\mathbb{C}$  se transforman en círculos en  $\mathbb{S}^2$  y viceversa.

DEFINICIÓN. Se define la métrica esférica en el plano complejo extendido de la siguiente manera

$$d_E(z_1, z_2) = \begin{cases} \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}} & \text{si } z_1, z_2 \neq \infty \\ \frac{2}{\sqrt{1+|z_1|^2}} & \text{si } z_2 = \infty \end{cases}$$

Se puede demostrar que las métricas cordal y euclidiana inducen la misma topología en  $\mathbb{C}$ , además dada  $z_n$  con  $n \in \mathbb{N}$  una sucesión en  $\mathbb{C}$  se tiene que

$$d_E(z_n, \infty) \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty \text{ si y sólo si } |z_n| \rightarrow \infty \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Para una demostración de éste hecho se puede consultar [La].

DEFINICIÓN. Por un *dominio*  $\Omega$  en  $\mathbb{C}$  entenderemos un subconjunto abierto y conexo no vacío del plano extendido.

Por lo general trabajaremos en dominios.

DEFINICIÓN. Sea  $\Omega$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  diremos que  $f$  es *analítica* en el punto  $a \in \Omega$  si el

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe, el valor de este límite es denotado por  $f'(a)$  y es llamado la *derivada* de  $f$  en  $a$ ; Si la derivada existe en todo punto de  $\Omega$ ,  $f$  se dice *analítica* o equivalentemente *holomorfa*. Un ejemplo de funciones analíticas son los polinomios

$$P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$$

si suponemos que  $a_n \neq 0$ , entonces el grado de  $P$  es  $n$ . La derivada de ésta transformación esta dada por

$$P'(z) = a_1 + 2a_2z + \cdots + na_nz^{n-1}.$$

Es común encontrarse con funciones holomorfas en todo su dominio, excepto quizá en un conjunto de puntos aislados, a éstos puntos les llamaremos *singularidades aisladas*. Dichos puntos admiten la siguiente clasificación:

Sea  $\Omega$  un dominio y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una transformación holomorfa en  $\Omega - \{a\}$ .

(i) Si  $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = 0$  ó equivalentemente si existe una transformación holomorfa en  $\Omega$  que coincida con  $f$  en  $\Omega - \{a\}$  diremos que  $a$  es una *singularidad removible*.

(ii) Si  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$  diremos que  $a$  es un *polo* de  $f$ , y convendremos que  $f(a) = \infty$ .

(iii) Si  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$  no existe diremos que  $a$  es una *singularidad esencial*.

Como ejemplos puede considerar cualquier función definida, holomorfa y acotada en  $\Omega - \{a\}$ ,  $f(z) = \frac{1}{z-a}$ , y  $g(z) = e^{\frac{1}{z-a}}$ , respectivamente.

OBSERVACIÓN. (1) En el caso de un polo podemos encontrar un dominio en el que  $f(z) \neq 0$ , en el cual la transformación  $g(z) = \frac{1}{f(z)}$  esta definida y es holomorfa, la singularidad de  $g(z)$  es removible, y  $g(z)$  tiene una extensión holomorfa con  $g(a) = 0$ ; como  $g(z)$  no es idénticamente nula, el cero en  $a$  tiene orden finito, y podemos escribir a  $g(z) = (z - a)^h g_h(z)$  con  $g_h(a) \neq 0$ , el número  $h$  es llamado el orden del polo.

DEFINICIÓN. Sea  $\Omega$  un dominio y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una transformación holomorfa en  $\Omega$  excepto en los polos se dice *meromorfa*.

OBSERVACIÓN. (2) La noción de singularidad aislada es aplicable también a transformaciones holomorfas en una vecindad  $|z| > R$  de  $\infty$ . Debido a que  $f(\infty)$  no esta definido, podemos considerar a  $\infty$  como una singularidad aislada, y por acuerdo tendrá el mismo carácter de singularidad removible, polo, o singularidad esencial de  $g(z) = f(1/z)$  en  $z = 0$ .

De manera similar a la observación anterior dada  $f$  una transformación definida y holomorfa es una vecindad de  $\infty$ , es holomorfa en  $\infty$ , si la transformación  $g$  definida en una vecindad del cero por  $g(z) = f(1/z)$  es holomorfa en cero.

La elección  $1/z$  no es arbitraria. Por una parte, es una elección natural de cartas coordenadas para proveer de estructura de superficie de Riemann a la esfera  $\mathbb{S}^2$ , por otra parte, la acción de  $z \mapsto 1/z$  en  $\mathbb{S}^2$  está dada por la rotación  $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, -x_2, -x_3)$ ; un hecho fácil de observar es que el polo norte y el polo sur se intercambian bajo ésta transformación, por tanto lo mismo sucede con  $0$  e  $\infty$ .

Otra herramienta útil para nuestro estudio son las series de potencias ya que una consecuencia de la fórmula integral de Cauchy es que una función holomorfa admitirá una representación de éste tipo. Para formalizar empezamos con:

DEFINICIÓN. Una *serie de potencias* es una serie que tiene la siguiente forma

$$(1.1.1) \quad a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots a_nz^n + \cdots$$

donde los coeficientes  $a_n$  y la variable  $z$  son números complejos. Más generalmente consideraremos las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

las cuales son series de potencias con respecto al centro  $z_0$ .

TEOREMA 1.1.1. (*de Abel*) Para toda serie de potencias de la forma (1.1.1) existe un número  $R$ ,  $0 \leq R \leq \infty$ , llamado el radio de convergencia, con las siguientes propiedades:

- (i) La serie converge absolutamente para toda  $z$  con  $|z| < R$ . Si  $0 \leq \rho < R$  entonces la convergencia es uniforme para  $|z| \leq \rho$ .
- (ii) Si  $|z| > R$  los términos de la serie no son acotados, y por consecuencia la serie es divergente.
- (iii) En  $|z| < R$  la suma de la serie es una función analítica. La derivada puede ser obtenida por diferenciación término a término, y la serie derivada tiene el mismo radio de convergencia.

Para una demostración de éste hecho y del siguiente se puede consultar [Ah1].

El teorema que sigue será utilizado para entender la dinámica a nivel local.

TEOREMA 1.1.2. Si  $f$  es una transformación holomorfa en un dominio  $\Omega$ , el cual contiene a  $z_0$ , entonces podemos escribir

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \cdots$$

en el disco abierto más grande de centro  $z_0$  contenido en  $\Omega$ .

Uno de los teoremas más importantes del análisis complejo y de gran utilidad en dinámica holomorfa es el teorema de la transformación de Riemann para enunciarlo se introduce el siguiente concepto

DEFINICIÓN. Un dominio  $\Omega$  es simplemente conexo si su complemento respecto al plano extendido es conexo. Intuitivamente se dice que éstos conjuntos no tienen huecos.

Como un ejemplo de dominio simplemente conexo se puede considerar al disco abierto unitario  $\mathbb{D}$ . Dado  $r > 1$  definimos el anillo  $\mathcal{A}_r = \{z \in \mathbb{C} | 1 < |z| < r\}$  en éste caso nuestro conjunto no es simplemente conexo.

Un dominio que no es simplemente conexo es llamado múltiplemente conexo, más precisamente se dice que  $\Omega$  un dominio tiene conexidad finita  $n$  si su complemento tienen exactamente  $n$  componentes e infinitamente conexo si su complemento tiene una cantidad infinita de componentes. En nuestro ejemplo  $\mathcal{A}_r$  es doblemente conexo.

Usando la definición anterior como pretexto hagamos un paréntesis y presentemos algunos resultados de topología aunque los enunciamos sin prueba, el lector puede consultar [New] como referencia para éstas.

**TEOREMA 1.1.3.** *Las siguientes son válidas en el plano complejo extendido o esfera de Riemann*

- (i) *La clausura de un conjunto conexo es conexa.*
- (ii) *Un conjunto compacto  $K$  en la esfera es desconexo si y sólo si existe una curva de Jordan  $\gamma$ , es decir una curva cerrada simple, que separe a  $K$  (esto es,  $K$  es disjunto de  $\gamma$  e intersecta ambas componentes del complemento de  $\gamma$ ).*
- (iii) *Un dominio  $D$  es simplemente conexo si y sólo si su complemento es conexo.*
- (iv) *Un dominio  $D$  es simplemente conexo si y sólo si  $\partial D$  es conexa.*
- (v) *Dado  $D$  un conjunto abierto. Entonces  $\overline{\mathbb{C}} - D$  es conexo si y sólo si cada componente de  $D$  es simplemente conexa.*

**DEFINICIÓN.** Dada una transformación holomorfa definida en un dominio  $\Omega$ , en los puntos del dominio donde la derivada de la transformación no se anula, es decir  $f'(z) \neq 0$ , diremos que  $f$  es *conforme*. Dicho de otro modo la transformación  $f$  es conforme si preserva ángulos entre curvas.

Las transformaciones lineales son un ejemplo de transformaciones conformes. La transformación  $f(z) = z^2$  no lo es, si se considera como su dominio a todo el plano complejo. Un teorema que utilizaremos regularmente será el principio del máximo, que es consecuencia del siguiente teorema del cual no presentamos la prueba, una vez más remítase el interesado a [Ah1].

**TEOREMA 1.1.4.** *Sea  $\Omega$  un dominio y  $f$  transformación holomorfa no constante en  $\Omega$ . Entonces para todo subconjunto  $A$  abierto de  $\Omega$ ,  $f(A)$  es abierto.*

En vista de éste teorema podemos demostrar:

**TEOREMA 1.1.5. (principio del máximo primera versión).** *Sea  $f$  una transformación holomorfa en un dominio  $\Omega$  y a un punto  $a$  en  $\Omega$ , tal que  $|f(a)| \geq |f(z)|$  para toda  $z$  en  $\Omega$ , entonces  $f$  debe ser una función constante.*

**DEMOSTRACIÓN:** Sea  $G = f(\Omega)$  y  $\alpha = f(a)$  por hipótesis  $|\alpha| \geq |\epsilon|$  para cada  $\epsilon$  en  $G$ , entonces  $\alpha \in \partial G \cap G$ . En particular, el conjunto no puede ser abierto ya que si lo fuera  $\partial G \cap G = \emptyset$ , entonces por el teorema 1.1.4 tenemos que  $f$  debe ser constante  $\square$ .

La siguiente versión del teorema es la que ocuparemos usualmente.

**TEOREMA 1.1.6. (principio del máximo segunda versión).** *Sea  $f$  una transformación definida y continua en un conjunto cerrado y acotado  $\Omega$ , y  $f$  holomorfa en el interior  $\Omega$ , entonces el máximo de  $|f(z)|$  en  $\Omega$  es alcanzado en la frontera de  $\Omega$ .*

DEMOSTRACIÓN: Como  $\Omega$  es acotado, también compacto así que existe un punto  $a \in \Omega$  tal que  $|f(a)| \geq |f(z)|$  para todo  $z \in \Omega$ . Si  $f$  es una transformación constante el resultado es inmediato. Si  $f$  no es constante el resultado se sigue del teorema anterior  $\square$ .

Un automorfismo de un dominio  $\Omega$  es una transformación conforme, inyectiva de  $\Omega$  en si mismo.

LEMA 1.1.7. (*de Schwarz*). Sea  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  una transformación holomorfa con  $f(0) = 0$ , entonces la derivada en el origen cumple  $|f'(0)| \leq 1$ . Si se tiene la igualdad, entonces  $f$  es una rotación sobre el origen, es decir  $f(z) = \lambda z$  para alguna constante  $\lambda = f'(0)$  sobre la circunferencia unitaria  $\mathbb{S}^1$ . En particular se tiene que  $f$  es un automorfismo de  $\mathbb{D}$ . De otro modo, si  $|f'(0)| < 1$ , entonces  $|f(z)| < |z|$  para toda  $z \neq 0$ , y  $f$  no es un automorfismo conforme.

DEMOSTRACIÓN: Definamos la transformación  $g(z) = f(z)/z$  para  $z \neq 0$  y  $g(0) = f'(0)$ , la cual es holomorfa en  $\mathbb{D}$ . En la circunferencia  $|z| = r < 1$  tenemos que  $|g(z)| \leq 1/r$ , y usando el principio del máximo tenemos que  $|g(z)| \leq 1/r$  para todo  $z$  en el disco  $|z| \leq r$ . Tomando el límite cuando  $r \rightarrow 1$  tenemos que  $|g(z)| \leq 1$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ , de aquí se desprende que  $|f(z)| \leq |z|$  para  $z \neq 0$  y que  $|f'(0)| \leq 1$ . Si se cumple la igualdad significa que  $|g(z)|$  alcanza su máximo y por tanto  $g$  debe ser una constante debido al principio del máximo. Excluyendo el caso anterior  $|g(z)| < 1$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ , y por tanto  $|f(z)| < |z|$  para  $z \neq 0$   $\square$ .

TEOREMA 1.1.8. (*de Liouville*) Sea  $f$  una transformación acotada, definida y holomorfa en todo  $\mathbb{C}$ . Entonces  $f$  debe ser constante.

DEMOSTRACIÓN: Como  $f(0) = a$ , definamos

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-a}{z} & \text{para } z \neq 0 \\ f'(z) & \text{para } z = 0 \end{cases}$$

entonces  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa. Ahora ya que  $|f(z)| \leq M$  para toda  $z$ , entonces  $|g(z)| \leq \frac{M+|a|}{R}$  para la circunferencia  $|z| = R$ , entonces por el principio del máximo tenemos que  $|g(z)| \leq \frac{M+|a|}{R}$  en el disco  $|z| \leq R$ , y tomando el límite cuando  $R \rightarrow \infty$  obtenemos que  $g$  es la transformación nula y por tanto  $f$  es la transformación constante  $a$   $\square$ .

El siguiente teorema por anunciar nos asegura que todo dominio simplemente conexo en el plano complejo puede ser transformado conformemente sobre el disco unitario, por tanto el resultado nos permite decir que dados dos de tales dominios, uno de ellos puede ser transformado conformemente en el otro. La demostración puede consultarse en [Ah1].

TEOREMA 1.1.9. (*Transformación de Riemann*). Dado cualquier dominio simplemente conexo  $\Omega$  diferente del plano completo, y un punto  $z_0 \in \Omega$ , existe una única función analítica  $f(z)$  en  $\Omega$ , normalizada por las condiciones  $f(z_0) = 0$ ,  $f'(z_0) > 0$ , tal que  $f(z)$  define una transformación uno a uno de  $\Omega$  sobre el disco  $|w| < 1$ .

La siguiente idea fue introducida por Riemann en su tesis doctoral para estudiar a las transformaciones multi-valuadas tales como el logaritmo y las raíces  $n$ -ésimas.

DEFINICIÓN. Entenderemos por una *superficie de Riemann* a un espacio conexo Hausdorff  $S$  junto con una colección de cartas  $\{U_\alpha, z_\alpha\}$  con las siguientes propiedades:

- (i) Los  $U_\alpha$  forman una cubierta abierta de  $S$ ;
- (ii) Cada  $z_\alpha$  es una transformación homeomorfa de  $U_\alpha$  sobre un conjunto abierto del plano complejo  $\mathbb{C}$ , a éstas transformaciones las llamaremos cartas locales;
- (iii) Si  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , entonces la transformación de transición  $z_{\alpha\beta} := z_\beta \circ z_\alpha^{-1}$  es holomorfa en  $z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ .

EJEMPLO. Un ejemplo de superficie de Riemann como ya lo habíamos adelantado antes es el plano extendido, el cual identificamos con la esfera unitaria, para tomemos la siguientes dos partes de la esfera  $U_1 := \mathbb{S}^2 - \{e_3\}$  y  $U_2 := \mathbb{S}^2 - \{-e_3\}$ , es decir, por una parte la esfera sin el polo norte y por la otra sin el polo sur, definamos nuestras cartas locales como

$$z_1 = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}, \quad z_2 = \frac{x_1 - ix_2}{1 - x_3}$$

como en  $U_1 \cap U_2$  tenemos que  $z_1 z_2 = 1$ , entonces la transformación de transición en  $\mathbb{C} - \{0\}$  es  $z \mapsto \frac{1}{z}$ , la cual es holomorfa y por tanto la esfera unitaria es una superficie de Riemann.

OBSERVACIÓN. Todo dominio contenido en una superficie de Riemann es una superficie de Riemann. Por tanto todo dominio de la esfera de Riemann es una superficie de Riemann, en particular el plano complejo y el disco unitario.

DEFINICIÓN. Una transformación continua  $f : S \rightarrow S'$  donde  $S$  y  $S'$  son superficies de Riemann es *holomorfa* si toda transformación  $h_2 \circ f \circ h_1^{-1}$  con  $h_1 \in z_\alpha$  y  $h_2 \in z_{\alpha'}$  es holomorfa en su dominio de definición, si además  $f$  es inyectiva, la llamaremos *transformación conforme* y en éste caso diremos que  $S$  y  $S'$  son conformemente equivalentes, en símbolos  $S \cong S'$ .

Un hecho conocido que  $\mathbb{D}, \mathbb{C}$  y  $\bar{\mathbb{C}}$  no son conformemente equivalentes dos a dos.

DEFINICIÓN. Dadas  $S, S'$  superficies de Riemann definimos:

- (i) Diremos que una transformación  $f : S \rightarrow S'$  es *propia* si la imagen inversa de  $f^{-1}(K)$  de cualquier subconjunto compacto  $K$  de  $S'$  es un subconjunto compacto de  $S$ , éste tipo de transformaciones son *d-a-uno* con  $d \geq 1$ , el número  $d$  es llamado el grado de la transformación.
- (ii) La transformación holomorfa  $f : S \rightarrow S'$  es llamada *cubriente* si cada punto de  $S$  tiene una vecindad conexa  $U$  la cual es suavemente cubierta, es decir cada componente conexa de  $f^{-1}(U)$  es transformada conformemente sobre  $U$ .
- (iii) La transformación holomorfa  $f : S \rightarrow S'$  es llamada *cubriente ramificado* si cada punto de  $S$  tiene una vecindad conexa  $U$  tal que cada componente conexa de  $f^{-1}(U)$  es sobre  $U$  mediante una transformación propia.

Las transformaciones racionales que definiremos más adelante son ejemplos de cubrientes ramificados de  $d$  hojas de la esfera de Riemann, donde  $d$  es el grado de la transformación.

Ahora para no alargar más éste material omitiremos el concepto de homotopía, y al hacerlo por consecuencia también se omiten los conceptos de *grupo fundamental*, *simplemente conexo para superficies de Riemann*, *superficie cubriente universal* y *proyección canónica*, así mismo omitiremos algunas pruebas presentadas, pero el lector puede consultar [Ah2], [AhS] como referencia.

Dada  $S$  una superficie de Riemann, entonces su superficie cubriente universal  $S^\infty$  es una superficie de Riemann simplemente conexa bien definida, con una proyección canónica  $p : S^\infty \rightarrow S$  también llamada transformación cubriente universal.

El siguiente teorema afirma que existen sólo tres diferentes superficies de Riemann simplemente conexas salvo equivalencia conforme.

**TEOREMA 1.1.10. (*uniformización de superficies de Riemann*).** *Toda superficie de Riemann simplemente conexa es conformemente equivalente a una y sólo una de las siguientes superficies*

- (1) al plano complejo  $\mathbb{C}$ ,
- (2) al disco abierto unitario  $\mathbb{D}$ , ó bien
- (3) a la esfera de Riemann  $\bar{\mathbb{C}}$

De acuerdo con el teorema de uniformización, el cubriente universal  $S^\infty$  debido a que es simplemente conexo, debe ser conformemente equivalente a uno y sólo uno de nuestros modelos, es decir  $\mathbb{D}$ ,  $\mathbb{C}$  ó  $\bar{\mathbb{C}}$ . Las métricas correspondientes son:

- (1) La métrica Riemanianna  $2|dz|/(1-|z|^2)$ ;
- (2) La métrica Euclideana;
- (3) La métrica esférica.

**TEOREMA 1.1.11.** *Si denotamos por  $Aut(S)$  al conjunto de los automorfismos de  $S$  entonces tenemos*

(i) *Los elementos de  $Aut(\mathbb{D})$  son las transformaciones de Möbius de la forma*

$$z \mapsto e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

*con  $|e^{i\theta}| = 1$ , donde  $a$  es el cero de la transformación.*

(ii) *Los elementos de  $Aut(\mathbb{C})$  son las transformaciones de la forma*

$$z \mapsto az + b$$

*con  $a \neq 0$ .*

(ii) *Los elementos de  $Aut(\bar{\mathbb{C}})$  son las transformaciones de Möbius*

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

*con  $ad - bc \neq 0$ .*

El siguiente teorema aclarará la importancia del anterior.

**TEOREMA 1.1.12.** *Toda superficie de Riemann  $S$  es conformemente equivalente al cociente de la forma  $S^\infty/\Gamma$ . Donde  $S^\infty$  es su superficie cubriente universal, y  $\Gamma$  es un grupo discreto de automorfismos de  $S^\infty$ , cuyos elementos distintos de la identidad actúan sin fijar puntos en  $S^\infty$ , este grupo que puede ser identificado con el grupo fundamental de  $S$ , sus elementos pueden ser caracterizados como transformaciones  $\gamma : S^\infty \rightarrow S^\infty$  que satisfacen  $\gamma = p \circ \gamma$ , es decir el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} S^\infty & \xrightarrow{\gamma} & S^\infty \\ \downarrow P & & \downarrow P \\ S & \xrightarrow{Id} & S \end{array} .$$

Para el caso donde  $S^\infty \cong \bar{\mathbb{C}}$ , como los automorfismos de la esfera de Riemann tienen al menos un punto fijo, entonces el grupo de transformaciones  $\Gamma$  debe ser trivial y como  $S \cong S^\infty/\Gamma$ , entonces  $S \cong \bar{\mathbb{C}}$ .

Si ahora  $S^\infty \cong \mathbb{C}$ , los automorfismos del plano complejo son las transformaciones del tipo  $z \mapsto az + b$  con  $a \neq 0$ , si  $a \neq 1$  entonces éstas transformaciones fijan un punto, por tanto  $\Gamma$  debe ser un grupo discreto de traslaciones  $z \mapsto z + b$  del plano complejo y se tienen tres escenarios:

- Si  $\Gamma$  es trivial entonces  $S \cong \mathbb{C}$ ;
- Si  $\Gamma$  tiene solo un generador entonces  $S$  es isomorfo al cilindro  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  el cual es isomorfo mediante la transformación exponencial al plano perforado  $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ;
- Si  $\Gamma$  tiene dos generadores entonces  $\Gamma$  puede ser descrito como el grupo aditivo generado por dos números complejos linealmente independientes es decir una lattice  $\Lambda \subset \mathbb{C}$ , y por tanto  $S \cong T$ , donde  $T = \mathbb{C}/\Lambda$  es llamado un toro.

Las demás superficies de Riemann  $S$  deben cumplir que  $S^\infty \cong \mathbb{D}$ , por ejemplo cualquier superficie con grupo fundamental no abeliano es de éste tipo, de hecho toda superficie hiperbólica con grupo fundamental abeliano es conformemente equivalente al disco unitario  $\mathbb{D}$ , al disco perforado  $\mathbb{D}^* := \mathbb{D} \setminus \{0\}$ , o al anillo  $\mathcal{A}_r := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < r\}$  para un único  $r > 1$ .

Los tres casos descritos arriba se nombran como elíptico, parabólico e hiperbólico respectivamente. Demos un ejemplo con doble función la de ilustrar lo dicho anteriormente y el de continuar con un teorema relacionado.

**EJEMPLO 1.1.13. (*maximal Hiperbólico*).** Si  $a_1, a_2, a_3$  son tres puntos distintos de  $\bar{\mathbb{C}}$ , entonces el complemento  $\sum_3 = \bar{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, a_2, a_3\} \cong \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  llamado la esfera tres veces perforada, es una superficie hiperbólica.

Para ver que  $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, a_2, a_3\} \cong \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ , hay que observar primero que  $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, a_2, a_3\} \cong \bar{\mathbb{C}} \setminus \{1, 0, \infty\}$  debido a que la transformación

$$S(z) = \frac{z - a_2}{z - a_3} \cdot \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_3}$$

es conforme, si  $a_1, a_2$  ó  $a_3 = \infty$  entonces la transformación se reduce respectivamente a

$$\frac{z - a_2}{z - a_3}, \quad \frac{a_1 - a_3}{z - a_3}, \quad \frac{z - a_2}{a_1 - a_2}$$

y luego  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{1, 0, \infty\} \cong \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  debido a que la proyección estereográfica es conforme. Como la equivalencia conforme es una relación de equivalencia entonces tenemos lo buscado. El hecho de que sea una superficie hiperbólica se obtiene ya que su grupo fundamental no es abeliano.

**TEOREMA 1.1.14.** *Sea  $f : R \rightarrow S$  una transformación cubriente entre dos superficies de Riemann entonces:*

(i) *(propiedad de levantamiento único de trayectorias)*

*Dada  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$  una curva cerrada, entonces si  $f(p) = \gamma(0)$  existe una única curva  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow R$ , tal que,  $\tilde{\gamma}(0) = p$  y  $f \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ ;*

(ii) *(propiedad de Levantamiento de funciones)*

*Si  $g : S^\infty \rightarrow S$  es una transformación cubriente universal y tenemos que se satisface  $f(x) = g(y)$  para  $x \in S$ ,  $y \in R$ , existe una única transformación  $h : S^\infty \rightarrow R$  tal que  $h(z) = x$  y  $f \circ h = g$ . Si  $f$  es holomorfa entonces  $h$  es holomorfa.*

(iii) *(Monodromia)*

*Si  $S$  es simplemente conexa entonces  $f$  es homeomorfismo.*

(iv) *(Monodromia para funciones multivaluadas)*

*Sea  $M$  una superficie de Riemann simplemente conexa, sea  $f : U \subset M \rightarrow M$  si  $f$  se extiende sobre caminos en cualquier camino de  $M$ , entonces  $f$  admite una extensión  $\hat{f} : U \subset M \rightarrow M$  holomorfa y univaluada.*

Con ésto podemos demostrar el siguiente teorema.

**TEOREMA 1.1.15. (de Picard).** *Cualquier transformación holomorfa de  $\mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  que omita tres valores diferentes debe ser constante. Más generalmente, si  $S$  es una superficie de Riemann y existe  $f$  holomorfa no constante de  $S$  a la esfera tres veces perforada  $\Sigma_3$ , entonces  $S$  debe ser hiperbólica.*

**DEMOSTRACIÓN:** La transformación  $f : S \rightarrow \Sigma_3$  puede ser levantada a una transformación holomorfa del cubriente universal  $S^\infty$  hacia el cubriente universal de  $\Sigma_3 \cong \mathbb{D}$ . Por el teorema de Liouville se sigue que  $S^\infty \cong \mathbb{D}$ . El siguiente concepto nos permitirá caracterizar más adelante a nuestros conjuntos con rol predominante en nuestra teoría.

**DEFINICIÓN.** Sea  $S$  y  $S'$  superficies de Riemann, con  $S'$  compacto. Una familia  $\mathcal{F}$  de transformaciones holomorfas  $f_\alpha : S \rightarrow S'$  es normal si toda sucesión infinita de transformaciones de  $\mathcal{F}$  contiene una subsucesión la cual converge uniformemente localmente a un límite.

Si consideramos que  $S'$  no es compacto, la definición sería modificada como sigue. Continuemos asumiendo que  $S$  es conexo. Una familia  $\mathcal{F}$  de transformaciones holomorfas  $f_\alpha : S \rightarrow S'$  es normal si toda sucesión infinita de transformaciones de  $\mathcal{F}$  contiene una subsucesión la cual

- (1) converge uniformemente localmente a una transformación holomorfa de  $S \rightarrow S'$ , o bien
- (2) diverge uniformemente localmente a infinito, en el sentido de que las imágenes sucesivas de cualquier subconjunto compacto de  $S$  eventualmente omiten cualquier subconjunto compacto de  $S'$ .

OBSERVACIÓN. En la definición anterior entenderemos que una superficie de Riemann es *compacta* si es un espacio compacto en el sentido usual, algunas superficies pueden ser compactas añadiendo un punto, un ejemplo de ésto es lo que sucede con el plano complejo y la esfera de Riemann, donde la última es una superficie compacta, otro ejemplo de superficie compacta es el toro.

EJEMPLO 1.1.16.

(i) Sea  $f(z) = az$  con  $|a| < 1$  y sea  $f_n(z) = f^n(z)$ . Entonces  $\{f_n\}$  forma una familia normal de transformaciones sobre cualquier dominio en  $\mathbb{C}$ , debido a que  $f_n$  converge uniformemente a la transformación constante 0 en subconjuntos compactos.

(ii) Consideremos ahora  $f(z) = az$  con  $|a| > 1$  y nuevamente  $f_n(z) = f^n(z)$ . Entonces  $\{f_n\}$  forma una familia normal en cualquier dominio que no contenga al cero, pero no lo hace, en cualquier dominio que incluya dicho punto.

(iii) Dada  $f_n(z) = z^n$  con  $n$  un entero no negativo,  $\{f_n\}$  forma una familia normal en el disco abierto unitario y también en el complemento del disco cerrado unitario, pero no en cualquier dominio que contenga un punto de la circunferencia unitaria.

Al hablar en la parte de arriba de convergencia, obviamente esta implícita una métrica, y es más nuestra convergencia debe ser uniforme y en compactos, de esta manera debemos continuar con una métrica que abarque nuestras necesidades.

DEFINICIÓN. Sea  $\Omega$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y  $\mathcal{F}$  una familia de funciones definidas en  $\Omega$ , tomemos  $\{E_k\}$  una sucesión decreciente de conjuntos compactos, tal que cada compacto  $E$  de  $\Omega$  este contenido en algún  $E_k$ , consideremos la métrica  $\delta$  en  $\mathbb{C}$  definida por

$$\delta(a, b) = \frac{|a - b|}{1 + |a - b|}$$

definimos

$$\delta_k(f, g) = \sup_{z \in E_k} \delta(f(z), g(z))$$

que es una métrica para  $\mathcal{F}$  restringida a  $E_k$ . En consecuencia,

$$\rho(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k(f, g)}{2^k}$$

es una métrica para  $\mathcal{F}$  en  $\Omega$ , respecto a la cual, la convergencia significa convergencia uniforme en compactos de  $\Omega$ .

Aún con esto sería difícil relacionar el concepto de normalidad con la dinámica, y por eso ahora nuestro objetivo es llegar al teorema de Montel. Para esto veamos a nuestra familia de funciones equipadas con la métrica definida antes como un espacio métrico y apliquemos el siguiente teorema:

TEOREMA 1.1.17. (**de Bolzano-Weierstrass**). *Un espacio métrico es compacto si y solo si cada sucesión infinita tiene una subsucesión convergente.*

En nuestro caso tenemos que  $(\mathcal{F}, \rho)$  es compacto si y solo si  $\mathcal{F}$  es normal, y si además las funciones límite pertenecen a  $\mathcal{F}$ . Observemos además que si  $\mathcal{F}$  es normal, también lo es su cerradura  $\overline{\mathcal{F}}$ . Y así obtenemos:

**TEOREMA 1.1.18.** *Una familia  $\mathcal{F}$  es normal si y sólo si  $(\overline{\mathcal{F}}, \rho)$  es compacto.*

La caracterización anterior se puede simplificar si recordamos que un conjunto es compacto si y solo si este es completo y totalmente acotado, de este modo en nuestro caso solo tenemos que cubrir la segunda condición, dada por:

**DEFINICIÓN.** Un conjunto  $A$  es totalmente acotado si, para cada  $\epsilon > 0$ ,  $A$  puede ser cubierto por una cantidad finita de bolas de radio  $\epsilon$ .

De esta manera tenemos:

**TEOREMA 1.1.19.**  *$(\overline{\mathcal{F}}, \rho)$  es normal si y solo si ésta es totalmente acotada.*

Ahora observar cuando una familia es totalmente acotada es más fácil con ayuda del siguiente teorema.

**TEOREMA 1.1.20.** *La familia  $\mathcal{F}$  es totalmente acotada si y solo si para cada compacto  $E \subset \Omega$  y para cada  $\epsilon > 0$ , es posible encontrar  $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$  tales que para cada  $f \in \mathcal{F}$  se satisface  $|f(z) - f_j(z)| < \epsilon$  para cada  $z \in E$  y para alguna  $j = 1, \dots, n$ .*

El cual parece evocar la definición de equicontinuidad.

**DEFINICIÓN.** Las funciones en una familia  $\mathcal{F}$  se les llama equicontinuas en un conjunto  $E \subset \Omega$  si y solamente si, para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$  si  $|z - z_0| < \delta$  con  $z, z_0 \in E$ , simultáneamente para toda función  $f \in \mathcal{F}$ .

Y bueno como esperábamos el concepto de familias normales esta relacionado con la equicontinuidad, el siguiente teorema nos dice cual es esta relación.

**TEOREMA 1.1.21. (de Arzela-Ascoli).** *Una familia  $\mathcal{F}$  de funciones continuas es normal en un dominio  $\Omega$  si y solo si*

- (i)  $\mathcal{F}$  es equicontinua en cada compacto de  $\Omega$
- (ii) Para cada  $f \in \mathcal{F}$ , la cerradura de  $f(\Omega)$  es un compacto de  $\mathbb{C}$ .

Bueno y como nosotros nos enfocamos en el estudio de funciones analíticas tenemos que:

**TEOREMA 1.1.22.** *Una familia  $\mathcal{F}$  de funciones analíticas es normal, si y solo si está es localmente acotada.*

Además esta propiedad vale también para las derivadas de la función.

**TEOREMA 1.1.23.** *Una familia de funciones analíticas localmente acotada, tiene derivadas localmente acotadas.*

**OBSERVACIÓN.** Notemos que si  $\mathcal{F}$  es una familia de funciones meromorfas, entonces considerando la métrica esférica  $\frac{2|dz|}{1+|z|^2}$ , la condición (ii) se vuelve innecesaria. En este caso podemos permitir que  $f_n \rightarrow \infty$ , y de esta manera consideraremos a  $f \equiv \infty$  una función meromorfa.

El siguiente teorema lo pudimos haber enunciado, sin más preámbulo, pero la discusión anterior nos pone en sintonía de la utilidad del resultado, para los detalles el lector puede consultar una vez más [Ah1], éste teorema fue la herramienta clave para los trabajos de Fatou y de Julia.

**TEOREMA 1.1.24. (de Montel).** *Sea  $S$  cualquier superficie de Riemann. Si  $\mathcal{F}$  es una familia de funciones holomorfas de  $S$  a  $\overline{\mathbb{C}}$ , la cual tiene valores en algún subconjunto abierto hiperbólico  $U \subset \overline{\mathbb{C}}$ , o equivalentemente si existen tres puntos distintos de  $\overline{\mathbb{C}}$  los cuales se omiten como valores, entonces  $\mathcal{F}$  es normal.*

**DEMOSTRACIÓN:** Por el teorema de Picard la superficie  $S$  debe ser hiperbólica, a menos que todas nuestras transformaciones sean constantes. Podemos asumir que  $S$  es un disco, y, por composición con una transformación de Möbius, podemos asumir que las funciones en  $\mathcal{F}$  omiten los valores  $0, 1, \infty$ . Sea  $R = \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\}$  entonces existe una transformación cubriente  $\psi : \mathbb{D} \rightarrow R$ . Ahora consideramos  $\tilde{f} : S \rightarrow \mathbb{D}$  un levantamiento de  $f \in \mathcal{F}$ , tal que  $\tilde{f} \circ \psi = f$ . Entonces  $\tilde{f} : f \in \mathcal{F}$  es una familia normal debido a la acotación, y de este modo  $\mathcal{F}$  es una familia normal  $\square$ .

Por último una definición y un teorema:

**DEFINICIÓN.** Sea  $X$  un espacio topológico Hausdorff, decimos que  $X$  es *localmente conexo* en un punto  $x \in X$  si existe una vecindad arbitrariamente pequeña conexa de  $x$  en  $X$ .

Como ejemplo podemos decir que todos los espacios discretos  $X$  son localmente conexos. Aunque si  $X$  tiene más de dos punto no es conexo.

Dados los subconjuntos  $A = \{(0, y) | \frac{1}{2} \leq y \leq 1\}$  y  $B = \{(x, y) | 0 < x \leq 1, y = \text{sen}(1/x)\}$ , entonces  $A \cup B$  no es localmente conexo.

Bueno y este hecho puede ponerse en términos de la transformación de Riemann.

**TEOREMA 1.1.25. (de Carathéodory).** *Sea  $\Omega$  un dominio simplemente conexo en  $\overline{\mathbb{C}}$  cuya frontera tiene al menos dos puntos. Entonces  $\partial\Omega$  es localmente conexa si y sólo si la transformación de Riemann  $\psi : D \rightarrow \Omega$  se extiende continuamente al disco cerrado  $\overline{D}$ .*

## 1.2. Sistemas dinámicos discretos

Ésta sección esta dedicada a introducir la dinámica matemática; Regresando a las bases uno puede imaginar que cualquier fenómeno esta relacionado con dinámica, el crecimiento de una planta, el crecimiento de una población, el movimiento de los planetas, el clima o el estado emocional de alguna persona, estas situaciones parecen depender siempre de un estado anterior, y éste de un anterior y así hasta llegar al estado ¿inicial?, aunque la dinámica que hemos descrito aquí pareciera lejana a la dinámica en nuestro estudio, no hay que olvidar que la segunda surge como un intento de entender a la primera, ésta es una propiedad humanitaria y por consecuencia bella de nuestra teoría. Pues bien esperamos además que la discusión anterior vuelva a obviar la gran cantidad de matemáticas y de otras ciencias relacionadas a nuestro estudio.

Comencemos por decir que entenderemos por un sistema dinámico matemático.

DEFINICIÓN 1.2.1. Sean  $X$  un espacio topológico y  $f : X \rightarrow X$  una transformación continua, al par  $(X, f)$  se le llama sistema dinámico discreto generado por  $f$ , y a la composición  $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$  ( $n$ -veces) se la llama la  $n$ -ésima iterada de  $f$ . En particular si  $f$  es holomorfa diremos que es un sistema dinámico holomorfo discreto.

Nuestro interés radica en el comportamiento de las diferentes órbitas del sistema. Para aclarar lo anterior demos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.2.2. Dado  $(X, f)$  un sistema dinámico discreto, definimos

- (1) La órbita hacia adelante de  $z$  a través de  $f$  como  $\{f^n(z) | n \in \mathbb{N} \cup 0\}$  denotado por  $\mathcal{O}^+(z)$ .
- (2) Si  $f$  es un homeomorfismo, podemos definir la órbita completa de  $z$  como  $\mathcal{O}(z) = \{f^n(z) | n \in \mathbb{N} \cup 0\} \cup \{w \in X | f^m(w) = z \text{ para algún } m \in \mathbb{N}\}$
- (3) La órbita hacia atrás de  $z$  a través de  $f$  como  $\mathcal{O}^-(z) = \{w \in X | f^m(w) = z \text{ para algún } m \in \mathbb{N}\}$ , y
- (4) La órbita grande de  $z$  a través de  $f$  como  $\mathcal{GO}(z) = \{w \in X | f^n(w) = f^m(z) \text{ para algunos } n, m \in \mathbb{N}\}$ .

El ejemplo más sencillo aparece al considerar las funciones racionales de grado uno, más adelante definiremos lo que se entiende por una función racional, en particular demos el ejemplo para transformaciones de Möbius.

EJEMPLO 1.2.3. Transformaciones de Möbius

Una transformación de Möbius es una función racional de la forma

$$R(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

con la convención usual de que  $R(\infty) = a/c$ , y  $R(-d/c) = \infty$ , si  $c \neq 0$ , y  $R(\infty) = \infty$  cuando  $c = 0$ .

Y bueno para analizar la dinámica de estas transformaciones podemos observar algunos casos particulares.

Consideremos primero la función  $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $L(z) = \lambda z$ , donde  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Los puntos fijos de esta función son los  $z \in \mathbb{C}$ , tales que  $L(z) = z$ , así que si tomamos a  $\lambda \neq 0, 1$ , el único punto de fijo de  $L$  es  $z = 0$ . Si  $\lambda = 1$ , entonces  $L$  fija todo elemento de  $\mathbb{C}$ . Para  $z \neq 0$ , la órbita de  $z$  se puede calcular de la siguiente manera:

$$\mathcal{O}^+(z_0) = \{z_0 := z, z_1 = \lambda L(z_0), z_2 = L(z_1), \dots\}$$

por lo cual  $L^n(z_0) = \lambda^n z_0$  y  $\mathcal{O}^+(z)$  consta de una sucesión que converge a 0 si  $|\lambda| < 1$ , ó bien de una sucesión que diverge a  $\infty$  si  $|\lambda| > 1$ .

Si  $|\lambda| = 1$ , tenemos dos casos, el primero es que el argumento  $\theta$  de  $\lambda$  sea racional y el otro es que sea irracional, para la primera posibilidad tenemos que  $\theta = \frac{p}{q}$  con  $p$  y  $q$  coprimos, de este modo  $\lambda^q = 1$  y  $L^q(z_0) = z_0$ , así que  $\mathcal{O}^+(z_0)$  consta de un conjunto con  $q$  puntos sobre la circunferencia de radio  $|z_0|$  para todo  $z_0 \in \mathbb{C}$ , éste conjunto se conoce como órbita periódica, ya que si tomamos cualquiera de

esos puntos y le aplicamos iteradamente la transformación  $L$  un número  $q$  de veces, entonces el resultado es que regresamos al punto de partida.

Por último si  $\theta$  es irracional, entonces  $\mathcal{O}^+(z_0)$  consta de un conjunto denso en la circunferencia  $|z|$  para todo  $z \neq 0$ . Para observar ésto lo primero que hay que resaltar es que no existen puntos periódicos, ya que si los hubiera entonces para algún  $n$  debe ocurrir que  $L^n(z_0) = z_0$ , y por tanto  $\lambda^n = 1$  y esto es una contradicción. Ahora dado  $\varepsilon > 0$  escojamos  $k > 2\pi|z_0|/\varepsilon$ , los puntos de la órbita hacia adelante  $z_0, z_1, \dots, z_k$  están en la circunferencia  $|z_0|$ , además como el perímetro de ésta es  $2\pi|z_0|$  y nosotros tenemos que  $2\pi|z_0|/k < \varepsilon$ , debemos tener a dos puntos a una distancia menor que  $\varepsilon$ , es decir que el arco entre  $z_i$  y  $z_j$  tiene longitud menor a  $\varepsilon$ , supongamos que  $i > j$ , reescribamos a  $\lambda = e^{2\pi i \rho}$  y consideremos la transformación  $L^{i-j}(z)$ , ésta función simplemente rota los puntos un ángulo de  $2\pi\rho(i-j)$ . Y además rota a los puntos una distancia menor que  $\varepsilon$ , ésto ya que

$$L^{i-j}(z_j) = L^{i-j}(L^j(z_0)) = L^i(z_0) = z_i.$$

Por tanto los puntos  $L^{i-j}(z_0), L^{2(i-j)}(z_0), \dots, L^{n(i-j)}(z_0), \dots$  están ordenados alrededor de la circunferencia todos a una distancia menor a  $\varepsilon$ , es decir son una partición de la circunferencia y por tanto la órbita de  $z_0$  esta en todos estos arcos y por lo tanto es densa en la circunferencia  $|z_0|$ , éste último resultado sobre densidad es conocido como el teorema de Jacobi.

Continuando para la función  $L: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  definida por  $L(z) = z + b$  donde  $b \in \mathbb{C}^* := \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$  y  $L(\infty) = \infty$ , tenemos que  $L^n(z) = z + nb$ , de los que obtenemos que para todo  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\mathcal{O}^+(z)$  consta de una sucesión que diverge a  $\infty$ .

Finalmente si  $L: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  es definida por  $L(z) = 1/z$ , con  $L(0) := \infty$  y  $L(\infty) := 0$ , tenemos que si  $z \neq 1, -1, z \in \overline{\mathbb{C}}$  entonces  $\mathcal{O}^+(z)$  es de periodo 2 y los casos excluidos son puntos fijos.

Podríamos pensar que aún hay muchos casos que analizar pero no es así ya que toda transformación de Möbius es una composición de los tres tipos anteriores, además aunque todavía no ponemos en juego la *conjugación*, el lector podrá comprobar después que toda transformación de Möbius con un único punto fijo puede conjugarse a una traslación  $z \mapsto z + b$  y una con dos puntos fijos a una homotecia o a una rotación ambas de la forma  $z \mapsto \lambda z$ , así es que podemos calcular  $\mathcal{O}_f^+(z)$ , para  $f$  cualquier transformación de Möbius y por consecuencia entender su dinámica..

Por la discusión anterior parece claro que los puntos fijos y los que forman una órbita periódica son importantes en nuestra teoría, en seguida damos la definición de éstos, de hecho después haremos notar su importancia cuando discutamos acerca de el comportamiento en una vecindad de éstos.

**DEFINICIÓN.** El punto  $z$  es un punto fijo de  $f$  si  $f(z) = z$ . Análogamente un punto  $z$  es un punto periódico de periodo  $n$  si  $f^n(z) = z$ , el menor entero positivo  $n$  tal que  $f^n(z) = z$  es llamado el periodo de  $z$ . En particular un punto fijo es un punto periódico de periodo  $n$ . El conjunto de todas las iteradas de un punto periódico forman una órbita periódica, digamos  $\{z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}$  donde  $z_i = f^i(z)$ .

Y como seguramente el lector habrá pensado la relación tiene que ver con la derivada, bueno entonces sigamos con otra definición.

DEFINICIÓN. Sea  $z_0$  un punto periódico de periodo  $n$ . Entonces para  $z_0 \neq \infty$  el número  $\lambda_{z_0} = (f^n)'(z_0)$  será llamado el *multiplicador* de la órbita periódica, en el caso  $z_0 = \infty$ , el multiplicador se define como  $\lambda_{z_0} = (A \circ f^n \circ A^{-1})'(0)$  donde estamos usando el cambio de coordenadas  $A(z) = \frac{1}{z}$ .

OBSERVACIÓN. Hay que notar que la regla de la cadena aplicada a nuestro caso nos muestra que  $\lambda_{z_0}$  no es más que el producto de las derivadas de  $f$  a través de la órbita y además no depende de la elección del punto en la órbita en el que se calcule la derivada.

De esta manera si  $z$  es cercano a  $z_i$ , entonces  $f^n(z) - z_i$  es aproximadamente  $\lambda(z - z_i)$ . Las preguntas y respuestas sobre éste hecho se trataran en el capítulo 2. Además naturalmente surgen otro tipo de puntos muy parecidos (o quizá no tanto) a los anteriores, aunque las órbitas de los siguientes están casi siempre ligadas a las de los primeros.

DEFINICIÓN. Un punto  $z$  es pre-periódico, si existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $f^m(x)$  es  $q$ -periódico. Observemos que un punto periódico es por definición también pre-periódico.

El paso natural es cuestionarnos acerca de la convergencia de las sucesiones de la forma  $\{z_0, z_1, \dots, z_n, \dots\} = \mathcal{O}_f^+(z_0)$  y cual sería la consecuencia de perturbar o modificar un “poco” a  $z_0$ .

Un hecho sencillo al respecto es que si para algún  $z_0$ , la sucesión  $\{z_n\}$  converge a  $w$  bajo  $f$ , entonces tenemos que:

$$w = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n) = f(w)$$

y por tanto  $w$  es un punto fijo de  $f$ , esto es si alguna sucesión del tipo mencionado arriba converge lo hará a un punto fijo.

Una herramienta útil para nuestro estudio sera el concepto de conjugación, pues de cierto modo si dos sistemas dinámicos son conjugados entonces se pueden ver como el mismo sistema solo que en un sistema de coordenadas diferentes, cabe resaltar que hay varios tipos de conjugación (esto sucede cuando cambiamos las características de nuestra función que conjuga ó las condiciones de nuestros sistemas conjugados) y algunos tipos de conjugación implican otros; para formalizar tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN. Sean  $(X, f)$  y  $(X, g)$  sistemas dinámicos discretos, diremos que  $(X, f)$  es conjugada a  $(X, g)$  (respectivamente semiconjugada) mediante  $h$ , donde  $h : X \rightarrow X$  es homeomorfismo (respectivamente sobreyectiva), si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ X & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

esto es,  $h \circ f(z) = g \circ h(z)$  para todo  $z \in X$ , lo cual equivale a  $g = h \circ f \circ h^{-1}$  si  $h$  es homeomorfismo.

Si por ejemplo en lugar de un homeomorfismo lo que tenemos es un biholomorfismo lo que tenemos es conjugación holomorfa. También existe la conjugación conforme, afín, y casi-conforme; Bueno por mencionar algunas, por cierto la de nuestra definición es conjugación topológica.

Y tal vez un ejemplo de conjugación pendiente es el de las transformaciones de Möbius mencionado antes:

EJEMPLO. El primer paso es observar que una transformación de Möbius distinta de la identidad fija a lo más dos puntos en  $\bar{\mathbb{C}}$ , esto debido a que

$$R(z) = \frac{az + b}{cz + d} = z \Leftrightarrow az + b = cz^2 + dz$$

tiene a lo más dos soluciones, si  $R$  fija a  $\infty$  entonces se puede escribir como

$$R(z) = \frac{az + b}{d}$$

y por consecuencia

$$\frac{az + b}{d} = z \Leftrightarrow az + b = dz$$

que tiene a lo más una solución, a las transformaciones de Möbius que fijan un único punto usualmente se les llama parabólicas.

Ahora hay que notar que si  $R$  y  $S$  son transformaciones de Möbius conjugadas entonces  $R$  fija a un punto  $w \in \bar{\mathbb{C}}$  si y sólo si  $S = \psi \circ R \circ \psi^{-1}$  fija a  $\psi(w)$ , la prueba es la siguiente:

$$R(w) = w \Leftrightarrow \psi \circ R(w) = \psi(w) \Leftrightarrow \psi \circ R \circ \psi^{-1}(\psi(w)) = \psi(w).$$

Aunque es claro que la suposición acerca de ser transformaciones de Möbius no fue usada en la prueba y ésta bien vale en el caso general.

Bueno y entonces ahora nuestro objetivo es hacer ver que dada  $R$  una transformación de Möbius entonces:

- (i) Si  $R$  es parabólica entonces es conjugada a una traslación; y
- (ii) Si  $R$  no es parabólica entonces es conjugada a una transformación de la forma  $z \mapsto \alpha z$ , con  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

En el primer caso tomemos supongamos que  $R$  fija a  $w$  y tomemos

$$\varphi(z) = \frac{1}{z - w}$$

esta transformación mueve el punto fijo a  $\infty$ , es decir  $\varphi(w) = \infty$ , y por tanto  $S$  fija a  $\infty$  y es decir es de la forma

$$S(z) = \alpha z + \beta$$

pero como  $S$  debe tener un único punto fijo entonces  $\alpha = 1$ , y tenemos  $S(z) = z + \beta$  como queríamos.

En el siguiente caso supongamos que  $R$  fija a  $w_1, w_2$  distintos y consideremos

$$\varphi(z) = \frac{z - w_1}{z - w_2}$$

en el caso en el que  $R$  fija a  $\infty$ , basta tomar  $\varphi(z) = z - w_1$ . De este modo  $S$  fija a  $0$  e  $\infty$  y por lo tanto es de la forma

$$S(z) = \alpha z$$

la cual es la forma esperada.

La definición de conjugación implica que las iteradas  $f^n$  y  $g^n$  son también conjugadas,  $g^n = h \circ f^n \circ h^{-1}$ , esto es claro ya que

$$g = h \circ f \circ h^{-1} \Rightarrow g^2 = h \circ f \circ (h^{-1} \circ h) \circ f \circ h^{-1} = h \circ f^2 \circ h^{-1} \Rightarrow g^n = h \circ f^n \circ h^{-1}.$$

Y como vimos en el ejemplo de hace un momento  $h$  transforma puntos fijos de  $f$  en puntos fijos de  $g$ , más aún los multiplicadores de los correspondientes puntos fijos son iguales, para ver esto notemos que como:

$$h \circ f = g \circ h$$

si suponemos que  $z_0$  es un punto fijo para  $f$  y derivando nuestra expresión de arriba en éste punto obtenemos.

$$(h \circ f)'(z_0) = (g \circ h)'(z_0) \Rightarrow h'(f(z_0)) \cdot f'(z_0) = g'(h(z_0)) \cdot h'(z_0)$$

usando el hecho de que  $z_0$  es punto fijo, tenemos

$$h'(z_0) \cdot f'(z_0) = g'(h(z_0)) \cdot h'(z_0)$$

por tanto

$$f'(z_0) = g'(h(z_0))$$

que es lo que buscábamos. Nuestras discusiones pueden ser extendidas cuando tratamos con órbitas periódicas.

En el capítulo 2 y 3 haremos notar la importancia de la conjugación para nuestra teoría.

### 1.3. Funciones racionales

Es evidente al menos de algún modo que nosotros hemos enfocado nuestros esfuerzos al estudio de transformaciones analíticas u holomorfas, pero particularmente nos servirá estudiar el caso de transformaciones racionales e incluso luego nuestra atención se centrara en los polinomios, así que continuemos con la siguiente definición.

DEFINICIÓN. Una *función racional*  $R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ , se define como una función holomorfa  $R : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ , donde  $p(z)$  y  $q(z)$  son polinomios con coeficientes complejos y sin factores comunes, también definimos el grado de  $R$  como  $grad(R) = \max\{grad(p), grad(q)\}$ .

Más adelante daremos una muestra de la aplicación de la conjugación definida en la sección anterior combinada con nuestra restricción de área de trabajo, pero antes necesitamos otra definición aunque el personaje por presentar sea muy famoso.

DEFINICIÓN. Un punto  $z$  es un *punto crítico* de  $R$ , si  $R$  no es inyectiva en cualquier vecindad de  $z$ ; alternativamente en nuestro caso si la derivada de  $R$  se anula en  $z$  ó si  $z$  es un polo múltiple de  $R$ . Y por consecuencia decimos que un valor  $w$  es un *valor crítico* para  $R$  si éste es imagen de un punto crítico; es decir  $w = f(z)$  para algún punto crítico  $z$ , hay que tener cuidado de no confundir puntos críticos con valores críticos.

La siguiente proposición será de utilidad en nuestros capítulos posteriores, por que nos brinda cotas para puntos fijo, y separadamente para puntos críticos.

PROPOSICIÓN 1.3.1. *La primera parte de esta proposición es conocida como la fórmula de Riemann-Hurwitz.*

- (1) Sea  $R$  una función racional de grado  $d$ , entonces el número de puntos críticos contados con multiplicidad es  $2(d - 1)$
- (2) Sea  $R$  una función racional de grado  $d$ , entonces  $f$  tiene a lo mas  $d + 1$  puntos fijos.

DEMOSTRACIÓN:

(i) Por conjugación supongamos que  $\infty$  no es un punto crítico ni tampoco un valor crítico de  $R$ , y además que  $R(\infty) = 0$ , por tanto.

$$R(z) = \frac{a + \dots + wz^{d-1}}{b + \dots + z^d}$$

y encontrar los puntos críticos es encontrar las soluciones de  $R'(z) = 0$ , y esto es resolver la ecuación

$$(dz^{d-1} + \dots + k)(a + \dots + wz^{d-1}) - (b + \dots + z^d)(c + \dots + (d-1)wz^{d-2}) = 0$$

que tiene  $2(d-1)$  soluciones contadas con multiplicidad por el teorema fundamental del álgebra. Si  $\infty$  es un punto crítico ó un valor crítico, consideremos  $x$  en el plano distinto de cero, que no sea punto crítico, valor crítico, punto fijo ni tampoco polo, y tomemos a  $M$  una transformación de Möbius tal que transforme a la terna  $(\infty, 0, x)$  en  $(x, f(x), \infty)$ , y de esta manera tenemos que  $g = M^{-1} \circ f \circ M(\infty) = 0$ , y por tanto  $\infty$  no podría ser punto crítico ni polo.

(ii) Sea  $R = \frac{p}{q}$  con  $p$  y  $q$  coprimos, entonces  $R(x) = x$  es equivalente a  $p(x) - xq(x) = 0$ , la cual tiene al menos una solución  $\zeta$ , Sea  $M$  la transformación de Möbius que manda  $\zeta$  a  $\infty$ , se tiene que  $h = M \circ R \circ M^{-1}$  fija al infinito, con lo cual  $h(z) = \frac{f(z)}{s(z)}$  con  $f$  y  $s$  polinomios coprimos y  $grad(f) = d > grad(s)$ , con lo cual  $h(x) = x$  tiene a lo más  $d$  soluciones, y por tanto  $R$  tiene a lo sumo  $d + 1$  puntos fijos  $\square$ .

En particular si  $R$  es un polinomio de grado positivo  $d$  éste tiene a lo más  $d - 1$  puntos críticos.

Por nuestras discusiones de la sección anterior es de suma importancia el cálculo del multiplicador, así que ofrecemos las siguientes líneas para el caso de una transformación racional y en especial para cuando el punto fijo  $\zeta$  es  $\infty$ . Tomemos

$$R(z) = \frac{a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n}{b_0 + b_1z + \dots + b_mz^m}$$

con  $a_nb_m \neq 0$  y  $n > m$ , de esta forma  $R$  fija a  $\infty$ . Recordando la definición del multiplicador en el punto fijo infinito  $\lambda_\infty$  es la derivada de la función.

$$S(z) = 1/[R(1/z)]$$

en el origen, observemos primero que

$$\begin{aligned} S(z) &= \frac{b_0 + \frac{b_1}{z} + \dots + \frac{b_m}{z^m}}{a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n}} = \frac{\frac{1}{z^m}(b_0z^m + b_1z^{m-1} + \dots + b_m)}{\frac{1}{z^n}(a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n)} = \\ &= \frac{z^{n-m}(b_0z^m + b_1z^{m-1} + \dots + b_m)}{(a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n)} \end{aligned}$$

y derivando

$$\begin{aligned} S'(z) &= \frac{(n-m)z^{n-(m+1)}(b_0z^m + b_1z^{m-1} + \dots + b_m)(a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n)}{(a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n)^2} \\ &\quad + \frac{z^{n-m}(mb_0z^{m-1} + \dots + b_{m-1})(a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n)}{(a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n)^2} \\ &\quad - \frac{z^{n-m}(b_0z^m + b_1z^{m-1} + \dots + b_m)(na_0z^{n-1} + \dots + a_{n-1})}{(a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n)^2} \end{aligned}$$

evaluando en el origen tenemos

$$S'(0) = \begin{cases} b_m/a_n & \text{si } n = m + 1 \\ 0 & \text{si } n > m + 1 \end{cases}$$

ahora calculemos la derivada de  $R$  en cualquier punto, primero pongamos a  $R$  de la siguiente forma

$$R(z) = \frac{z^n(\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + a_n)}{z^m(\frac{b_0}{z^m} + \frac{b_1}{z^{m-1}} + \dots + b_m)} = \frac{z^{n-m}(\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + a_n)}{(\frac{b_0}{z^m} + \frac{b_1}{z^{m-1}} + \dots + b_m)}$$

por tanto la derivada es

$$\begin{aligned} R'(z) &= \frac{(n-m)z^{n-(m+1)}(\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + a_n)(\frac{b_0}{z^m} + \frac{b_1}{z^{m-1}} + \dots + b_m)}{(\frac{b_0}{z^m} + \frac{b_1}{z^{m-1}} + \dots + b_m)^2} \\ &\quad + \frac{z^{n-m}(\frac{-na_0}{z^{n+1}} + \dots + \frac{-a_{n-1}}{z^2})(\frac{b_0}{z^m} + \frac{b_1}{z^{m-1}} + \dots + b_m)}{(\frac{b_0}{z^m} + \frac{b_1}{z^{m-1}} + \dots + b_m)^2} \\ &\quad - \frac{z^{n-m}(\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + a_n)(\frac{-mb_0}{z^{m+1}} + \dots + \frac{-b_{m-1}}{z^2})}{(\frac{b_0}{z^m} + \frac{b_1}{z^{m-1}} + \dots + b_m)^2} \end{aligned}$$

y como por continuidad  $R'(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} R'(z)$  entonces

$$R'(\infty) = \begin{cases} a_n/b_m & \text{si } n = m + 1 \\ \infty & \text{si } n > m + 1 \end{cases}$$

de este modo podemos calcular el multiplicador de cualquier punto fijo  $\zeta$  de una función racional  $R$  como sigue

$$\lambda_\zeta = \begin{cases} R'(\zeta) & \text{si } \zeta \neq \infty \\ 1/R'(\infty) & \text{si } \zeta = \infty \end{cases} .$$

EJEMPLO. Dado  $P(z) : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  un polinomio definido por

$$P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$$

parece claro (al menos por acuerdo, sino piense en el  $\lim_{z \rightarrow \infty} P(z)$ ) que  $\infty$  es un punto fijo para  $P$ , entonces según la fórmula presentada arriba  $\lambda_\infty = 1/R'(\infty)$ , como  $R'(z) = a_1 + \dots + a_nz^{n-1}$  entonces  $R'(\infty) = \infty$  y por tanto  $\lambda_\infty = 0$ , este resultado nos acompañara en discusiones posteriores.

## CAPÍTULO 2

# Conjuntos de Julia y Fatou

### 2.1. Definición y primeros resultados

Ahora daremos paso a los germenos de esta teoría, una buena parte de ésta desarrollada por Pierre Fatou y Gaston Julia de manera independiente. En el capítulo anterior se trataron varios temas en particular el de equicontinuidad nos dice cuando una familia de funciones tiene un buen comportamiento, por tanto en el complemento del conjunto donde exista la equicontinuidad tendremos mal comportamiento y eh aquí el surgimiento de una dicotomía, aunque bien estos conjuntos podrían llamarse Dr. Jekyll y Mr. Hyde, los nombres de los conjuntos están dados en función de los pioneros en el tema, iniciemos con la definición del conjunto Estable o de Fatou y por consecuencia con la del conjunto inestable o de Julia.

**DEFINICIÓN.** Dada  $R$  una transformación racional. El conjunto Fatou de  $R$  denotado por  $F(R)$  se define como el conjunto de puntos  $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$  para los cuales la familia  $\{R^n\}$  es equicontinua con respecto a la métrica esférica en alguna vecindad de  $z_0$ , y el conjunto de Julia de  $R$  denotado por  $J(R)$  es el complemento de  $F(R)$  en  $\overline{\mathbb{C}}$ .

**OBSERVACIÓN.** Una definición equivalente del conjunto de Fatou es: Dada  $R$  una transformación racional. El conjunto Fatou de  $R$  denotado por  $F(R)$  se define como el conjunto de puntos  $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$  para los cuales la familia  $\{R^n\}$  es una familia normal en alguna vecindad de  $z_0$ .

Hay que observar que por definición el conjunto de Fatou es abierto, y por consecuencia debido a que la esfera de Riemann es compacta entonces el conjunto de Julia es compacto.

**TEOREMA 2.1.1.** *Dada  $R$  una transformación racional no constante, entonces para cualquier entero positivo  $p$ , tenemos que  $F(R^p) = F(R)$  y  $J(R^p) = J(R)$ .*

**DEMOSTRACIÓN:** Sea  $S = R^p$ . Como  $\{S^n : n \geq 1\}$  es una subfamilia de  $\{R^n : n \geq 1\}$ , entonces ésta familia es equicontinua donde  $\{R^n : n \geq 1\}$  es equicontinua, por tanto  $F(R) \subset F(S)$ . Ahora, como cada  $R^k$  satisface una condición de Lipschitz, la familia  $\mathcal{F}_k = \{R^k(S^n) : n \geq 0\}$  es equicontinua dondequiera que la familia  $\{S^n : n \geq 1\}$  lo sea. En particular, cada  $\mathcal{F}_k$  es equicontinua en el conjunto  $F(S)$ , y entonces también lo es la unión finita  $\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \dots \cup \mathcal{F}_{p-1}$ . Como esta unión es  $\{R^n : n \geq 0\}$ , la familia  $\{R^n : n \geq 1\}$  es equicontinua en  $F(S)$ , de este modo  $F(S) = F(R)$   $\square$ .

La demostración para el conjunto de Julia se desprende de lo anterior, recordando que éste conjunto es el complemento del conjunto de Fatou.

El teorema anterior implica que por ejemplo si  $R(z) = z^2$ , entonces el  $F(R) = F(S)$  donde  $S(z) = z^{2p}$  para cualquier entero positivo, de este modo los conjuntos de Fatou y de Julia para todos los polinomios de la forma anterior son el mismo. En la practica ésto significaría descubrir éstos conjuntos para un gran número de funciones.

Podría parecer claro que los conjuntos de Fatou y de Julia no se mezclan bajo iteración, dicho de modo matemático que estos conjuntos son completamente invariantes, empecemos con la definición de los tipos de invarianza y luego demostraremos éste hecho.

**DEFINICIÓN.** Sea  $g$  una transformación de  $X$  en sí mismo, un subconjunto  $E$  de  $X$  es:

- Invariante hacia adelante sí  $g(E) = E$ .
- Invariante hacia atrás sí  $g^{-1}(E) = E$ .
- Completamente Invariante sí  $g(E) = E = g^{-1}(E)$ .

**OBSERVACIÓN.** Si la transformación es además sobreyectiva entonces los conceptos de invarianza hacia atrás e invarianza completa coinciden.

El siguiente teorema nos da una cota para la cardinalidad de conjuntos finitos completamente invariantes, es natural pensar en polinomios y sus correspondientes conjuntos completamente invariantes.

**TEOREMA 2.1.2.** *Sea  $R$  una transformación racional de grado mayor o igual a 2 y sea  $E$  un conjunto finito completamente invariante bajo  $R$ . Entonces  $E$  tiene a los más dos elementos.*

**DEMOSTRACIÓN:** Supongamos que  $E$  es completamente invariantes y además que cuenta con  $k$  elementos, entonces dado que  $E$  es finito,  $R$  debe actuar como una permutación para  $E$  y de este modo podemos encontrar algún entero  $q$  tal que  $R^q$  es la transformación identidad. Supongamos que  $R^q$  es de grado  $d$ , entonces para todo  $w$  en  $E$ , la ecuación  $R^q(z) = w$  tiene  $d$  soluciones, y por la relación de Riemann-Hurwitz aplicada a  $R^q$ , tenemos que  $k(d - 1) \leq 2d - 2$ , y debido a que  $d \geq 2$ , se obtiene que  $k \leq 2$ □.

Las transformaciones racionales de grado mayor que uno, son en particular transformaciones abiertas y continuas, por ser holomorfas no constantes, así podemos encajarlas en el siguiente teorema.

**TEOREMA 2.1.3.** *Sea  $g$  una transformación abierta continua de un espacio topológico  $X$  sobre sí mismo y sea  $E$  un subconjunto de  $X$  completamente invariante bajo  $g$ . Entonces también lo son su complemento  $X - E$ , su interior  $E$ , su frontera  $\partial E$  y su cerradura  $\bar{E}$ .*

**DEMOSTRACIÓN:** Primero veamos que  $X - E$  es completamente invariante, ya que si no lo fuera tampoco lo sería  $E$ . Ahora como  $g$  es continua en  $X$ ,  $g^{-1}(E^0)$  es un subconjunto abierto de  $g^{-1}(E)$ , y por la invarianza entonces también de  $E$ , de esta manera  $g^{-1}(E^0) \subset E^0$ . Similarmente, como  $g$  es una transformación abierta,  $g(E^0)$  es un subconjunto abierto de  $E$  y entonces  $g(E^0) \subset E^0$ . Por lo tanto

$$E^0 \subset g^{-1}g(E^0) \subset g(E^0)$$

entonces  $E^0$  es completamente invariante.

Ahora sabemos que la completa invarianza de  $E$  implica la de  $X - E$  y  $E^0$ , y por tanto se obtiene que la cerradura y la frontera de  $E$  son también completamente invariantes  $\square$ .

Así tenemos:

**TEOREMA 2.1.4.** *Sea  $R$  una transformación racional. Entonces  $F(R)$  y  $J(R)$  son completamente invariantes.*

**DEMOSTRACIÓN:** Es suficiente probar que  $F$  es completamente invariante, y como además  $R$  es sobreyectiva, solo necesitamos probar que  $R$  es invariante hacia atrás. Para esto tomemos cualquier punto  $z_0$  en  $R^{-1}(F)$  y sea  $w_0 = R(z_0)$ , entonces  $w_0$  está en  $F$ . Y de este modo obtenemos que dado cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $d(w, w_0) < \delta$ , entonces para toda  $n$ ,  $d(R^n(w), R^n(w_0)) < \varepsilon$ . Como  $R$  es continua, existe un  $\rho > 0$  tal que si  $d(z, z_0) < \rho$ , entonces  $d(R(z), w_0) < \delta$ , y en consecuencia  $d(R^{n+1}(z), R^{n+1}(z_0)) < \varepsilon$ . Esto nos muestra que  $\{R^{n+1} : n \geq 1\}$  es equicontinua en  $z_0$ , y por tanto lo es en  $R^{-1}(F)$ . Finalmente como  $R^{-1}(F)$  es abierto, entonces  $R^{-1}(F) \subset F$ .

Para la otra contención, tomemos un  $z_0$  en  $F$  y pongamos  $w_0 = R(z_0)$ , como  $z_0$  está en  $F$ , dado  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que para todo  $n$ , si  $d(z, z_0) < \delta$ , entonces  $d(R^{n+1}(z), R^{n+1}(z_0)) < \varepsilon$ , y hay que observar que el conjunto de los  $z$  tales que  $d(z, z_0) < \delta$  es una vecindad abierta  $N$  de  $z_0$ , con la propiedad de que  $R(N)$  es una vecindad abierta de  $w_0$ , si  $w$  está en  $R(N)$ , entonces  $w = R(z)$  para alguna  $z$  en  $N$ , de este modo  $d(R^n(w), R^n(w_0)) = d(R^{n+1}(z), R^{n+1}(z_0)) < \varepsilon$ . Por tanto  $w_0$  está en  $F$ , y  $F \subset R^{-1}(F)$   $\square$ .

Si  $R$  es un polinomio de grado mayor o igual a 2, la invarianza se extiende a la componente que contiene a  $\infty$ , una pregunta que surge después del siguiente resultado es, si cada una de las componentes del conjunto de Fatou es completamente invariante. Y si no lo son existe alguna cota para componentes completamente invariantes y también la pregunta de con que puntos están relacionadas este tipo de componentes.

**TEOREMA 2.1.5.** *Sea  $P$  un polinomio de grado mayor o igual a 2. Entonces  $\infty$  está en  $F(P)$ , y la componente conexa  $F_\infty$  de  $F$  que contiene a  $\infty$  es completamente invariante bajo  $P$ .*

**DEMOSTRACIÓN:** Lo primero que hay que notar es que existe una vecindad  $W$  de  $\infty$  en la cual  $P^n(z) \rightarrow \infty$  uniformemente para todo  $z \in W$ , usando este hecho dado un  $\varepsilon > 0$ , podemos encontrar un entero  $N$ , tal que si  $n \geq N$ , y si  $z, w \in W$ , entonces  $d(P^n(z), P^n(w)) \leq d(P^n(z), \infty) + d(\infty, P^n(w)) < \varepsilon$ , y de esta manera la familia  $\{P^n\}$  es equicontinua en  $W$ , y por tanto  $\infty \in F$ .

Para el segundo hecho de que  $F_\infty$  es completamente invariante, hay que notar que  $P(F_\infty)$  contiene a  $\infty$  y además es un subconjunto conexo de  $F$ , y debido a éstos hechos  $P$  transforma a  $F_\infty$  dentro de sí mismo y como consecuencia  $F_\infty \subset P^{-1}(F_\infty)$ . Ahora tomemos  $z \in P^{-1}(F_\infty)$ , entonces por el teorema anterior  $z$  está en alguna componente digamos  $F_1$  de  $F$ , y del mismo modo  $P$  transforma  $F_1$  dentro de  $F_\infty$ . Si  $P(F_1)$  y  $F_\infty$  fueran diferentes, entonces debe existir algún punto  $\zeta \in \partial F_1$  con  $P(\zeta)$  en  $F_\infty$ , pero esto es imposible ya que  $\zeta \in J(P)$  y  $J$  es completamente invariante, entonces  $P(F_1) = F_\infty$ , y por tanto  $F_1$  contiene algún  $w$  tal que  $P(w) = \infty$ , y de

este modo  $w = \infty$ , consecuentemente  $F_1 = F_\infty$  y finalmente  $z \in F_\infty$ . Y bueno por lo tanto tenemos que para un polinomio existe una componente conexa del conjunto de Fatou que contiene a  $\infty$ , en ocasiones llamada la componente no acotada de  $P$ . De hecho debido a ésto tenemos la siguiente definición

DEFINICIÓN. Dada  $F_\infty = \{z \in \bar{\mathbb{C}} \mid P^n(z) \rightarrow \infty \text{ cuando } n \rightarrow \infty\}$  definimos al conjunto de *Julia lleno* como el complemente de  $F_\infty$ , es decir  $K(P) = \bar{\mathbb{C}} - F_\infty$  el cual consiste de los puntos cuya órbita es acotada. El nombre puesto a éste conjunto es debido a que la frontera del conjunto de Julia lleno es precisamente el conjunto de Julia. Con las discusiones de la siguiente sección la definición cobrará más sentido.

## 2.2. Propiedades del conjunto de Julia

En esta sección se darán algunos resultados clásicos de nuestros conjuntos, en especial sobre el conjunto de Julia como la no vacuidad, la perfección o que éste está contenido en la clausura de los puntos periódicos, la última afirmación por ejemplo aclara el hecho de que el conjunto de Julia sea la frontera del Julia lleno.

Bueno para entrar en materia recordemos que en la sección anterior se mencionó que un conjunto finito completamente invariante, tal vez las preguntas frecuentes son ¿qué tipo de puntos pertenecen a este conjunto?, ¿para qué transformaciones éste conjunto es no vacío?, ¿el número de puntos en éste conjunto brinda clasificación para nuestras transformaciones?. Para responder empezamos con la siguiente definición:

DEFINICIÓN. Diremos que  $z$  es un punto *excepcional* de  $R$  si su órbita grande  $\mathcal{GO}(z)$  es finita, al conjunto de tales puntos lo denotaremos por  $E(R)$ .

Y bueno nuestras preguntas son contestadas mediante el siguiente teorema.

TEOREMA 2.2.1. *Una transformación racional  $R$  de grado mayor o igual a dos tiene a lo más dos puntos excepcionales. Si  $E(R) = \{\zeta\}$ , entonces  $R$  es conjugada a un polinomio con  $\zeta$  correspondiente a  $\infty$ . Si  $E(R) = \{\zeta_1, \zeta_2\}$ , donde  $\zeta_1 \neq \zeta_2$ , entonces  $R$  es conjugada a una transformación de la forma  $z \rightarrow az^d$ , donde  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  corresponden a  $0$  e  $\infty$ .*

DEMOSTRACIÓN: Como ya hemos discutido es claro que  $E(R)$  es completamente invariante bajo  $R$  y por tanto consiste a lo más de dos puntos. Después de una conveniente conjugación podemos suponer que hay cuatro posibilidades para nuestro conjunto de puntos excepcionales.

- (1)  $E(R) = \emptyset$
- (2)  $E(R) = \{\infty\} = \mathcal{GO}(\infty)$
- (3)  $E(R) = \{0, \infty\}$ ,  $\{0\} = \mathcal{GO}(0)$ ,  $\{\infty\} = \mathcal{GO}(\infty)$
- (4)  $E(R) = \{0, \infty\} = \mathcal{GO}(0) = \mathcal{GO}(\infty)$

En el primer caso no hay nada que aclarar y bueno éste caso es muy frecuente en vista de lo que estamos demostrando. En el segundo escenario tendríamos que nuestra transformación  $R$  debe de cumplir que  $R^{-1}(\infty) = \infty$  y ésta condición implica que  $R$  tiene un polo en  $\infty$  y no tiene polos para cualquier otro valor en el plano, de este modo llegamos a la conclusión de que  $R$  debe ser conjugada a un polinomio. En el tercer caso notemos que de nuevo podemos conjugar a un polinomio ya que tenemos la misma condición sobre los polos o mejor dicho el polo de nuestra función pero además aplicando el mismo truco, esto es observando que  $R^{-1}(0) = 0$ , es claro que el único cero de nuestra función es el origen, y por tanto esta vez nuestro polinomio tiene la forma  $az^d$ . Por último, tenemos que  $R(0) = \infty$  y  $R(\infty) = 0$ , y por consecuencia  $R$  tiene todos sus ceros y polos en  $\{0, \infty\}$ , de hecho  $\infty$  es su cero y el origen es su polo, de este modo  $R$  debe ser conjugada a una transformación de la forma  $az^d$  donde  $d$  es un entero negativo  $\square$ .

En el primer caso y segundo caso tenemos que  $E \subset F$ . En el tercer escenario sabemos que  $\infty \in F$  y que para  $z$  en cualquier disco de radio menor que uno con centro en cero la familia de iteradas  $\{R_n\}$  converge uniformemente a cero, por tanto  $0 \in F$ . Finalmente la familia de iteradas  $\{R_n\}$  converge a cero en una vecindad suficientemente cercana a  $\infty$  y diverge a  $\infty$  en una vecindad suficientemente pequeña de 0. Por lo anterior se ha mostrado:

**COROLARIO 2.2.2.** *Si el grado de  $R$  una transformación racional es mayor o igual a 2. Entonces los puntos excepcionales de  $R$  están en  $F(R)$ .*

Por tanto el conjunto de puntos excepcionales es no vacío solo en los dos casos expuestos por el teorema de arriba, si el conjunto de puntos excepcionales es vacío entonces todo punto en la esfera de Riemann debe tener órbita hacia atrás infinita, e inmediatamente uno piensa en la densidad, demos una caracterización de los puntos excepcionales que nos ayudara a responder sobre esto:

**TEOREMA 2.2.3.** *La órbita hacia atrás  $\mathcal{O}^-(z)$  de  $z$  es finita si y sólo si  $z$  es excepcional.*

**DEMOSTRACIÓN:** Solo falta probar que si  $\mathcal{O}^-(z)$  de  $z$  es finita entonces  $z$  es excepcional. Para esto, definamos los conjuntos no vacíos  $B_n$  como

$$B_n = \bigcup_{m \geq n} R^{-m}(z)$$

entonces  $R^{-1}(B_n) = B_{n+1}$  y  $\mathcal{GO}(z) \supset \mathcal{O}^-(z) = B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \dots$ , ahora como  $\mathcal{O}^-(z)$  es finita entonces cada  $B_n$  lo es, y por tanto existe un entero  $m$  para el cual  $B_m = B_{m+1}$ , esto es tal que  $R^{-1}(B_m) = B_m$  y de este modo  $B_m$  es completamente invariante, entonces  $B_m$  contiene a la órbita grande de algún punto  $w$ , la cual un subconjunto de la órbita grande de  $z$ , y por lo tanto deber ser  $\mathcal{GO}(z)$ , obteniendo que  $\mathcal{GO}(z)$  es finita y entonces  $z$  excepcional, de hecho se vio que  $\mathcal{GO}(z) = \mathcal{O}^-(z)$   $\square$ .

Una pregunta pendiente sería entonces ¿puede ser el conjunto de Julia vacío o toda la esfera?, primero parte es aclarada en el siguiente teorema:

**TEOREMA 2.2.4.** *Si el grado de  $R$  una transformación racional es mayor o igual a 2, entonces  $J(R)$  es infinito.*

DEMOSTRACIÓN: Empecemos demostrando que  $J$  es no vacío. Si  $J$  es vacío, entonces la familia de iteradas  $\{R^n\}$  es normal en toda la esfera de Riemann, y por esta razón alguna subfamilia  $\{R^{n_j}\}$  debe converger uniformemente sobre toda la esfera de Riemann a una función holomorfa  $g : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ , eventualmente (es decir para un  $j$  suficientemente grande) el grado de  $R^{n_j}$  se vuelve igual al grado de  $g$ , pero el grado de  $R^n$  es igual a  $d^n$  y éste diverge a  $\infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , y por tanto hemos llegado a una contradicción.

Ahora sabemos que  $J$  contiene algún punto  $\zeta$ , como  $J$  es completamente invariante, si  $J$  es finito, entonces  $\zeta$  debe ser un punto excepcional, pero esto es imposible ya que los puntos excepcionales están en  $F$ , concluimos entonces que  $J$  es infinito  $\square$ . Podríamos preguntarnos si hay un resultado análogo para el conjunto de Fatou al menos si quiera para la parte de no vacuidad, la respuesta es no, en 1918 Lattès dio el primer ejemplo en el que el conjunto de Fatou es vacío, la función propuesta por él es

$$R(z) = \frac{(z^2 + 1)^2}{4z(z^2 - 1)}.$$

TEOREMA 2.2.5. *Sea  $R$  una transformación racional de grado mayor o igual a dos, y sea  $A$  un subconjunto cerrado completamente invariante de la esfera de Riemann. Entonces:*

- (i) *A tiene a lo más dos elementos y  $A \subset E(R) \subset F(R)$ ; ó bien*
- (ii) *A es infinito y  $A \supset J(R)$ .*

DEMOSTRACIÓN: Sabemos que  $A$  tiene a lo más dos puntos o es infinito. Si es finito entonces sólo contiene puntos excepcionales y claramente se sigue (i). Ahora si  $A$  es infinito, como  $A$  es completamente invariante también lo es su complemento  $\Omega$ , y así cada  $R^n$  transforma el conjunto abierto  $\Omega$  en si mismo, y por tanto la familia  $\{R^n\}$  restringida a  $\Omega$ , omite tres puntos dados en  $A$ , y por lo tanto es normal, es decir  $\Omega \subset F$ , y por consecuencia  $J \subset A$   $\square$ .

Es útil pensar este último resultado de la siguiente manera:  $J$  es el conjunto mas pequeño cerrado y completamente invariante, que contiene al menos tres puntos, aunque sabemos que en realidad contiene una infinidad.

El siguiente teorema aclara por fin la razón del nombre de Julia lleno, aunque curiosamente hay casos donde el Julia lleno coincide con el Julia y por tanto El Julia lleno puede tener también interior vacío. Un ejemplo de cuando el Julia es toda la esfera de Riemann claramente fue dado arriba.

TEOREMA 2.2.6.  *$J = \overline{\mathbb{C}}$  o bien  $J$  tiene interior vacío.*

DEMOSTRACIÓN: Observemos que la esfera de Riemann  $\overline{\mathbb{C}}$  es la unión disjunta del interior y la frontera de  $J$ , junto con el conjunto  $F$ , además cada uno de estos conjuntos es completamente invariante. Entonces si  $F$  es no vacío, tenemos que  $F \cup \partial J$  es un conjunto completamente invariante, cerrado e infinito, y por la minimalidad de  $J$ , se tiene  $J \subset \partial J$   $\square$ .

¿Será acaso el conjunto de Julia numerable?, y si no lo es ¿el número de sus componentes será igualmente no numerable?, respondamos a la primera pregunta y dejemos la otra para después.

**TEOREMA 2.2.7.** *Sea  $R$  una transformación racional de grado mayor o igual a dos. Entonces  $J$  es perfecto y por tanto no numerable.*

**DEMOSTRACIÓN:** Como  $J$  es infinito entonces su conjunto derivado es no vacío, además es automáticamente cerrado. Ahora como  $R$  es continua y de grado finito, de esto tenemos que  $R(J') \subset J'$ , por tanto  $J' \subset R^{-1}(J')$ , además, como  $R$  es una transformación abierta se puede ver que  $R^{-1}(J') \subset J'$ , y por tanto que  $J'$  es completamente invariante, además por se cumple que  $J'$  es infinito y por la minimalidad de  $J$ ,  $J \subset J'$ , así  $J = J'$  y se sigue que  $J$  no tiene puntos aislados. es decir  $J$  es perfecto. Aún más  $J$  es no numerable por el teorema de la categoría de Baire  $\square$ . El siguiente teorema asegura que dada cualquier vecindad alrededor de un punto en el conjunto de Julia cubre casi toda la esfera de Riemann bajo iteración, incluso para un entero suficientemente grande cubre al conjunto de Julia.

**TEOREMA 2.2.8.** *Sea  $R$  una transformación racional de grado mayor o igual a dos, y  $W$  una vecindad de  $z$  tal que  $z \in J$ . Entonces:*

$$(i) \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n(W) \supset \overline{C} - E(R); \text{ y}$$

(ii) *Para todo entero suficientemente grande  $n$ ,  $R^n(W) \supset J$ .*

**DEMOSTRACIÓN:** Sea  $W_0 = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n(W)$ , y denotemos por  $K$  al complemento de  $W_0$ . Si  $K$  contiene tres puntos distintos, se sigue que  $\{R^n\}$  es normal en  $W$ , y por tanto tenemos una contradicción. Esto muestra que  $W_0$  contiene todo punto de la esfera con a lo más dos excepciones. Ahora consideremos  $z$  no excepcional, entonces  $z$  tiene órbita hacia atrás infinita y ésta debe intersectar a  $W_0$ , de este modo para algún punto  $w$  y algunos enteros no negativos se tiene que  $R^p(w) = z$  y  $w \in R^q(W)$ , de lo cual  $z \in R^{p+q}(W)$  y se tiene (i).

Para probar (ii) tomemos tres conjuntos abiertos  $W_1, W_2$  y  $W_3$ , cada uno con intersección no vacía con  $J$ , disjuntos. Observemos que para cada  $j \in \{1, 2, 3\}$  existen enteros  $n$  y  $k$  tal que  $R^n(W_j) \supset W_k$  (si no fuera así la familia  $\{R^n\}$  sería normal en cada  $W_j$ ). Denotemos a  $k$  por  $\pi(j)$ , entonces  $\pi$  transforma  $\{1, 2, 3\}$  en si mismo, por lo cual  $\pi$  debe tener un punto fijo para alguna iterada, es decir para algunos  $j$  y  $n$ ,  $R^n(W_j) \supset W_j$ . Si  $S = R^n$ , entonces  $S(W_j) \supset W_j$ , y la sucesión de conjuntos  $S^m(W_j)$  es creciente. Aplicando (i) a  $S$  y  $W_j$ , se tiene que los conjuntos  $S^m(W_j)$  forman una cubierta abierta creciente del conjunto compacto  $J$ , por tanto una unión finita y es más uno de ellos, cubre a  $J$ . Simplemente escojamos que todos los  $W_k$  estén en  $W$ , y para algún  $n$  se tiene,  $J \subset R^n(W_j) \subset R^n(W)$ , y para toda  $n$ ,  $J = R(J) \subset R^{n+1}(W)$  y (ii) se cumple por inducción  $\square$ .

**TEOREMA 2.2.9.** *Sea  $R$  una transformación racional de grado mayor o igual a dos. Entonces  $J$  esta contenido en la cerradura del conjunto de los puntos periódicos de  $R$ .*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos cualquier conjunto abierto  $\mathcal{N}$ , tal que  $\mathcal{N} \cap J \neq \emptyset$ , debemos probar que  $\mathcal{N}$  contiene algún punto periódico de  $R$ . Escojamos un punto  $w$  en la intersección y supongamos que éste no es un valor crítico de  $R^2$ , si lo fuera simplemente elegimos otro cerca de éste que no lo sea. Como el grado de  $R$  es al menos dos y  $w$  no es crítico, existen al menos cuatro puntos distintos en  $R^{-2}\{w\}$ . Tomemos tres de ellos distintos a  $w$ , y construyamos vecindades  $\mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$  y  $\mathcal{N}_3$  alrededor de  $w$  y de cada uno de esos tres puntos, tales que tengan clausuras disjuntas dos a dos, con  $\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}$  y además que  $R^2$  es un homeomorfismo de cada  $\mathcal{N}_j$  sobre  $\mathcal{N}_0$ . Ahora sea  $S_j : \mathcal{N}_0 \rightarrow \mathcal{N}_j$  la inversa de  $R^2$ . Si para todo  $z \in \mathcal{N}_0$ , toda  $j$  y todo  $n \geq 1$ , tenemos que  $R^n(z) \neq S_j(z)$  entonces  $\{R^n\}$  sería normal en  $\mathcal{N}_0$  lo que es imposible. Por lo cual existe  $z \in \mathcal{N}_0$ , algún  $j \in \{1, 2, 3\}$  y algún  $n \geq 1$ , tal que  $R^n(z) = S_j(z)$ , entonces  $R^{2+n}(z) = R^2(S_j(z)) = z$  y por tanto  $z$  es un punto periódico en  $\mathcal{N}$ . El teorema anterior es una versión ligera de uno que veremos en la penúltima sección de este capítulo, pero la demostración da muestras del poder y la importancia del Teorema de Montel en los albores de esta teoría. Además éste teorema demuestra que el conjunto de Julia, sea la frontera del conjunto de Julia, ya que el teorema implica que  $J \subset K$  y como las componentes de  $K$  son acotadas entonces se ahí nuestras iteradas forma una familia normal, de este modo al conjunto de Julia solo le queda ser la frontera del conjunto de Julia lleno.

TEOREMA 2.2.10. *Sea  $R$  una transformación racional de grado mayor o igual a dos. Entonces:*

- (i) *Si  $z$  no es un punto excepcional, entonces  $J$  esta contenido en la clausura de  $\mathcal{O}^-(z)$ .*
- (ii) *Si  $z \in J$ , entonces  $J$  es la clausura de  $\mathcal{O}^-(z)$ .*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos  $z$  un punto no excepcional y un conjunto abierto no vacío  $W$  con intersección con  $J$  no vacía. Entonces por el teorema 2.2.8,  $z$  esta en algún  $R^n(w)$  y por tanto  $\mathcal{O}^-(z)$  intersecta a  $W$ , esto prueba la primera parte. Ahora si  $z \in J$ , entonces  $J$  por ser cerrado y completamente invariante contiene a la clausura de  $\mathcal{O}^-(z)$  y junto con la primera parte tenemos la igualdad deseada  $\square$ .

### 2.3. Estructura topológica de los conjuntos de Fatou y de Julia

En este pequenísimo apartado se hará notar como algunas características topológicas de nuestros conjuntos de Julia y de Fatou, en particular nos enfocaremos en el concepto de conexidad. El siguiente teorema es una consecuencia directa de los teoremas dados en los preliminares, y nos deja observar la relación entre el Julia y las componentes del conjunto de Fatou, automáticamente uno se pone a pensar en el caso polinomial.

TEOREMA 2.3.1. *Sea  $R$  una transformación racional. Entonces  $J(R)$  es conexo si y sólo si cada componente de  $F(R)$  es simplemente conexa.*

Y al considerar componentes completamente invariantes del conjunto de Fatou, obtenemos.

TEOREMA 2.3.2. *Sea  $R$  una transformación racional de grado mayor o igual a dos, y sea  $F_0$  una componente completamente invariante de  $F$ . Entonces:*

- (i)  $\partial F_0 = J$
- (ii)  $F_0$  es simplemente conexa o bien infinitamente conexa
- (iii) Las demás componentes de  $F$  son simplemente conexas; y
- (iv)  $F_0$  es simplemente conexa si y solo si  $J$  es conexo.

DEMOSTRACIÓN: Como  $F_0$  es completamente invariante, también lo es su clausura, ahora por la minimalidad de  $J$ , y como  $J$  y  $F_0$  son disjuntos se tiene que  $\partial F_0 = J$ . Para la segunda parte supongamos que  $F_0$  tiene conexidad finita, y denotemos las componentes del complemento de  $F_0$  por  $E_1, \dots, E_c$ , de este modo existe un entero  $m$  tal que  $E_j$  es completamente invariante bajo  $R^m$ , y como  $J$  es infinito, entonces una de las  $E_j$ , digamos  $E_1$  es infinita. Luego la minimalidad de  $J(R^m)$  implica que  $J(R) = J(R^m) \subset E_1$ , y por la condición (i) cada  $E_j$  interseca a  $J$ , por tanto  $c = 1$ . Para (iii), observe que la clausura de  $F_0$  es  $J \cup F_0$  y ésta es conexa, además las componentes de su complemento son simplemente conexas y esas son exactamente las otras componentes de  $F$ . (iv) es una consecuencia de (i) y de que un dominio es simplemente conexo si y sólo si su frontera es conexa  $\square$ .

Inmediatamente si  $F$  es conexo entonces tenemos.

COROLARIO 2.3.3. *Sea  $R$  una transformación racional de grado mayor o igual a dos, y si  $F$  es conexo, entonces:*

- (i)  $F$  es simplemente conexo y  $J$  es conexo; o bien
- (ii)  $F$  es infinitamente conexa y  $J$  tiene un número infinito de componentes.

En el caso de un polinomio sabemos que  $\{\infty\}$  es completamente invariante, por lo tanto también la componente no acotada de  $F$  que lo contiene, y de este modo.

COROLARIO 2.3.4. *Sea  $F$  el conjunto de Fatou de un polinomio de grado mayor o igual a 2. Entonces:*

- (i) La componente no acotada  $F$  es simplemente conexa o bien infinitamente conexa; y.
- (ii) Cada componente acotada de  $F$  es simplemente conexa. La pregunta sobre si podíamos tener muchas componentes completamente invariantes se responde con el siguiente resultado.

TEOREMA 2.3.5. *El conjunto de Fatou de una transformación racional  $R$  de grado  $d$ ,  $d \geq 2$  contiene a lo más dos componentes completamente invariantes, y si tiene dos entonces cada una es simplemente conexa.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que tenemos  $k$  componentes completamente invariantes de  $F$ ,  $F_1, \dots, F_k$ , donde  $k \geq 2$ , entonces cada  $F_j$  es simplemente conexa y por tanto la característica de Euler de  $F_j$ ,

$$\chi(F_j) = 1$$

y por la relación de Riemann-Hurwitz se tiene

$$\delta_R(F_j) = (d - 1)\chi(F_j) = d - 1$$

donde  $\delta_R(F_j)$  representa la deficiencia de  $F_j$  y de este modo

$$k(d-1) = \sum_{j=1}^k \delta_R(F_j) \leq \delta_R(\overline{\mathbb{C}}) = 2d - 2$$

y por tanto  $k \leq 2\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ . Y como consecuencia casi inmediata tenemos.

**TEOREMA 2.3.6.** *El conjunto de Fatou de una transformación racional  $R$  contiene 0, 1, 2 o bien infinitas componentes.*

**DEMOSTRACIÓN:** En el caso donde el grado de  $R$  es uno es trivial. Si el grado es mayor o igual a dos, supongamos que  $F$  tiene solo un número finito de componentes, digamos,  $F_1, \dots, F_k$ , como cada  $F_j$  es completamente invariante bajo alguna iterada de  $R^m$ , si aplicamos el teorema anterior a ésta iterada, tenemos que  $k \leq 2\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ .

Para terminar esta sección enunciemos un lema y un teorema, de los cuales no se incluye la prueba pero el lector puede consultar [Bea]. El teorema nos da respuesta acerca del número de componentes de un conjunto de Julia desconexo.

**LEMA 2.3.7.** *Sea  $K$  un conjunto compacto del plano complejo y sea  $R$  una transformación racional de grado  $d$ ,  $d \geq 2$ . Entonces  $R^{-1}(K)$  contiene a lo más  $d$  componentes y cada una es transformada bajo  $R$  sobre  $K$ .*

**TEOREMA 2.3.8.** *Si  $J$  es desconexo, entonces tiene una cantidad infinita de componentes y cada punto de  $J$  es un punto de acumulación de infinitas componentes distintas de  $J$ .*

## 2.4. Teoría local de los puntos fijos

Ahora nos enfocaremos en el estudio del comportamiento local cerca de un punto fijo, este comportamiento jugará un papel muy importante tanto localmente y globalmente. De hecho lo que se realiza a continuación vale también para puntos periódicos, esto debido a la regla de la cadena en el cálculo del multiplicador, y por consecuencia el estudio de los puntos periódicos se reduce al estudio de puntos fijos. Para empezar con esto clasifiquemos los puntos fijos (más generalmente se pueden clasificar del mismo modo las órbitas periódicas) de acuerdo a su multiplicador de la siguiente manera:

**DEFINICIÓN 2.4.1.** Sea  $\hat{z}$  un punto fijo de  $f$  con multiplicador  $\lambda$ , entonces se tiene la siguiente clasificación :

- (1) si  $0 < |\lambda| < 1$ , entonces  $\hat{z}$  es un punto fijo atractor
- (2) si  $\lambda = 0$ , entonces  $\hat{z}$  es un punto fijo súper atractor
- (3) si  $|\lambda| > 1$ , entonces  $\hat{z}$  es un punto fijo repulsor
- (4) si  $|\lambda| = 1$ , entonces  $\hat{z}$  es un punto fijo indiferente (o neutral). Los puntos indiferentes están divididos en puntos racionales (cuando  $\lambda$  es raíz de la unidad) e irracionales (en caso contrario).

**2.4.1. Puntos fijos atractores (y repulsores).** Consideremos una función

$$(2.4.1) \quad f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

la cual esta definida en alguna vecindad del origen, con un punto fijo de multiplicador  $\lambda$  en  $z = 0$ . Si  $|\lambda| \neq 1$ , entonces  $f$  puede ser reducida a una forma normal simple mediante un conveniente cambio de coordenadas. Primero consideremos el caso  $\lambda \neq 0$ , es decir el origen no es un punto crítico. El siguiente teorema fue probado en 1884 por G. Koenigs.

**TEOREMA 2.4.2. (Linealización de Koenigs)** *Si el multiplicador  $\lambda$  satisface  $|\lambda| \neq 0, 1$ , entonces existe un cambio holomorfo local de coordenadas  $w = \phi(z)$ , con  $\phi(0) = 0$ , tal que  $\phi \circ f \circ \phi^{-1}(w) = \lambda w$  para todo  $w$  en alguna vecindad del origen. Aún más,  $\phi$  es única salvo multiplicación de una constante no cero.*

**DEMOSTRACIÓN:** Primero demostramos la unicidad. Si existen dos de tales transformaciones  $\phi$  y  $\psi$ , entonces la composición

$$\circ \phi^{-1}(w) = b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + \dots$$

debe conmutar con la transformación  $w \mapsto \lambda w$ . Comparando los coeficientes de las dos series de potencias resultantes, tenemos que  $\lambda b_n = b_n \lambda^n$  para toda  $n$ . Como  $\lambda$  no es cero ni tampoco una raíz de la unidad, tenemos que  $b_2 = b_3 = \dots = 0$ , por lo cual  $\psi \circ \phi^{-1}(w) = b_1 w$ , es decir  $\psi(z) = b_1 \phi(z)$ .

Ahora para demostrar la existencia cuando  $0 < |\lambda| < 1$ . Escojamos una constante  $c < 1$  tal que  $c^2 < |\lambda| < c$ , y elijamos una vecindad  $D_r$  del origen tal que  $|f(z)| \leq c|z|$  para  $z \in D_r$ . Entonces para cualquier punto de partida  $z_0 \in D_r$ , la órbita de  $z_0$  converge hacia el origen, con  $|z_n| \leq rc^n$ , donde  $z_n$  es la  $n$ -ésima iterada de  $z_0$ . Por el teorema de Taylor

$$|f(z) - \lambda z| \leq k|z|^2$$

para alguna constante  $k$  y para todo  $z \in D_r$ , por tanto

$$|z_{n+1} - \lambda z_n| \leq kr^2 c^{2n}$$

Se sigue que los números  $w_n = z_n/\lambda^n$  satisfacen

$$|w_{n+1} - w_n| \leq k'(c^2/|\lambda|)^n$$

donde  $k' = kr^2/|\lambda|$ . Esta diferencia converge uniformemente y geoméricamente al cero. Por lo cual la funciones holomorfas  $z_0 \mapsto w_n(z_0)$  convergen uniformemente en todo  $D_r$ , a un limite holomorfo  $\phi(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n/\lambda^n)$ . La identidad requerida  $\phi(f(z)) = \lambda\phi(z)$  se obtiene inmediatamente. Un argumento similar muestra que  $|\phi(z) - z|$  es menor o igual que  $|z|^2$  multiplicado por alguna constante. Entonces  $\phi'(0) = 1$ , y por lo tanto es un difeomorfismo conforme local.

Finalmente si  $|\lambda| > 1$ , como  $\lambda \neq 0$ , la transformación inversa  $f^{-1}$  esta localmente bien definida y es holomorfa, además tiene al origen como punto fijo atractor con multiplicador  $\lambda^{-1}$ . Aplicando argumentos similares a los anteriores a  $f^{-1}$ , se obtiene la conclusión  $\square$

OBSERVACIÓN. Más generalmente, supongamos que tenemos una familia de transformaciones  $f_\alpha$  de la forma (2.4.1) la cual depende holomorfa de uno (o mas) parámetros  $\alpha$  y con multiplicador  $\lambda = \lambda(\alpha)$  que satisface  $|\lambda(\alpha)| \neq 0, 1$ . Entonces un argumento similar muestra que la función de Koenigs  $\phi(z) = \phi_\alpha(z)$  depende holomorfa de  $\alpha$ . Para probar esto, fijemos  $0 < c < 1$  y supongamos que  $|\lambda(\alpha)|$  cambia a través de algún subconjunto compacto del intervalo  $(c^2, c)$ . Entonces es fácil comprobar que la convergencia en la prueba anterior es uniforme en  $\alpha$ . Y la conclusión se sigue fácilmente.

COROLARIO 2.4.3. *Supongamos que  $f : S \rightarrow S$  es una transformación holomorfa de una superficie de Riemann en si misma con un punto fijo atractor con multiplicador  $\lambda \neq 0$  en  $\hat{z}$ . Sea  $A(\hat{z}) \subset S$  la cuenca de atracción, la cual consiste de todos los  $z \in S$  para lo cuales  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z)$  existe y es igual a  $\hat{z}$ . Entonces existe una transformación holomorfa  $\phi$  de  $A(\hat{z})$  sobre  $\mathbb{C}$  tal que el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccc} A(\hat{z}) & \xrightarrow{f} & A(\hat{z}) \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\lambda} & \mathbb{C} \end{array}$$

*es conmutativo, y tal que  $\phi$  lleva una vecindad de  $\hat{z}$  difeomorfamente sobre una vecindad de cero. Más aún,  $\phi$  es única salvo multiplicación por una constante.*

De hecho, para calcular  $\phi(z_0)$  en un punto arbitrario de  $A(\hat{z})$  debemos simplemente seguir la órbita de  $z_0$  hasta que alcancemos un punto  $z_n$  el cual este muy cerca de  $\hat{z}$ , después evaluar la coordenada de Koenigs  $\phi(z_n)$  y multiplicar por  $\lambda^{-n}$ . El enunciado en el caso repulsor es un tanto diferente.

COROLARIO 2.4.4. *Si  $\hat{z}$  es un punto repulsor, entonces existe una transformación holomorfa  $\psi : \mathbb{C} \rightarrow S$  en la dirección opuesta, tal que el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & S \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\lambda} & \mathbb{C} \end{array}$$

*es conmutativo, y tal que  $\psi$  transforma una vecindad de cero difeomorfamente sobre una vecindad de  $\hat{z}$ . Aquí  $\psi$  es única salvo por  $w \mapsto \psi(cw)$  para cualquier constante  $c \neq 0$ .*

Para calcular  $\psi(w)$  simplemente encojemos algún  $\lambda^{-n}w$  tan pequeña que  $\phi^{-1}(\lambda^{-n}w)$  este definida, y después aplicamos  $f^n$  al resultado.

DEFINICIÓN. Sea  $R$  una transformación racional con un punto fijo (súper)atractor  $\hat{z}$ . Por la cuenca inmediata  $A^*(\hat{z})$  entenderemos la componente conexa de  $\hat{z}$  en la cuenca de atracción  $A(\hat{z})$ , o equivalentemente la componente conexa de  $\hat{z}$  en el conjunto de Fatou.

El siguiente resultado liga el comportamiento local con el global es debido a Fatou (1905). La demostración se puede consultar en [Mil].

**TEOREMA 2.4.5.** *Si  $R$  es una transformación racional de grado mayor o igual a dos, entonces la cuenca inmediata de un punto fijo (súper)atractor  $\hat{z}$  de  $R$  contiene al menos un punto crítico. Más aún si el multiplicador  $\lambda$  no es cero, entonces existe una única vecindad compacta  $\bar{U}$  de  $\hat{z}$  en  $A^*(\hat{z})$  la cual:*

(a) *es transformada de modo biyectivo sobre algún disco cerrado  $\bar{D}_r$  bajo la transformación de Koenigs  $\phi$ , y*

(b) *tiene al menos un punto crítico sobre su frontera  $\partial U$ .*

**2.4.2. Puntos fijos súper-atractores.** Ahora consideremos el caso súper atractor, el siguiente teorema fue probado por Bötcher en 1904.

**TEOREMA 2.4.6.** *Supongamos que  $f$  tiene un punto fijo súper atractor en  $\hat{z}$*

$$f(z) = \hat{z} + a_p(z - \hat{z})^p + \dots$$

*con  $p \geq 2$ ,  $a_p \neq 0$ . Entonces existe una transformación conforme  $w = \psi(z)$  de una vecindad de  $\hat{z}$  sobre una vecindad de cero, la cual conjuga  $f$  con la transformación  $w \mapsto w^n$ . Más aún,  $\psi$  es única salvo multiplicación de una raíz  $(p-1)$ -ésima de la unidad.*

**DEMOSTRACIÓN:** Supongamos que  $\hat{z} = 0$ . Para  $|z|$  pequeño existe  $C > 1$  tal que  $|f(z)| \leq C|z|^p$ . Por inducción usando el hecho de que  $p \geq 2$ , se tiene que

$$|f^n(z)| \leq (C|z|)^{p^n}$$

con  $|z| \leq \delta$  y así  $f^n(z) \rightarrow 0$  super-exponencialmente.

Si hacemos cambio de variables  $\zeta = cz$  donde  $c^{p-1} = 1/a_p$  entonces hemos conjugado  $f$  a la forma  $f(w) = \zeta^p + \dots$ . Así podemos asumir  $a_p = 1$ , deseamos encontrar una transformación  $\psi(z) = z + \dots$  tal que  $\psi(f(z)) = \psi(z)^p$ , lo cual es equivalente a la condición  $\psi \circ f \circ \psi^{-1} = w^p$ . Sea

$$\psi_n(z) = f^n(z)^{p^{-n}} = (z^{p^n} + \dots)^{p^{-n}} = z(1 + \dots)^{p^{-n}}$$

. la cual ésta bien definida en una vecindad del origen. Las  $\psi_n$ 's satisfacen

$$\psi_{n-1} \circ f = (f^{n-1} \circ f)^{-n+1} = \psi_n^p$$

entonces si  $\psi_n \rightarrow \psi$ , se obtiene  $\psi \circ f = \psi^p$  y por tanto una solución. Para mostrar que  $\{\psi_n\}$  converge, notamos que

$$\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n} = \left( \frac{\psi_1 \circ f^n}{f^n} \right)^{p^{-n}} = (1 + O(|f^n|))^{p^{-n}} = 1 + O(p^{-n})O(|z|^{p^n} C^{p^n}) = 1 + O(p^{-n})$$

si  $|z| \leq 1/C$ . Entonces el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_{n+1}}{\psi_n}$$

converge uniformemente para  $|z| \leq c \leq 1/C$ , y esto implica que  $\{\psi_n\}$  converge. Por tanto  $\psi$  existe.

Para probar la unicidad usamos el mismo método que en el caso atractor, la ecuación en este caso es  $\psi(z^p) = \psi(z)^p$ , y comparando las series de potencias tenemos  $\psi(z) = a_1 z$  donde  $a_1^p = a_1 \square$

**2.4.3. Puntos fijos indiferentes racionales.** Supongamos que  $f$  tiene un punto fijo indiferente racional  $\hat{z}$ . Si  $U$  es una vecindad de  $\hat{z}$  y tratamos de conjugar  $f|_U$  a su derivada, entonces el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & U \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi \\ D_r & \xrightarrow{\lambda} & D_r \end{array}$$

equivale a la ecuación funcional:

$$\phi \circ f(z) = \lambda \circ \phi(z)$$

esta ecuación es llamada la ecuación funcional de Schröder, por el lema de Schwarz, geoméricamente esta ecuación dice que  $\hat{z}$  es el centro de un disco en el cual la transformación  $f$  es conjugada a una rotación.

**TEOREMA 2.4.7.** *Sea  $\hat{z}$  un punto fijo indiferente. Entonces  $\hat{z} \in F$  si y sólo si la ecuación funcional de Schröder tiene solución analítica en alguna vecindad de  $\hat{z}$ .*

**DEMOSTRACIÓN:** Si la ecuación funcional de Schröder tiene una solución, entonces directamente de las definiciones se tiene  $\hat{z} \in F$ .

Ahora supongamos que  $\hat{z} \in F$  y sea  $U$  el dominio maximal tal que  $\hat{z} \in U$  y que  $U \subset F$ . Como  $U \cap J = \emptyset$ ,  $U$  evita tres puntos y por el teorema de la uniformización, el cubriente universal  $\bar{U}$  de  $U$  es conformemente equivalente a el disco unitario  $D$ . Escojamos una transformación cubriente  $p : D \rightarrow U$  tal que  $p(0) = \hat{z}$  y un levantamiento  $\tilde{f}$  de  $f|_U$  con  $\tilde{f}(0) = 0$ , entonces  $\tilde{f} : D \rightarrow D$  y  $|\tilde{f}'(0)| = 1$ . Por una aplicación del lema de Schwarz obtenemos  $\tilde{f}(z) = \lambda z$ . Por lo cual el cubriente universal  $p$  es la solución  $\phi$  de la ecuación funcional de Schröder  $\square$ .

**COROLARIO 2.4.8.** *Si  $\lambda$  es una raíz de la unidad digamos  $\lambda = \exp 2\pi i \frac{p}{q}$  con  $(p, q) = 1$ , entonces la ecuación funcional de Schröder no tiene solución, es decir  $f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \dots$ , no es localmente linealizable.*

**DEMOSTRACIÓN:** Observemos que  $\hat{z} = 0$  es un punto fijo. Además  $\lambda^q = 1$  y supongamos que la ecuación funcional de Schröder tiene solución en alguna vecindad  $U$  de  $\hat{z}$ . Entonces  $\phi \circ f^q \circ \phi^{-1} \equiv Id$ , y entonces  $f^q \equiv Id$  en  $U$ . Como  $f$  es holomorfa su deriva se anula en tal vecindad, lo que implica que  $f^q \equiv Id$  en  $\bar{C}$ , contradiciendo nuestra suposición de que  $f$  tiene grado mayor a uno  $\square$ .

**DEFINICIÓN.** En este caso decimos que  $\hat{z} = 0$  es un punto parabólico de  $f$ .

Como  $f^q$  no es la identidad, obtenemos que existe un  $n \geq 1$  tal que:

$$f^q(z) = z + cz^{n+1} + O(z^{n+2})$$

y además  $n$  es un múltiplo de  $q$ , para ver este último hecho notemos que

$$f \circ f^q(z) = f(z + cz^{n+1} + O(z^{n+2})) = f(z) + \lambda cz^{n+1} + O(z^{n+2})$$

y

$$f^q \circ f(z) = f(z) + c(f(z))^{n+1} + O((f(z))^{n+2}) = f(z) + c\lambda^{n+1}z^{n+1} + O(z^{n+2})$$

así  $\lambda = \lambda^{n+1}$  es decir  $\lambda^n = 1$ .

Mediante una conjugación lineal, pongamos  $c = 1$ , y de este modo

$$f^q(z) = z + z^{n+1} + O(z^{n+2}) = z(1 + z^n + O(z^{n+1}))$$

La expresión anterior nos brinda la siguiente información sobre la dinámica de  $f$  en  $U$ :

(i) Si  $z^n \in \mathbb{R}^+$ , existen exactamente  $n = kq$  semirrectas a partir de  $z = 0$ , con direcciones dadas por  $\frac{2\pi j}{n}$ , con  $j = 0, \dots, n-1$ , llamados ejes repulsores.

(ii) Si  $z^n \in \mathbb{R}^-$ , existen exactamente  $n = kq$  semirrectas a partir de  $z = 0$ , con direcciones dadas por  $2\pi \frac{j+1/2}{n}$ , con  $j = 0, \dots, n-1$ , llamados ejes atractores.

Estas direcciones las podemos observar como una rotación de las raíces  $2n$ -ésimas de la unidad.

A continuación presentamos un resultado de Camacho (1978) que clasifica la dinámica de este tipo, aunque no damos su demostración.

**TEOREMA 2.4.9.** *Sea  $f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$  una transformación analítica en una vecindad del origen. Supongamos que  $\lambda = \exp 2\pi i \frac{p}{q}$  con  $(p, q) = 1$ , entonces  $f^q(z) = Id$  ó existe un homeomorfismo local  $h$  y un entero  $k > 1$  tal que  $h(0) = 0$  y  $h \circ f \circ h^{-1}(z) = \lambda z(1 + z^{kq})$ .*

**DEFINICIÓN.** Un conjunto abierto conexo  $U$ , con clausura compacta  $\bar{U} \subset N \cap N'$ , sera llamado un pétalo atractor para  $f$  en el origen si

$$f(\bar{U}) \subset U \cup \{0\} \quad \text{y} \quad \bigcap_{k \geq 0} f^k(\bar{U}) = \{0\}$$

Similarmente,  $U' \subset N \cap N'$  es un pétalo repulsor para  $f$  si  $U'$  es un pétalo atractor para  $f^{-1}$ .

**TEOREMA 2.4.10.** *Si el origen es un punto fijo de multiplicidad  $n+1 \geq 2$ , entonces existen  $n = kq$  pétalos atractores  $U_i$  ajenos y  $n$  pétalos repulsores  $U'_i$  ajenos de  $f$ , tales que la unión de esos  $2n$  pétalos junto con el origen, forman una vecindad  $N_0$  del origen. Los pétalos atractores y repulsores se encuentran de manera alternada de forma que cada  $U_i$  interseca únicamente a  $U'_i$  y a  $U'_{i-1}$  (con  $U'_0 = U'_n$ )*

**OBSERVACIÓN.** Si  $U_i$  es un pétalo atractor, entonces la sucesión de transformaciones  $\{f^k\}$  restringida a  $\bar{U}_i$  converge uniformemente a cero. Análogamente si  $U'_i$  es un pétalo repulsor cualquier órbita que comience en  $U'_i$  debe eventualmente salir de  $U'_i$ , de hecho debe salir de la unión  $U'_1 \cup \dots \cup U'_n$ .

Tenemos tres consecuencias inmediatas de este teorema.

**COROLARIO 2.4.11.** *No existe órbita periódica de  $f|_{N_0}$  contenida completamente en  $N_0$  excepto por el punto fijo en el origen.*

**DEFINICIÓN.** La cuenca parabólica de atracción  $\Omega_i$ , determinada por el pétalo  $U_i$ , es el conjunto  $\{z | f^m(z) \in U_i \text{ para algún } m \in \mathbb{N}\}$  y  $\Omega = \bigcup \Omega_j$  es la cuenca parabólica de atracción de  $f$  en el origen. Claramente las cuencas  $\Omega_1, \dots, \Omega_n$  son conjuntos abiertos disjuntos.

**COROLARIO 2.4.12.** *Si excluimos el caso de una órbita la cual contenga al punto fijo, entonces la órbita converge al punto fijo si y sólo si ésta eventualmente cae en un pétalo atractor  $U_i$ , y por tanto pertenece a la cuenca asociada  $\Omega_i$ .*

**COROLARIO 2.4.13.** *Cada cuenca parabólica  $\Omega_i$  esta contenida en  $F(f)$ , pero su frontera  $\partial\Omega_i$  esta contenida en  $J(f)$ , en particular el origen esta en  $J(f)$ . Es más, cada pétalo repulsor  $U'_i$  intersecta a  $J(f)$ .*

DEMOSTRACIÓN: de 2.4.13. Como

$$f^k(z) = z + kz^{n+1} + O(z^{n+2})$$

entonces ninguna sucesión de iteradas  $\{f^k\}$  puede converger uniformemente en una vecindad del origen, ya que las correspondientes  $(n+1)$ -ésimas derivadas no convergen. Por tanto  $0 \in J(f)$ , y por consecuencia todo punto en la órbita grande de cero pertenece a  $J$ . Si  $z_1 \in \Omega_i$  no pertenece a la órbita grande de cero, entonces por 2.4.12 podemos extraer una subsucesión que de la órbita de  $z_1$  la cual siempre permanezca acotada lejos del cero. Y debido a que la sucesión de iteradas  $\{f^k\}$  converge a cero en todo el conjunto abierto  $\Omega_i$ , se tiene que  $\{f^k\}$  no puede ser normal en ninguna vecindad de  $z_1$ . Así que  $J$  intersecta a cada pétalo repulsor  $U'_i$   $\square$

DEMOSTRACIÓN: del teorema 2.4.10 Si bien  $f$  no es localmente linealizable en cero, se busca conjugar a  $f$  o equivalentemente a  $f^q$  en cada sector  $S_j$  entre las direcciones repulsoras de 0, por medio de  $w = -\frac{1}{mz^n}$  con inversa  $z = (-1/nw)^{1/n}$ , con lo cual, cada sector es enviado en  $\mathbb{C}^- := \mathbb{C} - (\infty, 0)$  y obtenemos:

$$\begin{array}{ccc} S_j & \xrightarrow{f^q} & S_j \\ \downarrow w & & \downarrow w \\ \mathbb{C}^- & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}^- \end{array}$$

donde

$$f^q(z) = z(1 + z^n + o(|z^n|))$$

cuando  $|z| \rightarrow 0$  y

$$\begin{aligned} F(w) &= w \circ f^q(z) = \frac{-1}{n(f^q(z))^n} = -\frac{1}{nz^n}(1 + z^n + o(|z^n|))^{-n} = \\ &= w(1 - nz^{-n} + o(|z^n|)) = w(1 + w^{-1} + o(|w^{-1}|)) = w + 1 + o(1) \end{aligned}$$

cuando  $|w| \rightarrow \infty$ . Así que podemos tomar  $\text{Sen } \varepsilon > 0$  suficientemente pequeño y  $r \in \mathbb{R}^+$  tal que

$$|F(w) - w - 1| < \text{Sen } \varepsilon$$

si  $|w| > r$ . Lo cual hace que la pendiente del vector que va de  $w$  a  $F(w)$  tenga valor absoluto acotado por  $\tan \varepsilon$  si  $|w| > r$ . De este modo se construye una región atractora para  $\infty$  y por medio de  $z = (-1/nw)^{1/n}$  obtenemos un pétalo atractor para  $f$  en cero  $\square$ .

OBSERVACIÓN. Debido a que  $n = kq$  es el número de pétalos atractores  $U_i$ , se tiene que  $f$  permuta esos  $n$  pétalos en  $k$  ciclos de longitud  $q$ , mientras que  $f^q(U_i) \subset U_i$ .

**TEOREMA 2.4.14.**  *$F(w) = w + 1 + O(1/w^{1/n})$  es conformemente conjugada a  $w' \mapsto w' + 1$  si  $|w| > R$  y  $|\arg w| < \pi$ , con  $R$  suficientemente grande.*

DEMOSTRACIÓN:  $F'(w) = 1 + O(1/w^{1+\frac{1}{n}})$  y sea  $\{w_n\}$  tal que  $\frac{w_n}{n} \rightarrow 1$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Entonces  $F'(w_n) = 1 + O(1/w^{1+\frac{1}{n}})$  y. (\*)  $\prod_{n=1}^{\infty} F'(w_n) = \alpha(w)$   
con  $w_1 = w$

es convergente ya que  $\prod_{n=1}^{\infty} \left| O(1/w^{1+\frac{1}{n}}) \right|$  converge absolutamente en un dominio simplemente conexo. Entonces existe  $\phi$  holomorfa tal que  $\phi'(w) = \alpha(w) = F'(w) \prod_{n=2}^{\infty} F(w_n) = F'(w)\alpha(F(w)) = F'(w)[\phi'(F(w))] = [\phi(F(w))]'$ . Por tanto  $\phi(F(w)) = \phi(w) + cte.$ , además del hecho de que  $\frac{w_n}{n} \rightarrow 1$  cuando  $n \rightarrow \infty$  se obtiene de (\*) que  $\frac{\phi(w_n)}{w_n} \rightarrow 1$  cuando  $w_n \rightarrow \infty$ . Así  $cte. \equiv 1$   $\square$ .

DEFINICIÓN. A cada uno de los  $k$ -ciclos de pétalos atractores de longitud  $q$  se le llama un sistema de pétalos  $P_i$  de  $f$  en cero. La cuenca inmediata de  $P_i$  denotada por  $A_f(P_i)$ , es la unión de las componentes conexas de  $\Omega(P_i)$ .

TEOREMA 2.4.15. *La cuenca inmediata,  $A_f(P_i)$  de un sistema de pétalos de un punto fijo parabólico de  $f$  contiene al menos un punto crítico.*

COROLARIO 2.4.16. *La cuenca inmediata  $\Omega$  de un punto fijo parabólico contiene al menos  $k$  puntos críticos, donde  $k$  es el número de ciclos de pétalos de  $f$  en cero.*

#### 2.4.4. Puntos fijos indiferentes irracionales.

Supongamos que

$$f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

esta definida en laguna vecindad del origen y además que el multiplicador puede ser escrito como

$$\lambda = e^{2\pi i \theta}$$

con  $\xi$  real e irracional. Una vez más nos gustaría saber cuando existe un cambio local de coordenadas  $z = h(w)$  que conjugue  $f$  a una rotación irracional  $w \mapsto \lambda w$ , tal que

$$f(h(w)) = h(\lambda w)$$

cerca del origen.

Si tal linealización es posible, entonces un disco pequeño  $|w| < \varepsilon$  en el plano  $w$  corresponde a un conjunto abierto  $U$  en el plano  $z$ , el cual es transformado biyectivamente sobre si mismo por  $f$ . Evidentemente  $U$  no contiene puntos periódico de  $f$  salvo el punto fijo en cero. Además si  $f$  es una función racional  $U \subset F$ .

DEFINICIÓN. Una propiedad para un número complejo unitario es cierta para un genérico  $\lambda \in \mathbb{S}^1$  si el conjunto de  $\lambda$  para el cual es verdad contiene una intersección contable de subconjuntos abiertos densos de  $\mathbb{S}^1$ . De acuerdo al teorema de Baire, tal intersección debe ser necesariamente denso e infinitamente no numerable.

TEOREMA 2.4.17. *(de no linealización de Cremer) Para una elección genérica de  $\lambda \in \mathbb{S}^1$ , se cumple: si  $z_0$  es un punto fijo con multiplicador  $\lambda$  para una función racional arbitraria de grado mayor a dos, entonces  $z_0$  es el límite de una sucesión infinita de puntos periódicos. Por tanto no existe una coordenada linealizante en una vecindad de  $z_0$ .*

Durante mucho años se mantuvo abierta la pregunta de que si la sentencia anterior era verdadera para todo número  $\lambda$  en la circunferencia unitaria, hasta que en 1942 Siegel probó lo siguiente.

**TEOREMA 2.4.18. (*de linealización de Siegel*)** *Para casi cada ángulo  $\lambda$  en el círculo unitario (esto es para todo  $\lambda$  fuera de un conjunto con medida de Lebesgue unidimensional igual a cero) todo germen de una función holomorfa con punto fijo de multiplicador  $\lambda$  puede ser linealizada mediante un cambio holomorfo de coordenadas.*

**DEFINICIÓN.** Diremos que un punto fijo indiferente irracional es un punto de Siegel o un punto de Cremer, de acuerdo a cuando una linealización es posible o no. (Los puntos de Siegel son llamados centros)

**LEMA 2.4.19.** *Un punto fijo indiferente irracional de una función racional es un punto de Cremer o un punto de Siegel de acuerdo a cuando este pertenece al conjunto de Julia o no. En el caso de un punto de Siegel  $z_0$ , la componente conexa  $U$  de  $F$  que contenga a  $z_0$ , es conformemente isomorfo al disco unitario abierto de tal modo que la transformación  $f$  de  $U$  sobre si misma corresponde a la rotación irracional  $w \mapsto \lambda w$  del disco unitario. Por definición tal componente  $U$  es llamada un disco de Siegel, o un disco de rotación.*

**DEMOSTRACIÓN:** Si  $z_0$  es un punto de Siegel, entonces las iteradas de  $f$  en una vecindad corresponden a las rotaciones iteradas de un disco pequeño, y por lo tanto forman una familia normal. De este modo  $z_0$  pertenece a  $F$ . Recíprocamente, cuando  $z_0$  pertenece a  $F$ , se puede ver que  $z_0$  es un punto de Siegel  $\square$ . Para mas detalles de nuestra ultima aserción, el lector puede consultar [Mil].

**DEFINICIÓN.** Dado un número real  $k \geq 2$ , decimos que un ángulo irracional  $\theta$  satisface una condición diofantina de orden  $k$  si existe  $\varepsilon(\theta) > 0$  tal que

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| > \frac{\varepsilon}{q^k}$$

para cada racional  $\frac{p}{q}$ . Denotemos por  $D_k$  al conjunto de los números que cumplen esta condición. Observemos que si  $k < n$  entonces  $D_k \subset D_n$ . Definimos el conjunto  $S_i$  de números de Siegel como la unión de los  $D_k$ .

**TEOREMA 2.4.20. (*De Siegel*)** *Si el ángulo  $\theta$  pertenece a ésta unión  $S_i = \bigcup D_k$ , entonces cualquier germen holomorfo con multiplicador  $\lambda = e^{2\pi i \theta}$  es localmente linealizable.*

Centremos nuestra atención en la linealización de los polinomios cuadráticos. Para  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  tomemos  $p_\lambda = \lambda z + z^2$ . Hay que observar que todo polinomio de grado dos que tenga un punto fijo con multiplicador  $\lambda$  correspondiente, es conjugado a  $p_\lambda$  mediante una conjugación afín. El punto crítico de  $p_\lambda$  es  $z_\lambda = -\frac{\lambda}{2}$ , y su valor crítico es  $w_\lambda = -\frac{\lambda}{4}$ . Supongamos que  $\lambda$  no es una raíz de la unidad y denotemos por  $H_\lambda$  la única serie formal que cumple  $H_\lambda(0) = 0$ ,  $H'_\lambda(0) = 1$  y

$$H_\lambda(\lambda z) = p_\lambda(H_\lambda(z)).$$

Denotaremos por  $R(\lambda)$  al radio de convergencia para  $H_\lambda$ .

Para poder pasar a nuestro siguiente teorema primero necesitamos hablar sobre capacidad conforme. Sea  $U$  un dominio de Riemann (abierto, simplemente conexo de  $\mathbb{C}$ , distinto de  $\mathbb{C}$ ), y  $x_0 \in U$ . Si  $f_r$  y  $k_j$  son representaciones conformes de  $D$  sobre  $D_r$  y de  $D$  sobre  $U$  con  $j = 1, 2$ , tales que  $f_r(0) = 0$  y  $k_j(0) = x_0$ , entonces,  $k_1^{-1} \circ k_2$  y  $k_2^{-1} \circ k_1$  son automorfismos de  $D$  que fijan al cero y de acuerdo al lema de Schwarz

$$|(k_1^{-1} \circ k_2)'(0)| = 1 = |k_1^{-1}(0)| |k_2'(0)| = \frac{|k_2'(0)|}{|k_1'(0)|}.$$

DEFINICIÓN. Sea  $k : D \rightarrow U$  con  $k_0(0) = x_0$  una representación conforme de  $D$  sobre  $U$ , entonces  $|k'(0)| = C(U, x_0)$  es la capacidad conforme de  $U$  con respecto a  $x_0$ .

Equivalentemente, la capacidad conforme  $C(U, x_0)$  es el único real  $r$  positivo para el cual existe una representación conforme  $h$  del disco  $D_r$  sobre  $U$  que cumple  $h(0) = x_0$  y  $|h'(0)| = 1$ . El siguiente resultado es debido a Yoccoz, 1987.

TEOREMA 2.4.21. *Para casi cada ángulo  $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ,  $p_\lambda(z) = z^2 + \lambda z$  con  $\lambda = e^{2\pi i \theta}$  tiene un disco de Siegel alrededor del cero.*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $\phi_\lambda$  la transformación que linealiza a  $p_\lambda$  para  $0 < |\lambda| < 1$ . Sabemos que ésta está definida en la cuenca de atracción  $U_\lambda$  de  $p_\lambda$  en el origen, y que el punto crítico  $-\frac{\lambda}{2} \in U_\lambda$ . Por el lema de Schwarz, existe un abierto simplemente conexo  $U'_\lambda \subset U_\lambda$  el cual contiene al origen y tal que  $\phi_\lambda : U'_\lambda \rightarrow D_r$  es holomorfa e inyectiva, con  $\phi'_\lambda(0) = 1$  donde  $r$  es la capacidad conforme de  $U'_\lambda$  en el origen. De este modo  $r = |\phi_\lambda(-\frac{\lambda}{2})|$  y la correspondencia  $\eta(\lambda) = \phi_\lambda(-\frac{\lambda}{2})$  es holomorfa. Puesto que el radio de escape de  $p_\lambda$  es 2, entonces  $\phi_\lambda^{-1}(D_r) \subset D_2$  y por el lema de Schwarz  $r \leq 2$ . Por tanto  $\eta$  es holomorfa y acotada en  $D$ , y en consecuencia tiene una singularidad removible en el origen. Y como una función holomorfa y acotada en  $D$  admite en casi todo punto de su frontera  $\partial D$ , un límite tangencial no nulo, así que  $\phi_{\lambda_0}$  tiene un radio de convergencia al menos igual al límite superior de  $|\eta(\lambda)|$ , cuando  $\lambda \in D$  tiende a  $\lambda_0 \in \mathbb{S}^1$ , con  $\lambda_0$  tal que  $p_{\lambda_0}$  no tiene un punto de Cremer o un punto parabólico en el origen y  $\phi_{\lambda_0}$  linealiza a  $p_{\lambda_0}$ .  $\square$ . Y pues para casos de grado mayor a 2, tenemos el siguiente resultado, del que no se incluye la prueba y con el cual finaliza ésta sección.

TEOREMA 2.4.22. *(De Yoccoz) Si  $p_\lambda(z) = \lambda z + z^2$  es linealizable entonces cualquier  $f(z) = \lambda z + g(z)$  con  $g(z) \in o(|z^2|)$  analítica, es linealizable.*

## 2.5. Más propiedades de los Conjuntos de Julia y de Fatou

El estudio de la dinámica se ve enriquecido con la teoría tratada en la sección anterior, nos sirve para contar el número de componentes o entender la forma de éstas, para asuntos de conexidad, para observar (y al mismo tiempo apreciar la belleza) de la forma de los conjuntos de Julia y de Fatou, etcétera, pero como se podrá ver el estudio requiere cada vez de más herramientas y algunas no son tan sencillas, o requieren de otras teorías que pueden llegar a ser incluso relativamente modernas. Pero bueno empecemos con un resultado que nos recordara un hecho ya demostrado y dará pie a demostrar uno más fuerte que ese.

LEMA 2.5.1. *Toda componente de  $F$  contiene a lo más un punto periódico de  $R$ .*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $F_0$  una componente de  $F$  y supongamos que  $\alpha$  y  $\beta$  son puntos periódicos de  $F_0$ . Reemplazando a  $R$  por alguna iterada  $R^n$ , podemos suponer que  $\alpha$  y  $\beta$  son puntos fijos para  $R$ . Si  $\alpha$  es (súper) atractor entonces  $R^n \rightarrow \alpha$  en  $F_0$ , y como  $R$  fija a  $\beta$ , entonces  $\alpha = \beta$ . De otro modo  $\alpha$  es un punto fijo indiferente, y entonces  $R : F_0 \rightarrow F_0$  es conjugada a una rotación de orden infinito en el disco unitario, así que  $\alpha = \beta$  es el único punto fijo de  $R$  en  $F_0$   $\square$ .

El lema anterior es suficiente para probar que el conjunto derivado de los puntos periódicos de  $R$  está contenido en  $J$ , y nos brinda la mitad del siguiente teorema. Además la parte faltante de la demostración es similar a la prueba de que el conjunto de Julia está contenido en la clausura de los puntos periódicos, y por tanto la omitimos. Sin más preámbulo tenemos:

TEOREMA 2.5.2. *Si  $R$  es una transformación racional de grado  $d$ ,  $d \geq 2$ , entonces  $J$  es el conjunto derivado de los puntos periódicos de  $R$ .*

Más adelante veremos que dada una transformación racional  $R$  de grado  $d$  ésta tiene a lo más  $2d - 2$  ciclos no repulsores y combinando éste hecho con nuestro teorema anterior concluimos que:

TEOREMA 2.5.3. *Si  $R$  es una transformación racional de grado  $d$ ,  $d \geq 2$ , entonces  $J$  es la clausura de los puntos periódicos repulsores de  $R$ .*

Ahora escudriñemos un poco el conjunto de Fatou, para esto necesitamos el teorema de no errancia de Sullivan, la demostración de éste teorema es la que al parecer renovó los ánimos para seguir estudiando la teoría de iteración, resolviendo uno de los problemas abiertos de Fatou. La demostración de este teorema no es obvia y usa material que el autor de la tesis aun no logra entender (pero esta en proceso), éste material son las transformaciones casi-conformes, y Sullivan fue el pionero en incluirlas al estudio de la dinámica y demostrar su potencial, éste teorema es de tal importancia que es conocido como el segundo teorema fundamental (por cierto el primer teorema fundamental es el de arriba, es decir el que va de que los puntos repulsores son densos en el conjunto de Julia) y su análogo en la acción de los grupos Kleinianos es el teorema de finitud de Ahlfors, bueno dejando de lado todo esto aquí solo incluiremos una definición y a continuación el teorema, el interesado en la demostración puede consultar [CaG], [MNTU] ó [Sul].

DEFINICIÓN. Una componente  $F_0$  de  $F$  es:

- (a) periódica si para algún entero positivo  $n$ ,  $R^n(F_0) = F_0$ ;
- (b) eventualmente periódica si para algún entero positivo  $m$ ,  $R^m(F_0)$  es periódica; y
- (c) errante si los conjuntos  $R^n(F_0)$ ,  $n \geq 0$  son disjuntos dos a dos.

TEOREMA 2.5.4. *(no errancia de Sullivan) Toda componente del conjunto de Fatou es eventualmente periódica.*

El siguiente paso es dar una clasificación para las componentes invariantes hacia adelante de  $F$ .

DEFINICIÓN. Una componente  $F_0$  invariante hacia adelante de  $F$  es:

- Una componente atractora si ésta contiene un punto fijo atractor  $\zeta$  de  $R$ ;

- Una componente súper-atractora si ésta contiene un punto fijo súper-atractor  $\zeta$  de  $R$ ;
- Una componente parabólica si existe un punto fijo indiferente racional  $\zeta$  de  $R$  en la frontera de  $F_0$ , y si  $R^n \rightarrow \zeta$  en  $F_0$ ;
- Un disco de Siegel si  $R : F_0 \rightarrow F_0$  es analíticamente conjugada a una rotación Euclidiana del disco unitario sobre sí mismo.
- Un anillo de Herman si  $R : F_0 \rightarrow F_0$  es analíticamente conjugada a una rotación Euclidiana de algún anillo sobre sí mismo.

TEOREMA 2.5.5. *Una componente invariante hacia adelante de  $F$  es de algún tipo mencionado en la definición.*

Tampoco se dará demostración de este hecho. Ahora esclareceremos el rol de los puntos críticos en la dinámica global. Denotemos por  $C(R)$  el conjunto de los puntos críticos de  $R$ , y por  $C^+(R)$  las imágenes hacia adelante de  $C(R)$ , es decir,

$$C^+(R) = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n(C(R)).$$

Como ya vimos cuando estudiamos las conjugaciones locales, toda cuenca inmediata de un ciclo (súper) atractor contiene un punto crítico, al igual que la cuenca inmediata de un ciclo indiferente racional. Además si  $\{\Omega_1, \dots, \Omega_q\}$  es un ciclo de discos de Siegel o de anillos de Herman, entonces la clausura de  $C^+(R)$  contiene a  $\bigcup \partial\Omega_j$ . Y por último todo ciclo indiferente irracional de  $R$  en  $J$  esta en el conjunto derivado de  $C^+(R)$ .

TEOREMA 2.5.6. *Sea  $R$  una transformación racional de grado mayor o igual a dos. Entonces toda componente invariante hacia adelante de  $F(R)$  es simplemente, doblemente o bien infinitamente, conexa.*

DEMOSTRACIÓN: Como  $F_0$  es invariante hacia adelante, entonces es de algún tipo de los mencionados en la definición. Si  $F_0$  es un disco de Siegel o un anillo de Herman, entonces es simplemente o doblemente conexa. Si  $F_0$  es de algún tipo de los tres restantes entonces contiene un punto crítico de  $R$ . Supongamos que  $F_0$  tiene conexidad finita, entonces  $R$  restringida a  $F_0$  es una transformación cubriente ramificado de  $m$  hojas sobre sí mismo para algún entero positivo  $m$ . De este modo obtenemos la relación

$$\chi(F_0) + \delta(F_0) = m\chi(F_0)$$

con todos los términos finitos. Se sigue que

$$(m - 1)\chi(F_0) = \delta(F_0) > 0$$

así  $m \geq 2$  y  $\chi(F_0) > 0$ . Por tanto en estos casos,  $\chi(F_0) = 1$  y  $F_0$  es simplemente conexo  $\square$ .

COROLARIO 2.5.7.

- (i) *Si  $F$  es conexo, entonces es simplemente o bien infinitamente conexo.*
- (ii) *Si una componente de  $F(R)$  contiene un punto fijo de  $R$ , entonces ésta es simplemente o bien infinitamente conexa.*

(iii) Una componente invariante hacia delante de  $R$  es doblemente conexa si y sólo si ésta es un anillo de Herman.

Simplemente por conteo de los puntos críticos tenemos:

**TEOREMA 2.5.8.** *Sea  $R$  una transformación racional de grado  $d$ ,  $d \geq 2$ . Entonces el número combinado de ciclos (súper)atractores e indiferentes racionales es a lo más  $2d - 2$ .*

El siguiente resultado nos brinda una cota para componentes completamente invariantes, una vez más nos trasladamos al caso de polinomios donde tenemos ya una componente completamente invariante.

**TEOREMA 2.5.9.** *Si el conjunto de Fatou  $F(R)$  de  $R$  tiene dos componentes completamente invariantes, entonces estas son las únicas componentes de  $F(R)$ .*

**DEMOSTRACIÓN:** Nombremos a nuestras componentes completamente invariantes por  $F_1$  y  $F_2$ , primeramente ninguna de estas componentes puede ser un disco de Siegel o un anillo de Hermann ( si lo fuera entonces el grado de  $R$  tendría que ser 1). Por tanto nuestras componentes deben ser de alguno de los otros tipos, y por tanto la órbita hacia adelante de todo punto en  $F_j$  converge a un punto fijo  $\zeta_j$  en la clausura de  $F_j$ .

Además toda componente de  $F$  incluyendo  $F_1$  y  $F_2$  son simplemente conexas, de lo que obtenemos que

$$\delta(F_1) = d - 1 = \delta(F_2)$$

este hecho junto con el hecho de que tenemos  $2d - 2$  puntos críticos, implican que la órbita de esta en  $F_1 \cup F_2$  y se acumula solo en los puntos  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$ . Supongamos ahora que  $F$  tiene otra componente, entonces ésta debe contener un algún ciclo de componentes disjunto de nuestras componentes invariantes. Entonces el ciclo debe intersectar a la órbita de los puntos críticos lo cual no es posible, o debe ser un disco de Siegel o anillo de Herman, pero estos se deben de acumular en una infinidad de puntos lo que también es imposible  $\square$ .

**TEOREMA 2.5.10.** *Si todo punto crítico de  $R$  es pre-periódico, entonces  $J = \overline{C}$ .*

**DEMOSTRACIÓN:** Supongamos que  $F$  no es vacío, entonces  $F$  debe contener una componente periódica bajo  $R$ , y debe ser de alguno de los tipos discutidos, pero si tuviéramos un ciclo atractor entonces existiría un punto crítico periódico, y en los otros casos tendríamos un punto crítico con órbita infinita, ninguna de esas cosas puede pasar y por tanto  $J = \overline{C}$   $\square$ .

Para polinomios tenemos el siguiente teorema y dos corolarios aunque no daremos las demostraciones.

**TEOREMA 2.5.11.** *Sea  $P$  un polinomio de grado  $d$ ,  $d \geq 2$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i)  $F_\infty$  es simplemente conexa;
- (ii)  $J$  es conexo;
- (iii)  $F_\infty$  no contiene puntos críticos de  $P$ .

COROLARIO 2.5.12. *Si:*

- (a) *toda punto crítico de  $P$  esta en  $J$ ; o bien*  
 (b) *toda punto crítico de  $P$  tiene órbita hacia adelante finita,*  
 entonces  $F_\infty$  *es simplemente conexa.*

COROLARIO 2.5.13. *Si todo punto crítico finito de  $P$  es pre-periódico, entonces  $F(R)$  es conexo y simplemente conexo.*

La siguiente cota para los ciclos no repulsores fue obtenida por Shishikura en su tesis de maestría, usando cirugía casi-conforme el mostró que mediante una perturbación analítica todos los ciclos indiferentes se pueden volver atractores, por razones ya conocidas acerca de la capacidad del autor, la demostración no es presentada.

TEOREMA 2.5.14. *Una transformación racional  $R$  de grado  $d$ ,  $d \geq 2$  tiene a lo más  $2d - 2$  ciclos no repulsores.*

Por último presentemos un poco mas de material, aunque esta vez para no alargarnos de más no incluiremos las demostraciones de los teoremas, incluso la siguiente discusión es bastante corta, e incluso el conocedor del tema podría tacharla de insuficiente.

Sea  $R$  una transformación racional con conjunto de Julia  $J$ , y sea  $\omega(z)|dz|$  la métrica Riemanniana definida en alguna vecindad  $W$  de  $J$  (por tanto  $\omega$  es positiva y continua sobre  $W$ ). Si  $z$  esta en  $W \cap R^{-1}(W)$ , entonces el cambio de escala de  $R$  en  $z$  (medido en la métrica  $\omega$ ) es

$$\|R'(z)\| = \frac{\omega(Rz)|R'(z)|}{\omega(z)}$$

definido en alguna vecindad de  $J$ .

DEFINICIÓN. Decimos que  $R$  es expansiva sobre  $J$  (con respecto a  $\omega$ ) si existen números positivos  $c$  y  $\lambda$ , con  $\lambda \geq 1$  y  $\|(R^n)'(z)\| \geq c\lambda^n$ ,  $n \geq 1$ , en  $J$ . Llamamos a  $\lambda$  una constante de dilatación de  $R$  en  $J$ .

Demos otra definición aunque ésta no será ocupada inmediatamente.

DEFINICIÓN. Sea  $f$  una transformación holomorfa de una superficie de Riemann en si misma, y  $X$  un conjunto compacto tal que  $f(X) \subset X$ , decimos que  $f$  es hiperbólica en  $X$  si  $f$  es expansiva (o si es una contracción) en  $X$ , o si es la unión de un subconjunto compacto  $X^+$  con  $f(X^+) \subset X^+$  donde  $f$  es expansiva y un subconjunto compacto  $X^-$  con  $f(X^-) \subset X^-$  donde  $f$  es una contracción.

Y bueno para no dejar aun lado los puntos críticos tenemos:

TEOREMA 2.5.15. *Dada  $R$  una transformación racional de grado mayor o igual a 2, las siguientes son equivalentes:*

- (i)  *$R$  es expansiva y por tanto hiperbólica en su conjunto de Julia.*  
 (ii) *La órbita hacia adelante de cada punto crítico converge hacia alguna órbita periódica atractora.*

Un conjunto de la esfera de Riemann es un conjunto de Cantor si es no vacío, cerrado, perfecto (es decir no tiene puntos aislados) y totalmente desconexo (cada componente es un solo punto).

**TEOREMA 2.5.16.** *Sea  $R$  una transformación racional de grado  $d$ ,  $d \geq 2$ , y sea  $\zeta$  un punto fijo (súper)atractor de  $R$ . Si todos los puntos críticos de  $R$  caen en la cuenca inmediata de atracción de  $\zeta$ , entonces  $J(R)$  es un Cantor.*

**TEOREMA 2.5.17.** *Suponga que  $R$  satisface las hipótesis del teorema anterior, entonces:*

- (i) *para un conjunto denso de  $\zeta$  en  $J$ , la órbita hacia delante de  $\zeta$  es densa en  $J$ ; y*
- (ii) *los puntos periódicos son densos en  $J$ .*

**TEOREMA 2.5.18.** *Sea  $P$  un polinomio de grado  $d$ ,  $d \geq 2$ . Si  $F_\infty$  es implemente conexa, y si  $P$  es expansivo en su conjunto de Julia  $J$ , entonces  $J$  es una curva cerrada y cada punto de  $J$  es accesible de  $F_\infty$ .*

**TEOREMA 2.5.19.** *Sea  $P$  un polinomio expansivo en su conjunto de Julia, y supongamos que la cuenca inmediata de atracción  $F_0$  de un punto fijo (súper)atractor  $\zeta$  de  $P$  es implemente conexo. Entonces  $J$  es una curva cerrada y cada punto de  $J$  es accesible de  $F_\infty$ .*

**TEOREMA 2.5.20.** *Sea  $P$  un polinomio expansivo en su conjunto de Julia, y supongamos que  $F(P)$  es la unión de exactamente dos componentes, cada una conteniendo un punto fijo (súper)atractor. Entonces  $J(P)$  es la frontera compartida por las componentes y es una curva de Jordan.*

## 2.6. El espacio de parámetros

Consideremos la familia de polinomios cuadráticos  $P(z) = az^2 + bz + c$ , a primera vista nuestra función depende de tres parámetros, pero en realidad podemos realizar una conjugación afín y transformar nuestro problema a polinomios del tipo

$$P_c = z^2 + c$$

o incluso conjugar a otras formas normales como

$$P_\lambda = \lambda z + z^2$$

donde ahora nuestras familias solo dependen de un parámetro, de hecho nuestra segunda conjugación se obtiene moviendo el punto fijo con multiplicador  $\lambda$  al origen, es decir mediante  $h(w) = w - \frac{\lambda}{2}$ , esto se puede observar en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathbb{C}} & \xrightarrow{P_\xi} & \bar{\mathbb{C}} \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \bar{\mathbb{C}} & \xrightarrow{P_\lambda} & \bar{\mathbb{C}} \end{array}$$

la importancia de poner a nuestra familia dependiendo de un parámetro es que podemos relacionar el  $c$ -plano (respectivamente  $\lambda$ -plano) con nuestro estudio de dinámica. En nuestro caso como solo tenemos un punto crítico en 0 (resp. en  $-\frac{\lambda}{2}$ ) podemos observar que en el espacio de parámetros hay también una dicótoma, esta dado por la condición de que el punto crítico sea acotado o no, si es acotado tenemos  $J_c$  conexos, en caso contrario tendremos  $J_c$  conjuntos de cantor.

DEFINICIÓN. El conjunto de Mandelbrot correspondiente a la familia cuadrática de define por  $M = \{c \in \mathbb{C} \mid J_c \text{ es conexo}\}$ ; Más aún por nuestras observaciones si denotamos como  $z_0$  al punto crítico entonces  $M = \{c \in \mathbb{C} \mid P_c^n(z_0) \not\rightarrow \infty \text{ cuando } n \rightarrow \infty\}$ .

El estudio de éste conjunto no es para nada trivial, de hecho es un objeto bastante intrincado, pero para hacer notar éste hecho hablemos un poco de él. La primera imagen del conjunto de Mandelbrot fue obtenida mientras se realizaba un estudio de grupos Kleinianos por Brooks y Matelski, y luego más tarde Mandelbrot realizó dibujos con mayor calidad, aunque por la naturaleza de las computadoras de ese tiempo el conjunto parecía disconexo, Douady y Hubbard probaron:

TEOREMA 2.6.1. *El conjunto de Mandelbrot es conexo.*

La prueba tiene sus bases en la construcción mediante el uso de dinámica, una transformación conforme  $\psi : \mathbb{C} - M \rightarrow \mathbb{C} - \bar{D}$  y concluir que  $\bar{\mathbb{C}} - M$  es simplemente conexo.

Éstos dos próceres de la dinámica analizaron las componentes del interior del conjunto de Mandelbrot y bueno he aquí donde surgirá un problema aún sin resolver, ellos definieron el siguiente conjunto:

$$H = \{c \in \mathbb{C} \mid P_c \text{ tiene órbita (súper) atractora finita}\}$$

y esto implica que si  $c \in H$ , entonces  $P_c$  es expansiva en su conjunto de Julia y por tanto hiperbólica (de ahí la letra  $H$ ), parece ser claro que  $H \subset M^\circ$ , así pues la conjetura es que  $H = M^\circ$ , y una componente  $U$  del interior de  $M$  es hiperbólica, si existe alguna  $c \in U$  para la cual  $P_c$  es hiperbólica, de éste modo podemos poner la conjetura de la siguiente forma:

CONJETURA 2.6.2. *Toda componente del interior del conjunto de Mandelbrot es hiperbólica.*

Debido a que si tomamos  $c \notin M$  todos los puntos críticos tienden al punto fijo súper-atractor  $\infty$ , entonces  $P_c$  es hiperbólica, una equivalencia más esta dada por:

CONJETURA 2.6.3. *El conjunto  $\{c \in \mathbb{C} \mid P_c \text{ es hiperbólica}\}$  es un subconjunto abierto denso de la esfera de Riemann.*

En el contexto general la cosa es del siguiente modo:

CONJETURA 2.6.4. *El conjunto de transformaciones racionales hiperbólicas es abierto y denso en el espacio de todas las transformaciones racionales de grado  $d$ .*

Pero regresando al caso de un polinomio cuadrático, Douady y Hubbard demostraron que una conjetura más fuerte que la conjetura 2.6.3 es:

CONJETURA 2.6.5. *La frontera del conjunto de Mandelbrot es localmente conexa.*

Aún más usando la renomarlización (que por cierto tiene que ver con la herramienta de las transformaciones parecidas a polinomios, en original *polynomial-like mappings*, la cual usa transformaciones casi-conformes, esto último por si se preguntaban la razón de la falta de matemática formal en ésta sección ), el trabajo de Yoccoz “simplifica” las cosas con el siguiente teorema:

TEOREMA 2.6.6. *Supongamos que  $c \in M$  y que  $P_c$  no es infinitamente renormalizable. Entonces  $M$  es localmente conexo en  $c$ .*

De éste modo concluimos la sección, aunque otra vez se nos puede acusar de egoístas al no presentar muchos de los resultados o herramientas, o incluso la relación del conjunto de parámetros con los conjuntos de Julia. Bueno aunque los dejamos con una serie de dibujos para estimular la capacidad inquisitiva del lector.

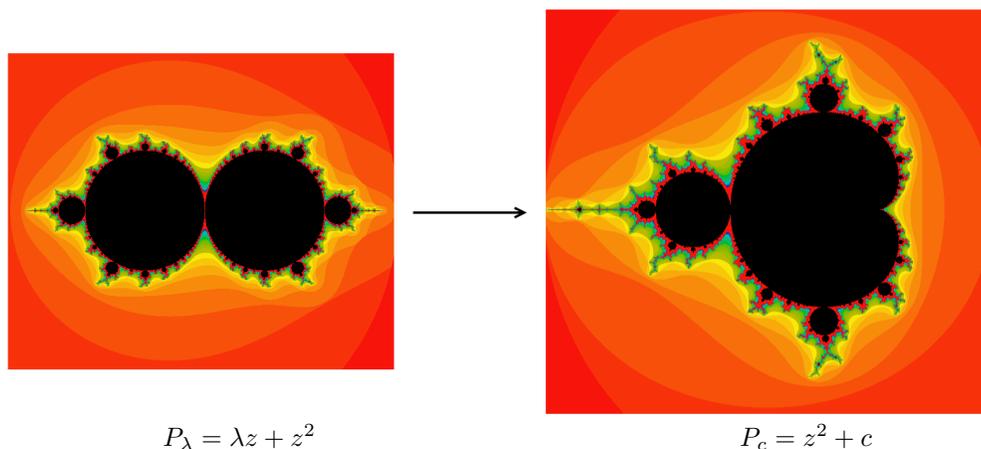
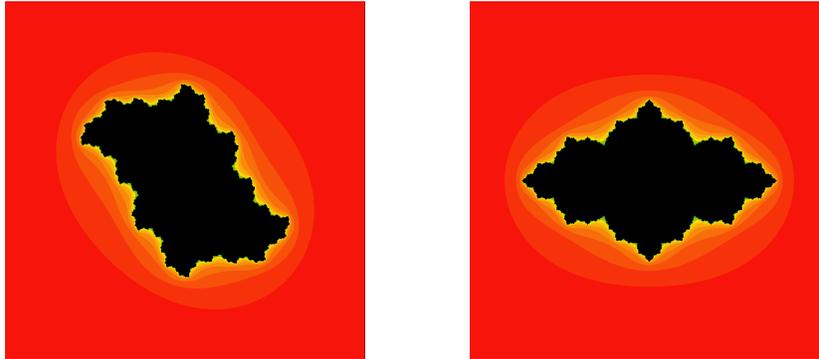
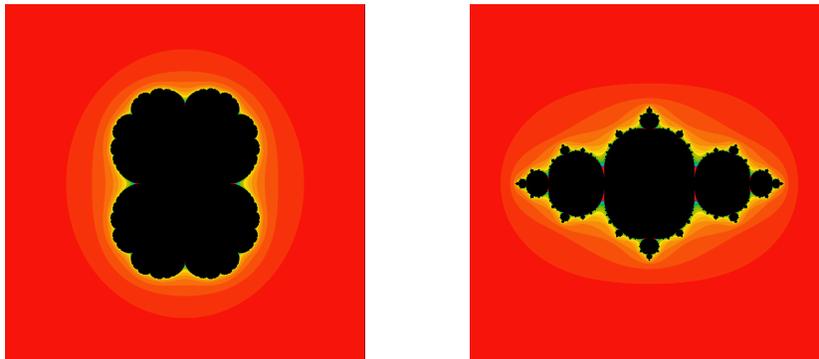
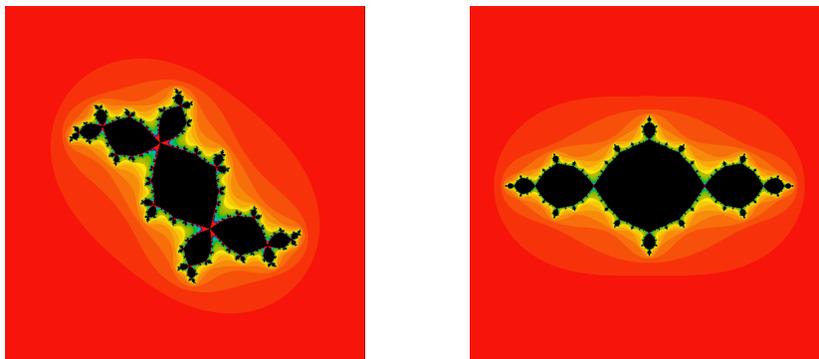


FIGURE 2.6.1. Espacios de parámetros

FIGURE 2.6.2. Cuasi-círculos  $c = 0.5i$  y  $c = -0.6$ FIGURE 2.6.3. Conjuntos de Julia con ciclos parabólicos  $c = 0.25$  y  $c = -0.75$ FIGURE 2.6.4. Conjuntos de Julia con ciclos súper atractores  $c \approx -0.122561 + 0.744862i$  y  $c = -1$

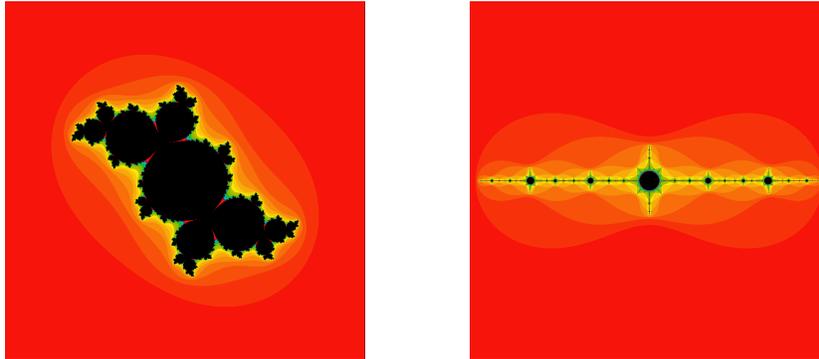


FIGURE 2.6.5. Uno con ciclo parabólico y otro con súper atractor  $c$  correspondiente a  $\lambda = \frac{2\pi}{3}$  y  $c \approx -1.754878$

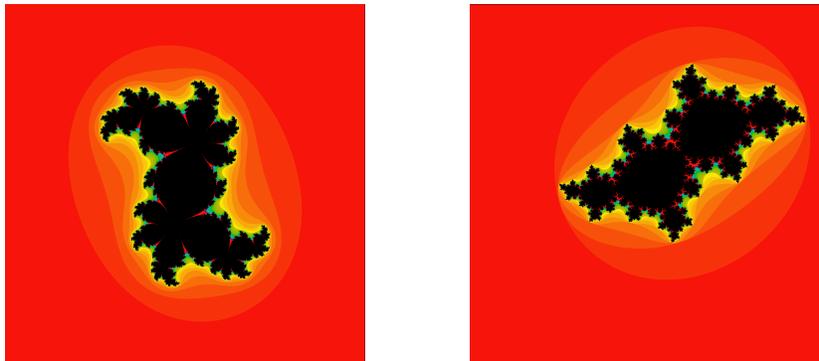


FIGURE 2.6.6. Uno con ciclo parabólico y con disco de Siegel  $c$  correspondiente a  $\lambda = \frac{2\pi}{5}$  y  $\lambda$  igual a la razón dorada

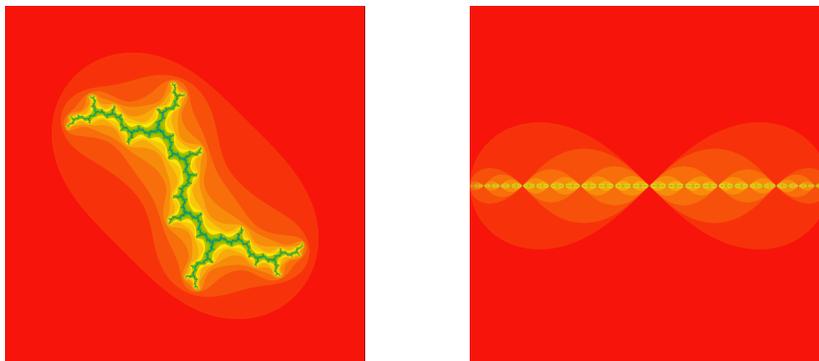


FIGURE 2.6.7. Dendritasc =  $i$  y  $c = -2$

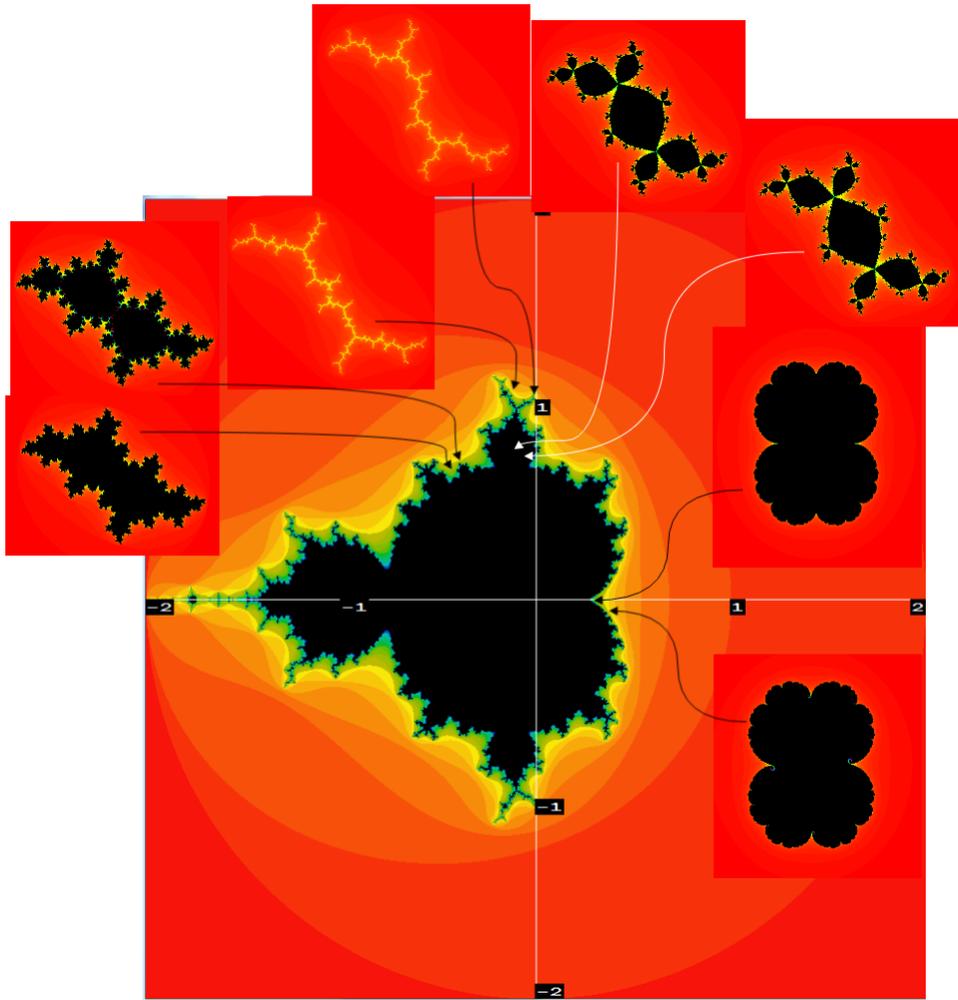


FIGURE 2.6.8. El espacio de parámetros y algunos conjuntos de Julia.

## CAPÍTULO 3

# Dinámica polinomial alternada

### Introducción mínima y observaciones

Mucho se sabe acerca de la dinámica de polinomios cuadráticos (aunque aún hay bastante que decir sobre ellos), incluso la literatura está invadida de ejemplos del caso polinomial cuadrático, debido tal vez a dos razones, a que se supone es el más simple después de las transformaciones racionales de grado uno y por experiencia se ha encontrado que la mayoría de los fenómenos dinámicos ocurren aquí. Por tanto una de las intenciones de ésta tesis es analizar un caso un poco diferente al que pondremos el nombre de dinámica polinomial alternada (cuadrática, aunque éste último adjetivo no se mencione), es decir intentaremos entender la dinámica de los polinomios de la forma

$$p_{c_1, c_2}(z) = (z^2 + c_1)^2 + c_2$$

con  $z, c_1$  y  $c_2$  complejos; claramente se puede notar que éste es un subcaso de la dinámica de polinomios cuárticos

$$P(z) = az^4 + bz^3 + cz^2 + d$$

y que el caso cuadrático está inmerso en él. Dividiremos el trabajo en tres secciones, claramente marcadas por la dependencia de dos parámetros de nuestro polinomio, para ser más explícitos:

- En la primera sección supondremos que  $c_1 = c_2 = 0$ , es decir consideraremos el polinomio  $p(z) = z^4$ ;
- En la segunda que  $c_1 = 0$  ó bien que  $c_2 = 0$ , aunque por conjugación se pueden considerar las combinaciones de  $c_1$  y  $c_2$  no solo de esa manera para entrar en éste caso, mejor dicho estudiaremos polinomios de la forma  $p_c = z^4 + c$ ; y .
- Por último tomemos  $c_1, c_2 \neq 0$ , claramente tenemos al polinomio  $p_{c_1, c_2}(z) = (z^2 + c_1)^2 + c_2$  con excepción del caso de arriba. Automáticamente piense el lector en el caso  $c_1 = c_2$ .

Antes de entrar en materia recordemos algunos hechos útiles, si  $P$  es un polinomio de grado  $d$  mayor o igual a dos, es claro que  $\infty$  es un punto fijo súper atractor, y además que las iteradas de  $P$  son acotadas en las componentes acotadas de  $F$  debido al principio del máximo, por lo cual la cuenca de atracción  $A(\infty)$  de  $\infty$  es conexa. Además el conjunto de Julia coincide con la frontera de ésta cuenca. Como sabemos el criterio para saber cuando el Julia asociado al polinomio  $P$  es conexo, está dado en función de los puntos críticos de  $P$ .

**TEOREMA 3.0.7.** *El conjunto de Julia es conexo si y sólo si no existen puntos críticos finitos de  $P$  en  $A(\infty)$ , es decir, si la órbita hacia delante de cada punto crítico finito es acotada.*

**DEMOSTRACIÓN:** Sea  $\varphi$  que conjugue  $P(z)$  con  $\zeta^d$  cerca de  $\infty$ , con  $\varphi(z) = z + o(1)$  en  $\infty$ , tenemos que  $\log |\varphi(z)|$  coincide con la función de Green  $G(z)$  para  $A(\infty)$  con polo en  $\infty$ . La ecuación funcional para  $\varphi(z)$  nos da una ecuación funcional para la función de Green,

$$G(P(z)) = d \cdot G(z), \quad z \in A(\infty)$$

de este modo  $P$  transforma las curvas de nivel de  $G$  a curvas de nivel, incrementando en  $d$  el valor de la función de Green,  $d$  corresponde al número de hojas. La función de Green nos proporciona una medida precisa de la velocidad de escape a  $\infty$ . El exterior  $\{G > r\}$  de la curva de nivel es invariante bajo  $P$ , y  $P$  transforma este de modo  $d$  a uno sobre  $\{G > rd\}$ . Para un  $r$  grande,  $\varphi(z)$  es definida sobre  $\{G > r\}$  y transforma este conformemente sobre  $\{|\zeta| > e^r\}$ . La ecuación  $\varphi(z) = (\varphi(p(z)))^{\frac{1}{d}}$  nos permite extender  $\varphi(z)$  a  $\{G > \frac{r}{d}\}$  ya que los puntos críticos finitos de  $P$  no pertenecen a este dominio.

Ahora como no hay puntos críticos de  $P$  en  $A(\infty)$ , podemos prolongar  $\varphi$  indefinidamente a todo  $A(\infty)$ , y  $\varphi$  transforma  $A(\infty)$  conformemente sobre el complemento  $\{|\zeta| > 1\}$  del disco unitario cerrado en el  $\zeta$ -plano. En particular,  $A(\infty)$  es simplemente conexo, y el conjunto de Julia  $J = \partial A(\infty)$  es conexo  $\square$ .

**Nota:** Si existieran puntos críticos finitos de  $P$  en  $A(\infty)$ , extenderíamos  $\varphi$  hasta alcanzar una línea de nivel  $\{G = r\}$  de la función de Green la cual contiene un punto crítico de  $P$ . El dominio  $\{G > r\}$  es simplemente conexo y es transformado conformemente por  $\varphi$  sobre  $\{|\zeta| > e^r\}$ . El dominio forma varias cúspides en el punto crítico, y  $\varphi(z)$  se acerca a distintos valores cuando  $z$  se acerca al punto crítico a través de las diferentes cúspides. La línea de nivel  $\{G = r\}$  consiste al menos dos curvas cerradas simples que se tocan en el punto crítico. Dentro de esas curvas hay puntos de  $J$ , o sino  $G$  debe ser armónica y positiva, por tanto constante dentro de la curva. Por tanto  $J$  es disconexo. La situación totalmente contraria es cubierta por el siguiente teorema.

**TEOREMA 3.0.8.** *Si  $P^n(q) \rightarrow \infty$  para cada punto crítico  $q$ , entonces el conjunto de Julia  $J$  es totalmente disconexo, y además  $J$  es un cantor.*

**DEMOSTRACIÓN:** Sea  $D$  un disco abierto grande el cual contiene a  $J$  tal que  $P(\overline{\mathbb{C}} \setminus D) \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$ . Eligiendo un  $N$  tan grande que  $P^N$  lleve los puntos críticos de  $P$  a  $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ . Para  $n \geq N$  no hay puntos críticos en  $\overline{D}$ , así que todas las ramas inversas  $P^{-n}$  están definidas y transforma  $\overline{D}$  conformemente en  $D$ . Sea  $z_0 \in J$ , entonces  $P^n(z_0) \in J$ , definiendo  $f_n$  la rama inversa de  $P^n$  que transforma  $P^n(z_0)$ . Las  $f_n$  son uniformemente acotadas en alguna vecindad de  $\overline{D}$ , por tanto forman una familia normal ahí, como  $f_n(z)$  se acumula en  $J$  para  $z \in D \cap A(\infty)$ , cualquier función límite  $f$  transforma  $D \cap A(\infty)$  en  $J$ , además  $J$  no contiene conjuntos abiertos y por tanto  $f$  debe ser constante, por lo cual  $f_n(\overline{D})$  tiene diámetro que tiende a cero, así  $f_n(\partial D)$  es disjunto de  $J$ , y  $\{z_0\}$  debe ser una componente conexa de  $J$ , es decir  $J$  es totalmente disconexo. Para la última sentencia no hay nada que probar ya que  $J$  es perfecto, cerrado y no vacío, además de totalmente disconexo como acabamos de probar  $\square$ .

### 3.1. Dinámica del polinomio $P(z) = z^4$

El caso mas sencillo de todos es cuando tenemos  $c_1 = c_2 = 0$  y por tanto  $p_{c_1, c_2}(z) = P(z) = z^4$ .

Escribamos a  $z = re^{i\rho}$  y observemos que  $P(z) = r^4 e^{4i\rho}$ , de lo que podemos concluir que nuestra función simplemente eleva el modulo a la cuarta potencia y cuadruplica el argumento. Así podemos calcular la órbita hacia adelante de un punto de la siguiente manera

$$O^+(z_0) = \{z_0 = re^{i\rho}, z_1 = P(z_0) = r^4 e^{4i\rho}, \dots, z_n = P(z_{n-1}) = r^{4^n} e^{4^n i\rho}\}$$

y de este modo podemos apreciar:

- (1)  $z_n \rightarrow 0$  cuando  $|z_0| < 1$ ; mientras
- (2)  $z_n \rightarrow \infty$  cuando  $|z_0| > 1$

es decir las órbitas de puntos con la primer característica se acumulan en el origen, mientras la órbita de los puntos de la otra forma tiende a infinito.

DEFINICIÓN. Al conjunto de los puntos de acumulación de una subsucesión de  $O^+(z_0)$  lo denotaremos por  $\omega(x)$ . Por lo cual la órbita cerrada de  $z_0$  es  $O^+(z_0) \cup \omega(x) = \overline{O^+(z_0)}$ .

$$\text{De éste modo } \overline{O^+(z_0)} = \begin{cases} O^+(z_0) \cup \{0\} & \text{si } |z_0| < 1 \\ O^+(z_0) \cup \{\infty\} & \text{si } |z_0| > 1 \end{cases}$$

Podemos decir un poco más, como 0 e  $\infty$  son puntos fijos súper atractores entonces las cuencas de atracción  $A(0) = \{z \in \bar{\mathbb{C}} \mid |z_0| < 1\}$  y  $A(\infty) = \{z \in \bar{\mathbb{C}} \mid |z_0| > 1\}$  están contenidas en  $F(P)$ , de hecho debido a que ambas son completamente invariantes éstas cuencas son las únicas componentes de  $F$  digamos  $F_0$  y  $F_\infty$ , y ambas son simplemente conexas, notemos que hemos partido a la esfera en tres piezas el disco abierto unitario  $\mathbb{D}$ , la circunferencia unitaria  $\mathbb{S}^1$  y el exterior del disco unitario cerrado  $\bar{\mathbb{C}} - \mathbb{D}$ . La única parte de la esfera que nos queda por analizar es  $\mathbb{S}^1$ , que por ser la frontera de las componentes  $F_0$  y  $F_\infty$  la podemos identificar con el conjunto de Julia, ésto es  $J = \mathbb{S}^1$ . Otro hecho a recalcar es que el punto crítico 0 es atraído a una órbita periódica, mejor dicho él es el atractor, por lo cual  $P$  es expansiva en  $J$  y por tanto hiperbólica, ésta última afirmación nos dejara ver más adelante que nuestra transformación es sensible a las condiciones iniciales en  $J$ , para aclarar veamos la siguiente definición.

DEFINICIÓN. Sea  $(E, d)$  un espacio métrico y  $F : E \rightarrow E$  continua. Diremos que  $F$  es *sensible a las condiciones iniciales* si existe una constante  $\beta > 0$  tal que para cualquier  $p \in E$  y cualquier vecindad  $U$  de  $p$ , existe  $n > 0$  y  $q \in U$  tal que  $d(F^n(p), F^n(q)) > \beta$ .

Debido a lo anterior centraremos nuestro interés en la dinámica de  $z^4$  sobre la circunferencia unitaria  $\mathbb{S}^1$ , es decir para los  $z$  tales que  $|z| = 1$ , o equivalentemente  $z = e^{i\theta}$ , en éste caso, la acción de  $P$  es simplemente cuadruplicar el argumento de  $z$ . Y es útil recordar el hecho de que cuadruplicar el argumento (o cualquier cantidad) no es más que doblar dicho argumento un par de veces, así que simplifiquemos nuestro problema analizando la transformación  $R(z) = z^2$  sobre  $\mathbb{S}^1$ . Para

ésto consideremos a  $\mathbb{S}^1$  como el grupo de ángulos planos orientados, tomando la vuelta completa como su unidad, a  $\mathbb{S}^1$  también lo podemos precisar como el cociente del intervalo  $[0, 1]$  con la relación de equivalencia que identifica al 0 con el 1, y de manera más general como el cociente  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , de éste modo tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN. A cada elemento de  $\mathbb{S}^1$  le llamaremos un *ángulo*, y dicho ángulo es *racional* (respectivamente *irracional*) si sus representantes son racionales (respectivamente irracionales).

Una herramienta que permite simplificar las demostraciones es la representación binaria de los elementos de  $\mathbb{S}^1$  y la introducción de la dinámica simbólica. La formalización de lo anterior va de la siguiente forma:

DEFINICIÓN. Sea  $\sum_2^+ = \{\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = x \mid x_n \in \{0, 1\} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  el espacio espacio de sucesiones en dos símbolos, definimos a la transformación  $\theta_2 : \sum_2^+ \rightarrow [0, 1]$  como

$$\theta_2(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x_n}{2^n},$$

es decir,  $\theta_2(x)$  es el número en  $[0, 1]$  cuya expansión en base 2 se estipula.

OBSERVACIÓN. La transformación  $\theta_2$  es sobreyectiva, pero no inyectiva ésto debido a que algunos número en el intervalo  $[0, 1]$  admiten dos representaciones binarias.

PROPOSICIÓN 3.1.1. *Los únicos números que admiten dos representaciones son de la forma  $\frac{1}{2^n}$  con  $n$  natural.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que  $\theta_2(x) = \theta_2(y)$ , es decir que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x_n}{2^n} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{y_n}{2^n}$ , así

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x_n - y_n}{2^n} = 0$$

y una posibilidad es que  $x_n = y_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , consideremos ahora que las sucesiones no son iguales, es decir que existe un  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $x_N \neq y_N$  o equivalentemente  $y_N = 1 - x_N$ , supongamos sin mayor problema que  $x_N = 1$ , entonces

$$0 = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{x_n}{2^n} + \frac{1}{2^N} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{y_n}{2^n} - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{y_n}{2^n}$$

de lo cual.

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{y_n - x_n}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{y_n - x_n}{2^n} = \frac{1}{2^N}$$

observamos que el primer termino de la suma debe ser cero, sino nuestra suma rebasaría a  $\frac{1}{2^N}$ , por tanto  $y_n = x_n$  para toda  $n < N$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , y que la expresión  $y_n - x_n = 1$ , para  $n \geq N + 1$ , de esta manera  $y_n = 1 + x_n$  para  $n \geq N + 1$ , de lo cual  $x_n = 0$ ,  $y_n = 1$  para toda  $n \geq N + 1$ , concluyendo tenemos que los únicos números con las dos expansiones mostradas aquí son de la forma  $\frac{1}{2^n}$  con  $n$  natural  $\square$

Hay que notar que la proposición de arriba nos dice que la transformación  $\theta_2$  no es inyectiva sólo en un conjunto numerable de puntos. En  $\Sigma_2^+$  se define la métrica

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$$

con lo cual  $\theta_2$  es de Lipschitz y por tanto continua, éste hecho es fácil de ver ya que

$$\begin{aligned} |\theta_2(x) - \theta_2(y)| &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{x_n}{2^n} - \frac{y_n}{2^n} \right| = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} = \\ &= d(x, y) \end{aligned}$$

La siguiente proposición proporciona un criterio para observar la cercanía de dos puntos en  $\Sigma_2^+$

PROPOSICIÓN 3.1.2. Sean  $x$  e  $y \in \Sigma$ ,  $x_n = y_n$  para toda  $n \leq N$  si y sólo si  $d(x, y) < \frac{1}{2^N}$ .

DEMOSTRACIÓN:

$\Rightarrow$ ] como  $x_n = y_n$  para toda  $n \leq N$ , entonces

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^N \frac{|x_n - y_n|}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N}$$

$\Leftarrow$ ] supongamos ahora que  $d(x, y) < \frac{1}{2^N}$  y que  $x_n \neq y_n$  para algún  $n \leq N$ , entonces por lo mismo que arriba

$$d(x, y) \geq \frac{1}{2^N}$$

y por tanto, si  $d(x, y) < \frac{1}{2^N}$ , entonces  $x_n = y_n$  para toda  $n \leq N$   $\square$ .

DEFINICIÓN. Definimos a la transformación  $\psi_2 : \Sigma_2^+ \rightarrow \mathbb{S}^1$  por:

$$\psi_2(x) = e^{2i\pi\theta_2(x)}$$

y el corrimiento de Bernoulli o transformación de avance  $\sigma_2^+ : \Sigma_2^+ \rightarrow \Sigma_2^+$  como:

$$\sigma_2^+(\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

donde  $y_n = x_{n+1}$ .

De este modo tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_2^+ & \xrightarrow{\sigma_2^+} & \Sigma_2^+ \\ \downarrow \psi_2 & & \downarrow \psi_2 \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{R} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

es decir,  $\psi_2 \circ \sigma_2^+(x) = P \circ \psi_2(x)$ . Con esto obtenemos que  $R$  es una versión de  $\sigma_2^+$ , es decir, una semi-conjugación entre  $R$  y  $\sigma_2^+$ .

Como se ha hecho notar anteriormente, se obtiene que  $R^n \circ \psi_2 = \psi_2 \circ (\sigma_2^+)^n$ , así que,  $\psi_2$  envía órbitas de  $\sigma_2^+$  sobre órbitas de  $R$ . Además  $\psi_2$  es continua y sobreyectiva, por lo cual envía un punto de órbita densa sobre un punto de órbita densa. Con esto podemos demostrar los siguientes resultados sobre la dinámica de  $R$ .

PROPOSICIÓN 3.1.3.

(i) *Los puntos de órbita finita son los puntos racionales, es decir, existen órbitas periódicas de todos los ordenes y su multiplicador es mayor que 1. Lo cual equivale a: La cerradura de las órbitas repulsoras es  $\Sigma_2^+$ .*

(ii) *Los puntos periódicos así como los pre-periódicos de  $\sigma_2^+$  son densos en  $\Sigma_2^+$ .*

(iii) *Si  $x_0$  es irracional, entonces se tienen las siguientes tres posibilidades*

- $\overline{O_{\sigma_2^+}(x_0)} = \Sigma_2^+$ ;

- $\overline{O_{\sigma_2^+}(x_0)}$  es la unión ajena de un conjunto de Cantor y un conjunto a lo sumo numerable de puntos aislados. Y es un cantor si y sólo si  $x_0 \in \omega(x_0)$ ;

- $\overline{O_{\sigma_2^+}(x_0)}$  es numerable.

(iv) *Los siguientes conjuntos son densos no numerables*

- Los puntos cuya órbita no es densa ni discreta;
- Los puntos cuya órbita es densa

(v) *La dinámica de  $\sigma_2^+$  es expansiva y en consecuencia es sensible a las condiciones iniciales.*

DEMOSTRACIÓN: Los puntos  $x \in \Sigma_2^+$  de la forma  $x = 00110011 \dots$  ó  $x = 000111000111 \dots$ , tienen órbita periódica y éstos son densos en  $\Sigma_2^+$ , lo cual demuestra el punto (i) y (ii). Para aproximar  $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  por un punto periódico, basta modificar  $x$  para  $n$  suficientemente grande y volverla periódica.

Un punto  $x \in \Sigma_2^+$  es de órbita densa si toda sucesión finita de 0's y 1's aparece como una subsucesión de  $x$ . Como el conjunto de las sucesiones finitas de 0's y 1's es numerable, basta superponer todas esas sucesiones finitas una tras la otra para obtener un punto de órbita periódica densa. Además éste proceso lo podemos hacer de una forma no numerable de formas. Ésto demuestra el punto 1 de (iii) y el punto 2 de (iv).

El punto  $x_0 = 101100111000 \dots$  es irracional y bajo  $\sigma_2^+$  su órbita no es densa en  $\Sigma_2^+$  ya que su órbita no se acumula en los elementos que contengan bloques de un determinado tamaño de 0's y 1's por ejemplo  $00110011 \dots$  ó  $000111000111 \dots$ . Lo cual demuestra el punto 3 de (iii).

Por otra parte, tomando  $x_N \in \Sigma_2^+$  tal que  $x_0$  se encuentra yuxtapuesta después de los primeros  $N$  elementos de la sucesión en  $x_N$ , entonces  $x_N \in \omega_{\sigma_2^+}(x_0)$ . Por tanto  $O_{\sigma_2^+}(x_0)$  posee una cantidad numerable de puntos de acumulación (irracionales) y, una cantidad numerable de puntos aislados. Ésto demuestra el punto 1 de (iv).

Si  $x \in \Sigma_2^+$  es irracional con  $\overline{O_{\sigma_2^+}(x_0)} \neq \Sigma_2^+$  como  $(\Sigma_2^+, d)$  es un espacio métrico compacto entonces  $O_{\sigma_2^+}(x_0)$  es un conjunto compacto totalmente desconexo. Si además  $x \in \omega(x)$ , es decir  $\overline{O_{\sigma_2^+}(x)}$  no tiene puntos aislados de acuerdo a un teorema de espacios métricos  $\overline{O_{\sigma_2^+}(x_0)}$  es homeomorfa a un conjunto de Cantor. Ésto demuestra el punto 2 de (iii). Si  $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \neq y = \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , entonces existe  $n$  natural tal que  $x_n \neq y_n$ . En consecuencia existe una constante  $\beta > 0$  tal que

$$d((\sigma_2^+)^n(x), (\sigma_2^+)^n(y)) > \beta$$

ésto demuestra (v)  $\square$ . Éstos resultados no agotan las propiedades dinámicas de  $(\Sigma_2^+, \sigma_2^+)$  y en consecuencia tampoco las de  $(\mathbb{S}^1, R)$ . En particular falta estudiar a  $(\mathbb{S}^1, R)$  desde un punto de vista ergódico (usando la medida de Lebesgue). Podemos también encajar a  $(\Sigma_2^+, \sigma_2^+)$  en  $(\Sigma_2, \sigma_2)$  donde  $\Sigma_2^+ = \{\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = x \mid x_n \in \{0, 1\} \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}\} = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  lo cual nos permite extender aún más el estudio de  $(\mathbb{S}^1, R)$ . Por ejemplo con la siguiente proposición:

**PROPOSICIÓN 3.1.4.** *La órbita hacia atrás de cualquier punto en  $\Sigma_2$  es densa en  $\Sigma_2$ .*

La demostración consta de argumentos similares a los de la proposición pasada y por tanto la omitimos. Todos los resultados para el caso  $z^2$ , se pueden fácilmente extender para nuestro caso, ésto lo podemos observar como ya hemos mencionado debido a que cuadruplicar el argumento no es mas que doblarlo un par de veces. Aún más la discusión y los resultados también son extensibles para toda transformación de la forma  $z \mapsto z^p$  con  $p$  un entero positivo.

### 3.2. Dinámica de la familia de funciones $z^4 + c$

En el modo en el que hemos estado trabajando, el siguiente caso a analizar es cuando solo uno de nuestros parámetros es cero. Tenemos dos casos: Si  $c_2 = 0$ ,  $P_{c_1 c_2}(z) = (z^2 + c_1)^2$  podemos conjugar  $P_{c_1 c_2}(z)$  con  $R(z) = z^4 + c_1$  mediante la función  $h(z) = z^2 + c_1$ , para ver esto observemos que  $h(P_{c_1 c_2}(z)) = h((z^2 + c_1)^2) = (z^2 + c_1)^4 + c_1 = R(z^2 + c_1) = R(h(z))$ .

Ahora si  $c_1 = 0$ , se obtiene simplemente  $P_{c_1 c_2}(z) = z^4 + c_2$ , esto significa que podemos reducir nuestro estudio por el momento a  $P_c(z) = z^4 + c$ , y nuestro interés, al igual que en el caso cuadrático recae en como el comportamiento dinámico de  $P_c$  depende del parámetro  $c$ , nuestro primer resultado es bastante claro debido a la teoría anterior y a que  $P_c$  tiene un único punto crítico finito en cero.

**PROPOSICIÓN 3.2.1.** *Si  $P_c^n(0) \rightarrow \infty$ , entonces el conjunto de Julia asociado  $J_c$  es totalmente desconexo. De otro modo  $P_c^n(0)$  es acotado y  $J_c$  es conexo.*

Inmediatamente surge la pregunta, ¿para qué valores de  $c$ ,  $J_c$  es conexo?, llamemos a este conjunto de parámetros el Mandelbrot y denotemos éste por  $M$ , es decir  $M = \{c \in \mathbb{C} \mid J_c \text{ es conexo}\}$ . Por tanto  $c \in M$  si y sólo si 0 no pertenece a la cuenca de atracción del punto fijo súper-atractor  $\infty$ , la siguiente proposición aclara nuestra pregunta.

PROPOSICIÓN 3.2.2. *El conjunto de Mandelbrot  $M$  es un subconjunto cerrado simplemente conexo del disco  $\{|c| \leq 2^{\frac{1}{3}}\}$ , el cual intersecta el eje real en el intervalo  $[-2^{\frac{1}{3}}, \frac{3}{4^{4/3}}]$ . Más aun,  $M$  consiste precisamente de los  $c$  tales que  $|P_c^n(0)| \leq 2^{\frac{1}{3}}$  para toda  $n \geq 1$ .*

DEMOSTRACIÓN: Si  $|c| \leq 2^{\frac{1}{3}}$ , como  $|P_0(c)| = |c|$ , entonces

$$|P_c^2(0)| = |c^4 + c| \geq |c|^4 - |c| = |c|(|c|^3 - 1)$$

y

$$|P_c^3(0)| = |(P_c^2(0))^4 + c| \geq |P_c^2(0)|^4 - |P_c^2(0)| = |P_c^2(0)|(|P_c^2(0)|^3 - 1)$$

$$\implies |P_c^3(0)| \geq |P_c^2(0)|(|c|^3 - 1) \geq |c|(|c|^3 - 1)^2$$

el penúltimo paso debido a que  $|P_c^2(0)| \geq |c|$  y que  $|c| \leq 2^{\frac{1}{3}}$ , continuando de este modo se tiene que  $|P_c^n(0)| \geq |c|(|c|^3 - 1)^n$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , por lo cual  $|P_c^n(0)| \rightarrow \infty$  y  $c \notin M$ .

Ahora supongamos que  $|P_c^m(0)| = 2^{\frac{1}{3}} + \delta > 2^{\frac{1}{3}}$  para alguna  $m \geq 1$ . Si  $|P_0(c)| = |c| > 2^{\frac{1}{3}}$  entonces  $c \notin M$ . Si  $|c| \leq 2^{\frac{1}{3}}$ , entonces  $|P_c^{m+1}(0)| \geq (2^{\frac{1}{3}} + \delta)^4 - 2^{\frac{1}{3}} \geq 2^{\frac{1}{3}} + 8\delta$ , y

$$|P_c^{m+2}(0)| \geq \left( (2^{\frac{1}{3}} + \delta)^4 - 2^{\frac{1}{3}} \right)^4 - 2^{\frac{1}{3}} \geq (2^{\frac{1}{3}} + 8\delta)^4 - 2^{\frac{1}{3}} \geq 2^{\frac{1}{3}} + 8^2\delta$$

Continuando de este modo  $|P_c^{m+k}(0)| \geq 2^{\frac{1}{3}} + 8^k\delta \rightarrow \infty$  y de nueva cuenta  $c \notin M$ . Esto prueba la sentencia final de la proposición, de la cual se sigue que  $M$  es cerrado. Por el principio del máximo,  $\mathbb{C} \setminus M$  no tiene componentes acotadas, por tanto  $\mathbb{C} \setminus M$  es conexo, y por ende  $M$  es simplemente conexo.

Si  $c$  es real, entonces  $P_c(x) - x$ :

No tiene raíces reales si  $c > \frac{3}{4^{4/3}}$ .

Tiene una raíz en  $\frac{1}{2^{2/3}}$  si  $c = \frac{3}{4^{4/3}}$ .

Tiene dos raíces reales cuando  $c < \frac{3}{4^{4/3}}$ .

Si  $c > \frac{3}{4^{4/3}}$ ,  $P_c^n(0)$  es creciente y se va a infinito, ya que cualquier punto límite debe satisfacer  $P_c(x) = x$ .

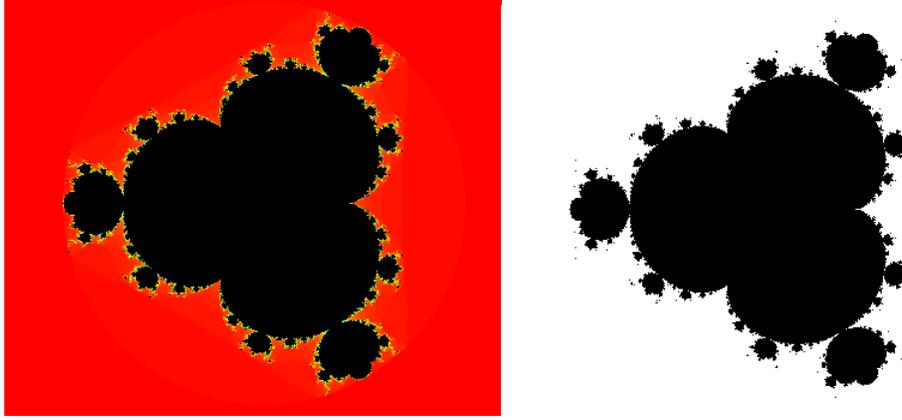


FIGURE 3.2.1. El conjunto de Mandelbrot

Si  $c \leq \frac{3}{4^{4/3}}$ , sea  $a$  la raíz más grande de  $P_c(x) - x$ , si además  $c > -2^{1/3}$ , se puede verificar que  $a \geq |c| = |P_c(0)|$ , entonces  $|P_c^n(0)| \leq a$  esto que implica  $|P_c^{n+1}(0)| = |(P_c^n(0))^4 + c| \leq a^4 + c = a$ , y por tanto la sucesión es acotada. Así  $M \cap \mathbb{R} = [-2^{1/3}, \frac{3}{4^{4/3}}]$   $\square$ .

PROPOSICIÓN 3.2.3. *El conjunto  $M$  es simétrico respecto al ángulo de rotación  $2\pi/3$*

DEMOSTRACIÓN: Para observar esto note que los polinomios de la forma  $P_c$  y  $P_d$  son conjugados si  $d = e^{2\pi i/3}c$ , escojamos  $h = z \cdot e^{2\pi i/3}$ , esta transformación hace al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathbb{C}} & \xrightarrow{P_c} & \bar{\mathbb{C}} \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \bar{\mathbb{C}} & \xrightarrow{P_d} & \bar{\mathbb{C}} \end{array}$$

$\square$

Lo siguiente que nos gustaría observar son las diversas posibilidades para  $J_c$  de  $P_c$ . Para esto hay que recordar el siguiente teorema debido a Douady, omitiremos la demostración pero se puede encontrar en [Ca] o en [Bla], la cual usa la idea implementada por Douady y Hubbard de transformaciones *parecidas* a polinomios. Esta idea es estimulada intuitivamente por los dibujos ya que parece ser que los conjuntos de Julia de polinomios de grado mayor tienen en ocasiones alguna parte similar a los conjuntos de Julia de grado menor.

DEFINICIÓN 3.2.4. Llamamos a la terna  $(f, U, V)$  de dominios acotados simplemente conexos  $U$  y  $V$  tales que  $\bar{U} \subset V$  y a una transformación propia holomorfa  $f : U \rightarrow V$  una transformación *parecida* a un polinomio. Por  $f$  propia se entiende que  $f$  es holomorfa en  $\bar{U}$ , y que transforma  $U$  sobre  $V$  con cubriente *ded* pliegues, y tal que  $f$  transforma  $\partial U$  sobre  $\partial V$ . Alternativamente una transformación *parecida* a un polinomio  $f : U \rightarrow V$ , donde  $U$  y  $V$  son dos conjuntos abiertos en  $\mathbb{C}$  acotados por curvas de Jordan  $\gamma$  y  $\gamma'$  con  $\bar{U} \subset V$ , es una transformación holomorfa la

cual puede ser extendida en una transformación continua  $\bar{U} \rightarrow \bar{V}$ , induciendo una transformación  $\gamma' \rightarrow \gamma$ . El grado de  $f$  es el grado de la transformación inducida  $\gamma' \rightarrow \gamma$ .

**TEOREMA 3.2.5. (Douady).** *Un polinomio  $P$  de grado  $d$  tiene a lo más  $d - 1$  ciclos no repulsores en el plano finito.*

*Idea de la demostración:* Una transformación parecida a un polinomio de grado  $d$  tiene  $d - 1$  puntos críticos contando multiplicidad. Si  $f$  es un polinomio de grado  $d$ , la transformación  $g : f^{-1}(D_R) \rightarrow D_R$  es una transformación parecida a un polinomio. Entonces podemos extender el siguiente teorema a las transformaciones parecidas a polinomios: cada ciclo atractor atrae al menos un punto crítico. La prueba puede ser copiada de la prueba para polinomios. Como consecuencia, una transformación parecida a un polinomio de grado  $d$  tiene a lo más  $d - 1$  ciclos atractores. La ventaja es que mientras que no es fácil modificar un polinomio para convertir todos los ciclos no repulsores en atractores (sin modificar el grado), es muy fácil para transformaciones parecidas a polinomios. Entonces una transformación parecida a un polinomio de grado  $d$  tiene a lo más  $d - 1$  ciclos no repulsores, o si no la transformación modifica nos daría una contradicción. Y esta condición también es verdadera para polinomios.

En nuestro caso debido a la multiplicidad del punto crítico, tenemos a los más un ciclo periódico de las componentes acotadas de las componentes acotadas de  $F_c$ , ya que por el teorema de Sullivan no hay componentes errantes, y por tanto, toda componente acotada de  $F_c$  es eventualmente iterada en el ciclo, es decir es eventualmente periódica. Además tenemos el siguiente teorema.

**TEOREMA 3.2.6.** *Las componentes periódicas de un polinomio no pueden ser anillos de Herman.*

**DEMOSTRACIÓN:** Probaremos el teorema aplicando el principio del máximo a la familia de funciones  $\{P_c^n\}$ . Supongamos que una de las componentes digamos  $A$  es un anillo de Herman. Sea  $\ell$  cualquiera de las curvas de Jordan invariantes en  $A$ . Sea  $U$  el disco abierto acotado por  $\ell$  y que no contenga a infinito. Como  $U \cap J(P_c) \neq \emptyset$  y no estamos tratando con el caso en el cual la cardinalidad de  $E(P_c)$  es dos. Si lo estuviéramos podríamos conjugar  $P_c$  a alguna transformación  $z^d$ . Podemos concluir que  $\cup P_c^n(U) = \mathbb{C}$ , lo cual contradice el principio del máximo aplicado a las funciones  $P_c^n|_U$  ya que  $P_c^n(\ell) = \ell \square$ .

Con estas consideraciones usando el teorema de clasificación de Sullivan nos deja las siguientes cuatro posibilidades para  $c \in M$ .

- (1) Existe un ciclo atractor para  $P_c$ . En este caso tenemos dos opciones, existe un punto fijo atractor, en cuyo caso existe solo una componente acotada de  $F_c$ . O el ciclo tiene longitud dos o mayor, y por tanto tenemos infinitas componentes acotadas de  $F_c$ . Además  $J_c$  es localmente conexo.
- (2) Existe un ciclo parabólico para  $P_c$ . También aquí nos encontramos con dos casos, existe un punto fijo con multiplicador 1, y existe una única componente de  $F_c$ . O bien el ciclo de las componentes parabólicas de  $F_c$  tiene longitud dos o más, y por ende infinitas componentes acotadas de  $F_c$ . El primer caso ocurre para tres valores de  $c$ , específicamente  $c = -\frac{3}{4^{4/3}}$ ,  $c = -\frac{3}{4^{4/3}}e^{\frac{1}{3}\pi i}$  y  $c = -\frac{3}{4^{4/3}}e^{\frac{5}{3}\pi i}$ . Nuevamente  $J_c$  es localmente conexo.

- (3) Existe un ciclo correspondiente a un disco de Siegel,  $U_1 \rightarrow U_2 \rightarrow \cdots \rightarrow U_m \rightarrow U_1 \rightarrow \cdots$ , las componentes de  $F_c$  en el ciclo son transformadas uno a uno sobre ellas mismas por  $P_c$ . Cada  $U_j$  en el ciclo es la imagen de  $U_{j-1}$  y de otras tres componentes acotadas de  $F_c$ , digamos  $A_j$ ,  $B_j$  y  $C_j$ , cada una de estas tiene cuatro distintas preimágenes, y cada una de esas cuatro preimágenes distintas más, y así sucesivamente, tal que las imágenes inversas de cada componente forma un árbol. Y como no puede haber ciclos atractores o neutros más que el ciclo de Siegel, concluimos que toda componente acotada de  $F_c$  es eventualmente iterada por  $P_c$  al ciclo de Siegel.
- (4) No existen componentes acotadas de  $F_c$ . Esto ocurre por ejemplo para  $c = -2^{\frac{1}{3}}$ ,  $c = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} + \frac{\sqrt{3}}{2^{\frac{2}{3}}}i$  y  $c = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} - \frac{\sqrt{3}}{2^{\frac{2}{3}}}i$  o  $c = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  para los cuales  $J_c$  es una dendrita y por consecuencia localmente conexo, pero podría pasar que  $J_c$  no sea localmente conexo.

Centrados en el primer punto de nuestro análisis, como nuestro objetivo es identificar los valores de  $c$  para los cuales tenemos un punto fijo atractor, notemos que

$$z^4 - z + c = 0$$

y

$$|4z^3| < 1$$

de este modo

$$c = z - z^4$$

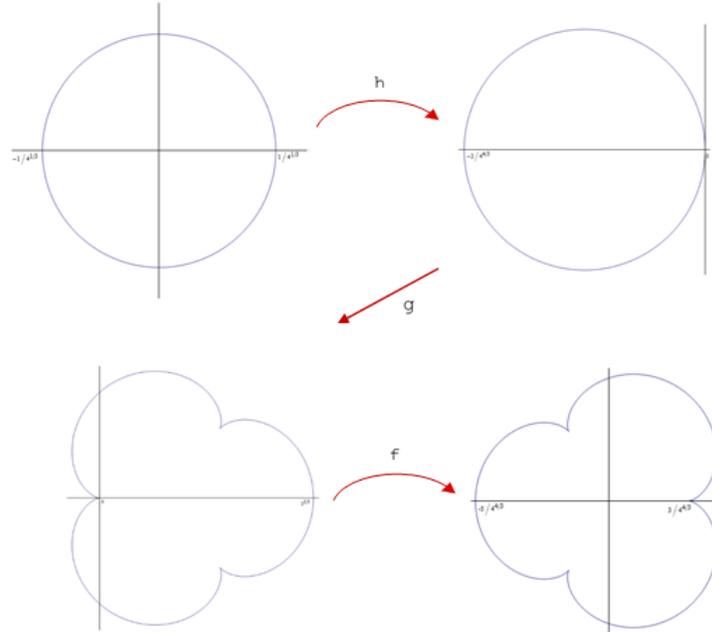
Y el conjunto de  $c$ 's que estamos buscando es la imagen del disco  $\{z \mid |z| < \frac{1}{4^{1/3}}\}$  bajo la transformación  $z - z^4$ . Como esta transformación es  $f \circ g \circ h$ , donde

$$h(z) = z - \frac{1}{4^{1/3}}$$

$$g(z) = \frac{3z^2}{2^{1/3}} + 2^{4/3}z^3 + z^4$$

$$f(z) = \frac{3}{4^{4/3}} - z$$

este conjunto le llamamos  $C$ .

FIGURE 3.2.2. Conjunto  $C$ 

Otra manera de entender esto es poniendo a  $z = \frac{1}{4^{1/3}}e^{i\theta}$  esto es  $z$  sobre el disco y usar la relación obtenida para  $c$  anteriormente, por tanto  $c = \frac{1}{4^{1/3}}e^{i\theta} - \frac{1}{4^{4/3}}e^{4i\theta}$  con  $\theta$  arbitrario.

PROPOSICIÓN 3.2.7. Sea  $C = \left\{ c \in \mathbb{C} \mid c = \frac{1}{4^{1/3}}e^{i\theta} - \frac{1}{4^{4/3}}e^{4i\theta} \right\}$  si  $c \in C$ , entonces  $J_c$  es una curva de Jordan y de hecho un cuasi-circulo.

DEMOSTRACIÓN: Sea  $\Gamma_0$  que denota el círculo de radio  $\frac{5}{4^{4/3}}$  alrededor del cero,  $\Gamma_0$  contiene al punto fijo atractor y al punto crítico de  $P_c$  es su interior. Más aun  $|P'_c(z)| > 1$  para  $z$  en el exterior de  $\Gamma_0$ . Para cada  $\theta \in \mathbb{S}^1$ , definamos una curva continua  $\gamma_\theta : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  con la propiedad de que  $z(\theta) = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_\theta(t)$  es una parametrización continua de  $J_c$ . Para definir  $z(\theta)$ , primero notamos que la preimagen  $\Gamma_1$  de  $\Gamma_0$  bajo  $P_c$  es una curva cerrada simple la cual contiene a  $\Gamma_0$  en su interior y la cual es transformada de modo cuatro a uno sobre  $\Gamma_0$ . El hecho de que  $\Gamma_1$  es una curva de Jordan se sigue de que el punto crítico y su imagen están en el interior de  $\Gamma_0$ . Por tanto las curvas  $\Gamma_0$  y  $\Gamma_1$  acotan una región anular  $A_1$  ( $A_1$  podría ser considerado como un dominio fundamental para el punto fijo atractor de  $P_c$ ).

Sea  $N$  el anillo estándar definido por  $N = \{re^{i\theta} \mid 1 \leq r \leq 2, \theta \text{ arbitrario}\}$ .

Escojamos cualquier difeomorfismo  $\varphi : N \rightarrow A_1$ , que transforme las fronteras interna y externa de  $N$  a las correspondientes fronteras de  $A_1$ . Esto nos permite definir el segmento inicial de.

$$\gamma_\theta = \varphi(re^{i\theta})$$

Esto es,  $\gamma_\theta$  es la imagen de una rayo en  $N$  bajo  $\varphi$ .

Para  $r \geq 2$ , podemos extender  $\gamma_\theta$  como sigue,  $P_c$  no tiene puntos críticos en el exterior de  $\Gamma_1$ , por tanto existe una curva de Jordan  $\Gamma_2$  la cual es transformada de modo cuatro a uno sobre  $\Gamma_1$ . Más aun,  $P_c$  transforma la región anular  $A_2$  entre  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  sobre  $A_1$ , de nuevo de modo cuatro a uno. Así, la preimagen de cualquier  $\gamma_\theta$  en  $A_1$  son cuatro curvas las cuales no se intersectan en  $A_2$ . Existe una única curva de esas que toca la frontera interna de  $\Gamma_1$ . Por tanto, para cada  $\theta$ , existe una única curva en  $A_2$  que contiene al punto  $\gamma_\theta(2)$ . Podemos entonces coser juntas esas dos curvas de la manera obvia en ese punto, produciendo una sola curva definida sobre el intervalo  $[1, 3]$ .

Continuando de este modo, extendemos cada  $\gamma_\theta$  sobre el intervalo  $[1, \infty)$ . Ahora recordemos que  $|P'_c(z)| > k > 1$  cuando  $z$  esta en el exterior de  $\Gamma_1$ , por lo cual las longitudes de cada extensión de  $\gamma_\theta$  decrecen geoméricamente. De esto se sigue que  $\gamma_\theta(t)$  converge uniformemente en  $\theta$  y que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_\theta(t) = z(\theta)$  sea un único punto en  $\mathbb{C}$  para cada  $\theta$ .

Afirmamos que  $z(\theta)$  parametriza una curva de Jordan en  $\mathbb{C}$ . Claramente,  $z(\theta)$  es continua, por la convergencia uniforme en  $\theta$ . Para mostrar que la curva imagen es simple, debemos probar que si  $z(\theta_1) = z(\theta_2)$ , entonces  $z(\theta) = z(\theta_1)$  para todo  $\theta$  con  $\theta_1 < \theta < \theta_2$ . Ya que si este no fuera el caso, entonces las porciones de las curvas  $\Gamma_1$ ,  $\gamma_{\theta_1}(t)$  y  $\gamma_{\theta_2}(t)$  deberían acotar a una región simplemente conexa que contuviera a  $z(\theta)$  en su interior, esto implica que exista una vecindad de  $z(\theta)$  cuya imagen bajo  $P_c^n$  permaneciera acotada. Por tanto  $z(\theta) \notin J_c$ , lo cual es imposible  $\square$ .

Es claro que también hemos entendido de algún modo el punto número dos, pues la frontera  $\partial C$  consiste precisamente de los valores  $c$  para los cuales  $P_c$  tiene un punto fijo neutral. La figura 3.2.4 muestra imágenes para valores de  $c$ , donde  $J_c$  es un casi-círculo.

Lo que nos concierne ahora es el caso general de ciclos atractores.

**TEOREMA 3.2.8.** *Supongamos que existe un ciclo atractor de longitud  $m$  para  $P_a$ . Entonces  $a$  pertenece al interior de  $M$ . Más si  $W$  es la componente del interior de  $M$  donde esta contenido  $a$ , entonces  $P_c$  tiene un ciclo atractor  $\{z_1(c), \dots, z_m(c)\}$  de longitud  $m$  para toda  $c \in W$ , donde cada  $z_j$  depende analíticamente de  $c$ .*

**DEMOSTRACIÓN:** Sea  $z_1(a)$  un punto periódico atractor de periodo  $m$  para  $a$ . Aplicando el teorema de la función implícita a  $Q(z, c) = P_c^m(z) - z$ , obtenemos un punto periódico atractor  $z_1(c)$  para  $P_c$  de periodo  $m$ , el cual depende analíticamente de  $c$  en una vecindad de  $a$ . En particular,  $a$  pertenece al interior de  $M$ , digamos la componente  $W$ . La sucesión  $f_j(c) = P_c^{jm}(0)$  es acotada y por tanto normal en  $W$ , y esta converge en  $a$  a algún punto en el ciclo de  $z_1(a)$ , digamos al mismo  $z_1(a)$ . Como  $z_1(c)$  es atractor,  $f_j(c)$  converge a  $z_1(c)$  para  $c$  cerca de  $a$ . Por normalidad  $f_j(c)$  converge en  $W$  a alguna función analítica  $g(c)$ , la cual satisface  $Q(g(c), c) = 0$  cerca de  $a$  y por tanto en  $W$ . Ahora  $g(c)$  puede ser un punto periódico repulsor para un  $c \in W$  fijo solo si  $P_c^{jm}(0)$  coincide con  $g(c)$  para un  $j$  grande. Esto ocurre a lo mas en un conjunto contable. Como el multiplicador  $\lambda(c)$  de un ciclo es analítica, concluimos que  $|\lambda| < 1$  en  $W$ , esto es, el ciclo de  $g(c)$  es atractor para  $c \in W$ . Mas

aún el periodo de  $g(c)$  es exactamente  $m$  para toda  $c \in W$ . La función  $P_c^i(g(c))$ ,  $0 \leq i \leq m$ , dan selecciones analíticas de los puntos de un ciclo  $\square$ .

Para ciclos de longitud dos, tenemos que.

$$Q(z, c) = (z^4 + c)^4 + c - z = (z^4 - z + c)(1 + c^3 + z^3 + z^6 + z^9 + z^{12} + c^2(z + 3z^4) + c(z^2 + 2z^5 + 3z^8))$$

descartando los puntos fijos, obtenemos la ecuación

$$1 + c^3 + z^3 + z^6 + z^9 + z^{12} + c^2(z + 3z^4) + c(z^2 + 2z^5 + 3z^8) = 0$$

para puntos periódicos de periodo dos. El multiplicador esta dado por

$$16c^3z^3 + 48c^2z^7 + 48cz^{11} + 16z^{15}$$

y bueno como es notorio es muy difícil encontrar explícitamente cuales son los valores de  $c$ , para los que se cumple las condiciones anteriores.

También es posible calcular los valores de  $c$  para los cuales  $P_c$  tiene un ciclo súper atractor. El punto crítico 0 debe pertenecer al ciclo, y por tanto los parámetros buscados, son precisamente los valores  $c$ , para los cuales 0 es periódico, equivalentemente las soluciones de  $P_c^n(0) = 0$ . Listemos algunos.

- $p_c(0) = c$
- $p_c^2(0) = c^4 + c$
- $p_c^3(0) = c^{16} + 4c^{13} + 6c^{10} + 4c^7 + c^4 + c$

Para  $n = 1$ , la ecuación se reduce a  $c = 0$ , y obtenemos el punto fijo súper atractor 0, para  $n = 2$  la ecuación nos da tres valores mas, coincidentes con las raíces cúbicas de  $-1$ .

para  $n = 3$ , excluimos la raíz 0 y obtenemos.

- $c \approx -1.10658 + 0.24848i$  y su conjugada
- $c \approx 0.338099 + 1.08256i$  y su conjugada
- $c \approx 0.708568 + 0.36122i$  y su conjugada
- $c \approx -0.414587 + 0.794248i$  y su conjugada
- $c \approx -0.667109 + 0.433028i$  y su conjugada
- $c \approx 0.768479 + 0.834084i$  y su conjugada
- $c \approx 0.614538 + 1.06441i$  y su conjugada
- $c \approx -1.22908$

**TEOREMA 3.2.9.** *Los valores de  $c \in M$  correspondientes a ciclos súper atractores están contenidos en toda la frontera  $\partial M$ , En particular, el interior de  $M$  es denso en  $M$ .*

**DEMOSTRACIÓN:** Sea  $U$  un disco que intersecta a  $\partial M$ , tal que  $0 \in U$ . Supongamos que  $U$  no contiene valores  $c$  para los cuales 0 es periódico. Considere una rama de  $\sqrt[4]{-c}$  definida en  $U$ . Tenemos que  $P_c^n(0) \neq \sqrt[4]{-c}$ , si no  $P_c^{n+1}(0) = 0$  y 0 es periódico. De este modo  $f_n(c) = P_c^n / \sqrt[4]{-c}$  omite los valores  $0, 1, \infty$  en  $U$ , por lo cual es una sucesión normal en  $U$ . Pero como  $U$  intersecta  $\partial M$ , este contiene puntos  $c$  para los cuales  $f_n(c)$  es acotada y puntos donde  $f_n(c) \rightarrow \infty$ , y por tanto la sucesión no puede ser normal  $\square$ .

Como ya hemos notado no es simple describir de manera cuantitativa al conjunto de Mandelbrot, pero podemos dar un pequeño tour al menos a través del eje real, partimos del origen donde el conjunto de Julia es la circunferencia unitaria, podemos continuar por la derecha donde tenemos casi-círculos hasta encontrarnos con un punto parabólico en el cual tenemos una curva de Jordan pero no un casi-círculo, regresemos al origen y continuemos a la izquierda, ahora nos encontramos con un punto parabólico de orden 2, luego continuado hacia la izquierda encontramos un punto atractor de orden 2, pasamos por el punto súper atractor de orden 2 y más a la izquierda nos encontramos un punto parabólico de orden 4, más a la izquierda puntos atractores de orden 4, y así encontraremos puntos parabólicos y atractores de todos los ordenes  $2^n$ , a éste fenómeno se le conoce como la bifurcación. Finalizaremos la sección con algunos dibujos.

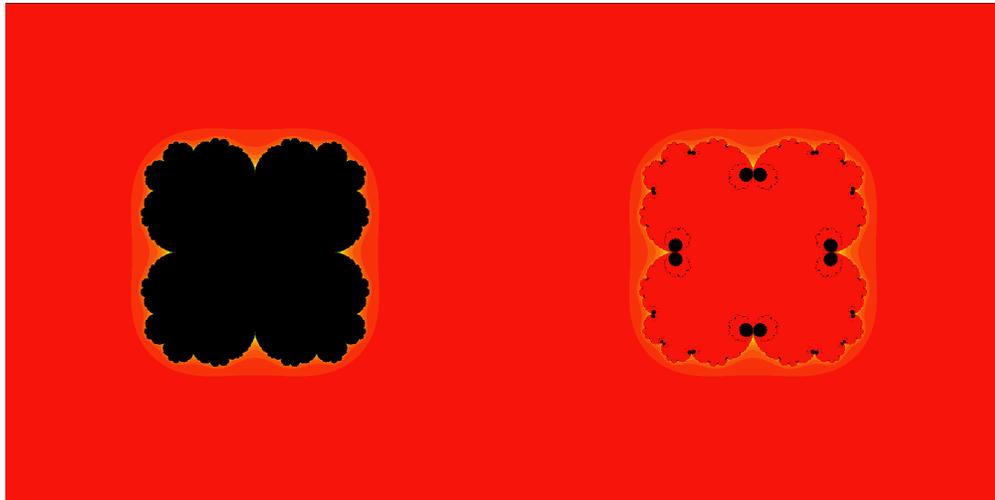
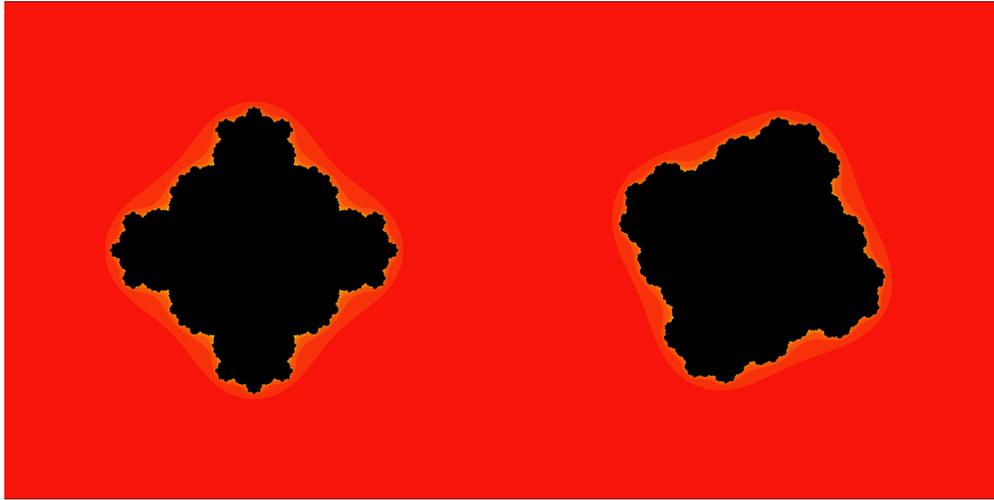
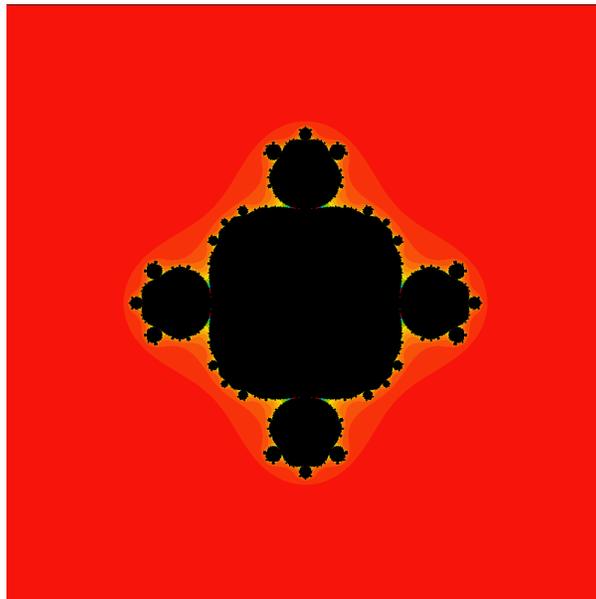


FIGURE 3.2.3.  $c = \frac{3}{4^{4/3}}$  (curva de Jordan, pero no cuasicírculo), y  $c = .4725$  (totalmente desconexo)

FIGURE 3.2.4.  $c = -\frac{1}{4^{1/3}}$  y  $c = \frac{1}{2}i$  (casi-círculos)FIGURE 3.2.5.  $c = -\frac{5}{4^{4/3}}$  ciclo parabólico de periodo dos

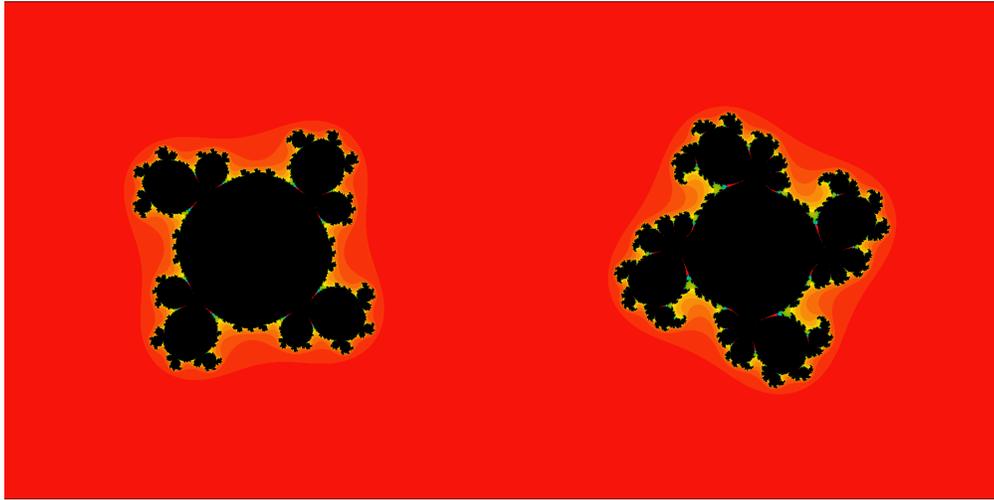
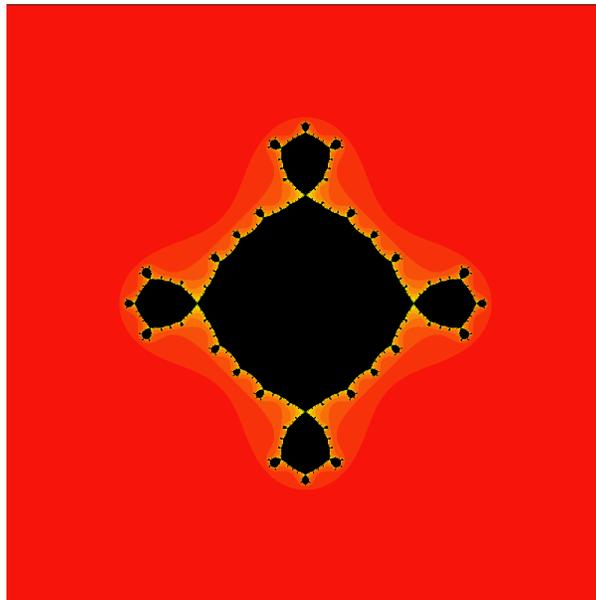
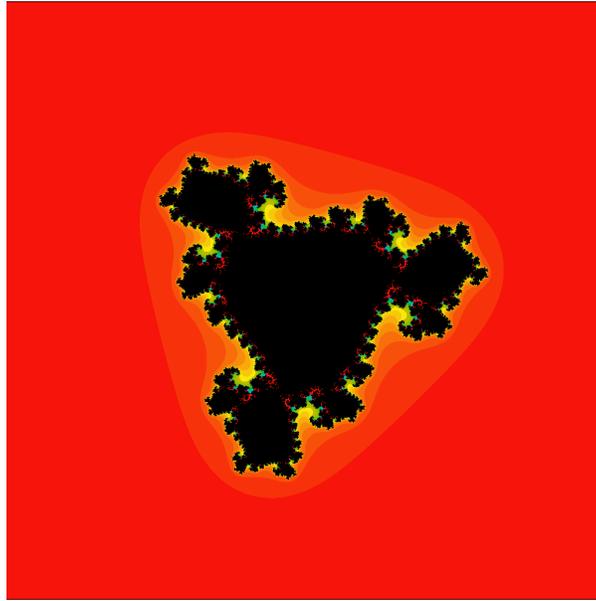
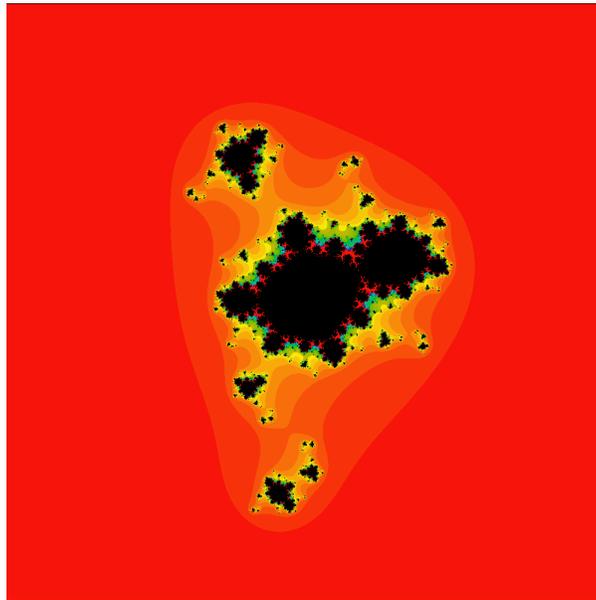


FIGURE 3.2.6. flores atractoras

FIGURE 3.2.7.  $c = -1$  ciclo súper atractor de periodo dos

FIGURE 3.2.8. disco de Siegel para  $P(z) = \lambda z + z^4$  donde  $\lambda = e^{2\pi \frac{\sqrt{5}+1}{2} i}$ FIGURE 3.2.9. disco de Siegel para  $P(z) = \lambda z + z^4 + z^2$  donde  $\lambda = e^{2\pi \frac{\sqrt{5}+1}{2} i}$

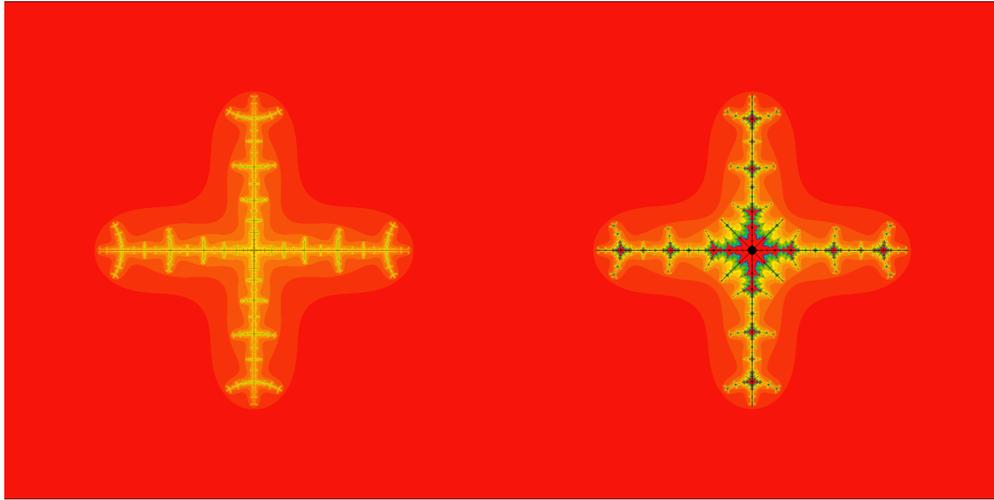


FIGURE 3.2.10.  $c = -\sqrt[3]{2}$  (dendrita) y  $c = -1.24$ (cerca a una dendrita)

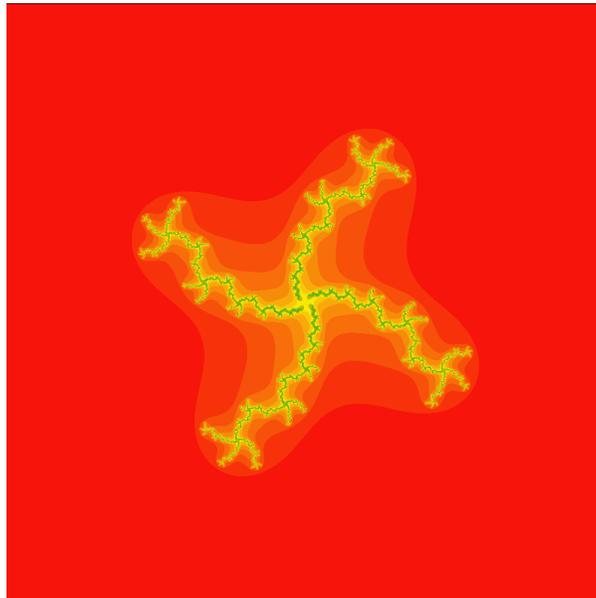
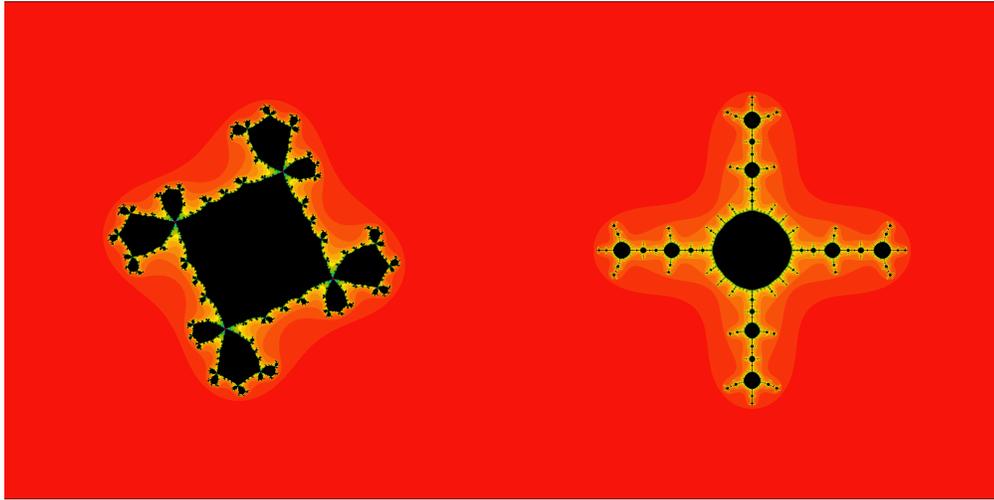
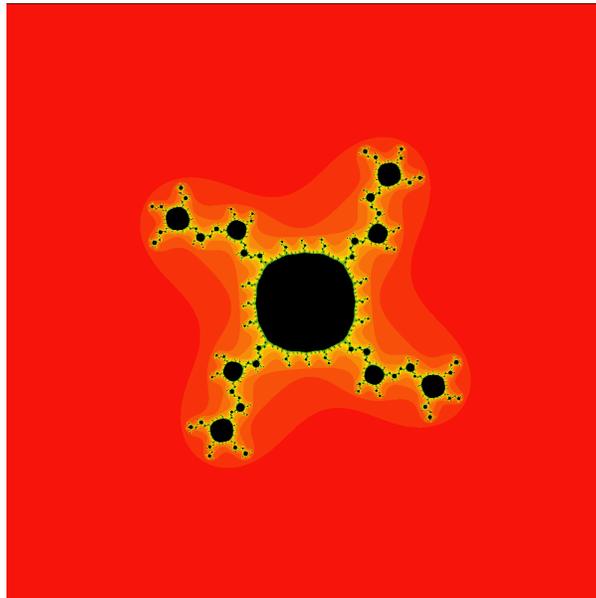


FIGURE 3.2.11.  $c = -1.08422 + 0.290515i$

FIGURE 3.2.12.  $c \approx -0.667109 + 0.433028i$  y  $c \approx -1.22908$ FIGURE 3.2.13.  $c \approx 0.768479 + 0.834084i$

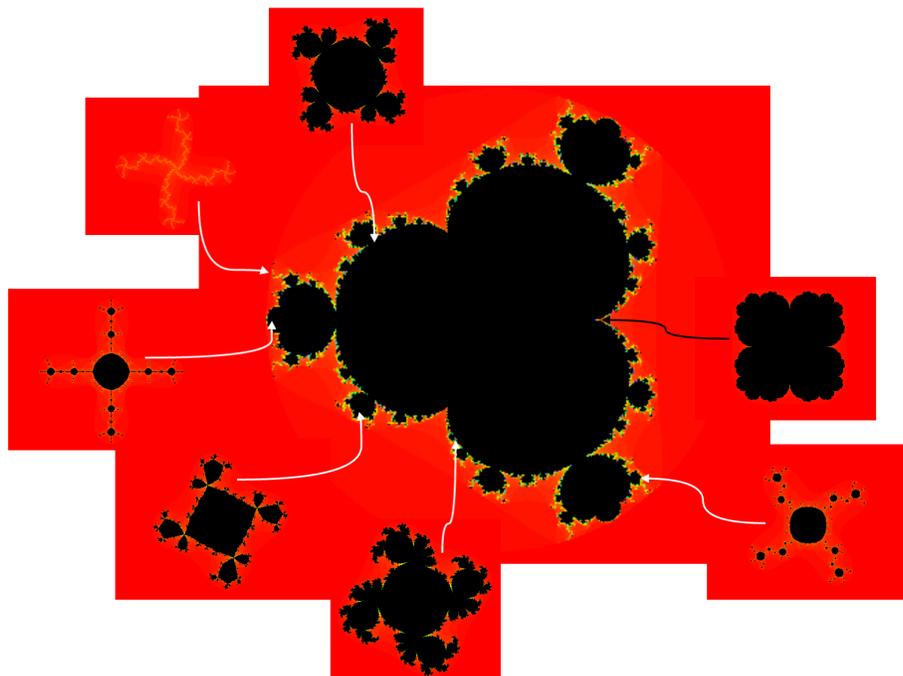


FIGURE 3.2.14. Mandelbrot y conjuntos de Julia

### 3.3. Dinámica de la familia de funciones $(z^2 + c_1)^2 + c_2$

Como primera impresión uno podría preguntarse, si se heredan las propiedades de los conjuntos de Julia  $J_{c_1}$  y  $J_{c_2}$  asociados a los polinomios  $P_{c_1}(z) = z^2 + c_1$  y  $P_{c_2}(z) = z^2 + c_2$ , en particular la conexidad. Hay que recalcar que algunas de las parejas de parámetros nos hacen caer en el caso anterior o incluso en el caso cuadrático. Las primeras son obtenidas mediante una semi-conjugación de nuestro polinomio  $P_{c_1, c_2}(z) = (z^2 + c_1)^2 + c_2$  con  $R(z) = z^4 + c$ . Dejando de lado estas consideraciones:

Los puntos críticos de la función  $P_{c_1, c_2}(z) = (z^2 + c_1)^2 + c_2$  son:

- 0 y
- $\pm\sqrt{-c_1}$

la primera observación es que

$$P_{c_1, c_2}(\sqrt{-c_1}) = (-c_1 + c_1)^2 + c_2 = c_2 = P_{c_1, c_2}(-\sqrt{-c_1})$$

de donde obtenemos que si uno de los puntos críticos distintos de cero, tiene órbita no acotada el otro también, además de que el valor crítico de estos puntos es  $c_2$ , además que si uno de éstos puntos es periódico el otro por consecuencia se convierte en pre-periódico .

Decimos que el  $z$  escapa bajo  $f$  si  $f^n(z) \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Donde existe un  $R > 0$  tal que cualquier  $z$  con  $|z| > R$  escapa. Al valor de  $R$  es llamado el radio de

escape. Para  $f: z \rightarrow a_d z^d + \dots + a_0$  el radio

$$R = \frac{1 + |a_d| + \dots + |a_0|}{|a_d|}$$

es un radio de escape.

Hay que considerar que el radio de escape no es único, de hecho todo polinomio cuártico es conjugado a un de la forma normal de Fatou es decir  $f(z) = z^4 + az^2 + bz + c$ , de este modo tenemos la siguiente proposición.

**PROPOSICIÓN 3.3.1.** *Si  $|z| > \max\{|c|, |b| + 1, \sqrt{|a| + 2}, 1\}$  entonces  $|f^n(z)| \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .*

**DEMOSTRACIÓN:** notemos que

$$|f(z)| = |z^4 + az^2 + bz + c| \geq |z|^4 - |a||z|^2 - |b||z| - |c| \geq |z|^4 - |a||z|^2 - |b||z| - |z|$$

$$\Rightarrow |f(z)| \geq |z|(|z|^3 - |a||z| - |b| - 1) = |z|(|z|^3 - |a||z| - (|b| + 1)) \geq |z|(|z|^3 - |a||z| - |z|)$$

$$\Rightarrow |f(z)| \geq |z|^2(|z|^2 - (|a| + 1)) \geq |z|^2 > \lambda|z|$$

con  $\lambda > 1$ . En particular  $|f(z)| > |z|$ , y aplicando esta desigualdad  $n$ -veces obtenemos

$$|f^n(z)| > \lambda^n |z|$$

y por lo tanto la órbita de  $z$  tiende a infinito  $\square$

En particular para nuestro caso como  $P_{c_1, c_2}(z) = z^4 + 2c_1 z^2 + c_1^2 + c_2$  el criterio de escape anterior queda de la siguiente manera. si  $|z| > \max\{|c_1^2 + c_2|, \sqrt{|c_1| + 2}, 1\}$  entonces  $|P_{c_1, c_2}^n(z)| \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Lo primero que hay que imaginar son los diferentes escenarios que pueden ocurrir debido a las características de nuestros puntos críticos. Así que solo tenemos cuatro posibilidades:

- la órbita de los tres puntos críticos tienda a  $\infty$ ;
- la órbita de los tres puntos críticos sea acotada;
- la órbita de cero tienda a  $\infty$  y que la de los otros dos puntos críticos sea acotada; y
- la órbita de cero es acotada y la de los otros dos puntos críticos tienda a  $\infty$ .

Hay que observar que el Mandelbrot (es decir el conjunto de parámetros en el cual el conjunto de Julia correspondiente es conexo) de ésta familia es de dimensión 4, y por consecuencia es un tanto difícil la visualización, por suerte podemos hacer cortes de éste para darnos una idea de que es lo que pasa.

Los conjuntos de Julia asociados tienen diversos tipos de geometría, para empezar notemos que si  $c_1 = c_2$ , entonces caemos en el caso cuadrático donde existen casi-círculos, dendritas, cantor, discos de Siegel, etc., pero en esta restricción tenemos la famosa dicotomía de tener conjunto conexos ó bien totalmente desconexo. Y En la sección anterior observamos el comportamiento en los cortes donde algún parámetro es cero otra vez obteniendo una dicotomía. Claramente nosotros tenemos más posibilidades: para comenzar supongamos que alguno de nuestros puntos críticos es además punto fijo entonces debemos tener que:

- Si el origen es un punto fijo entonces debemos tener que  $c_2 = -c_1^2$ ;
- Si ahora queremos que  $\sqrt{-c_1}$  (respectivamente  $-\sqrt{-c_1}$ ) sea punto fijo debemos tomar  $c_2 = \sqrt{-c_1}$  (respectivamente  $-\sqrt{-c_1}$ ) o equivalentemente  $c_1 = -c_2^2$ .

Se puede observar que no podemos tener dos puntos críticos fijos distintos. Analizamos ahora los distintos escenarios respecto al multiplicador, primero observemos que el multiplicador de cualquier punto fijo  $\zeta$  está dado por  $\lambda_\zeta = 4\zeta^3 + 2\zeta c_1$ :

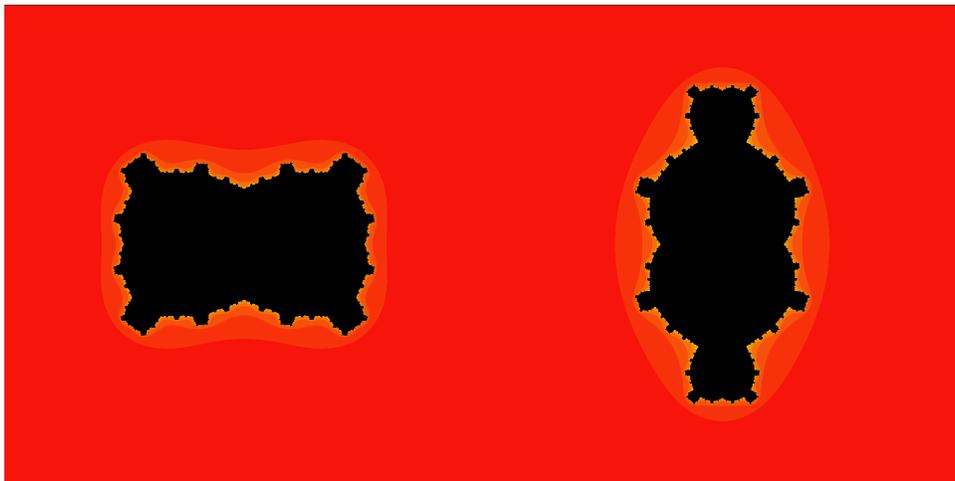


FIGURE 3.3.1. Uno con punto fijo súper-atractor en 0, y uno con punto fijo atractor en  $\alpha_1$

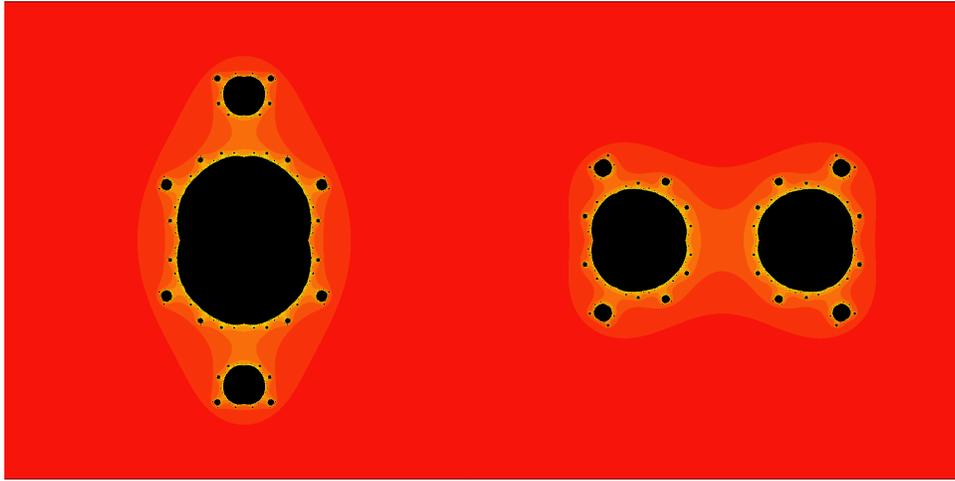


FIGURE 3.3.2. Uno con punto fijo súper-atractor en  $0$ , y uno con punto fijo indiferente en  $\alpha_1$

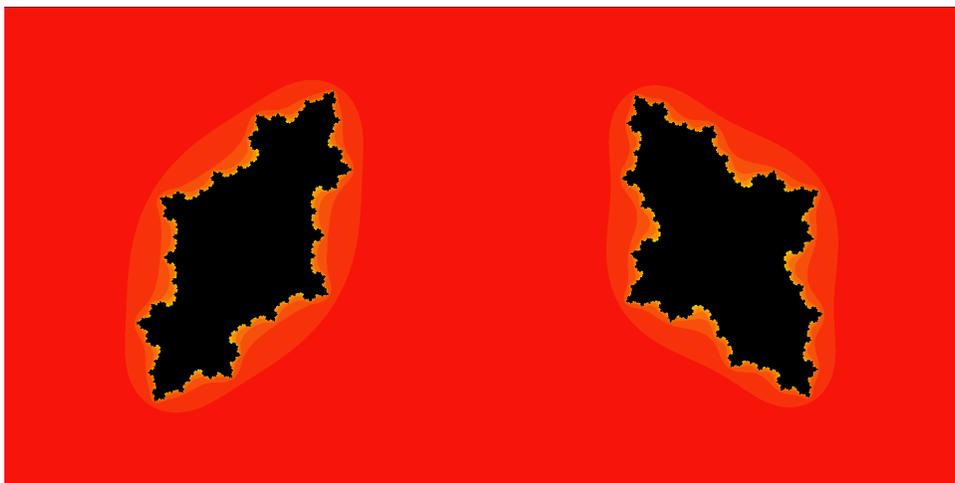


FIGURE 3.3.3. Uno con punto fijo súper-atractor en  $0$ , y uno con punto fijo atractor en  $\alpha_1$

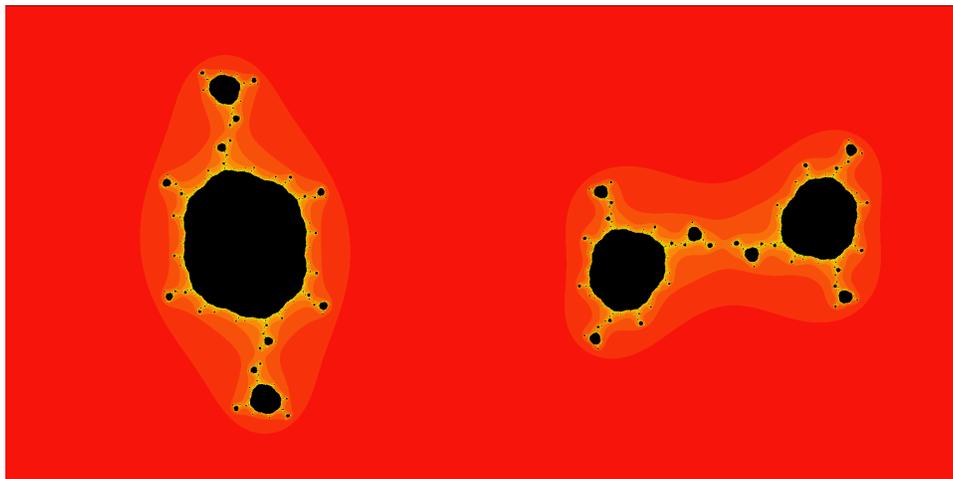


FIGURE 3.3.4. Uno con punto fijo súper-atractor en 0, y uno con punto fijo repulsor en  $\alpha_1$

Así que el origen solo puede ser un punto fijo súper-atractor. Además si algún punto crítico es punto fijo súper-atractor, entonces lo que tenemos es la transformación  $z \mapsto z^4$ . Notemos también que el modulo de los multiplicadores de los puntos críticos en el caso de que fueran fijos coincide, ésto reduce el problema a investigar a sólo uno de ellos denotemos a los puntos críticos distintos de cero por  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ . Y por tanto éste punto puede ser bien atractor, parabólico, o repulsor. Algunos ejemplos de los conjuntos de Julia llenos obtenidos por computadora son los siguientes:

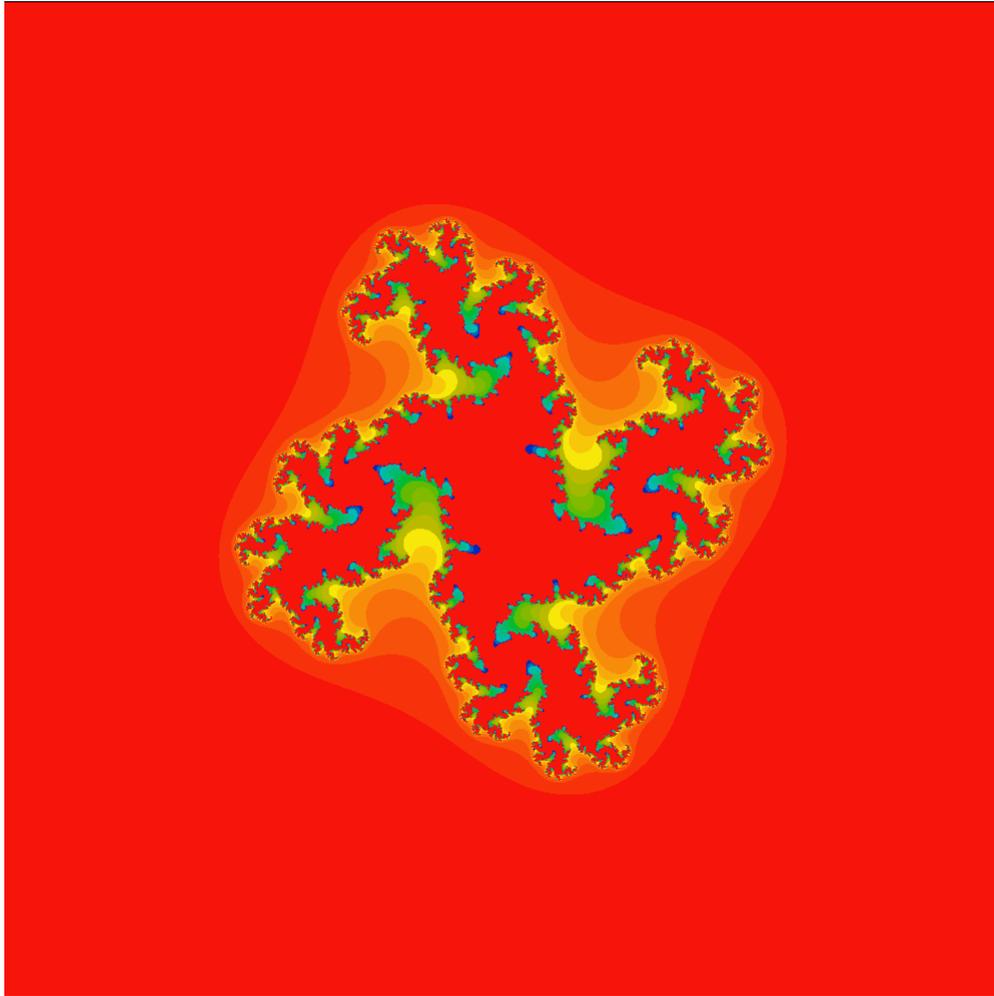
Gracias a la computadora uno puede darse una idea del comportamiento de la dinámica requerida, la primera pregunta es si  $c_1$  y  $c_2$  son tales que  $J_{c_1}$  y  $J_{c_2}$  son conexos entonces, ¿ $J_{c_1, c_2}$  el conjunto de Julia asociado a  $P_{c_1, c_2}$  es conexo?, la respuesta es negativa considere el siguiente ejemplo:

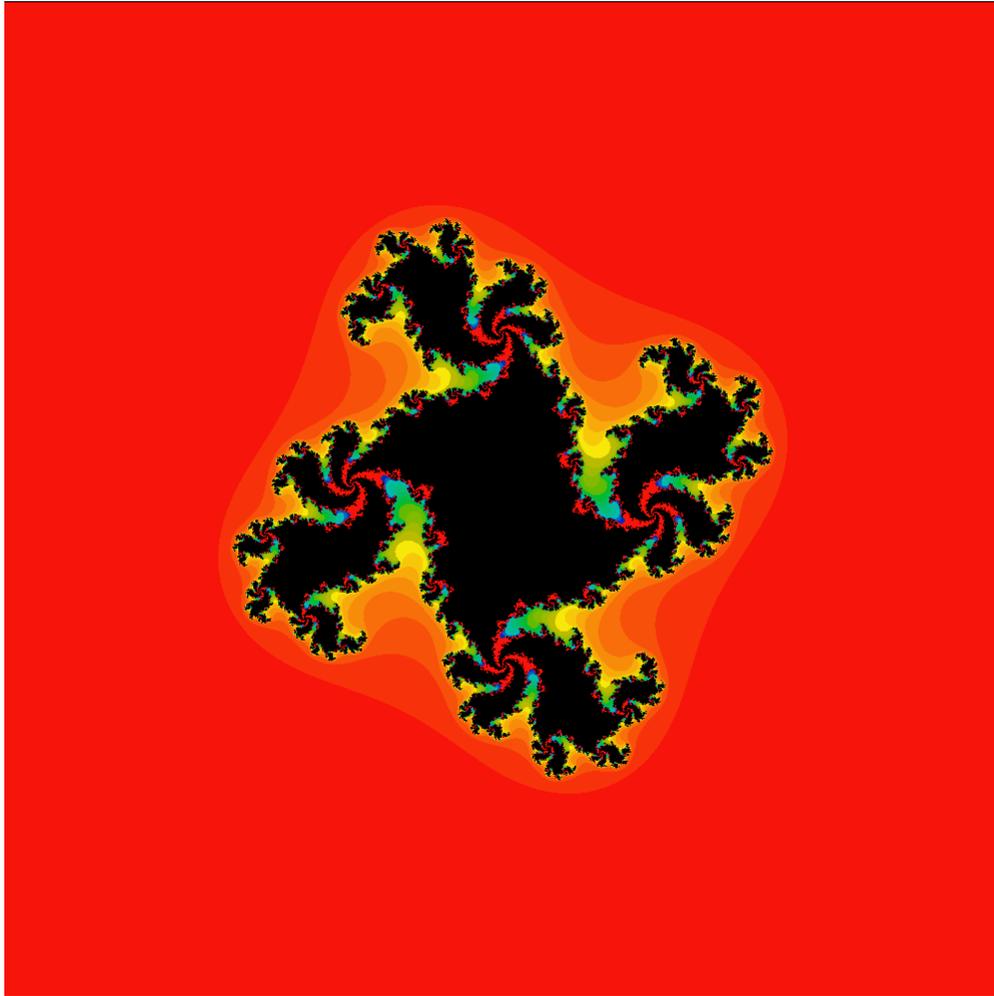
**EJEMPLO 3.3.2.** Sea  $P_{c_1, c_2}(z) = (z^2 + c_1)^2 + c_2$  con  $c_1 = 0.0475 + 0.0475i$  y  $c_2 = -0.1544 - 0.6384i$ . Los puntos fijos de esta función son:

- (i)  $z \approx -0.563467 - 0.530248i$  con  $|\lambda| > 1$
- (ii)  $z \approx -0.501937 + 1.06455i$  con  $|\lambda| > 1$
- (iii)  $z \approx 0.005646 - 0.670506i$  con  $|\lambda| > 1$
- (iv)  $z \approx 1.05976 + 0.136206i$  con  $|\lambda| > 1$
- (iv)  $z = \infty$  con  $\lambda = 0$

Ademas los cálculos, muestran que  $|P_{c_1, c_2}^{25}(0)| > 76$  y por tanto el punto crítico 0 tiene órbita no acotada, y  $|P_{c_1, c_2}^{94}(\sqrt{-c_1})| > 611$ .

Por nuestras discusiones anteriores podemos concluir que  $J_{c_1, c_2}$  es totalmente desconexo, y de hecho un Cantor.

FIGURE 3.3.5.  $c_1 = 0.0475 + 0.0475i$  y  $c_2 = -0.1544 - 0.6384i$

FIGURE 3.3.6.  $c_1 = 0.04 + 0.04i$  y  $c_2 = -0.1544 - 0.6384i$ 

EJEMPLO 3.3.3. Sea  $P_{c_1, c_2}(z) = (z^2 + c_1)^2 + c_2$  con  $c_1 = 0.5 + i$  y  $c_2 = 0.6 - i$ . Los puntos fijos de esta función son:

- (i)  $z \approx -0.857601 + 1.43768i$  con  $|\lambda| > 1$
- (ii)  $z \approx -0.123522 + 0.0234516i$  con  $|\lambda| < 1$
- (iii)  $z \approx 0.392381 - 0.489343i$  con  $|\lambda| > 1$
- (iv)  $z \approx 0.588743 - 0.971792i$  con  $|\lambda| < 1$
- (iv)  $z = \infty$  con  $\lambda = 0$

Tenemos dos puntos fijos atractores (finitos) y como la órbita hacia adelante de dos de los puntos fijos es la misma salvo al primer termino, entonces estos puntos fijos son suficientes para asegurarnos la conexidad.

Concluimos con una serie de imágenes obtenidas por la computadora.

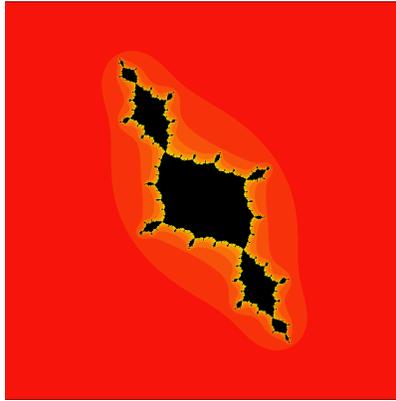


FIGURE 3.3.7.  $c_1 = 0.5 + i$  y  $c_2 = 0.6 - i$

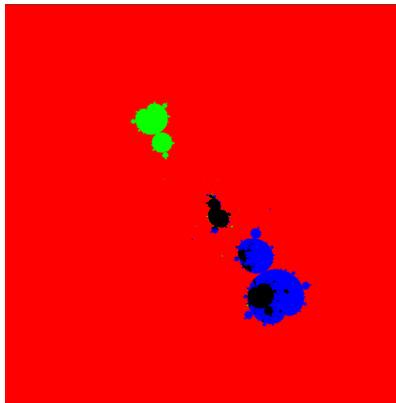


FIGURE 3.3.8. corte con  $c_1 = 0.5 + i$

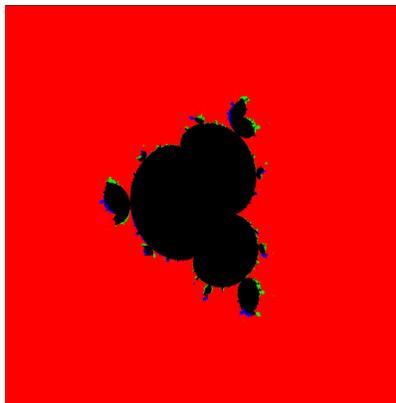


FIGURE 3.3.9. corte con  $c_1 = 0.2 + 0.1i$

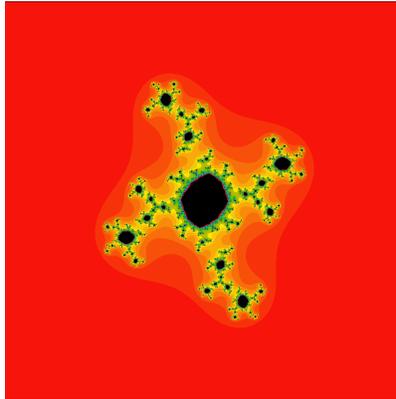


FIGURE 3.3.10.  $c_1 = 0.2 + 0.1i$  y  $c_2 = -0.95i$

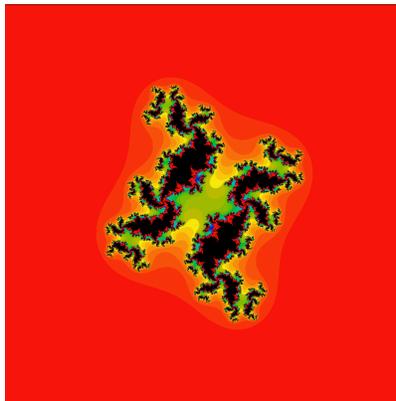


FIGURE 3.3.11.  $c_1 = 0.2 + 0.1i$  y  $c_2 = -0.83i$

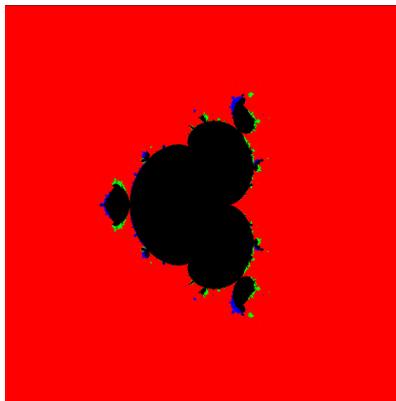


FIGURE 3.3.12. corte con  $c_1 = 0.25$

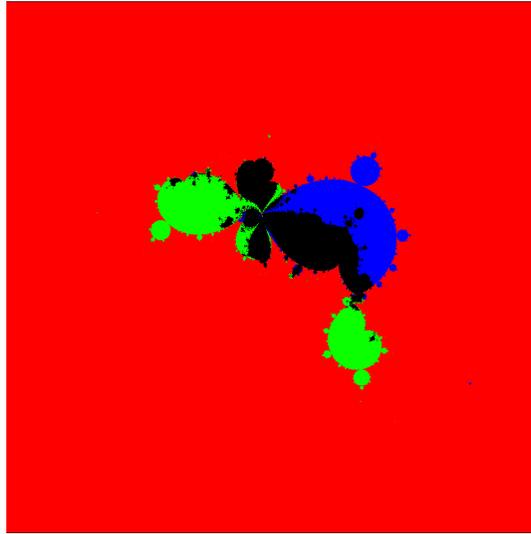


FIGURE 3.3.13. corte con  $c_1 = -0.122561 + 0.744862i$

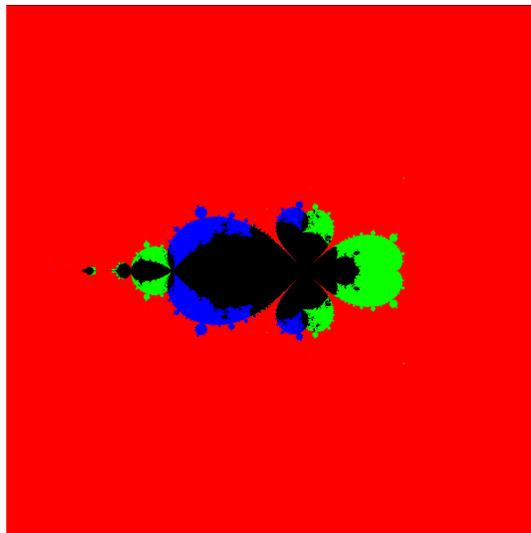


FIGURE 3.3.14. corte con  $c_1 = -0.75$

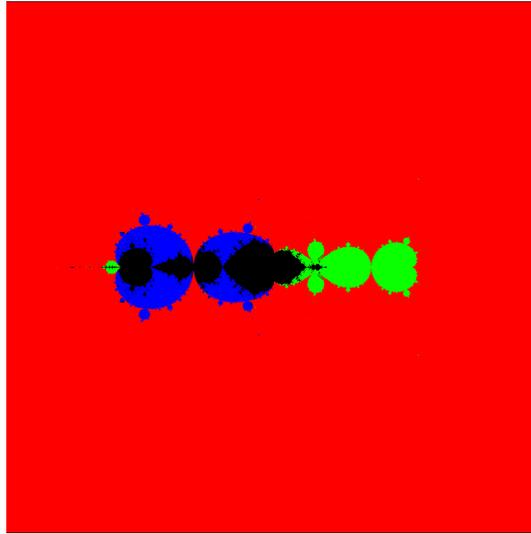


FIGURE 3.3.15. corte con  $c_1 = -1$

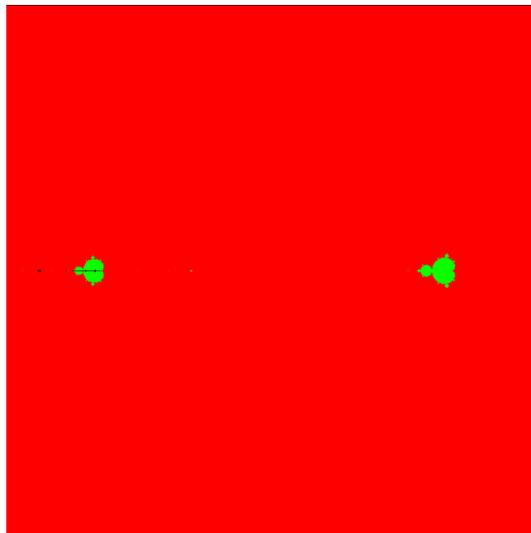
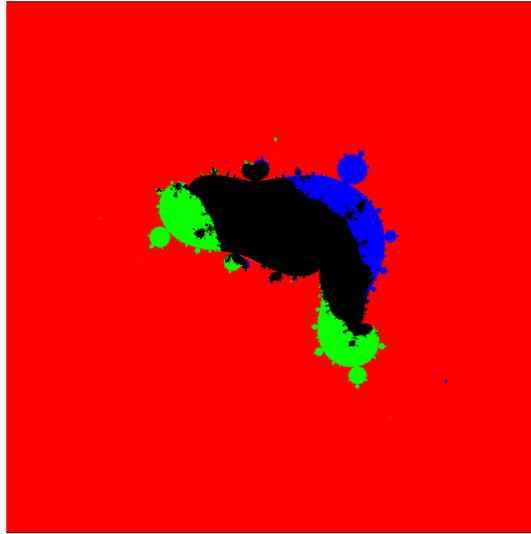
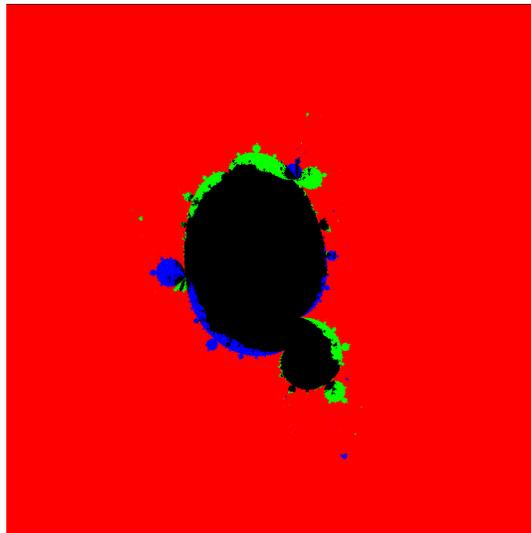
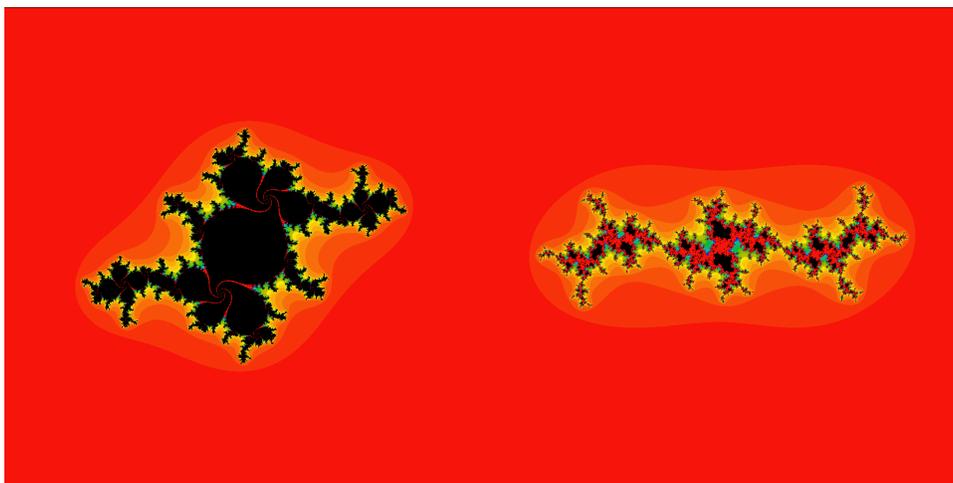
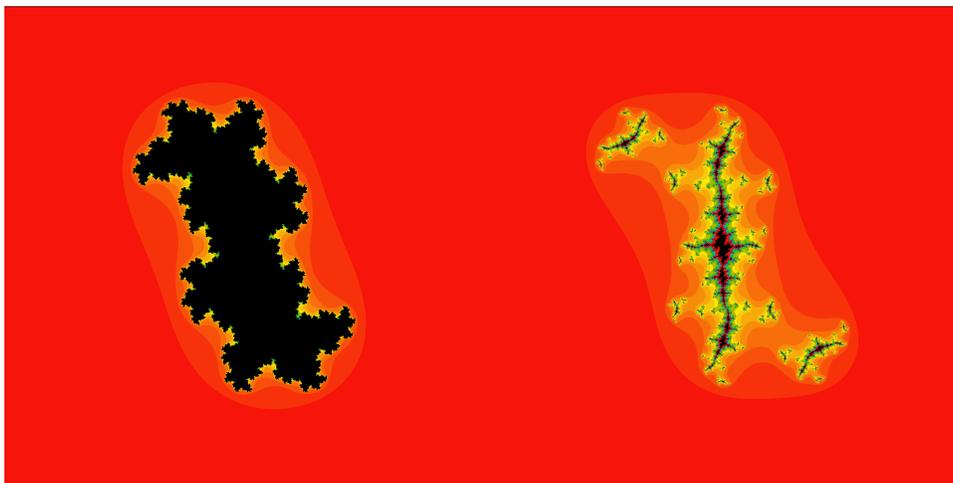
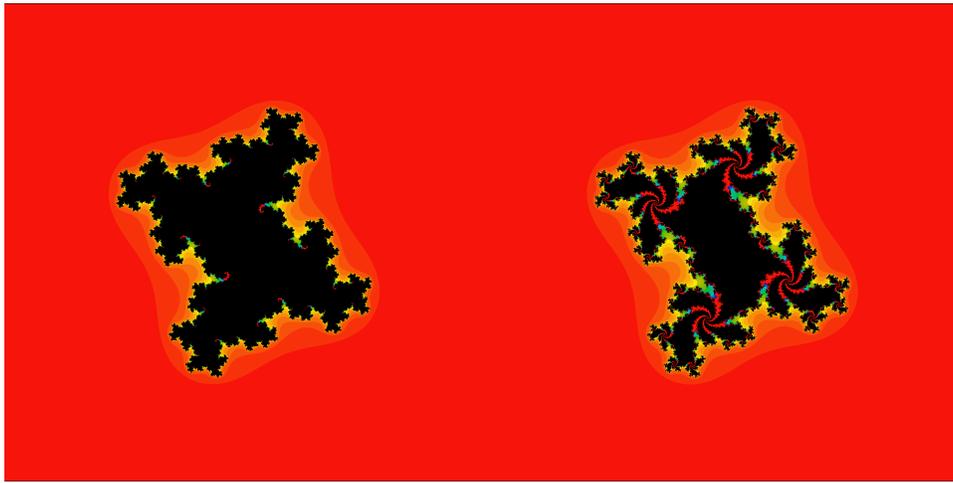
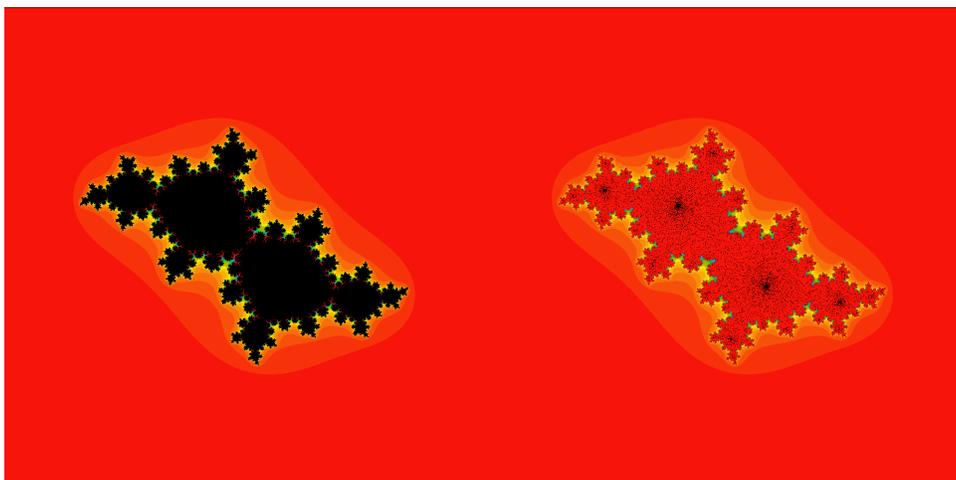
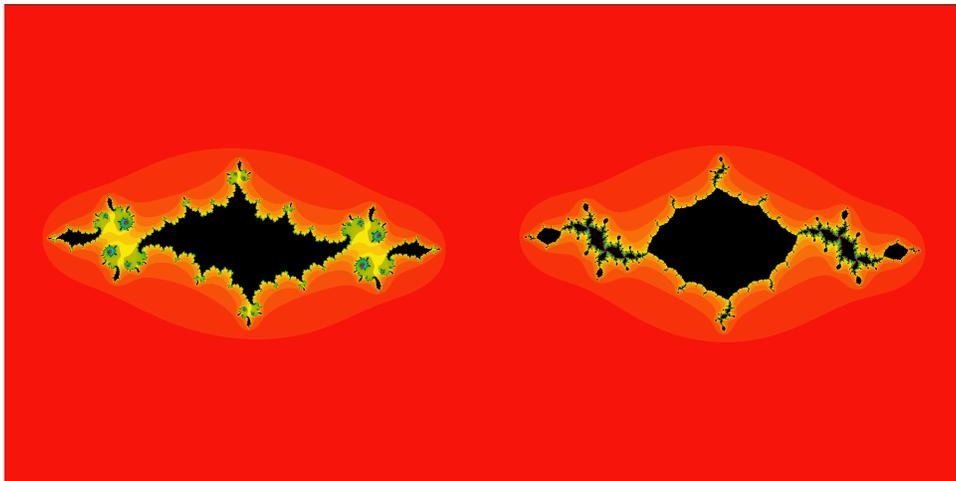
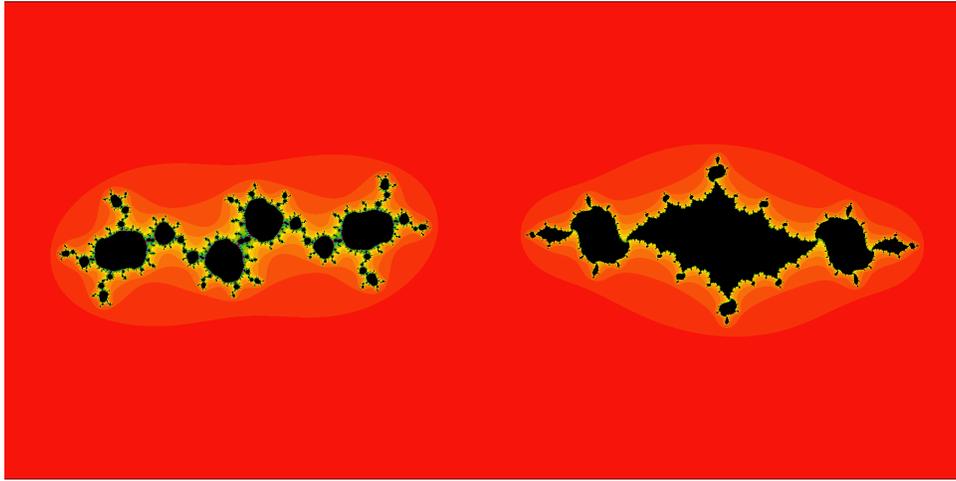
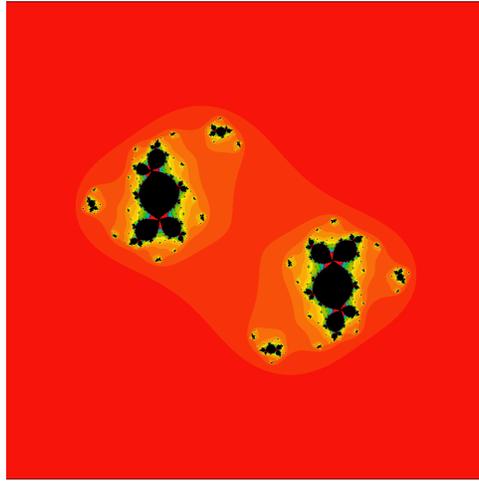


FIGURE 3.3.16. corte con  $c_1 = -1.754878$

FIGURE 3.3.17. corte con  $c$  correspondiente a  $\lambda = \frac{2\pi}{3}$ FIGURE 3.3.18. corte con  $c$  correspondiente a  $\lambda = \frac{2\pi}{5}$







## Conclusión

El trabajo anterior tiene sus bases en lo que algunos matemático o científicos en general proponen como una de las armas analíticas mas potentes, el ojo humano, solo hay que recordar a Darwin para evidenciar éste hecho, se cuenta que alguna ocasión le mandaron una orquídea muy especial y el conjeturo que para que esa orquídea siguiera existiendo debía existir un insecto o un ave que tuviera una lengua muy larga; hace no mas de una década se demostró la existencia de tal animal. Bueno pues aquí se ha intentado hacer lo mismo, observar imágenes e intentar descifrarlas solo que en el transcurso de ésto el autor se entero de la gran cantidad de matemática inherente al tema e intento asimilarla, así los dibujos se volvieron cada vez mas bellos debido a que adquirían significado; como se menciona durante la tesis el tema cada vez es más extenso debido a las poderosas herramientas que surgen dada la naturaleza de los problemas, así que lo presentado aquí es apenas una simple muestra.

Para ser concisos la tarea de la tesis se concentraba específicamente en iniciar el desarrollo de la teoría de iteración alternada usando como base el caso más comprendido hasta ahora, los polinomios cuadráticos. La pregunta concreta era: ¿Que diferencia hay entre la dinámica polinomial clásica y la alternada?, para contestar ésta primera surgen las demás, ¿que diferencia hay entre la dinámica del polinomio  $z \mapsto z^2$  y  $z \mapsto z^4$ ?, ¿Hay una analogía entre las familias de polinomios de un solo punto crítico  $z \mapsto z^2 + c$  y  $z \mapsto z^4 + c$ ?, ¿si tomamos dos polinomios de la familia cuadrática, se preservan las características de conexidad de los conjuntos de Julia correspondientes, cuando los alternamos?, ¿En el caso de la familia  $(z^2 + c_1)^2 + c_2$ , que dinámicas pueden coexistir?. Algunas de éstas se han respondido durante el trabajo pero automáticamente surgen más, lamentablemente por diversas cuestiones el trabajo tal vez ha quedado un poco corto, aunque la tesis termine, no así la investigación.

# Apéndice

## Programa A

```
Programa para dibujar Julias llenos del polinomio alternado. #INCLUDE <WIN-
BGIM.H>
#include <GRAPHICS.H>
#include <IOSTREAM>
#include <MATH.H>
#define MAXITER 1000
#define PANTALLA 600
using namespace std;
int main()
{
int i,p1=0,p2=0,monitor=DETECT,modo;
double rc1,rc2,ic1,ic2,x0,y0,rs1,is1,rs2,is2,l,p,j,k,x,y,r,a,rc,ra1,raux,iaux,ra2,raf;
printf("ESCRIBA LA PARTE REAL DE C1\n");
scanf("%lf",&rc1);
printf("ESCRIBA LA PARTE IMAGINARIA DE C1\n");
scanf("%lf",&ic1);
printf("ESCRIBA LA PARTE REAL DE C2\n");
scanf("%lf",&rc2);
printf("ESCRIBA LA PARTE IMAGINARIA DE C2\n");
scanf("%lf",&ic2);
rs1=-2;
is1=-2;
l=4;
rs2=rs1+l;
is2=is1+l;
raux=pow(rc1,2)-pow(ic1,2)+rc2;
iaux=2*rc1*ic1+ic2;
ra1=sqrt(pow(raux,2)+pow(iaux,2));
```

```

RA2=SQRT(SQRT(POW(RC1,2)+POW(IC1,2))+2);
IF(RA1>1)
{IF (RA1>RA2) RAF=RA1; ELSE RAF=RA2; }
ELSE { IF(RA2>1) RAF=RA2; ELSE RAF=1; }
P=L/PANTALLA;
INITWINDOW(PANTALLA,PANTALLA);
FOR(J=RS1;J<=RS1+L;J=J+P)
{ P2=0; FOR(K=IS1;K<=IS1+L;K=K+P)
{ X=J; Y=K; I=0; R=0;
WHILE (I<MAXITER&&R<=RAF)
{ A=X*X-Y*Y+RC1; Y=2*X*Y+IC1; X=A;
A=X*X-Y*Y+RC2; Y=2*X*Y+IC2; X=A; I++; R=X*X+Y*Y; }
IF(I==MAXITER)
PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(0,0,0));
ELSE IF(I==99) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(0,0,255));
ELSE IF(I==98) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(15,0,255));
ELSE IF(I==97)PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(25,0,255));
ELSE IF(I==96) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(35,0,255));
ELSE IF(I==95) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(55,0,255));
ELSE IF(I==94) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(75,0,255));
:
ELSE IF(I==5) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,40,0));
ELSE IF(I==4) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,30,0));
ELSE IF(I==3) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,20,0));
ELSE IF(I==2) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,10,0));
ELSE PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,0,0)); P2++; } P1++; }
WHILE(!KBHIT());
CLOSEGRAPH();
SYSTEM("PAUSE");
RETURN 0;
}

```

**Programa B**

Programa para dibujar Mandelbrot ( siempre hay que poner  $c_2 = 0 + 0i$ ).

```
#INCLUDE <WINBGIM.H>
#include <GRAPHICS.H>
#include <IOSTREAM>
#include <MATH.H>
#define MAXITER 1000
#define PANTALLA 600
using namespace std;
int main()
{
int I,P1=0,P2=0,MONITOR=DETECT,MOD0;
double RC1,RC2,IC1,IC2,X0,Y0,RS1,IS1,RS2,IS2,L,P,J,K,X,Y,R,A,RC,RA1,RAUX,IAUX,RA2,RAF;
printf("ESCRIBA LA LONGITUD DEL DIBUJO\n");
scanf("%f",&L);
printf("ESCRIBA LA PARTE REAL DE C2\n");
scanf("%f",&RC2);
printf("ESCRIBA LA PARTE IMAGINARIA DE C2\n");
scanf("%f",&IC2);
RS2=-2+L; IS2=-2+L; P=L/PANTALLA;
initwindow(PANTALLA,PANTALLA);
for(J=-2;J<=RS2;J=J+P)
{ P2=0; for(K=-2;K<=IS2;K=K+P)
{
RC1=J;
IC1=K;
X=0;
Y=0;
I=0;
RC=0;
while (I<MAXITER&&RC<=4)
{
A=X*X-Y*Y+RC1;
Y=2*X*Y+IC1;
X=A;
A=X*X-Y*Y+RC2;
```

```

Y=2*X*Y+IC2;
X=A; I++;
R=X*X+Y*Y;
RC=R*R*R;
}
IF(I==MAXITER)
PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(0,0,0));
ELSE IF(I==99) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(0,0,255));
ELSE IF(I==98) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(15,0,255));
ELSE IF(I==97) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(25,0,255));
ELSE IF(I==96) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(35,0,255));
ELSE IF(I==95) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(55,0,255));
ELSE IF(I==94) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(75,0,255));
:
ELSE IF(I==5) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,40,0));
ELSE IF(I==4) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,30,0));
ELSE IF(I==3) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,20,0));
ELSE IF(I==2) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,10,0));
ELSE PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,0,0)); P2++; } P1++; }
WHILE(!KBHIT());
CLOSEGRAPH();
SYSTEM("PAUSE");
RETURN 0;
}

```

### Programa C

Programa para dibujar Julias llenos particulares por ejemplo con discos de Siegel solo hay que cambiar la función y el radio. `#INCLUDE <WINBGIM.H>`

```

#include <GRAPHICS.H>
#include <IOSTREAM>
#include <MATH.H>
#define MAXITER 1000
#define PANTALLA 600
using namespace std;
int main()
{

```

```

INT I,P1=0,P2=0,
MONITOR=DETECT,MOD0;
FLOAT RC1,RC2,IC1,IC2,X0,Y0,RS1,IS1,RS2,IS2,L,P,J,K,X,Y,R,A;
PRINTF("ESCRIBA LA PARTE REAL DE C1\n");
SCANF("%F",&RC1);
PRINTF("ESCRIBA LA PARTE IMAGINARIA DE C1\n");
SCANF("%F",&IC1);
PRINTF("ESCRIBA LA PARTE REAL DE LA SEMILLA\n");
SCANF("%F",&RS1);
PRINTF("ESCRIBA LA PARTE IMAGINARIA DE LA SEMILLA\n");
SCANF("%F",&IS1); PRINTF("ESCRIBA LA LONGITUD DEL DIBUJO\n");
SCANF("%F",&L);
RS2=RS1+L;
IS2=IS1+L;
P=L/PANTALLA;
INITWINDOW(PANTALLA,PANTALLA);
FOR(J=RS1;J<=RS1+L;J=J+P) {
P2=0; FOR(K=IS1;K<=IS1+L;K=K+P) {
X=J;
Y=K;
I=0;
R=0;
WHILE (I<MAXITER&&R<=4) {
A=X*X-Y*Y+RC1;
Y=2*X*Y+IC1;
X=A;
I++;
R=X*X+Y*Y;
}
IF(I==MAXITER)
PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(0,0,0));
ELSE IF(I==99) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(0,0,255));
ELSE IF(I==98) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(15,0,255));
ELSE IF(I==97) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(25,0,255));
ELSE IF(I==96) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(35,0,255));
ELSE IF(I==95) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(55,0,255));

```

```

ELSE IF(I==94) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(75,0,255));
:
ELSE IF(I==5) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,40,0));
ELSE IF(I==4) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,30,0));
ELSE IF(I==3) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,20,0));
ELSE IF(I==2) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,10,0));
ELSE PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,0,0)); P2++; } P1++; }
WHILE(!KBHIT());
CLOSEGRAPH();
SYSTEM("PAUSE");
RETURN 0;
}

```

### Programa D

Programa para dibujar Julias llenos de  $z^2 + c$  aunque también sirve para dibujar el Mandelbrot solo hay que cambiar el inicio de la iteración siempre a cero.

```

#include <WINBGIM.H>
#include <GRAPHICS.H>
#include <IOSTREAM>
#include <MATH.H>
#define MAXITER 1000
#define PANTALLA 600
using namespace std;
int main()
{
int i,P1=0,P2=0,MONITOR=DETECT,MOD0;
double rc1,rc2,ic1,ic2,x0,y0,rs1,is1,rs2,is2,L,P,J,K,X,Y,R,A,RC,RA1,RAUX,IAUX,RA2,RAF;
M1=-0.737369;
M2=-0.67549;
printf("ESCRIBA LA PARTE REAL DE LA SEMILLA\n");
scanf("%Lf",&rs1);
printf("ESCRIBA LA PARTE IMAGINARIA DE LA SEMILLA\n");
scanf("%Lf",&is1);
printf("ESCRIBA LA LONGITUD DEL DIBUJO\n");
scanf("%Lf",&L); rs2=rs1+L;
is2=is1+L;

```

```

P=L/PANTALLA;
INITWINDOW(PANTALLA,PANTALLA);
FOR(J=RS1;J<=RS1+L;J=J+P) {
P2=0;
FOR(K=IS1;K<=IS1+L;K=K+P) {
X=J;
Y=K;
I=0;
RC=0;
WHILE (I<MAXITER&&RC<=4)
{
A=POW(X,4)-6*POW(X,2)*POW(Y,2)+POW(Y,4)+M1*X-M2*Y+POW(X,2)-POW(Y,2);

Y=4*POW(X,3)*Y-4*POW(Y,3)*X+M1*Y+M2*X+2*X*Y;
X=A; I++; R=X*X+Y*Y; RC=R*R*R;
}
IF(I==MAXITER)
PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(0,0,0));
ELSE IF(I==99) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(0,0,255));
ELSE IF(I==98) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(15,0,255));
ELSE IF(I==97)PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(25,0,255));
ELSE IF(I==96) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(35,0,255));
ELSE IF(I==95) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(55,0,255));
ELSE IF(I==94) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(75,0,255));
:
ELSE IF(I==5) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,40,0));
ELSE IF(I==4) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,30,0));
ELSE IF(I==3) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,20,0));
ELSE IF(I==2) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,10,0));
ELSE PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,0,0)); P2++; } P1++; }
WHILE(!KBHIT());
CLOSEGRAPH();
SYSTEM("PAUSE");
RETURN 0;
}

```

**Programa E**

```

Programa que dibuja el Mandelbrot con la forma normal  $z^2 + \lambda z$ . #INCLUDE
<WINBGIM.H>
#include <GRAPHICS.H>
#include <IOSTREAM>
#include <MATH.H>
#define MAXITER 1000
#define PANTALLA 600
using namespace std;
int main()
{
int I,P1=0,P2=0,MONITOR=DETECT,MODO;
float RC1,RC2,IC1,IC2,X0,Y0,RS1,IS1,RS2,IS2,L,P,J,K,X,Y,R,A;
printf("ESCRIBA LA LONGITUD DEL DIBUJO\n");
scanf("%f",&L);
RS2=-5+L;
IS2=-5+L;
P=L/600;
initwindow(600,600);
for(J=-5;J<=RS2;J=J+P) {
P2=0;
for(K=-5;K<=IS2;K=K+P) {
RC1=J;
IC1=K;
X=-RC1/2;
Y=-IC1/2;
I=0;
R=0;
while (I<MAXITER&&R<=20) {
A=POW(X,2)-POW(Y,2)+RC1*X-IC1*Y;
Y=2*X*Y+RC1*Y+IC1*X;
X=A;
I++; R=X*X+Y*Y;
}
if(I==MAXITER)
putpixel(P1,PANTALLA-P2,COLOR(0,0,0));

```

```

ELSE IF(I==99) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(0,0,255));
ELSE IF(I==98) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(15,0,255));
ELSE IF(I==97)PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(25,0,255));
ELSE IF(I==96) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(35,0,255));
ELSE IF(I==95) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(55,0,255));
ELSE IF(I==94) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(75,0,255));
:
ELSE IF(I==5) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,40,0));
ELSE IF(I==4) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,30,0));
ELSE IF(I==3) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,20,0));
ELSE IF(I==2) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,10,0));
ELSE PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,0,0)); P2++; } P1++; }
WHILE(!KBHIT());
CLOSEGRAPH();
SYSTEM("PAUSE");
RETURN 0;
}

```

### Programa F

```

Programa que localiza los cortes de Mandelbrot. #INCLUDE <WINBGIM.H>
#include <GRAPHICS.H>
#include <IOSTREAM>
#include<MATH.H>
#define MAXITER 1000
#define PANTALLA 600
using namespace std;
int main()
{
int i,p1=0,p2=0,monitor=DETECT,
modo;
double rc1,rc2,ic1,ic2,x0,y0,rs1,is1,rs2,is2,
l,p,j,t,k,x,y,r,rc,a,w,z,b,p,c,mpc,rcr1,icr1;
printf("ESCRIBA LA PARTE REAL DE C1\n");
scanf("%lf",&rc1);
printf("ESCRIBA LA PARTE IMAGINARIA DE C1\n");
scanf("%lf",&ic1);

```

```

PRINTF("ESCRIBA LA LONGITUD DEL DIBUJO\n");
SCANF("%LF",&L); RS2=-2+L; IS2=-2+L;
P=L/PANTALLA;
INITWINDOW(PANTALLA,PANTALLA);
FOR(J=-2;J<=RS2;J=J+P)
{ P2=0; FOR(K=-2;K<=IS2;K=K+P)
{ RC2=J; IC2=K; X=0; Y=0; I=0; W=RC2; Z=IC2; RC=0; T=0; PC=0;
WHILE (I<MAXITER&&RC<=4) {
A=X*X-Y*Y+RC1;
Y=2*X*Y+IC1;
X=A;
A=X*X-Y*Y+RC2;
Y=2*X*Y+IC2;
X=A;
I++;
R=X*X+Y*Y;
RC=R*R*R;
}
WHILE (T<MAXITER&&PC<=4) {
B=W*W-Z*Z+RC1;
Z=2*W*Z+IC1;
W=B;
B=W*W-Z*Z+RC2;
Z=2*W*Z+IC2;
W=B;
T++;
MPC=W*W+Z*Z;
PC=MPC*MPC*MPC; }
IF(I==MAXITER) {
IF (T==MAXITER)
PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(0,0,0));
ELSE PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(0,0,255)); }
ELSE { IF (T==MAXITER) PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(10,255,0));
ELSE PUTPIXEL(P1,PANTALLA-P2,COLOR(255,0,0)); } P2++; } P1++; }
SETCOLOR(15);

```

```
LINE(PANTALLA/2, 0, PANTALLA/2, PANTALLA); LINE(0, PANTALLA/2,
PANTALLA, PANTALLA/2);
SETTEXTSTYLE(0,0,2); OUTTEXTXY(PANTALLA/2, 0, "2"); OUTTEXTXY(PANTALLA/2,
PANTALLA/4, "1");
OUTTEXTXY(PANTALLA/2, PANTALLA*3/4, "-1"); OUTTEXTXY(PANTALLA/2,
PANTALLA-15, "-2");
OUTTEXTXY(0, PANTALLA/2, "-2"); OUTTEXTXY(PANTALLA/4, PANTALLA/2,
"-1");
OUTTEXTXY(PANTALLA*3/4, PANTALLA/2, "1"); OUTTEXTXY(PANTALLA-
15, PANTALLA/2, "2");
WHILE(!KBHIT());
CLOSEGRAPH();
SYSTEM("PAUSE");
RETURN 0;
}
```

## Bibliografía

- [Ah1] Ahlfors L., Complex analysis, McGraw-Hill, (1953).
- [Ah2] Ahlfors L., Conformal Invariants, McGraw-Hill, (1973).
- [AhS] Ahlfors L., Sario L., Riemann Surfaces, Princeton University Press, (1960).
- [Bea] Alan F. Beardon, Iteration of rational functions, Grad. Texts Math. 132, Springer-Verlag, (1991).
- [Bla] P. Blanchard, Complex analysis on the Riemann Sphere, Bulletin (new series) of the AMS, vol. 11, num 1, (1989).
- [CaG] Lennart Carleson, Theodore W. Gamelin, Complex dynamics, Springer-Verlag, (1993).
- [Con1] J.B. Conway, Functions of one complex variable I, Springer-Verlag, (1995).
- [Con2] J.B. Conway, Functions of one complex variable II, Springer-Verlag, (1995).
- [Dev] Robert L. Devaney, An introduction to chaotic dynamical systems, Westview Press, (2003).
- [Dou] A. Douady, Does a Julia set depend continuously on the polynomial?, Proceedings of symposia in applied mathematics, AMS, vol 49, (1994).
- [La] A. Lascrain, Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional, Facultad de Ciencias, UNAM, (2005).
- [Mil] John Willard Milnor, Dynamics in one complex variable, Princeton University Press, (2006).
- [MNTU] S. Morosawa, Y. Nishimura, M. Taniguchi, T. Ueda, Holomorphic dynamics, Cambridge University Press, (2000).
- [New] M. Newman, Elements of the topology of plane sets, Cambridge University Press, (1939).
- [Sul] D. Sullivan, Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I: Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains, Annals of Math., (1985)