

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

DE COX-ROSS-RUBINSTEIN AL MODELO DE BLACK-SCHOLES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA
EDUARDO GÓMEZ RAMÍREZ

DIRECTOR DE TESIS
FRANCISCO SOLANO TAJONAR SANABRIA

PUEBLA, PUE.

ENERO 2016

A mi papá
José Erasmo Gómez Flores

A mi mamá
Yolanda Ramírez Ortega

A mi hermana
María Angelica Gómez Ramírez

A mi pareja
María Isabel Barrera Balderas

Agradecimientos

A mis padres Jose Erasmo Gómez Flores y Yolanda Ramírez Ortega por darme la vida, animarme y apoyarme en cada momento de mí vida para concluir mis estudios y metas personales.

A mi hermana María Angelica Gómez Ramírez quien cuida de mí y me apoya incondicionalmente cada día.

A mi pareja María Isabel Barrera Belderas por su confianza y apoyo que me brinda cada instante para lograr nuestras metas juntos.

A mi asesor Dr. Francisco Solano Tajonar Sanabria, por compartir sus conocimientos conmigo, así como a los doctores que conforman mi jurado: Hugo Adán Cruz Suárez, Victor Hugo Vazquez Guevara y Bulmaro Juárez Hernandez quienes contribuyeron para poder concluir satisfactoriamente éste trabajo de tesis.

A mis compañeros, amigos y profesores que de una u otra forma estuvieron conmigo en esta etapa de mí vida. Gracias por su apoyo y esto es sólo el comienzo.

De Cox-Ross-Rubinstein al modelo de Black-Scholes

Eduardo Gómez Ramírez

Enero 2016

Índice general

Introducción	III
1. Opciones Europeas	1
1.1. Opciones	1
1.2. Opciones vs acciones	3
2. Modelo a Tiempo Discreto	5
2.1. Valor presente y valor futuro	5
2.2. Conceptos básicos	7
2.3. Estrategias autofinanciables	9
2.4. Estrategia admisible y arbitraje	11
2.5. Martingala a tiempo discreto	12
2.6. Mercado viable	14
2.7. Mercados completos y valuación de la opción	16
2.8. Modelo de Cox, Ross y Rubinstein	19
2.9. Convergencia al modelo de Black-Scholes	23
3. Cálculo Estocástico	27
3.1. Movimiento Browniano	27
3.2. Martingala a tiempo continuo	31
3.3. Construcción de la integral de Itô	32
3.4. Cálculo de Itô	39
3.5. Procesos de Itô	42
4. Modelo a Tiempo Continuo	49
4.1. Descripción del modelo	49
4.2. Estrategias autofinanciables	50
4.3. Teorema de Girsanov	52

4.4. Representación de martingala	56
4.5. Modelo de Black-Scholes	57
4.5.1. Valuación de una opción europea	58
5. Sensibilidad de Parámetros	65
5.1. Precio del activo S	66
5.2. Volatilidad del precio del activo σ	67
5.3. Fecha de expiración T	69
5.4. Tasa de interés r	70
5.5. Precio strike K	70
Conclusiones	73
Bibliografía	74

Introducción

Una característica típica de los mercados modernos son las transacciones con derivados. Los derivados son instrumentos financieros respaldados por un valor base como por ejemplo una acción, un bono, un activo o una materia prima y que por consiguiente su valor depende de éste. Es así como existen por ejemplo certificados sobre cacao o aluminio, valores con los que es posible asegurar el precio de una acción o también comprar un seguro ante préstamos vencidos.

Una fecha importante en la historia de las opciones es el 26 de abril de 1973. En dicha fecha empieza a operar el CBOE (Chicago Board Options Exchange), el primer mercado organizado que se crea en el mundo. Los primeros contratos eran contratos de opción sobre lotes de 100 acciones, eligiéndose sólo 16 compañías al comienzo del mercado. El primer día se negociaron 911 contratos. Hoy en día, sólo en los mercados americanos se negocian 2,000 contratos de opciones por minuto.

En la actualidad, la rapidez y la variabilidad en las finanzas, obligan a buscar mecanismos que permitan predecir los resultados y se facilite la toma de decisiones. El modelo de valuación de derivados financieros, conocido en el ámbito financiero como el modelo de Black-Scholes, es uno de los modelos matemáticos más utilizados en la toma de decisiones financieras a nivel mundial.

En 1973 Fisher Black, Myron Scholes y Robert Merton lograron uno de los mayores avances en la valuación de opciones hasta ese momento, conocido como el modelo de Black-Scholes, que ha tenido una gran influencia en la manera en que los agentes valúan y cubren opciones. Ha sido también un punto de referencia para el desarrollo y éxito de la ingeniería financiera desde entonces. La importancia del modelo fue reconocida cuando Robert Merton y

Myron Scholes fueron premiados con el Premio Nobel de Economía; desafortunadamente Fisher Black falleció en 1995, quien indudablemente también hubiera recibido el premio. Aunque actualmente se utiliza en el mundo una gama de derivados financieros y múltiples combinaciones entre ellos, los derivados básicos, y más conocidos, son las opciones, los forwards, los futuros y los swaps.

En el capítulo 1 se da una breve explicación de las opciones y su importancia en el mercado financiero, está basado en [3] y [5]. En el capítulo 2 se muestra el modelo de Cox, Ross y Rubinstein, el modelo a tiempo discreto para opciones europeas, está basado en [1] y [9] principalmente. En el capítulo 3 se muestra la teoría básica del cálculo estocástico que sustenta el modelo de Black Scholes a tiempo continuo y está basado en [2], [4], [6], [8] y [10]. En el capítulo 4 se muestra el modelo de Black Scholes y el teorema de Girsanov el cual es parte fundamental en el modelo y está basado en [4], [9], [10] y [11] principalmente. Finalmente en el capítulo 5 se muestra un pequeño análisis de la sensibilidad de los parámetros involucrados en el modelo.

Capítulo 1

Opciones Europeas

1.1. Opciones

Las opciones son contratos mediante los cuales se acuerda la compra o la venta de un cierto bien a un cierto precio en una fecha determinada. El poder de compra o venta es un derecho, más no una obligación por parte de quien compra la opción. Lo que nos lleva a la siguiente definición.

Definición 1.1. *Una opción es un contrato que le ofrece a su tenedor o comprador el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender un número fijo de acciones u otros activos financieros de un activo subyacente especificado, a un precio estipulado K en una fecha determinada T .*

El precio estipulado K se conoce como precio strike y a la fecha determinada T se conoce como fecha de expiración o vencimiento del contrato.

Las opciones que se comercializan son los call (opción de compra) y put (opción de venta) como se le conoce en la literatura financiera. Las opciones se pueden clasificar por la forma en que se ejercen, las más comunes son la Europea y Americana. Las opciones europeas solamente pueden ser ejercidas en la fecha de expiración; mientras que las opciones americanas pueden ser ejercidas en cualquier momento posterior a la fecha de emisión hasta la fecha de expiración.

Como podemos observar, el contrato puede ser desventajoso para quien emite la opción, ya que el tenedor puede o no ejercer la opción. Para esto, el

tenedor o comprador de la opción debe pagar una prima al emisor de ésta, por el derecho de la opción. La prima es independiente del precio strike y se tiene que pagar por adelantado al emisor de la opción, sin importar si se adquiere o no.

Las opciones tienen dos utilidades principales: la cobertura y la especulación. La cobertura es la acción de protegerse ante el cambio inesperado en los precios de los activos que se cotizan en el mercado, ejemplos:

- Una persona requiere comprar un saco de maíz en un futuro y cuenta con un presupuesto de \$210 pesos, además supongamos que este es el precio actual del saco de maíz. Es posible, que en este lapso suba (o incluso baje) de precio, por lo cual su presupuesto podría no ser suficiente para la compra que desea hacer. Por este motivo puede comprar una opción de compra en el mercado, donde el activo subyacente sea el saco de maíz con una fecha de ejercicio de un mes y un precio strike de \$210 pesos. Así, esta persona se encuentra protegida en el caso de que el saco de maíz suba de precio, en caso contrario no ejerce la opción y compra el saco de maíz a un precio menor.
- Suponga que una persona le gustaría comprar una casa dentro de dos años a un precio de \$700,000 y esta persona quisiera firmar hoy mismo un contrato que le de el derecho de comprarla en ese precio, en la fecha fijada de antemano. Se debe tener en cuenta el precio de la casa en el mercado inmobiliario, ya que sube o baja de precio.
- Ciertos inversionistas quieren invertir su dinero en acciones de Telmex. Supongamos además que el precio actual de la acción es de \$15. Les gustaría firmar hoy mismo un contrato que les de el derecho de comprar dentro de 4 meses, una cantidad de 10,000 acciones de Telmex a un intermediario financiero a un precio fijo de \$16. El precio de las acciones pueden subir o bajar dependiendo de los diversos factores que intervienen en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV). Al finalizar los cuatro meses se tendrá que tomar una decisión.

El caso de la especulación el comprador de la opción espera que los precios suban o bajen, de tal manera, que al ejercer la opción obtengan una ganancia sin el más mínimo interés de adquirir el activo subyacente. Con esto las opciones se utilizan como una manera de apostar en el mercado siempre que

no se cuente con información privilegiada al respecto de los precios en un futuro, de lo contrario se estaría presentando un caso de arbitraje.

En los ejemplos anteriores se tiene que pagar una prima por la opción y la pregunta clave es: ¿Cuál es el precio justo que debe pagarse por la opción?. En las siguientes secciones abordaremos ésta pregunta, primero analizaremos el modelo en el caso discreto y posteriormente en el caso continuo.

1.2. Opciones vs acciones

Antes de continuar con nuestro estudio de opciones veremos la diferencia de una opción o una acción, en términos de ganancias, nos lleva a preguntarnos, ¿Qué es mejor, comprar una opción o una acción?.

Para responder a la pregunta, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2. *Supongamos que un inversionista tiene \$3,900 para sus operaciones de especulación. Ahora, supongamos que el precio actual de una acción ALFA es de \$39 y que una opción de compra con vencimiento a 30 días que tiene un precio de ejercicio de \$40, se está vendiendo por \$1.50. Con esta información se tienen las siguientes dos estrategias alternativas:*

1. *Comprar 100 acciones.*
2. *Comprar 2600 opciones*

Supongamos que existen dos únicos escenarios posibles dentro de 30 días, el precio de la acción se incrementa a \$40, o el precio de la acción baja a \$35. Los resultados en cada uno de los escenarios son los siguientes:

a) *El precio de la acción ALFA se eleva a \$45.*

- *Alternativa 1. El inversionista tendrá una ganancia equivalente a la diferencia de los precios, multiplicados por el número de acciones. Esto es:*

$$100(45 - 39) = \$600.$$

- *Alternativa 2. El inversionista podría ejercer sus 2600 opciones ya que le dan el derecho de comprar las acciones de ALFA a \$40,*

cuando en realidad valen \$45. Así, al ejercerlas tendrá 2600 acciones y su ganancia por acción será de \$5, por lo que su ganancia total es:

$$2600 \cdot 5 = \$13,000$$

menos el costo de las opciones el cual es $2600 \cdot 1.5 = \$3,900$, lo que da una ganancia neta de \$9,600.

b) El precio de la acción ALFA baja a \$35.

- *Alternativa 1. Con esta alternativa, nos arroja una pérdida de \$4 por acción, por lo que la pérdida es de:*

$$100(39 - 35) = \$400.$$

- *Alternativa 2. El inversionista no ejerce la opción, ya que el precio de ejercicio es mayor que el precio de la opción, por lo que la pérdida es el costo de las opciones, es decir, \$3,900.*

Como podemos observar es notoria la diferencia entre comprar acciones u opciones. Hace que las ganancias sean mucho mayores (\$600 vs \$9,100); pero también el uso de las opciones trae como consecuencia que en el caso de que la acción baje de precio, las pérdidas se magnifiquen (\$400 vs \$3,900). Sin embargo, si la reducción en el precio es muy profunda, entonces la opción de hecho limita la pérdida a \$3,900. Motivo por el cual los especuladores prefieren hacer más uso de las opciones.

Capítulo 2

Modelo a Tiempo Discreto

En este capítulo analizaremos el Modelo de Cox, Ross y Rubinstein en el caso discreto. Tocaremos el concepto de valor presente, ya que se utiliza con frecuencia en la literatura financiera, enunciaremos los conceptos de estrategia autofinanciable, admisible y libre de oportunidad de arbitraje, así mismo, la definición de martingala y finalmente lo que significa un mercado completo. Por último veremos la convergencia al modelo de Black-Scholes.

2.1. Valor presente y valor futuro

Antes de continuar con el modelo a tiempo discreto, analizaremos el comportamiento de una cuenta de ahorro en un cierto banco, con una tasa de interés fija. En este caso tenemos un activo sin riesgo, ya que conocemos la evolución de la cuenta en cualquier momento.

Supongamos que una persona tiene una cierta cantidad de dinero P_0 y lo invierte en un banco que le ofrece una tasa de interés fija anual $r\%$. Entonces la cantidad de dinero que se obtiene al finalizar el año es

$$P_1 = P_0 + rP_0 = P_0(1 + r),$$

en general, al término de t años se tiene la siguiente cantidad de dinero

$$P_t = (1 + r)^t. \tag{2.1}$$

Se llamará a P_0 el principal y a P_t el valor futuro al finalizar el tiempo t . En este caso se consideró una tasa de interés anual, sin embargo, en la

práctica no necesariamente sucede así, es decir, el periodo de composición puede ser semestral, biestral, mensual o hasta diariamente, por lo que la ecuación (2.1) se reescribe como:

$$P_t = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}, \quad (2.2)$$

donde m es la frecuencia de composición. Si una persona cuenta con un principal de \$25,000 y desea invertirla en un plazo de 20 años, el banco le ofrece una tasa de inversión del 3.8 % anual, por lo que el valor futuro será de $VF = 20,000(1 + 0.038)^{20} = 42,167.42$, es decir, se obtendría la cantidad de \$42,167.42 al pasar los 20 años.

En el caso anterior se cuenta con un capital inicial dado, ahora supongamos que necesitamos una cierta cantidad de dinero P al finalizar un año, sabiendo que la tasa de interés fija anual es r %. ¿Cuánto se debe invertir hoy para obtener la cantidad deseada al término del año?. Sea VP la cantidad que se necesita inicialmente, a esta cantidad se le llama valor presente de P , calculando el valor futuro de VP se tiene

$$P = VP(1 + r),$$

despejando VP se obtiene el valor presente, es decir,

$$VP = P(1 + r)^{-1}.$$

Procediendo de la misma forma que en el caso del valor futuro se tiene que el valor presente de P obtenido en t años con una tasa anual fija de interés r y con una frecuencia de composición m está dada por

$$VP = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-mt}.$$

A la cantidad $\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-mt}$ se le conoce como factor de descuento. Si una persona desea tener una cantidad de \$100,000 en un plazo de 10 años sabiendo que la tasa de inversión fija anual es de 3.8 %, el valor presente será de $VP = 100,000(1 + 0.038)^{-10} = 68,869.42$, es decir, si hoy se invierte un principal de \$68,869.42 en un plazo de 10 años con una tasa de interés anual fija de 3.8 % anual se obtendría la cantidad de \$100,000 al término de los 10 años.

Como mencionamos anteriormente, la composición de la tasa puede ser anual, semestral, bimestral o hasta diariamente, regresando a la ecuación (2.2) y haciendo un cambio de variable $n = mt$ tenemos

$$P_t = \left(1 + \frac{rt}{n}\right)^n.$$

Ahora, si pensamos que la composición es instantánea, es decir, m tiende a infinito, entonces n también tiende a infinito y la ecuación (2.2) cuando m tiende a infinito es equivalente a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{rt}{n}\right)^n = e^{rt}. \quad (2.3)$$

Podemos observar que si aumenta la frecuencia de composición el valor futuro del principal aumenta y cuando la composición es instantánea converge a la función exponencial con parámetro rt , donde r es la tasa fija anual de interés y t expresa el tiempo en años.

2.2. Conceptos básicos

El objetivo del trabajo como se mostró en ejemplos anteriores consiste en calcular el precio de la opción, es decir, la prima que debe pagar el comprador o tenedor para poder efectuar su derecho de ejercer o no la opción. ¿Cómo saber si el precio de la prima es justo para el tenedor o comprador de la opción?. En este capítulo consideraremos que t solo toma valores $0, 1, 2, \dots, T$ los cuales puede ser considerados en días y donde T es la fecha de expiración del contrato.

Primero consideremos el caso de una opción de tipo call, es decir, compramos una opción de compra sobre un activo subyacente, a un precio strike K fijo, en una fecha establecida T . Conocemos el precio del activo subyacente al momento de suscribir el contrato y lo denotamos por S_0 y el precio del activo al término del contrato está dado por S_T , el cual desconocemos.

Al momento de la expiración del contrato, el valor del activo es S_T y supongamos que $S_T < K$ el tenedor no le conviene ejercer la opción, ya que el precio del activo es más barato en el mercado que si se ejerciera en ese

instante, por el contrario, si sucede que $S_T > K$ el tenedor de la opción le conviene ejercer, en cualquier caso su payoff o función de pago está dada por

$$C_T = (S_T - K)_+ = \begin{cases} S_T - K, & \text{si } S_T > K, \\ 0, & \text{si } S_T \leq K. \end{cases}$$

Este es el precio de la opción en la fecha de expiración, sin embargo, nos interesa saber cual es el valor de la opción al momento de suscribir el contrato, es decir, la prima C_0 que debe pagar el tenedor o comprador de la opción. Analogamente en el caso de una opción de tipo put su payoff está dado por

$$P_T = (K - S_T)_+ = \begin{cases} K - S_T, & \text{si } S_T < K, \\ 0, & \text{si } S_T \geq K. \end{cases}$$

Para el modelo a tiempo discreto trabajaremos sobre un espacio de probabilidad finito $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, con una filtración $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_T$, donde $\mathcal{F}_t$ es visto como la información disponible hasta el tiempo t , donde T corresponde a la fecha de expiración de la opción. Asumiremos que $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_T = \{\mathcal{P}(\Omega)\}$ y para todo $\omega \in \Omega$, $P(\{\omega\}) > 0$. Supongamos que el mercado consiste de $(d + 1)$ activos financieros, cuyos precios al tiempo t están dados por las variables aleatorias no negativas $S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^d$ medibles con respecto a $\mathcal{F}_t$, el activo indicado por 0 es considerado como un activo libre de riesgo y denotamos por $S_0^0 = 1$, es decir, si r es la tasa de interés fija entonces $S_t^0 = (1 + r)^t$, denotaremos a $\beta_t = \frac{1}{S_t^0}$ como el factor de descuento. Los activos indicados por $i = 1, 2, \dots, d$, corresponden a los activos con riesgo.

Ahora consideremos una estrategia como un proceso estocástico $\phi = \{(\phi_t^0, \phi_t^1, \dots, \phi_t^d)\}_{0 \leq t \leq T} \in \mathbb{R}^{d+1}$, donde ϕ_t^i denota el número de acciones correspondientes al activo i en un portafolio al tiempo t .

Definición 2.1. *Un proceso ϕ es previsible si, para todo $i \in \{0, 1, \dots, d\}$, se tiene*

- ϕ_0^i es $\mathcal{F}_0$ -medible,
- y para $t \geq 1$, ϕ_t^i es $\mathcal{F}_{t-1}$ -medible.

Esto muestra que las posiciones de ϕ_t^i quedan completamente determinadas con respecto a la información disponible al tiempo $t - 1$ y se mantienen

hasta el tiempo t cuando las nuevas cotizaciones de los activos en el mercado están disponibles.

De modo que el valor del portafolio al tiempo t está determinado por el producto escalar

$$V_t(\phi) = \phi_t \cdot S_t = \sum_{i=0}^d \phi_t^i S_t^i.$$

Y su valor descontado

$$\bar{V}_t(\phi) = \beta_t(\phi_t \cdot S_t) = \phi_t \cdot \bar{S}_t,$$

donde $\beta_t = \frac{1}{s_t^0}$ y $\bar{S}_t = (1, \beta_t S_t^1, \dots, \beta_t S_t^d)$ es el vector de precios descontados.

2.3. Estrategias autofinanciables

Una estrategia ϕ es autofinanciable si cualquier cambio en el valor del portafolio V_t es determinado por las ganancias (o pérdidas) netas realizadas en la inversión; el valor del portafolio después del tiempo t y los precios de los activos antes del tiempo $t+1$ son conocidos y está dado por $\phi_{t+1} \cdot S_t$. Si el valor total del portafolio ha sido usado para esos ajustes (no hay retiro y los nuevos fondos son invertidos), entonces se satisface que para todo $t \in \{0, 1, \dots, T-1\}$

$$\phi_t \cdot S_t = \phi_{t+1} \cdot S_t. \quad (2.4)$$

Escribiendo $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$, para cualquier función y usando la ecuación (2.4)

$$\begin{aligned} \Delta V_t(\phi) = V_t(\phi) - V_{t-1}(\phi) &= \phi_t \cdot S_t - \phi_{t-1} \cdot S_{t-1} \\ &= \phi_t \cdot S_t - \phi_t \cdot S_{t-1} = \phi_t \Delta S_t. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Esta es la ganancia del portafolio en el intervalo de tiempo $[t-1, t]$, así, la ganancia o pérdida siguiendo la estrategia autofinanciable ϕ es debido al movimiento de los precios. Sumando desde $j = 1$ hasta $j = t$ en la ecuación (2.5), obtenemos

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^t \phi_j \Delta S_j.$$

Teniendo en cuenta que la ecuación (2.4) es equivalente a $\phi_t \cdot \bar{S}_t = \phi_{t+1} \cdot \bar{S}_t$ tenemos

$$\bar{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^t \phi_j \Delta \bar{S}_j. \quad (2.6)$$

Además, como $V_t(\phi) = \phi_t \cdot S_t$ y para cualquier estrategia ϕ , se sigue

$$\begin{aligned} \Delta V_t(\phi) &= V_t(\phi) - V_{t-1}(\phi) = \phi_t \cdot S_t - \phi_{t-1} \cdot S_{t-1} \\ &= \phi_t \cdot (S_t - S_{t-1}) + (\phi_t - \phi_{t-1}) \cdot S_{t-1} \\ &= \phi_t \cdot \Delta S_t + \Delta \phi_t \cdot S_{t-1}, \end{aligned}$$

la estrategia ϕ es autofinanciable si y sólo si $\Delta \phi_t \cdot S_{t-1} = 0$. De esta manera tenemos la siguiente proposición

Proposición 2.2. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

1. *La estrategia ϕ es autofinanciable*
2. *Para cualquier $t \in \{1, 2, \dots, T\}$*

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^t \phi_j \cdot \Delta S_j.$$

3. *Para cualquier $t \in \{1, 2, \dots, T\}$*

$$\bar{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^t \phi_j \cdot \Delta \bar{S}_j$$

$$\text{donde } \Delta \bar{S}_j = \beta_j S_j - \beta_{j-1} S_{j-1}.$$

4. *Para cualquier $t \in \{1, 2, \dots, T\}$, $\Delta \phi_t \cdot S_{t-1} = 0$.*

Proposición 2.3. *Para cualquier proceso previsible $((\phi_t^1, \dots, \phi_t^d))_{0 \leq t \leq T}$ y variable V_0 - $\mathcal{F}_0$ -medible, existe un único proceso previsible $(\phi_t^0)_{0 \leq t \leq T}$, tal que la estrategia $\phi = (\phi^0, \phi^1, \dots, \phi^d)$ es autofinanciable y su valor inicial es V_0 .*

Demostración. Por la condición de autofinanciamiento implica

$$\begin{aligned}\bar{V}_t(\phi) &= \phi_t^0 + \phi_t^1 \bar{S}_t^1 + \cdots + \phi_t^d \bar{S}_t^d \\ &= V_0 + \sum_{j=1}^t (\phi_j^1 \Delta \bar{S}_j^1 + \cdots + \phi_j^d \Delta \bar{S}_j^d),\end{aligned}$$

lo cual define ϕ_t^0 , para verificar que ϕ^0 es previsible consideremos la ecuación

$$\phi_t^0 = V_0 + \sum_{j=1}^{t-1} (\phi_j^1 \Delta \bar{S}_j^1 + \cdots + \phi_j^d \Delta \bar{S}_j^d) + \phi_t^1 (-\bar{S}_{t-1}^1) + \cdots + \phi_t^d (-\bar{S}_{t-1}^d).$$

donde cada término es $\mathcal{F}_t$ -medible. Así el proceso $(\phi_t^0)_{0 \leq t \leq T}$ es previsible. $\square$

2.4. Estrategia admisible y arbitraje

Hasta el momento no hemos hecho referencia al signo de la cantidad ϕ_t^i . Si $\phi_t^0 < 0$ hemos pedido prestado la cantidad $|\phi_t^0|$ en el activo sin riesgo. Si $\phi_t^i < 0$ para $i \geq 1$ decimos que estamos cortos, es decir, hemos hecho una venta del activo i . Vender y pedir dinero prestado está permitido, pero el valor del portafolio debe ser positivo en cualquier lapso, lo que nos lleva a la siguiente definición.

Definición 2.4. *Una estrategia ϕ es admisible si ésta es autofinanciable y $V_t(\phi) \geq 0$ para cualquier $t \in \{0, 1, \dots, T\}$.*

El inversionista debe ser capaz de pagar sus deudas del activo con riesgo o sin riesgo en cualquier momento. La noción de arbitraje (la posibilidad de obtener una ganancia sin tener riesgo alguno) se formaliza de la siguiente manera.

Definición 2.5. *Una estrategia que admite oportunidad de arbitraje, es una estrategia admisible con valor inicial cero y valor final no cero.*

Es decir, sin tener dinero podemos pedir dinero prestado, especular en alguna opción de tal manera que al término de esta podemos pagar nuestra deuda y generar una ganancia de manera segura, a esto se le conoce como oportunidad de arbitraje.

2.5. Martingala a tiempo discreto

En esta sección analizaremos la conexión entre martingala y arbitraje. Se trabaja sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, con $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ y para todo $\omega \in \Omega$, $P(\{\omega\}) > 0$ equipado con una filtración $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$. Diremos que una sucesión de variables aleatorias $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ es adaptada a la filtración, si para cualquier $t \in \{0, 1, \dots, T\}$, X_t es $\mathcal{F}_t$ -medible.

Definición 2.6. Una sucesión de variables aleatorias $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ con valores reales adaptada a la filtración y absolutamente integrables, es decir, $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$ es

- *Martingala* si $\mathbb{E}[M_{t+1}|\mathcal{F}_t] = M_t$ para todo $t \leq T - 1$.
- *Supermartingala* si $\mathbb{E}[M_{t+1}|\mathcal{F}_t] \leq M_t$ para todo $t \leq T - 1$.
- *Submartingala* si $\mathbb{E}[M_{t+1}|\mathcal{F}_t] \geq M_t$ para todo $t \leq T - 1$.

La definición se extiende al caso multidimensional, es decir, una sucesión $(M_t)_{0 \leq t \leq T} \in \mathbb{R}^d$ es martingala si cada componente es martingala. Enunciaremos algunas propiedades de las martingalas que serán de gran utilidad para el desarrollo del modelo a tiempo discreto considerando las propiedades de esperanza condicional:

- $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ es una martingala si y sólo si $\mathbb{E}[M_{t+j}|\mathcal{F}_t] = M_t$.
- Si $(M_t)_{t \geq 0}$ es martingala entonces para cualquier t : $\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0]$.
- La suma de dos martingalas es martingala.

Proposición 2.7. Sea $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ una martingala y $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ una sucesión previsible con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$. Denotamos $\Delta M_t = M_t - M_{t-1}$. La sucesión $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ definida por

$$\begin{aligned} X_0 &= H_0 M_0 \\ X_t &= H_0 M_0 + H_1 \Delta M_1 + \dots + H_t \Delta M_t, \text{ para todo } t \geq 1 \end{aligned}$$

es una martingala con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$.

Demostración. Como (M_t) es adaptada y (H_t) es un proceso previsible, (X_t) es un proceso adaptado e integrable. Para $t \geq 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{t+1} - X_t | \mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[H_{t+1} \Delta M_{t+1} | \mathcal{F}_t] \\ &= H_{t+1} \mathbb{E}[M_{t+1} - M_t | \mathcal{F}_t] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Por lo que se tiene

$$\mathbb{E}[X_{t+1} | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_t] = X_t.$$

Así, X_t es martingala. $\square$

A (X_t) se le conoce como la martingala transformada de (M_t) por (H_t) . La siguiente proposición es una caracterización muy útil para martingalas.

Proposición 2.8. *Una sucesión de variables aleatorias (M_t) es martingala si y sólo si para cualquier sucesión previsible (H_t) se tiene*

$$\mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^T H_t \Delta M_t \right] = 0.$$

Demostración. Si (M_t) es martingala y para cualquier proceso previsible (H_t) definimos $X_0 = 0$ y para $t \geq 1$, $X_t = H_1 \Delta M_1 + \cdots + H_t \Delta M_t$, por la Proposición 2.7 la sucesión X_t es martingala por lo que se tiene $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0] = 0$. Recíprocamente, sea $j \in \{0, 1, 2, \dots, T\}$ definimos (H_t) por $H_t = 0$ para todo $t \neq (j+1)$ y $H_{j+1} = A$ para cualquier conjunto A , $\mathcal{F}_j$ -medible, así, (H_t) es previsible y $\mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^T H_t \Delta M_t \right]$ se reduce a $\mathbb{E} [1_A (M_{j+1} - M_j)] = 0$, usando la linealidad de la esperanza y dividiendo entre la probabilidad de A se tiene

$$\mathbb{E}[M_{j+1} | A] = \frac{\mathbb{E} [1_A M_{j+1}]}{P(A)} = \frac{\mathbb{E} [1_A M_j]}{P(A)} = \mathbb{E}[M_j | A],$$

como A es cualquier conjunto $\mathcal{F}_j$ -medible se tiene $\mathbb{E}[M_{j+1} | \mathcal{F}_j] = M_j$. $\square$

Regresando al contexto financiero decimos que los precios $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ del activo i es una martingala, implica que al tiempo t la mejor estimación de S_{t+1}^i esta dado por S_t^i y esto se debe al hecho de $\mathbb{E}[S_{t+1}^i | S_t^i]$ minimiza el error cuadrático medio, es decir, si $d(S_t^i)$ es una predicción de S_{t+1}^i que minimiza la funcion $\mathbb{E}[(S_{t+1}^i - d(S_t^i))^2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[(S_{t+1}^i - d(S_t^i))^2 | S_t^i]]$ y esto sucede cuando

$d(S_t^i) = \mathbb{E}[S_{t+1}|S_t]$ y como es martingala se tiene la conclusión.

Usando la ecuación (2.6) definimos el proceso de ganancias asociado a la estrategia ϕ por

$$G_0(\phi) = 0, \quad G_t(\phi) = \phi_1 \cdot \Delta S_1 + \cdots + \phi_t \cdot \Delta S_t$$

así,

$$V_t(\phi) = V_0 + G_t(\phi)$$

análogamente, se tiene $\bar{V}_t(\phi) = V_0 + \bar{G}_t(\phi)$, donde $\bar{G}_t(\phi) = \sum_{j=1}^t \phi \cdot \Delta \bar{S}_j$. Denotemos por C al cono convexo de variables aleatorias estrictamente positivo, entonces, si asumimos que no hay oportunidad de arbitraje tenemos que

$$\text{Si } V_0(\phi) = 0 \quad \text{entonces} \quad \bar{V}_T(\phi) \notin C.$$

Esto quiere decir que el proceso de ganancias descontadas para una estrategia ϕ no puede ser positiva.

Tomando en cuenta la Proposición 2.3 tenemos que la estrategia $\phi = (\phi^0, \phi^1, \dots, \phi^d)$ tiene su valor inicial $V_0(\phi) = 0$ y es autofinanciable. Supongamos que $\bar{G}_T(\phi) \in C$ entonces

$$V_T(\phi) = \beta_T^{-1} \bar{V}_T(\phi) = \beta_t^{-1} (V_0(\phi) + \bar{G}_T(\phi)) = \beta_T^{-1} \bar{G}_T(\phi)$$

es no negativa y estrictamente positiva, por lo que hay oportunidad de arbitraje. Así hemos probado el siguiente lema

2.6. Mercado viable

Primera conexión del concepto de martingala con un mercado viable mediante el siguiente teorema.

Teorema 2.9. *El mercado es viable si y sólo si existe una medida P^* de probabilidad equivalente a P tal que los precios descontados de los activos son P^* martingalas.*

Demostración. Asumiremos que existe una medida P^* de probabilidad equivalente a P tal que los precios descontados son martingalas. Para cual-

quier estrategia ϕ autofinanciable se tiene

$$\bar{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^t \phi_j \cdot \Delta \bar{S}_j.$$

Como los precios descontados son P^* martingalas se tiene

$$\mathbb{E}^*[\bar{V}_T(\phi)] = \mathbb{E}^*[V_0(\phi)]$$

Si la estrategia es admisible y su valor inicial es cero entonces $\mathbb{E}^*[\bar{V}_T(\phi)] = 0$ con $\bar{V}_T \geq 0$, pero como $P^*(\{\omega\}) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$ entonces $\bar{V}_T(\phi) = 0$, así no hay oportunidad de arbitraje y el mercado es viable.

Ahora, supongamos que el mercado es viable, lo cual es equivalente a decir que, para cualquier estrategia admisible ϕ tal que $V_0(\phi) = 0$ entonces $\bar{V}_T(\phi) \notin C$. Sea L el conjunto de variables aleatorias $\bar{G}_T(\phi)$ con $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^d) \in \mathbb{R}^d$ un proceso previsible, es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^\Omega$ (donde $\mathbb{R}^\Omega$ es el conjunto de variables aleatorias definidas sobre Ω). Por el Lema 2.10 el subespacio L no intercepta al cono C , por lo que no intercepta al conjunto $K = \{X \in C : \sum_{\omega} X(\omega) = 1\}$, el cual es convexo y compacto, por el Teorema 2.11 existe un operador $\lambda(\omega)$ tal que

1. Para todo $X \in K$, $\sum_{\omega} \lambda(\omega) X(\omega) > 0$,
2. Para cualquier proceso previsible ϕ

$$\sum_{\omega} \lambda(\omega) \bar{G}_T(\phi)(\omega) = 0.$$

Por la Propiedad 1 se tiene que $\lambda(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$ por lo que definimos la siguiente medida de probabilidad

$$P^*(\{\omega\}) = \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\omega' \in \Omega} \lambda(\omega')}.$$

La cual es equivalente a P . Denotamos a $\mathbb{E}^*$ la esperanza bajo la medida P^* , por la Propiedad 2 se tiene que para cualquier proceso previsible $\phi \in \mathbb{R}^d$

$$\mathbb{E}^* \left[\sum_{j=1}^T \phi_j \Delta \bar{S}_j \right] = 0,$$

la cual es una caracterización de martingala, Proposición 2.7, así, los precios descontados son P^* martingala. $\square$

Lema 2.10. *Si el mercado es viable, las ganancias descontadas asociadas a cualquier proceso previsible $(\phi^1, \dots, \phi^d)$ no puede pertenecer al cono C .*

Diremos que dos medidas P_1 y P_2 son equivalentes si para cualquier evento A , $P_1(A) = 0$ si y sólo si $P_2(A) = 0$. En nuestro contexto diremos que P^* es equivalente a P si para cualquier $\omega \in \Omega$, $P^*(\{\omega\}) > 0$.

Teorema 2.11. *Sea K un conjunto compacto y convexo, y un subespacio vectorial V de $\mathbb{R}^n$. Si V y K son disjuntos existe un funcional ξ definido sobre $\mathbb{R}^n$ el cual satisface*

$$1. \forall x \in K, \quad \xi(x) > 0.$$

$$2. \forall x \in V, \quad \xi(x) = 0.$$

Por lo que el subespacio V es incluido en un hiperplano que no intercepta a K .

Para la demostración ver [9].

2.7. Mercados completos y valuación de la opción

Sea una opción europea de tipo call sobre un activo subyacente S^1 con un precio strike K y una fecha de expiración T , cuyo payoff es h - $\mathcal{F}_T$ -medible está definido como $h = (S_T^1 - K)_+$. En el caso de un put sobre el mismo activo subyacente con el mismo precio strike y fecha de vencimiento T , tiene su payoff dado por $h = (K - S_T^1)_+$.

Definición 2.12. *Un reclamo contingente definido por h es alcanzable, si existe una estrategia admisible de valor h al tiempo T .*

Observemos que en un mercado viable necesitamos encontrar una estrategia autofinanciable de valor h en la fecha de expiración de la opción, entonces decimos que h es alcanzable. Si ϕ es una estrategia autofinanciable y P^* es una medida equivalente a P bajo la cual los precios descontados son martingala, entonces $\bar{V}_t(\phi)$ es la martingala transformada de los precios descontados por la estrategia previsible ϕ , así, para $i \in \{1, 2, \dots, T\}$ se tiene $\bar{V}_t = \mathbb{E}^*[\bar{V}_T | \mathcal{F}_t]$. Claramente si $\bar{V}_T(\phi) \geq 0$ la estrategia es admisible, en particular tomamos $h = V_T(\phi)$.

Definición 2.13. *El mercado es completo, si cada reclamo contingente es alcanzable.*

Teorema 2.14. *Un mercado viable es completo si y sólo si existe una única medida de probabilidad P^* equivalente a P bajo la cual los precios descontados son martingalas.*

Demostración. Asumiremos que el mercado es viable y completo. Entonces para cualquier variable aleatoria h que es $\mathcal{F}_T$ -medible se escribe como $h = V_T(\phi)$, donde ϕ es una estrategia admisible que replica el reclamo contingente. Como ϕ es autofinanciable

$$\beta_T h = \frac{h}{S_T^0} = \bar{V}_T = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^T \phi_j \cdot \Delta \bar{S}_j.$$

Sean P_1 y P_2 medidas equivalentes a P tal que los precios descontados son martingalas, por consiguiente se tiene

$$\mathbb{E}_1[\beta_T h] = V_0(\phi) = E_2[\beta_T h];$$

en particular

$$\mathbb{E}_1[h] = E_2[h]. \quad (2.7)$$

La ecuación (2.7) se mantiene para cualquier variable aleatoria h - $\mathcal{F}_T$ -medible, puesto que el mercado es completo. En particular, se cumple para $h = 1_A$, donde $A \in \mathcal{F}_T$ arbitrario, así, $P_1(A) = P_2(A)$. Por lo que, $P_1 = P_2$ y la medida bajo la cual los precios descontados son martingalas es única.

Ahora supongamos que el mercado es viable pero no completo, es decir, existe una variable aleatoria no negativa h la cual no es alcanzable. Esto quiere decir que h no puede ser generada, por cualquier estrategia autofinanciable $\phi = (\phi^0, \phi^1, \dots, \phi^d)$ y por la Proposición 2.3 nos restringimos al proceso previsible $\{(\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^d)\} \in \mathbb{R}^d$, ya que ϕ^0 queda determinada por una constante. Definimos el siguiente conjunto

$$L = \left\{ c + \sum_{t=1}^T \phi \cdot \Delta \bar{S}_t : \phi \text{ es previsible, } c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Entonces L es un subespacio lineal del espacio vectorial $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Además, como h no es alcanzable entonces $\beta_T h$ no es un elemento de L ,

así L es un subespacio propio de L^0 y tiene complemento ortogonal no vacío. Así para cualquier medida P_1 equivalente a P bajo la cual los precios descontados son P_1 martingalas, existe una variable aleatoria no cero $Z \in L^0$ tal que

$$\mathbb{E}_1[YZ] = 0 \text{ para toda } Y \in L.$$

Como se cumple para cualquier $Y \in L$, en especial se cumple para $Y \equiv 1$ el cual está en L tomando a $\phi^i = 0$ para $i \geq 1$, así, $\mathbb{E}_1[Z] = 0$. Definimos P_2 por

$$P_2(\{\omega\}) = R(\{\omega\})P_1(\{\omega\}),$$

donde

$$R(\{\omega\}) = 1 + \frac{Z(\{\omega\})}{2\|Z\|_\infty}, \quad \|Z\|_\infty = \max\{|Z(\{\omega\})| \text{ t.q. } \omega \in \Omega\}.$$

Entonces P_2 es una medida de probabilidad equivalente a P ya que $P_2(\{\omega\}) > 0$ para toda $\omega \in \Omega$,

$$P_2(\Omega) = \mathbb{E}_1[R] = 1,$$

ya que $\mathbb{E}_1[Z] = 0$. Más aún, para cada $Y = c + \sum_{t=1}^T \phi \cdot \Delta \bar{S}_t \in L$ se cumple

$$\mathbb{E}_2[Y] = \mathbb{E}_1[RY] = \mathbb{E}_1[Y] + \frac{1}{2\|Z\|_\infty} \mathbb{E}_1[YZ] = c.$$

En particular, $\mathbb{E}_2[Y] = 0$ cuando $c = 0$, por lo que para cualquier proceso previsible $\phi = \{\phi_t^i \text{ t.q. } t = 1, 2, \dots, T, i = 1, 2, \dots, d\}$ se tiene

$$\mathbb{E}_1 \left[\sum_{t=1}^T \phi_t \cdot \Delta \bar{S}_t \right] = 0.$$

Usando la Proposición 2.8, tenemos que los precios descontados son P_2 martingalas, lo cual es una contradicción ya que la medida equivalente a P bajo la cual los precios descontados son martingalas, es única. $\square$

Como el mercado es viable y completo, denotamos por P^* la única medida de probabilidad equivalente a P bajo la cual los precios descontados son

martingalas. Sea h un reclamo contingente, el cual es $\mathcal{F}_T$ -medible y no negativo, ϕ una estrategia admisible que replica el reclamo contingente el cual es definido por

$$h = V_T(\phi).$$

Además, como la sucesión $(\bar{V}_t)_{0 \leq t \leq T}$ es P^* martingala se tiene

$$V_0(\phi) = \mathbb{E}^* [\bar{V}_T(\phi)],$$

esto es

$$V_0(\phi) = \beta_T \mathbb{E}^*[V_T(\phi)] = \beta_T \mathbb{E}^*[h].$$

De forma más general se tiene

$$V_t(\phi) = \beta_{T-t} \mathbb{E}^*[h | \mathcal{F}_t], \quad t \in \{0, 1, 2, \dots, T\}. \quad (2.8)$$

El precio de la opción tipo call queda determinado por $V_t(\phi)$, el cual es el capital necesario para replicar $h = (S_T - K)_+$ al tiempo T siguiendo la estrategia ϕ , es decir, el precio de la opción al momento de suscribir el contrato es determinado por

$$\beta_T \mathbb{E}^*[(S_T - K)_+].$$

Análogamente para una opción tipo put

$$\beta_T \mathbb{E}^*[(K - S_T)_+].$$

2.8. Modelo de Cox, Ross y Rubinstein

En la sección anterior vimos la forma de evaluar una opción europea ya sea de tipo call o put. El modelo de Cox, Ross y Rubinstein (CRR) contiene toda la información necesaria para deducir la famosa fórmula de Black-Scholes para la valuación de opciones europeas en un mercado a tiempo continuo modelado por un movimiento Browniano geométrico.

Primero deduciremos la ecuación de paridad, la cual relaciona el precio de una opción call y put. Denotamos por C_t el precio de la opción al tiempo t de una call europea sobre una acción de un stock con un precio strike K y fecha de expiración T , análogamente, P_t el precio de una opción put sobre el

mismo stock, y r es la tasa de interés fija.

Sea P^* la medida de probabilidad bajo la cual los precios descontados son martinagala, calculamos la diferencia de las primas correspondientes a un call y a un put. Tomando en cuenta la ecuación (2.8) se obtiene

$$\begin{aligned}
 C_t - P_t &= \beta_{T-t} (\mathbb{E}^* [(S_T - K)_+ | \mathcal{F}_t] - \mathbb{E}^* [(K - S_T)_+ | \mathcal{F}_t]) \\
 &= \beta_{T-t} \mathbb{E}^* [S_T - K | \mathcal{F}_t] \\
 &= \beta_{T-t} \mathbb{E}^* [S_T | \mathcal{F}_t] - K \beta_{T-t} \\
 &= \beta_{-t} \mathbb{E}^* [\beta_T S_T | \mathcal{F}_t] - K \beta_{T-t} \\
 &= \beta_{-t} (\beta_t S_t) - K \beta_{T-t} \\
 &= S_t - K(1+r)^{-(T-t)}.
 \end{aligned}$$

Al tiempo $t = 0$, se tiene que la ecuación de paridad está dada por

$$C_0 - P_0 = S_0 - K(1+r)^{-T}. \quad (2.9)$$

Para el modelo de CRR se considera un activo con riesgo cuyos precios están dados por la sucesión de variables aleatorias S_t , $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ donde T es la fecha de expiración y un activo sin riesgo con una tasa de interés r sobre cada periodo de tiempo. El precio del stock inicial S_0 es conocido y el cambio de precio entre dos periodos consecutivos cambia por un factor $(1+a)$ o $(1+b)$ con $-1 < a < b$, por lo que el precio del stock está dado por

$$S_{t+1} = \begin{cases} S_t(1+a), & \text{con probabilidad } p, \\ S_t(1+b), & \text{con probabilidad } 1-p, \end{cases}$$

para toda $t \in \{0, 1, \dots, T-1\}$.

El conjunto de posibles estados es entonces $\Omega = \{1+a, 1+b\}^T$ con la filtración natural generada por el valor de los precios del stock, es decir, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$, $\mathcal{F}_t = \sigma\{S_u \text{ t.q. } u \leq t\}$, donde $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T = 2^\Omega$ es la σ -álgebra generada por todos los subconjuntos de Ω .

La medida P sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ es inducida por la razón de los precios del stock y denotamos a $R_t = S_t/S_{t-1}$ para $t > 0$. Para cada $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_T) \in \Omega$ definimos

$$P(\{\omega\}) = P(R_t = \omega_t, \quad t = 1, 2, \dots, T).$$

Observemos que si P^* es una medida de probabilidad equivalente a P que satisface que los precios descontados son P^* martingala, es decir,

$$\mathbb{E}^* [\bar{S}_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \bar{S}_{t-1},$$

es equivalente a $\mathbb{E}^* \left[\frac{\bar{S}_t}{\bar{S}_{t-1}} | \mathcal{F}_{t-1} \right] = 1$ ya que S_{t-1} es $\mathcal{F}_{t-1}$ -medible, y a la vez equivalente a

$$\mathbb{E}^* \left[\frac{S_t}{S_{t-1}} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] = 1 + r,$$

ya que $\beta_t/\beta_{t-1} = 1 + r$. Como P^* es una medida equivalente martingala a P , se tiene $\mathbb{E}^*[R_t] = 1 + r$, pero como R_t solo toma los valores $(1 + a)$ o $(1 + b)$, el valor esperado de R_t es igual a $(1 + r)$ sólo si $a < r < b$, lo cual nos dice que el mercado es libre de arbitraje.

Ahora mostremos que el mercado es viable y completo, es decir, que existe una única medida de probabilidad equivalente a P bajo la cual los precios descontados son martingala.

Lema 2.15. $\bar{S}_t$ es P^* martingala si y sólo si las variables aleatorias (R_t) son i.i.d. con $P^*(R_1 = 1 + a) = q$ y $P^*(R_1 = 1 + b) = 1 - q$ donde $q = (b - r)/(b - a)$.

Demostración. Supongamos que R_t son v.a.i.i.d. y por la observación anterior se tiene

$$\mathbb{E}^*[R_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}^*[R_t] = (1 + a)q + (1 + b)(1 - q) = 1 + r.$$

Por lo cual los precios descontados son P^* martingala.

Recíprocamente, si los precios descontados son P^* martingala se tiene $\mathbb{E}^*[R_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 1 + r$, como R_t sólo toma los valores $1 + a$ o $1 + b$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^*[R_t | \mathcal{F}_{t-1}] &= (1 + a)P^*(R_t = 1 + a | \mathcal{F}_{t-1}) + (1 + b)P^*(R_t = 1 + b | \mathcal{F}_{t-1}) \\ &= 1 + r, \end{aligned}$$

donde $P^*(R_t = 1 + a | \mathcal{F}_{t-1}) + P^*(R_t = 1 + b | \mathcal{F}_{t-1}) = 1$. Sea $q = P^*(\{R_t = 1 + a\} | \mathcal{F}_{t-1})$, obteniendo así que

$$(1 + a)q + (1 + b)(1 - q) = 1 + r \iff q = (b - r)/(b - a).$$

La independencia de las variables R_t se sigue por inducción sobre $t > 0$, ya que para $\omega \in \Omega$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_T)$ vemos inductivamente

$$P^*(R_1 = \omega_1, R_2 = \omega_2, \dots, R_t = \omega_t) = \prod_{i=1}^t q_i,$$

donde $q_i = q$ cuando $\omega_i = (1 + a)$ e igual a $(1 - q)$ cuando $\omega_i = (1 + b)$. Lo cual afirma que las variables aleatorias (R_t) son i.i.d. $\square$

De esta forma el modelo CRR admite una única medida de probabilidad dada por P^* . Una vez teniendo ésta medida procedemos a calcular el valor de una opción call europea $C_T = (S_T - K)_+$, al tiempo t está dada por la ecuación (2.8)

$$V_t(C_T) = (1 + r)^{-(T-t)} \mathbb{E}^* [(S_T - K)_+ | \mathcal{F}_t].$$

Ya que $S_T = S_t \prod_{i=t+1}^T R_i$ y teniendo en cuenta que cada variable R_i ($i > t$) es independiente de $\mathcal{F}_t$ se obtiene

$$V(C_t) = (1 + r)^{-(T-t)} \mathbb{E}^* \left[\left(S_t \prod_{i=t+1}^T R_i - K \right)_+ \middle| \mathcal{F}_t \right] = v(t, S_t)$$

donde

$$\begin{aligned} v(t, x) &= (1 + r)^{-(T-t)} \mathbb{E}^* \left[\left(x \prod_{i=t+1}^T R_i - K \right)_+ \right] \\ &= (1 + r)^{-(T-t)} \sum_{i=0}^{T-t} \binom{T-t}{i} q^i (1 - q)^{T-t-i} (x(1 + a)^i (1 + b)^{T-t-i} - K)_+. \end{aligned}$$

En particular el precio de la opción call europea al tiempo $t = 0$, está dado por

$$\begin{aligned} C_0 &= v(0, S_0) \\ &= (1 + r)^{-T} \sum_{t=0}^T \binom{T}{t} q^t (1 - q)^{T-t} (x(1 + a)^t (1 + b)^{T-t} - K)_+ \\ &= (1 + r)^{-T} \sum_{t=0}^T \binom{T}{t} q^t (1 - q)^{T-t} (x(1 + a)^t (1 + b)^{T-t} - K) \end{aligned}$$

donde A es el entero k más pequeño para el cual $S_0(1+a)^k(1+b)^{T-k} > K$.

2.9. Convergencia al modelo de Black-Scholes

Consideremos una opción europea tipo put sobre un stock con un precio strike K y fecha de expiración T . Su payoff está dado por $(K - S_T)_+$. El desarrollo es análogo en el caso de una opción de tipo call.

El precio inicial del stock está dado por S_0 , definimos $h = T/N$ para algún N fijo de tal forma que el conjunto $\{0, h, 2h, \dots, Nh\} \subset [0, T]$. Para $r > 0$ fijo, definimos R la tasa de interés, donde $R = rT/N$ sobre el intervalo de tiempo $[0, h]$. El precio de la opción está dado por

$$\begin{aligned}
 P_0^N &= (1+R)^{-N} \mathbb{E}^*[(K - S_0)_+] \\
 &= \mathbb{E}^* \left[\left((1+R)^{-N} K - (1+R)^{-N} S_0 \prod_{n=1}^N R_n^N \right)_+ \right] \\
 &= \mathbb{E}^* \left[\left((1+R)^{-N} K - S_0 \prod_{n=1}^N \frac{R_n^N}{1+R} \right)_+ \right] \\
 &= \mathbb{E}^* \left[\left((1+R)^{-N} K - S_0 e^{\log \left(\prod_{n=1}^N \frac{R_n^N}{1+R} \right)} \right)_+ \right] \\
 &= \mathbb{E}^* \left[\left((1+R)^{-N} K - S_0 e^{\sum_{n=1}^N \log \left(\frac{R_n^N}{1+R} \right)} \right)_+ \right]
 \end{aligned}$$

donde $R_n^N = S_{nh}^N / S_{(n-1)h}^N$ toma valores de la forma $(1+a)$ y $(1+b)$ para $n \geq 1$. Además, las variables (R_n^N) son i.i.d. y

$$P^*(R_1^N = 1+a) = q = \frac{b-R}{b-a}.$$

Supongamos que

$$\log \left(\frac{1+a}{1+R} \right) = \sigma \sqrt{\frac{T}{N}} = -\sigma \sqrt{h}, \quad \log \left(\frac{1+b}{1+R} \right) = -\sigma \sqrt{\frac{T}{N}} = \sigma \sqrt{h}. \quad (2.10)$$

La tasa de los precios descontados del stock son de la forma $e^{\sigma\xi_n}$ donde las variables aleatorias (ξ_n) son i.i.d. y toman los valores $\pm\sqrt{\sigma}$ con probabilidades q y $1 - q$ respectivamente.

Ahora, una forma simple del teorema central del límite está dado de la siguiente manera.

Teorema 2.16. *Dada una sucesión de variables aleatorias $(Y_k^N)_{k_N}$ i.i.d. con media μ_n tal que $N\mu_n$ converge a μ cuando $N \rightarrow \infty$ y cuya varianza es de la forma $\sigma^2/N + o(1/N)$, la suma $Z_N = \sum_{k=1}^N Y_k^N$ converge en distribución a una variable aleatoria Z distribuida $N(\mu, \sigma^2)$.*

Demostración. Para probar la convergencia observemos la función característica de Z_N

$$\psi_{Z_N}(u) = \mathbb{E}[e^{iuZ_N}] = \prod_{j=1}^N \mathbb{E}[e^{iuY_1^N}] = \left(\mathbb{E}[e^{iuY_1^N}]\right)^N,$$

definimos $f(u) = e^{iuY_1^N}$, al desarrollar en serie de Taylor y tomando su esperanza se tiene

$$\psi_{Z_N}(u) = \left(1 + iu\mu_N - \frac{\sigma^2 u^2}{2N} + o(1/N)\right)^N,$$

que a su vez converge a la función característica $e^{iu\mu - \sigma^2 u^2/2}$ de una $N(\mu, \sigma^2)$. $\square$

Para aplicar la convergencia anterior, definimos

$$Y_n^N = \log\left(\frac{R_n^N}{1 + R}\right), \quad Z_N = \sum_{n=1}^N Y_n^N.$$

Los valores posibles de Y_1^N son $\pm\sigma\sqrt{h}$, calculando su esperanza se obtiene

$$\mu_N = \mathbb{E}^*[Y_1^N] = \sigma\sqrt{h}q - \sigma\sqrt{h}(1 - q) = (2q - 1)\sigma\sqrt{h},$$

usando la ecuación (2.10) y reescribiendo $1 - 2q$ obtenemos

$$\begin{aligned} 2q - 1 &= 1 - 2(1 - q) = 1 - 2\left(\frac{e^{\sigma\sqrt{h}} - 1}{e^{\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}\right) \\ &= 1 - \frac{e^{\sigma\sqrt{h}} - 1}{\sinh(\sigma\sqrt{h})}. \end{aligned}$$

Expandiendo en serie de Taylor el lado derecho se tiene $2q - 1 = -\frac{1}{2}\sigma\sqrt{h} + o(1/N)$. Así, $\mu_N = -\frac{1}{2}\frac{\sigma^2 T}{N} + o(1/N)$, por lo que, $N\mu_N \rightarrow -\frac{1}{2}\sigma^2 T$ cuando $N \rightarrow \infty$.

Por último, calculamos el segundo momento de la variable Y_1^N

$$\mathbb{E}^* [(Y_1^N)^2] = \sigma^2 \frac{T}{N} q + \sigma^2 \frac{T}{N} (1 - q) = \sigma^2 \frac{T}{N}$$

y su varianza es de la forma $\sigma^2 \frac{T}{N} + o(1/N)$. Aplicando el teorema de límite central se tiene que $Z_N \rightarrow Z$ en distribución, donde $Z \sim N(-\frac{1}{2}\sigma^2 T, \sigma^2 T)$, usando la ecuación (2.3) se tiene que el valor de la opción está dada por

$$P_0 = \mathbb{E} \left[\left(e^{-rT} K - S_0 e^Z \right)_+ \right].$$

Dado que $Z \sim N(-\frac{1}{2}\sigma^2 T, \sigma^2 T)$ entonces la variable $X = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}(Z + \frac{1}{2}\sigma^2 T)$ tiene una distribución $N(0, 1)$. Para encontrar la esperanza evaluamos la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(K e^{-rT} - S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}x} \right)_+ \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

La integral es diferente de cero cuando

$$\begin{aligned} K e^{-rT} &> S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}x} \\ \Rightarrow \log(K) - rT &> \log(S_0) - \frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}x \\ \Rightarrow \gamma = \frac{\log\left(\frac{K}{S_0}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} &> x \end{aligned}$$

cambiando el límite de integración, el precio de la opción put está dado por

$$\begin{aligned} P_0 &= K e^{-rT} \int_{-\infty}^{\gamma} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} dx - S_0 \int_{-\infty}^{\gamma} e^{-\frac{\sigma^2 T}{2}} e^{\sigma\sqrt{T}x - \frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\ &= K e^{-rT} (\Phi(\gamma)) - S_0 \int_{-\infty}^{\gamma} e^{-\frac{1}{2}(x - \sigma\sqrt{T})^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\ &= K e^{-rT} (\Phi(\gamma)) - S_0 \left(\Phi(\gamma - \sigma\sqrt{T}) \right). \end{aligned}$$

Φ denota la función de distribución acumulada normal estándar. Usando la simetría de Φ y la ecuación de paridad (2.9) el precio de una opción call está dado por

$$\begin{aligned}
 C_0 &= S_0 + P_0 - Ke^{-rT} \\
 &= S_0 - S_0 \left(\Phi(\gamma - \sigma\sqrt{T}) \right) + Ke^{-rT} - Ke^{-rT} \\
 &= S_0 \left(1 - \left(\Phi(\gamma - \sigma\sqrt{T}) \right) \right) - Ke^{-rT} (1 - \Phi(\gamma)) \\
 &= S_0 \left(\Phi(\sigma\sqrt{T} - \gamma) \right) - Ke^{-rT} (\Phi(-\gamma)) \\
 &= S_0 \Phi(d_+) - Ke^{-rT} \Phi(d_-),
 \end{aligned}$$

donde

$$d_{\pm} = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Capítulo 3

Cálculo Estocástico

En este capítulo estudiaremos el movimiento Browniano así como algunas características, posteriormente analizaremos la integral de Itô, empezando con procesos simples y posteriormente extenderemos a cualquier proceso en general, así como algunas de sus propiedades. Daremos la definición de un proceso de Itô, así como su fórmula para el cálculo de integrales estocásticas.

3.1. Movimiento Browniano

Antes de definir la integral estocástica, enunciaremos algunas características del movimiento Browniano que nos permiten modelar el precio de los activos subyacentes en el siguiente capítulo. En lo que sigue tomaremos a los procesos estocásticos indexados sobre un intervalo de tiempo $[0, T]$, para fines de nuestro estudio.

Consideraremos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con una filtración $(\mathcal{F})_{0 \leq t \leq T}$, bajo las consideraciones anteriores enunciamos la definición de movimiento Browniano.

Definición 3.1. *Un movimiento Browniano estandar (W_t) , $0 \leq t \leq T$ es un proceso estocástico adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ de valores reales que tiene trayectorias continuas casi seguramente con distribuciones Gaussianas estacionarias e incrementos independientes, es decir,*

- *El mapeo $t \rightarrow W_t(\omega)$ es continuo para casi todo $\omega \in \Omega$.*
- *$W_0 = 0$ casi seguramente.*

- Para $s \leq t \leq T$, $W_t - W_s$ es una variable aleatoria independiente de $\mathcal{F}_s$.
- Para $s \leq t \leq T$, $W_t - W_s$ es una variable aleatoria distribuida $N(0, t - s)$.

Una vez que se tiene la definición de movimiento Browniano vamos a estudiar algunas propiedades importantes, que nos ayudaran más adelante para la construcción de la integral de Itô. Primero vamos a calcular la variación cuadrática del movimiento Browniano, después veremos que no es de variación acotada. Por lo que tenemos la siguiente definición.

Definición 3.2. Sea $f(t)$ una función definida sobre $0 \leq t \leq T$. La variación cuadrática de f hasta el tiempo T es

$$[f, f](T) = \lim_{\|\Pi \rightarrow 0\|} \sum_{i=0}^{n-1} (f(t_{i+1}) - f(t_i)),$$

donde $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ y $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$.

Teorema 3.3. Sea W un movimiento Browniano estándar. Entonces la variación cuadrática está dada por $[W, W](T) = T$, para todo $T \geq 0$.

Demostración. Sea $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una partición de $[0, T]$ definimos

$$Q_\Pi = \sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2.$$

La variación cuadrática muestral es la suma de variables aleatorias independientes. Por lo cual su media y varianza es la suma de sus medias y varianzas respectivamente, entonces

$$\mathbb{E}[Q_\Pi] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2] = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = T$$

y

$$\begin{aligned} \text{Var}[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2] &= \mathbb{E}[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^4 - 2(t_{i+1} - t_i)\mathbb{E}[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2] + (t_{i+1} - t_i)^2] \\ &= \mathbb{E}[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^4] - 2(t_{i+1} - t_i)\mathbb{E}[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2] + (t_{i+1} - t_i)^2 \\ &= 3(t_{i+1} - t_i)^2 - 2(t_{i+1} - t_i)^2 + (t_{i+1} - t_i)^2 \\ &= 2(t_{i+1} - t_i)^2, \end{aligned}$$

por lo cual la varianza de la variación muestral es

$$\begin{aligned} \text{Var}[Q_\Pi] &= \sum_{i=0}^{n-1} \text{Var}[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2] = \sum_{i=0}^{n-1} 2(t_{i+1} - t_i)^2 \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} 2\|\Pi\|(t_{i+1} - t_i) = 2\|\Pi\|T. \end{aligned}$$

En particular, cuando $\lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \text{Var}[Q_\Pi] = 0$, así concluimos que

$$\lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} Q_\Pi = \mathbb{E}[Q_\Pi] = T.$$

□

De la demostración anterior podemos observar que $\mathbb{E}[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2] = t_{i+1} - t_i$ y $\text{Var}[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2] = 2(t_{i+1} - t_i)^2$, por lo que, cuando $t_{i+1} - t_i$ es pequeño, $2(t_{i+1} - t_i)^2$ es todavía más pequeño y la variable aleatoria $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2$ está muy cerca de su media $t_{i+1} - t_i$ con una probabilidad muy alta. Por lo que podemos afirmar que $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 \approx t_{i+1} - t_i$ y de manera formal

$$dW_t dW_t \simeq dt. \quad (3.1)$$

Conociendo la variación cuadrática del movimiento Browniano, podemos obtener la variación cruzada de W_t con t y la variación cuadrática de t .

Proposición 3.4. *Sea $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una partición del intervalo $[0, T]$ y W un movimiento Browniano estándar se tiene*

$$\lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(t_{i+1} - t_i) = 0 \quad (3.2)$$

$$\lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)^2 = 0. \quad (3.3)$$

Demostración. Para demostrar que el límite es cero en la ecuación (3.2), observemos que

$$|(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(t_{i+1} - t_i)| \leq \max_{0 \leq k \leq n-1} |W_{t_{k+1}} - W_{t_k}|(t_{i+1} - t_i),$$

se tiene

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(t_{i+1} - t_i) \right| \leq \max_{0 \leq k \leq n-1} |W_{t_{k+1}} - W_{t_k}| T,$$

ya que W_t es continuo, $\max_{0 \leq k \leq n-1} |W_{t_{k+1}} - W_{t_k}|$ tiene límite cero cuando la norma de la partición tiende a cero.

Para demostrar que cero, es el limite en la ecuación (3.3), observemos

$$\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)^2 \leq \max_{0 \leq k \leq n-1} (t_{k+1} - t_k) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = \|\Pi\| T$$

la cual tiende a cero cuando la norma de la partición tiende a cero. $\square$

De la proposición anterior podemos observar que

$$dW_t dt \simeq 0, \quad dt dt \simeq 0. \quad (3.4)$$

Estas reglas de diferenciales se necesitan posteriormente para la fórmula de Itô. Ahora, teniendo en cuenta la variación cuadrática del movimiento Browniano podemos ver que el movimiento Browniano no es de variación acotada.

Proposición 3.5. *El movimiento Browniano es de variación no acotada.*

Demostración. Sea $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una partición de $[0, T]$ y supongamos que es de variación acotada, por lo que existe $0 < M$ y teniendo en cuenta la variación cuadrática del movimiento Browniano

$$\sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 \leq \max_{0 \leq k \leq n-1} |W_{t_{k+1}} - W_{t_k}| \sum_{i=0}^{n-1} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}|$$

por la continuidad del movimiento Browniano y del hecho que es de variación acotada se tiene que la desigualdad anterior se reescribe como

$$\lim_{\|\Pi \rightarrow 0\|} \sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 \leq \max_{0 \leq k \leq n-1} |W_{t_{k+1}} - W_{t_k}| \cdot M = 0.$$

Lo cual es una contradicción al Teorema 3.3. Por lo tanto, el movimiento Browniano es de variación no acotada. $\square$

3.2. Martingala a tiempo continuo

Una herramienta importante para la valuación de opciones europeas como se presentó en el capítulo anterior es el concepto de martingala. En esta sección estudiaremos el caso continuo, así como algunos ejemplos, por lo que tenemos la siguiente definición.

Definición 3.6. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad con una filtración $(\mathcal{F}_t)$, $t \geq 0$. Un proceso estocástico adaptado (M_t) de variables aleatorias integrables, es decir, $\mathbb{E}[|M_t|] < +\infty$ para cualquier t es

- *Martingala* si, para cualquier $s \leq t$, $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$;
- *Supermartingala* si, para cualquier $s \leq t$, $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] \leq M_s$;
- *Submartingala* si, para cualquier $s \leq t$, $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] \geq M_s$.

Si (M_t) es una martingala, entonces $\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0]$ para cualquier t . Algunos ejemplos de martingalas que involucran el movimiento Browniano.

Proposición 3.7. Sea (W_t) un movimiento Browniano estándar con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)$. Entonces

- a) (W_t) es $\mathcal{F}_t$ martingala,
- b) $(W_t^2 - t)$ es $\mathcal{F}_t$ martingala y
- c) $\exp(\sigma W_t - (\sigma^2/2)t)$ es $\mathcal{F}_t$ martingala.

Demostración. a) $\mathbb{E}[W_t - W_s | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[W_t - W_s] = 0$, por que $W_t - W_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$. Así, $\mathbb{E}[W_t | \mathcal{F}_s] = W_s$.

b) $\mathbb{E}[W_t^2 - W_s^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(W_t - W_s)^2 + 2W_s(W_t - W_s) | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(W_t - W_s)^2 | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[2W_s(W_t - W_s) | \mathcal{F}_s]$, el segundo término es cero por el inciso a). Debido a la independencia se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(W_t - W_s)^2 | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[(W_t - W_s)^2] \\ &= t - s, \end{aligned}$$

por lo que, se tiene $\mathbb{E}[W_t^2 - t | \mathcal{F}_s] = W_s^2 - s$.

c) Finalmente, observemos que si Z es una variable aleatoria normal estándar y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[e^{\lambda Z}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}((x+\lambda)^2 - \lambda^2)} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = e^{\lambda^2/2}.$$

Sea $s < t$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{\sigma W_t - \sigma^2 t/2} | \mathcal{F}_s] &= e^{\sigma W_s - \sigma^2 t/2} \mathbb{E}[e^{\sigma(W_t - W_s)} | \mathcal{F}_s] \\ &= e^{\sigma W_s - \sigma^2 t/2} \mathbb{E}[e^{\sigma(W_t - W_s)}]\end{aligned}$$

como $\sigma(W_t - W_s)$ tiene una distribución $N(0, \sigma^2(t-s))$; si $Z \sim N(0, 1)$ entonces $\sigma(W_t - W_s)$ tiene la misma distribución que $\sigma\sqrt{t-s}Z$ y $\mathbb{E}[e^{\sigma(W_t - W_s)}] = \mathbb{E}[e^{\sigma\sqrt{t-s}Z}] = e^{\sigma^2(t-s)/2}$. Por lo que concluimos que

$$\mathbb{E}[e^{\sigma W_t - \sigma^2 t/2} | \mathcal{F}_s] = e^{\sigma W_s - \sigma^2 s/2}.$$

□

3.3. Construcción de la integral de Itô

Primero se define la integral estocástica con respecto a un movimiento Browniano estándar para procesos simples, mostraremos algunas de sus propiedades, posteriormente extenderemos la definición para cualquier proceso, mostraremos sus propiedades y finalmente enunciaremos la formula de Itô para procesos de Itô. Supongamos que (W_t) con $0 \leq t \leq T$, es un movimiento Browniano estándar $\mathcal{F}_t$ -medible sobre un espacio filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$.

Definición 3.8. $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ es llamado un proceso simple si puede ser escrito como

$$H_t(\omega) = \phi_0(\omega)1_0(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i(\omega)1_{(t_i, t_{i+1}]}(t),$$

donde $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ y $\phi_i(\cdot)$ es $\mathcal{F}_{t_i}$ -medible y acotada.

Así la definición de integral estocástica para un proceso simple es:

Definición 3.9. Si H es un proceso simple, la integral estocástica de H con respecto a un movimiento Browniano (W_t) , es el proceso $(I(H)_t)_{0 \leq t \leq T}$ definido para $t \in (t_k, t_{k+1}]$ por

$$I(H)_t = \int_0^t H_s dW_s = \sum_{i=0}^{k-1} H_i(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + H_k(W_t - W_{t_k}).$$

De la definición anterior, la integral estocástica se puede reescribir como una martingala transformada:

$$I(H)_t = \int_0^t H_s dW_s = \sum_{i=0}^n H_i (W_{t_{i+1} \wedge t} - W_{t_i \wedge t}).$$

Teorema 3.10. *Sea H un proceso simple, la integral estocástica $(I(H)_t)_{0 \leq t \leq T}$ es $\mathcal{F}_t$ -martingala y continua.*

Demostración. Observemos que W_t es continuo casi seguramente, por lo que $I(H)_t$ es continuo casi seguramente. Sea $0 \leq s \leq t \leq T$, asumiremos que s y t se encuentran en diferentes subintervalos de la partición, es decir, hay puntos de la partición t_l y t_k tal que $t_l < t_k$, $s \in (t_l, t_{l+1}]$ y $t \in (t_k, t_{k+1}]$ por lo que se tiene

$$\begin{aligned} I(H)_t &= \sum_{i=0}^{l-1} H_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + H_{t_l} (W_{t_{l+1}} - W_{t_l}) \\ &\quad + \sum_{i=l+1}^{k-1} H_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + H_{t_k} (W_t - W_{t_k}). \end{aligned}$$

Tomamos esperanza condicional a los cuatro términos del lado derecho. Las variables aleatorias del primer sumando son $\mathcal{F}_s$ -medibles ya que $t_l < s$ por lo cual se tiene

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{l-1} H_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \middle| \mathcal{F}_s \right] = \sum_{i=0}^{l-1} H_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

Para el segundo sumando usamos el hecho de que el movimiento Browniano es martingala

$$\mathbb{E}[H_{t_l} (W_{t_{l+1}} - W_{t_l}) | \mathcal{F}_s] = H_{t_l} (\mathbb{E}[W_{t_{l+1}} | \mathcal{F}_s] - W_{t_l}) = H_{t_l} (W_s - W_{t_l}).$$

En el tercer sumando usamos la propiedad torre de esperanza condicional

teniendo en cuenta que $s < t_{l+1} \leq t_i$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\sum_{i=l+1}^{k-1} H_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \middle| \mathcal{F}_s \right] &= \sum_{i=0}^{l-1} \mathbb{E} [H_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) | \mathcal{F}_s] \\
 &= \sum_{i=0}^{l-1} \mathbb{E} [\mathbb{E}[H_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) | \mathcal{F}_{t_i}] | \mathcal{F}_s] \\
 &= \sum_{i=0}^{l-1} \mathbb{E} [H_{t_i} (\mathbb{E}[W_{t_{i+1}} | \mathcal{F}_{t_i}] - W_{t_i}) | \mathcal{F}_s] \\
 &= \sum_{i=0}^{l-1} \mathbb{E} [H_{t_i} (W_{t_i} - W_{t_i}) | \mathcal{F}_s] = 0.
 \end{aligned}$$

Para el cuarto sumando hacemos algo similar al caso anterior y se tiene

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[H_{t_k} (W_t - W_{t_k}) | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[H_{t_k} (W_t - W_{t_k}) | \mathcal{F}_{t_k}] | \mathcal{F}_s] \\
 &= \mathbb{E}[H_{t_k} (\mathbb{E}[(W_t) | \mathcal{F}_{t_k}] - W_{t_k}) | \mathcal{F}_s] = 0.
 \end{aligned}$$

Finalmente, al sumar los cuatro términos se obtiene

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t H_u dW_u \middle| \mathcal{F}_s \right] = \sum_{i=0}^{l-1} H_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + H_{t_l} (W_s - W_{t_l}) = \int_0^s H_u dW_u.$$

□

Ya que $I(H)_t$ es martingala e $I(H)_0 = 0$ se tiene que $\mathbb{E}[I(H)_t] = 0$ para todo $t \geq 0$, así, la varianza está dada por $\text{Var}[I(H)_t] = \mathbb{E}[(I(H)_t)^2]$, la cual puede ser evaluada por la fórmula descrita en el siguiente teorema.

Teorema 3.11. *Sea H un proceso simple. La integral estocástica satisface*

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t H_s dW_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t (H_s)^2 ds \right].$$

Demostración. Sea $D_i = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ para $i = 0, 1, \dots, k-1$ y $D_k = W_t - W_{t_k}$, por lo que la integral estocástica se reescribe como $I(H)_t = \sum_{i=0}^k H_{t_i} D_i$ y

$$(I(H)_t)^2 = \sum_{i=0}^k H_{t_i}^2 D_i^2 + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq k} H_{t_i} H_{t_j} D_i D_j.$$

Primero consideremos el segundo sumando del lado derecho de la ecuación anterior. Para $i < j$, las variables $H_i H_j D_i$ son $\mathcal{F}_{t_j}$ -medible mientras que el incremento Browniano D_j es independiente de $\mathcal{F}_{t_j}$. Además, $\mathbb{E}[D_j] = 0$ por lo que se tiene

$$\mathbb{E}[H_{t_i} H_{t_j} D_i D_j] = \mathbb{E}[H_{t_i} H_{t_j} D_i] \mathbb{E}[D_j] = 0.$$

Ahora, consideremos el término cuadrático $H_{t_i}^2 D_i^2$, la variable aleatoria $H_{t_i}^2$ es $\mathcal{F}_{t_i}$ -medible y el cuadrado del incremento Browniano D_i es independiente de $\mathcal{F}_{t_i}$, $\mathbb{E}[D_i^2] = t_{i+1} - t_i$ para $i = 0, 1, \dots, k-1$ y $\mathbb{E}[D_k^2] = t - t_k$, por lo que se sigue que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(I(H)_t)^2] &= \sum_{i=0}^k \mathbb{E}[H_{t_i}^2 D_i^2] = \sum_{i=0}^k \mathbb{E}[H_{t_i}^2] \mathbb{E}[D_i^2] \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}[H_{t_i}^2 (t_{i+1} - t_i)] + \mathbb{E}[H_{t_k}^2 (t - t_k)], \end{aligned}$$

como el proceso H_i es constante sobre el intervalo $(t_i, t_{i+1}]$, entonces $H_{t_i}^2 (t_{i+1} - t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s^2 ds$, respectivamente $H_{t_k}^2 (t - t_k) = \int_{t_k}^t H_s^2 ds$, así

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t H_s dw_s \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s^2 ds + \int_{t_k}^t H_s^2 ds \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^t H_s^2 ds \right]. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.12. *Para H un proceso simple, se tiene*

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t H_s dW_s \right|^2 \right] \leq 4 \mathbb{E} \left[\int_0^T |H_s|^2 ds \right].$$

Demostración. Consideremos la desigualdad maximal de Doob, la cual dice que si (M_t) , $t \geq 0$ es martingala continua entonces $\mathbb{E}[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t|^2] \leq 4 \mathbb{E}[|M_T|^2]$. Aplicando la desigualdad a $I(H_t)$ se tiene el resultado. □

Ahora, calculemos la variación cuadrática de la integral estocástica y la enunciamos en el siguiente teorema.

Teorema 3.13. *Sea H un proceso simple. La variación cuadrática acumulada hasta el tiempo t para $I(H)_t$ es*

$$[I(H), I(H)](t) = \int_0^t H_s^2 ds. \quad (3.5)$$

Demostración. Primero calculemos la variación cuadrática sobre un subintervalo $[t_j, t_{j+1}]$ sobre el cual H_t es constante. Sea $t_j = l_0 < l_1 < \dots < l_n = t_{j+1}$ puntos de la partición del subintervalo $[t_j, t_{j+1}]$ y consideremos

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} (I(H)_{l_{i+1}} - I(H)_{l_i})^2 &= \sum_{i=0}^{n-1} (H_{t_j} (W_{l_{i+1}} - W_{l_i}))^2 \\ &= H_{t_j}^2 \sum_{i=0}^{n-1} (W_{l_{i+1}} - W_{l_i})^2, \end{aligned}$$

cuando $n \rightarrow \infty$, la norma de la partición se aproxima a 0 y el término $\sum_{i=0}^{n-1} (W_{l_{i+1}} - W_{l_i})^2$ converge a la variación cuadrática acumulada por el movimiento Browniano entre el tiempo t_j y t_{j+1} , el cual es $t_{j+1} - t_j$. Por lo que, el límite de la ecuación anterior es

$$H_{t_j}^2 (t_{j+1} - t_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} H_s^2 ds.$$

Análogamente la variación cuadrática acumulada para la integral en el tiempo t_k y t es $\int_{t_k}^t H_s^2 dW_s$. Sumando todos los subintervalos se tiene el resultado. $\square$

Hasta el momento se ha definido la integral estocástica para un proceso simple y enunciado algunas de sus propiedades. Extenderemos la integral a una clase de procesos más amplia y definimos $L^2(\Omega x[0, T])$ como $\mathcal{H}$ de la siguiente manera

$$\mathcal{H} = \left\{ (H_t)_{0 \leq t \leq T}, \text{ adaptados a la filtración } (\mathcal{F}_{t \geq 0}), \mathbb{E} \left[\int_0^T H_s^2 ds \right] < +\infty \right\}.$$

Lema 3.14. *Sea $(H_s) \in \mathcal{H}$. Entonces existe una sucesión de procesos simples (H_s^n) tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_0^T |H_s - H_s^n|^2 ds \right] = 0.$$

Teorema 3.15. Sea (W_t) , $0 \leq t \leq T$ un movimiento Browniano sobre la filtración $\mathcal{F}_t$. Existe un único mapeo lineal I de $\mathcal{H}$ al espacio de las funciones $\mathcal{F}_t$ -martingalas sobre $[0, T]$ tal que

- Si H es un proceso simple en $\mathcal{H}$, entonces

$$I(H)_t = \int_0^t H_s dW_s.$$

- Si $t \leq T$,

$$\mathbb{E} [(I(H)_t)^2] = \mathbb{E} \left[\int_0^t H_s^2 ds \right].$$

Demostración. Sea $H \in \mathcal{H}$ y (H^n) una sucesión de procesos simples convergente a H . Entonces usando la desigualdad de Doob se tiene,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |I(H^{n+p} - H^n)_t|^2 \right] \leq 4\mathbb{E} \left[\int_0^T |H_s^{n+p} - H_s^n|^2 ds \right], \quad (3.6)$$

entonces existe una subsucesión H^{k_n} tal que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |I(H^{k_{n+1}})_t - I(H^{k_n})_t|^2 \right] \leq 2^{-n},$$

casi seguramente, la sucesión de funciones continuas $I(H^{k_n})_t$ es uniformemente convergente sobre $[0, T]$ a una función $I(H)_t$. Haciendo $p \rightarrow \infty$ en (3.6)

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |I(H)_t - (H^n)_t|^2 \right] \leq 4\mathbb{E} \left[\int_0^T |H_s - H_s^n|^2 ds \right].$$

Lo cual implica que $I(H)_t$ es independiente de la sucesión aproximante (H_s^n) , por lo que esta bien definida.

Usando la desigualdad de Jensen se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|\mathbb{E}[I(H^n)_t | \mathcal{F}_s] - \mathbb{E}[I(H)_t | \mathcal{F}_s]|^2] &= \mathbb{E} [\mathbb{E}[I(H^n)_t - I(H)_t | \mathcal{F}_s]^2] \\ &\leq \mathbb{E} [\mathbb{E}[|I(H^n)_t - I(H)_t|^2 | \mathcal{F}_s]] \\ &= \mathbb{E} [|I(H^n)_t - I(H)_t|^2] \\ &\rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

como $\mathbb{E}[I(H^n)_t | \mathcal{F}_s] = I(H^n)_s$. Tomando límite se obtiene

$$\mathbb{E} [(I(H)_s - \mathbb{E}[I(H)_t | \mathcal{F}_s])^2] = 0,$$

así, $I(H)_t$ es $\mathcal{F}_t$ -martingala, lo demás se sigue de la continuidad y de la densidad en $\mathcal{H}$ de los procesos simples. $\square$

Dada una sucesión (H_s^n) de procesos simples, la cual converge a $H \in \mathcal{H}$, definimos la integral estocástica como

$$I(H)_t = \int_0^t H_s dW_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t H_s^n dW_s, \quad \text{en el sentido } L^2(\Omega).$$

Ejemplo 3.16. Encontrar $\int_0^T W_t dW_t$. Sea $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ una partición de $[0, T]$ y definimos

$$H^n(t) = \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i} 1_{(t_i, t_{i+1}]}(t),$$

entonces la integral estocástica de un proceso simple está dada por

$$\int_0^T H_t^n dW_t = \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

Por otra parte, agregando y restando $W_{t_{i+1}}^2$

$$W_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) = \frac{1}{2} \left(W_{t_{i+1}}^2 - W_{t_i}^2 - (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 \right),$$

y

$$\begin{aligned} \int_0^T H_t^n dW_t &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_{i+1}}^2 - W_{t_i}^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 \\ &= \frac{1}{2} W_T^2 - \frac{1}{2} W_0^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 \end{aligned}$$

por el Teorema 3.3 se tiene que el segundo sumando converge en $L^2(\Omega)$ a T , así, la integral estocástica está dada por

$$\int_0^T W_t dW_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T H_t^n dW_t = \frac{1}{2} W_T^2 - \frac{1}{2} T.$$

Al momento de extender la integral estocástica al espacio de procesos adaptados a $(\mathcal{F}_t)$ que satisfacen $\mathbb{E}[\int_0^t H_s^2 ds] < +\infty$, heredan las propiedades de la integral para procesos simples y se resume en el siguiente teorema.

Teorema 3.17. *Sea T una constante positiva y sea $(H_t) \in \mathcal{H}$, $0 \leq t \leq T$. Entonces $I(H)_t = \int_0^t H_s dW_s$ tiene las siguientes propiedades.*

- i) (**Continuidad**) *Como función del límite de integración t , las trayectorias $I(H)_t$ son continuas.*
- ii) (**Adaptatividad**) *Para cada t , $I(H)_t$ es $\mathcal{F}_t$ -medible.*
- iii) (**Linealidad**) *Si $I(H)_t = \int_0^t H_s dW_s$ y $J(K)_t = \int_0^t K_s dW_s$, entonces $I(H)_t \pm J(K)_t = \int_0^t (H_s \pm K_s) dW_s$ y para cualquier constante c , $cI(H)_t = \int_0^t cH_s dW_s$.*
- iv) (**Martingala**) *$I(H)_t$ es martingala.*
- v) (**Isometría**) $\mathbb{E}[(I(H)_t)^2] = \mathbb{E}[\int_0^t H_s^2 ds]$.
- vi) (**Variación cuadrática**) $[I(H), I(H)](t) = \int_0^t H_s^2 ds$.

3.4. Cálculo de Itô

Si $f(t)$ es una función con valores reales, diferenciable para $t \geq 0$ y $f(0) = 0$, entonces

$$f(t)^2 = 2 \int_0^t f(s) f'(s) ds = \int_0^t f df(s).$$

Sin embargo, en el caso de la integral estocástica no sucede de la misma manera, ya que el movimiento Browniano no es diferenciable, por lo que el siguiente teorema nos ayuda en ese sentido.

Teorema 3.18 (Fórmula de Itô para M.B.). *Sea $f(t, x)$ una función la cual sus derivadas parciales $f_t(t, x)$, $f_x(t, x)$ y $f_{xx}(x, t)$ están definidas y son continuas. Sea W_t un movimiento Browniano, entonces para cada $T \geq 0$,*

$$\begin{aligned} f(T, W_T) &= f(0, W_0) + \int_0^T f_t(t, W_t) dt \\ &\quad + \int_0^T f_x(t, W_t) dW_t + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, W_t) dt. \end{aligned}$$

Demostración. Sea $T > 0$ y $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una partición del intervalo $[0, T]$ tal que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$. Si tomamos la función $f(t, x)$ entonces por el teorema de Taylor se tiene

$$\begin{aligned} f(t_{i+1}, x_{i+1}) - f(t_i, x_i) &= f_t(t_i, x_i)(t_{i+1} - t_i) + f_x(t_i, x_i)(x_{i+1} - x_i) \\ &\quad + \frac{1}{2}f_{xx}(t_i, x_i)(x_{i+1} - x_i)^2 + f_{tx}(t_i, x_i)(t_{i+1} - t_i)(x_{i+1} - x_i) \\ &\quad + \frac{1}{2}f_{tt}(t_i, x_i)(t_{i+1} - t_i)^2 + \text{términos de orden mayor.} \end{aligned}$$

Reemplazamos x_i por W_{t_i} , x_{i+1} por $W_{t_{i+1}}$ y sumando, se tiene que

$$\begin{aligned} f(T, W_T) - f(0, W_0) &= \sum_{i=0}^{n-1} f_t(t_i, W_i)(t_{i+1} - t_i) + \sum_{i=0}^{n-1} f_x(t_i, W_i)(W_{i+1} - W_i) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f_{xx}(t_i, W_i)(W_{i+1} - W_i)^2 + \sum_{i=0}^{n-1} f_{tx}(t_i, W_i)(t_{i+1} - t_i)(W_{i+1} - W_i) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f_{tt}(t_i, W_i)(t_{i+1} - t_i)^2 + \text{términos de orden mayor.} \quad (3.7) \end{aligned}$$

Cuando tomamos el límite de la partición, es decir, $||\Pi|| \rightarrow 0$, el lado izquierdo de la ecuación (3.7) no se ve afectado, mientras que el primer término del lado derecho de (3.7) contribuye a la integral de Lebesgue

$$\lim_{||\Pi|| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f_t(t_i, W_i)(t_{i+1} - t_i) = \int_0^T f_t(t, W_t) dt.$$

Como $||\Pi|| \rightarrow 0$, el segundo término contribuye a la integral estocástica

$$\int_0^T f_x(t, W_t) dW_t.$$

El tercer término corresponde a una integral de Lebesgue,

$$\frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, W_t) dt,$$

ya que $(W_{i+1} - W_i)^2 \approx t_{i+1} - t_i$, y en el límite de la partición coinciden (ver observación de la ecuación (3.1)). El cuarto y quinto término son iguales a cero, observemos

$$\begin{aligned}
& \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \left| \sum_{i=0}^{n-1} f_{tx}(t_i, W_i)(t_{i+1} - t_i)(W_{i+1} - W_i) \right| \\
& \leq \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} |f_{tx}(t_i, W_i)|(t_{i+1} - t_i)|(W_{i+1} - W_i)| \\
& \leq \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \max_{0 \leq k \leq n-1} |(W_{k+1} - W_k)| \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} |f_{tx}(t_i, W_i)|(t_{i+1} - t_i) \\
& = 0 \cdot \int_0^T |f_{tx}(t, W_t)| dt = 0.
\end{aligned}$$

Análogamente, para el quinto término

$$\begin{aligned}
& \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \left| \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f_{tt}(t_i, W_i)(t_{i+1} - t_i)^2 \right| \leq \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} |f_{tt}(t_i, W_i)|(t_{i+1} - t_i)^2 \\
& \leq \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \max_{0 \leq k \leq n-1} (t_{k+1} - t_k) \cdot \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} |f_{tt}(t_i, W_i)|(t_{i+1} - t_i) \\
& = 0 \cdot \int_0^T |f_{tt}(t, W_t)| dt = 0.
\end{aligned}$$

En el caso de los términos de orden mayor son iguales a cero por argumentos similares. $\square$

Podemos recordar la fórmula de Itô en la siguiente forma diferencial

$$\begin{aligned}
df(t, W_t) &= f_t(t, W_t)dt + f_x(t, W_t)dW_t + \frac{1}{2}f_{x,x}(t, W_t)dW_t dW_t \\
&\quad + f_{tx}(t, W_t)dtdW_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, W_t)dtdt
\end{aligned}$$

donde

$$dW_t dW_t = dt, \quad dtdW_t = dW_t dt = 0, \quad dtdt = 0 \quad (3.8)$$

simplificando se tiene

$$df(t, W_t) = f_t(t, W_t)dt + f_x(t, W_t)dW_t + \frac{1}{2}f_{x,x}(t, W_t)dt.$$

Ejemplo 3.19. Consideremos la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, la fórmula de Itô nos dice

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}W_T^2 &= f(W_T) - f(W_0) \\ &= \int_0^T f'(W_t)dW_t + \frac{1}{2} \int_0^T f''(W_t)dt \\ &= \int_0^T W_t dW_t + \frac{1}{2}T. \end{aligned}$$

Como podemos observar usando la fórmula de Itô es más facil calcular algunas integrales estocásticas a comparación del ejemplo 3.16.

3.5. Procesos de Itô

Extendemos la fórmula de Itô para el movimiento Browniano (3.18) a proceso más generales, los cuales llamaremos procesos de Itô. Casi todos lo procesos estocásticos, salvo aquellos que tienen saltos, son procesos de Itô.

Definición 3.20. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ un espacio de probabilidad filtrado y $(W_t)_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano estándar adaptado. Un proceso de Itô de valores reales $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ es un proceso estocástico de la forma

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s dW_s + \int_0^t K_s ds \quad (3.9)$$

donde

1. X_0 es $\mathcal{F}_0$ -medible,
2. K y H son adaptados a la filtración $\mathcal{F}_t$ y
3. $\int_0^T |H_s|^2 ds < \infty$, casi seguramente y $\int_0^T K_s ds < \infty$, casi seguramente.

Lema 3.21. La variación cuadrática del proceso de Itô (definición 3.20) es

$$[X, X](t) = \int_0^t H_s^2 ds. \quad (3.10)$$

Demostración. Denotamos por $I(H)_t = \int_0^t H_s dW_s$, $R(K)_t = \int_0^t K_s ds$. Sea $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una partición del intervalo $[0, t]$, es decir, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$, la variación cuadrática muestral es

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 &= \sum_{i=0}^{n-1} (I(H)_{t_{i+1}} - I(H)_{t_i})^2 + \sum_{i=0}^{n-1} (R(K)_{t_{i+1}} - R(K)_{t_i})^2 \\ &\quad + 2 \sum_{i=0}^{n-1} (I(H)_{t_{i+1}} - I(H)_{t_i})(R(K)_{t_{i+1}} - R(K)_{t_i}). \end{aligned}$$

Como $\|\Pi\| \rightarrow 0$, el primer término del lado derecho $\sum_{i=0}^{n-1} (I(H)_{t_{i+1}} - I(H)_{t_i})^2$ converge a la variación cuadrática de $I(H)_t$ sobre el intervalo $[0, t]$, por la ecuación (3.5) es $[I(H), I(H)](t) = \int_0^t H_s^2 ds$. El valor absoluto del segundo término es acotado por

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq k \leq n-1} |R(K)_{t_{k+1}} - R(K)_{t_k}| \cdot \sum_{i=0}^{n-1} |R(K)_{t_{i+1}} - R(K)_{t_i}| \\ \leq \max_{0 \leq k \leq n-1} |R(K)_{t_{k+1}} - R(K)_{t_k}| \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} K_s ds \right| \\ \leq \max_{0 \leq k \leq n-1} |R(K)_{t_{k+1}} - R(K)_{t_k}| \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |K_s| ds \\ \leq \max_{0 \leq k \leq n-1} |R(K)_{t_{k+1}} - R(K)_{t_k}| \cdot \int_0^t |K_s| ds. \end{aligned}$$

y como $\|\Pi\| \rightarrow 0$, su límite es $0 \cdot \int_0^t |K_s| ds = 0$ ya que $R(K)_t$ es continua con respecto a su límite de integración t . El tercer término es acotado por

$$\begin{aligned} 2 \max_{0 \leq k \leq n-1} |I(H)_{t_{k+1}} - I(H)_{t_k}| \cdot \sum_{i=0}^{n-1} |R(K)_{t_{i+1}} - R(K)_{t_i}| \\ \leq 2 \max_{0 \leq k \leq n-1} |I(H)_{t_{k+1}} - I(H)_{t_k}| \cdot \int_0^t |K_s| ds, \end{aligned}$$

cuyo límite es cero cuando la norma de la partición tiende a cero, ya que $(I(H)_t)$ es continua, por lo tanto, concluimos que $[X, X](t) = [I(H), I(H)](t) = \int_0^t H_s^2 ds$. $\square$

La conclusión anterior puede ser recordada en forma diferencial

$$dX_t = H_t dW_t + K_t dt \quad (3.11)$$

usando las ecuaciones (3.8) se tiene que

$$dX_t dX_t = H_t^2 dW_t dW_t + 2H_t K_t dW_t dt + K_t^2 dt dt = H_t^2 dt. \quad (3.12)$$

Esto nos dice que para cada t , el proceso X_t acumula una variación cuadrática en una razón H_t^2 por unidad de tiempo, y así la variación cuadrática total acumulada sobre el intervalo de tiempo $[0, t]$ es $\int_0^t H_s^2 ds$, por lo que podemos deducir que la integral $\int_0^t K_s ds$ tiene variación cuadrática cero y no contribuye a la variación cuadrática del proceso de Itô.

Hasta el momento definimos la integral estocástica con respecto al movimiento Browniano, es decir, $I(H)_t = \int_0^t H_s dW_s$. Ahora integraremos con respecto a un proceso de Itô.

Definición 3.22. Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ un proceso de Itô y $(\Gamma_t)_{t \geq 0}$ un proceso adaptado. Definimos la integral con respecto a un proceso de Itô como

$$\int_0^t \Gamma_s dX_s = \int_0^t \Gamma_s H_s dW_s + \int_0^t \Gamma_s K_s ds.$$

Teorema 3.23 (Fórmula de Itô para un proceso de Itô). Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ un proceso de Itô de acuerdo a la definición 3.20 y sea $f(t, x)$ una función con derivadas parciales $f_t(t, x)$, $f_x(t, x)$ y $f_{xx}(t, x)$ definidas y continuas. Entonces para cada $T \geq 0$,

$$\begin{aligned} f(T, X_T) &= f(0, X_0) + \int_0^T f_t(t, X_t) dt + \int_0^T f_x(t, X_t) dX_t \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, X_t) d[X, X](t) \\ &= f(0, X_0) + \int_0^T f_t(t, X_t) dt + \int_0^T f_x(t, X_t) H_t dW_t \\ &\quad + \int_0^T f_x(t, X_t) K_t dt + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, X_t) H_t^2 dt. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Demostración. Sea $T > 0$ y $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una partición del intervalo $[0, T]$ tal que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$. Si tomamos la función $f(t, x)$ entonces por el teorema de Taylor se tiene

$$\begin{aligned} f(T, X_T) - f(0, X_0) &= \sum_{i=0}^{n-1} f_t(t_i, X_i)(t_{i+1} - t_i) + \sum_{i=0}^{n-1} f_x(t_i, X_i)(X_{i+1} - X_i) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f_{xx}(t_i, X_i)(X_{i+1} - X_i)^2 + \sum_{i=0}^{n-1} f_{tx}(t_i, X_i)(t_{i+1} - t_i)(X_{i+1} - X_i) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f_{tt}(t_i, X_i)(t_{i+1} - t_i)^2 + \text{términos de orden mayor.} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Los dos últimos sumandos del lado derecho de la ecuación (3.14) tienen límite 0 cuando $|\Pi| \rightarrow 0$, al igual que los términos de orden mayor, razonamiento análogo a la demostración del Teorema 3.18. El límite del primer término del lado derecho de la ecuación (3.14) está dado por $\int_0^T f_t(t, X_t) dt$. El límite del segundo término es

$$\int_0^T f_x(t, X_t) dX_t = \int_0^T f_x(t, X_t) H_t dW_t + \int_0^T f_x(t, X_t) K_t dt.$$

Finalmente, el tercer término está dado por

$$\frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, X_t) d[X, X](t) = \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, X_t) H_t^2 dt.$$

Esto último por el Lema 3.10. □

Usando las ecuaciones (3.11) y (3.12), la ecuación (3.13) puede ser expresada en forma diferencial como

$$\begin{aligned} df(t, X_t) &= f_t(t, X_t) dt + f_x(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t) dX_t dX_t \\ &= f_t(t, X_t) dt + f_x(t, X_t) H_t dW_t + f_x(t, X_t) K_t dt + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t) H_t^2 dt. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.24. Supongamos que el movimiento de los precios de un cierto activo S_t sigue una dinámica estocástica de la forma siguiente

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t, \quad S_0 = X_0, \quad (3.15)$$

donde μ y σ son constantes reales. Esto quiere decir que

$$S_t = X_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dW_s \quad (3.16)$$

asumiendo que tal proceso existe, este es un proceso de Itô con $K_s = \mu S_s$ y $H_s = \sigma S_s$. Entonces, $[X, X](t) = \int_0^t \sigma^2 S_s^2 ds$.

Asumimos que $S_t > 0$ y aplicando la fórmula de Itô con $f(x) = \log(x)$ se tiene

$$\log(S_t) = \log(S_0) + \int_0^t \frac{dS_s}{S_s} + \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{-1}{S_s^2} \right) \sigma^2 S_s^2 ds.$$

Usando la ecuación 3.15 se tiene

$$\begin{aligned} \log(S_t) &= \log(S_0) + \int_0^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) ds + \int_0^t \sigma dW_s \\ &= \log(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t. \end{aligned}$$

De lo anterior se obtiene

$$S_t = X_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right).$$

La cual es una solución de la ecuación 3.16. Para probar esta conjetura rigurosamente consideremos $S_t = f(t, W_t)$ con

$$f(t, x) = x_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma x \right),$$

aplicando la fórmula de Itô se sigue

$$\begin{aligned} S_t &= f(t, W_t) \\ &= f(0, W_0) + \int_0^t f_s(s, W_s) ds + \int_0^t f_x(s, W_s) dW_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(s, W_s) ds. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} S_t &= x_0 + \int_0^t S_s \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) ds + \int_0^t S_s \sigma dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t S_s \sigma^2 ds \\ &= x_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dW_s. \end{aligned}$$

Teorema 3.25. Sean μ y σ dos números reales, un movimiento Browniano $(W_t)_{t \geq 0}$ y una constante positiva T , entonces existe un único proceso de Itô $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ el cual satisface que para $t \leq T$

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_r(\mu dr + \sigma dW_r).$$

con $x_0 \in \mathbb{R}$. El proceso está dado por

$$S_t = x_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right).$$

Observación 3.26. Cuando $\mu = 0$, S_t es llamada martingala exponencial del movimiento Browniano (ver Proposición 3.7).

Para concluir este capítulo enunciaremos la regla de diferenciación del producto de dos procesos, para esto, extenderemos la fórmula de Itô que involucra la integral estocástica de un movimiento Browniano m -dimensional $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^m)$ de la siguiente forma.

Definición 3.27. (X_t) , $0 \leq t \leq T$ es un proceso de Itô si

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \sum_{i=1}^m \int_0^t H_s^i dW_s^i,$$

donde K y H^i son procesos adaptados y $\int_0^T K_s ds < \infty$, y para todo $i = 1, \dots, m$, $\int_0^T |H_s^i|^2 ds < \infty$.

Un proceso de Itô n -dimensional es de la forma $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^n)$ donde cada componente es un proceso de Itô en el sentido de la Definición 3.27.

Teorema 3.28. Sea $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^n)$ un proceso de Itô n -dimensional con

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t K_s^i ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t H_s^{ij} dW_s^j,$$

y $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase $C^{1,2}$, el espacio de funciones continuas

diferenciable en t y dos veces diferenciable en $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\begin{aligned} f(t, X_t^1, \dots, X_t^n) &= f(0, X_0^1, \dots, X_0^n) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s^1, \dots, X_s^n) ds \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_s^1, \dots, X_s^n) dX_s^i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(s, X_s^1, \dots, X_s^n) d[X^i, X^j](s), \end{aligned}$$

donde

$$dX_s^i = K_s^i ds + \sum_{j=1}^m H_s^{i,j} dW_s^j, \quad d[X^i, X^j](s) = \sum_{r=1}^m H_s^{i,r} H_s^{j,r} ds.$$

Para la demostración ver [4].

Cuando el proceso de Itô es de dimensión 2 se tiene el siguiente corolario

Corolario 3.29. Sea X_t y Y_t procesos de Itô entonces

$$d(X_t, Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t dY_t.$$

Demostración. Usando el Teorema 3.28 con $n = 2$ y $f(t, x, y) = xy$ donde $f_t = 0$, $f_x = y$, $f_y = x$, $f_{xx} = 0$, $f_{xy} = 1$ y $f_{yy} = 0$

$$df(t, X, Y) = f_t dt + f_x dX + f_y dY + \frac{1}{2} f_{xx} dX dX + f_{xy} dX dY + \frac{1}{2} f_{yy} dY dY.$$

Se tiene el resultado. □

Capítulo 4

Modelo a Tiempo Continuo

Al igual que en el Capítulo 2 se considera un activo sin riesgo y un activo con riesgo. Se construye un portafolio, cuya estrategia sea autofinanciable, posteriormente se hace un cambio de medida mediante el teorema de Girsanov bajo el cual los precios descontados son martingalas y finalmente se llega a la fórmula de Black-Scholes con la cual evaluaremos opciones ya sean de tipo call o put.

4.1. Descripción del modelo

El modelo sugerido por Black-Scholes describe el comportamiento de los precios a tiempo continuo. Para el activo sin riesgo considere a r , como la tasa de interés constante y S_t^0 el precio del activo sin riesgo al tiempo t cuyo comportamiento está dado por la siguiente ecuación diferencial:

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt. \quad (4.1)$$

Asumiremos que el precio del comportamiento del activo con riesgo S_t , se rige por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t^1 = \mu S_t^1 dt + \sigma S_t^1 dB_t, \quad (4.2)$$

donde μ y σ son constantes y (B_t) es un movimiento Browniano. A μ se le conoce como la tendencia y σ la volatilidad del precio del activo.

Consideremos el modelo sobre el intervalo de tiempo $[0, T]$, donde T es la fecha de expiración de la opción. La ecuación 4.2 tiene la siguiente solución (Ver Teorema 3.25y Ejemplo 3.24)

$$S_t^1 = S_0^1 \exp \left(\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma B_t \right),$$

donde S_0^1 es el precio del activo observado al momento de suscribir el contrato.

4.2. Estrategias autofinanciables

Una estrategia es definida como un proceso $\phi = (\phi_t)_{0 \leq t \leq T} = ((H_t^0, H_t^1))$ con valores en $\mathbb{R}^2$ adaptado a la filtración natural $(\mathcal{F}_t)$ del movimiento Browniano. Los componentes H_t^0 y H_t^1 , representan el número de acciones del activo sin riesgo y con riesgo respectivamente. Por lo que, el valor del portafolio al tiempo t , está dado por

$$V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t^1 S_t^1.$$

Teniendo en cuenta la definición de estrategia autofinanciable en el Capítulo 2 y la ecuación (2.5), se tiene

$$dV_t(\phi) = H_t^0 dS_t^0 + H_t^1 dS_t^1,$$

el análogo en el caso a tiempo continuo. Tomando en cuenta las siguientes condiciones

$$\int_0^T |H_t^0| dt < +\infty \text{ casi seguramente} \quad \text{y} \quad \int_0^T (H_t^1)^2 dt < +\infty \text{ casi seguramente.}$$

Entonces la integral

$$\int_0^T H_t^0 dS_t^0 = \int_0^T H_t^0 r e^{rt} dt$$

está bien definida, al igual que la integral estocástica

$$\int_0^T H_t^1 dS_t^1 = \int_0^T \mu H_t^1 S_t^1 dt + \int_0^T \sigma H_t^1 S_t^1 dB_t,$$

ya que el mapeo $t \rightarrow S_t^1$, es continuo y acotado sobre el intervalo $[0, T]$ casi seguramente.

Definición 4.1. Una estrategia autofinanciable ϕ , está dada por una pareja de procesos adaptados $(H_t^0)_{0 \leq t \leq T}$ y $(H_t^1)_{0 \leq t \leq T}$ que satisfacen:

1.

$$\int_0^T |H_t^0| dt + \int_t^0 (H_t^1)^2 dt < +\infty, \quad c.s.$$

2.

$$V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t^1 S_t^1 = H_0^0 S_0^0 + H_0^1 S_0^1 + \int_0^t H_u^0 dS_u^0 + \int_0^t H_u^1 dS_u^1, \quad c.s.,$$

para toda $t \in [0, T]$.

Denotemos por $\bar{S}_t^1 = e^{-rt} S_t^1$ el precio descontado del activo con riesgo y $\bar{V}_t(\phi) = e^{-rt} V_t(\phi)$ el valor descontado del portafolio. Así, podemos establecer el siguiente resultado.

Proposición 4.2. *Sea $\phi = ((H_t^0, H_t^1))_{0 \leq t \leq T}$ un proceso adaptado que satisface $\int_0^T |H_t^0| dt + \int_t^0 (H_t^1)^2 dt < +\infty$, casi seguramente. Entonces ϕ es una estrategia autofinanciable si y sólo si*

$$\bar{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_u^1 d\bar{S}_u^1, \quad c.s., \quad (4.3)$$

para toda $t \in [0, T]$.

Demostración. Sea ϕ una estrategia autofinanciable. Aplicando la regla del producto (Corolario 3.29) a $\bar{V}_t(\phi) = e^{-rt} V_t(\phi)$ se tiene

$$d\bar{V}_t(\phi) = e^{-rt} dV_t(\phi) + V_t(\phi) de^{-rt} + dV_t(\phi) de^{-rt}$$

sustituyendo las ecuaciones 4.2 y 4.1 en la ecuación anterior y teniendo en cuenta las ecuaciones 3.4, la variación cruzada $dV_t(\phi) de^{-rt} = 0$, por lo tanto, la ecuación anterior se reduce a

$$\begin{aligned} d\bar{V}_t(\phi) &= e^{-rt} (H_t^0 de^{rt} + H_t^1 dS_t^1) + (H_t^0 e^{rt} + H_t^1 S_t^1) de^{-rt} \\ &= rH_t^0 dt + e^{-rt} H_t^1 (dS_t^1) - rH_t^0 dt - re^{-rt} H_t^1 S_t^1 dt \\ &= H_t^1 (e^{-rt} dS_t^1 - re^{-rt} S_t^1 dt) \\ &= H_t^1 (d(e^{-rt} S_t^1)) = H_t^1 d\bar{S}_t^1, \end{aligned}$$

lo cual es equivalente a la ecuación 4.3.

Ahora supongamos que se cumple la ecuación 4.3. Consideremos $V_t(\phi) = e^{rt}\bar{V}_t(\phi)$, aplicando la regla del producto y considerando que $de^{rt}d\bar{V}_t(\phi) = 0$ se obtiene

$$\begin{aligned}
dV_t &= d(e^{rt}\bar{V}_t(\phi)) \\
&= \bar{V}_t(\phi)de^{rt} + e^{rt}d\bar{V}_t(\phi) \\
&= rV_t(\phi) + e^{rt}H_t^1d\bar{S}_t^1 \\
&= r(H_t^0e^{rt} + H_t^1S_t^1)dt + e^{rt}H_t^1(-re^{-rt}S_t^1dt + e^{-rt}dS_t^1) \\
&= rH_t^0e^{rt}dt + H_t^1dS_t^1 \\
&= H_t^0de^{rt} + H_t^1dS_t^1,
\end{aligned}$$

por lo tanto, satisface la definición de estrategia autofinanciable. $\square$

4.3. Teorema de Girsanov

El tema central de este capítulo consiste en que, dado un espacio de probabilidad podemos definir otra medida, del tal manera que un nuevo proceso tenga ciertas características bajo esta medida, las cuales son necesarias para el modelo de Black-Scholes.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Una medida P^* sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ es absolutamente continua con respecto a P si

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad P(A) = 0 \Rightarrow P^*(A) = 0.$$

Teorema 4.3. *Una medida P^* es absolutamente continua con respecto a P si y sólo si existe una variable aleatoria no negativa Z sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ tal que*

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad P^*(A) = \int_A Z dP,$$

Z es llamada la densidad de P^ con respecto a P*

Ahora consideremos $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y una variable aleatoria no negativa Z que satisface $\mathbb{E}[Z] = 1$. Entonces podemos definir una nueva medida P^* dada por

$$P^*(A) = \int_A Z dP, \quad \text{para toda } A \in \mathcal{F}. \quad (4.4)$$

Para cualquier variable aleatoria X , tiene 2 esperanzas. Una bajo la medida original del espacio $\mathbb{E}[X]$ y otra bajo la medida P^* denotada por $\mathbb{E}^*[X]$, las cuales están relacionadas de la siguiente manera

$$\mathbb{E}^*[X] = \mathbb{E}[XZ].$$

A Z se le llama también la derivada de Radon-Nikodým de P^* con respecto a P y se denota por

$$Z = \frac{dP^*}{dP}.$$

Ahora consideremos la filtración $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, definimos el proceso de la derivada de Radon-Nikodým

$$Z_t = \mathbb{E}[Z | \mathcal{F}_t], \quad 0 \leq t \leq T.$$

Este proceso es martingala, es decir, para $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\mathbb{E}[Z_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z | \mathcal{F}_t] | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[Z | \mathcal{F}_s] = Z_s.$$

Más aún, tiene dos propiedades interesantes que enunciaremos en los dos siguientes lemas, que posteriormente nos permitirán demostrar el teorema de Girsanov.

Lema 4.4. *Sea $0 \leq t \leq T$ y Y una variable aleatoria $\mathcal{F}_t$ -medible. Entonces*

$$\mathbb{E}^*[Y] = \mathbb{E}[YZ_t].$$

Demostración. Utilizando las propiedades de esperanza condicional se tiene

$$\mathbb{E}^*[Y] = \mathbb{E}[YZ] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[YZ | \mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}[Y \mathbb{E}[Z | \mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}[YZ_t].$$

□

Lema 4.5. *Sea $0 \leq s \leq t \leq T$ y Y una variable aleatoria $\mathcal{F}_t$ -medible. Entonces*

$$\mathbb{E}^*[Y | \mathcal{F}_s] = \frac{1}{Z_s} \mathbb{E}[YZ_t | \mathcal{F}_s].$$

Demostración. Es claro que $\frac{1}{Z_s} \mathbb{E}[YZ_t | \mathcal{F}_s]$ es $\mathcal{F}_s$ -medible, solo resta probar

$$\int_A \frac{1}{Z_s} \mathbb{E}[YZ_t | \mathcal{F}_s] dP^* = \int_A Y dP^*, \quad \text{para toda } A \in \mathcal{F}_s.$$

Consideremos el lado izquierdo de la ecuación anterior y usando el Lema 4.4 para variables aleatorias $\mathcal{F}_s$ -medibles se tiene

$$\begin{aligned}
 \int_A \frac{1}{Z_s} \mathbb{E}[Y Z_t | \mathcal{F}_s] dP^* &= \mathbb{E}^* \left[1_A \frac{1}{Z_s} \mathbb{E}[Y Z_t | \mathcal{F}_s] \right] \\
 &= \mathbb{E} [1_A \mathbb{E}[Y Z_t | \mathcal{F}_s]] \\
 &= \mathbb{E} [\mathbb{E}[1_A Y Z_t | \mathcal{F}_s]] \\
 &= \mathbb{E} [1_A Y Z_t] \\
 &= \mathbb{E}^* [1_A Y] \\
 &= \int_A Y dP^*.
 \end{aligned}$$

□

Teorema 4.6 (Caracterización de Lévy). *Sea (M_t) , $0 \leq t \leq T$ una martingala relativa a la filtración $(\mathcal{F}_t)$. Asumimos que $M_0 = 0$, M_t tiene trayectorias continuas y $[M, M](t) = t$. Entonces M_t es un movimiento Browniano.*

Demostración. Probaremos que para $0 \leq s < t \leq T$, $M_t - M_s$ es normalmente distribuido con media 0 y varianza $t - s$ y es independiente de $\mathcal{F}_s$.

Para un número fijo u definimos la siguiente función

$$f(t, x) = \exp \left(ux - \frac{1}{2} u^2 t \right).$$

donde $t, x \in \mathbb{R}$. Teniendo en cuenta el Teorema 3.18, las propiedades del movimiento Browniano utilizadas, fueron: la continuidad del proceso y la variación cuadrática $[M, M](t) = t$. Aplicando la fórmula de Itô a la martingala M_t y la función $f(t, x)$ se tiene

$$f(t, M_t) = f(0, M_0) + \int_0^t [f_s(s, M_s) + \frac{1}{2} f_{xx}(s, M_s)] ds + \int_0^t f_x(s, M_s) dM_s,$$

como $f_t(t, x) = -\frac{1}{2} u^2 f(t, x)$, $f_x(t, x) = u f(t, x)$ y $f_{xx}(t, x) = u^2 f(t, x)$ se obtiene

$$\exp \left(u M_t - \frac{1}{2} u^2 t \right) = 1 + \int_0^t u \exp \left(u M_s - \frac{1}{2} u^2 s \right) dM_s.$$

Dado que M_t es martingala, la integral estocástica también lo es y por consiguiente $\exp(uM_t - \frac{1}{2}u^2t)$ es martingala, así, para $0 \leq s < t \leq T$ se cumple

$$\mathbb{E} \left[\frac{\exp(uM_t - \frac{1}{2}u^2t)}{\exp(uM_s - \frac{1}{2}u^2s)} \middle| \mathcal{F}_s \right] = 1$$

lo cual es equivalente a

$$\mathbb{E} [e^{u(M_t - M_s)} | \mathcal{F}_s] = e^{\frac{1}{2}(t-s)u^2}.$$

Por lo tanto, $M_t - M_s$ tiene una distribución $N(0, t - s)$. $\square$

Ahora podemos utilizar los lemas anteriores para demostrar el teorema de Girsanov el cual se enuncia a continuación.

Teorema 4.7 (Girsanov-Cambio de medida). *Sea $0 \leq t \leq T$ y W_t un movimiento Browniano sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y una filtración $(\mathcal{F}_t)$ para la cual W_t es $\mathcal{F}_t$ -medible. Sea θ_t un proceso adaptado, definimos*

$$Z_t = \exp \left(- \int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds \right),$$

y asumimos que

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T \theta_s^2 Z_s^2 ds \right] < \infty.$$

Sea $Z = Z_T$ entonces $\mathbb{E}[Z] = 1$ y bajo la medida de probabilidad P^* dada como en la ecuación 4.4, el proceso

$$W_t^* = W_t + \int_0^t \theta_s ds$$

es un movimiento Browniano.

Demostración. Sea

$$X_t = - \int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds$$

y $f(x) = e^x$, usando la fórmula de Itô se tiene

$$\begin{aligned} Z_t &= f(X_t) \\ &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) [X, X](s) \\ &= Z_0 + \int_0^t Z_s \left(-\theta_s dW_s - \frac{1}{2} \theta_s^2 ds \right) + \frac{1}{2} \int_0^t Z_s \theta_s^2 ds \\ &= Z_0 - \int_0^t Z_s \theta_s dW_s. \end{aligned}$$

Como la integral de Itô es martingala, Z_t también lo es, por lo tanto, $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[Z_T] = \mathbb{E}[Z_0] = 1$. Ya que $Z > 0$, definimos

$$P^*(A) = \int_A Z dP, \quad \text{para toda } A \in \mathcal{F},$$

la cual es una medida de probabilidad, puesto que $P^*(A) \geq 0$ y $P^*(\Omega) = 1$.

Para demostrar que W_t^* es un movimiento Browniano bajo P^* usaremos la caracterización del Teorema de Lévy 4.6. El proceso W_t^* comienza en 0 y es continuo, además la variación cuadrática es

$$dW_t^* dW_t^* = (dW_t + \theta_t dt)^2 = dW_t^2 = dt.$$

Resta probar que W_t^* es P^* -martingala. Para esto consideremos el proceso $W_t^* Z_t$ y utilizando la regla del producto (Corolario 3.29)

$$\begin{aligned} d(W_t^* Z_t) &= W_t^* dZ_t + Z_t dW_t^* + dW_t^* dZ_t \\ &= -W_t^* \theta_t Z_t dW_t + Z_t dW_t + Z_t \theta_t dt + (dW_t + \theta_t dt)(-\theta_t Z_t dW_t) \\ &= (-W_t^* \theta_t + 1) Z_t dW_t. \end{aligned}$$

Así, $W_t^* Z_t$ es martingala bajo P .

Ahora, para $0 \leq s \leq t \leq T$, usando el Lema 4.5 y la propiedad de martingala de $W_t^* Z_t$ bajo P implica

$$\mathbb{E}^*[W_t^* | \mathcal{F}_s] = \frac{1}{Z_s} \mathbb{E}[W_t^* Z_t | \mathcal{F}_s] = \frac{1}{Z_s} W_s^* Z_s = W_s^*.$$

Por lo tanto, W_t^* es P^* -martingala y así, el proceso W_t^* es un movimiento Browniano bajo P^* . $\square$

Las probabilidades P y P^* son equivalentes si cada una de ellas es absolutamente continua con respecto a la otra. Observemos que si P^* es absolutamente continua con respecto a P , con densidad Z , entonces P y P^* son equivalentes si y sólo si $P(Z > 0) = 1$.

4.4. Representación de martingala

Sea $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ un movimiento Browniano estándar construido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y sea $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ su filtración natural. Recordemos que si $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ es un proceso adaptado tal que $\mathbb{E}[\int_0^T H_s^2 ds] < +\infty$, el

proceso $\int_0^t H_s dW_s$ es una martingala de cuadrado integrable nulo en cero. El siguiente resultado muestra que cualquier martingala de cuadrado integrable sobre $\mathcal{F}_t$ puede ser representada en términos de una integral estocástica.

Teorema 4.8. *Sea $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ una martingala de cuadrado integrable con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$. Entonces existe un proceso adaptado $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ tal que $\mathbb{E}[\int_0^T H_s^2 ds] < +\infty$ y*

$$\forall t \in [0, T], \quad M_t = M_0 + \int_0^t H_s dW_s, \quad c.s.$$

ver demostración en [4].

4.5. Modelo de Black-Scholes

Primero estableceremos que existe una medida P^* equivalente a P bajo la cual los precios descontados son P^* -martingalas, para esto consideremos la ecuación diferencial estocástica (4.2) y aplicando la regla del producto de diferenciación a $\bar{S}_t^1$ se tiene

$$\begin{aligned} d\bar{S}_t^1 &= -re^{-rt}S_t^1 dt + e^{-rt}dS_t^1 \\ &= -re^{-rt}S_t^1 dt + e^{-rt}S_t^1(\mu dt + \sigma dB_t) \\ &= \bar{S}_t^1((\mu - r)dt + \sigma B_t dt). \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema de Girsanov 4.7 con $\theta_t = (\mu - r)/\sigma$, entonces existe una medida P^* equivalente a P definida sobre $\mathcal{F}_T$ con densidad Z_T dada por

$$\frac{dP^*}{dP} = Z_T = \exp\left(-\int_0^T \theta_t dB_t - \frac{1}{2} \int_0^T \theta_t^2 dt\right)$$

bajo la cual, el proceso

$$W_t^* = \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)t + B_t \quad (4.5)$$

es un movimiento Browniano. Entonces bajo P^* tenemos

$$d\bar{S}_t^1 = \bar{S}_t^1 \sigma dW_t^* \quad (4.6)$$

cuya solución está dada por

$$\bar{S}_t^1 = S_0^1 \exp\left(\sigma W_t^* - \frac{\sigma^2 t}{2}\right). \quad (4.7)$$

Observación 4.9. *Teniendo en cuenta la ecuación diferencial estocástica 4.2*

$$dS_t^1 = S_t^1(\mu dt + \sigma B_t),$$

donde B_t es un movimiento Browniano bajo P . Denotemos por $S^1(\mu)$ la solución de la ecuación diferencial (4.2). De la ecuación (4.5) bajo P^* el proceso $S^1(\mu)$ satisface

$$dS_t^1 = S_t^1(r dt + \sigma dW_t^*),$$

donde W_t^* es un movimiento Browniano.

4.5.1. Valuación de una opción europea

El tema central es valuar una opción europea cuyo payoff está dado por $(S_T^1 - K)_+$ y $(K - S_T^1)_+$ en el caso de un call y put respectivamente. En el caso discreto construimos un portafolio que replica el payoff de la opción, análogamente realizaremos lo mismo en el caso continuo.

Definición 4.10. *Una estrategia $\phi = ((H_t^0, H_t^1))_{0 \leq t \leq T}$ es admisible si es autofinanciable y su valor descontado $\bar{V}_t(\phi) = H_t^0 + H_t^1 \bar{S}_t^1$ del correspondiente portafolio es no negativo para toda $t \in [0, T]$ y tal que $\bar{V}_t$ es cuadrado integrable bajo P^* .*

Una opción se dice que replica su payoff en la fecha de expiración del contrato, si ésta es igual al valor del portafolio generada por una estrategia admisible. Dada una variable aleatoria $h = (S_T^1 - K)$, $\mathcal{F}_T$ -medible que es replicada por una estrategia admisible, está bien definida ya que $\mathbb{E}^*[(S_T^1)^2] < +\infty$ en el caso de una opción tipo call, análogamente para una opción tipo put.

Teorema 4.11. *En el modelo de Black-Scholes cualquier opción definida por una variable aleatoria h - $\mathcal{F}_T$ -medible no negativa, la cual es de cuadrado integrable bajo P^* , es replicable y el valor del portafolio al tiempo t está dada por*

$$V_t = \mathbb{E}^* [e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t].$$

El valor de la opción al tiempo t esta definido por la expresión $\mathbb{E}^[e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t]$.*

Demostración. Primero consideremos que existe una estrategia admisible $\phi = (H_t^0, H_t^1)_{0 \leq t \leq T}$ que replica la opción. El valor del portafolio al tiempo t es

$$V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t^1 S_t^1,$$

y por hipótesis se tiene que $V_T(\phi) = h$. Sea $\bar{V}_t(\phi) = V_t(\phi)e^{-rt}$ el valor descontado, es decir,

$$\bar{V}_t(\phi) = H_t^0 + H_t^1 \bar{S}_t^1.$$

Como la estrategia es autofinanciable, de la Proposición 4.2 y de la ecuación 4.6

$$\begin{aligned} \bar{V}_t(\phi) &= V_0(\phi) + \int_0^t H_u d\bar{S}_u^1 \\ &= V_0(\phi) + \int_0^t H_u \sigma \bar{S}_u^1 dW_u^*. \end{aligned}$$

Bajo P^* , $\bar{V}_t(\phi)$ es de cuadrado integrable y más aún, como W_t^* es un movimiento Browniano entonces el proceso $(\bar{V}_t(\phi))$ es martingala de cuadrado integrable bajo P^* , por lo tanto,

$$\bar{V}_t(\phi) = \mathbb{E}^*[\bar{V}_T(\phi) | \mathcal{F}_t],$$

y consecuentemente

$$V_t(\phi) = \mathbb{E}^*[e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t]. \quad (4.8)$$

Hasta el momento hemos probado que dada una estrategia admisible la cual replica la opción h , su valor está dado por la ecuación (4.8). Para completar la demostración resta mostrar que la opción en efecto es replicable, es decir, que existen procesos (H_t^0) y (H_t^1) los cuales definen una estrategia admisible tal que

$$H_t^0 S_t^0 + H_t^1 S_t^1 = \mathbb{E}^*[e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t].$$

Consideremos el proceso definido por $M_t = \mathbb{E}^*[e^{-rT} h | \mathcal{F}_t]$ el cual es martingala de cuadrado integrable con respecto a la medida P^* . La filtración $(\mathcal{F}_t)$, la cual es la filtración natural del proceso (B_t) y a su vez es también la filtración natural de (W_t^*) , usando el Teorema 4.8, existe un proceso adaptado $(K_t)_{0 \leq t \leq T}$ tal que $\mathbb{E}^*[\int_0^t K_s^2 ds] < +\infty$ y

$$\forall t \in [0, T], \quad M_t = M_0 + \int_0^t K_s dW_s^*, \text{ c.s.} \quad (4.9)$$

Definimos la estrategia $\phi = (H_t^0, H_t^1)$ donde $H_t^1 = K_t/(\sigma \bar{S}_t^1)$ y $H_t^0 = M_t - K_t/\sigma$, por definición se tiene

$$\begin{aligned} V_t(\phi) &= H_t^0 S_t^0 + H_t^1 S_t^1 \\ &= M_t S_t^0. \end{aligned}$$

Aplicando la regla del producto a $M_t S_t^0$, teniendo en cuenta la Observación 4.9 y usando la ecuación 4.9 se tiene

$$\begin{aligned} dV_t(\phi) &= M_t dS_t^0 + S_t^0 dM_t \\ &= r M_t S_t^0 dt + S_t^0 K_t dW_t^* \\ &= (M_t - \sigma^{-1} K_t) dS_t^0 + \sigma^{-1} K_t S_t^0 (r dt + \sigma dW_t^*) \\ &= H_t^0 dS_t^0 + H_t^1 dS_t^1. \end{aligned}$$

Consecuentemente la estrategia $\phi = (H_t^0, H_t^1)$ es autofinanciable y su valor al tiempo t es

$$V_t(\phi) = e^{rt} M_t = \mathbb{E}^*[e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t].$$

Esta expresión muestra que $V_t(\phi)$ es una variable aleatoria no negativa de cuadrado integrable bajo P^* y $V_T(\phi) = h$. Por lo tanto, la estrategia admisible replica la opción. $\square$

Observación 4.12. Usando la ecuación (4.7) podemos expresar a S_T^1 como función de t y S_t^1 de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{\bar{S}_T^1}{\bar{S}_t^1} &= \frac{S_0^1 \exp(\sigma W_T^* - \frac{\sigma^2 T}{2})}{S_0^1 \exp(\sigma W_t^* - \frac{\sigma^2 t}{2})} \\ \Rightarrow S_T^1 &= S_t^1 e^{r(T-t)} e^{\sigma(W_T^* - W_t^*) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}. \end{aligned}$$

La variable aleatoria h puede escribirse como $h = f(S_T^1)$, tomando en cuenta la Observación 4.12 podemos expresar el valor de la opción $V_t(\phi)$ al tiempo t , como función de t y S_t^1

$$\begin{aligned} V_t(\phi) &= \mathbb{E}^*[e^{-r(T-t)} f(S_T) | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}^*\left[e^{-r(T-t)} f\left(S_t^1 e^{r(T-t)} e^{\sigma(W_T^* - W_t^*) - (\sigma^2/2)(T-t)}\right) \middle| \mathcal{F}_t\right]. \end{aligned}$$

La variable aleatoria S_t^1 es $\mathcal{F}_t$ -medible y bajo P^* , $W_T^* - W_t^*$ es independiente de $\mathcal{F}_t$, por lo tanto

$$V_t(\phi) = F(t, S_t^1),$$

donde

$$F(t, x) = \mathbb{E}^* \left[e^{-r(T-t)} f \left(x e^{r(T-t) + \sigma(W_T^* - W_t^*) - (\sigma^2/2)(T-t)} \right) \right].$$

Ya que $W_T^* - W_t^*$ es una variable aleatoria distribuida $N(0, T-t)$. Sea Y una variable aleatoria distribuida normal estándar, entonces $\sqrt{T-t}Y$ tiene la misma distribución que $W_T^* - W_t^*$, así

$$F(t, x) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} f \left(x e^{(r - \sigma^2/2)(T-t) + \sigma y \sqrt{T-t}} \right) \frac{e^{-y^2/2} dy}{\sqrt{2\pi}}.$$

Ahora podemos calcular el precio de la opción ya sea de tipo call o put. Consideremos una opción de tipo call, donde $f(x) = (x - K)_+$ entonces el valor de la opción está dado por

$$F(0, x) = e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x e^{(r - \sigma^2/2)T + \sigma y \sqrt{T}} - K \right)_+ \frac{e^{-y^2/2} dy}{\sqrt{2\pi}}$$

la integral es positiva cuando

$$\begin{aligned} K &< x e^{(r - \sigma^2/2)T + \sigma y \sqrt{T}} \\ \Rightarrow \log(K/x) &< (r - \sigma^2/2)T + \sigma y \sqrt{T} \\ \Rightarrow \gamma(x) = \frac{\log(K/x) - (r - \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}} &< y \end{aligned}$$

consecuentemente se tiene

$$\begin{aligned}
F(0, x) &= e^{-rT} \int_{\gamma(x)}^{+\infty} \left(x e^{(r - \sigma^2/2)T + \sigma y \sqrt{T}} - K \right) \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy \\
&= x \int_{\gamma(x)}^{+\infty} e^{-y^2/2 + \sigma y \sqrt{T} - (\sigma^2/2)T} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} - K e^{-rT} (1 - \Phi(\gamma(x))) \\
&= x \int_{\gamma(x)}^{+\infty} e^{-1/2(y - \sigma \sqrt{T})^2} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} - K e^{-rT} \Phi(-\gamma(x)) \\
&= x \int_{\gamma(x) - \sigma \sqrt{T}}^{+\infty} e^{-z^2/2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} - K e^{-rT} \Phi(-\gamma(x)) \\
&= x \Phi(\sigma \sqrt{T} - \gamma(x)) - K e^{-rT} \Phi(-\gamma(x))
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el precio justo para una opción europea de tipo call es

$$\begin{aligned}
C_0 &= F(0, S_0) \\
&= S_0 \Phi(d_+) - K e^{-rT} \Phi(d_-)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

donde

$$d_{\pm} = \frac{\log(S_0/K) + (r \pm \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}}. \tag{4.11}$$

Ahora consideremos una opción europea de tipo put, su payoff está dado por

$$P_T = (K - S_T^1)_+ = (S_T^1 - K)_+ - S_T^1 + K$$

a partir de la ecuación anterior deducimos la ecuación de paridad de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
P_0 &= \mathbb{E}^* [e^{-rT} (K - S_T^1)_+] \\
&= \mathbb{E}^* [e^{-rT} (S_T^1 - K)_+] - \mathbb{E}^* [e^{-rT} S_T^1] + e^{-rT} K \\
&= C_0 - S_0^1 + K e^{-rT}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el precio justo de una opción europea de tipo put es

$$\begin{aligned}
P_0 &= S_0 \Phi(d_+) - K e^{-rT} \Phi(d_-) - S_0 + K e^{-rT} \\
&= K e^{-rT} \Phi(-d_-) - S_0 \Phi(-d_+).
\end{aligned}$$

Observación 4.13. *El modelo de Black-Scholes para valorar opciones depende de 5 parámetros (S, K, T, r, σ) , de los cuales σ es un parámetro no observable, pero puede ser estimado mediante métodos estadísticos observando la historia de los precios del activo en el pasado.*

Capítulo 5

Sensibilidad de Parámetros

En este capítulo veremos como afecta cada uno de los parámetros en la valuación de la opción. Consideremos una opción tipo call; como mostramos anteriormente el valor de la opción está en función de los parámetros S, σ, T, r y K de la siguiente manera

$$C_0(S, K, r, T, \sigma) = S\Phi(d_+) - Ke^{-rT}\Phi(d_-) \quad (5.1)$$

donde, para $x \in \mathbb{R}$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}},$$
$$d_{\pm} = \frac{\log(S/K) + (r \pm \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Ejemplo 5.1. *Supongamos que se desea comprar un opción de tipo call sobre un activo subyacente, el cual tiene un precio actual de 50 pesos, a un plazo de medio año con un precio strike de 52 pesos. Teniendo en cuenta que la tasa de interés es de 3% y la volatilidad es de 0.5 entonces los parámetros son*

- $S = 50$
- $K = 52$
- $r = 0.03$
- $T = 0.5$

■ $\sigma = 0.5$

donde

$$\begin{aligned} d_+ &= 0.10827 & d_- &= -0.245283 \\ \Phi(d_+) &= 0.543109 & \Phi(d_-) &= 0.403119 \end{aligned}$$

por lo tanto, el valor de la opción de compra es

$$C_0 = 50(0.543109) - 52e^{-0.015}(0.403119) = 6.50539$$

5.1. Precio del activo S

Consideremos el Ejemplo 5.1, pero variando el precio actual del activo con los siguientes valores $S = 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55$ y dejando fijos los otros parámetros. Entonces el precio de la opción correspondiente a cada precio inicial se puede observar en la Figura 5.1, además conforme aumenta el precio inicial, aumenta el precio de la opción y esto lo podemos corroborar calculando la derivada parcial de C con respecto a S y notando que es mayor que cero, de la siguiente manera

S	$C_0(S)$
45	4.08111
46	4.51814
47	4.97949
48	5.46479
49	5.97359
50	6.50539
51	7.05961
52	7.63567
53	8.23290
54	8.85065
55	9.48820

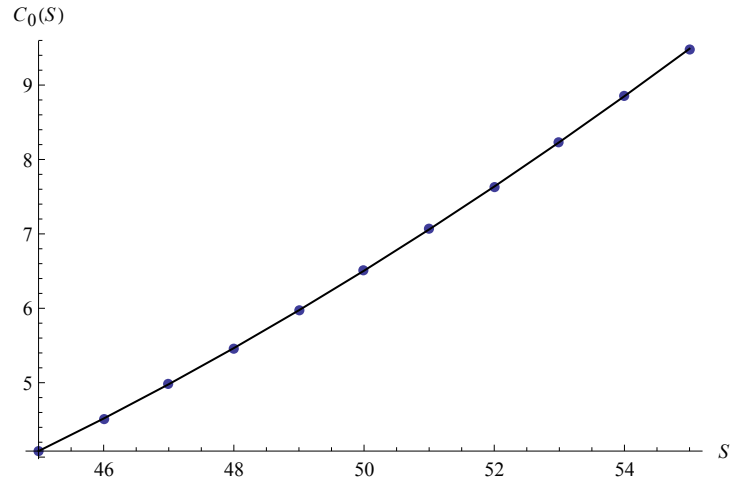


Figura 5.1: Valor de la opción para diferentes valores de S y comportamiento gráfico.

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \Phi(d_+) + S\Phi'(d_+)\frac{\partial(d_+)}{\partial S} - Ke^{-rT}\Phi'(d_-)\frac{\partial(d_-)}{\partial S},$$

donde $\partial(d_+) = \partial(d_-) = 1/(\sigma S\sqrt{T})$, por ende se tiene

$$\frac{\partial C}{\partial S} = S \frac{\partial(d_+)}{\partial S} \left(\Phi'(d_+) - \frac{Ke^{-rT}}{S} \Phi'(d_-) \right) + \Phi(d_+).$$

Por otra parte, consideremos el primer sumando de la ecuación anterior y teniendo en cuenta que $d_+^2 - d_-^2 = 2(rT + \log(S/K))$ y $\Phi'(d_+)/\Phi'(d_-) = \exp(-\frac{1}{2}(d_+^2 - d_-^2))$, se tiene

$$\frac{\Phi'(d_+)}{\Phi'(d_-)} = \frac{Ke^{-rT}}{S},$$

entonces

$$\Phi'(d_+) - \frac{Ke^{-rT}}{S} \Phi'(d_-) = \Phi'(d_+) - \frac{\Phi'(d_+)}{\Phi'(d_-)} \Phi'(d_-) = 0. \quad (5.2)$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \Phi(d_+) > 0.$$

Observación 5.2. De la ecuación 5.1 podemos observar que cuando S tiende a infinito el valor de la opción se va a infinito y cuando S tiende a cero por la derecha el valor de la opción es cero, teniendo en cuenta los demás parámetros constantes.

A la derivada parcial de C con respecto de S , se le conoce como Δ -delta.

5.2. Volatilidad del precio del activo σ

Tomando el Ejemplo 5.1 y variando únicamente el valor de σ con 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8 y 2.0. Como se ve en la Figura 5.2 podemos inferir que conforme aumenta la volatilidad del precio del activo, el valor de la opción crece. Para comprobar esta afirmación calculemos la derivada parcial de C con respecto a σ , esto es,

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} = S \Phi'(d_+) \frac{\partial(d_+)}{\partial \sigma} - Ke^{-rT} \Phi'(d_-) \frac{\partial(d_-)}{\partial \sigma},$$

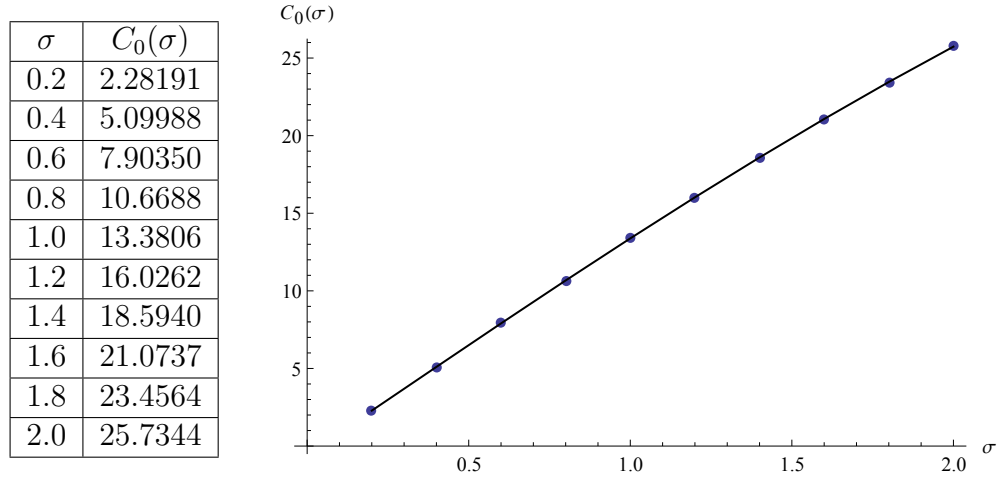


Figura 5.2: Valor de la opción para diferentes valores de σ y comportamiento gráfico.

donde

$$\begin{aligned}\frac{\partial(d_+)}{\partial\sigma} &= \sqrt{T} + \frac{T(r + \sigma^2/2) + \log(S/K)}{\sigma^2\sqrt{T}}, \\ \frac{\partial(d_+)}{\partial\sigma} &= -\sqrt{T} - \frac{T(r - \sigma^2/2) + \log(S/K)}{\sigma^2\sqrt{T}},\end{aligned}$$

teniendo en cuenta que $\partial(d_-)/\partial\sigma = \partial(d_+)/\partial\sigma - \sqrt{T}$ y la ecuación 5.2 obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial\sigma} &= S \frac{\partial(d_-)}{\partial\sigma} \left(\Phi'(d_+) - \frac{Ke^{-rT}}{S} \Phi'(d_-) \right) + S\sqrt{T}\Phi'(d_+) \\ &= S\sqrt{T}\Phi'(d_+) > 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que el valor de la opción es creciente en dirección de σ .

Observación 5.3. *Considerando la ecuación 5.1 se puede notar que el valor de la opción es S cuando σ tiende a infinito considerando los demás parámetros constantes.*

A la parcial de C con respecto de σ , se le conoce como $\mathcal{V}$ -vega.

5.3. Fecha de expiración T

Al calcular el valor de la opción cuando T toma los valores 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5 y 5, dejando los demás parámetros constantes como en el ejemplo 5.1, se puede observar en la Figura 5.3 que el valor de la opción es creciente en la dirección de T . Para esto calculemos la derivada parcial en dirección de T y verifiquemos que es mayor que cero, es decir,

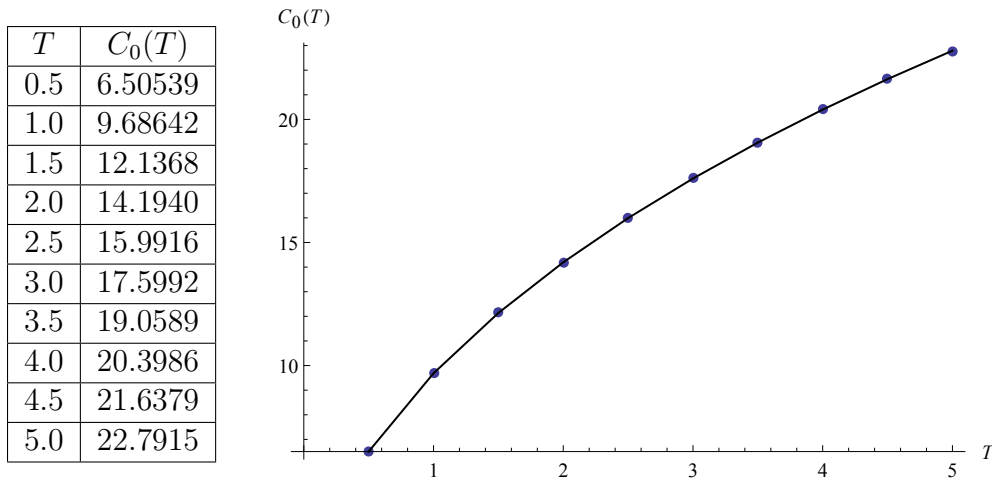


Figura 5.3: Valor de la opción para diferentes valores de T y comportamiento gráfico.

$$\frac{\partial C}{\partial T} = S\Phi'(d_+)\frac{\partial(d_+)}{\partial T} - Ke^{-rT} \left(\Phi'(d_-)\frac{\partial(d_-)}{\partial T} - r\Phi(d_-) \right).$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial(d_+)}{\partial T} &= \frac{r + \sigma^2/2}{\sqrt{T}\sigma} - \frac{T(r + \sigma^2/2) + \log(S/K)}{2T^{3/2}\sigma}, \\ \frac{\partial(d_-)}{\partial T} &= \frac{r - \sigma^2/2}{\sqrt{T}\sigma} - \frac{T(r - \sigma^2/2) + \log(S/K)}{2T^{3/2}\sigma}, \\ \frac{\partial(d_+)}{\partial T} &= \frac{\partial(d_-)}{\partial T} + \frac{\sigma}{2\sqrt{T}}, \end{aligned}$$

usando la ecuación 5.2 se tiene que la derivada parcial está dada por la expresión

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial T} &= S \frac{\partial(d_-)}{\partial T} \left(\Phi'(d_+) - \frac{Ke^{-rT}}{S} \Phi'(d_-) \right) + \frac{\sigma S \Phi'(d_+)}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT} \Phi(d_-) \\ &= \frac{\sigma S \Phi'(d_+)}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT} \Phi(d_-).\end{aligned}$$

La cual es mayor que cero.

Observación 5.4. *Notemos que en la ecuación 5.1 el valor de la opción es S , cuando T tiende a infinito considerando el resto de los parámetros constantes.*

A la parcial de C con respecto de T , se le conoce como Θ -theta.

5.4. Tasa de interés r

El valor de la opción cuando el parámetro r toma los valores 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09 y 0.1 teniendo en cuenta que los demás parámetros son constantes como en el Ejemplo 5.1. En la Figura 5.4 se tienen los resultados y podemos notar que el valor de la opción es creciente en la dirección de r , en efecto para demostrarlo derivemos parcialmente con respecto a r , es decir,

$$\frac{\partial C}{\partial r} = S \Phi'(d_+) \frac{\partial(d_+)}{\partial r} - Ke^{-rT} \left(\Phi'(d_-) \frac{\partial(d_-)}{\partial r} - T \Phi(d_-) \right),$$

considerando que $\partial(d_+)/\partial r = \partial(d_-)/\partial r = \sqrt{T}/\sigma$ y la ecuación 5.2 tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial r} &= S \frac{\partial(d_+)}{\partial r} \left(\Phi'(d_+) - \frac{Ke^{-rT}}{S} \Phi'(d_-) \right) + TKe^{-rT} \Phi(d_-) \\ &= TKe^{-rT} \Phi(d_-) > 0.\end{aligned}$$

A la derivada parcial de C con respecto de r , se le conoce como ρ -rho.

5.5. Precio strike K

Finalmente, en el Ejemplo 5.1 cuando K toma los valores 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57 y 57 dejando el resto de los parámetros constantes,

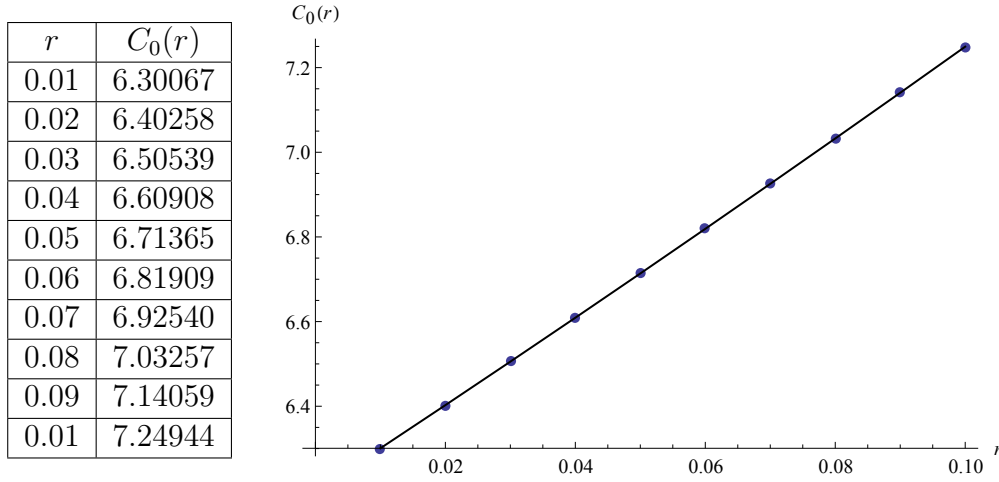


Figura 5.4: Valor de la opción para diferentes valores de r y comportamiento gráfico.

se tiene en la Figura 5.5 los resultados, teniendo en cuenta el gráfico se puede observar que al aumentar el precio strike K el precio de la opción disminuye como es de esperarse, para verificarlo calculemos la derivada parcial de C con respecto a K

$$\frac{\partial C}{\partial K} = S\Phi'(d_+) \frac{\partial(d_+)}{\partial K} - Ke^{-rT} \left(\Phi'(d_-) \frac{\partial(d_-)}{\partial K} + \frac{\Phi(d_-)}{K} \right),$$

Observemos que $\partial(d_+)/\partial K = \partial(d_-)/\partial K = -1/(\sigma K \sqrt{T})$ y teniendo en cuenta la ecuación 5.2

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial K} &= S \frac{\partial(d_+)}{\partial K} \left(\Phi'(d_+) - \frac{Ke^{-rT}}{S} \Phi'(d_-) \right) - e^{-rT} \Phi(d_-) \\ &= -e^{-rT} \Phi(d_-) < 0. \end{aligned}$$

Observación 5.5. En la ecuación 5.1, cuando K tiende a infinito el valor de la opción es cero teniendo en cuenta las demás variables constantes.

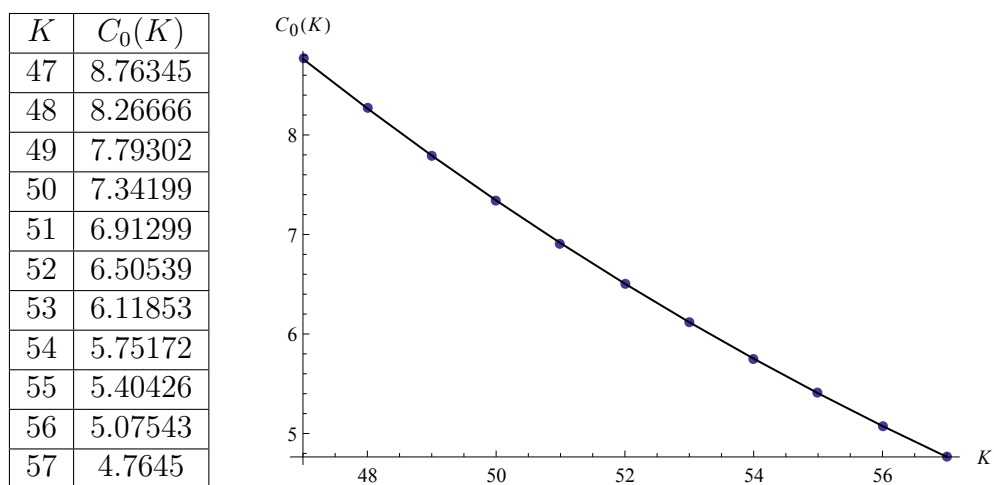


Figura 5.5: Valor de la opción para diferentes valores de K y comportamiento gráfico.

Conclusiones

La fórmula de Black-Scholes es una herramienta que permite valorar opciones Europeas. En el modelo se pueden hacer variantes para obtener un modelo más realista, es decir, se puede tomar una tasa de interés libre de riesgo que no sea constante, así como pensar que hay pagos de dividendos.

En el modelo se consideró el hecho de tener un mercado completo, lo que nos garantiza la unicidad de la medida equivalente bajo la cual los precios descontados son martingala, sin embargo, se puede estudiar el caso cuando tenemos un mercado incompleto, esto nos lleva a elegir una medida adecuada dentro de un conjunto de medidas equivalentes.

Además observamos que el modelo es una función de cinco parámetros, (K, S, r, σ, T) , y vimos su comportamiento al considerar una variable y tomar constantes las variables restantes, esto se puede extender al considerar dos o más variables y fijar las demás.

De los cinco parámetros que depende el modelo, algunas veces desconocemos la volatilidad del precio del activo, sin embargo, podemos hacer inferencia mediante métodos estadísticos conociendo la historia de los precios en el pasado.

Bibliografía

- [1] N.H. BINGHAM y R. KIESEL, *Risk-Neutral Valuation: Pricing and Hedging of Financial Derivatives*, primera edición, Springer-Verlag, London, 1998.
- [2] K.L. CHUNG, *A Course in Probability Theory*, tercera edición, Academic Press, London, 19—.
- [3] J. DÍAZ y F. HERNÁNDEZ, *Futuros y Opciones Financieras: Una introducción*, tercera edición, Limusa, México, DF, 2003.
- [4] R.J. ELLIOTT y P.E. KOPP, *Mathematics of Financial Markets*, primera edición, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [5] O. ELVIRA y P. LARRAGA, *Mercado de productos derivados*, primera edición, Profit, Barcelona, 2008.
- [6] A. ETHERIDGE, *A Course in Financial Calculus*, primera edición, Cambridge University Press, United Kingdom, 2002.
- [7] C. FRIES, *Mathematical Finance: Theory, Modeling, Implementation*, primera edición, Wiley, USA, 2007.
- [8] H.H. KUO, *Introduction to Stochastic Integration*, primera edición, Springer, New York, 2006.
- [9] D. LAMBERTON y B. LAPEYRE, *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, segunda edición, Chapman & Hall, London, 2008.
- [10] S.E. SHREVE, *Stochastic Calculus for Finance II Continuous-Time Models*, primera edición, Springer-Verlag, New York, 2004.

- [11] D. SONDERMANN, *Introduction to Stochastic Calculus for Finance: A New Didactic Approach*, primera edición, Springer-Verlag, Berlin, 2006.