Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

Título

Dendritas

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA
David Rodríguez Hernández

DIRECTORES DE TESIS
Dr. Fernando Macías Romero
Dr. David Herrera Carrasco

PUEBLA, PUE. 3 de mayo 2023.

Agradecimientos

Aprovecho estas primeras lineas para dar gracias a todas las personas que de alguna u otra forma me han influenciado a ser la persona que hoy soy. Mis padres Francisca Hernández Díaz y José Luis Rodríguez Sanchez por su incondicional apoyo en todos mis estudios, los quiero. A mi pareja, amiga y confidente Leonor Méndez Antonio quien a pesar de muchas cosas siempre me apoya y cree en mí, Te amo. A mis hermanos con quien siempre se cuenta cuando de afrontar problemas se trata y siempre están dispuestos a ayudar. A mi mejor amigo Alejandro, quien me ha brindado su amistad durante muchos años.

Agradezco a mis directores el Dr. Fernando Macías Romero y a el Dr. David Herrera Carrasco quienes me animaron a trabajar en este tema de tesis y estuvieron bastante al pendiente de este trabajo. Gracias por su paciencia y por esos empujones que uno no sabe muchas veces que necesita.

También un agradecimiento a mis Sinodales la Dra. Patricia Dominguez Soto, el Dr. Raul Escobedo Conde y el M. en C. Leonardo Ramírez Aparicio por tomarse el tiempo de revisar este trabajo.

Introducción

El presente trabajo de tesis fue realizado sobre la teoría de continuos, pero particularmente en los objetos llamados dendritas, donde por continuo se entiende como un espacio métrico conexo, compacto y no vacío y una dendrita es un continuo que es localmente conexo y que además no contiene curvas cerradas simples.

Para el primer capítulo damos un vistazo a la teoría de continuos necesaria para desarrollar nuestro estudio de las dendritas. Se atienden los conceptos de límite inverso, límite de conjuntos, punto de corte y no corte, espacios localmente conexos y gráficas; así como resultados interesantes de los teoremas de golpes en la frontera, entre otros. Se dan ejemplos de cada uno de los temas anteriormente dichos, además se demuestran algunos teoremas y proposiciones. En el Capítulo 2 se da la definición de dendrita, hacemos las demostraciones de lo siguiente:

Para un continuo no degenerado X, las siguientes condiciones son equivalentes.

(1) X es una dendrita.

(2) Para cualesquiera dos puntos en X existe un tercer punto que los separa en X (vea el Teorema 2.7).

(3) Cada punto de X es un punto de corte en X o es un punto extremo de X (vea el Teorema 2.12).

(4) Cada subcontinuo no degenerado de X contiene una cantidad no numerable de puntos de corte de X (vea el Teorema 2.13).

(5) Para cada punto $p \in X$, el número de componentes del conjunto $X - \{p\}$ es igual al $ord(p, X)$ siempre que alguno de ellos sea finito (vea el Teorema 2.19).

(6) La intersección de cualesquiera dos subconjuntos conexos de X es conexo (vea el Teorema 2.15).

Además probamos lo siguiente: Sea X un continuo localmente conexo. Entonces X es una dendrita si y solo si X es hereditariamente unicoherente (vea el Teorema 2.44).

Demostramos que si X es una dendrita, entonces tiene las siguientes propiedades:

(a) X es hereditariamente localmente conexo (ver Corolario 2.10).

(b) El conjunto de puntos de ramificación de X es numerable (ver Teorema 2.30).

(c) Todo subcontinuo de X es una dendrita (ver Corolario 2.11).

(d) X es regular (ver Teorema 2.26).

(e) Cada punto de X es de orden menor o igual que $\aleph_0$ en X (ver Corolario 2.27).

(f) X tiene la propiedad del punto fijo (ver Teorema 2.39).

Recordemos que para un elemento X de una familia $\mathcal{L}$, el espacio topológico X es universal para la familia $\mathcal{L}$ si podemos encontrar una copia topológica de cada elemento de la familia $\mathcal{L}$ en el espacio X. En este trabajo se hace la construcción de una dendrita que es universal para la familia de todas las dendritas (ver Teorema 2.46 o ver [16, 10.37]), de manera similar se realiza la construcción de la dendrita universal para la familia de las dendritas tal que sus puntos de ramificación tienen orden menor o igual que tres (ver Ejemplo 2.47 o ver [17, Sección 3.2]).

David Rodríguez Hernández
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas,
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
Mayo de 2023

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo tiene como objetivo presentar parte del material necesario para demostrar y entender algunos resultados del capítulo 2, el cual centra nuestro estudio hacia el concepto de dendritas. En este primer capítulo se repasan conceptos básicos de topología general así como conceptos de la teoría general de continuos de Peano y gráficas, también se mencionan algunos importantes resultados de límites de conjuntos, límites inversos, teoremas de golpes en la frontera, puntes de corte y no corte. No todas las demostraciones de los resultados fueron escritas, sin embargo, se da una referencia adecuada para la revisión de cada caso omitido.

A continuación se presenta la notación de algunos términos que hemos convenido a usar en este trabajo.

- Designamos a N como el conjunto de los números naturales.
- Z como el conjunto de los números enteros.
- Q como el conjunto de los números racionales.
- R como el conjunto de los números reales.
- R^n al *n-ésimo* espacio euclideano. con $n \in \mathsf{N}$

También, si A es un subconjunto de un espacio topológico X denotamos:

- $\mathrm{Int}_X(A)$ como el interior de A
- $\overline{A}^X$ como la cerradura de A

- $\mathrm{Fr}_X(A)$ como la frontera de A

Además si X y Y son espacios topológicos, $A \subset X$ y $f\colon X \to Y$ una función.

- La función $f \mid A$ denotará la función restringida al subespacio A.

En este trabajo se utilizará la siguiente noción de vecindad de un punto:

*Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Un subconjunto V de X es una **vecindad** de x si existe un abierto U en X tal que $x \in U \subset V$.*

1.1. Teoría básica

Para esta primera sección daremos un vistazo a conceptos básicos de los temas de Compacidad y Conexidad pues nos servirán más adelante para definir que es un continuo, es importante tener una idea de estos dos conceptos pues es en una rama de los continuos en que centramos este trabajo.

Fue René Maurice Fréchet (1878-1973) quien a principios del siglo XIX definió a los conjuntos compactos como aquellos que contienen sólo un número finito de puntos o si cada uno de sus subconjuntos infinitos tiene al menos un punto límite. Aunque más tarde se asumió que esta idea no era muy adecuada en el contexto de espacios topológicos abstractos, fue entonces cuando se formuló el concepto de compacidad en términos de cubrimientos del espacio por conjuntos abiertos. y es actualmente la manera en que se trabaja la compacidad en cualquier espacio topológico.

Definición 1.1. *Sea $Y \subset X$. Si $Y \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ con U_α conjunto abierto en X; a la familia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ se le llama cubierta abierta de Y.*

Si $I' \subset I$ es tal que $Y \subset \bigcup_{\alpha \in I'} U_\alpha$, entonces decimos que la subfamilia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I'}$ es una subcubierta de Y.

Si además I' es un conjunto finito, diremos que la subfamilia es una subcubierta finita de Y.

Definición 1.2. *Sea X un espacio métrico y $Y \subset X$. Decimos que Y es* ***compacto*** *si toda cubierta abierta de Y admite una subcubierta finita.*

Ejemplo 1.3. *Sea $Y = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathsf{Z}^+\} \subset \mathsf{R}$, a saber, Y es compacto.*

Demostración: Sea A una cubierta abierta de Y, luego debe existir un abierto U de A que contiene al 0 y por la forma en que está definido Y el conjunto U debe contener a todos los puntos de la forma $\frac{1}{n}$ excepto a un número finito de ellos; digamos $y_1, ..., y_k$. Ahora, para cada una de estos puntos que no están en U, tomemos un elemento de A que los contenga, digamos $A_1, ...A_k$. Luego $U \cup \{A_i\}_{i=1}^{k}$ es una subcubierta abierta para Y y por tanto Y es compacto.■

Definición 1.4. *Sea Y un subconjunto no vacío de (X, d) un espacio métrico. Decimos que Y es acotado si existe $k \in \mathsf{R}^+$ tal que para todo $x, y \in Y$ se tiene que $d(x, y) \leq k$.*

El teorema que a continuación se enuncia relaciona los intervalos acotados y cerrados de R con el concepto de compacidad.

Teorema 1.5. *[7, Teorema (2.G.6)] Cada intervalo cerrado y acotado de R es compacto.*

Teorema 1.6. *Si (X, d) es un espacio métrico compacto y C un subconjunto cerrado de X, entonces C es compacto.*

Demostración. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una cubierta abierta para C, luego al ser C cerrado, tenemos que C^c abierto, nótese que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \cup C^c$ es una cubierta abierta para X y al ser X compacto, este admite una subcubierta finita. A saber C^c puede ser o no parte de la subcubierta finita.
En el caso de que C^c no sea parte de la subcubierta finita de X se tendría que existe $k \in \mathsf{N}$ tal que $\{U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_k}\}$ es una subcubierta finita para X, es decir $X \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{\alpha_i}$ y como $C \subset X$, entonces $C \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{\alpha_i}$ y por tanto C compacto.
En el caso de que C^c sea parte de la subcubierta finita de X, esta sería de la forma $\{U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_k}, C^c\}$ para algún $k \in \mathsf{N}$, luego al igual que en el caso anterior $C \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{\alpha_i} \cup C^c$ pero $C \not\subset C^c$ por lo que $C \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{\alpha_i}$ y por tanto C compacto. ■

Siguiendo ahora con el concepto de conexidad. La definición actual de esta fue introducida en 1893 por C. Jordan (1838-1922) para la clase de los subconjuntos del plano. El estudio sistemático de la conexidad fue iniciado en 1914, por F. Hausdorff (1878-1973), y en 1921 por B. Knaster (1893-1980) y K. Kuratowski (1896-1980).

Siempre podemos pensar de manera intuitiva a un conjunto conexo como un conjunto de una sola pieza (que no se puede dividir), pero en términos más precisos y a manera de no generar ambigüedad, se tiene la siguiente definición.

Definición 1.7. *Sea X un espacio métrico y sean P y Q subconjuntos abiertos no vacíos de X. Diremos que P Y Q son una **separación** de X si $X = P \cup Q$ y $P \cap Q = \emptyset$.*
*Diremos que X es **disconexo** si existe una separación de X y en caso contrario diremos que X es conexo, o bien. X es **conexo** si no puede ser descrito como unión disjunta de dos conjuntos abiertos.*
Además, si $Y \subset X$, entonces Y es disconexo o conexo si lo es como subespacio con la topología relativa.

Proposición 1.8. *Sean C un subespacio métrico conexo de X. Si $C \subset B \subset \overline{C}$, entonces B es conexo.*

Demostración. Supongamos que B es disconexo, entonces deben existir M y N abiertos tales que $B = M \cup N$ y $M \cap N = \emptyset$. Luego como C es conexo, C debe ser subconjunto de M o bien de N, sin perdida de generalidad supongamos que $C \subset M$, entoces $\overline{C} \subset \overline{M}$ por lo que $\overline{C} \cap N = \emptyset$. Y como $B \subset \overline{C}$ se tiene que $B \cap N = \emptyset$, luego $N = \emptyset$, pero esto es una contradicción. Por lo tanto, B es conexo. ∎

A continuación un teorema que caracteriza los subconjuntos conexos del espacio R.

Teorema 1.9. *[7, Teorema (2.A.8)] Un subconjunto I de R es conexo si y solo si I es un intervalo o un subconjunto unitario.*

Nótese que la unión de conjuntos conexos puede ser un conjunto no conexo, pero si la intersección de estos conjuntos es al menos un punto, entonces la unión dará como resultado un conjunto conexo. El siguiente teorema generaliza esta idea.

Teorema 1.10. *[7, Teorema (2.A.10)] Si $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una familia de subconjuntos conexos en un espacio topológico X tales que para $i \neq j$, se cumple que $X_i \cap X_j \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ es conexo.*

Teorema 1.11. *[7, Teorema (1.F.6)] (**Teorema de pegado de funciones**). Sean A y B subconjuntos cerrados de un espacio topológico X. Sea Y un espacio arbitrario y supongamos que $f\colon A \to Y$ y $g\colon B \to Y$ son funciones continuas tales que $f \mid A \cap B = g \mid A \cap B$. Entonces la función $h\colon A \cup B \to Y$ definida, para cada $x \in A \cup B$, por*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in A, \\ g(x), & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

es continua.

Un **punto fijo** de una función $f\colon X \to X$ es un punto $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

La Teoría del punto fijo tiene gran variedad de aplicaciones en diversos campos de la ciencia, tales como: las matemáticas, física y economía y la posibilidad de hallarlo aborda cuestiones de gran importancia.

Ejemplo 1.12. *Es fácil verificar que la función $f : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 2x$ tiene como puntos fijos a 0 y 3.*

Ejemplo 1.13. *De igual forma es fácil verificar que $f : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ definida por $f(x) = x + 5$ no tiene puntos fijos.*

Definición 1.14. *Se dice que un espacio topológico X tiene la **propiedad del punto fijo** si cada función continua $f\colon X \to X$, tiene un punto fijo.*

Ejemplo 1.15. *Denotemos como I al intervalo cerrado $[0, 1]$ veamos que tiene la propiedad del punto fijo. En efecto, sean $f\colon I \to I$ una función continua, $A = \{x \in I : x \leq f(x)\}$ y $B = \{x \in I : x \geq f(x)\}$. Observe, $I = A \cup B$ y, que A y B son subconjuntos cerrados de I, además $0 \in A$ y $1 \in B$. Entonces, como I es un conexo, existe $x_0 \in A \cap B$, es decir $x_0 \in A$ y $x_0 \in B$ por lo que $x_0 \leq f(x_0)$ y $x_0 \geq f(x_0)$ y en consecuencia $f(x_0) = x_0$.*

Es importante mencionar que la propiedad del punto fijo se preserva bajo homeomorfismos.

1.2. Continuos

La primera definición de *continuo* fue dada en 1883 por G. Cantor (1845-1918) y nos dice que un continuo es un subconjunto cerrado y denso en sí mismo y conexo en un espacio Euclidiano. Pero esta definición había sido formulada sobre la base del estudio de otro objeto de investigación matemática: El concepto de línea o curva, las cuales eran más importantes en esa época (vea en [6, pág. 225-226]).

Tengamos en consideración lo siguiente:

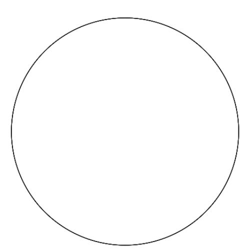
- Decimos que un conjunto es **no degenerado.** si dicho conjunto tiene más de un punto.
- Decimos que un conjunto es **numerable** si es finito o si tiene cardinalidad igual a la del conjunto N.
- Se entiende que un subconjunto D de un espacio métrico X es **denso** en X, si cada subconjunto abierto y no vacío en X intersecta a D.
- Decimos que un espacio topológico X es **separable** si este contiene un subconjunto denso y numerable.

Definición 1.16. *Un* ***continuo*** *es un espacio métrico, conexo, compacto y no vacío. Además si X es un continuo y $Y \subset X$ se dirá que Y es un* ***subcontinuo*** *de X, si Y es un continuo.*

Nota: Con los puntos anteriores y dado que cada espacio métrico compacto es separable, [10, pág. 90-93], en consecuencia podemos decir que cada continuo es separable.

Ejemplo 1.17. *Cualquier conjunto unitario es un continuo. Sean a, $b \in \mathsf{R}$, donde $a < b$, el intervalo $[a, b]$ es un continuo. Pues $[a, b]$ es conexo por 1.9 y es compacto por 1.5*

Ejemplo 1.18. *Sea $X = \{(x, y) \in \mathsf{R}^2 : d((0, 0), (x, y)) = 1\}$ donde d es la métrica usual de R^2. X es la circunferencia unitaria y es un continuo.*

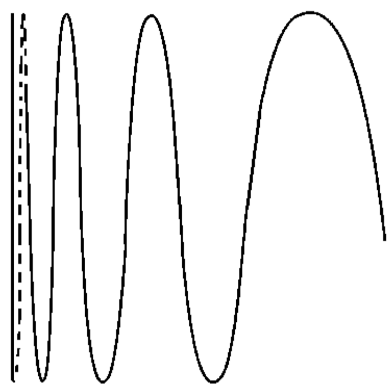


Circunferencia unitaria.

Ejemplo 1.19. *Si* $W = \{(x, sen(\frac{1}{x})) \in \mathsf{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$, *entonces* $X = \overline{W}^{\mathsf{R}^2}$ *es un continuo llamado la curva sinoidal del topólogo. Observe que*

$$\overline{W}^{\mathsf{R}^2} = W \cup \{(0, y) \in \mathsf{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}.$$

El continuo X *se puede observar de manera aproximada en la siguiente figura.*



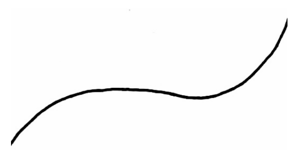
Continuo $sen(\frac{1}{x})$

Llegados a este punto es valido hacernos la pregunta: ¿La unión de continuos es un continuo? y aunque la respuesta es que no necesariamente, el siguiente teorema nos dice bajo que condiciones esto es posible.

Teorema 1.20. *La unión de dos continuos es un continuo siempre que tengan un punto en común.*

Definición 1.21. *Un* ***arco*** *es un espacio topológico homeomorfo al intervalo* $[0, 1]$.

Sea A un arco. Para cualquier homeomorfismo $f : [0, 1] \to A$, se tiene que $\{p, q\} = \{f(0), f(1)\}$. Por esto, los puntos extremos del arco A son p y q. Podemos decir que A es un **arco de** p **a** q o de q a p.



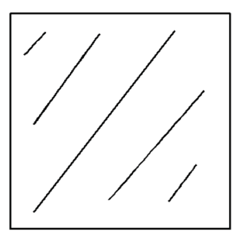
Arco.

El intervalo $[0,1]$ es un continuo, así un arco es un continuo. En el ejemplo 1.15 probamos que el intervalo $[0,1]$ tiene la propiedad del punto fijo, por la definición 1.21 y como la propiedad del punto fijo es una invariante topológica, entonces todo arco tiene la propiedad del punto fijo.

Definición 1.22. *Una **curva cerrada simple** es un espacio topológico homeomorfo a la circunferencia unitaria.*

Curva cerrada simple.

Definición 1.23. *Una* $2-$***celda*** *es un espacio topológico homeomorfo a* $[0,1] \times [0,1]$.



2-celda.

1.3. Límites inversos

En esta sección se presentan algunos resultados básicos sobre límites inversos, enunciamos teoremas tanto básicos, como fundamentales de límites inversos de espacios compactos y continuos, en los cuales nos muestran maneras particulares de escribir a ciertos espacios topológicos.

comencemos con la siguiente definición.

Definición 1.24. *Sea* $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una colección numerable de espacios métricos. Para cada* $i \in \mathsf{N}$*, sea* f_i *una función continua de* X_{i+1} *en* X_i*. La sucesión* $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ *de espacios y funciones es llamada una* ***sucesión inversa****. Las funciones* $f_i\colon X_{i+1} \to X_i$ *son llamadas* ***funciones de ligadura****.*

Si $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ *es una sucesión inversa, algunas veces escrita como sigue:*

$$X_1 \xleftarrow{f_1} X_2 \xleftarrow{f_2} X_3 \longleftarrow \ldots \longleftarrow X_i \xleftarrow{f_i} X_{i+1} \longleftarrow, \ldots,$$

entonces el ***límite inverso*** *de* $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$*, denotado por* $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$*, es el subespacio del espacio producto cartesiano* $\prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ *definido por:*

$$\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty} = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : f_i(x_{i+1}) = x_i, \text{ para toda } i\}.$$

A continuación un teorema importante que nos relaciona la definición anterior con los continuos y compactos.

Teorema 1.25. *[16, 2.4] El límite inverso de espacios métricos, compactos y no vacíos es un espacio métrico, compacto y no vacío. También el límite inverso de continuos es un continuo.*

Los siguientes resultados sobre límites inversos nos serán de utilidad en el Capítulo 2, específicamente para demostrar resultados que nos ayudarán para demostrar la existencia de una dendrita universal (vea en la página 66).

Lema 1.26. *[16, 2.6] Sea* $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión inversa de espacios métricos con límite inverso* X_∞*. Para cada* $i \in \mathsf{N}$ *sea* $\pi_i : X_\infty \to X_i$ *la i-ésima proyección. Sea* A *un subconjunto compacto de* X_∞*. Entonces,* $\{\pi_i(A), f_i \mid \pi_{i+1}(A)\}_{i=1}^{\infty}$ *es una sucesión inversa con funciones de ligadura suprayectivas y*

$$\varprojlim\{\pi_i(A), f_i \mid \pi_{i+1}(A)\}_{i=1}^{\infty} = A = \left[\prod_{i=1}^{\infty} \pi_i(A)\right] \cap X_\infty.$$

El siguiente teorema de límites inversos es llamado el Teorema del Encaje de Anderson-Choquet. Este Teorema se aplicará en el Capítulo 2, cuando veamos que las dendritas pueden ser encajadas en el plano.

Teorema 1.27. *[16, 2.10] Sean* X *un espacio métrico con la métrica* d *y* $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión inversa, donde cada* X_i *es un subconjunto compacto no vacío de* X *y cada* f_i *es una función suprayectiva. Para todo* $j > i+1$ *sea*

$$f_{ij} = f_i \circ \ldots \circ f_{j-1} \colon X_j \to X_i \quad y \quad f_{i(i+1)} = f_i.$$

Asuma las condiciones siguientes:

(1) Para cada $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathsf{N}$ tal que para toda $p \in X_k$,

$$diám[\bigcup_{j>k} f_{kj}^{-1}(p)] < \varepsilon;$$

(2) Para cada $i \in \mathsf{N}$ y cada $\delta > 0$, existe $\delta' > 0$ tal que, siempre que $j > 1$ y $p, q \in X_j$ tales que $d(f_{ij}(p), f_{ij}(q)) > \delta$, entonces $d(p,q) > \delta'$.

Entonces $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es homeomorfo a $\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{(\bigcup_{m\geq i} X_m)}$. En particular: si para cada i, $X_i \subset X_{i+1}$ entonces $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es homeomorfo a $\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i}$.

El siguiente lema nos muestra que la familia de cerrados del límite inverso está estrechamente relacionada con los límites inversos de los subconjuntos cerrados de los espacios factores.

Lema 1.28. *[13, Lema 1.25] Sea $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa de espacios métricos. Si A es un subconjunto compacto de $\varprojlim\{X_i, f_i\}$, entonces*

$$\{\pi_i(A), f_i \mid \pi_{i+1}(A)\}_{i=1}^{\infty}$$

es una suceción inversa con funciones de ligadura suprayectivas y

$$\varprojlim\{\pi_i(A), f_i \mid \pi_{i+1}(A)\}_{i=1}^{\infty} = A = [\Pi_{i=1}^{\infty}\pi_i(A)] \cap \varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}.$$

El siguiente resultado se debe a A. D. Wallance [5, pág. 233].

Proposición 1.29. *Sean $X_\infty = \varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$, A y B subconjuntos compactos de X_∞ y $C = A \cap B$. Para cada $i \in \mathsf{N}$, sea $C_i = \pi_i(A) \cap \pi_i(B)$. Entonces*

$$C = \varprojlim\{C_i, f_i \mid C_{i+1}\}_{i=1}^{\infty}.$$

Demostración. Sea $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \varprojlim\{C_i, f_i \mid C_{i+1}\}_{i=1}^{\infty}$. Así, para cada $i \in \mathsf{N}$:

(a) $x_i \in \pi_i(A)$,

(b) $x_i \in \pi_i(B)$ y

(c) $f_i \mid C_{i+1}(x_{i+1}) = x_i$.

Para cada $i \in \mathsf{N}$ notemos que $f_i \mid C_{i+1} \colon C_{i+1} \to C_i$ y $f_i \mid C_{i+1}(x_{i+1}) = f_i(x_{i+1})$. Como $x_{i+1} \in C_{i+1} = \pi_{i+1}(A) \cap \pi_{i+1}(B)$, se tiene que $x_{i+1} \in \pi_{i+1}(A)$ y $x_{i+1} \in \pi_{i+1}(B)$. Además,

(e) $f_i \mid \pi_{i+1}(A)(x_{i+1}) = f_i(x_{i+1}) = f_i \mid C_{i+1}(x_{i+1}) = x_i$ y

(f) $f_i \mid \pi_{i+1}(B)(x_{i+1}) = f_i(x_{i+1}) = f_i \mid C_{i+1}(x_{i+1}) = x_i$.

Por lo tanto de (a) y (e) (de (b) y (f), respectivamente) se tiene que

$$(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \varprojlim \{\pi_i(A), f_i \mid \pi_{i+1}(A)\}_{i=1}^{\infty}$$
$$((x_i)_{i=1}^{\infty} \in \varprojlim \{\pi_i(B), f_i \mid \pi_{i+1}(B)\}_{i=1}^{\infty}, \text{ respectivamente}).$$

Así, por el Lema 1.28, se tiene que $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in A$ y $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in B$. Concluimos que $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in A \cap B = C$.

Notemos que cada recíproca de las implicaciones de esta demostración es verdadera. Por lo tanto, si $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in C$, entonces $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \varprojlim \{C_i, f_i \mid C_{i+1}\}$. ■

El siguiente teorema nos da una manera de definir una función entre límites inversos y dicha función es llamada la función inducida.

Teorema 1.30. *[14, Teoremas (2.1.46)-(2.1.48)] Considere la situación ilustrada en el diagrama donde cada rectángulo es conmutativo (es decir, $\varphi_i \circ f_i = g_i \circ \varphi_{i+1}$ para cada $i \in \mathsf{N}$) y*

$$X_\infty = \varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ y } Y_\infty = \varprojlim \{Y_i, g_i\}_{i=1}^{\infty}$$

$$\begin{array}{rcccccccccccr}
& X_1 & \xleftarrow{f_1} & X_2 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & X_i & \xleftarrow{f_i} & X_{i+1} & \longleftarrow & \dots & X_\infty \\
\varphi_1 & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \varphi_2 & & & \varphi_i & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \varphi_{i+1} & & & \varphi_\infty \downarrow \\
& Y_1 & \xleftarrow[g_1]{} & Y_2 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & Y_i & \xleftarrow[g_i]{} & Y_{i+1} & \longleftarrow & \dots & Y_\infty
\end{array}$$

Ahora, definamos $\varphi_\infty \colon X_\infty \to Y_\infty$ para cada $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in X_\infty$, como sigue; $\varphi_\infty((x_i)_{i=1}^{\infty}) = (\varphi_i(x_i))_{i=1}^{\infty}$. Entonces (a)-(c) son válidas:

(a) φ_∞ *es una función suprayectiva de* X_∞ *en* Y_∞*;*

(b) Si cada φ_i *es continua, entonces* φ_∞ *es continua;*

(c) Si cada φ_i *es uno-uno, entonces* φ_∞ *es uno-uno.*

El siguiente lema muestra una base para el límite inverso.

Lema 1.31. *[14, Proposición 2.1.9.] Sean* $X_\infty = \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ *y*

$$\beta = \{\pi_i^{-1}(U) : U \text{ es abierto en } X_i \text{ y } i \in \mathsf{N}\}.$$

Entonces β *es una base para la topología de* X_∞*.*

Teorema 1.32. *[9, Lema 4]* ***(Teorema de Aproximación Interior)*** *Sean* Y *un espacio métrico compacto y* $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión de subconjuntos compactos de* Y *tal que para cada* $i \in \mathsf{N}$*, existen funciones continuas y suprayectivas* $g_i \colon Y_{i+1} \to Y_i$ *y* $\pi_i \colon Y \to Y_i$ *tal que* $g_i \circ \pi_{i+1} = \pi_i$*; si la sucesión* $\{\pi_i\}_{i=1}^{\infty}$ *converge uniformemente a la función identidad sobre* Y*, entonces* Y *es homeomorfo a* $\varprojlim \{Y_i, g_i\}_{i=1}^{\infty}$*.*

El siguiente teorema nos dice que para cierto tipo de subsucesión de la sucesión inversa, esta subsucesión converge al mismo límite.

Teorema 1.33. *[14, Teorema 2.1.38] Sea* $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión inversa de compactos, con funciones de ligadura suprayectivas cuyo límite inverso es* X_∞*, y sea* $\{j(i)\}_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión creciente de elementos de* N*. Si* $Y_\infty = \varprojlim \{Y_i, g_{i,(i+1)}\}$*, donde para cada* $i \in \mathsf{N}$*,* $Y_i = X_{j(i)}$ *y* $g_{i,(i+1)} = f_{j(i),j(i+1)}$*, entonces* Y_∞ *es homeomorfo a* X_∞*.*

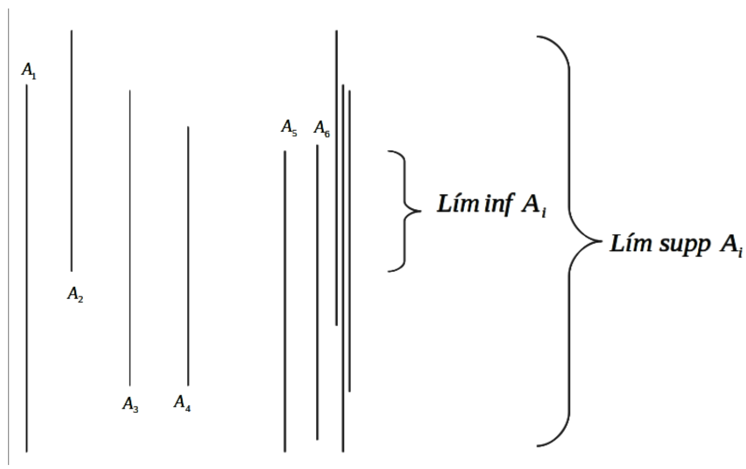
1.4. Límite de conjuntos

Algunos continuos son mejor examinados cuando se utilizan sucesiones de conjuntos. Por ejemplo, se necesitan sucesiones de conjuntos para realizar la construcción de la curva universal de Sierpiñski, o para el estudio de límites inversos. En especial, en este trabajo utilizaremos esto para construir la dendrita universal.

Definición 1.34. *Sean* X *un espacio topológico y* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión de subconjuntos de* X*, el* ***límite inferior*** *y el* ***límite superior*** *de la sucesión son los siguientes conjuntos, respectivamente.*

(1) $\lim \inf A_i = \{x \in X$: *para cada abierto* U *en* X *tal que* $x \in U$, $U \cap A_i \neq \emptyset$ *para toda* $i \in \mathsf{N}$ *excepto tal vez, una cantidad finita de* $i\}$.

(2) $\lim \sup A_i = \{x \in X$: *para cada abierto* U *en* X *tal que* $x \in U$, $U \cap A_i \neq \emptyset$ *para* $i \in \mathsf{F}$, *donde* $\mathsf{F} \subset \mathsf{N}$ *y* F *es infinito* $\}$.



Límites de conjuntos

Definición 1.35. *Sean* X *un espacio topológico,* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión de subconjuntos de* X*, el límite de la sucesión es* A *cuando*

$$\lim \inf A_i = A \text{ y } \lim \sup A_i = A.$$

lo cual se denota por $\lim A_i = A$.

Teorema 1.36. *[1, Teorema 20] Sean* X *un espacio métrico y,* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *y* $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ *dos sucesiones de subconjuntos cerrados y no vacíos de* X *tales que el* $\lim A_i = A$ *y* $\lim B_i = B$*, donde* A *y* B *son subconjuntos cerrados y no vacíos de* X*, entonces:*

(1) *si* $A_i \subset B_i$ *para cada* $i \in \mathsf{N}$, *entonces* $A \subset B$,

(2) $\lim A_i \cup B_i = A \cup B$,

(3) *si* $A_i \cap B_i \neq \emptyset$ *para cada* $i \in \mathsf{N}$, *entonces* $A \cap B \neq \emptyset$,

(4) *no siempre es cierto que* $\lim A_i \cap B_i = A \cap B$.

1.5. Teoremas de golpes en la frontera

En esta sección definimos la componente de un espacio topológico, abordamos el concepto de frontera de un conjunto, también definimos conexidad en pequeño y continuo de convergencia.

Definición 1.37. *Sean X un espacio topológico y A un subespacio de X. Entonces A es una **componente** de X si:*

(1) A es conexo.

(2) Si B es un subespacio conexo de X que contiene a A, entonces $B = A$

los puntos anteriores nos dicen que en realidad una componente es un subespacio conexo maximal.

A continuación algunos ejemplos de componentes de un espacio topológico:

Ejemplo 1.38. *Si consideramos $X = [0, 1] \cup [2, 3]$. En este espacio, cada intervalo es una componente.*

Ejemplo 1.39. *Sea $X = [0, 1]\times[0, 1]$, notemos que éste es un espacio de una sóla componente. Considere el conjunto $A = \{(x, \frac{1}{2}) : 0 \leq x \leq 1\}$. Observe que $X - A$ es la unión de dos componentes.*

Definición 1.40. *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. definimos **La frontera de** A (en X), denotada por $Fr_X(A)$ o simplemente por $Fr(A)$ como*

$$Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{X - A}.$$

Ahora, damos una lista de resultados conocidos como teoremas de golpes en la frontera.

Teorema 1.41. *[16, 5.4]* ***(Primer teorema de golpes en la frontera)*** *Sean X un continuo y A un subconjunto propio, abierto y no vacío de X. Si Z es una componente de $\overline{A}$, entonces $Z \cap Fr(A) \neq \emptyset$ (equivalentemente, puesto que $Z \subset \overline{A}$ y A es abierto, se tiene que $Z \cap (X - A) \neq \emptyset$).*

Teorema 1.42. *[16, 5.6]* ***(Segundo teorema de golpes en la frontera)*** *Sean X un continuo y A un subconjunto propio no vacío de X. Si Z es una componente de A, entonces $\overline{Z} \cap Fr(A) \neq \emptyset$ (equivalentemente, $\overline{Z} \cap \overline{X - A} \neq \emptyset$).*

Teorema 1.43. *[16, 5.7]* ***(Tercer teorema de golpes en la frontera)*** *Sean X un continuo, A un subconjunto propio no vacío de X y Z una componente de A.*

(1) Si A es abierto en X, entonces $\overline{Z} \cap (X - A) \neq \emptyset$, es decir, $\overline{Z} - A \neq \emptyset$.

(2) Si A es cerrado en X, entonces $Z \cap \overline{X - A} \neq \emptyset$.

Terminamos el listado de tres teoremas de golpes en la frontera. Veamos lo siguiente.

Teorema 1.44. *Sean X un continuo, C y D subcontinuos de X tales que $D \neq X$ y $C \subset D$. Si Z es una componente de $X - D$ tal que $\overline{Z} - Z \subset C$, entonces $Z \cup C$ es un continuo.*

Demostración. Sea $A = X - D$. Así, A es un subconjunto no vacío de X y $A \neq X$. Notemos que X, Z y A satisfacen las condiciones del Teorema 1.43. Luego, como A es abierto, $\emptyset \neq \overline{Z} \cap (X - A) = \overline{Z} \cap D$. Ahora, como $Z \subset X - D$, se tiene que $Z \cap D = \emptyset$. Puesto que

$$\emptyset \neq \overline{Z} \cap D = ((\overline{Z} - Z) \cup Z) \cap D = ((\overline{Z} - Z \cap D) \cup (Z \cap D)) = (\overline{Z} - Z) \cap D.$$

Se tiene que $(\overline{Z} - Z) \cap D \neq \emptyset$. Luego, $\overline{Z} - Z \neq \emptyset$. Además, como $\overline{Z} - Z \subset C$, se sigue que $\overline{Z} \cap C \neq \emptyset$. Así, por el Teorema 1.20, se tiene $\overline{Z} \cup C$ es continuo. Veamos que

$$\overline{Z} \cup C = Z \cup C.$$

Es claro que $Z \cup C \subset \overline{Z} \cup C$.
Como $\overline{Z} - Z \subset C$, se cumple que $\overline{Z} \cup C = [(\overline{Z} - Z) \cup Z] \cup C \subset [C \cup Z] \cup C = Z \cup C$. Por lo tanto, $\overline{Z} \cup C \subset Z \cup C$. Así, concluimos que $Z \cup C$ es continuo. ■

El siguiente es una consecuencia del Teorema 1.44.

Corolario 1.45. *Sean X un continuo y C un subcontinuo propio de X. Si Z es una componente de $X - C$, entonces $Z \cup C$ es un continuo.*

Demostración. Como Z es cerrado en $X - C$ se sigue que $Z = \overline{Z}^{X-C}$. Afirmamos que $\overline{Z} - Z \subset C$, de no ser así, existe $x \in \overline{Z} - Z$ tal que $x \notin C$, esto es, $x \in \overline{Z} \cap (X - Z)$ y $x \in X - C$, es decir $x \in \overline{Z} \cap (X - Z) \cap (X - C) = \overline{Z} \cap (X - C) \cap (X - Z) = \overline{Z}^{X-C} \cap (X - Z) = Z \cap (X - Z) = \emptyset$, pero esto es una contradicción. Por lo tanto, $\overline{Z} - Z \subset C$. Por último, supongamos que $D = C$ en el Teorema 1.44, notemos que se satisfacen las hipótesis con lo que concluimos que $Z \cup C$ es un continuo. □

Dos importantes conceptos en el estudio de la estructura de continuos son la noción de conexo en pequeño y el concepto de continuo de convergencia.

Definición 1.46. *Sean X espacio topológico y $p \in X$. El espacio X es* ***conexo en pequeño*** *en p si toda vecindad de p contiene una vecindad conexa de p.*

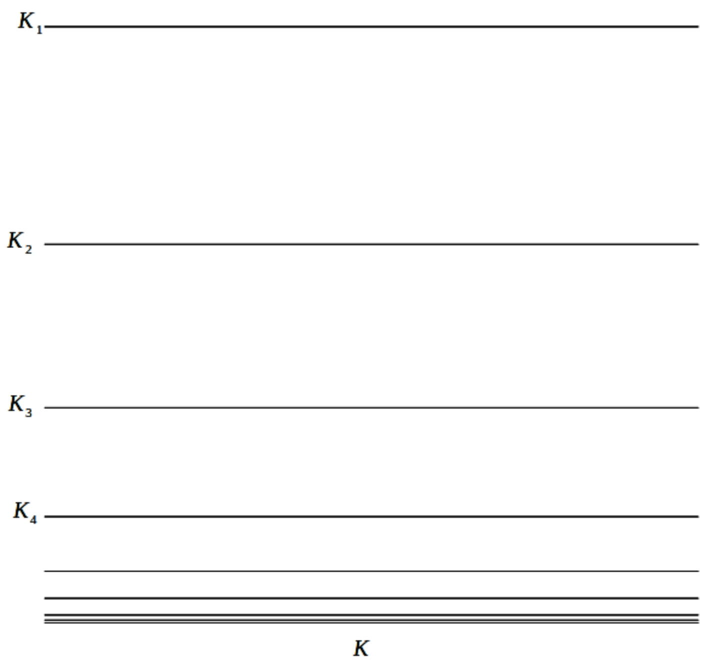
Veamos lo que es un continuo de convergencia.

Definición 1.47. *Sea X un espacio métrico. Un subconjunto no degenerado K de X es un* ***continuo de convergencia*** *de X, si existe una sucesión de subcontinuos de X $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$, donde para toda $i \in \mathsf{N}$, $\text{lím} K_i = K$ y $K \cap K_i = \emptyset$.*

Algunos continuos no contienen continuos de convergencia, por ejemplo; un arco, una curva cerrada simple, una 2-celda, entre otros. Algunos continuos que contienen continuos de convergencia son:

(a) Sea $\overline{W} = \{(x, sen(\frac{1}{x})) \in \mathsf{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$ para este continuo el continuo de convergencia es $[0,1]$ sobre el eje Y.

(b) Sea $\overline{R} = \cup\{K_i \subset \mathsf{R}^2 : K_i = [0,1] \times \{\frac{1}{i}\}$, donde $i \in \mathsf{N}\}$. Este conjunto contiene al continuo de convergencia dado por $[0,1]$ sobre el eje X. $\overline{R}$ es el representado de manera apróximada en la siguiente figura.



Continuo de convergencia.

El siguiente teorema es fundamental, éste nos da una condición suficiente para la existencia de un continuo de convergencia.

Teorema 1.48. *[16, 5.12] Sean X un continuo y*

$$N = \{x \in X : X \text{ no es conexo en pequeño en } x\}.$$

Si $p \in N$, entonces existe un continuo de convergencia K en X tal que $p \in K \subset N$.

Una observación para un espacio topológico que no es conexo es que puede ser escrito como la unión de más de uno pero sólo una cantidad numerable de subconjuntos no vacíos, cerrados y disjuntos; a continuación definimos los espacios topológicos que no pueden ser escritos de dicha manera.

Definición 1.49. *Un espacio topológico X es σ* ***conexo*** *si X no es la unión de más de uno y a lo más una cantidad infinita numerable de subconjuntos cerrados, no vacíos y disjuntos dos a dos.*

En particular los continuos gozan de esta propiedad, es decir:

Teorema 1.50. *[16, 5.16] Todo continuo es σ conexo.*

Ahora demos las demostraciones de las siguientes cinco proposiciones.

Proposición 1.51. *Sea U un subconjunto de un espacio topológico X. Entonces $\overline{U} - U = Fr(U)$ si y sólo si U es abierto en X.*

Demostración. Supongamos que $\overline{U} - U = Fr(U)$, se demostrará que U es abierto en X. Por la Definición 1.40 se debe cumplir la siguiente igualdad

(a) $Fr(U) = \overline{U} \cap \overline{X - U} = \overline{U} - U = \overline{U} \cap (X - U)$.

Veamos que $X - U = \overline{X - U}$. Supongamos que $X - U \neq \overline{X - U}$, existe al menos $x \in \overline{X - U}$ tal que $x \notin (X - U)$, entonces

$$x \in Fr(X - U) = \overline{X - U} \cap \overline{X - (X - U)} = \overline{X - U} \cap \overline{U},$$

así $x \in \overline{U}$, con lo que concluimos que $x \in \overline{U} \cap \overline{X - U}$ y $x \notin \overline{U} \cap X - U$, pero esto no es posible por (a), así concluimos que $X - U$ es cerrado, por lo tanto $X - (X - U) = U$ es abierto.

Ahora se demuestra el recíproco, supongamos que U es abierto y demostremos que $\overline{U} - U = Fr(U)$, como $U = int(U)$, entonces $X - U$ es cerrado, es decir, $X - U = \overline{X - U}$, por lo que siguiendo de la definición de frontera $Fr(U) = \overline{U} \cap \overline{X - U} = \overline{U} \cap X - U$ con lo que se concluye la demostración de (a) de esta proposición. $\square$

Proposición 1.52. *Si X es métrico compacto y K un continuo de convergencia entonces existe una sucesión $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ de subcontinuos de X disjuntos dos a dos tal que $\lim\limits_{n\to\infty} B_i = K$ y para cada $i \in \mathsf{N}$, $B_i \cap K = \emptyset$.*

Demostración. Como K es un continuo de convergencia, existe una sucesión $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ de subcontinuos de X tales que $\lim\limits_{i\to\infty} K_i = K$ y $K_i \cap K = \emptyset$. Veamos que existe $m_1 \in \mathsf{N}$ tal que $K_{m_1} \cap K_1 = \emptyset$. Supongamos, por el contrario, que para todo $i \in \mathsf{N}$, $K_1 \cap K_i \neq \emptyset$. Así, por el Teorema 1.36 (c), se tiene que $K_1 \cap K \neq \emptyset$, pero esto es una contradicción a la hipótesis. Por lo cual $K_1 \cap K_{m_1} = \emptyset$. Sea $K_{m_0} = K_1$.
Ahora, afirmamos que existe un elemento $m_2 \in \mathsf{N}$, tal que $(K_{m_1} \cup K_{m_o}) \cap K_{m_2} = \emptyset$. De no existir dicho elemento, para todo $i \in \mathsf{N}$, $(K_{m_1} \cup K_{m_o}) \cap K_i \neq \emptyset$. Por el Teorema 1.36 (c), se tiene que $(K_{m_1} \cup K_{m_o}) \cap K \neq \emptyset$, esto es,

$K_{m_1} \cap K \neq \emptyset$ o $K_{m_o} \cap K \neq \emptyset$ pero esto es una contradicción a la hipótesis, por lo tanto existe $m_2 \in \mathsf{N}$ tal que $(K_{m_1} \cup K_{m_o}) \cap K_{m_2} = \emptyset$. Continuando sucesivamente se tiene que existe una sucesión $\{K_{m_j}\}_{j=0}^{\infty}$ de subcontinuos de X, de tal manera que para cualesquiera $r \neq s$, $K_{m_r} \cap K_{m_s} = \emptyset$ y además lím $K_{m_j} = K$ y $K_{m_r} \cap K = \emptyset$. Con lo cual queda demostrada la Proposición. $\square$

Definición 1.53. *Sean X un espacio métrico y $A, B, C \subset X$. El conjunto C* ***separa*** *a A y B en X si existe una separación U y V de $X - C$ tal que $A \subset U$ y $B \subset V$.*

Proposición 1.54. *Si K es un continuo de convergencia en un espacio métrico X y $p, q \in K$, entonces no hay subconjuntos de K que puedan separar a $\{p\}$ y $\{q\}$ en X.*

Demostración. Sean K un continuo de convergencia de X y $p, q \in K$. Supongamos, por el contrario, que existe $A \subset K$ tal que separa a $\{p\}$ y $\{q\}$ en X. Luego, existen P y Q son abiertos de $X - A$, disjuntos y no vacíos tales que $p \in P$, $q \in Q$ y $X - A = P \cup Q$.
Por otro lado, como K es continuo de convergencia, existe una sucesión $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ de subcontinuos de X tal que *lím* $K_i = K$ y para cada $i \in \mathsf{N}$ se cumple que $K \cap K_i = \emptyset$ (de aquí, $K_i \subset (X - K) \subset (X - A)$). Como P es abierto en $X - A$, existe un abierto V en X tal que $P = V \cap (X - A)$. Como $p \in V$, existe un subconjunto finito F de N tal que para todo $i \in (\mathsf{N} - \mathsf{F})$, se tiene que $V \cap K_i \neq \emptyset$ (de aquí, $P \cap K_i \neq \emptyset$). Así, para todo $i \in (\mathsf{N} - \mathsf{F})$, ya que cada K_i es conexo y $K_i \subset P \cup Q$, se tiene que $K_i \subset P$. De manera semejante, como Q es abierto en $X - A$, existe un abierto W en X tal que $Q = W \cap (X - A)$. Como $q \in W$, existe un subconjunto finito G de N tal que para todo $i \in (\mathsf{N} - \mathsf{G})$, se tiene que $W \cap K_i \neq \emptyset$ (de aquí, $Q \cap K_i \neq \emptyset$). Así, para todo $i \in (\mathsf{N} - \mathsf{G})$, ya que cada K_i es conexo y $K_i \subset P \cup Q$, se tiene que $K_i \subset Q$. Por lo tanto, para $i \in (\mathsf{N} - \{\mathsf{F} \cup \mathsf{G}\})$, se tiene que $K_i \subset P \cap Q$, esto es una contradicción ya que P y Q son una sepación de $X - A$. $\square$

1.6. Puntos de no corte y puntos de corte

El teorema más importante de esta sección es una caracterización de arco (vea el Teorema 1.65), de modo que los siguientes esfuerzos se harán para probar tal resultado.

Cuando estemos pensando en una relación binaria como *orden parcial*, o que un conjunto sea *linealmente ordenado*, o que tenga un *orden total*, etc., lo entenderemos como, por ejemplo, en [7, (0.B.7)-(0.B.11)].

Definición 1.55. *Dos conjuntos totalmente ordenados* $(X, <)$ *y* $(Y, \prec)$ *son del* ***mismo tipo de orden*** *si existe una función biyectiva* $f\colon X \to Y$ *tal que para cualesquiera* $x, y \in X$*, se tiene que* $x < y$ *si y sólo si* $f(x) \prec f(y)$ *a tal función se le conoce como* ***isomorfismo de orden****.*

Teorema 1.56. *[3, Teorema 1.1.2] Si* D *es un conjunto totalmente ordenado (con orden* $<$*) y numerable tal que*

(1) D *no posee un elemento máximo ni mínimo respecto a su orden y*

(2) Para cualquiera $a, b \in D$*, existe* $c \in D$ *tal que* $a < c < b$*.*

Entonces D *es del mismo tipo de orden que* $\mathsf{Q} \cap (0, 1)$ *con el orden usual heredado de* R*.*

Teorema 1.57. *[3, Teorema 1.1.1] Si* X *y* Y *son dos espacios topológicos totalmente ordenados, entonces todo isomorfismo de orden es un homeomorfismo relativo a la topología de orden de* X *en la topología de orden de* Y*.*

Definición 1.58. *Sean* A *y* B *dos subconjuntos no vacíos de* R*, se dice que* (A, B) *es una* ***cortadura*** *de* R *si*

(1) $A \cap B = \emptyset$,

(2) $A \cup B = \mathsf{R}$ *y*

(3) Para cualquier $a \in A$ *y para cualquier* $b \in B$*, se tiene que* $a < b$ *(en adelante esta propiedad la denotamos como* $A < B$*).*

Teorema 1.59. *[2, Propiedad de Cortadura 7.2] Si* (A, B) *es una cortadura de* R*, entonces existe un único elemento* $y \in \mathsf{R}$ *tal que*

(1) para cualquier $a \in A$*, se tiene que* $a \leq y$ *y*

(2) para cualquier $b \in B$*, se tiene que* $y \leq b$*.*

Varios de los resultados en la teoría de los continuos tienen que ver con la noción que sigue.

Definición 1.60. *Sean X un espacio topológico conexo y $p \in X$. Si $X - \{p\}$ es conexo, entonces p es llamado* ***punto de no corte*** *de X. Si $X - \{p\}$ no es conexo, entonces p es llamado* ***punto de corte*** *de X.*

Por ejemplo, sea A un arco de p a q. El arco A tiene sólo dos puntos de no corte, a saber, p y q, y tiene una cantidad no numerable de puntos de corte que son los elementos de $A - \{p, q\}$. Un ejemplo de un continuo que no tiene puntos de corte es la circunferencia unitaria S^1.

Demos las siguientes nociones que, también, serán de utilidad para demostrar el mencionado Teorema 1.65.

Definición 1.61. *Sean X un espacio topológico y $p, q \in X$ con $p \neq q$. Definamos al conjunto $\mathbf{S(p,q)}$ como sigue:*

$$S(p,q) = \{p,q\} \bigcup \{z \in X : \{z\} \text{ separa a } \{p\} \text{ y a } \{q\} \text{ en } X\}.$$

Teorema 1.62. *[16, 6.12] Sean X un espacio topológico y $p, q \in X$ con $p \neq q$.*

(1) Para cualquier $x \in S(p,q) - \{p,q\}$, existen conjuntos únicos (que dependen de x) P_x y Q_x tales que

$$S(p,q) - \{x\} = P_x \mid Q_x, \text{ donde } p \in P_x \text{ y } q \in Q_x.$$

(2) Si X satisface el axioma de separación T_1, entonces P_x y Q_x son abiertos en $S(p,q)$.

En seguida se define una relación binaria $<_s$ para el conjunto $S(p,q)$.

Definición 1.63. *Sean X un espacio topológico conexo y $p, q \in X$ con $p \neq q$. El* ***orden de separación*** *para $S(p,q)$, denotado por $<_s$, es definido como sigue:*

(1) Para cualquier $z \in S(p,q) - \{p\}$, se tiene que $p <_s z$.

(2) Para cualquier $z \in S(p,q) - \{q\}$, se tiene que $z <_s q$.

(3) Para cualquier $x, z \in S(p,q) - \{p,q\}$, se tiene que $z <_s x$ si y sólo si $z \in P_x$, donde P_x es como en (1) del Teorema 1.62.

Teorema 1.64. *[16, 6.16] Sea (X, τ) un espacio topológico, compacto, conexo, no degenerado y que satisface el axioma de separación T_1. Si X contiene exactamente dos puntos que no son de corte, entonces existen $p, q \in X$ tales que $X = S(p, q)$ y τ es igual a la topología determinada por el orden de separación.*
Inversamente: Si τ es la topología de orden obtenido por algún orden simple $<$ en X, entonces X tiene exactamente dos puntos que no son de corte.

Teorema 1.65. *Sea X un continuo. Entonces X es un arco si y sólo si X contiene exactamente dos puntos que no son de corte.*

Demostración. Supongamos que p y q son los únicos puntos de no corte de un continuo X. Demostremos que X es un arco. En virtud del Teorema 1.64, se tiene que $X = S(p, q)$ y la topología de X es la misma que la proporcionada por el orden de separación.

Como X es continuo, existe un subconjunto denso numerable D de X. Notemos que D está totalmente ordenado (con el orden heredado de X). Veamos que D no tiene elemento máximo ni mínimo: para cada $d \in D$, se tiene que $[p, d)$ es abierto en $S(p, q)$ y como D es denso, existe $c \in D$ tal que $c \in [p, d)$, es decir, $c <_s d$. Por lo cual D no tiene elemento mínimo; de manera similar podemos demostrar que D no tiene elemento máximo.

Como D es denso y X es conexo, dados $d_1, d_2 \in D$ con $d_1 <_s d_2$, existe $d_3 \in D$ tal que $d_1 <_s d_3 <_s d_2$.

Luego, por los teoremas 1.56 y 1.57, existe un homeomorfismo f que preserva el orden
$$f : D \to \mathbf{Q} \cap (0, 1).$$
Con el fin de poder definir la regla de correspondencia de una función de X en $[0, 1]$ (que será el homeomorfismo buscado $F \colon X \to [0, 1]$), veamos que para cada $x \in X - \{p, q\}$ existe un único $F(x) \in (0, 1)$. Para esto sea $x \in X = S(p, q)$ con $x \neq p$ y $x \neq q$, por el Teorema 1.62, existen P_x y Q_x abiertos en X tales que $X - \{x\} = P_x \mid Q_x$. Notemos que en virtud del orden se tiene $P_x <_s Q_x$. De lo anterior, $f(P_x \cap D)$ y $f(Q_x \cap D)$ es una separación de $\mathbf{Q} \cap (0, 1)$ que se puede extender a una separación en el intervalo $(0, 1)$ de la siguiente manera: Sea
$$A = \{t \in (0, 1) \colon \text{ para toda } r \in f(Q_x \cap D), \text{ se tiene que } t < r\},$$
por construcción notemos que $A < ((0, 1) - A)$ y por la propiedad de la cortadura de Dedekind (vea el Teorema 1.59), existe un único $F(x) \in (0, 1)$ tal que

(1) para cualquier $a \in A$, se tiene que $a \leq F(x)$ y

(2) para cualquier $b \in ((0,1) - A)$, se tiene que $F(x) \leq b$.

Definamos $F\colon X \to [0,1]$ como sigue: para cada $x \in X - \{p,q\}$ (como acabamos de ver) a x le asignamos $F(x)$; $F(p) = 0$ y $F(q) = 1$. De esta manera, F es una función.

Para ver que F es un homeomorfismo, por el Teorema 1.57, basta demostrar que F es un isomorfimo de orden.
Veamos que F es suprayectiva. Sea $t \in (0,1)$. Luego, los conjuntos $G = (0,t)$ y $H = [t,1)$ forman una cortadura en $(0,1)$. Sean $R_1 = G \cap \mathsf{Q}$ y $R_2 = H \cap \mathsf{Q}$, como

$$f : D \to R_1 \cup R_2 \text{ es un homeomorfismo,}$$

se tiene que $f^{-1}(R_1)$ y $f^{-1}(R_2)$ forman una separación de D.

Sea $x_t = f^{-1}(t)$, por el Teorema 1.62, existen, únicos, P_{x_t} y Q_{x_t} abiertos en X tales que $X - \{x_t\} = P_{x_t} \mid Q_{x_t}$. Notemos que en virtud del orden se tiene $P_{x_t} <_s Q_{x_t}$ y que $D \cap P_{x_t}$ y $D \cap Q_{x_t}$ forman una separación de D.

Por lo cual:

$$f^{-1}(R_1) = D \cap P_{x_t} \quad \text{y} \quad f^{-1}(R_2) = D \cap Q_{x_t}.$$

De acuerdo a la definición de F, se tiene que $F(x_t) = t$. Por lo tanto, F es suprayectiva.

Después de todos estos argumentos, no es difícil convencerse que F es inyectiva y que cumple que si $x, y \in S(p,q) - \{p,q\}$ son tales que $x <_s y$, entonces $F(x) < F(y)$. Por lo tanto, $F\colon X \to [0,1]$ es un isomorfismo de orden.

Con todo esto, F es un homeomorfismo y así, X es un arco.

Recíprocamente, como X es un arco, X es homeomorfo a $[0,1]$. Notemos que los elementos de $(0,1)$ son puntos de corte y solo 0 y 1 son puntos de no corte. Como ser punto de corte o de no corte es un invariante topológico, X contiene exactamente dos puntos que no son de corte. □

Corolario 1.66. *Sean X_1 y X_2 arcos con puntos extremos p_1, q_1 y p_2, q_2, respectivamente y sean D_1 y D_2 subconjuntos densos numerables de $X_1 - \{p_1, q_1\}$ y $X_2 - \{p_2, q_2\}$, respectivamente, entonces D_1 y D_2 son homeomorfos y, además, existe un homeomorfismo $h\colon X_1 \to X_2$ tal que $h(D_1) = D_2$, $h(p_1) = p_2$, y $h(q_1) = q_2$.*

Demostración. Utilizando los argumentos desarrollados en la prueba del Teorema 1.65, existen homeomorfismos

$$F_1 \colon X_1 \to [0,1] \quad \text{y} \quad F_2 \colon X_2 \to [0,1]$$

tales que $F_1(D_1)$ y $F_2(D_2)$ son homeomorfos a $[0,1] \cap \mathsf{Q}$ y $F_1(p_1) = 0$, $F_1(q_1) = 1$, $F_2(p_2) = 0$ y $F_2(q_2) = 1$. Finalmente, $h = F_2^{-1} \circ F_1$ satisface los requerimientos de este corolario. □

Al principio de esta sección hablamos de los puntos que no son de corte. En algunos continuos, estos puntos tienen un nombre especial, puntos extremos. Veamos cuales son las condiciones que se deben cumplir para llamarle un punto extremo.

Definición 1.67. *Sea X un continuo. Un punto p de X es llamado* ***punto extremo*** *de X si para todo V abierto en X con $p \in V$ existe U abierto en X tal que $p \in U \subset V$ y $|Fr(U)| = 1$.*

Definición 1.68. *Sean X un espacio métrico conexo y $C \subset X$. El conjunto C es un* ***corte*** *de X, si $X - C$ es disconexo.*

Notemos que el conjunto $A = \{(x, \frac{1}{2}) : 0 \leq x \leq 1\}$ es un corte para el conjunto $X = [0,1] \times [0,1]$.

Lema 1.69. *Sea X un espacio métrico conexo separable. Entonces*

(1) Si $\mathfrak{C} = \{C_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una colección no numerable de conjuntos de corte (para cada $\alpha \in A$, tenemos que $X - C_\alpha = U_\alpha \mid V_\alpha$) disjuntos dos a dos y cerrados en X, entonces existe $\alpha_1 \in A$ tal que

$$U_{\alpha_1} \cap (\cup\mathfrak{C}) \neq \emptyset \quad y \quad V_{\alpha_1} \cap (\cup\mathfrak{C}) \neq \emptyset.$$

(2) Si K es un continuo de convergencia de X, entonces K no contiene una colección no numerable de conjuntos de corte, disjuntos dos a dos y cerrados en X. Notemos que esto implica que a lo más una cantidad numerable de puntos de K son puntos de corte de X; así K contiene una cantidad no numerable de puntos de no corte de X.

(3) Si Y es una colección no numerable de puntos de corte de X, entonces existen $y_1, y_2 \in Y$ que son separados en X por un tercer punto $y_3 \in Y$.

(4) Sea Y el conjunto de todos los puntos de corte de X. Si Z es un subconjunto conexo de X, entonces todos excepto a lo más una cantidad numerable de puntos de $Y \cap Z$ son puntos de corte de Z.

Demostración. *(1)* Supongamos, por el contrario, que para cada $\alpha \in A$,

$$U_\alpha \cap (\cup\mathfrak{C}) = \emptyset \quad \text{o} \quad V_\alpha \cap (\cup\mathfrak{C}) = \emptyset.$$

Luego, existe B subconjunto de A, no numerable, tal que para cada $\beta \in B$: $U_\beta \cap (\cup_{\alpha\in B} C_\alpha) = \emptyset$ o para cada $\beta \in B$: $V_\beta \cap (\cup_{\alpha\in B} C_\alpha) = \emptyset$.

Sea $\mathfrak{C}_B = \{C_\beta\}_{\beta\in B}$ y supongamos que para cada $\beta \in B$, $V_\beta \cap (\cup\mathfrak{C}_B) = \emptyset$, es decir, $(\cup\mathfrak{C}_B) \subset X - V_\beta = U_\beta \cup C_\beta$. Así, para cada $\beta \in B$, tenemos que

$$[(\cup\mathfrak{C}_B) - C_\beta] \subset U_\beta.$$

Veamos que si $\beta_1, \beta_2 \in B$ con $\beta_1 \neq \beta_2$, entonces

$$X = (U_{\beta_1} \cup U_{\beta_2}) \cup (V_{\beta_1} \cap V_{\beta_2}).$$

En efecto, sea $x \in X$. Consideremos los dos casos posibles.
(a) Existe $\beta_0 \in B : x \in C_{\beta_0}$. Supongamos que $\beta_0 \neq \beta_1$. Luego, $x \in C_{\beta_0} \subset [(\cup\mathfrak{C}_B) - C_{\beta_1}] \subset U_{\beta_1} \subset (U_{\beta_1} \cup U_{\beta_2}) \cup (V_{\beta_1} \cap V_{\beta_2})$.
(b) Para cada $\beta \in B : x \notin C_\beta$. Así, $x \in X - C_{\beta_1} = U_{\beta_1} \mid V_{\beta_1}$. Si $x \in U_{\beta_1}$, terminamos. Supongamos que $x \in V_{\beta_1}$. Notemos que $x \in X - C_{\beta_2} = U_{\beta_2} \mid V_{\beta_2}$. En caso de que $x \in U_{\beta_2}$, terminamos. Si $x \in V_{\beta_2}$, entonces $x \in V_{\beta_1} \cap V_{\beta_2} \subset (U_{\beta_1} \cup U_{\beta_2}) \cup (V_{\beta_1} \cap V_{\beta_2})$.

Con todo esto, de *(a)* y *(b)*, tenemos que $X \subset (U_{\beta_1} \cup U_{\beta_2}) \cup (V_{\beta_1} \cap V_{\beta_2})$.

Notemos que si $\beta_1, \beta_2 \in B$ con $\beta_1 \neq \beta_2$, entonces $V_{\beta_1} \cap V_{\beta_2} = \emptyset$. Porque de lo contrario, tendremos que $X = (U_{\beta_1} \cup U_{\beta_2}) \mid (V_{\beta_1} \cap V_{\beta_2})$, lo cual es una contradicción ya que X es conexo. Por lo tanto, tenemos demostrado *(1)*.

(2) Supongamos que K es un continuo de convergencia de X y que K contiene una colección $\mathfrak{C}$ no numerable de conjuntos cerrados en X que cortan a X y disjuntos dos a dos. Por el inciso *(1)* de este lema, existe $C \in \mathfrak{C}$ tal que $X - C = U \mid V$, $U \cap (\cup\mathfrak{C}) \neq \emptyset$ y $V \cap (\cup\mathfrak{C}) \neq \emptyset$. Sean $p \in U \cap (\cup\mathfrak{C})$ y $q \in V \cap (\cup\mathfrak{C})$. Así, $p, q \in K$. Por lo tanto, C es un subconjunto de K que separa a p y q, esto contradice la Proposición 1.54. Por lo tanto, no puede existir dicha familia $\mathfrak{C}$. Con lo cual ya demostramos *(2)*.

(3) Supongamos que Y es una colección no numerable de puntos de corte de X, es decir, $Y = \{y\}_{y \in Y}$. Por el inciso *(1)* de este lema, existen U, V y $y_3 \in Y$ tales que $Y - \{y_3\} = U \cup V$. Sean $y_1 \in U$ y $y_2 \in V$. Así, demostramos *(3)*.

(4) Sea Y el conjunto de todos los puntos de corte de X. Supongamos que R es la colección de todos los puntos de no corte de Z contenidos en $Y \cap Z$. Además, supongamos, por el contrario, que R no es numerable. Como $R \subset Y$, tenemos que R es una colección no numerable de puntos de corte de X. Por el inciso *(3)*, existen $y_1, y_2 \in R$ que son separados en X por un tercer punto $y_3 \in R$. Es decir, $X - \{y_3\} = U \mid V$ tal que $y_1 \in U$ y $y_2 \in V$. Notemos que y_3 es un punto de no corte de Z, de donde $Z - \{y_3\}$ es conexo. Por lo tanto, $Z - \{y_3\} \subset U$ o $Z - \{y_3\} \subset V$. Supongamos que $Z - \{y_3\} \subset U$. Como $y_2 \in Z - \{y_3\}$, tenemos que $y_2 \in U \cap V$, esto es una contradicción. De donde *(4)* está demostrado. □

1.7. Continuos localmente conexos

El concepto actual de conexidad local se debe a G. Peano (1858-1932). Alrededor de 1913 H. Hahn (1879-1934) y S. Mazurkiewicz (1888-1945) obtuvieron, independientemente, un resultado que caracterizó a la conexidad local. Los primeros resultados relacionados con este concepto también fueron obtenidos por P. Nalli, S. Mazurkiewicz y H. Hahn. En esta sección daremos algunos ejemplos y propiedades básicas de espacios localmente conexos.

Definición 1.70. *Un espacio métrico X es* ***localmente conexo en*** $p \in X$*, si para cada vecindad V de p existe un subconjunto abierto y conexo U de X tal que $p \in U \subset V$. Decimos que X es* ***localmente conexo*** *si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.*

Proposición 1.71. *Un espacio topológico es localmente conexo si y solo si cada componente de un conjunto abierto es un conjunto abierto.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio topológico localmente conexo. Sea U un subconjunto abierto de X y sea C una componente de U. Para cada punto $x \in C$, existe un abierto y conexo de V_x tal que $x \in V_x \subset U$. Entonces $C \cup V_x$ es un subconjunto conexo de U. Así, $V_x \subset C$. Es decir, cada punto de C es un punto interior de C. Por lo cual se concluye que C es abierto.

Inversamente, sean $x \in X$ y U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$. Por hipótesis, la componente C de U es abierta, entonces C es un abierto y conexo tal que $x \in C \subset U$, esto es, X es localmente conexo. $\square$

Proposición 1.72. *Un espacio topológico X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos si y sólo si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos.*

Demostración. Sea X localmente conexo en cada punto, esto es, para cada $x \in X$ y cada vecindad V de x, existe un subconjunto abierto y conexo U de X tal que $x \in U \subset V$. Notemos que U es una vecindad conexa que contiene a x y está contenida en V. Por lo tanto X es conexo en pequeño en X.

Ahora supongamos que X es conexo en pequeño en cada punto. Sea U un un subconjunto abierto de X, no vacío y C una componente de U. Sea $x \in C \subset U$. Por hipótesis, existe una vecindad conexa W de x tal que $x \in IntW \subset W \subset U$ y de aqui que $W \subset C$. Así, $x \in intC$, se tiene que C es abierto y conexo que contiene a x. Por lo tanto X es localmente conexo. $\square$

Ejemplo 1.73. *Un arco, una curva cerrada simple y una $2-$celda, son ejemplos de continuos localmente conexos.*

Ejemplo 1.74. *Considere $P = ([0,1] \times 0) \cup (A \times [0,1])$, donde $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathsf{N}\} \cup \{0\}$. Conocemos a P como el **Peine**, es un continuo que es conexo y no es localmente conexo.*

Ejemplo 1.75. *Notemos que no todo subcontinuo de un continuo localmente conexo es localmente conexo. Sea $W = \{(x, sen(\frac{1}{x})) \in \mathsf{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$. No es difícil probar que $\overline{W}$ es un subcontinuo de $[0,1] \times [0,1]$ que no es localmente conexo.*

El siguiente concepto se debe a Sierpiñski [18].

Definición 1.76. *Sea X un espacio métrico. Un subconjunto no vacío Y de X tiene la **propiedad** **S** si para cada $\varepsilon > 0$, existe un número finito de subconjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de Y tales que $Y = \cup_{i=1}^{n} A_i$ donde para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, diám$(A_i) < \varepsilon$.*

En el siguiente teorema decimos que si X es un espacio métrico compacto, y tiene la propiedad S esto es equivalente a que el espacio es localmente conexo.

Teorema 1.77. *[16, 8.4] Un espacio métrico, compacto y no vacío X es un espacio localmente conexo si y solo si X tiene la propiedad S.*

El siguiente teorema muestra que para un espacio métrico X que tiene la propiedad S, podemos encontar una cantidad finita de conjuntos conexos talque su unión es S y tales que tienen la propiedad S.

Teorema 1.78. *[16, 8.9] Si X es un espacio métrico y tiene la propiedad S, entonces para todo $\varepsilon > 0$, X es la unión de una cantidad finita de conjuntos conexos tales que cada uno tiene la propiedad S y el diámetro de ellos es menor que ε; estos conjuntos pueden ser escogidos abiertos en X o cerrados en X.*

La demostración del siguiente teorema está basada en los teoremas anteriormente mencionados.

Teorema 1.79. *[16, 8.10] Si (X, d) es un espacio métrico, entonces, para todo $\varepsilon > 0$, X es la unión finita de continuos localmente conexos con diámetro menor que ε.*

Definición 1.80. *Un espacio métrico X es **uniformemente localmente arco conexo,** si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $x, z \in X$ con $x \neq z$ si $d(x, z) < \delta$, entonces existe un arco $A \subset X$ tal que diám$(A) < \varepsilon$ y A tiene como puntos extremos a x y z.*

Una definición íntimamente relacionada con la noción de conexidad local es la siguiente.

Definición 1.81. *Sea X un espacio topológico. X, es **arco conexo** si para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe un arco A en X de x a y.*

El siguiente resultado nos dice que los continuos localmente conexos son arco conexos. Notemos que la inversa no siempre es verdadera un ejemplo de esto es el peine (Ejemplo 1.74).

Teorema 1.82. *[16, 8.23] Todo continuo localmente conexo es arco conexo.*

Todo espacio topológico arco conexo es conexo, pero la inversa no siempre es verdadera, para la inversa debemos pedir algo más a un espacio conexo. Veamos la siguiente definición.

Definición 1.83. *Sean X un espacio topológico y $p \in X$. Entonces X es **localmente arco conexo en** p, si toda vecindad de p contiene una vecindad arco conexa de p. Así X es **localmente arco conexo** si es localmente arco conexo en todo punto de X.*

Teorema 1.84. *[16, 8.25] Todo subconjunto abierto de un continuo localmente conexo es localmente arco conexo.*

Teorema 1.85. *[16, 8.26] Todo subconjunto abierto y conexo de un continuo localmente conexo es arco conexo.*

Veamos la siguiente proposición.

Proposición 1.86. *[16, 8.30] Todo continuo localmente conexo es uniformemente localmente arco conexo.*

Definición 1.87. *Sean X un espacio topológico, $Z \subset X$ y $p \in Z$. Entonces p es **arco accesible** en $X - Z$ si existe un arco en $(X - Z) \cup \{p\}$ que tiene a p como punto extremo.*

Proposición 1.88. *[16, 8.32.a] Si X es un continuo localmente conexo y U es un subconjunto abierto de X tal que tiene la propiedad S, entonces todo punto de la frontera de U es arco accesible en U.*

Proposición 1.89. *[16, 8.45] Si X es un continuo localmente conexo y p es un punto de no corte de X, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe U abierto y conexo en X tal que $p \in U$, diám$(U) < \varepsilon$ y $X - U$ es conexo.*

Definición 1.90. *Sean X y Y espacios topológicos y sea f una función que va de X en Y, decimos que f es **monótona** si para cada $y \in Y$ se tiene que $f^{-1}(y)$ es conexo.*

El siguiente lema es una caracterización de funciones monótonas, el cual será herramienta para demostrar la Proposición 1.92.

Lema 1.91. *[14, 2.1.12] Sea f una función continua para un espacio métrico compacto X sobre un espacio métrico Y, entonces f es monótona si y sólo si para todo subconjunto conexo A de Y, $f^{-1}(A)$ es conexo.*

En la siguiente proposición vemos que el límite inverso de continuos localmente conexos con funciones de ligadura monótonas y suprayectivas es localmente conexo y además se demuestra que si las funciones de ligadura son monótonas entonces las funciones proyección también lo son.

Proposición 1.92. *Sea* $X_\infty = \varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$ *donde cada* X_i *es un continuo localmente conexo y cada* f_i *es una función monótona y suprayectiva, entonces* X_∞ *es un continuo localmente conexo.*

Demostración. Que el espacio X_∞ es un continuo, es inmediato por el Teorema 1.25. Veamos que X_∞ es localmente conexo. Sean $(x_n)_{n=1}^\infty \in X_\infty$, y U un subconjunto abierto de X_∞ tal que $(x_n)_{n=1}^\infty \in U$. Por la Proposición 1.31, existe $N \in \mathsf{N}$ y un subconjunto U_N de X_N tal que

$$(x_n)_{n=1}^\infty \in \pi_N^{-1}(U_N) \subset U.$$

Como X_N es un continuo localmente conexo, existe un subconjunto abierto y conexo V_N de X_N tal que $x_N \in V_N \subset U_N$. De aquí,

$$(x_n)_{n=1}^\infty \in \pi_N^{-1}(V_N) \subset \pi_N^{-1}(U_N) \subset U.$$

Ahora demostrararemos que cada función proyección es monótona. Sean $m \in \mathsf{N}$ y $x_m \in X_m$, y para cada $n \in \mathsf{N}$ sea

$$Z_n = \begin{cases} (f_{nm})^{-1}(x_m), & \text{si } n \geq m; \\ \{f_{mn}(x_m)\}, & \text{si } n < m. \end{cases}$$

Tenemos que Z_n es subcontinuo de X_n, así construimos $\{Z_n, f_{(n+1)n} \mid Z_{n+1}\}_{n=1}^\infty$ una sucesión inversa de continuos. Luego, por la Proposición 1.25, tenemos que $Z = \varprojlim\{Z_n, f_n \mid Z_{n+1}\}_{n=1}^\infty$ es un subcontinuo de X_∞.

Veamos que $Z = \pi_m^{-1}(x_m)$, para esto sea $(y_n)_{n=1}^\infty \in \pi_m^{-1}(x_m)$. Luego, $y_m = x_m$. Para cada $n < m$, $y_n = f_{mn}(x_m)$ y para cada $n > m$, $y_n \in f_{nm}^{-1}(x_m) = Z_n$. Por lo tanto $(y_n)_{n=1}^\infty \in Z$. Por lo tanto, $pi_m^{-1}(x_m) \subset Z$.

Como $\pi_m(Z) = Z_m = \{x_m\}$, tenemos que $Z \subset \pi_m^{-1}(x_m)$. Por lo tanto $Z = \pi_m^{-1}(x_m)$. Por lo atnto, π_m es monótona.

Así, $\pi_N^{-1}(V_N)$ es conexo y abierto en X_∞, esto por la Proposición 1.91. Por lo tanto, X_∞ es localmente conexo. □

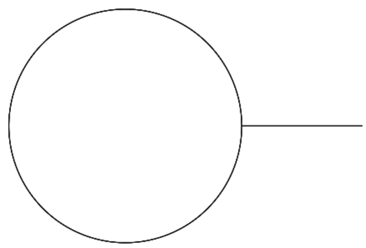
1.8. Gráficas

Las *Gráficas,* en general, tienen diversas caracterizaciones, pero en este trabajo sólo mencionaremos tres de ellas. A continuación damos las nociones de gráfica y el orden de un conjunto en un espacio topológico.

Definición 1.93. *Una **gráfica** es un continuo que puede escribirse como la unión finita de arcos tales que cualesquiera dos de ellos o son ajenos o se intersectan en una cantidad finita de puntos.*

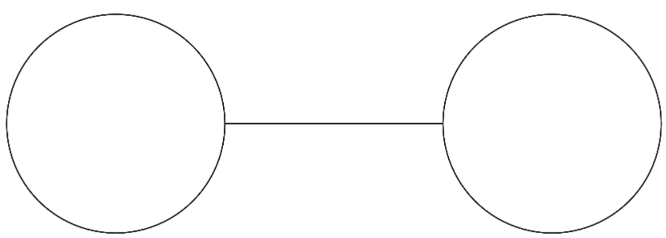
Cabe mencionar que todo espacio topológico homeomorfo a los espacios que mencionaremos en seguida son gráficas:

Ejemplo 1.94. *Sea $X = S^1 \cup ([1, 2] \times \{0\})$. Este continuo es llamado Paleta y es una gráfica.*



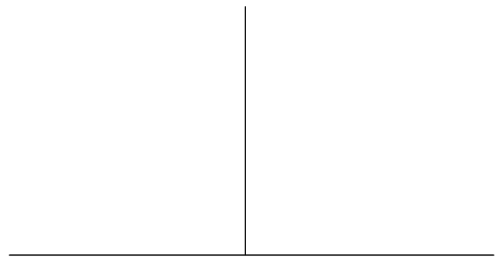
Paleta.

Ejemplo 1.95. *Consideremos los puntos del plano cartesiano $q_1 = (-2, 0)$, y $q_2 = (2, 0)$ y el intervalo $[-1, 1] \times \{0\}$. Sean R y S dos circunferencias de radio uno, centradas en los puntos q_1 y q_2, respectivamente. Ahora, sea $X = R \cup S \cup ([-1, 1] \times \{0\})$. Este continuo es llamado la Pesa y también es un ejemplo de gráfica.*



Pesa.

Ejemplo 1.96. *El siguiente ejemplo es la unión de tres arcos que sólo se intersectan en un punto. A este continuo se le conoce como Triodo Simple.*



Triodo simple.

Tratando de dar una definición de *orden*, Z. Janiszewski usó el concepto de continuo irreducible introducido en 1909 por L. Zoretti (vea [6]). Actualmente la definición del orden de un conjunto en un espacio topológico X es dada por la siguiente definición.

Definición 1.97. *Sean X un espacio topológico, $A \subset X$ y β un número cardinal. A* ***es de orden*** *menor o igual que β, si para cada abierto V de X, existe U abierto de X tal que $A \subset U \subset V$ y $|fr(U)| \leq \beta$. Además A* ***es de orden igual*** *a β en X denotado como $ord(A,X) = \beta$ si $ord(A,X) \leq \beta$ y $ord(A,X) \quad \alpha$ para todo $\alpha < \beta$.*

Notemos que si $A = \{p\}$ escribiremos $ord(p,X)$ en vez de $ord(\{p\},X)$. Claramente, $ord(p,X) = 1$ si y sólo si p es un punto extremo de X.

Proposición 1.98. *[16, 9.4] Sea X es un continuo. Si para toda $x \in X$ se tiene que $ord(x,X) < \aleph_0$, entonces todo subcontinuo de X es un continuo localmente conexo. Toda gráfica X tiene $ord(x,X) < \aleph_0$ para toda $x \in X$, así todo subcontinuo de una gráfica es localmente conexo.*

Teorema 1.99. *[16, 9.10] Un continuo X es una gráfica si y sólo si cumple las siguientes condiciones:*

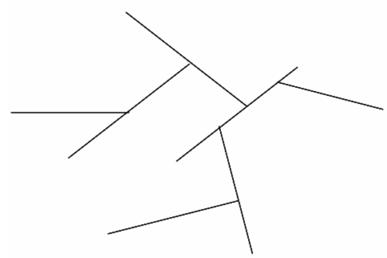
(1) Para toda $x \in X$, $ord(x,X) < \aleph_0$.

(2) Para todo pero sólo una cantidad finita de $x \in X$, $ord(x,X) \leq 2$.

Ahora definamos árbol, se dará cuenta que la familia de los árboles es una subfamilia de la familia de las gráficas. Para el desarrollo de este trabajo es necesario tener la noción de árbol ya que en el siguiente capítulo veremos como aproximar una dendrita por árboles. Enunciemos una caracterización de árbol y curva cerrada simple las cuales serán auxiliares en el siguiente capítulo.

Definición 1.100. *Un **árbol** es una gráfica que no contiene curvas cerradas simples.*

Ejemplo 1.101. *En la siguiente figura esquematizamos lo que es un árbol, observe que éste es una gráfica.*



Árbol.

En el periodo 1916-1920 W. Sierspiñski, S. Strazewicz y R. L. Moore obtuvieron caracterizaciones topológicas del arco como el único continuo que contiene exactamente dos puntos que no son de corte. R. L. Moore además caracterizó a la curva cerrada simple como un continuo que es separado por cualquier par de sus puntos.

Ahora, como un árbol es la unión de un conjunto finito de arcos que se intersectan en uno de sus puntos y que no contiene curvas cerradas simples, podemos pensar en la siguiente caracterización.

Teorema 1.102. *[16, 9.28] Un continuo X es un árbol si y sólo si X contiene una cantidad finita de puntos de no corte.*

Algunas de las caracterizaciones de curva cerrada simple fueron consideradas en 1911, por Z. Janiszewski. En 1924, J. R. Kline demostró que un continuo el cual no es separado por subconjuntos conexos es una curva cerrada simple. R. L. Moore caracterizó a la curva cerrada simple como sigue.

Teorema 1.103. *[16, 9.31] Un continuo X es una curva cerrada simple si y sólo si para cada $x, y \in X$, tenemos que $X - \{x, y\}$ es disconexo.*

Capítulo 2

Dendritas

Se ha puesto un especial interes en los continuos localmente conexos que no tiene curvas cerradas simples, llamados Dendritas. Algunos ejemplos de Dendritas son los árboles. Cabe mencionar que Gemahn realizó la construcción de una dendrita que lleva su nombre, dicha dendrita tiene como puntos extremos el conjunto de Cantor. Las dendritas se caracterízan por ser ejemplo para muchos conceptos de la teoría de los continuos localmente conexos. Es sorprendente las diversas maneras de caracterización de una dendrita, además de las propiedades que éstas tienen. Otros resultados relacionados con estos continuos es la construcción de una dendrita universal, hecha en 1923 por T. Wazewski (1896-1972). Además, Wazewski construyó una dendrita universal para subfamilias de la familia de las dendritas, clasificadas respecto a el orden máximo de sus puntos.

2.1. Algunas caracterizaciones

La siguiente definición es la base sobre la cual daremos seguimiento a este capítulo.

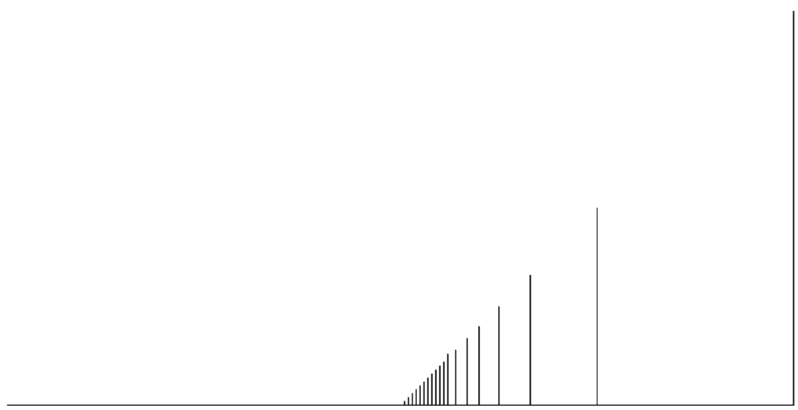
Definición 2.1. *Una* ***dendrita*** *es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples.*

A continuación se muestran algunos ejemplos de dendritas:

Ejemplo 2.2. *Sean* $A_n = \{r(\cos\frac{\theta}{2^n\pi}, sen\frac{\theta}{2^n\pi}) : 0 \leq r \leq \frac{1}{2^{n-1}}\}$ *definamos a* $F_w = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. *Este continuo es una dendrita, y es llamada* F_w *o también, en ocasiones, el punto peludo.*

F_w.

Ejemplo 2.3. *Sea* $W = \cup\{\{1/n\} \times [0, 1/n] : n \in \mathsf{N}\} \cup ([-1, 1] \times \{0\})$. *Este continuo es llamado Peine Nulo y es un ejemplo de dendrita.*



Peine Nulo.

Ejemplo 2.4. *Consideremos*

$$H_0 = (\{0, 1\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{0\})$$

y

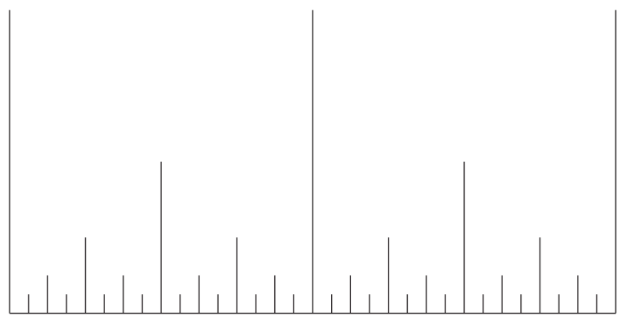
$$H_i = \left\{ \left(\frac{k}{2^{i+1}}, r \right) : 0 \leq k \leq 2^{i+1}, k \;\; natural \;\; impar, r \in \left[0, \frac{1}{i} \right] \right\}$$

para cada $i \in \mathsf{N}$.

Luego el conjunto

$$\mathcal{H} = \left(\bigcup_{i\in\mathsf{N}} H_i\right) \cup H_0$$

es una dendrita.



$\mathcal{H}$.

Observe que una curva cerrada simple es una gráfica y no es dendrita. F_w es una dendrita, sin embargo no es gráfica, esto lo justifica (1) del Teorema 1.99. Por lo que, no toda dendrita es gráfica y no toda gráfica es dendrita. Las gráficas que son dendritas son los árboles, por lo que la intersección del conjunto de las dendritas con el conjunto de las gráficas es precisamente el conjunto de los árboles.

La siguiente proposición ayudará en la demostración que para cualesquiera dos puntos en una dendrita existe un único arco que los une. Observe que este hecho no funciona para las gráficas ya que en una curva cerrada simple existen dos arcos que unen a un par de puntos.

Proposición 2.5. *Sean* X *un continuo y* $p,q \in X$. *Si* A *y* B *son arcos distintos en* X *que van de* p *a* q, *entonces* $A \cup B$ *contiene una curva cerrada simple.*

Demostración. Sea A un arco en X que va de p a q. Supongamos que existe otro arco B en X que va de p a q. Notemos que A y B son arcos que tienen al menos a p y q como puntos comunes. Se afirma que $A \cup B$ contiene una curva cerrada simple, sean

$$f\colon [0,1] \to A \text{ y } \ g\colon [0,1] \to B$$

homeomorfismos tales que $f(0) = g(0) = p$ y $f(1) = g(1) = q$. Como A y B son distintos, existe $t \in (0,1)$ tal que $f(t) = r$ con $r \in A$ y $r \notin B$. Ahora, sean

$$A_1 = \{s \in [0,t) : f(s) = g(s)\} \text{ y } A_2 = \{s \in (t,1] : f(s) = g(s)\}$$

estos conjuntos son no vacíos ya que al menos $0 \in A_1$ y $1 \in A_2$. Luego, sean

$$t_1 = \text{ínf}\, A_1 \text{ y } t_2 = \sup A_2$$

observe que $f(t_1) = g(t_1)$ y $f(t_2) = g(t_2)$, y $f([t_1,t_2])$, $g([t_1,t_2])$ son arcos. Sea $C = f([t_1,t_2]) \cup g([t_1,t_2])$, C es una curva cerrada simple donde $C \subset (A \cup B) \subset X$. Con lo que concluimos la prueba. $\square$

Proposición 2.6. *Sean X una dendrita y $p, q \in X$, entonces existe un único arco A en X que va de p a q.*

Demostración. Supongamos que existen A y B dos arcos disjuntos en X que van de p a q, por Proposición 2.5, $A \cup B$ contiene una curva cerrada simple, pero esto contradice el hecho de que X es una dendrita. Así, existe un único arco A en X que va de p a q. $\square$

El siguiente teorema es una caracterización para las dendritas.

Teorema 2.7. *Sea X un continuo. Entonces X es una dendrita si y sólo si para cualesquiera dos puntos en X existe un tercer punto que los separa en X.*

Demostración. Sea X una dendrita, se demostrará que dados $p, q \in X$ existe $r \in X - \{p,q\}$ donde $X - \{r\} = P|Q$ tal que $p \in P$ y $q \in Q$. Sean $p, q \in X$ con $p \neq q$, como X es un continuo localmente conexo, por el Teorema 1.82, X es arco conexo, esto es, existe un arco A en X donde p y q son sus puntos extremos. Luego, sea $r \in A - \{p,q\}$ y sea U la componente de p en $X - \{r\}$, ahora supongamos que $q \in U$, como X es localmente conexo, $U \subset X - \{r\}$, donde $X - \{r\}$ es abierto, por la Proposición 1.71, U es abierto. Así se tiene que U es conexo y abierto en X y X es localmente conexo, por el Teorema 1.85, U es arco conexo, es decir, existe un arco B en U donde p y q son sus puntos extremos. Observe que A y B tienen como puntos extremos a p y q, pero esto contradice la Proposición 2.6 ya que X es una dendrita por la Proposición 2.6, existe un únicoarco en X que une a p y q, por lo tanto $q \notin U$. Notemos que U es abierto y cerrado. Ahora, sea $V = [X - \{r\}] - U$ con $q \in V$, V es abierto y cerrado. Así, se tiene que U y V abiertos tales que $U \cup V = X - \{r\}$, $U \cap V = \emptyset$ y $p \in U$ y $q \in V$. Por lo tanto r es una separación en X de p y q.

Ahora, supongamos que para cualesquiera dos puntos en X existe un tercer punto en X que los separa en X. Por la Proposición 1.54, X no contiene continuos de convergencia, y aplicando Teorema 1.48, X es conexo en pequeño en cada punto de $x \in X$, de la Proposición 1.72, X es localmente conexo. Luego, supongamos que X contiene curvas cerradas simples, sea $D \subset X$, donde D es una curva cerrada simple y sean $p, q \in D$. Por hipótesis existe $r \in D - \{p, q\}$ tal que $D - \{r\} = P|Q$ donde $p \in P$ y $q \in Q$; pero esto contradice el Teorema 1.103, ya que D se vuelve disconexo si se extraen al menos dos de sus puntos. Por lo tanto X no contiene curvas cerradas simples. Así se concluye la prueba del Teorema 2.7. $\square$

Definición 2.8. *Sea X un continuo. X es* ***hereditariamente localmente conexo*** *si todo subcontinuo de X es localmente conexo.*

Las gráficas son conjuntos hereditariamente localmente conexos y la Proposición 1.98, verifica este hecho. Observe que $[0, 1] \times [0, 1]$ no es hereditariamente localmente conexo, ya que $sen(\frac{1}{x}) \cup (\{0\} \times [0, 1])$ con $x \in (0, 1]$ es un subcontinuo de X que no es localmente conexo. Además observe que este conjunto contiene un continuo de convergencia, el cual es $[0, 1]$. La siguiente es una caracterización sobre este hecho.

Teorema 2.9. *Un continuo X es hereditariamente localmente conexo si y sólo si X no contiene continuos de convergencia.*

Demostración. Supongamos que X tiene continuos de convergencia, se demostrará que X no es hereditariamente localmente conexo. Sea $A \subset X$ tal que A es un continuo de convergencia en X, esto es, para A un subcontinuo no degenerado de X existe una sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ donde para cada $i \in \mathsf{N}$, A_i es subcontinuo de X tal que:

(1) $\lim A_i = A$,

(2) Para toda $i \in \mathsf{N}$, $A_i \cap A = \emptyset$,

(3) Para $i \neq j$, $\quad A_i \cap A_j = \emptyset$ (por la Proposición 1.52).

Ahora, si X no es localmente conexo, entonces X no es hereditariamente localmente conexo, ya que X es subcontinuo de X.

Así, X un continuo localmente conexo. Sean $p, q \in A$ con $p \neq q$. Notemos que X es de Hausdorff por lo tanto existen U_1 y V_1 abiertos en X tal que $p \in U_1$ y $q \in V_1$ con $U_1 \cap V_1 = \emptyset$. Como X es regular existe U_2 abierto en X tal que $p \in U_2 \subset \overline{U_2} \subset U_1$. Luego, X es localmente conexo. Entonces para U_2 existe U abierto y conexo en X tal que $p \in U \subset U_2 \subset \overline{U_2} \subset U_1$ así, $p \in \overline{U} \subset \overline{U_2} \subset U_1$ y, como $U_1 \cap V_1 = \emptyset$ se tiene que $p \in U$ y $q \notin \overline{U}$. De (1) se tiene que el $\lim A_i = A = \liminf A_i$ esto es, existe $N \in \mathsf{N}$ tal que para toda $i \geq N$, los $A_i \cap U \neq \emptyset$. Sea

$$Y = A \cup \overline{U} \cup [\textstyle\bigcup_{i=N}^{\infty} A_i]$$

se probará que Y es un subcontinuo de X. Para ello observe que Y es conexo y notemos que A y $\overline{U}$ son conexos y $p \in A \cap \overline{U}$; por el Teorema 1.10, $A \cup \overline{U}$ es conexo. Por otro lado, para toda $i \geq N$ los A_i son conexos tales que $A_i \cap U \neq \emptyset$, entonces para toda $i \geq N$ los $A_i \cap \overline{U} \neq \emptyset$. Así, $\bigcup_{i=N}^{\infty} [A_i \cap \overline{U}] = [\bigcup_{i=N}^{\infty} A_i] \cap \overline{U} \neq \emptyset$ y aplicando el Teorema 1.10, $[\bigcup_{i=N}^{\infty} A_i] \cup \overline{U}$ es conexo. Nuevamente aplicamos el Teorema 1.10, y se obtiene que la unión de $A \cup \overline{U}$ y $[\bigcup_{i=N}^{\infty} A_i] \cup \overline{U}$ es conexo, así se concluye que Y es conexo. Ahora, se afirma que Y es compacto, para eso se demostrará que $Y = \overline{Y}$. Como $Y \subset \overline{Y}$, falta por ver que $\overline{Y} \subset Y$. Sea $x \in \overline{Y}$ entonces $x \in \overline{[A \cup \overline{U} \cup [\bigcup_{i=N}^{\infty} A_i]]}$ entonces $x \in \left[A \cup \overline{U} \cup \overline{[\bigcup_{i=N}^{\infty} A_i]}\right]$ así se tienen tres opciones;

(1) $x \in A$,

(2) $x \in \overline{U}$,

(3) $x \in \overline{[\bigcup_{i=N}^{\infty} A_i]}$.

Si $x \in A$ entonces $x \in Y$. Si $x \in \overline{U}$ entonces $x \in Y$. Si $x \in \overline{[\bigcup_{i=N}^{\infty} A_i]}$, existe una sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ en $\bigcup_{i=N}^{\infty} A_i$ tal que converge a x. Si para algún j, $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset A_j$, como A_j es cerrado, la sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a $x \in A_j$, entonces $x \in Y$. Ahora, si $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset [\bigcup_{i=N}^{\infty} A_i]$ con $x_j \in A_{i_j}$ para cada j, entonces $x \in \liminf A_i = A$, así $x \in Y$. Así $\overline{Y} \subset Y$ y por lo tanto Y es compacto. Luego se concluye que Y es continuo.

Ahora, se demostrará que Y no es localmente conexo, y para ello supongamos lo contrario, que Y es localmente conexo. Entonces $Y - \overline{U}$ es abierto en Y que contiene a p, existe V_1 abierto en Y tal que $p \in V_1 \subset Y - \overline{U}$, como Y es regular, para V_1 existe V_2 un abierto en Y tal que $p \in V_2 \subset \overline{V_2} \subset V_1$ como Y es localmente conexo para V_2 existe V un abierto y conexo en Y tal que $p \in V \subset \overline{V} \subset V_2 \subset \overline{V_2} \subset V_1$, observe que $V_1 \cap \overline{U} = \emptyset$ como $\overline{V} \subset V_1$ entonces $\overline{V} \cap \overline{U} = \emptyset$. Luego, notemos que

$$\overline{V} = [\overline{V} \cap A] \bigcup [U_{i=N}^{\infty} [A_i \cap \overline{V}]]$$

y $\overline{V} \neq \emptyset$ ya que $q \in V \cap A$ y como $\lim A_i = A = \liminf A$ para toda $i \geq N$, $A_i \cap V \neq \emptyset$. $\overline{V}$ se escribe como la unión infinita numerable de subconjuntos cerrados, disjuntos, por la Definición 1.49, $\overline{V}$ no es σ conexo. Notemos que $\overline{V}$ es continuo, esto es una contradicción al Teorema 1.50. Por lo tanto Y no es localmente conexo. Se concluye que X no es hereditariamente localmente conexo.

Ahora, supongamos que X no tiene continuos de convergencia. Sea A subcontinuo de X, como X no tiene continuos de convergencia y $A \subset X$, A no tiene continuos de convergencia, aplicando el Teorema 1.48, A es conexo en pequeño para cada $x \in X$ y por la Proposición 1.72, A es localmente conexo. Por lo tanto, X es hereditariamente localmente conexo. $\square$

Los árboles son hereditariamente localmente conexos pero, ¿Será válido para todas las dendritas?.

Corolario 2.10. *Toda dendrita es hereditariamente localmente conexo.*

Demostración. Sea X una dendrita, por el Teorema 2.7, para cualesquiera dos puntos en X existe un tercero que los separa en X, aplicando la Proposición 1.54, X no contiene continuos de convergencia. Aplicando el Teorema 2.9, X es hereditariamente localmente conexo. $\square$

Corolario 2.11. *Todo subcontinuo de una dendrita es una dendrita.*

Demostración. Sean X una dendrita y Y un subcontinuo de X. Por el Corolario 2.10, X es hereditariamente localmente conexo y así Y es localmente conexo. Como $Y \subset X$ y X no contiene curvas cerradas simples entonces Y no contiene curvas cerradas simples y por la Definición 2.1, $2Y$ es una dendrita. Con lo que concluimos la prueba de este corolario. $\square$

Todo punto extremo es un punto de no corte y un punto de corte es aquel que al extraerlo del continuo, éste se vuelve disconexo, en particular sucede para las dendritas. El siguiente teorema es una caracterización para las dendritas en base a estos términos.

Teorema 2.12. *Sea X un continuo no degenerado. Entonces X es una dendrita si y sólo si cada punto de X es un punto de corte en X o un punto extremo en X.*

Demostración. Supongamos que X es una dendrita y que existe $x \in X$ tal que x no es punto de corte en X y x no es un punto extremo en X. Como X es una dendrita, por el Teorema 1.77, se sigue que X tiene la propiedad S. Por el Teorema 1.78, para algún $\varepsilon_0 > 0$, se tiene que $X = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$, donde los subconjuntos V_i son abiertos y conexos en X que tienen la propiedad S y $diám(V_i) < \varepsilon_0$.

Ahora, como $x \in X$, existe algún $i \in \mathsf{N}$, tal que $x \in V_i$, y así, por la Proposición 1.89, V_i es de tal manera que $X - V_i$ es conexo. Sea $V_i = U$. Luego, como x no es punto extremo en X entonces $|Fr(U)| \geq 2$. Recuerde que U es un abierto en X que tiene la propiedad S. Así, por la Proposición 1.88 se tiene que todo punto de la $Fr(U)$ es arco accesible en U, esto es, para cualesquiera $p, q \in Fr(U)$ con $p \neq q$,entonces, existen C y D arcos en $U\ \cup\{p, q\}$ tales que, C tiene como puntos extremos a p y a donde $a \in U$, y D tiene como puntos extremos a q y b donde $b \in U$. Como U es abierto y conexo en X, por lo que siguiendo el Teorema 1.85, se tiene que U es arco conexo; así, existe un arco E en U con puntos extremos a y b. Fijémonos en la siguiente unión:

$$A = C \cup D \cup E$$

notemos que A es un arco contenido en $U \cup \{p, q\}$ con puntos extremos p y q y además $p, q \in X - U$. Por otro lado $X - U$ es cerrado en X por lo que del Teorema 1.6 podemos decir que $X - U$ es compacto. Luego, $X - U$ es un subcontinuo de X, y por el Corolario 2.10, $X - U$ es un continuo localmente conexo. Aplicando el Teorema 1.82, $X - U$ es arco conexo, por lo que existe B un arco en $X - U$ con puntos extremos p y q. Ahora, A y B son arcos distintos con puntos extremos p y q donde $A \subset U \cup \{p, q\}$ y $B \subset X - U$, por lo que podemos decir que A y B son distintos. Así $A \cup B$ es una curva cerrada simple y esto es una contradicción ya que $A \cup B \subset X$ y X por ser dendrita no contiene curvas cerradas simples.

Inversamente, sea X un continuo no degenerado y $x \in X$. Supongamos que x es un punto de corte en X o x es un punto extremo en X. Se demostrará que X es una dendrita. Supongamos que K es un continuo de convergencia en X, entonces para cada $r \in K$, r es un punto de corte en X o r es un punto extremo en X, observe que r no es punto extremo en X, ya que no existe algún conjunto abierto en X que contenga a r tal que $|Fr(V)| = 1$, así, como r no es punto extremo en X, se tiene que r es punto de corte en X; más aún, como K es un continuo no degenerado, tiene una cantidad no numerable de puntos de corte, lo que contradice a (b) del Lema 1.69, por lo que X no tiene continuos de convergencia, así, por el Teorema 2.9, X es hereditariamente localmente conexo, en particular X es localmente conexo.

Ahora supongamos que Z es una curva cerrada simple contenida en X. Claramente ningún punto de Z es un punto extremo de X. Por hipótesis, cada punto de Z es un punto de corte de X. Por el inciso (d) de Proposición 1.68, existe un punto de corte de Z. Esto contradice el que Z sea una curva cerrada simple ya que todos sus puntos son de no corte. Por lo tanto, X no contiene curvas cerradas simples. Así, X es una dendrita.

Sea $Z \subset X$ una curva cerrada simple. Para $z \in Z$, por hipótesis que z es punto de corte o es punto extremo en X. Como Z es curva cerrada simple, z no es punto extremo ya que para cada $z \in Z$, la cardinalidad de la frontera de todo abierto en X que contiene al punto z, es mayor o igual que dos. Entonces por hipótesis z es punto de corte en X, lo que contradice el Teorema 1.103. Por lo tanto Z no es curva cerrada simple y así X es una dendrita. □

Las dendritas tienen diferentes formas de ser interpretadas, estudiandolas puntualmente tienen características que sólo las dendritas cumplen como la que se dio en el Teorema 2.7, de igual manera al estudiarlas mediante propiedades de sus subcontinuos. ésto ultimo es lo que revisaremos en la siguiente caracterización.

Teorema 2.13. *Sea X un continuo. Entonces X es una dendrita si y sólo si cada subcontinuo no degenerado de X contiene una cantidad no numerable de puntos de corte de X.*

Demostración. Sean X una dendrita y Y un subcontinuo no degenerado de X. Por el Corolario 2.10, Y es un continuo localmente conexo. Por el Teorema 1.82, se tiene que Y es arco conexo, es decir, para $p, q \in Y$ existe un arco A en Y con puntos extremos p y q. Dado que A contiene una cantidad no numerable de puntos. Para cada $r \in A - \{p, q\}$, r no es punto extremo en A ya que los únicos puntos extremos en el arco A son p y q. Observe que el $ord(r, A) = 2$, por lo que el $ord(r, X) \geq 2$, y por el Teorema 2.12, se obtiene que r es punto de corte de X. Por lo tanto A contiene una cantidad no numerable de puntos de corte de X y como $A \subset Y$, Y contiene una cantidad no numerable de puntos de corte de X.

Inversamente, sea X un continuo no degenerado y supongamos que todo subcontinuo no degenerado de X contiene una cantidad no numerable de puntos de corte de X. Por (b) del Lema 1.69, X no tiene continuos de convergencia y por el Teorema 2.9, X es hereditariamente localmente conexo; en particular X es localmente conexo. Se demostrará que X no contiene curvas cerradas simples. Sea Z una curva cerrada simple en X. Por hipótesis Z contiene una cantidad no numerable de puntos de corte de X. Por (c) del Lema 1.69, existe $r \in Z$, tal que r es punto de corte, esto es $Z - \{r\}$ es disconexo, pero esto contradice el Teorema 1.103. Por lo tanto Z no es una curva cerrada simple. Así, se concluye que X es una dendrita. $\square$

Se demostrará la siguiente proposición la cual será utilizada para la demostración del Teorema 2.15.

Proposición 2.14. *Todo subconjunto conexo no degenerado de una dendrita es arco conexo.*

Demostración. Sea C un subconjunto conexo no degenerado de una dendrita X. Sean $p, q \in C$ tales que $p \neq q$. Notemos que $\overline{C}$ es subcontinuo de X, por el Corolario 2.11, $\overline{C}$ es una dendrita y por el Teorema 1.82, $\overline{C}$ es arco conexo, es decir, para $p, q \in \overline{C}$ existe un arco A en $\overline{C}$ que va de p a q. Se demostrará que $A \subset C$. Sea $s \in \overline{C} - C$, notemos que $C \subset \overline{C} - \{s\} \subset \overline{C}$ aplicando la Proposición 1.8, se tiene que $\overline{C} - \{s\}$ es conexo, por lo tanto s es punto de no corte en $\overline{C}$, por lo que cada punto de $\overline{C} - C$ es punto que de no corte de $\overline{C}$. Como $\overline{C}$ es una dendrita, por el Teorema 2.12, todo punto de $\overline{C}$ es punto extremo de $\overline{C}$ o es punto de corte de $\overline{C}$. Así cada punto de $\overline{C} - C$ es punto extremo de $\overline{C}$. Observe que los únicos puntos extremos en el arco A son p y q, además p, $q \in C$, como $A \subset \overline{C}$ y cada $r \in A - \{p, q\}$ es punto de corte en A, entonces cada r es punto de corte en $\overline{C}$, así $A \cap (\overline{C} - C) = \emptyset$, por lo que $A \subset C$. $\square$

Otra caracterización de las dendritas ahora basada en sus subconjuntos conexos es la siguiente.

Teorema 2.15. *Sea X un continuo. X es una dendrita si y solo si la intersección de cualesquiera dos subconjuntos conexos de X es conexo.*

Demostración. Sea X una dendrita y supongamos que existen dos subconjuntos conexos C_1 y C_2 de X tales que $C_1 \cap C_2$ no es conexo. Sean p y q dos elementos en componentes diferentes de $C_1 \cap C_2$, como C_1 y C_2 son subconjuntos conexos de X, aplicando la Proposición 2.14, se tiene que C_1 y C_2 son arco conexos, esto es, para p y q existe un arco A en C_1 que va de p a q y existe un arco B en C_2 que va de p a q. Notemos que A y B son distintos, ya que si $A = B$, como $A \subset C_1$ y $B \subset C_2$ entonces $A \cap B \subset C_1 \cap C_2$, esto es $A = B \subset C_1 \cap C_2$, pero como A es conexo, entonces A está contenido en una componente de $C_1 \cap C_2$, así que $p \in A$ o $q \in A$, pero no ambas, pero esto es una contradicción ya que A es un arco que va de p a q, así que $A \neq B$. Así, por la Proposición 2.5, $A \cup B$ contiene una curva cerrada simple, esto es una contradicción ya que $A \cup B \subset X$ y X es una dendrita, con lo cual se concluye que $C_1 \cap C_2$ es conexo.
Ahora, sea X un continuo y asuma que la intersección de cualesquiera dos subconjuntos conexos de X es conexo, se demostrará que X es una dendrita, es decir, X es localmente conexo y no contiene curvas cerradas simples. Supongamos que X no es localmente conexo, entonces X no es hereditariamente localmente conexo. Por el Teorema 2.9, X contiene un continuo de convergencia, sea K dicho continuo. Aplicando (c) del Lema 1.69, se tiene que K contiene una colección μ no numerable de subconjuntos de K que son mutuamente disjuntos y de corte de K. Por (b) del Lema 1.69, existe $C \in \mu$ tal que $K - C$ es conexo, por hipótesis $K \cap (X - C)$ es conexo. Pero esto no es posible ya que $K \cap (X - C) = K - C$ y C es de corte de K, por lo tanto $K - C$ no es conexo. Así, X no contiene continuos de convergencia. Por lo tanto, por la Proposición 2.7, X es localmente conexo.
Ahora, supongamos que D es una curva cerrada simple contenida en X. Para $r, s \in D$ existe un arco A en D que va de r a s, y existe un arco B en D distinto de A que va de r a s, tal que $A \cap B = \{r, s\}$. Así que se han encontrado dos subconjuntos conexos de X tales que su intersección es disconexa, lo cual es una contradicción a nuestra hipótesis. Por lo tanto X no contiene curvas cerradas simples y de lo anterior X es localmente conexo, entonces por la Definición 2.1 X es una dendrita. Con lo que concluimos la demostración de este teorema □

En el Capítulo 1 se dío la definición de orden de un punto en un conjunto (vea en la página 32), ahora definimos el número de componentes de un punto en el conjunto. ¿Habrá una relación entre ellos? en el caso de las dendritas tienen una relación especial. Vea el lema y el teorema siguiente, pero antes una definición.

Definición 2.16. *Sean X un espacio conexo y $p \in X$. El **número de componentes de p en X**, denotado como $c(p, X)$, es la cardinalidad del conjunto de las componentes de $X - \{p\}$.*

Ejemplo 2.17. *Considere F_w con centro en a (vea el Ejemplo 2.2), notemos que $c(a, F_w) = \aleph_0$ ya que $F_w - \{a\}$ tiene $\aleph_0$ componentes.*

Se demostrará el siguiente lema.

Lema 2.18. *Sean X un continuo no degenerado y $p \in X$. Si $ord(p, X)$ es finito entonces $c(p, X)$ es finito y $c(p, X) \leq ord(p, X)$.*

Demostración. Sean X un continuo no degenerado y $p \in X$. Supongamos que $ord(p, X) = n$ y $c(p, X) > ord(p, X) = n$. Notemos que $X - \{p\}$ contiene más de n componentes, sean $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n+1}$ algunas componentes. Aplicando el Segundo Teorema de Golpes en la Frontera 1.42, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$,

$$\text{como } \overline{Z_i} \subset \overline{X - \{p\}} \text{ entonces } \overline{Z_i} \cap \overline{X - (X - \{p\})} \neq \emptyset$$

esto es,

$$\overline{Z_i} \cap \overline{X - (X - \{p\})} = \overline{Z_i} \cap \overline{X \cap X - (X - \{p\})} =$$

$$= \overline{Z_i} \cap \overline{\{p\}} = \overline{Z_i} \cap \{p\} \neq \emptyset.$$

Así $\overline{Z_i} \cap \{p\} = \{p\}$ por lo que, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, $p \in \overline{Z_i}$.

Luego, sea $z_i \in Z_i$ y sea $\varepsilon = mín\{d(z_i, p) : 1 \leq i \leq n+1\}$ donde d es la métrica definida en X. Ahora, sea U un subconjunto abierto de X tal que $p \in U$ y $diám(U) < \varepsilon$. Notemos que para cada $i \in \{1, 2, \ldots n+1\}$ se tiene que:

(a) $Z_i \cap U \neq \emptyset$,

(b) $Z_i - U \neq \emptyset$,

se afirma que $Z_i \cap Fr(U) \neq \emptyset$. Supongamos lo contrario, observe que U es abierto, así que por la Proposición 1.51, $Fr(U) = \overline{U} - U$, así $\overline{U} = Fr(U) \cup U$, luego, $X - (Fr(U) \cup U)$ y U son abiertos en X y y

$$Z_i \subset X - (Fr(U) \cup U) \cup Fr(U) \cup U$$

pero como $Z_i \cap Fr(U) = \emptyset$, entonces

$$Z_i \subset X = X - (Fr(U) \cup U) \cup U.$$

Observe que $X - (Fr(U) \cup U) \cap U = \emptyset$. Como para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, Z_i es conexo, se tiene que:

(i) $Z_i \subset X - (Fr(U) \cup U)$

(ii) $Z_i \subset U$.

Supongamos que pasa (i), entonces $Z_i \cap U = \emptyset$, pero esto no es posible por (a).
Ahora supongamos que pasa (ii). Por (b) se tiene que $Z_i - U \neq \emptyset$; esto es, $Z_i \cap X - U \neq \emptyset$, por lo que $Z_i \not\subset U$, con lo que concluimos que (ii) no puede pasar. Por lo tanto, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, $Z_i \cap Fr(U) \neq \emptyset$.
Recuerde, que las componentes de un conjunto son disjuntas entre si y por como fue escogida U, se tiene que $|Fr(U)| \geq n+1$, y así se obtiene que $ord(p, X) \geq n+1$, pero esto contradice nuestra hipótesis. Así se concluye que $c(p, X) \leq ord(p, X)$ con lo que queda demostrado el lema. □

El siguiente teorema es otra caracterización de las dendritas.

Teorema 2.19. *Un continuo no degenerado X es una dendrita si y sólo si $c(p, X) = ord(p, X)$, siempre que alguno de ellos sea finito.*

Demostración. Supongamos que $c(p, X) = ord(p, X)$ para $p \in X$, siempre que alguno de ellos sea finito. Se demostrará que X es una dendrita. Sea $p \in X$ tal que p no es punto de corte de X, es decir, $c(p, X) = 1$. Por la hipótesis $c(p, X) = ord(p, X) = 1$ así, por la Definición 1.67 p es un punto extremo. Observe que para $1 < c(p, X) = ord(p, X)$ p es punto de corte de X, y por el Teorema 2.12, X es una dendrita.

Ahora, supongamos que X es una dendrita. Para cada $p \in X$ demostremos que $c(p, X) = ord(p, X)$ siempre que alguno de ellos sea finito. Para ello revisaremos dos casos:

(i) $ord(p, X)$ es finito,

(ii) $c(p, X)$ es finito,

Supongamos que sucede (i). Por el Lema 2.18, se tiene que $c(p, X)$ es finito, por lo que la prueba se reduce a demostrar el caso (ii).
Sean $c(p, X) = n$ y $L_1, L_2, \ldots, L_n$ las componentes de $X - \{p\}$. Observe que $\{p\}$ es un subcontinuo propio de X y para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, L_i es una componente de $X - \{p\}$, así, por el Corolario 1.45, $L_i \cup \{p\}$ es un subcontinuo de X y por el Corolario 2.10, $L_i \cup \{p\}$ es una dendrita. Luego para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $(L_i \cup \{p\}) - \{p\} = L_i$ es conexo, por lo que de acuerdo a la Definición 1.60 se tiene que p es un punto extremo de $L_i \cup \{p\}$. Ahora, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sean $l_i \in L_i$ y

$$\varepsilon = mín\{d(p, l_i) : 1 \leq i \leq n\}.$$

sea U un abierto en X tal que $p \in U$ y el $diám(U) < \varepsilon$. Notemos que para cada $i \in \{1, \ldots n\}$, se tiene:

(a) Como $p \in \overline{L_i}$, todo U abierto en X que contenga a p intersecta a cada L_i, es decir, $U \cap L_i \neq \emptyset$ y,

(b) $L_i - U \neq \emptyset$ por la forma en que fue escogido ε.

Luego, se afirma que $L_i \cap Fr(U) \neq \emptyset$, ya que de lo contrario, se tiene que $\overline{U} = Fr(U) \cup U$, observe que $X - (Fr(U) \cup U)$ y U son abiertos en X y

$$L_i \subset X = X - (Fr(U) \cup U) \cup Fr(U) \cup U$$

pero como se asumió que $L_i \cap Fr(U) = \emptyset$, entonces

$$L_i \subset X - (Fr(U) \cup U) \cup U$$

observe que $X - (Fr(U) \cup U) \cap U = \emptyset$ y como para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, L_i es conexo, se tiene que:

(a') $L_i \subset X - (Fr(U) \cup U)$ o

(b') $L_i \subset U$.

supongamos que pasa (a'), entonces se tiene que $L_i \cap U = \emptyset$, lo que contradice (a). Ahora supongamos que (b') es válido, por (b) se tiene que $L_i - U \neq \emptyset$, esto es, $L_i \cap X - U \neq \emptyset$, por lo que $L_i \not\subset U$, con lo que se contradice (b'). Por lo tanto, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $L_i \cap Fr(U) \neq \emptyset$. Recuerde, que las componentes de un conjunto son disjuntas entre si, por lo que $|Fr(U)| = n$. Además por como fue escogida U, podemos observar que por definición se tiene que $ord(p, X) = n$. Así se concluye que $c(p, X) = ord(p, X)$ siempre que alguno sea finito. Con lo que concluimos la demostración de esta caracterización. $\square$

2.2. Propiedades cardinales para las dendritas

En esta parte, recordaremos el concepto de continuo regular, y entre otros resultados se probará que las dendritas son continuos regulares. También definimos los puntos de ramificación y demostraremos una propiedad cardinal para las dendritas.

Definición 2.20. *Sean X un continuo y $p \in X$. Entonces X es un* ***continuo regular en*** *p si existe una base local de p, L_p, tal que la frontera de cada elemento de L_p es de cardinalidad finita. Un continuo X es un* ***continuo regular*** *si X es un continuo regular en cada uno de sus puntos.*

Los siguientes resultados son básicos en la teoría de los continuos regulares.

Proposición 2.21. *Todo subcontinuo de un continuo regular es regular.*

Demostración. Sean X un continuo regular y Y un subcontinuo de X. Se demostrará que Y es regular. Se tiene que para cada $z \in Y$, z tiene una base local L_z en X, donde cada elemento de L_z tiene frontera de cardinalidad finita. Observe que para cada $U \in L_z$, $U \cap Y$ es un básico local en Y que contiene a z y la $|Fr(U \cap Y)| \leq |Fr(U)| < \infty$, Así z tiene una base local en Y, por la Definición 2.20, Y es regular. $\square$

Teorema 2.22. *Todo continuo regular es hereditariamente localmente conexo.*

Demostración. Sea X un continuo regular y supongamos que X no es hereditariamente localmente conexo. Aplicando el Teorema 2.9, X contiene un continuo de convergencia K; es decir, existe una sucesión $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ de subcontinuos de X, tales que $\lim_{i\to\infty} K_i = \limsup_{i\to\infty} K_i = K$ y $K \cap K_i = \emptyset$, para todo $i \in \mathsf{N}$, por tanto para cada $x \in K$ y todo U abierto de X tal que $x \in U$, $U \cap K_i \neq \emptyset$ para una cantidad infinita de i; esto es, la cardinalidad de la frontera de U es infinita en X, pero esto contradice nuestra hipótesis de que X es un continuo regular. Por lo tanto, X es hereditariamente localmente conexo. $\square$

Afirmamos que, no siempre es cierto que todo continuo hereditariamente localmente conexo es regular y un ejemplo de ello es lo siguiente:

Sean

$A = \{(x,0) \in \mathsf{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$;

para cada $n \in \mathsf{N}$ y cada $k \in \{1, \ldots, 2^{n-1}\}$

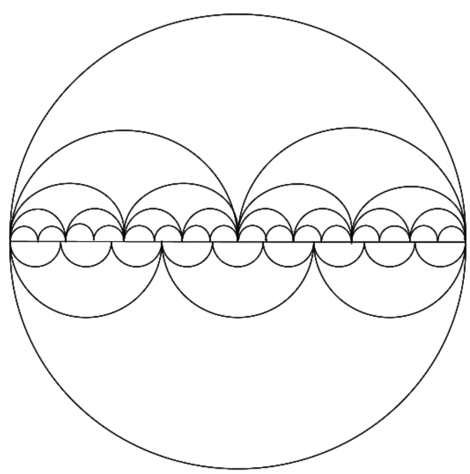
$B_{n,k} = \{(x,y) \in \mathsf{R}^2 : (x - \frac{2k-1}{2^n})^2 + y^2 = 4^{-n} \text{ y } y \geq 0\}$;

y para cada $n \in \mathsf{N}$ y cada $k \in 1, \ldots, 3^n$, sea

$C_{n,k} = \{(x,y) \in \mathsf{R}^2 : (x - \frac{2k-1}{2\cdot 3^n})^2 + y^2 = \frac{1}{4} \cdot 9^{-n} \text{ y } y \leq 0\}$.

Pongamos $X = A \cup [\cup_{n=1}^{\infty}(\cup_{k=1}^{2^{n-1}} B_{n,k})] \cup [\cup_{n=1}^{\infty}(\cup_{k=1}^{3^n} C_{n,k})]$,

representada esquemáticamente en la siguiente figura.



Continuo regular.

X es hereditariamente localmente conexo, pero no es regular ya que para los puntos sobre la línea central, la cardinalidad de la frontera de los abiertos que lo contienen es infinito, en particular fijémonos en el origen de la circunferencia más grande.

Definición 2.23. *Sea ζ una colección de subconjuntos cerrados de un espacio métrico X. ζ es **aditivo** si para $C_1, C_2 \in \zeta$ se tiene que $C_1 \cup C_2 \in \zeta$. Decimos que ζ es **hereditario** si para A un subconjunto cerrado de C, donde $C \in \zeta$, se tiene que $A \in \zeta$. Además ζ es un sistema **hereditariamente aditivo** si ζ es aditivo y hereditario.*

Pasemos a la siguiente proposición.

Proposición 2.24. *Sean X un continuo y ζ un sistema hereditariamente aditivo de subconjuntos cerrados de X. Entonces (1) y (2) son equivalentes:*

(1) Cada $x \in X$ tiene una base local δ_x tal que para cada $U \in \delta_x$, U es abierto en X y $Fr(U) \in \zeta$.

(2) Cualesquiera dos puntos de X son separados en X por algún elemento de ζ.

Demostración. Sean $x, y \in X$.
(1) $\rightarrow$ (2). Como X es de Hausdorff, existen $U_x \in \delta_x$ y $U_y \in \delta_y$ abiertos en X tales que $x \in U_x$, $y \in U_y$ y $U_x \cap U_y = \emptyset$. Notemos que $y \in X - U_x$ y como U_x es abierto, se tiene que $\overline{X - U_x} = X - U_x = Fr(X - U_x) \cup int(X - U_x)$. Se afirma que $y \in int(X - U_x)$, de lo contrario $y \in Fr(X - U_x)$; es decir, todo abierto que contenga a y intersectará al conjunto $X - U_x$ y a su complemento U_x. En particular $y \in U_y$; esto es, $U_x \cap U_y \neq \emptyset$; lo que contradice la forma en que se escogio a dichos abiertos. Por lo que $y \in U_y \subset int(X - U_x)$.

Sea $U_{y'} = int(X - U_x)$ el cual es un abierto de X y $U_{y'} \in \delta_y$. Observe que

$$X = U_x \cup Fr(U_x) \cup U_{y'} \cup Fr(U_{y'})$$

así,

$$X - (Fr(U_x) \cup Fr(U_{y'})) = U_x \cup U_{y'},$$

donde $x \in U_x$ y $y \in U_{y'}$, además $Fr(U_x)$, $Fr(U_{y'}) \in \zeta$ por lo que $Fr(U_x) \cup Fr(U_{y'}) \in \zeta$, así se ha encontrado un elemento de ζ que separa a x y y en X.

$(2) \rightarrow (1)$. Sea W un abierto en X tal que $p \in W$. Para cada $x \in Fr(W)$ se tiene que algún elemento $C_x \in \zeta$ separa a p y x en X, esto es, existen dos abiertos G_x y H_x en $X - C_x$ tales que

$$p \in G_x \text{ y } x \in H_x,\ G_x \cap H_x = \emptyset \text{ y } G_x \cup H_x = X - C_x.$$

Notemos que, $Fr(H_x)$ es un subconjunto cerrado de C_x y $C_x \in \zeta$. Como ζ es hereditario,

(i) $Fr(H_x) \in \zeta$.

El conjunto de los abiertos construidos anteriormente $\beta = \{H_x : x \in Fr(W)\}$ es una cubierta abierta para $Fr(W)$ y como $Fr(W)$ es cerrado en X, $Fr(W)$ es compacto, por lo que existe $\{H_{x_i} : 1 \leq i \leq n\}$ una subcubierta abierta finita de β tal que

(ii) $Fr(W) \subset \bigcup_{i=1}^{n} H_{x_i}$.

Sea $H = \bigcup_{i=1}^{n} H_{x_i}$. Claramente

(iii) $Fr(H) \subset \bigcup_{i=1}^{n} Fr(H_{x_i})$.

Utilizando los resultados *(i) y (ii),* y dado que ζ es un sistema hereditariamente aditivo se tiene que $\bigcup_{i=1}^{n} Fr(H_{x_i}) \in \zeta$ y por lo tanto

(iv) $Fr(H) \in \zeta$.

Ahora, sea $V = W - \overline{H}$. Notemos que:

$$\overline{V} - V \subset \overline{W} - (W - \overline{H}) = \overline{W} \cap X - (W - \overline{H}) = \overline{W} \cap ((\overline{W} - W) \cup \overline{H})$$
$$= (\overline{W} \cap (\overline{W} - W)) \cup (\overline{W} \cap \overline{H}) = (\overline{W} - W) \cup (\overline{W} \cap \overline{H}) = Fr(W) \cup (\overline{W} \cap \overline{H}).$$

y por *(ii)*

$$\overline{V} - V \subset H \cup (\overline{W} \cap \overline{H}) \subset \overline{H}.$$

Así, $\overline{V} - V \subset \overline{H}$.

Observe que H es un abierto en X y como $V = W - \overline{H}$ se tiene que $H \cap V = \emptyset$ y $H \cap \overline{V} = \emptyset$, y entonces $(\overline{V} - V) \cap H = \emptyset$. Luego, se tiene que

$$\overline{V} - V \subset \overline{H} \text{ y } (\overline{V} - V) \cap H = \emptyset,$$

entonces

$$\overline{V} - V \subset \overline{H} - H$$

así, porque V y H son abiertos en X y por la Proposición 1.51, se tiene que $Fr(V) \subset Fr(H)$ y por lo tanto utilizando *(iv)* se concluye que $Fr(V) \in \zeta$. Notemos que $p \in V$ ya que $p \in W - \overline{H}$ y $\overline{H} = \overline{\bigcup_{j=1}^{n} H_j}$ y para cada j, $p \notin H_j$. Así, $p \in V \subset W$, donde V es un abierto en X, de esta manera se termina la prueba y concluimos que existe la base local δ_p requerida en *(1)*. □

La siguiente caracterización de continuo regular, es similar a la caracterización dada en la página 38.

Teorema 2.25. *Un continuo X es regular si y sólo si cualesquiera dos puntos de X son separados en X por algún conjunto finito de X.*

Demostración. Para ambas implicaciones considere la colección:

$$\zeta = \{A \subset X : A \text{ es finito y cerrado}\}$$

observe que esta colección es un sistema hereditariamente aditivo.

Ahora, supongamos que X un continuo regular, y sean $p \in X$, δ_p base local de p y U un elemento de δ_p. Observe que $Fr(U) \in \zeta$ ya que $|Fr(U)| < \infty$ y es cerrado en X. Aplicando la Proposición 2.24, cualesquiera dos puntos de X son separados por un elemento de ζ en X.

Inversamente, sean $p, q \in X$ y $A \in \zeta$ tal que A separa a p y q en X. Por la Proposición 2.24, cada $x \in X$ tiene una base local δ_x y cada $U \in \delta_x$ es abierto en X y $Fr(U) \in \zeta$, esto es, $|Fr(U)| < \infty$, Así por la Definición 2.20, X es un continuo regular. □

Estas son algunas propiedades más para las dendritas.

Teorema 2.26. *Toda dendrita es regular.*

Demostración. Sea X una dendrita. Aplicando el Teorema 2.7, cualesquiera dos puntos de X son separados por un tercero en X y por el Teorema 2.25 X es regular. □

Corolario 2.27. *Cada punto de una dendrita X es de orden menor o igual que $\aleph_0$ en X.*

Demostración. Del Teorema 2.26 se obtiene que X es regular y por la Definición 2.20, todo $x \in X$ tiene base local δ_x, donde la cardinalidad de la frontera de cada uno de sus elementos es finita; de donde, por la Definición 1.97, $ord(x, X) \leq \aleph_0$. □

En la Definición 1.97 se dijo que lo puntos en un continuo X que tienen orden uno son puntos extremos, y también hemos visto que los puntos de orden mayor o igual que dos son puntos de corte en X, pero los puntos tales que su orden es estrictamente mayor que dos tienen un nombre específico en nuestro estudio, por lo que se da la siguiente definición.

Definición 2.28. *Sean X una dendrita y $b \in X$. Entonces b es un* ***punto ramificación*** *de X si $ord(b, X) > 2$.*

Se demostrará el siguiente lema.

Lema 2.29. *Si X es un espacio métrico, conexo separable y ζ es una colección no numerable de subconjuntos cerrados, disjuntos dos a dos que son de corte de X, entonces existen $p, q \in X$ tales que una cantidad no numerable de elementos de ζ separan a p y q en X.*

Demostración. Sea $D = \{x_i : i \in \mathsf{N}\}$ un subconjunto denso numerable de X. Para cada $i \neq j$, sea $\zeta(i, j) = \{C \in \zeta : C$ separa a x_i y $x_j$en $X\}$. Se afirma que cada elemento C de ζ separa dos puntos de D en X pues de lo contrario existe $C \in \zeta$ tal que $X - C = U|V$, donde U y V son abiertos en X y uno de dichos abiertos no contiene elementos de D. Sea U es el abierto que no contiene elementos de D, esto es, $\overline{D} = X - U$. Pero esto es una contradicción ya que $\overline{D} = X$. Por lo tanto cada elemento de ζ separa dos elementos de D en X. Así

$$\bigcup\{\zeta(i, j) : i \neq j\} \subset \zeta,$$

y como ζ es no numerable, existen x y y dos elementos de X tal que el conjunto $\zeta(x, y)$ es no numerable. □

Ahora, estamos listos para el siguiente teorema, el cual es una propiedad cardinal para las dendritas.

Teorema 2.30. *El conjunto de los puntos ramificación de una dendrita es numerable.*

Demostración. (Realizaremos la demostración por contradicción). Suponga que el conjunto $Z = \{x \in X : ord(x, X) > 2\}$ es no numerable. Por el Teorema 2.12 cada punto de Z es un punto de corte. Así por el Lema 2.29, existen p y q en X y un subconjunto no numerable $B = \{r \in Z : r$ separa a p y $q\}$. Por el Teorema 1.82 X es arco conexo, por lo que existe un arco A en X que va de p a q, y es único por la Proposición 2.6. Observe que $B \subset A - \{p, q\}$. Si $b \in B$, b es punto de ramificación y por lo tanto $X - \{b\}$ tiene al menos tres componentes y una de ellas no intersecta al arco A. Sea W_b dicha componente. Notemos que $X - A$ es un abierto en X y W_b es también una componente de $X - A$. Por el segundo teorema de golpes en la frontera 1.42,

$$\overline{W_b} \cap (X - (X - A)) \neq \emptyset; \text{ es decir, } \overline{W_b} \cap A \neq \emptyset.$$

Se afirma que dicha intersección es exactamente $\{b\}$, para mostrarlo supongamos que existe al menos otro elemento $a \in \overline{W_b} \cap A$ donde $a \neq b$. Como $\overline{W_b} = W_b \cup \{b\}$ entonces $a \in (W_b \cap A)$; pero esto contradice la forma en que fue escogida la componente W_b. Por lo tanto $\overline{W_b} \cap A = \{b\}$.

Ahora, sean x, $y \in X$ con $x \neq y$. Sean W_x y W_y componentes correspondientes de $X - \{x\}$ y $X - \{y\}$ tales que $W_x \cap A = \emptyset$ y $W_y \cap A = \emptyset$. Se demostrará que $W_x \cap W_y = \emptyset$. Observe lo siguiente:

$$\{x\} = \overline{W_x} \cap (W_y \cup A) = (\overline{W_x} \cap W_y) \cup (\overline{W_x} \cap A) = (\overline{W_x} \cap W_y) \cup \{x\},$$

esto es, puede pasar que:

(a) $\overline{W_x} \cap W_y = \emptyset$ o

(b) $x \in \overline{\overline{W_x} \cap W_y}$,

Observe que (b) no puede pasar ya que $\overline{W_y} \cap A = \{y\}$ como $x \neq y$ y $x \in A$, $x \notin \overline{W_y}$. De esta manera, se obtiene que $\overline{W_x} \cap W_y = \emptyset$, por lo que $W_x \cap W_y = \emptyset$, con lo que se obtiene que $\{W_b : b \in B\}$ es una colección no numerable de conjuntos abiertos disjuntos, pero esto es una contradicción, con lo cual se concluye que el conjunto de puntos ramificación de una dendrita es numerable. $\square$

2.3. Aproximación por árboles

En esta sección se dará la noción de la función llamada primer punto (vea en [16, 10.26]), para lo cual comezaremos con dos lemas que nos ayudarán a definirla. Además, será muy interesante la demostración del teorema llamado, Aproximación por árboles, el cual nos dice que para las dendritas existe una sucesión de árboles tales que reunen una diversidad de propiedades que se enlistarán en el Teorema 2.34, este teorema nos ayudará a manejar las dendritas a partir de árboles contenidos en ellas, que serán subcontinuos más comodos para trabajarlas, en algunas ocasiones. También, demostraremos un corolario del teorema de aproximación por árboles donde veremos, que podemos escribir una dendrita como la unión de arcos y el conjunto de sus puntos extremos, donde el diámetro de los arcos decrece infinitamente.

Comencemos con el siguiente lema.

Lema 2.31. *Sean X una dendrita y Y un subcontinuo de X. Para cada $x \in X - Y$ existe un único punto $r(x) \in Y$ tal que $r(x)$ es un punto de cualquier arco en X que va de x a cualquier punto de Y.*

Demostración. Fijemos $x \in X-Y$ y sea $y_0 \in Y$. Como X es un continuo localmente conexo, (Teorema 1.82) X es arco conexo, por lo que existe un arco A en X que va de x a y_0. Consideremos el orden '$\leq$én el conjunto A tal que $x \leq y_0$. Sea $M = \{x \leq t : t \in A \cap Y\}$, por el Teorema de Zorn el conjunto M tiene mínimo, sea $r(x) = mínM$. Así $r(x) \in A \cap Y$. Ahora, sean $y_1 \in Y$ y B un arco en X que va de x a y_1. Se demostrará que $r(x) \in B$. Como Y es un subcontinuo de X, entonces por el Corolario 2.11, Y es una dendrita y por el Teorema 1.82, Y es arco conexo; y así, existe un arco C en Y que va de $r(x)$ a y_1. Sea D un arco en X que va de $r(x)$ a x. Notemos que $C \cap D = \{r(x)\}$ y $C \cup D$ es un arco en X que va de x a y_1, así, $C \cup D$ y B son arcos de la dendrita X con los mismos puntos extremos; y por la Proposición 2.6, $B = C \cup D$; con lo que se demuestra que $r(x) \in B$.

Ahora, se demostrará la unicidad de $r(x)$. Para lo cual, supongamos que para $x \in X - Y$ existen $r(x), s(x) \in Y$, con $r(x) \neq s(x)$, tales que tienen la propiedad anteriormente demostrada. Como X es arco conexo, existe un arco A' en X que va de x a $r(x)$, notemos que $s(x) \in A'$ ya que $s(x)$ tiene la propiedad de estar contenido en cualquier arco que va de x a cualquier punto de Y. Así, $s(x) \leq r(x)$. De manera similar, existe un arco A'' en X que va de x a $s(x)$, notemos que $r(x) \in A'$ ya que $r(x)$ tiene la propiedad de estar contenido en cualquier arco que va de x a cualquier punto de Y. Así, $r(x) \leq s(x)$. Por lo tanto, $r(x) = s(x)$. Con lo se concluye la demostración del Lema. $\square$

Lema 2.32. *Sean X una dendrita y Y un subcontinuo de X. Definimos $r\colon X \to Y$ por $r(x)$ como en 2.31 si $x \in X - Y$ y $r(x) = x$ si $x \in Y$. Entonces la función r es continua (esto es una retracción de X sobre Y).*

Demostración. Demostremos que r es continua. Para esto, sea $x \in X$ y consideremos los siguientes casos:

Caso 1: Supongamos que $x \in X - Y$ y que $X - Y = \cup_{\alpha \in \Delta} C_\alpha$ donde cada C_α es una componente de $X - Y$. Ahora, supongamos que para $\alpha_x \in \Delta$, $x \in C_{\alpha_x}$. Sea W un abierto de Y tal que $r(x) \in W$. Notemos que $X - Y$ es abierto y conexo, por lo tanto C_{α_x} es un abierto y conexo en X tal que $x \in C_{\alpha_x}$ y $r(C_{\alpha_x}) = \{r(x)\} \subset W$.

Caso 2: Supongamos que $x \in Y$. Así $r(x) = x$. Sea V un abierto de Y tal que $r(x) \in V$. Existe W abierto de X tal que $V = W \cap Y$ y $x \in W$. Si $W = \cup_{\alpha \in \Delta} W_\alpha$, donde W_α son componentes de W, existe $\beta \in \Delta$ tal que $x \in W_\beta$. Notemos que W_β es un abierto y conexo de X. Se demostrará que $r(W_\beta) \subset V$. Para esto observe lo siguiente:

$$W_\beta = (W_\beta \cap Y) \cup [W_\beta \cap (X - Y)].$$

Entonces para todo $z \in (W_\beta \cap Y)$, $r(z) = z \in V$, y así $(W_\beta \cap Y) \subset V$. Ahora, sea $z \in [W_\beta \cap (X - Y)]$. Como $x \in (W_\beta \cap Y)$ y X es una dendrita, (por el Teorema 1.82), existe un arco B en X que va de x a z. Notemos que como $z \leq r(z) \leq x$, $r(z) \in B \subset W_\beta \subset V$. Así se concluye la demostración del Lema. $\square$

Notación 2.33. *La función $r\colon X \to Y$ definida en 2.32 es llamada **función primer punto para*** $\mathbf{Y}$.

Denotemos al arco que va de r a s como $[r, s]$. Ahora, estamos listos para el siguiente teorema, el cual nos permitirá aproximar una dendrita por árboles.

Teorema 2.34. *Sea X una dendrita no degenerada. Entonces existe una sucesión $\{Y_i\}_{i=2}^{\infty}$ que satisface los siguientes proposiciones:*

(1) Cada Y_i es un árbol;

(2) Para cada $i \in \mathsf{N}$, $Y_i \subset Y_{i+1}$;

(3) $\lim_{i\to\infty} Y_i = X$;

(4) Existe $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $Y_1 = \{p_1\}$ y, para cada $i \in \mathsf{N}$, $\overline{Y_{i+1} - Y_i}$ es un arco con punto extremo p_i tal que $\overline{Y_{i+1} - Y_i} \cap Y_i = \{p_i\}$;

(5) Para cada $i \in \mathsf{N}$ se tiene que $r_i \colon X \to Y_i$ es la función primer punto para Y_i. La sucesión $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge uniformemente a la función identidad sobre X.

Demostración. Supongamos que X no es un árbol. Como todo continuo es separable, sea $\{x_j : j \in \mathsf{N}\}$ un subconjunto denso numerable de X. Sean $Y_1 = \{x_1\}$ y $p_1 = x_1$. Por el Teorema 1.82, existe el arco $[p_1, x_2] \subset X$. Sean $Y_2 = [p_1, x_2]$ y $p_2 = x_2$. Notemos que

$$\overline{Y_2 - Y_1} \cap Y_1 = \overline{[p_1, p_2] - \{p_1\}} \cap \{p_1\} = [p_1, p_2] \cap \{p_1\} = \{p_1\}.$$

Luego, para $k = \min\{j : x_j \notin Y_2\}$, existe el arco $[p_2, x_k] \subset X$ donde $p_2 \in Y_2$. Sea $x_k = p3$ y $Y_3 = Y_2 \cup [p_2, p_3]$. Notemos que

$$\overline{Y_3 - Y_2} \cap Y_2 = \overline{(Y_2 \cup [p_2, p_3]) - Y_2} \cap Y_2 = [p_2, p_3] \cap Y_2 = \{p_2\}.$$

Ahora, supongamos que para $k > 0$, Y_k es un árbol, y que $Y_k \neq X$. Escojamos a $m = \min\{j : x_j \notin Y_k\}$. Por el Teorema 1.82, existe el arco $[p_k, x_m]$ donde $p_k \in Y_k$. Sean $p_{k+1} = x_m$ y $Y_{k+1} = Y_k \cup [p_k, p_m]$. Observemos que

$$\overline{Y_{k+1} - Y_k} \cap Y_k = \overline{(Y_k \cup [p_k, p_{k+1}]) - Y_k} \cap Y_k = [p_k, p_{k+1}] \cap Y_k = \{p_k\}.$$

Por inducción, para cada $i \in \mathsf{N}$, se tienen definidos a Y_i y p_i, donde cada Y_i es un árbol. Con esta construcción los incisos *(1)*, *(2)*, y *(4)* del teorema son válidos.

(3) Se demostrará que $\lim Y_i = X$. Haremos ver que para $\varepsilon > 0$, existe n tal que si $i \geq n$, *(1)* $Y_i \subseteq N(\varepsilon, X)$ y *(2)* $X \subseteq N(\varepsilon, Y_i)$. Notemos que *(1)* se cumple inmediatamente ya que cada $Y_i \subset X$. Para ver que se cumple *(2)*, sea $t \in X$, (demostremos que existe $l_i \in Y_i$ tal que $d(t, l_i) < \varepsilon$). $B(t, \varepsilon)$ es la bola con centro en t y radio ε, existe x_l del conjunto denso numerable tal

que $x_l \in B(t, \varepsilon)$. Así $d(x_l, t) < \varepsilon$. Sea $x_i \in Y_l$ y sea $n = l$. Ahora, si $i > n = l$ entonces $Y_l \subset Y_i$ y así $x_l \in Y_i$, y por lo tanto $X \subseteq N(\varepsilon, Y_i)$. Por lo que *(3)* es válido.

(5) Sea $\varepsilon > 0$. Como X es uniformemente localmente arco conexo, garantizamos la existencia de $\delta > 0$ que satisface la Definición 1.80. Por *(3),* existe $N \in \mathsf{N}$ tal que $H_d(X, Y_i) < \delta$ para cada $i \geq N$. Pero, $H_d(X, Y_i) < \delta$ si y sólo si (i) $X \subset N(\delta, Y_i)$ y *(2)* $Y_i \subset N(\delta, X)$. Por la densidad del conjunto $\{x_j : j \in \mathsf{N}\}$, para cada $x \in X$, existe $y \in Y_i$ tal que $d(x, y) < \delta$. Notemos que $d(x, r_i(x)) \leq d(x, y) < \delta$, como X es uniformemente localmente arco conexo, entonces el arco $[x,r_i(x)]$ es tal que $di\acute{a}m([x, r_i(x)]) < \varepsilon$ esto es $d(x, r_i(x)) < \varepsilon$. Con lo que se concluye la prueba de este teorema. □

Aquí damos la siguiente notación: $Cut(X)$ denotará el **conjunto de puntos de corte de X**. Recordemos que $E(X)$ es el **conjunto de puntos extremos de X**. Se demostrará ahora una consecuencia del teorema 2.34.

Corolario 2.35. *Sea X una dendrita no degenerada. Entonces X puede ser escrita como sigue:*

$$X = E(X) \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$$

donde $E(X)$ es el conjunto de los puntos extremos de X y para cada $i \in \mathsf{N}$, A_i es un arco con puntos extremos p_i y q_i tal que $A_{i+1} \cap \left(\bigcup_{j=1}^{i} A_j\right) = \{p_{i+1}\}$ y el diam$(A_i) \to 0$ cuando $i \to \infty$.

Demostración. Sean X una dendrita no degenerada y $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión donde los Y_i son como en (i), (ii) y (iv) del Teorema 2.34. Ahora, sea $A_{i+1} = \overline{Y_{i+2} - Y_{i+1}}$ un arco con punto extremo p_{i+1}. Notemos que

$$\overline{Y_{i+2} - Y_{i+1}} \cap Y_{i+1} = \{p_{i+1}\} = A_{i+1} \cap [\bigcup_{j=1}^{i} A_j].$$

por (v) se tiene que para $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existe $N \in \mathsf{N}$, talque si $n > N$ entonces $d(r_n(x), x) < \frac{\varepsilon}{2}$ para toda $x \in X$. Se demostrará que $di\acute{a}m(A_i) \to 0$ cuando $i \to \infty$; esto es, se verá que para $i > N$, $di\acute{a}m(A_i) < \varepsilon$.

Para $n \geq i > N$, sean $A_n = \overline{Y_{n+1} - Y_n}$, y a, $b \in A_n$. Como a y b estan en el mismo arco, entonces $r(a) = r(b)$ así,

$$d(a, b) \leq d(a, r(a)) + d(r(a), b) = \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

por lo tanto $di\acute{a}m(A_i) \to 0$ cuando $i \to \infty$.

Finalmente se demostrará la siguiente igualdad:

$$X = E(X) \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$$

es claro que $E(X) \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \subset X$. Se probará que $X \subset E(X) \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$, para eso notemos que $\bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i$ es un conjunto conexo y denso en X, y como $\bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ es un conjunto conexo y denso en X, esto es, $\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = X$. Se afirma que $Cut(X) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, para demostrar esto, supongamos lo contrario, esto es, existe $x \in Cut(X)$ y $x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$,

$$x \in X = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = [\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] \cup Fr[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i],$$

entonces $x \in Fr[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i]$. Pero $Fr[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] \subset E(X)$, por lo que x es un punto extremo de X, pero esto es una contradicción ya que x fue tomado de $Cut(X)$. Luego, observe que $R = X - [\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] \subset E(X)$ por lo que

$$X = R \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \subset E(X) \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i).$$

Con esto último queda demostrado el Corolario. $\square$

2.4. Propiedad del punto fijo

En esta sección demostrarémos que las dendritas tienen la propiedad del punto fijo (Vea el Teorema 2.39). La siguiente proposición nos dará información para demostrar lo anteriormente dicho.

Proposición 2.36. *Si X es un continuo y existe una sucesión de funciones continuas que van de X en X, $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$, que converge uniformemente a la función identidad sobre X, id_X, tal que para cada $i \in \mathsf{N}$, $f_i(X)$ tiene la propiedad del punto fijo. Entonces X tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sean $f\colon X \to X$ una función continua y $\varepsilon > 0$. Para cada $i \in \mathsf{N}$, la función

$$f_i \circ f \mid f(X_i)\colon f(X_i) \to f(X_i)$$

tiene un punto fijo, es decir, existe x_i tal que $f_i(f(x_i)) = x_i$.

Por la convergencia uniforme de $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ tenenmos que $d(f_i, id_X) < \varepsilon$ para $i \geq N$. Y por lo tanto

$$d(x_i, f(x_i)) = d(f_i(f(x_i)), f(x_i)) < \varepsilon,$$

y así, $x_i = f(x_i)$. Ahora, como X es compacto, la sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es convergente en X, sea x el punto al que converge, entonces $f(x) = x$. Así concluimos que X tiene la propiedad del punto fijo. □

Necesitamos saber si los árboles tienen la propiedad del punto fijo. Para esto, probaremos el siguiente Lema.

Lema 2.37. *Si X y Y son dos continuos con la propiedad del punto fijo tales que $X \cap Y = \{p\}$, entonces $X \cup Y$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sea $f \colon X \cup Y \to X \cup Y$ una función continua. Sin pérdida de generalidad asumamos que $f(p) \in X$. Definamos $r \colon X \cup Y \to X$ como

$$r(z) = \begin{cases} z, & \text{si } z \in X; \\ p, & \text{si } z \in Y. \end{cases}$$

Se afirma que la función r es continua y lo justifica el Teorema 1.11. Fijémonos en $f \mid X$, notemos que es continua. Ahora, $r \circ (f\,|_X) \colon X \to X$ es composición de funciones continuas, por lo tanto es continua y tiene un punto fijo, ya que X tiene la propiedad del punto fijo, entonces existe $b \in X$ tal que $r(f(b)) = b$. Entonces, si $f(b) \in X$ entonces $b = r(f(b)) = f(b)$ y si $f(b) \in Y$, $r(f(b)) = p = b$, y así $f(p) = f(b) \in X \cap Y$, con lo que concluimos que $f(p) = p$. Por lo tanto $X \cup Y$ tiene la propiedad del punto fijo. □

Lema 2.38. *Todo árbol tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sea Y un árbol. Por el Teorema 1.102 Y contiene una cantidad finita de puntos extremos. Sea E el conjunto de los puntos extremos de Y. Así, $|E| = n$. Realizaremos la demostración por inducción tomando como base los puntos extremos de Y.

Paso (i): Sea $A_1 = [x_1, x_2]$ un arco en Y, donde x_1, $x_2 \in E$, por la Definición 1.21, A_1 es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$, el cual tiene la propiedad del punto fijo y como dicha propiedad es una invariante topológica entonces A_1 tiene la propiedad del punto fijo. Luego, sea $A_2 = [p_1, x_3]$ un arco en Y, donde $x_3 \in E$ y $p_1 \in [x_1, x_2]$ tal que $p_1 \notin E$ y $A_2 \cap A_1 = \{p_1\}$, A_2 tiene la propiedad de punto fijo (justificando como anteriormente se hizo para A_1), así por el Lema 2.37, $A_2 \cup A_1$ tiene la propiedad del punto fijo.

Paso (ii): Supongamos que $\bigcup A_k$ tiene la propiedad del punto fijo, y $\bigcup A_k$ contiene los puntos extremos $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$. Sea A_{k+1} un arco en Y con puntos extremos p_k y x_{k+2}, donde $x_{k+2} \in E$, $p_k \in \bigcup A_k$ tal que $p_k \notin E$ y $[\bigcup A_k] \cap A_{k+1} = \{p_k\}$, notemos que A_{k+1} tiene la propiedad del punto fijo, así por el Lema 2.37, $\bigcup A_{k+1}$ tiene la propiedad del punto fijo. Notemos que $Y = \bigcup A_{n-1}$, por inducción se concluye que todo árbol tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

Teorema 2.39. *Toda dendrita tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sea X una dendrita no degenerada. Por el Teorema 2.34, existe una sucesión $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que cada Y_i es un árbol. Para cada $i \in \mathsf{N}$, sea $r_i \colon X \to Y_i$ una función continua definida como en el Teorema 2.32. Por el lema 2.38 cada Y_i tiene la propiedad del punto fijo, entonces cada función continua $r_i \mid Y_i \colon Y_i \to Y_i$ tiene un punto fijo, así $r_i \colon X \to X$ tiene un punto fijo; y por (v) del Teorema 2.34, $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge uniformemente a la función identidad sobre X. Ahora, aplicando la Proposición 2.36, se concluye que X tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

El siguiente teorema es más bien una consecuencia del Teorema 2.39.

Teorema 2.40. *Toda dendrita no degenerada satisface las hipótesis del Teorema de Aproximación Interior (1.32), donde la $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ pedida en 1.32 satisface las condiciones del Teorema 2.34, además $g_i \colon Y_{i+1} \to Y_i$ del Teorema 1.32, es definida como la identidad en Y_i y para p_i como en el Teorema 2.34, $g_i^{-1}(p_i) = \overline{Y_{i+1} - Y_i}$.*

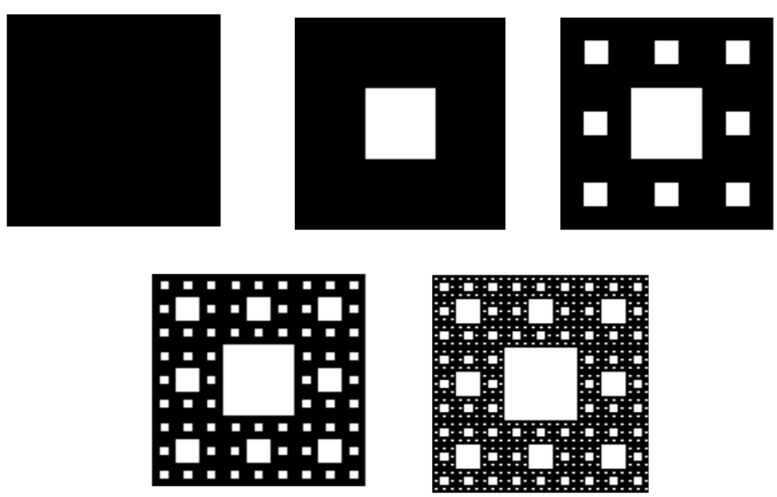
Demostración. Sean Y_i y r_i como en el Teorema 2.34. Notemos que se satisfacen las condiciones que requiere el Teorema 1.32. Sean para cada i, $\varphi_i = r_i$ y $g_i = r_i \mid Y_{i+1} \colon Y_{i+1} \to Y_i$. Por el Lema 2.32, φ_i y g_i son continuas y suprayectivas. Por como esta definida r_i en el Lema 2.32 $g_i \circ \varphi_{i+1} = \varphi_i$ es válida. Por (v) de 2.34 $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge uniformemente a la función identidad sobre X. Por último, las condiciones extras que debe cumplir cada g_i en este teorema son inmediatas por como está definida cada r_i y por las condiciones (ii) y (iv) del Teorema 2.34. Con lo cual se completa la demostración a este teorema. $\square$

2.5. Una dendrita universal

Sea M una familia de espacios topológicos y sea R un elemento de M, decimos que R es universal en M si y solo si R contiene una copia topológica de cada elemento de la familia M. Algunos ejemplos de esto son:

Para el primer ejemplo damos la noción de curva, como aquella que tiene dimensión uno (vea en [16, pág. 186]). Algunos ejemplos de curva son: las dendritas y las gráfica. Ahora si, pasemos con el primer ejemplo de espacio topológico universal.

Ejemplo 2.41. *Sea $\mathcal{L}$ la familia de todas la curvas planas. Consideremos el cuadrado sólido $X_0 = [0,1] \times [0,1]$ y ahora sea $X_1 = X_0 - (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Esto quiere decir que de manera grafica X_1 es el resultado de dividir X_0 en 9 cuadrados congruentes y extraerle el central. A continuación para construir X_2 nos fijamos en los 8 cuadrados congruentes que conforman X_1 y dividimos cada uno en 9 nuevos cuadrados congruentes para extraer el central a cada uno y siguiendo este procedimiento podemos obtener X_3, X_4 y cada X_i con $i \in \mathsf{N}$. En la siguiente figura esquemátizamos dicha curva.*



Curva Universal de Sierpiñski.

Sea $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$*. Este continuo es llamado la* ***curva de Sierpiñski*** *y es universal para la familia* $\mathcal{L}$*.*

Ejemplo 2.42. *Sean* $\mathcal{F}$ *la familia de todos los continuos y para* $i \in \mathsf{N}$*,* $I_1 = [0,1] = I_i$*. Ahora, sea* $X = \Pi_{i=1}^{\infty} I_i$*. Al continuo* X *le es llamado el* ***cubo de Hilbert*** *y es universal para la familia* $\mathcal{F}$*.*

Una pregunta que puede llegar a nuestra mente es, ¿Existirá una dendrita que sea universal en la familia de todas las dendritas? En esta sección contestaremos esta pregunta, pero antes de responderla daremos una caracterización más de las dendritas utilizando la siguiente definición.

Definición 2.43. *Un espacio topológico conexo* X *es* ***unicoherente****, si para cualesquiera* A *y* B *subconjuntos cerrados conexos de* X *tales que* $X = A \cup B$*, se tiene que* $A \cap B$ *es conexo. Además, si todo subconjunto conexo de* X *es unicoherente, entonces diremos que* X *es* ***hereditariamente unicoherente****.*

El siguiente teorema es una consecuencia del Teorema 2.15.

Teorema 2.44. *Sea* X *un continuo localmente conexo. Entonces* X *es una dendrita si y solo si* X *es hereditariamente unicoherente.*

Demostración. Supongamos que X es una dendrita. Se demostrará que cada subconjunto cerrado y conexo de X es unicoherente. Sea R un subconjunto cerrado conexo de X, notemos que R es un subcontinuo de X y, por el Corolario 2.11, R es una dendrita. Sean M y N dos subconjuntos cerrados conexos de R tales que $R = M \cup N$, por el Teorema 2.15, $M \cap N$ es conexo, así, R es unicoherente.

Ahora, supongamos que X es hereditariamente unicoherente. Demostremos que X es una dendrita, para esto sólo basta probar que X no contiene curvas cerradas simples. Supongamos que existe una curva cerrada simple A en X. Notemos que A no tiene la propiedad de ser unicoherente, por lo que X no es hereditariamente unicoherente, pero esto es una contradicción a la hipótesis. Por lo tanto, X no contiene curvas cerradas simples, y como X es localmente conexo, X es una dendrita. Con esto se concluye la demostración de esta caracterización. $\square$

Existen más caracterizaciones que tiene que ver con conjuntos localmente conexos, como la caracterización anterior. ver [4]

El siguiente teorema será utilizado mas adelante.

Teorema 2.45. *Todo límite inverso de dendritas con funciones de ligadura monótonas, es una dendrita.*

Demostración. Sea $X_\infty = \varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$ donde cada X_i es una dendrita y cada $f_i\colon X_{i+1} \to X_i$ es monótona; esto es, f_i es continua y $f_i^{-1}(y)$ es conexo para cada $y \in X_i$. Veremos que X_∞ es hereditariamente unicoherente y localmente conexo. Para lo primero es suficiente mostrar que la intersección de dos subcontinuos de X_∞ es conexo. Sean A y B subcontinuos de X_∞ y sea $C = A \cap B$. Para cada $i \in \mathsf{N}$, sea $C_i = \pi_i(A) \cap \pi_i(B)$, donde $\pi_i\colon X_\infty \to X_i$ es la $i-$ésima función proyección. Entonces por la Proposición 1.29,

$$(1)\ C = \varprojlim\{C_i, f_i|C_{i+1}\}_{i=1}^\infty,$$

se demostrará que C es conexo. En caso de que $C = \emptyset$ se tiene que C es conexo, ahora supongamos que $C \neq \emptyset$. Claramente $C_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \mathsf{N}$, de no ser así (1) no podría ser construida. Luego, como π_i es continua, $\pi_i(A)$ y $\pi_i(B)$ son subcontinuos X_i. Ahora aplicando el Teorema 2.44 a $\pi_i(A)$ y $\pi_i(B)$, se obtiene que para cada $i \in \mathsf{N}$, $C_i = \pi_i(A) \cap \pi_i(B)$ es conexo. Además como la intersección de dos conjuntos cerrados es un conjunto cerrado se tiene que $\pi_i(A) \cap \pi_i(B)$ es un conjunto cerrado de X_i el cual es compacto, por el Teorema 1.6, $C_i = \pi_i(A) \cap \pi_i(B)$ es compacto y siguiendo la definición de continuo cada C_i es un continuo. Así por (1) y el Teorema 1.25, C es continuo.

Ahora se demostrará que X_∞ es localmente conexo. Notemos que si cada f_i son funciones suprayectivas, entonces X_∞ es localmente conexo por el Teorema 1.92.

Luego por el Lema 1.26

$$X_\infty = \varprojlim\{\pi_i\left(X_\infty\right), f_i \mid \pi_{i+1}\left(X_\infty\right)\}_{i=1}^\infty,$$

se demostrará que cada $f_i \mid \pi_{i+1}\left(X_\infty\right)\colon \pi_{i+1}\left(X_\infty\right) \to \pi_i\left(X_\infty\right)$ es monótona y suprayectiva.
Por hipótesis se tiene que para $y \in \pi_i(X_\infty) \subset X_i$, $f_i^{-1}(y) \subset X_{i+1}$ es conexo. Luego, observe que $[f_i \mid \pi_{i+1}\left(X_\infty\right)]^{-1}(y) = \left[f_i^{-1}(y) \cap \pi_{i+1}\left(X_\infty\right)\right] \subset X_{i+1}$. Como $f_i^{-1}(y) \subset X_{i+1}$ es conexo y $\pi_{i+1}\left(X_\infty\right) = X_{i+1}$ conexo, entonces se concluye por el Teorema 1.10, $[f_i \mid \pi_{i+1}\left(X_\infty\right)]^{-1}(y) = \left[f_i^{-1}(y) \cap \pi_{i+1}\left(X_\infty\right)\right]$ es conexo. Con lo cual se obtiene que cada $f_i \mid \pi_{i+1}\left(X_\infty\right)$ es monótona. Por

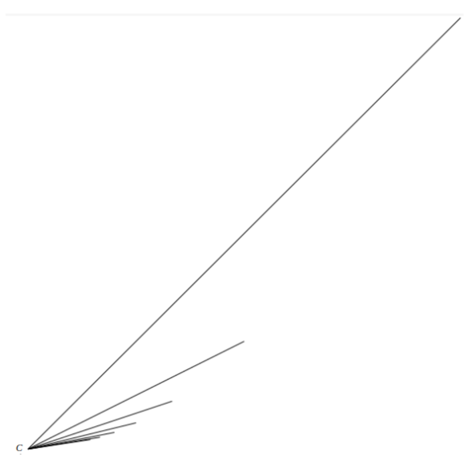
último se demostrará que $f_i \mid \pi_{i+1}(X_\infty)$ es suprayectiva. Observe que para cada $i \in \mathsf{N}$, por el Lema 1.26, $f_i \circ \pi_{i+1} = \pi_i$; esto es, $f_i(\pi_{i+1}(X_\infty)) = \pi_i(X_\infty)$ por lo cual cada $f_i \mid \pi_{i+1}(X_\infty)$ es suprayectiva. Aplicando el Teorema 1.92 concluimos que X_∞ es localmente conexo. Por último aplicando el Teorema 2.44, X_∞ es una dendrita. $\square$

El siguiente resultado contestará la pregunta planteada al principio de esta sección.

Teorema 2.46. *(Dendrita universal de Wazewski). Existe una dendrita universal.*

Demostración. Para demostrar la existencia de una dendrita universal, comenzaremos realizando la construcción de un continuo, realizando uniones de dendritas, después, demostraremos que el continuo construido, realmente es una dendrita, el siguiente paso que daremos es demostrar que dicha dendrita es encajable en el plano, R^2, y por último haremos la demostración de que dicha dendrita es universal. Dicho esto, comenzamos con la construcción:
Paso 1: Construcción de D_∞.
Sea $c \in \mathsf{R}^2$, se construirá F_w con vértice en c formada por segmentos de líneas rectas B_j de R^2 donde para cada $j \in \mathsf{N}$, c es punto extremo de B_j, además para $j \neq k$, $B_j \cap B_k = \{c\}$, y el $diám(B_j) \to 0$ cuando $j \to \infty$.

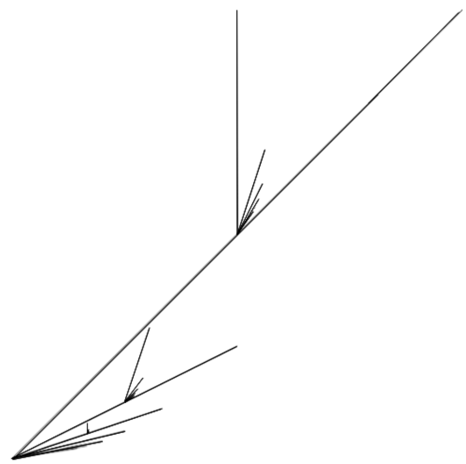
Sea $D_1 = \bigcup_{j \in \mathsf{N}} B_j$. Observe que $D_1 \subset \mathsf{R}^2$.



Construcción de D_1.

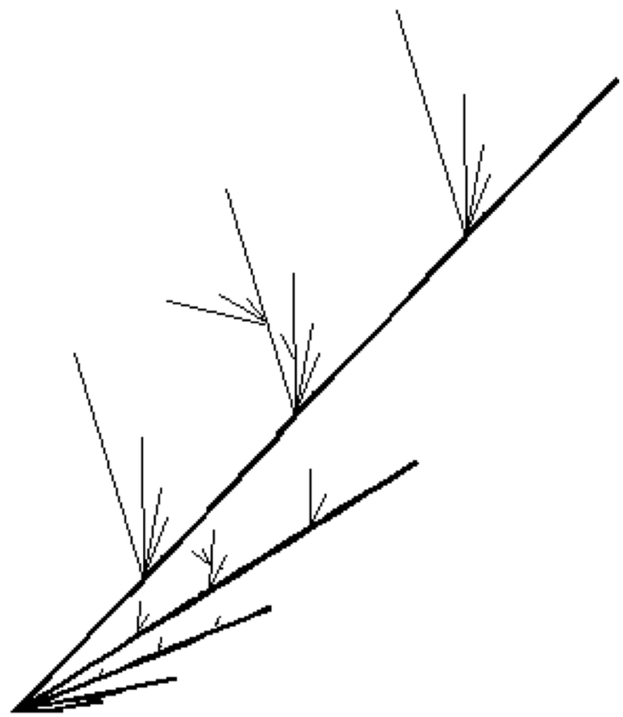
Luego, para cada $j \in \mathsf{N}$, sea m_j el punto medio de cada B_j. Ahora formaremos nuevos conjuntos S_j homeomorfos a F_w con vértice en los puntos m_j, repectivamente, de tal manera que cada $S_j \cap D_1 = \{m_j\}$, además para $j \neq k$, $S_j \cap S_k = \emptyset$ y el *diám*$(S_j) \to 0$ cuando $j \to \infty$.

Sea $D_2 = D_1 \cup [\bigcup_{j \in \mathsf{N}} S_j]$. Observe que $D_2 \subset \mathsf{R}^2$.



Construcción de D_2.

Ahora, para la siguiente construcción, nos fijamos en el punto medio s_j de cada segmento de línea recta de cada S_j donde formaremos nuevos conjuntos R_j homeomorfos a F_w, de tal manera que $R_j \cap D_2 = \{s_j\}$, además para cada $j \neq k$, $R_j \cap R_k = \emptyset$ y el *diám*$(R_j) \to 0$ cuando $j \to \infty$. También para cada B_j, nos fijamos en los puntos medios b_j de los siguientes segmentos: uno que va del punto extremo c a el punto medio m_j y el otro subarco que va del punto medio m_j al otro punto extremo del arco B_j que no es c. Donde formaremos nuevos conjuntos T_j homeomorfos a F_w, de tal manera que $T_j \cap D_2 = \{b_j\}$ y $T_j \cap R_j = \emptyset$
Sea $D_3 = D_2 \cup D_1 \cup [\bigcup_{j \in \mathsf{N}} T_j] \cup [\bigcup_{j \in \mathsf{N}} R_j]$.



Construcción de D_2.

De esta manera seguiremos construyendo cada D_i con $i \in \mathsf{N}$, observe que cada D_i es una dendrita y además $D_i \subset D_{i+1}$.

Ahora, definamos las funciones $f_i \colon D_{i+1} \to D_i$ de la siguiete manera; para cada $x_j \in S_j$, donde $S_j \subset D_{j+1}$ y $S_j \not\subset D_j$, se tiene que $f_j(x_j) = m_j$.

Observe que cada f_i es una función monótona.

Sea $D_\infty = \varprojlim \{D_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$

Paso 2: Demostremos que D_∞ es una dendrita.

Por la manera en que fue construida D_∞, se satisfacen las hipótesis del Teorema 2.45. Así D_∞ es una dendrita.

Paso 3: Demostremos que D_∞ es encajable en R^2.

Por la construcción que se hizo en el paso 1, de D_∞, se obtienen los incisos del Teorema 1.27. Por lo tanto, como para cada $i \in \mathsf{N}$, $D_i \subset D_{i+1}$, entonces el

$D_\infty = \varprojlim\{D_i, f_i\}_{i=1}^\infty$ es homeomorfo a $\overline{\bigcup_{i=1}^\infty D_i}$. Notemos que $\overline{\bigcup_{i=1}^\infty D_i} \subset \mathsf{R}^2$, con lo que se concluye que D_∞ es encajable en R^2.

Paso 4: D_∞ es universal para la familia de las dendritas.

Por el paso 3, se tiene que D_∞ es encajable en el plano. Dado que para cada $i \in \mathbf{N}$, $D_i \subset D_{i+1}$, por el Teorema 1.27, $D_\infty = \overline{\bigcup_{i=1}^\infty D_i}$.

Ahora, sea $C_1 = \{c\}$ donde c es el vértice de D_1 y para cada $i \in \{2, 3, \ldots\}$ sean C_i el conjunto de todos los puntos centrales de cada copia topológica de F_w en $\bigcup_{i=1}^\infty D_i$, excepto los puntos centrales de las copias topológicas de F_w en D_{i-1}. Sea $C = C_1 \cup C_2$. Observando la construcción hecha en el paso 1, se tiene que C es el conjunto de todos los puntos ramificación de D_∞ y también las siguientes propiedades:

(2) $ord(z, D_\infty) = \aleph_0$ para toda $z \in C$.

(3) Para cada $i \geq 2$, $C_i \cap (A - \{x, y\})$ es un subconjunto denso numerable de un arco A de D_∞ con puntos extremos x y y.

Veamos la siguiente notación para las funciones de ligadura f_i

Si $j > i + 1$ entonces $f_{i,j} = f_i \circ \ldots \circ f_{j-1} \colon D_j \to D_i$ y $f_{i,i} = f_i$.

Demostremos que $D_\infty = \varprojlim\{D_i, f_i\}_{i=1}^\infty$ es una dendrita universal. Sea X una dendrita no degenerada, veamos que X tiene una copia topológia en D_∞. Por el Teorema 2.40, $X = \varprojlim\{Y_i, g_i\}_{i=1}^\infty$, donde para cada $i \in \mathsf{N}$, Y_i y g_i satisfacen las condiciones del Teorema 2.34.

Ahora, sea B el conjunto de los puntos ramificación de Y, por el Teorema 2.30

$$(4)\ \ |B| \leq \aleph_0.$$

Luego, por (iv) del Teorema 2.34, $Y_1 = \{p_1\}$. Sea $n(1) = 1$. Definamos $h_i \colon Y_1 \to D_{n(1)}$ tal que $h_1(p_1) \in C_2$, esto es posible por (3) enunciado anteriormente. Por (iv) del Teorema 2.34, Y_2 es un arco con uno de sus puntos extremos p_1. Sea $Y_2' = Y_2 - \{p_1, q_1\}$ donde $p_1 \neq q_1$. Aunque $B \cap Y_2'$ puede no ser denso en Y_2', nos permite obtener un subconjunto denso numerable E_2 de Y_2' tal que $B \cap Y_2' \subset E_2$. Ahora, sea A un arco en $D_{n(2)}$ que va de $h_1(p_1)$ a p_2' donde $h_1(p_1) \in (D_{n(1)} \cap C_2)$ y $p_2' \in D_{n(2)+1}$. Observe que

(5) $f_{n(1),n(2)}(Y_2 - Y_1) = \{h_1(p_1)\}$,

esto es, $f_{n(1),n(2)}$ envia a los puntos del arco al punto $h_1(p_1)$.

Seguimos, por (3) mencionado anteriormente nos permite aplicar el Corolario 1.66, para obtener un homeomorfismo $h_2 \colon Y_2 \to A \subset D_{n(2)}$, esto es, Y_2 es encajable en $D_{n(2)}$ para algún $n(2) > n(1)$ tal que:

(a) $h_2(B \cap Y_2') \subset C_{n(2)+1}$,

(b) $h_2(p_2) \in C_{n(2)+1}$,

(c) $h_2(p_2) = h_1(p_1)$,

(d) $h_2(Y_2 - Y_1) \subset D_{n(2)} - D_{n(1)}$.

Afirmamos que el siguiente diagrama es conmutativo (utilizando el Teorema 2.40)

$$\begin{array}{ccc} Y_1 & \xleftarrow{\;g_1\;} & Y_2 \\ h_1 \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow h_2 \\ D_{n(1)} & \xleftarrow[f_{n(1),n(2)}]{} & D_{n(2)} \end{array}$$

demostremos que $h_1 \circ g_1 = f_{n(1),n(2)} \circ h_2$. Sea $t \in Y_2$, observe que $g_1(t) = p_1$, ya que g es una función que va del arco Y_2 al conjunto unitario $\{p_1\}$, entonces $h_1(g_1(t)) = h_1(p_1) \in (D_{n(1)} \cap C_2)$. Ahora, supongamos que $t = p_1$, entonces $h_2(p_1) = h_1(p_1)$ esto por las propiedad (c) que cumple del homeomorfismo h_2, veamos ahora,

$$f_{n(1),n(2)}(h_2(p_1)) = f_{n(1),n(2)}(h_1(p_1)) =$$

$$f_{n(1)}(h_1(p_1)) \circ \ldots \circ f_{n(2)-1}(h_1(p_1)) = h_1(p_1)$$

esto es válido ya que $h_1(p_1) \in (D_{n(1)} \cap C_2)$ y por como está definida cada $f_{n(i)}$ función de ligadura, deja fijo el punto $h_1(p_1)$. Luego, supongamos que $t \neq p_1$, observe que $h_2(t) \in D_{n(2)} - D_{n(1)}$, entonces $f_{n(1),n(2)}(h_2(t)) = h_1(p_1)$, ésta última igualdad es válida por la observación (5) mencionada anteriormente, así concluimos que el diagrama anteriormente señalado es conmutativo.

Ahora, por (iv) del Teorema 2.34, $Y_3 - Y_2$ es un arco A_3 donde uno de sus puntos extremos es p_2. Sea $A_3' = A_3 - \{p_2, q_2\}$ donde q_2 es punto extremo de A_3 diferente de p_2. Entonces, haciendo uso de (4) como lo hicimos anteriormente, se obtiene un subconjunto denso numerable E_3 de A_3' tal que $B \cap A_3' \subset E_3$. Sea A' un arco en $D_{n(3)}$ que va de $h_2(p_2)$ a p_3', donde $h_2(p_2) \in (D_{n(2)} \cap C_{n(2)+1})$ y $p_3' \in D_{n(3)+1}$, Observe que

(6) $f_{n(2),n(3)}(Y_3 - Y_2) = \{h_2(p_2)\}$

esto es, $f_{n(2),n(3)}$ envia a los puntos del arco al punto $h_2(p_2)$. Notemos que (3) nos permite aplicar el Corolario 1.66, para obtener un homeomorfismo $h_3 \colon Y_3 \to A' \subset D_{n(3)}$ para algún $n(3) > n(2)$ tal que

(a') $h_3(B \cap A_3') \subset C_{n(3)+1}$,

(b') $h_3(p_3) \in C_{n(3)+1}$,

(c') $h_3 \mid Y_2 = h_2$,

(d') $h_3(Y_3 - Y_2) \subset D_{n(3)} - D_{n(2)}$.

Afirmamos que el siguiente diagrama es conmutativo (utilizando el Teorema 2.40)

$$\begin{array}{ccc} Y_2 & \xleftarrow{g_2} & Y_3 \\ h_2 \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow h_3 \\ D_{n(2)} & \xleftarrow[f_{n(2),n(3)}]{} & D_{n(3)} \end{array}$$

demostremos que $h_2 \circ g_2 = f_{n(2),n(3)} \circ h_3$, sea $t \in Y_3$. se realizará la demostración en dos casos:

Caso 1: Supongamos que $t \in Y_2$. Notemos que $g_2(t) = t$, así $h_2(g_2(t)) = h_2(t)$ y $h_2(t) \in D_{n(2)} - D_{n(1)}$ por la propiedad (d). Luego, utilizando (c') y (d) se tiene que $h_3(t) = h_2(t) \in D_{n(2)} - D_{n(1)}$, así $f_{n(2),n(3)}(h_3(t)) = f_{n(2),n(3)}(h_2(t)) = h_2(t)$, ya que la función $f_{n(2),n(3)} \colon D_{n(3)} \to D_{n(2)}$ deja fijos a los puntos de $D_{n(2)}$. Por lo tanto, $h_2 \circ g_2 = f_{n(2),n(3)} \circ h_3$ es válida en este caso.

Caso 2: Supongamos que $t \in (Y_3 - Y_2)$. Notemos que $g_2(t) = p_2$, así usando éste hecho y la propiedad (b) se tiene que $h_2(g_2(t)) = h_2(p_2) \in C_{n(2)+1}$. Luego, por la propiedad (d'), $h_3(t) \in D_{n(3)} - D_{n(2)}$, ahora, $f_{n(2),n(3)}(h_3(t)) = h_2(p_2)$, esto último es válido por la observación hecha en (6). Por lo tanto $h_2 \circ g_2 = f_{n(2),n(3)} \circ h_3$ es válida en este caso.

Continuando como arriba, pero utilizando (2) junto con (3), se define h_i para cada $i \leq 4$. Se obtiene el siguiente diagrama en donde cada rectángulo es conmutativo, y cada h_i es un encajamiento de Y_i en $D_{n(i)}$, y para cada i, $n(i+1) > n(i)$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
Y_1 & \overset{g_1}{\longleftarrow} & Y_2 & \longleftarrow \dots & \longleftarrow Y_i & \overset{g_i}{\longleftarrow} & Y_{i+1} & \longleftarrow \dots Y \\
h_1 \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow\ h_2 & & h_i\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow\ h_{i+1} & \\
D_{n(1)} & \underset{f_{n(1),n(2)}}{\longleftarrow} & D_{n(2)} & \longleftarrow \dots & \longleftarrow D_{n(i)} & \underset{f_{n(i),n(i+1)}}{\longleftarrow} & D_{n(i+1)} & \longleftarrow \dots Z
\end{array}
$$

Así, la función inducida $h_\infty \colon Y \to Z$ definida en el Teorema 1.30 existe y por (a)-(c) de 1.30, h_∞ es una función continua y uno-uno, esto es, h_∞ es un encajamiento de Y en Z. Por la Proposición 1.33, Z es homoeomorfo a D_∞. Así, X es encajable en D_∞. Por tanto, hemos demostrado que D_∞ es universal para la familia de todas las dendritas. $\square$

Así, hemos demostrado la existencia de una dendrita universal.

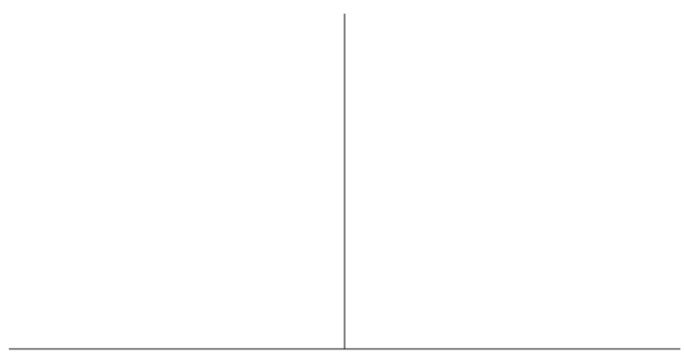
2.6. Dendrita universal de orden tres

A las dendritas las podemos clasificar de acuerdo a ciertas características, por ejemplo podemos clasificarlas en subfamilias de acuerdo al orden máximo de sus puntos de ramificación. En la sección anterior se construyó una dendrita universal para la familia de todas las dendritas, ahora, veremos que se puede construir una dendrita universal para cada una de las subfamilias de las dendritas mencionadas. En esta sección se dará la construcción de una dendrita que es universal para la familia de las dendritas tales que sus puntos de ramificación tienen orden menor o igual a tres. Notemos que la construcción es similar a la hecha en la sección anterior.

Ejemplo 2.47. *Fijémonos en la familia de dendritas que tienen puntos de ramificación de orden menor o igual a tres, daremos la construcción de una dendrita universal para esta familia llamada dendrita universal de orden 3.*

Considere un triódo tal que sus arcos R_i con $i \in \{1, 2, 3\}$ son de igual medida.

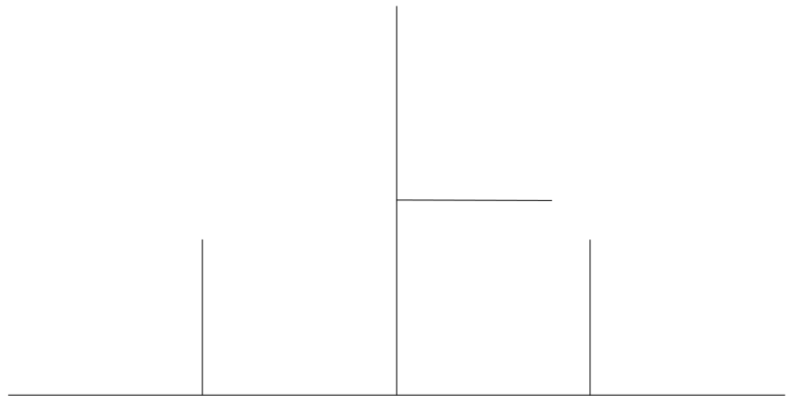
Sea $D_1 = \bigcup_{i=1}^{3} R_i$.



Paso 1.

Fijémonos en el punto medio x_j de los arcos R_i y forme un arco S_i de tal manera que los arcos S_i son disjuntos entre sí, para $i \in \{1, 2, 3\}$, y $S_i \cap R_i = \{x_i\}$.

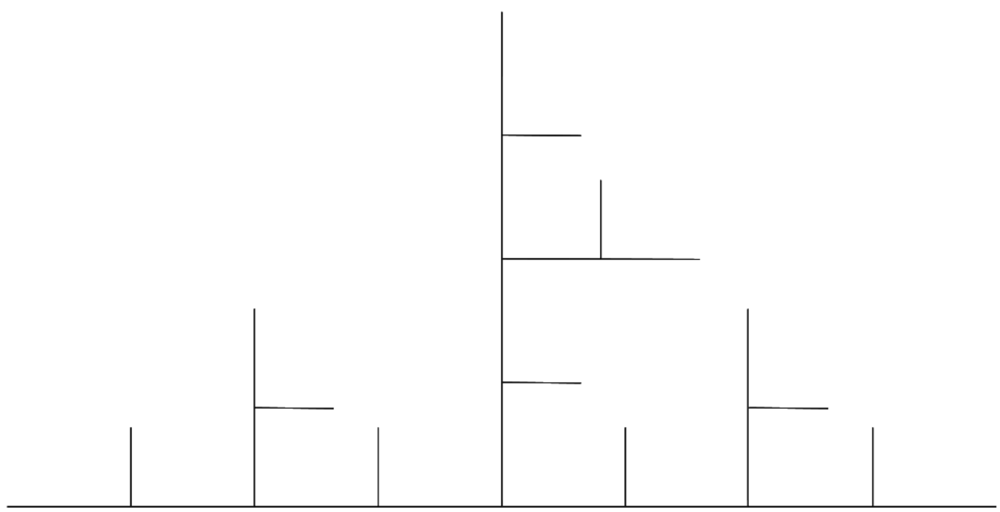
Sea $D_2 = \bigcup_{i=1}^{3}(S_i \cup R_i)$.



Paso 2.

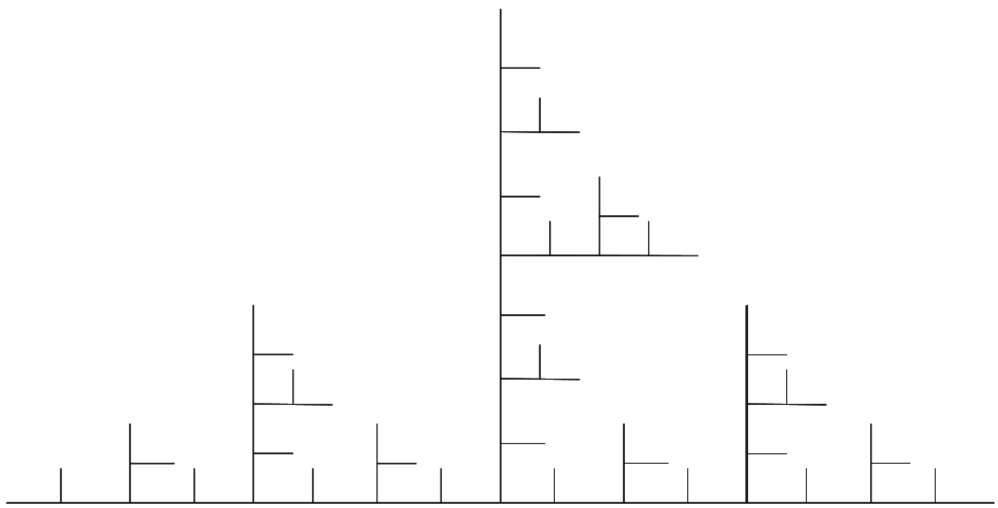
Ahora, nos fijamos en el punto medio de cada subarco de R_i y en el punto medio de cada arco S_i y trazamos nuevos arcos T_i de tal manera que son disjuntos entre sí y la intersección de cada T_i con cada subarco de R_i y cada S_i es exactamente el punto medio de donde parte el arco.

Sea $D_3 = [\bigcup_{i=1}^{3}(R_i \cup S_i)] \cup [\bigcup_{i=1}^{9} T_i]$



Paso 3.

Siguiendo con esta construcción formemos D_4 como se da en la siguiente figura.



Paso 4.

Afirmamos que para cada entero positivo n puedemos construir D_n. Consideremos $D_\infty = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n}$, ésta es una dendrita universal de orden tres.

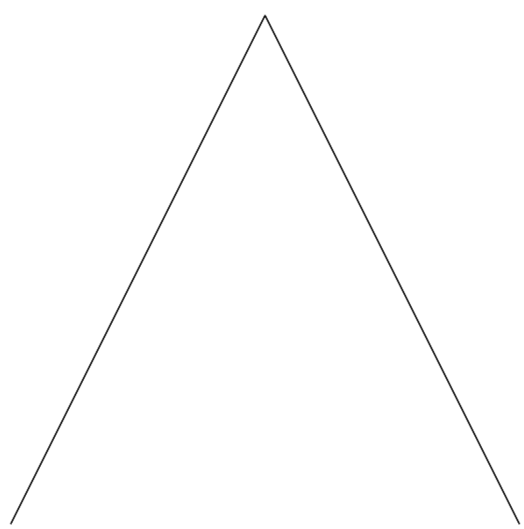
Así como se hizo la anterior construcción, podemos obtener una dendrita universal de orden n, para n un entero positivo. Tome en cuenta que la dendrita universal de orden n es universal para la familia de las dendritas cuyos puntos de ramificación son de orden menor o igual que n.

2.7. Dendrita de Gemahn

Con el siguiente proceso construiremos la *dendrita de Gemahn* y la denotamos por G_3. Esta dendrita tiene como puntos extremos el conjunto de *Cantor* y todos sus puntos de ramificación tienen orden 3, por lo que esta dendrita tiene una copia topológica en la dendrita universal de orden 3. También se puede hacer la construcción de las dendritas G_n, para $n > 3$.

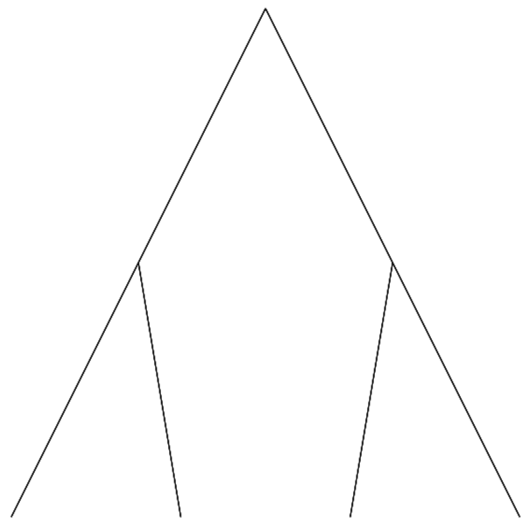
Realizemos los cuatro primeros pasos para la construcción de G_3.

Paso 1: Sea D_1 la unión de los segmentos de recta que unen el punto $(1/2, 1)$ con los puntos extremos $(0, 0)$ y $(1, 0)$ del conjunto de Cantor.



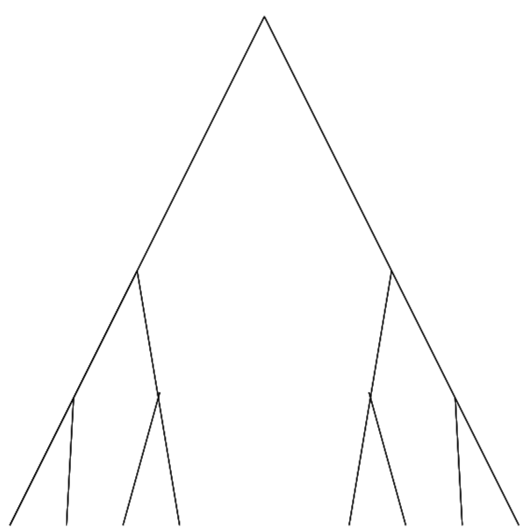
Paso 1.

Paso 2: Ahora, sean x y y los puntos medios de los dos segmentos de D_1 y trazemos los segmentos $(1/3, 0)$ a x y $(2/3, 0)$ a y.



Paso 2.

Paso 3: Para construir D_3 nos fijamos en los puntos medios x_1 y y_1 de los segmentos formados en el paso anterior y también los puntos medios x_2 y y_2 de los segmentos $(0,0)$ y $(1/3,0)$, respectivamente. Unimos D_2 con los segmentos rectilineos que van de x_1 a $(1/9,0)$, de y_1 a $(2/9,0)$, de x_2 a $(7/9,0)$ y de y_2 a $(8/9,0)$ para obtener $D_{3.}$



Paso 3.

En el paso n, D_n se construye a partir de D_{n-1} de forma similar, tomando siempre como puntos extremos los elementos del conjunto de Cantor. Definamos $G_3 = \overline{\cup_{n \in \mathsf{N}} D_n}$ como la dendrita de Gemahn.

Bibliografía

[1] G. Acosta, *Continuos con Hiperespacio único*, Tesis de Doctorado, Facultad de Ciencias, U. N. A. M., México D. F. 1999.

[2] R. G. Bartle, *The Elements of Real Analysis*, Jonh Wiley & Son's., Inc. 1972.

[3] F. Capulín, *El Intervalo desde un Punto de Vista Topológico*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, U. N. A. M., México D. F. 1997.

[4] J. J. Charatonik y W. J. Charatonik, *Dendrites*, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 22(1998), 227-253.

[5] C. E. Capel, *Inverse Limit Spaces*, Duke Math. J., 21(1954), 233-245.

[6] J. J. Charatonik, Bosquejo de la historia de la teoría de los continuos, *Invitación a la Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios*, editado por R. Escobedo, S. Macías, H. Méndez. Aportaciones matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 31(2006), 225-264.

[7] C. O. Christenson y W. L. Voxman, *Aspects of Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1998.

[8] D. M. Flores, *Un Estudio de Dendritas,* dirigido por D. Herrera, F. Macías. Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP, Puebla, 2008.

[9] M. K. Fort y J. Segal, *Minimal representations of the hyperspace of a continuum,* Duke Math. J., 32(1965), 129-138.

[10] I. L. Iribarren T., *Topología de Espacios Métricos*, 1ra ed., editorial Limusa, 1987.

[11] K. Kuratowski,*Topology,* Vol I, Academic Press, New York, N. Y., 1966.

[12] S. Macías, Una introducción a la teoría de los continuos, *Invitación a la Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios,* editado por R. Escobedo, S. Macías, H. Méndez. Aportaciones matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 31(2006), 1-34.

[13] S. Macías, Una introducción a los límites inversos, *Invitación a la Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios,* editado por R. Escobedo, S. Macías, H. Méndez. Aportaciones matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 31(2006), 35-50.

[14] S. Macías, *Topics on Continua*, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, 2005.

[15] J. R. Munkres, *Topología,* Prentice Hall, Madrid 2002.

[16] S. B. Nadler Jr., *Continuum Theory, An introduction*, Monographs and Texbooks in Pure and Applied Math., 158, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1992.

[17] I. Puga, Dendroides, *Invitación a la Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios,* editado por R. Escobedo, S. Macías, H. Méndez. Aportaciones matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 31(2006), 51-84.

[18] W. Sierpiñski, *Sur une condition pour quún continu soit une courbe jordanienne,* Fund. Math. Soc., Providence, R. I., 1942.

Índice alfabético