BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



"PROBLEMA DE IDENTIFICACIÓN DE FUENTES EN MEDIOS HOMOGÉNEOS"

Tesis

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

Lic. En Matemáticas Aplicadas

PRESENTA:

Darwin Eduardo Jiménez Sánchez

DIRECTORES DE TESIS:

Dr. José Jacobo Oliveros Oliveros

Dra. María Monserrat Morín Castillo

10 de Julio de 2012

Índice general

Intro	ducció	on	III
Capi	ítulo 1		
Preli	iminare	es S	
1.1	Ecuad	iones de Maxwell	1
1.2	La ecuación de continuidad		1
1.3	Espacios funcionales		2
1.4 Series de Fourier		de Fourier	4
	1.4.1	Definición de series de Fourier	4
	1.4.2	Convergencia de una serie de Fourier	5
1.5 La Ecuación de Laplace y		cuación de Laplace y la Ecuación de Poisson	7
	1.5.1	El Laplaciano en coordenadas polares	7
1.6	Principio del máximo		7
1.7	Fórmulas de Green		
1.8	Fórmulas de cuadratura		9
	1.8.1	Fórmula de los rectángulos	9
	1.8.2	Fórmula de los trapecios	10
	1.8.3	Método de Simpson	11
Capi	ítulo 2		
Solu	ıción d	el Problema Directo e Inverso	
2.1	Proble	ema directo	12
2.2	Proble	ema inverso	19
	221	Caso sin error	19

2.2.2	Caso con error	20	
2.2.3	Aproximación en el caso discreto	25	
2.2.4	Aproximación en el caso de un número finitos de datos con		
	error	29	
Capítulo 3			
Validación	numérica		
3.1 Ejemp	olos numéricos	34	
Conclusiones			
Bibliografía			
Apéndice			

Introducción

Existen muchos problemas de las aplicaciones que se reducen al problema inverso de identificación de fuentes (PIF) el cual consiste en hallar una fuente concentrada en una región (en nuestro caso homogénea) a partir de mediciones, en la frontera de la misma, del potencial producida por dicha fuente. Entre las áreas en las que se encuentran aplicaciones de este problema podemos mencionar la Geofísica y la Electroencefalografía Inversa ([9], [12] y [13]). Otra área de aplicación es la Teoría Electromagnética en la cual deben determinarse densidades de carga o corrientes a partir de los efectos que ellas producen.

En términos generales, para el estudio de los problemas inversos se procede primero al análisis del problema directo, el cual consiste en determinar el efecto producido por la fuente sobre la frontera de la región suponiéndola conocida.

Es sabido que el PIF no tiene solución única, es decir, que dada una medición sobre la frontera de la región, existen muchas fuentes que pueden producir dicha medición. Sin embargo, al suponer que la fuente es armónica en la región de estudio, el PIF tiene solución única, en este trabajo estudiamos este caso. Para el estudio del PIF se usan el concepto de las funciones de Green, técnicas de la teoría de potencial y en el caso particular de geometrías circulares, las series de Fourier.

En este trabajo se realiza el estudio del PIF para el caso en que solo se tiene una región homogénea; se han realizado anteriormente otros trabajos en donde se consideran dos regiones, sin embargo ha sido probado que el caso de dos regiones se reduce a una región [2]. Por lo tanto solo es necesario analizar los resultados del PIF en una región, para los casos en que tengamos datos con error y datos sin error, tanto en el caso continuo como el discreto.

La tesis está estructurada de la siguiente manera. Contiene una introducción, tres capítulos, conclusión y un apéndice.

En el capítulo 1 se dan las preliminares donde se presentan algunos elementos básicos necesarios para el análisis del problema en este trabajo. En el capítulo 2 se presentan resultados conocidos sobre la existencia y unicidad del problema de identificación de fuentes. Se aporta un algoritmo que identifica de manera única a la fuente a partir del potencial medido y conocido para datos exactos. En el capítulo 3 se incluyeron algunos ejemplos numéricos. En el apéndice se presentan los programas desarrollados con Matlab, que ilustran los resultados del capítulo 2.

Capítulo 1 Preliminares

En este capítulo se presentan algunos elementos básicos necesarios para el análisis del problema que se estudia en este trabajo. Todo el material es conocido y al final de cada sección se dan referencias para consultarlo con mayor detalle.

1.1 Ecuaciones de Maxwell

Suponemos que los campos vectoriales \vec{E} , \vec{B} , \vec{C} , \vec{H} son funciones continuamente derivables de la variable espacial y el tiempo. Se postula que dichos campos vectoriales están conectados a través de las llamadas Ecuaciones de Maxwell:

$$rot\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \tag{1.1}$$

$$rot\vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J},\tag{1.2}$$

$$div\vec{D} = \rho, \tag{1.3}$$

$$div\vec{B} = 0. ag{1.4}$$

donde ρ denota la densidad de carga concentrada en una región acotada de R^3 .

1.2 La Ecuación de continuidad

Como la divergencia del rotacional del campo vectorial \vec{H} se anula, entonces tomando la divergencia a ambos lados de $rot\vec{H}-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\vec{J}$ y utilizando $div\vec{D}=\rho$, llegamos a:

$$div\vec{J} = -div\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}div\vec{D} = -\frac{\partial\rho}{\partial t},$$
(1.5)

es decir,

$$div\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \tag{1.6}$$

que es la ecuación de continuidad o ley de conservación de la carga.

Un medio conductor es aquél en que se puede producir movimiento de cargas de una región a otra bajo la acción de un campo eléctrico externo. Los buenos conductores son aquellos en que el movimiento de cargas se producen aún cuando la intensidad del campo eléctrico externo sea muy pequeña. Esta densidad de corriente eléctrica y el campo aplicado están relacionados por la ecuación:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E},\tag{1.7}$$

la cual es conocida como la Ley de Ohm y es válida en los metales isótropos donde σ representa la conductividad. En los conductores perfectos se considera que $\sigma = \infty$ [8].

Cuando $\sigma = 0$ se dice que el medio es un dieléctrico y si $\sigma > 0$ el medio se llama conductor. En la práctica los medios presentan simultáneamente propiedades dieléctricas y de conducción [6].

1.3 Espacios Funcionales.

El conjunto K^X de funciones $f: X \to K$ donde X es un conjunto no vacío es un espacio lineal si definimos:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

 $(\alpha f(x)) = \alpha f(x), \quad x \in X.$ (1.8)

Sea $\Omega \subset R^n$. Las definiciones en (1.8) dan una estructura de espacio lineal al conjunto $C(\Omega,K)$ de funciones continuas $f:\Omega \to K$. Denotamos este espacio con $C(\Omega)$.

Para cada subconjunto Ω abierto y acotado del espacio euclidiano R^n , consideramos las siguientes clases de funciones.

 $C(\overline{\Omega})$: Funciones complejas y continuas definidas sobre $\overline{\Omega}$.

 $C^m(\bar{\Omega})$: Funciones complejas, con derivadas continuas sobre Ω hasta el orden m, todas las cuales pueden ser prolongadas continuamente a $\bar{\Omega}$ $(1 \le m < \infty)$.

Recordemos que el soporte de una función f definida sobre Ω y con valores en C es el complemento en Ω del mayor subconjunto abierto donde f se anula.

Esto es, para $f \in \Omega$ el soporte de f es la cerradura en Ω del conjunto $\{x \in \Omega: f(x) \neq 0\}$ y denotamos esto con $\sup f$.

Con $C_{\scriptscriptstyle 0}(\Omega)$ denotamos al subconjunto de aquellas funciones en Ω con soporte compacto. Similarmente:

$$C_0^m(\Omega) = C^m(\Omega) \cap C_0(\Omega), \quad m \ge 1 \quad \text{y}$$

$$C_0^{\infty}(\Omega) = C^{\infty}(\Omega) \cap C_0(\Omega). \tag{1.9}$$

Si $f: A \rightarrow B$ y $C \subset A$, denotamos con $f|_C$ la restricción de f a C.

Así los siguientes conjuntos forman espacios lineales de funciones sobre $\bar{\Omega}$ con las operaciones definidas en (1.8):

$$C^{m}(\overline{\Omega}) = \left\{ f \big|_{\overline{\Omega}} : f \in C_{0}^{m}(R^{n}) \right\},$$

$$C^{\infty}(\overline{\Omega}) = \left\{ f \big|_{\overline{\Omega}} : f \in C_{0}^{\infty}(R^{n}) \right\}.$$
(1.10)

Mediante $L_p(\Omega)$ denotaremos la clase de todas las funciones complejas medibles u(x) definidas sobre Ω y tales que:

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty. \tag{1.11}$$

Es conocido que la aplicación

$$|u|_{p} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^{p} dx\right)^{\frac{1}{p}},$$
 (1.12)

es una norma en $L_p(\Omega)$ que provee a este conjunto de funciones de una estructura de espacio de Banach [5].

Diremos que $\partial\Omega$ pertenece a la clase $C^k(k\geq 1)$, si para cualquier punto $x_0\in\partial\Omega$ existe una vecindad $V(x_o)$ de x_0 y un homeomorfismo:

$$f: \mathbb{R}^{n-1} \to V(x_0) \cap \partial \Omega, \tag{1.13}$$

tal que $f \in C^k(\mathbb{R}^{n-1})$, para mayor detalle pueden consultarse [5].

1.4 Series de Fourier

1.4.1 Definición de serie de Fourier

Sea $I=[0,2\pi]$. Designamos por $L_2(I)$ el conjunto de todas las funciones complejas f que son medibles en $[0,2\pi]$ tales que $\big|f(x)\big|^2\in L(I)$.

El producto escalar $\langle f,g \rangle$ definido por medio de

$$\langle f, g \rangle = \int_{I} f(x)g(x)dx,$$
 (1.14)

siempre existe. El número no negativo $||f|| = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$ es la norma en $L_2(0, 2\pi) \det f$.

Definición 1 Sea $S = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, ...\}$ una colección de funciones de $L_2(0, 2\pi)$. Si para $m \neq n$, se cumple que

$$\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle = 0,$$
 (1.15)

entonces la colección S se llama un sistema ortogonal en $L_2(0,2\pi)$. Si además cada φ_n tiene norma uno, entonces S se llama ortonormal en $[0,2\pi]$.

Es claro que todo sistema ortogonal para el que cada $\|\varphi_n\| \neq 0$ se puede convertir en un sistema ortonormal dividiendo cada φ_n por su norma.

Sea $S = \{ \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ... \}$ un sistema ortonormal en $[0, 2\pi]$ y sea

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \varphi_k(x), \tag{1.16}$$

en donde $b_0,b_1,...,b_n$ son números complejos arbitrarios. Usando la norma $\|f-t_n\|$ para medir el error cometido al aproximar f por medio de t_n , es deseable elegir las constantes $b_0,b_1,...,b_n$ de tal forma que el error sea lo menor posible. El próximo teorema muestra que existe una única elección posible de las constantes con las que se minimiza este error.

Definición 2 Sea $S = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ...\}$ un sistema ortonormal en $L_2[0, 2\pi]$ y supongamos que $f \in L_2(0, 2\pi)$. La notación

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x). \tag{1.17}$$

Significa que los números $c_0, c_1, ...,$ vienen dados por las fórmulas:

$$c_n = \langle f, \varphi_n \rangle = \int_I f(x)\varphi(x)dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$
 (1.18)

La serie anterior se llama serie de Fourier de f relativa a S, y los números $c_0,c_1,...,$ se llaman coeficientes de Fourier de f relativos a S.

Teorema 1 Sea $S = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ...\}$ un sistema ortonormal en $[0, 2\pi]$, y supongamos que $f \in L_2(0, 2\pi)$. Definimos dos sucesiones de funciones $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ en $[0, 2\pi]$ como sigue:

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x), \qquad t_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k \varphi_k(x),$$
 (1.19)

en donde

$$c_k = \langle f, \varphi_k \rangle \quad para \quad k = 0, 1, 2, \dots$$
 (1.20)

Y $b_0, b_1, ..., b_n$ son números complejos arbitrarios. Entonces para cada n tenemos

$$||f - s_n|| \le ||f - t_n||,$$
 (1.21)

y la igualdad se verifica si y sólo si, $b_k = c_k$ para k = 0,1,2,...

1.4.2 Convergencia de una serie de Fourier

En esta sección se enuncian definiciones y teoremas para garantizar que la serie de Fourier de f converge a la propia f.

Teorema 2 Si los números c_n son los coeficientes de Fourier de f con respecto a la sucesión ortonormal (φ_n) , entonces la serie $\sum_{0}^{\infty} c_n^2$ es convergente y satisface la designaldad de Bessel,

$$\sum_{0}^{\infty} c_n^2 \le \int_{I} [f(x)]^2 dx.$$
 (1.22)

Puesto que el n - ésimo término de una serie convergente debe tender hacia cero, el resultado anterior implica el siguiente teorema el cual se presenta sin demostración.

Teorema 3 Si los números c_n son los coeficientes de Fourier de f respecto a la sucesión ortonormal (φ_n) entonces $c_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Supongamos que $f\in L_2(0,2\pi)$ y que f tiene periodo 2π . Consideremos un x en $[0,2\pi]$ fijo y un número positivo $\delta<\pi$. Sea

$$g(t) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}, \quad \text{si } t \in [0, \delta],$$
 (1.23)

y sea

$$s(x) = g(0_{+}) = \lim_{x \to 0^{+}} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2},$$
(1.24)

siempre que este límite exista. Obsérvese que f(x) = s(x) si f es continua en x.

Definición 3 Sea f definida en [a,b]. Si $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ es una partición de [a,b], denotemos por $\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$, para k = 1, 2, ..., n. Si existe un número positivo M tal que $\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| \leq M$ para toda partición de [a,b], entonces diremos que f es de variación acotada en [a,b].

Teorema 4 Si f es de variación acotada en el intervalo compacto $[x-\delta,x+\delta]$ para un $\delta < \pi$, entonces el límite s(x) existe y la serie de Fourier generada por f converge hacia s(x).

Teorema 5 Si el límite s(x) existe y si también existe la integral de Lebesgue

$$\int_0^\delta \frac{g(t) - s(x)}{t} dt \tag{1.25}$$

para un cierto $\delta < \pi$, entonces la serie de Fourier generada por f converge hacia s(x) .

Las demostraciones y mayores detalles se puede consultar ([3], [14], [15] y [16]).

1.5 La Ecuación de Laplace y la Ecuación de Poisson

Entre las ecuaciones que aparecen en la Física - Matemática las ecuaciones de Laplace y Poisson ocupan un lugar importante [17]. La ecuación de Laplace está dada por

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1.26}$$

y la de Poisson por

$$\Delta u = f(x, y). \tag{1.27}$$

Nótese que $\Delta u = div(\nabla u)$.

1.5.1 El Laplaciano en coordenadas polares

Las coordenadas polares $x_1=r\cos\theta, \quad x_2=rsen\theta$ forman un sistema de coordenadas apropiado si la región $\Omega\subset R^2$ donde está definida u es un círculo. El operador de Laplace en coordenadas polares $x_1=r\cos\theta, \quad x_2=rsen\theta$ tiene la forma [14]:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$
 (1.28)

1.6 Principio del máximo

Teorema 6 Principio del Máximo (Mínimo)

Sea Ω un dominio acotado de R^n y $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ verificando $\Delta u \geq 0$ ($\Delta u \leq 0$). Entonces el máximo (mínimo) de u se alcanza en la frontera $\partial \Omega$, es decir.

$$\max_{x \in \Omega} u(x) = \max_{y \in \partial \Omega} u(y)$$
$$\left(\min_{x \in \Omega} u(x) = \min_{y \in \partial \Omega} u(y)\right)$$

Del principio del máximo se deduce el siguiente teorema de unicidad para el problema de Dirichlet.

Teorema 7 (Unicidad) Sea Ω un dominio acotado. Existe a lo más una solución del problema de Dirichlet:

$$u \in C^{2}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}),$$

$$\Delta u = h(x), \ x \in \Omega,$$

$$u = f(x), \ x \in \partial \Omega.$$
(1.29)

Demostración. Sea u_1 y u_2 dos soluciones de (1.29). Definamos $u=u_1-u_2$. Se tiene que u es armónica en Ω y se anula en $\partial\Omega$, por el principio del máximo u=0 en Ω . Por lo tanto, $u_1=u_2$.

1.7 Fórmulas de Green.

Si $\partial\Omega$ es ${\it C}^{\scriptscriptstyle 1}$, entonces a lo largo de $\partial\Omega$ está bien definida la normal exterior unitaria

$$v = (v_1, v_2, ..., v_n).$$
 (1.30)

La normal exterior unitaria en un punto $x_0 \in \partial \Omega$ es

$$v(x_0) = (v_1(x_0), v_2(x_0), ..., v_n(x_0)).$$
 (1.31)

Definición 4 Sea $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Llamamos a

$$\frac{\partial u}{\partial n} := \nabla u \cdot n \tag{1.32}$$

la derivada normal (exterior) de u, donde n es el vector normal exterior unitario.

Sea Ω un conjunto abierto acotado de R^n , $\partial\Omega$ es C^1 , además $u,v\in C^2(\overline{\Omega})$ se cumplen las siguientes formulas:

(i)
$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dx = -\int_{\Omega} u \Delta v dx + \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dS,$$

$$(ii)\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS,$$

(iii)
$$\int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dS.$$

Las relaciones ((i),(ii) y (iii)) son conocidas como la primera, segunda y tercera identidades de Green respectivamente [7].

1.8 Fórmulas de cuadratura.

Sea f(x) una función continua definida en el intervalo [a,b]. Nuestro objetivo será encontrar fórmulas aproximadas para calcular la integral $\int_a^b f(x)dx$. En caso de conocer la primitiva F(x) es evidente que podemos encontrar el valor exacto de la integral utilizando el Teorema fundamental del cálculo integral: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Sin embargo, no siempre esto es posible, por lo que se procede a su cálculo numérico a través de las llamadas fórmulas de cuadratura.

1.8.1 Fórmula de los rectángulos.

Para iniciar la exposición de esta sección supongamos en un principio que $f(x) \ge 0$. Una forma de aproximar a la integral $\int_a^b f(x) dx$ consiste en tomar el área bajo la curva y = f(x) por un rectángulo de base b-a y altura $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, entonces

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + R(\xi), \quad \xi \in [a,b],$$
(1.33)

donde el error $R(\xi)$, si f tiene primera y segunda derivadas continuas en $\left[a,b\right]$, se expresa de la forma

$$R(\xi) = \frac{(b-a)^2}{24} f''(\xi), \quad \xi \in [a,b]. \tag{1.34}$$

Ahora si queremos aproximar $\int_a^b f(x)dx$ con mejor exactitud podemos dividir el intervalo [a,b] en n puntos, o sea, consideremos la partición del intervalo

$$[a,b] = [a,x_1] \cup [x_1,x_2] \cup \dots \cup [x_{n-2},x_{n-1}] \cup [x_{n-1},b],$$
(1.35)

donde

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k$$
, $k = 0,1,2,...,n$, $x_0 = a$, $x_n = b$. (1.36)

De

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{x_{1}} f(x)dx + \dots + \int_{x_{b}}^{x_{b+1}} f(x)dx + \dots + \int_{x_{b}}^{b} f(x)dx,$$
 (1.37)

y si aplicamos a cada integral $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx$ la fórmula (1.33) obtenemos la expresión

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_{k} + x_{k+1}}{2}\right) + R(\xi),$$
 (1.38)

У

$$|R(\xi)| \le M \frac{(b-a)^2}{24n^2}, \qquad M = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$
 (1.39)

Obsérvese que la exposición anterior no requiere la suposición $f(x) \ge 0$.

1.8.2 Fórmula de los trapecios.

Otra aproximación de la integral $\int_a^b f(x)dx$ consiste en tomar el área bajo la curva y=f(x) no por un rectángulo sino por un trapecio de base b-a, entonces

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = (b-a)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right) + R(\xi),$$
(1.40)

y si f tiene primera y segunda derivadas continuas en $\left[a,b\right]$, el error $R(\xi)$ se expresa de la forma

$$R(\xi) = -\frac{(b-a)^2}{12} f''(\xi), \quad \xi \in [a,b].$$
 (1.41)

Ahora podemos aproximar la integral $\int_a^b f(x)dx$ con mejor exactitud dividiendo, igual que antes, el intervalo [a,b] en n puntos, es decir, consideremos la partición del intervalo como lo hicimos en (1.35) y si aplicamos a cada integral $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$ la fórmula (1.40) obtenemos la ecuación

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \frac{b-a}{2n} \left[f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{k}) \right] + R(\xi), \tag{1.42}$$

donde

$$|R(\xi)| \le M \frac{(b-a)^2}{12n^2}, \qquad M = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$
 (1.43)

1.8.3 Método de Simpson.

El método de Simpson para calcular integrales consiste en aproximar la integral $\int_a^b f(x)dx$ de la siguiente forma

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = Af(a) + Bf\left(\frac{a+b}{2}\right) + Cf(b) + R(\xi),$$
(1.44)

donde A, B, C son tales que $R(\xi)$ es igual a cero si f(x) = 1, f(x) = x y $f(x) = x^2$ respectivamente.

Esto es equivalente a aproximar el área debajo de f por una parábola.

Si f es cuatro veces derivable y todas sus derivadas son continuas en $\left[a,b\right]$ entonces se puede demostrar que $R(\xi)$ se expresa de la forma

$$R(\xi) = \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [a,b].$$
 (1.45)

Al igual que en los casos anteriores vamos aproximar la integral $\int_a^b f(x)dx$ con mejor exactitud dividiendo el intervalo [a,b] en 2n puntos de la forma

$$[a,b] = [a,x_1] \cup [[x_1,x_2]] \cup \dots \cup [x_{2n-2},x_{2n-1}] \cup [x_{2n-1},b],$$
(1.46)

donde

$$x_k = a + \frac{b-a}{2n}k, \quad k = 0, 1, 2, ..., 2n, \quad x_0 = a, x_{2n} = b.$$
 (1.47)

Apliquemos ahora la fórmula de Simpson (1.44) para cada subintervalo $\left[x_{k},x_{k+1}\right],\ k=0,1,...,n-1,$ es decir, escribamos la integral original como la suma de las integrales

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{x_{2}} f(x)dx + \dots + \int_{x_{b}}^{x_{b+1}} f(x)dx + \dots + \int_{x_{2a-1}}^{b} f(x)dx,$$
 (1.48)

y apliquemos el método de Simpson a cada uno de los sumandos. Nótese que los intervalos siguen teniendo una longitud $x_{2k+2}-x_{2k}=\frac{b-a}{n}$ igual que antes. Esto nos conduce a la expresión

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \frac{b-a}{6n} \left[f(a) + f(b) + 4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) \right] + R(\xi), \tag{1.49}$$

donde

$$|R(\xi)| \le M \frac{(b-a)^5}{2880n^4}, \qquad M = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$
 (1.50)

Para mayor detalle pueden consultarse [11].

Capítulo 2

Solución del Problema Directo e Inverso

Sea Ω una región conductora en R^n , n=2,3. Si en Ω se activa una fuente f, debido a sus propiedades conductoras, se activa sobre ella un potencial eléctrico u el cual está asociado con f a través de la ecuación de Poisson

$$\Delta u = f$$
.

Adicionalmente debemos considerar una condición de contorno sobre $\partial\Omega$. Esta debe obtenerse de consideraciones físicas del propio problema de estudio. En particular, para problemas en los que la región está en contacto con el aire, debido a que su conductividad se considera nula, se satisface una condición de Neumann nula:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$$
 sobre $\partial \Omega$.

Claramente la condición de contorno no tiene que ser, en general nula, sin embargo, tiene aplicaciones como por ejemplo, la Electroencefalografía Inversa, la cual resulta en si misma importante, este es el problema que se estudia en las siguientes secciones.

2.1 Problema Directo.

Consideremos el siguiente problema:

$$\Delta u = f \text{ en } \Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \partial \Omega.$$
(2.1.1)

En el caso del problema inverso electroencefalográfico se tiene ([1], [4], [9] y [10])

$$f = \frac{divJ^p}{\sigma}. (2.1.2)$$

Para que el problema (2.1.1) tenga solución debe cumplirse que:

$$\int_{\Omega} f d\Omega = 0,$$

esto se deduce de la Fórmula de Green

$$\int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$
(2.1.3)

y tomando en cuenta que $\Delta u = f$ y $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$.

El problema (2.1.1) debe interpretarse de la manera siguiente: La fuente f se activa en la región Ω la cual "reacciona" a dicha fuente produciéndose un potencial u que satisface el problema. La condición de frontera se debe interpretar que no hay flujo en la dirección de la normal.

Se tiene adicionalmente para el problema inverso el valor conocido de \mathcal{U} sobre la frontera. En términos prácticos el potencial es medido sobre la frontera por medio de electrodos y se supone conocido que teóricamente corresponde a la restricción de u a la frontera.

Así, damos respuesta a la siguiente pregunta:

¿Qué es la medición?

Respuesta: La medición V corresponde en este modelo a la restricción a la $\partial\Omega$ del potencial $\mathcal U$ producido por f, es decir:

$$V = u \Big|_{\partial \Omega} \tag{2.1.4}$$

donde \mathcal{U} es la solución del problema (2.1.1).

Se define el problema directo asociado al problema de contorno (2.1.1) de la manera siguiente:

Dada f hallar $V = u|_{\partial\Omega}$, donde u es la solución del problema (2.1.1).

El problema inverso se define de la siguiente forma:

Dada V definida sobre $\partial\Omega$ hallar el par (f , u) que es solución del problema:

$$\Delta u = f$$
 en Ω ,
 $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sobre $\partial \Omega$,

y que cumple $V = u|_{\partial\Omega}$.

Abajo representamos esquemáticamente un problema inverso,

$$V \to (f, u): \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$
 $\rightarrow u \Big|_{\partial\Omega} = V.$ (2.1.5)

Para el estudio del problema inverso generalmente debemos estudiar el problema directo primero. Ha sido probado que existen una infinidad [4] de fuentes que produzcan la misma medición que nos lleva a la siguiente pregunta ¿Cuál fuente f debe asociarse a una medición V para el estudio del problema inverso de este trabajo?

La respuesta a esta pregunta nos lleva a considerar f armónica [10] pues en este caso el problema inverso tiene solución única.

Supongamos que f es armónica y que

$$\langle f, 1 \rangle = \int_{\Omega} f d\Omega = 0, \quad (f \in H^{\perp}(\Omega)).$$
 (2.1.6)

Recordemos que una función f es armónica si satisface la ecuación de Laplace

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$
 (2.1.7)

Si Ω corresponde a un círculo de radio R entonces la fuente armónica puede escribirse de la forma siguiente:

$$f(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^1 r^k \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 r^k \operatorname{senk}\theta,$$
(2.1.8)

donde $r^k \cos k\theta$ y $r^k senk\theta$ son llamados los armónicos circulares.

Puede verse sin mucho problema que,

$$\Delta_{(r,\theta)}(r^k \cos k\theta) = 0, \tag{2.1.9}$$

$$\Delta_{(r,\theta)}(r^k senk\theta) = 0, \tag{2.1.10}$$

donde el Laplaciano en coordenadas polares $\Delta_{(r,\theta)}$ toma la forma [15]:

$$\Delta_{(r,\theta)} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$
 (2.1.11)

Como f es armónica se cumple que $\Delta f = 0$ y ya que $\Delta u = f$ entonces, $\Delta(\Delta u) = \Delta f = 0$, es decir

$$\Delta^2 u = 0,$$

En este caso u puede escribirse en la forma $u=u_0+u_n$, donde u_0 es biarmonica y u_n es armónica.

Si aplicamos Δ a $u = u_0 + u_n$ hallamos

$$\Delta u = \Delta(u_0 + u_n) = \Delta u_0 + \Delta u_n = f,$$

donde $\Delta u_0 = f$ y $u(r,\theta)$ tiene la forma:

$$u(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k r^{k+2} \cos k\theta + b_k r^{k+2} \operatorname{senk}\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k r^k \cos k\theta + d_k r^k \operatorname{senk}\theta).$$

$$(2.1.12)$$

¿Quiénes son $a_{\scriptscriptstyle k}$, $b_{\scriptscriptstyle k}$, $c_{\scriptscriptstyle k}$, $d_{\scriptscriptstyle k}$? Para hallarlos debemos utilizar el hecho de que

$$\Delta u = f$$
.

Al aplicar Δ a (2.1.12) y sustituyendo en la ecuación anterior, hallamos

$$\Delta u(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} 4a_k (k+1) r^k \cos k\theta +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} 4b_k (k+1) r^k senk\theta$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k^1 r^k \cos k\theta + f_k^2 r^k senk\theta \right],$$
(2.1.13)

ya que la segunda serie se anula al aplicarle Δ . De aquí obtenemos:

$$4a_k(k+1) = f_k^1, (2.1.14)$$

$$4b_{k}(k+1) = f_{k}^{2}, (2.1.15)$$

de donde

$$a_k = \frac{f_k^1}{4(k+1)},\tag{2.1.16}$$

$$b_k = \frac{f_k^2}{4(k+1)}. (2.1.17)$$

Esto se obtiene de la manera siguiente:

$$\Delta(a_k r^{k+2} \cos k\theta) = a_k \left[\cos k\theta \frac{\partial^2 r^{k+2}}{\partial r^2} + \frac{\cos k\theta}{r} \frac{\partial r^{k+2}}{\partial r} + \frac{r^{k+2}}{r^2} \frac{\partial^2 \cos k\theta}{\partial \theta^2} \right]$$

$$= a_k \cos k\theta \left[(k+2)(k+1)r^k + \frac{(k+2)}{r}r^{k+1} \right] - \frac{a_k k^2 \cos k\theta}{r^2}$$

$$= a_k \cos k\theta \left[(k+2)(k+1) + k + 2 - k^2 \right] = 4(k+1)a_k r^k \cos k\theta.$$
(2.1.18)

De esto

$$[a_k 4(k+1)]r^k \cos k\theta = f_k^1 r^k \cos k\theta, \qquad (2.1.19)$$

de donde

$$a_k = \frac{f_k^1}{4(k+1)}.$$

Análogamente se puede verificar $\,b_{\!\scriptscriptstyle k}\,$.

$$\begin{split} \Delta(b_k r^{k+2} senk\theta) &= b_k \left[senk\theta \frac{\partial^2 r^{k+2}}{\partial r^2} + \frac{senk\theta}{r} \frac{\partial r^{k+2}}{\partial r} + \frac{r^{k+2}}{r^2} \frac{\partial^2 senk\theta}{\partial \theta^2} \right] \\ &= b_k senk\theta \left[(k+2)(k+1)r^k + \frac{(k+2)}{r} r^{k+1} \right] - \frac{b_k k^2 senk\theta}{r^2} \\ &= b_k sen\theta \left[(k+2)(k+1) + k + 2 - k^2 \right] = 4(k+1)b_k r^k senk\theta. \end{split}$$

De esto último

$$[b_k 4(k+1)]r^k senk\theta = f_k^2 r^k senk\theta, b_k = \frac{f_k^2}{4(k+1)}.$$
 (2.1.20)

Para determinar c_k y d_k usaremos la condición de contorno:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial \Omega} = \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = 0.$$
 (2.1.21)

Calculemos $\frac{\partial u}{\partial r}$. Derivando la serie (2.1.12) término a término hallamos

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\theta \frac{\partial r^{k+2}}{\partial r} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{senk}\theta \frac{\partial r^{k+2}}{\partial r} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos k\theta \frac{\partial r^k}{\partial r} + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \operatorname{senk}\theta \frac{\partial r^k}{\partial r}.$$
(2.1.22)

De aquí

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \sum_{k=1}^{\infty} (k+2)a_k r^{k+1} \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2)b_k r^{k+1} \operatorname{senk}\theta + \\
+ \sum_{k=1}^{\infty} kc_k r^{k-1} \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} kd_k r^{k-1} \operatorname{senk}\theta.$$
(2.1.23)

Después de los cálculos hallamos

$$0 = \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R} = \sum_{k=1}^{\infty} (k+2)a_{k}R^{k+1}\cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2)b_{k}R^{k+1}senk\theta + \sum_{k=1}^{\infty} kc_{k}R^{k-1}\cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} kd_{k}R^{k-1}senk\theta$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\theta \Big[a_{k}(k+2)R^{k+1} + c_{k}kR^{k-1}\Big] + \sum_{k=1}^{\infty} senk\theta \Big[b_{k}(k+2)R^{k+1} + d_{k}kR^{k-1}\Big].$$
(2.1.24)

De lo anterior, como los armónicos circulares forman una base para el espacio de las funciones armónicas definidas en la región anular circular y de $0 = \sum_{k=1}^{\infty} 0 \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} 0 \operatorname{senk}\theta$ se obtiene:

$$a_k(k+2)R^{k+1} + c_k k R^{k-1} = 0,$$
 (2.1.25)

$$b_k(k+2)R^{k+1} + d_k k R^{k-1} = 0. (2.1.26)$$

Despejando hallamos

$$\begin{split} c_k &= -\frac{(k+2)a_k R^{k+1}}{kR^{k-1}} = -\frac{(k+2)a_k R^2}{k}, \\ d_k &= -\frac{(k+2)b_k R^2}{k}, \end{split}$$

así los coeficientes de u están dados por:

$$a_k = \frac{f_k^1}{4(k+1)}, \quad b_k = \frac{f_k^2}{4(k+1)}, \quad c_k = -\frac{R^2(k+2)f_k^1}{4k(k+1)}, \quad d_k = -\frac{R^2(k+2)f_k^2}{4k(k+1)}.$$

Los coeficientes f_k^1 y f_k^2 , por hipótesis para el problema directo los conocemos.

Calculemos la medición que corresponde a este modelo. Recordemos que en este caso $V=u\big|_{r=R}=u\big|_{\partial\Omega_r}$

$$\begin{split} V(\theta) &= u \big|_{r=R} = u(R,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k R^{k+2} + c_k R^k \right] \cos k\theta + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[b_k R^{k+2} + d_k R^k \right] \operatorname{senk}\theta \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{f_k^1 R^{k+2}}{4(k+1)} - \frac{f_k^1 R^{k+2}(k+2)}{4k(k+1)} \right] \cos k\theta + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{f_k^2 R^{k+2}}{4(k+1)} - \frac{f_k^2 R^{k+2}(k+2)}{4k(k+1)} \right] \operatorname{senk}\theta \\ &= - \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k^1 R^{k+2}}{2k(k+1)} \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k^2 R^{k+2}}{2k(k+1)} \operatorname{senk}\theta \right]. \end{split}$$

Como

$$V(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k^1 \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} V_k^2 \operatorname{senk}\theta, \qquad (2.1.27)$$

de lo anterior se halla la medición exacta correspondiente a este modelo. En este caso los coeficientes de Fourier V_k^1 y V_k^2 de V están dados por:

$$V_k^1 = -\frac{f_k^1 R^{k+2}}{2k(k+1)}, \qquad V_k^2 = -\frac{f_k^2 R^{k+2}}{2k(k+1)}.$$
 (2.1.28)

2.2 Problema Inverso.

2.2.1 Caso sin error

Supongamos que conocemos a la medición exacta $V(\theta)$ y que esta puede expresarse como:

$$V(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k^1 \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} V_k^2 \operatorname{senk}\theta.$$
 (2.2.1)

En este caso conocemos a V_k^1 y V_k^2 . Surge ahora la pregunta ¿Cómo recuperaremos a f ?

De (2.1.28) despejamos f_k^1 y f_k^2 , los coeficientes de Fourier de la fuente f en función de los coeficientes de la medición V:

$$f_k^1 = -\frac{2k(k+1)}{R^{k+2}} V_k^1, (2.2.2)$$

$$f_k^2 = -\frac{2k(k+1)}{R^{k+2}}V_k^2. {(2.2.3)}$$

Por definición de coeficiente de Fourier de V

$$V_k^1 = \frac{1}{\pi} \langle V(\theta), \cos k\theta \rangle_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos k\theta V(\theta) d\theta, \qquad (2.2.4)$$

$$V_k^2 = \frac{1}{\pi} \langle V(\theta), senk\theta \rangle_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} senk\theta V(\theta) d\theta.$$
 (2.2.5)

Y que en términos de f, V está dada por (2.1.27). Podemos hallar a los coeficientes de Fourier de f en términos de los coeficientes de Fourier de V por medio de (2.2.2) y (2.2.3), así f está dada por:

$$f(r,\theta) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k(k+1)}{R^{k+2}} V_k^1 r^k \cos k\theta - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k(k+1)}{R^{k+2}} V_k^2 r^k \operatorname{senk}\theta$$
 (2.2.6)

2.2.2 Caso con error

Supongamos ahora que conocemos $V^{\delta}(\theta)$ en vez de $V(\theta)$ y que

$$\left\|V(\theta)-V^{\delta}(\theta)\right\|_{L_{2}(\partial\Omega)}=\left(\int_{\partial\Omega}\left[V(\theta)-V^{\delta}(\theta)\right]^{2}ds\right)^{\frac{1}{2}}<\delta,$$

donde $\delta > 0$ se conoce y es fijo. De acuerdo con lo realizado en la sección anterior con $V^{\delta}(\theta)$ recuperaremos a una fuente,

$$f^{\delta} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{k,\delta}^{1} r^{k} \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} f_{k,\delta}^{2} r^{k} \operatorname{senk}\theta, \qquad (2.2.7)$$

con

$$f_{k,\delta}^{1} = -\frac{2k(k+1)}{R^{k+2}} V_{k,\delta}^{1},$$

$$f_{k,\delta}^{2} = -\frac{2k(k+1)}{R^{k+2}} V_{k,\delta}^{2},$$
(2.2.8)

donde los coeficientes $V_{k,\delta}^1$ y $V_{k,\delta}^2$ son los coeficientes de Fourier de la medición con error:

$$V^{\delta}(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} V_{k,\delta}^{1} \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} V_{k,\delta}^{2} \operatorname{senk}\theta,$$

con

$$egin{aligned} V_{k,\delta}^1 &= rac{1}{\pi} \Big\langle V^{\delta}(heta), \cos k heta \Big
angle, \ V_{k,\delta}^2 &= rac{1}{\pi} \Big\langle V^{\delta}(heta), senk heta \Big
angle. \end{aligned}$$

Tenemos la fuente

$$f^{\delta}(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{k,\delta}^{1} r^{k} \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} f_{k,\delta}^{2} r^{k} \operatorname{senk} \theta,$$

donde $f_{k,\delta}^1$ y $f_{k,\delta}^2$ están dadas por (2.2.8).

Nótese que debido a que este problema es mal planteado como se ha dicho en la introducción, f y f^δ no necesariamente están cercanos a pesar de que V y V^δ lo estén. Obsérvese que cuando $f^1_{k,\delta}$ y $f^2_{k,\delta}$ están cercanos a f^1_k y f^2_k el error total en la serie puede crecer indefinidamente y por lo tanto, puede ocurrir que (2.2.6) y (2.2.7) estén alejados. En este caso se procede a aproximar a f no por f^δ , si no por $f_{N(\delta)}$ que se obtiene truncando a la serie con la que está definida f^δ en un $N(\delta)$ elegido apropiadamente en función de δ . Esta elección se hace garantizando que cuando $\delta \to 0$ y $N(\delta) \to \infty$ entonces, $\|f-f_{N(\delta)}\|_{L_2(\Omega)} \to 0$. Se va a aproximar a f por $f_{N(\delta)}$ dada por:

$$f_{N(\delta)}(r,\theta) = \sum_{k=1}^{N(\delta)} f_{k,\delta}^1 r^k \cos k\theta + \sum_{k=1}^{N(\delta)} f_{k,\delta}^2 r^k \operatorname{senk}\theta$$
 (2.2.9)

Sabiendo que

$$\left\|V - V^{\delta}\right\|_{L_{2}(\partial\Omega)} = \left[\int_{0}^{2\pi} \left[V(\theta) - V^{\delta}(\theta)\right]^{2} d\theta\right]^{\frac{1}{2}} \leq \delta, \tag{2.2.10}$$

y que la fuente $\,f_{N(\delta)}\,$ converge a $\,f\,$ significa que

$$\lim_{N(\delta)\to\infty} \left\| f_{N(\delta)} - f \right\|_{L_2(\Omega)} = \lim_{N(\delta)\to\infty} \left[\int_{\Omega} (f_{N(\delta)} - f)^2 d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} = 0.$$
 (2.2.11)

Queremos calcular,

$$I_N = \|f - f_N\|_{L_2(\Omega)}^2,$$
 (2.2.12)

para ello calculemos primero $\|f\|_{L_2(\Omega)}^2$ y $\|f_N\|_{L_2(\Omega)}^2$, con la misma técnica calcularemos $\|f-f_N\|_{L_2(\Omega)}^2$.

$$\begin{split} \left\| f \right\|_{L_{2}(\Omega)}^{2} &= \left\langle f, f \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} f_{k}^{1} r^{k} \cos\left(k\theta\right) + f_{k}^{2} r^{k} sen\left(k\theta\right), \sum_{j=1}^{\infty} f_{j}^{1} r^{j} \cos\left(j\theta\right) + f_{j}^{2} r^{j} sen\left(j\theta\right), \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega} (f_{k}^{1})^{2} r^{2k} \cos^{2}\left(k\theta\right) d\Omega + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega} (f_{k}^{2})^{2} r^{2k} sen^{2}\left(k\theta\right) d\Omega \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[(f_{k}^{1})^{2} \int_{0}^{R} \int_{0}^{2\pi} r^{2k+1} \cos^{2}\left(k\theta\right) dr d\theta + (f_{k}^{2})^{2} \int_{0}^{R} \int_{0}^{2\pi} r^{2k+1} sen^{2}\left(k\theta\right) dr d\theta \right] \\ &= \pi \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(f_{k}^{1})^{2} R^{2k+2}}{2k+2} + \frac{(f_{k}^{2})^{2} R^{2k+2}}{2k+2} \right]. \end{split}$$

Ahora

$$\begin{split} \left\| f_N \right\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \sum_{k=1}^N \int_{\Omega} (f_{k,\delta}^1)^2 r^{2k} \cos^2\left(k\theta\right) d\Omega + \sum_{k=1}^N \int_{\Omega} (f_{k,\delta}^2)^2 r^{2k} sen^2\left(k\theta\right) d\Omega \\ &= \sum_{k=1}^N \Bigg[(f_{k,\delta}^1)^2 \int_0^R \int_0^{2\pi} r^{2k+1} \cos^2\left(k\theta\right) dr d\theta + (f_{k,\delta}^2)^2 \int_0^R \int_0^{2\pi} r^{2k+1} sen^2\left(k\theta\right) dr d\theta \Bigg] \\ &= \pi \sum_{k=1}^N \Bigg[\frac{(f_{k,\delta}^1)^2 R^{2k+2}}{2k+2} + \frac{(f_{k,\delta}^2)^2 R^{2k+2}}{2k+2} \Bigg]. \end{split}$$

Finalmente calculamos $\left\|f-f_{N}\right\|_{L_{2}(\Omega)}^{2}$, obsérvese que puede escribirse de la forma

$$\begin{split} I_{N} &= \left\| f - f_{N} \right\|_{L_{2}(\Omega)}^{2} = \left\| \sum_{k=1}^{N} \left[(f_{k}^{1} - f_{k,\delta}^{1}) r^{k} \cos\left(k\theta\right) + (f_{k}^{2} - f_{k,\delta}^{2}) r^{k} sen(k\theta) \right] + \\ &+ \sum_{k=N+1}^{\infty} \left[f_{k}^{1} r^{k} \cos\left(k\theta\right) + f_{k}^{2} r^{k} sen(k\theta) \right] \right\|_{L_{2}(\Omega)}^{2} \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^{N} \left[\int_{0}^{R} \int_{0}^{2\pi} (f_{k}^{1} - f_{k,\delta}^{1})^{2} r^{2k+1} \cos^{2}\left(k\theta\right) dr d\theta + \int_{0}^{R} \int_{0}^{2\pi} (f_{k}^{2} - f_{k,\delta}^{2})^{2} r^{2k+1} sen^{2}\left(k\theta\right) dr d\theta \right] + \\ &+ \sum_{k=N+1}^{\infty} \left[\int_{0}^{R} \int_{0}^{2\pi} (f_{k}^{1})^{2} r^{2k+1} \cos^{2}\left(k\theta\right) dr d\theta + \int_{0}^{R} \int_{0}^{2\pi} (f_{k}^{2})^{2} r^{2k+1} sen^{2}\left(k\theta\right) dr d\theta \right] \right\}. \end{split}$$

Después calculamos:

$$\begin{split} I_N &= \pi \sum_{k=1}^N \left[\frac{(f_k^1 - f_{k,\delta}^1)^2 R^{2k+2}}{2k+2} + \frac{(f_k^2 - f_{k,\delta}^2)^2 R^{2k+2}}{2k+2} \right] + \\ &+ \pi \sum_{k=N+1}^\infty \left[\frac{(f_k^1)^2 R^{2k+2}}{2k+2} + \frac{(f_k^2)^2 R^{2k+2}}{2k+2} \right]. \end{split}$$

Tomando en cuenta que para k = 1, 2, 3, ...

$$\begin{split} f_k^i &= -\frac{2k(k+1)}{R^{k+2}} V_k^i & i = 1, 2, \dots \\ f_{k,\delta}^i &= -\frac{2k(k+1)}{R^{k+2}} V_{k,\delta}^i & i = 1, 2, \dots \end{split}$$

Entonces,

$$I_{N} = \pi \sum_{k=1}^{N} \frac{2k^{2}(k+1)}{R^{2}} \left[(V_{k}^{1} - V_{k,\delta}^{1})^{2} + (V_{k}^{2} - V_{k,\delta}^{2})^{2} \right] +$$

$$+ \pi \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{2k^{2}(k+1)}{R^{2}} \left[(V_{k}^{1})^{2} + (V_{k}^{2})^{2} \right].$$

Del hecho que,

$$\left\|V-V^{\delta}\right\|_{L_{2}(\partial\Omega)}<\delta,$$

y de la igualdad de Parseval hallamos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[(V_k^1 - V_{k,\delta}^1)^2 + (V_k^2 - V_{k,\delta}^2)^2 \right] < \delta^2.$$

Y de aquí

$$I_{N} < \pi \left(\frac{2\delta^{2}}{R^{2}} \sum_{k=1}^{N} (k^{3} + k^{2}) + \frac{2}{R^{2}} \sum_{k=N+1}^{\infty} k^{2} (k+1) \left[(V_{k}^{1})^{2} + (V_{k}^{2})^{2} \right] \right)$$

$$< \pi \left(\frac{2\delta^{2}}{R^{2}} (2N^{3}) + \frac{4}{R^{2}} \sum_{k=N+1}^{\infty} k^{3} \left[(V_{k}^{1})^{2} + (V_{k}^{2})^{2} \right] \right).$$

Supongamos que los coeficientes V_{k}^{1} y V_{k}^{2} satisface la condición a priori

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^5 R^{2k} \left[(V_k^1)^2 + (V_k^2)^2 \right] < E = cte.$$

Tomando en cuenta la suposición anterior, hallamos que:

$$I_N < \frac{4S^2N^3}{R^2} + \frac{4E}{R^2} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

y ya que

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k} < \frac{1}{N},$$

hallamos finalmente que:

$$I_N < \pi \left(\frac{4\delta^2 N^3}{R^2} + \frac{4E}{R^2 N} \right)$$
$$= \frac{4\pi}{R^2} \left(\delta^2 N^3 + \frac{E}{N} \right).$$

Vamos a derivar respecto a $\,N\,$ la expresión del lado derecho.

Sea

$$F(x) = \delta^2 x^3 + \frac{E}{x}.$$

Derivando e igualando a cero,

$$F'(x) = 3\delta^2 N^2 - \frac{E}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow 3\delta^2 x^4 = E$$

$$x^4 = \frac{E}{3}\delta^2.$$

Sea

$$N(\delta) = \left[\left(\frac{E}{3} \right)^{\frac{1}{4}} \delta^{\frac{1}{2}} \right]. \tag{(8)}$$

Así llegamos a obtener el punto óptimo $N(\delta)$ donde se minimiza $F(N) = \delta^2 N^3 + \frac{E}{N}$, ahora si sustituimos $N(\delta)$ en F(N) obtendremos la mejor aproximación a f.

2.2.3 Aproximación en el caso discreto.

Sea $V(\theta)$ una función 2π periódica definida sobre el intervalo $\left[-\pi,\pi\right]$ de clase C^4 , para poder aplicar el método de Simpson.

En esta sección se obtienen resultados para el caso de una sola región circular similares a los presentados en [2].

Supongamos que conocemos sólo a la función $V(\theta)$ en los puntos $\theta_0, \theta_1, ..., \theta_n$ de una partición equiespaciada del intervalo $\left[-\pi, \pi\right]$, donde $\theta_0 = -\pi$ y $\theta_n = \pi$. Sea $h = \frac{2\pi}{n} = \Delta \theta$ el tamaño de la partición.

Como primer caso estamos interesados en buscar una aproximación

$$\tilde{V}_{N}(\theta) = \sum_{k=1}^{N} \tilde{V}_{k}^{1} \cos k\theta + \sum_{k=1}^{N} \tilde{V}_{k}^{2} \operatorname{senk}\theta, \qquad (2.2.13)$$

donde \tilde{V}_k^1 y \tilde{V}_k^2 son calculados por medio de la cuadratura de Simpson. Queremos hallar un estimado para

$$\left\|V(\theta)-\tilde{V_N}(\theta)\right\|_{L_2(-\pi,\pi)}$$
.

Como segundo paso consideremos el caso en que no conocemos a la función V en los puntos $\theta_0, \theta_1, ..., \theta_n$ sino sólo una aproximación $\tilde{V_{\tilde{\delta}}}(\theta_0), \tilde{V_{\tilde{\delta}}}(\theta_2), ..., \tilde{V_{\tilde{\delta}}}(\theta_n)$ donde

$$\left|V(\theta_j) - \tilde{V}_{\tilde{\delta}}(\theta_j)\right| < \tilde{\delta},$$

y que buscamos una aproximación en la forma:

$$\tilde{V}_{\tilde{\delta}}(\theta) = \sum_{k=1}^{N} \tilde{V}_{k,\tilde{\delta}}^{1} \cos k\theta + \sum_{k=1}^{N} \tilde{V}_{k,\tilde{\delta}}^{2} \operatorname{senk}\theta,$$

con los coeficientes $\tilde{V}_{k,\tilde{\delta}}^1$ y $\tilde{V}_{k,\tilde{\delta}}^2$ calculados por medio de la misma cuadratura que los coeficientes \tilde{V}_k^1 y \tilde{V}_k^2 .

Observemos que en el caso en que buscamos la aproximación de la función $V(\theta)$ en la forma (2.2.13) cometemos un error debido sólo al error de la cuadratura. Como cada coeficiente contribuye con un error, este puede acumularse conforme aumentemos el grado N del polinomio (2.2.13). Un problema que debe resolverse es el de determinar N en función del error que se comete en cada coeficiente debido a la cuadratura que apliquemos, para garantizar

$$\left\| \tilde{V}_{N}(\theta) - V(\theta) \right\|_{L_{2}(-\pi,\pi)} \xrightarrow{N(\delta_{1}) \to \infty} 0. \tag{2.2.14}$$

En el segundo caso, aunado al error que cometemos en el cálculo de los coeficientes debemos tomar en cuenta el error $\tilde{\delta}$, el cual corresponde al error de medición. Similarmente debemos encontrar un resultado como el de (2.2.14):

$$\left\| \tilde{V}_{N,\tilde{\delta}}(\theta) - V(\theta) \right\|_{L_2(-\pi,\pi)} \xrightarrow{N(\delta_1,\tilde{\delta}) \to \infty} 0. \tag{2.2.15}$$

Supongamos que $V(\theta)$ esta dado por (2.2.1) con los coeficientes de Fourier dados por (2.2.4) y (2.2.5).

Supongamos también que conocemos a V en los puntos equiespaciados $\theta_0, \theta_1, ..., \theta_n \in [-\pi, \pi]$ donde $\theta_0 = -\pi$ y $\theta_n = \pi$.

Podemos aproximar a \tilde{V}_k^1 y \tilde{V}_k^2 por medio de la cuadratura de Simpson $\tilde{V}_{k,n}^1$ y $\tilde{V}_{k,n}^2$ respectivamente y sabemos que se tiene el estimado [4]:

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} V(\theta) \cos k\theta d\theta - \tilde{V}_{k,n}^{1} \right| = \frac{2\pi}{180} V^{(4)}(\eta) (\Delta \theta)^{4}, \tag{2.2.16}$$

para algún
$$\eta \in [-\pi, \pi]$$
 con $\Delta \theta = \theta_1 - \theta_0 = \frac{2\pi}{n}$. (2.2.17)

Sea

$$M = \max_{\theta \in \left[-\pi, \pi\right]} \left| V^{(4)}(\theta) \right|. \tag{2.2.18}$$

De (2.2.16) y (2.2.17) hallamos

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} V(\theta) \cos k\theta d\theta - \tilde{V}_{k,n}^{1} \right| \le \frac{(2\pi)^{5} M}{180} \frac{1}{n^{4}} = \frac{8M\pi^{5}}{45} \frac{1}{n^{4}}.$$
 (2.2.19)

Se tiene un resultado análogo para $\int_{-\pi}^{\pi} V(\theta) senk\theta d\theta$.

Sea

$$\tilde{V}_{N}(\theta) = \sum_{k=1}^{N} \left[\tilde{V}_{k,n}^{1} \cos k\theta + \tilde{V}_{k,n}^{2} \operatorname{senk}\theta \right], \tag{2.2.20}$$

$$\begin{aligned} \left\| V(\theta) - \tilde{V}_{N}(\theta) \right\|_{L_{2}(\partial\Omega)}^{2} &= \sum_{k=1}^{N} \left[(V_{k}^{1} - \tilde{V}_{k,n}^{1})^{2} + (V_{k}^{2} - \tilde{V}_{k,n}^{2})^{2} \right] + \\ &+ \sum_{k=N+1}^{\infty} \left[(V_{k}^{1})^{2} + (V_{k}^{2})^{2} \right] \end{aligned}$$

$$\leq 2\left(\frac{8M\pi^5}{45}\frac{1}{n^4}\right)N + \sum_{k=N+1}^{\infty} \left[(V_k^1)^2 + (V_k^2)^2 \right]. \tag{2.2.21}$$

Hacemos una cota para la cola de la serie del miembro derecho de (2.2.21).

$$I_N = \sum_{k=N+1}^{\infty} \left[(V_k^1)^2 + (V_k^2)^2 \right].$$
 (2.2.22)

Para hallar dicha cota, integramos por partes las integrales con la que se definen los coeficientes de Fourier dadas en (2.2.4) y (2.2.5).

$$\begin{split} V_k^1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} V(\theta) \cos k\theta d\theta = \frac{V(\theta) senk\theta}{\pi k} \bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi k} \int_{-\pi}^{\pi} V'(\theta) senk\theta d\theta \\ &= \frac{1}{\pi k} \int_{-\pi}^{\pi} V'(\theta) senk\theta d\theta = \frac{1}{\pi k} \bigg[\frac{V'(\theta) \cos k\theta}{k} \bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} V''(\theta) \cos k\theta d\theta \bigg] \\ &= \frac{1}{\pi k^2} \int_{-\pi}^{\pi} V''(\theta) \cos k\theta d\theta \\ &= \frac{1}{\pi k^4} \int_{-\pi}^{\pi} V^{(4)}(\theta) \cos k\theta d\theta. \end{split}$$

Sea
$$M = \frac{\max}{\theta \in [-\pi, \pi]} |V^{(4)}(\theta)|$$
.

Se tiene que

$$\left|V_{k}^{1}\right| \le \frac{1}{\pi k^{4}} \int_{-\pi}^{\pi} \left|V^{(4)}(\theta)\right| d\theta \le \frac{2M\pi}{\pi k^{4}} = \frac{2M}{k^{4}}.$$
 (2.2.23)

Similarmente para

$$\left|V_{k}^{2}\right| \leq \frac{2M}{k^{4}}.$$

Con estas cotas pasemos a hallar una cota para la cola de la serie (2.2.22).

$$I_{N} = \sum_{k=N+1}^{\infty} \left[(V_{k}^{1})^{2} + (V_{k}^{2})^{2} \right] \leq 8M^{2} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^{8}} \leq 8M^{2} \int_{N}^{\infty} \frac{1}{x^{8}} dx$$

$$= -\frac{8M^{2}x^{-7}}{7} \Big|_{N}^{\infty} = \frac{8M^{2}}{7N^{7}}.$$
(2.2.24)

Sustituyendo (2.2.24) en (2.2.21) hallamos:

$$\left\|V(\theta) - \tilde{V}_{N}(\theta)\right\|_{L_{2}(\partial\Omega)}^{2} \le 2\left(\frac{8M\pi^{5}}{45}\right)^{2} N \frac{1}{n^{8}} + \frac{8M^{2}}{7N^{7}}.$$
 (2.2.25)

Calculemos el valor de N donde se minimiza la expresión:

$$F(x) = 2\left(\frac{8M\pi^5}{45}\right)^2 x \frac{1}{n^8} + \frac{8M^2}{7x^7}.$$
$$F'(x) = 2\left(\frac{8M\pi^5}{45}\right)^2 \frac{1}{n^8} - \frac{8M^2}{x^8}.$$

Como necesitamos que

$$F'(x) = 0.$$
 (2.2.26)

Hallamos que

$$x^{8} = \frac{8M^{2}n^{8}(45)^{2}}{(8M)^{2}\pi^{10}} = \frac{(45)^{2}}{16\pi^{10}}n^{8}$$

$$\Rightarrow x = \left(\frac{(45)^{2}}{16\pi^{10}}\right)^{\frac{1}{8}}n$$

$$N = \left[\frac{(45)^{\frac{1}{4}}}{16^{\frac{1}{8}}\pi^{\frac{5}{4}}}n\right],$$
(2.2.27)

donde [] es la función parte entera.

2.2.4 Aproximación en el caso de un número finito de datos con error.

Consideremos ahora el caso en que conocemos una aproximación de V en los puntos $\theta_0,\theta_1,...,\theta_n$, cuyas mediciones son:

$$V_{\tilde{\delta}}(\theta_0), V_{\tilde{\delta}}(\theta_1), \dots, V_{\tilde{\delta}}(\theta_n), \tag{2.2.28}$$

donde

$$|V(\theta_i) - V_{\tilde{\delta}}(\theta_i)| \le \tilde{\delta}_1.$$
 (2.2.29)

Calcularemos los coeficientes

$$V_{k,n,\tilde{\delta}_{l}}^{1} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} V_{\tilde{\delta}_{l}}(\theta) \cos k\theta d\theta, \qquad (2.2.30)$$

$$V_{k,n,\tilde{\delta}_{l}}^{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} V_{\tilde{\delta}_{l}}(\theta) \operatorname{senk}\theta d\theta, \qquad (2.2.31)$$

$$\left| V_{k}^{1} - V_{k,n,\tilde{\delta}_{1}}^{1} \right| \leq \left| V_{k,n,\tilde{\delta}_{1}}^{1} - V_{k,n}^{1} \right| + \left| V_{k,n}^{1} - V_{k}^{1} \right|. \tag{2.2.32}$$

El segundo término ha sido analizado anteriormente (error de la cuadratura de Simpson). Pasemos al análisis del primer término

$$I_{k,n,\tilde{\delta}_{1}}^{1} \left| V_{k,n,\tilde{\delta}_{1}}^{1} - V_{k,n}^{1} \right|. \tag{2.2.33}$$

La regla de Simpson para una función f de clase $C^4([a,b])$ para una partición $x_0, x_1, ..., x_n$ de n+1 puntos con n par está dada por:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \frac{b-a}{n} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$
(2.2.34)

Aplicando la fórmula (2.2.34) a las funciones $V(\theta)\cos k\theta$ y $V(\theta)senk\theta$, en los puntos $\theta_0,\theta_1,...,\theta_n$ y a las funciones $V_{\bar{\xi}_1}(\theta)\cos k\theta$ y $V_{\bar{\xi}_1}(\theta)senk\theta$, en los puntos $\theta_0,\theta_1,...,\theta_n$, obtenemos:

$$\begin{split} \left| V_{k,n}^{1} - V_{k,n,\tilde{\delta}_{1}}^{1} \right| &= \frac{2\pi}{n} \Big[\Big(V(\theta_{0}) - V_{\tilde{\delta}}(\theta_{0}) \Big) \cos k\theta_{0} + \Big(V(\theta_{1}) - V_{\tilde{\delta}}(\theta_{1}) \Big) \cos k\theta_{1} + \\ &\quad + 2 \Big(V(\theta_{2}) - V_{\tilde{\delta}}(\theta_{2}) \Big) \cos k\theta_{2} + 4 \Big(V(\theta_{3}) - V_{\tilde{\delta}}(\theta_{3}) \Big) \cos k\theta_{3} + \\ &\quad + 2 \Big(V(\theta_{4}) - V_{\tilde{\delta}}(\theta_{4}) \Big) \cos k\theta_{4} + \dots + 2 \Big(V(\theta_{n-2}) - V_{\tilde{\delta}}(\theta_{n-2}) \Big) \cos k\theta_{n-2} + \\ &\quad + 4 \Big(V(\theta_{n-1}) - V_{\tilde{\delta}}(\theta_{n-1}) \Big) \cos k\theta_{n-1} + \Big(V(\theta_{n}) - V_{\tilde{\delta}}(\theta_{n}) \Big) \cos k\theta_{n} \Big]. \end{split} \tag{2.2.35}$$

De la misma forma

$$\begin{split} \left|V_{k,n}^{2}-V_{k,n,\tilde{\delta}_{1}}^{2}\right| &=\frac{2\pi}{n}\Big[\left(V(\theta_{0})-V_{\tilde{\delta}}(\theta_{0})\right)senk\theta_{0}+\left(V(\theta_{1})-V_{\tilde{\delta}}(\theta_{1})\right)senk\theta_{1}+\\ &+2\left(V(\theta_{2})-V_{\tilde{\delta}}(\theta_{2})\right)senk\theta_{2}+4\left(V(\theta_{3})-V_{\tilde{\delta}}(\theta_{3})\right)senk\theta_{3}+\\ &+2\left(V(\theta_{4})-V_{\tilde{\delta}}(\theta_{4})\right)senk\theta_{4}+\ldots+2\left(V(\theta_{n-2})-V_{\tilde{\delta}}(\theta_{n-2})\right)senk\theta_{n-2}+\\ &+4\left(V(\theta_{n-1})-V_{\tilde{\delta}}(\theta_{n-1})\right)senk\theta_{n-1}+\left(V(\theta_{n})-V_{\tilde{\delta}}(\theta_{n})\right)senk\theta_{n}\Big]. \end{split} \tag{2.2.36}$$

Del hecho que

$$\underbrace{1+4+2+4+2+...+2+4+1}_{n} = 2+4\left(\frac{n}{2}\right)+2\left(\frac{n-2}{2}\right)$$

$$=3n,$$
(2.2.37)

y usando (2.2.37) junto con (2.2.34) y (2.2.35) hallamos

$$\begin{vmatrix} V_{k,n}^1 - V_{k,n,\tilde{\delta}_1}^1 \end{vmatrix} < \frac{6(n)\pi}{n} \tilde{\delta}_1 = 6\pi \tilde{\delta}_1,
\begin{vmatrix} V_{k,n}^2 - V_{k,n,\tilde{\delta}_1}^2 \end{vmatrix} < \frac{6(n)\pi}{n} \tilde{\delta}_1 = 6\pi \tilde{\delta}_1.$$
(2.2.38)

Al usar (2.2.38) y (2.2.32) para hallar un estimado de

$$\left\|V(\theta) - V_{N,\tilde{\delta}_1}(\theta)\right\|_{L_2(\partial\Omega)}^2 \tag{2.2.39}$$

$$\begin{split} \left\| V(\theta) - V_{N,\tilde{\delta}_{1}}(\theta) \right\|_{L_{2}(\partial\Omega)}^{2} &\leq \left\| V(\theta) - \tilde{V}_{N}(\theta) \right\|_{L_{2}(\partial\Omega)}^{2} + \\ &+ \left\| \tilde{V}_{N}(\theta) - V_{N,\tilde{\delta}_{1}}(\theta) \right\|_{L_{2}(\partial\Omega)}^{2}. \end{split} \tag{2.2.40}$$

En el lado derecho de (2.2.40), $\tilde{V_N}(\theta)$ está dada por (2.2.20) y $\tilde{V_{N,\tilde{\delta}_l}}(\theta)$ está dada por

$$V_{N,\tilde{\delta}_{1}}(\theta) = \sum_{k=1}^{N} V_{k,n,\tilde{\delta}_{1}}^{1} \cos k(\theta) + \sum_{k=1}^{N} V_{k,n,\tilde{\delta}_{1}}^{2} \operatorname{senk}(\theta).$$
 (2.2.41)

Tenemos que

$$\begin{split} \left\| \tilde{V}_{N}(\theta) - V_{N,\tilde{\delta}_{1}}(\theta) \right\|_{L_{2}(\partial\Omega)}^{2} &= \sum_{k=1}^{N} \left(\tilde{V}_{k,n}^{1} - V_{k,n,\tilde{\delta}_{1}}^{1} \right)^{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(\tilde{V}_{k,n}^{2} - V_{k,n,\tilde{\delta}_{1}}^{2} \right)^{2} \\ &\leq 2 \left(6 \right)^{2} \tilde{\delta}_{1}^{2} N. \end{split}$$

$$(2.2.42)$$

De (2.2.42) y (2.2.25) y la desigualdad triangular

$$\begin{split} \left\| V(\theta) - V_{N,\tilde{\delta}_{1}}(\theta) \right\|_{L_{2}(\partial\Omega)}^{2} &\leq \left\| V(\theta) - \tilde{V}_{N}(\theta) \right\|_{L_{2}(\partial\Omega)}^{2} + \\ &+ \left\| \tilde{V}_{N}(\theta) - V_{N,\tilde{\delta}_{1}}(\theta) \right\|_{L_{2}(\partial\Omega)}^{2} \\ &= 2 \left(\frac{8M\pi^{5}}{45} \right)^{2} N \frac{1}{n^{8}} + \frac{8M^{2}}{7N^{7}} + 2(6)^{2} \delta_{1}^{2} N \\ &= \left[2 \left(\frac{8M\pi^{5}}{45} \right)^{2} \frac{1}{n^{8}} + 72\tilde{\delta}_{1}^{2} \right] N + \frac{8M^{2}}{7N^{7}}. \end{split}$$

Para continuar el análisis, se halla el valor de N donde se minimiza:

$$F(x) = \left[2 \left(\frac{8M\pi^5}{45} \right)^2 \frac{1}{n^8} + 72\tilde{\delta}_1^2 \right] x + \frac{8M^2}{7x^7}.$$

Derivando e igualando a cero se obtiene:

$$0 = F'(x) = \left[2 \left(\frac{8M\pi^5}{45} \right)^2 \frac{1}{n^8} + 72\tilde{\delta}_1^2 \right] - \frac{8M^2}{x^8}$$

$$x^8 = \frac{8M^2}{\left[2 \left(\frac{8M\pi^5}{45} \right)^2 \frac{1}{n^8} + 72\tilde{\delta}_1^2 \right]}$$

$$= \frac{8M^2}{\left[\frac{2(8M\pi^5)^2 + 72n^8\tilde{\delta}_1^2(45)^2}{(45)^2n^8} \right]}$$

$$= \frac{8M^2(45)^2n^8}{2(8M\pi^5)^2 + 72n^8\tilde{\delta}_1^2(45)^2}.$$

Despejando
$$x = \left(\frac{8M^2(45)^2}{2(8M\pi^5)^2 + 72n^8\tilde{\delta}_1^2(45)^2}\right)^{\frac{1}{8}}n.$$

Nótese que cuando $\tilde{\delta}_1=0$ obtenemos la expresión (2.2.27) que corresponde al caso en que sólo tenemos error debido a la cuadratura

$$x = \frac{\left(45\right)^{\frac{1}{4}}}{\left(2^{4}\right)^{\frac{1}{8}}\pi^{\frac{5}{4}}} n = \frac{\left(45\right)^{\frac{1}{4}}}{\left(2^{4}\right)^{\frac{1}{8}}\pi^{\frac{5}{4}}} n = \frac{2.5900}{2^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{5}{4}}} n = \frac{2.5900}{\left(1.4142\right)\pi\pi^{\frac{1}{4}}} n$$

$$= \frac{2.5900}{\left(1.4142\right)\left(3.1416\right)\left(1.3313\right)} n = \frac{2.5900}{\left(1.4142\right)\left(4.1822\right)} n.$$

Finalmente tomaremos a N = [0.6192n] = [x], (2.2.43)

donde [] representa la función parte entera.

Capítulo 3

Validación numérica

3.1 Ejemplos numéricos.

En este capítulo desarrollaremos ejemplos que ilustran los resultados presentados en el capítulo anterior.

Ejemplo1. Consideremos como primer caso a la función

$$f(x, y) = 144(x^2 - y^2),$$
 (3.1.1)

definida en el circulo Ω con centro en el origen y radio 1. Esta función satisface que $\int_{\Omega} f(x,y) d\Omega = 0$ y además es armónica, pues

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0.$$

Haciendo $x = r\cos\theta$, $y = rsen\theta$ obtenemos que

$$f(r,\theta) = 144r^{2}(\cos^{2}\theta - sen^{2}\theta)$$

= 144r² cos 2\theta. (3.1.2)

La solución del problema directo está dada por:

$$V(\theta) = V_2^1 \cos 2\theta,$$

donde
$$V_2^1 = \frac{f_2^1 R^4}{2k(k+1)} = 12$$
, y $f_2^1 = 144$, (3.1.3)

y el coeficiente V_2^1 se obtiene de la (2.1.28). Tomando en cuenta que la solución del problema inverso está dada por:

$$f(r,\theta) = 144r^2 \cos 2\theta. \tag{3.1.4}$$

Pasemos ahora al análisis del caso en que conocemos una aproximación $V^{\delta}(\theta) \ \text{de} \ V(\theta) \cot \left\|V(\theta) - V^{\delta}(\theta)\right\|_{L_{1}(\partial\Omega)}^{2} < \delta.$

Sea

$$V^{\delta}(\theta) = V(\theta) + \varepsilon(\theta), \tag{3.1.5}$$

donde

$$\varepsilon(\theta) = \tilde{\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^1 \cos k\theta + \tilde{\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^2 \operatorname{senk}\theta,$$
 (3.1.6)

у

$$\tilde{\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\varepsilon_k^1 \right)^2 + \left(\varepsilon_k^2 \right)^2 \right] < \delta.$$
(3.1.7)

Más aún, tomemos

$$\varepsilon_k^1 = \frac{1}{k} = \varepsilon_k^2.$$

En este caso $\tilde{\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\varepsilon_{k}^{1}\right)^{2}+\left(\varepsilon_{k}^{2}\right)^{2}\right]=2\tilde{\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2}}$. Para que se cumpla (3.1.7) debe pasar que:

$$2\tilde{\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\delta. \tag{3.1.8}$$

Por otra parte, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ y si usamos el hecho de que:

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{N},\tag{3.1.9}$$

hallamos

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{N} + \frac{1}{N},$$

se llega a que

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{N}.$$
 (3.1.10)

Además, si tomamos

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{3\delta}{\pi^2},\tag{3.1.11}$$

garantizamos que (3.1.8) se cumple.

Para cuestiones de cómputo numérico debemos tomar sólo un número N de términos de la serie (3.1.6). Notemos que requerimos

$$2\tilde{\varepsilon}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2}<2\tilde{\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\delta,$$

y tomando en cuenta (3.1.9) se halla que:

$$2\tilde{\varepsilon} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < 2\tilde{\varepsilon} \frac{1}{N} = \frac{6\delta}{\pi^2} \frac{1}{N}, \tag{3.1.12}$$

como $\frac{6}{\pi^2} = \frac{6}{9.8696} \approx 0.6079$, si tomamos $\delta = 0.1$ entonces

$$2\tilde{\varepsilon} \sum_{k=N+1}^{N} 0.6079 \frac{1}{k^2} < 0.6079 \frac{1}{N}$$

De lo anterior se deduce que la cola de la serie tiene una pequeña contribución para valores de N relativamente pequeños. Basta tomar $N\!=\!10$ para ver esto pues en este caso la cola de la serie es menor que 0.0060.

Tomando en cuenta lo anterior calculamos $f_{N(\delta)}$ por medio de (2.2.9) para este caso podemos tomar $\varepsilon = \frac{3}{\pi^2} \delta$. Abajo se muestran las gráficas obtenidas para diferentes valores de N. Se observa que si N>12 f_N está muy alejada de la fuente original. Para valores cercanos a $N(\delta)$ elegida por el criterio (®) se puede considerar que f_N es una buena aproximación.

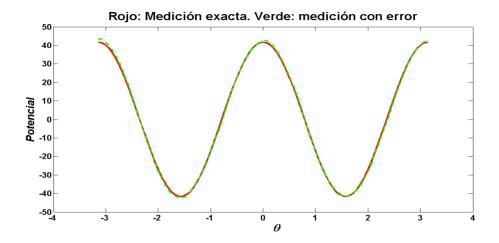


Figura 1: Potencial exacto y aproximado.

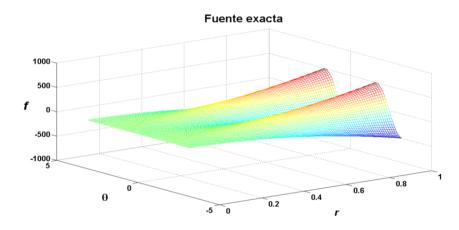


Figura 2: Gráfica de la fuente exacta $f(r,\theta) = 144r^2 \cos 2\theta$.

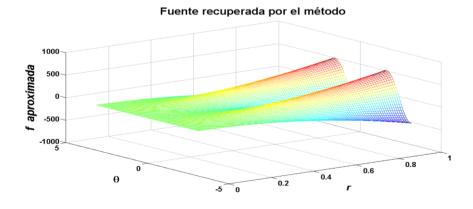


Figura 3: Gráfica de la fuente aproximada $f_N(r,\theta)$ para N=3.

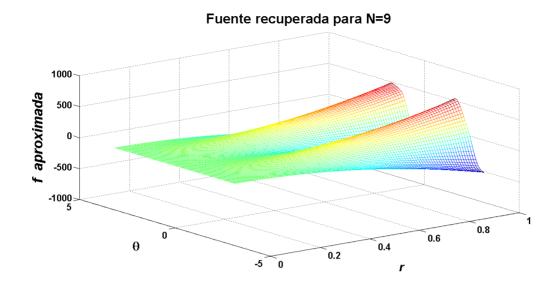


Figura 4: Gráfica de la fuente aproximada $f_N(r,\theta)$ para N=9.

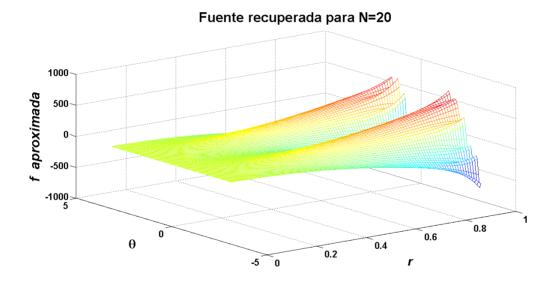


Figura 5: Gráfica de la fuente aproximada $f_{N}(r,\theta)$ para N=20.

Ejemplo2. Consideremos como segundo caso a la función

$$f(x,y) = 240(x^3 - 3xy^2), (3.1.13)$$

definida en el circulo Ω con centro en el origen y radio 1. Esta función satisface que $\int_\Omega f(x,y)d\Omega=0$ y además es armónica, pues

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0.$$

Haciendo $x = r \cos \theta$, $y = rsen\theta$ obtenemos que

$$f(r,\theta) = 240(r^{3}\cos^{3}\theta - 3r^{3}\cos\theta sen^{2}\theta)$$

= 240r³ cos 3\theta. (3.1.14)

Lo obtuvimos de la siguiente manera:

$$\cos\theta sen^{2}\theta = [\cos\theta sen\theta] sen\theta$$
$$= \frac{1}{2} [sen2\theta] sen\theta$$
$$= \frac{1}{4} [\cos\theta - \cos 3\theta],$$

У

$$\cos^{3}\theta = \cos^{2}\theta\cos\theta$$
$$= \cos\theta \left[1 - sen^{2}\theta\right]$$
$$= \cos\theta - \frac{1}{4} \left[\cos\theta - \cos 3\theta\right],$$

así

$$f(r,\theta) = 240r^3\cos 3\theta.$$

La solución del problema directo está dada por:

$$V(\theta) = V_3^1 \cos 3\theta,$$

con

$$V_3^1 = \frac{f_3^1 R^4}{2k(k+1)} = 10 \text{ y } f_3^1 = 240,$$
 (3.1.15)

donde el coeficiente V_3^1 se obtuvo por medio de la fórmula (2.1.28). Tomando en cuenta que la solución del problema inverso está dada por:

$$f(r,\theta) = 240r^3 \cos 3\theta,$$
 (3.1.16)

pasemos ahora al análisis del caso en que conocemos una aproximación $V^{\delta}(\theta)$ de $V(\theta) \cot \left\|V(\theta) - V^{\delta}(\theta)\right\|_{L_{1}(\partial\Omega)}^{2} < \delta.$

Tomamos a $V^{\delta}(\theta)$ como en el ejemplo 1 y realizando un análisis similar, podemos ver que para valores cercanos a $N(\delta)$ elegida por el criterio (®) se puede considerar que f_N es una buena aproximación.

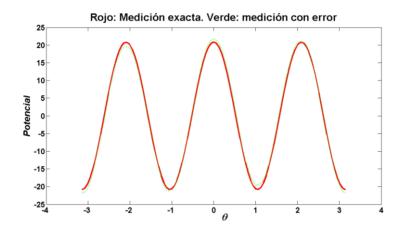


Figura 1: Potencial exacto y aproximado.

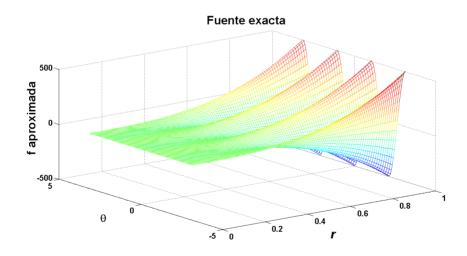


Figura 2: Gráfica de la fuente exacta $f(r,\theta) = 240r^3 \cos 3\theta$.

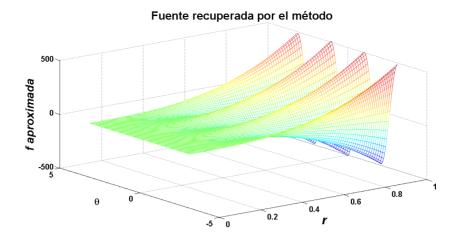


Figura 3: Gráfica de la fuente aproximada $f_N(r,\theta)$ para N=3.

Ejemplo3. Consideremos como tercer caso a la función

$$f(x, y) = 140xy + 140(3x^2y - y^3),$$
 (3.1.17)

definida en el círculo Ω con centro en el origen y radio 1. Esta función satisface que $\int_{\Omega} f(x,y) d\Omega = 0$ y además es armónica, pues

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 6y - 6y = 0.$$

Haciendo $x = r \cos \theta$, $y = rsen\theta$ obtenemos que

$$f(r,\theta) = 140r^{2}sen\theta\cos\theta + 140(3r^{3}\cos^{2}\theta sen\theta - r^{3}sen^{3}\theta)$$

= $70r^{2}sen2\theta + 140r^{3}sen3\theta$. (3.1.18)

La solución del problema directo está dada por:

$$V(\theta) = V_2^2 sen2\theta + V_3^2 sen3\theta,$$

donde

$$V_2^2 = \frac{f_2^2 R^4}{2k(k+1)} \approx 6$$
, $f_2^2 = 70$, $V_3^2 = \frac{f_3^2 R^4}{2k(k+1)} = 10$ y $f_3^2 = 240$. (3.1.19)

Los coeficientes se obtuvieron de nueva cuenta por la fórmula (2.1.28). Tomando en cuenta que la solución del problema inverso está dada por:

$$f(r,\theta) = 70r^2 sen2\theta + 140r^3 sen3\theta,$$
 (3.1.20)

pasemos ahora al análisis del caso en que conocemos una aproximación $V^{\delta}(\theta)$ de $V(\theta) \cot \left\|V(\theta) - V^{\delta}(\theta)\right\|_{L_{1}(\partial\Omega)}^{2} < \delta.$

Tomamos a $V^{\delta}(\theta)$ como en el ejemplo 1 y realizando un análisis similar, podemos ver que para valores cercanos a $N(\delta)$ elegida por el criterio (®) se puede considerar que f_N es una buena aproximación.

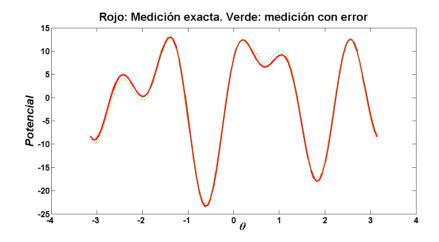


Figura 1: Potencial exacto y aproximado.

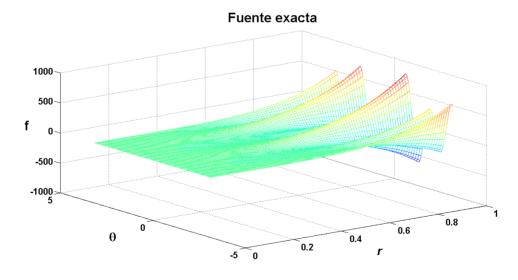


Figura 2: Gráfica de la fuente exacta $f(r,\theta) = 70r^2 sen 2\theta + 140r^3 sen 3\theta$.

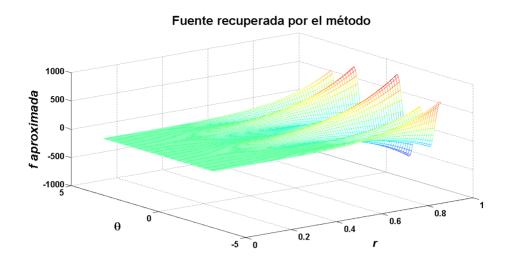


Figura 3: Gráfica de la fuente aproximada $f_N(r,\theta)$ para N=3.

Conclusiones

En este trabajo se estudia el problema de identificación de fuentes concentradas en un medio homogéneo. El desarrollo se hace para el caso en que la región es un círculo centrado en el origen.

Se consideran los casos en que la fuente se recupera de datos conocidos sobre toda la frontera de la región exactos y con error. También se estudió el caso en que se conocen los datos en un número finito de puntos con y sin error. Se presentan ejemplos numéricos para ilustrar el caso en el que se conocen los datos en toda la frontera pero con error. Los resultados presentados en este trabajo pueden extenderse al de una esfera.

Bibliografía

- Conde Mones José Julio. Generalización de un Algoritmo Estable para el Problema Inverso Electroencefalográfico en el caso de Esferas Concéntricas. Tesis de Maestría. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Noviembre de 2008.
- Cruz Castillo Ricardo. Desarrollo de un Método Estable para el Ajuste Polinomial de Datos Discretos. Tesis de Doctorado. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Julio de 2007.
- 3. Duoandikoetxea F. J. Análisis de Fourier. Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid. 1995.
- Fraguela A., Morín M., Oliveros J. Inverse Electroencephalography for Volumetric Sources. Mathematics and Computers in Simulations. 78 481-492. 2008.
- 5. Fraguela Collar A. Teoría Espectral de Operadores Diferenciales. Publicado por el CINVESTAV I.P.N. 1991.
- 6. Jackson J.D. Electrodinámica Clásica, Ed. Alhambra, 1980.
- 7. Marsden E. Jerrold., Tromba J. Anthony. Calculo Vectorial. ISBN 0-2001-04604-0 Addison-Wesley Iberoamericana. 1987.
- Matthew N.O. Sadiku. Elementos de electromagnetismo (Tercera ed.).
 Oxford University Press México, S.A. de C.V. ISBN 970-613-672-X.
 2000.
- Fraguela A., Oliveros J., Morín M. Modelos Matemáticos en Electroencefalografía Inversa. Tópicos de la Teoría de la Aproximación II. Textos Científicos. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, pp. 73-95. 2007.

- Morín Castillo María Monserrat. Análisis del Problema Inverso de Identificación de Fuentes a través de Planteamientos Operacionales. Tesis de Doctorado. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Noviembre 2005.
- 11. Nikolski. S. Fórmulas de Cuadratura. Editorial Mir, Moscú. 1990.
- 12. Núñez P. L. Electric Field of the brain, N. Y. Oxford Univ. Press. 1981.
- Plonsey R. Fleming D. G. Bioelectric Phenomena. N.Y. Mc Graw-Hill. 1969.
- Richard Haberman. Ecuaciones en Derivadas Parciales con Series de Fourier y Problemas de Contorno. Tercera Edición. Prentice Hall, Inc. Saddle River, NJ 07458. ISBN: 0-13-263807-X. 1983.
- 15. Simmons G. Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas. Segunda Edición. McGraw-Hill. 1993.
- 16. T.M. Apostol. Análisis Matemático. Editorial reverté. S. A. Segunda Edición. 1976.
- 17. Tijonov A. N., Samarsky A. A. Ecuaciones de la Física Matemática. Editorial Mir Moscú. 1980.

Apéndice

En este apéndice agregamos los programas que utilizamos para elaborar las gráficas mostradas en los ejemplos.

Para el ejemplo1, se debe correr el siguiente programa.

```
clear;
clc;
delta=0.1;%REPRESENTA EL ERROR DE LA MEDICIÓN \delta
h=2*pi/100;
r=0:0.01:1;
theta=-pi:h:pi;
Vexacto = (500/12) * cos (2*theta);
delta1=delta/2;
%PARA GENERAR EL ERROR ALEATORIO DE LA MEDICIÓN
ALEATORIO=((rand(1,length(theta)))-rand(1,length(theta))));
ERROR=delta1*(ALEATORIO(1))*max(abs(Vexacto))*(cos(theta)+sin(theta));
for i=2:length(Vexacto);
ERROR=ERROR+delta1*ALEATORIO(i) *max(abs(Vexacto))*(1/(i))*(cos(i*theta)+s
in(i*theta));
end
for i=1:length(Vexacto)
coeficientesdefourieraproximados0(i)=(delta1*ALEATORIO(i)*max(abs(Vexacto
))*(1/(i)));
end
for i=1:length(Vexacto)
    if i==2
        extra(i) = (500/12);
        extra(i) = 0;
    end
end
coeficientesdefourieraproximados1=coeficientesdefourieraproximados0+extra
coeficientesdefourieraproximados2=coeficientesdefourieraproximados0;
ERRORMAXIMO=max(abs(ERROR));
MAXIMODELERROR=max(abs(ERROR));
Vaproximado=Vexacto+ERROR;
M=length(theta);
```

```
figure(1)
plot(theta, Vexacto, 'r', theta, Vaproximado, 'g')
xlabel('theta')
ylabel('Potencial')
title('Rojo: Medición exacta. Verde: medición con error')
figure(2)
plot(theta, ERROR)
title('Error')
xlabel('theta')
vlabel('Error')
[THETA, R] = meshgrid (theta, r);
%FUENTE EXACTA
Z=-500*R.^2.*cos(2*THETA);
figure(3)
mesh (R, THETA, Z)
xlabel('r')
ylabel('theta')
title('Fuente exacta')
axis([0 1 -5 5 -1000 1000])
E=(500/12)^2*(2^5);
NRAIZ=sqrt(sqrt(E/3))*sqrt(delta)
NPARAAPROXIMAR=4;
NPARAAPROXIMAR1=9;
NPARAAPROXIMAR2=20;
%FUENTE APROXIMADA PARA DIFERENTES VALORES DE N
for k=1:NPARAAPROXIMAR2
    ZZ1(k) = -2*k*(k+1)*coeficientesdefourieraproximados1(k);
end
for k=1:NPARAAPROXIMAR2
    ZZ2(k) = -2 * k * (k+1) * coeficientes defourier aproximados 2(k);
end
ZAPROXIMADA = (ZZ1(1)*R.*(cos(1*THETA))+ZZ2(1)*R.*(sin(1*THETA)));
for k=2:NPARAAPROXIMAR
ZAPROXIMADA=ZAPROXIMADA+((ZZ1(k)*(R).^k.*(cos(k*THETA))+
ZZ2(k)*(R).^k.*(sin(k*THETA)));
end
ZAPROXIMADA1 = (ZZ1(1)*R.*(cos(1*THETA))+ZZ2(1)*R.*(sin(1*THETA)));
for k=2:NPARAAPROXIMAR1
ZAPROXIMADA1=ZAPROXIMADA1+((ZZ1(k)*(R).^k.*(cos(k*THETA))+
ZZ2(k)*(R).^k.*(sin(k*THETA)));
end
ZAPROXIMADA2=(ZZ1(1)*R.*(cos(1*THETA))+ZZ2(1)*R.*(sin(1*THETA)));
```

```
for k=2:NPARAAPROXIMAR2
ZAPROXIMADA2=ZAPROXIMADA2+((ZZ1(k)*(R).^k.*(cos(k*THETA))+
ZZ2(k)*(R).^k.*(sin(k*THETA))));
end
ERRORRELATIVOO=max(abs(Z-ZAPROXIMADA));
ERRORRELATIVO00=max(ERRORRELATIVO0);
ERRORRELATIVO1=max(abs(Z-ZAPROXIMADA1));
ERRORRELATIVO11=max(ERRORRELATIVO1);
ERRORRELATIVO2=max(abs(Z-ZAPROXIMADA2));
ERRORRELATIVO22=max(ERRORRELATIVO2);
ERRORES=[ERRORRELATIVO00, ERRORRELATIVO11, ERRORRELATIVO22];
figure (4)
mesh (R, THETA, ZAPROXIMADA)
xlabel('r')
ylabel('theta')
title ('Fuente recuperada por el método')
axis([0 1 -5 5 -1000 1000])
figure(5)
mesh (R, THETA, ZAPROXIMADA1)
xlabel('r')
ylabel('theta')
title('Fuente recuperada para N=9')
axis([0 1 -5 5 -1000 1000])
figure(6)
mesh (R, THETA, ZAPROXIMADA2)
xlabel('r')
ylabel('theta')
title ('Fuente recuperada para N=12')
axis([0 1 -5 5 -1000 1000])
figure(7)
subplot(2,2,1)
mesh (R, THETA, Z)
xlabel('r')
ylabel('theta')
title('Fuente exacta')
axis([0 1 -5 5 -1000 1000])
subplot(2,2,2)
mesh (R, THETA, ZAPROXIMADA)
xlabel('r')
ylabel('theta')
title('Fuente recuperada para N=5')
axis([0 1 -5 5 -1000 1000])
subplot(2,2,3)
mesh (R, THETA, ZAPROXIMADA1)
xlabel('r')
```

```
ylabel('theta')
title('Fuente recuperada para N=9')
axis([0 1 -5 5 -1000 1000])

subplot(2,2,4)
mesh(R,THETA,ZAPROXIMADA2)
xlabel('r')
ylabel('theta')
title('Fuente recuperada para N=20')
axis([0 1 -5 5 -1000 1000])
```

Para el ejemplo2, se debe correr el siguiente programa.

```
clear;
clc:
delta=0.1;% REPRESENTA EL ERROR DE LA MEDICIÓN \delta
h=2*pi/100;
r=0:0.01:1;
theta=-pi:h:pi;
Vexacto = (500/24) * cos (3*theta);
delta1=delta/2;
%PARA GENERAR EL ERROR ALEATORIO DE LA MEDICIÓN
ALEATORIO=((rand(1,length(theta))-rand(1,length(theta))));
ERROR=delta1*(ALEATORIO(1)) *max(abs(Vexacto)) * (cos(theta) + sin(theta));
for i=2:length(Vexacto);
ERROR=ERROR+delta1*ALEATORIO(i) *max(abs(Vexacto))*(1/(i))*(cos(i*theta)+s
in(i*theta));
end
for i=1:length(Vexacto)
coeficientesdefourieraproximados0(i) = (delta1*ALEATORIO(i) *max(abs(Vexacto
))*(1/(i)));
end
for i=1:length(Vexacto)
    if i==3
        extra(i) = (500/24);
    else
        extra(i) = 0;
    end
end
coeficientesdefourieraproximados1=coeficientesdefourieraproximados0+extra
coeficientesdefourieraproximados2=coeficientesdefourieraproximados0;
ERRORMAXIMO=max(abs(ERROR));
MAXIMODELERROR=max(abs(ERROR));
```

```
Vaproximado=Vexacto+ERROR;
M=length(theta);
figure(1)
plot(theta, Vexacto, 'r', theta, Vaproximado, 'g')
xlabel('theta')
ylabel('Potencial')
title('Rojo: Medición exacta. Verde: medición con error')
figure(2)
plot(theta, ERROR)
title('Error')
xlabel('theta')
ylabel('Error')
[THETA, R] = meshgrid (theta, r);
%FUENTE EXACTA
Z=-500*R.^3.*cos(3*THETA);
figure(3)
mesh (R, THETA, Z)
xlabel('r')
ylabel('theta')
title('Fuente exacta')
E=(500/24)^2*(3^5);
NRAIZ=sqrt(sqrt(E/3))*sqrt(delta)
NPARAAPROXIMAR=4;
NPARAAPROXIMAR1=9;
NPARAAPROXIMAR2=20;
%FUENTE APROXIMADA PARA DIFERENTES VALORES DE N
for k=1:NPARAAPROXIMAR2
    ZZ1(k) = -2 * k * (k+1) * coeficientes defourier approximados 1(k);
end
for k=1:NPARAAPROXIMAR2
    ZZ2(k) = -2*k*(k+1)*coeficientesdefourieraproximados2(k);
end
ZAPROXIMADA = (ZZ1(1)*R.*(cos(1*THETA))+ZZ2(1)*R.*(sin(1*THETA)));
for k=2:NPARAAPROXIMAR
ZAPROXIMADA=ZAPROXIMADA+((ZZ1(k)*(R).^k.*(cos(k*THETA))+
ZZ2(k)*(R).^k.*(sin(k*THETA))));
end
ZAPROXIMADA1 = (ZZ1(1)*R.*(cos(1*THETA))+ZZ2(1)*R.*(sin(1*THETA)));
for k=2:NPARAAPROXIMAR1
ZAPROXIMADA1=ZAPROXIMADA1+((ZZ1(k)*(R).^k.*(cos(k*THETA))+
ZZ2(k)*(R).^k.*(sin(k*THETA))));
end
```

```
ZAPROXIMADA2 = (ZZ1(1)*R.*(cos(1*THETA))+ZZ2(1)*R.*(sin(1*THETA)));
for k=2:NPARAAPROXIMAR2
ZAPROXIMADA2 = ZAPROXIMADA2 + ((ZZ1(k)*(R).^k.*(cos(k*THETA)) +
ZZ2(k)*(R).^k.*(sin(k*THETA)));
end
ERRORRELATIVO0=max(abs(Z-ZAPROXIMADA));
ERRORRELATIVO00=max(ERRORRELATIVO0);
ERRORRELATIVO1=max(abs(Z-ZAPROXIMADA1));
ERRORRELATIVO11=max(ERRORRELATIVO1);
ERRORRELATIVO2=max(abs(Z-ZAPROXIMADA2));
ERRORRELATIVO22=max(ERRORRELATIVO2);
ERRORES=[ERRORRELATIVO00, ERRORRELATIVO11, ERRORRELATIVO22];
figure (4)
mesh (R, THETA, ZAPROXIMADA)
xlabel('r')
ylabel('theta')
title ('Fuente recuperada por el método')
axis([0 1 -5 5 -1000 1000])
figure (5)
mesh (R, THETA, ZAPROXIMADA1)
xlabel('r')
ylabel('theta')
title('Fuente recuperada para N=9')
axis([0 1 -5 5 -1000 1000])
figure(6)
mesh(R, THETA, ZAPROXIMADA2)
xlabel('r')
ylabel('theta')
title('Fuente recuperada para N=20')
axis([0 1 -5 5 -1000 1000])
figure(7)
subplot(2,2,1)
mesh (R, THETA, Z)
xlabel('r')
ylabel('theta')
title('Fuente exacta')
axis([0 1 -5 5 -1000 1000])
subplot(2,2,2)
mesh (R, THETA, ZAPROXIMADA)
xlabel('r')
ylabel('theta')
title('Fuente recuperada para N=5')
axis([0 1 -5 5 -1000 1000])
```

```
subplot(2,2,3)
mesh(R,THETA,ZAPROXIMADA1)
xlabel('r')
ylabel('theta')
title('Fuente recuperada para N=9')
axis([0 1 -5 5 -1000 1000])

subplot(2,2,4)
mesh(R,THETA,ZAPROXIMADA2)
xlabel('r')
ylabel('theta')
title('Fuente recuperada para N=20')
axis([0 1 -5 5 -1000 1000])
```

Para el ejemplo3, se debe correr el siguiente programa.

```
clear;
clc;
delta=0.1;% REPRESENTA EL ERROR DE LA MEDICIÓN \delta
h=2*pi/100;
r=0:0.01:1;
theta=-pi:h:pi;
Vexacto = ((70/12)*sin(2*theta)) + ((240/24)*sin(3*theta)) + (500/60)*cos(5*theta)
ta);
delta1=delta/2;
%PARA GENERAR EL ERROR ALEATORIO DE LA MEDICIÓN
ALEATORIO=((rand(1,length(theta))-rand(1,length(theta))));
ERROR=delta1*(ALEATORIO(1)) *max(abs(Vexacto)) * (cos(theta) + sin(theta));
for i=2:length(Vexacto);
ERROR=ERROR+delta1*ALEATORIO(i) *max(abs(Vexacto))*(1/(i))*(cos(i*theta)+s
in(i*theta));
end
for i=1:length(Vexacto)
coeficientesdefourieraproximados0(i)=(delta1*ALEATORIO(i)*max(abs(Vexacto
))*(1/(i)));
end
for i=1:length(Vexacto)
    if i==2
        extra(i) = (70/12);
    elseif i==3
            extra(i) = 240/24;
    else
        extra(i) = 0;
    end
end
```

```
for i=1:length(Vexacto)
               if i==5
                            extral(i) = (500/60);
                                                       else
                            extral(i)=0;
              end
end
coeficientesdefourieraproximados1=coeficientesdefourieraproximados0+extra
1;
\verb|coeficientes| defourier a proxima dos 2 = \verb|coeficientes| defourier a proxima dos 0 + \verb|extra| + \verb|coeficientes| defourier a proxima dos 0 + \verb|extra| + \verb|coeficientes| defourier a proxima dos 0 + \verb|extra| + \verb|coeficientes| defourier a proxima dos 0 + \verb|extra| + \verb|coeficientes| defourier a proxima dos 0 + \verb|extra| + \verb|coeficientes| defourier a proxima dos 0 + \verb|extra| + \verb|coeficientes| defourier a proxima dos 0 + \verb|extra| + \verb|coeficientes| defourier a proxima dos 0 + \verb|extra| + \verb|coeficientes| defourier a proxima dos 0 + \verb|extra| + \verb|coeficientes| defourier a proxima dos 0 + \verb|extra| + \verb|coeficientes| defourier a proxima dos 0 + \verb|extra| + \verb|coeficientes| defourier a proxima dos 0 + \verb|extra| + \verb|coeficientes| defourier a proxima dos 0 + \verb|extra| + \verb|coeficientes| defourier a proxima dos 0 + \verb|extra| + \verb|coeficientes| defourier a proxima dos 0 + \verb|extra| + \verb|coeficientes| defourier a proxima dos 0 + \verb|extra| + \verb|coeficientes| defourier a proxima dos 0 + \verb|extra| + \verb|coeficientes| defourier a proxima dos 0 + \verb|extra| + \verb|coeficientes| defourier a proxima dos 0 + \verb|extra| + \verb|coeficientes| defourier a proxima dos 0 + \verb|extra| + |extra| + |extra| + 
ERRORMAXIMO=max(abs(ERROR));
MAXIMODELERROR=max(abs(ERROR));
Vaproximado=Vexacto+ERROR;
M=length(theta);
figure(1)
plot (theta, Vexacto, 'r', theta, Vaproximado, 'g')
xlabel('theta')
ylabel('Potencial')
title ('Rojo: Medición exacta. Verde: medición con error')
figure(2)
plot(theta, ERROR)
title('Error')
xlabel('theta')
ylabel('Error')
 [THETA, R] = meshgrid (theta, r);
 %FUENTE EXACTA
Z=-70*R.^2.*(sin(2*THETA))-240*R.^3.*sin(3*THETA)-500*R.^5.*cos(5*THETA);
figure (3)
mesh (R, THETA, Z)
xlabel('r')
ylabel('theta')
title('Exact source')
axis([0 1 -5 5 -1000 1000])
E = (70/12)^2 (2^5) + (240/24)^2 (3^5) + (500/60)^2 (5^5);
NRAIZ=sqrt(sqrt(E/3))*sqrt(delta)
NPARAAPROXIMAR=6;
NPARAAPROXIMAR1=9;
NPARAAPROXIMAR2=20;
%FUENTE APROXIMADA PARA DIFERENTES VALORES DE N
for k=1:NPARAAPROXIMAR2
               ZZ1(k) = -2 * k * (k+1) * coeficientes defourier aproximados 1(k);
end
```

```
for k=1:NPARAAPROXIMAR2
    ZZ2(k) = -2 * k * (k+1) * coeficientes defourier aproximados 2(k);
end
ZAPROXIMADA = (ZZ1(1)*R.*(cos(1*THETA))+ZZ2(1)*R.*(sin(1*THETA)));
for k=2:NPARAAPROXIMAR
ZAPROXIMADA = ZAPROXIMADA + ((ZZ1(k)*(R).^k.*(cos(k*THETA)) +
ZZ2(k)*(R).^k.*(sin(k*THETA))));
end
ZAPROXIMADA1 = (ZZ1(1)*R.*(cos(1*THETA))+ZZ2(1)*R.*(sin(1*THETA)));
for k=2:NPARAAPROXIMAR1
ZAPROXIMADA1 = ZAPROXIMADA1 + ((ZZ1(k)*(R).^k.*(cos(k*THETA)) +
ZZ2(k)*(R).^k.*(sin(k*THETA))));
end
ZAPROXIMADA2=(ZZ1(1)*R.*(cos(1*THETA))+ZZ2(1)*R.*(sin(1*THETA)));
for k=2:NPARAAPROXIMAR2
ZAPROXIMADA2 = ZAPROXIMADA2 + ((ZZ1(k)*(R).^k.*(cos(k*THETA)) +
ZZ2(k)*(R).^k.*(sin(k*THETA)));
end
ERRORRELATIVOO=max(abs(Z-ZAPROXIMADA));
ERRORRELATIVO00=max(ERRORRELATIVO0);
ERRORRELATIVO1=max(abs(Z-ZAPROXIMADA1));
ERRORRELATIVO11=max(ERRORRELATIVO1);
ERRORRELATIVO2=max(abs(Z-ZAPROXIMADA2));
ERRORRELATIVO22=max(ERRORRELATIVO2);
ERRORES=[ERRORRELATIVO00, ERRORRELATIVO11, ERRORRELATIVO22];
figure (4)
mesh (R, THETA, ZAPROXIMADA)
xlabel('r')
ylabel('theta')
title ('Fuente recuperada por el método')
axis([0 1 -5 5 -1000 1000])
figure(5)
mesh (R, THETA, ZAPROXIMADA1)
xlabel('r')
ylabel('theta')
title('Fuente recuperada para N=9')
axis([0 1 -5 5 -1000 1000])
figure(6)
mesh (R, THETA, ZAPROXIMADA2)
xlabel('r')
ylabel('theta')
title('Fuente recuperada para N=20')
axis([0 1 -5 5 -1000 1000])
```

```
figure(7)
subplot(2,2,1)
mesh(R, THETA, Z)
xlabel('r')
ylabel('theta')
title('Fuente exacta')
axis([0 1 -5 5 -1000 1000])
subplot(2,2,2)
mesh (R, THETA, ZAPROXIMADA)
xlabel('r')
ylabel('theta')
title('Fuente recuperada para N=5')
axis([0 1 -5 5 -1000 1000])
subplot(2,2,3)
mesh(R, THETA, ZAPROXIMADA1)
xlabel('r')
ylabel('theta')
title('Fuente recuperada para N=9')
axis([0 1 -5 5 -1000 1000])
subplot(2,2,4)
mesh(R,THETA,ZAPROXIMADA2)
xlabel('r')
ylabel('theta')
title('Fuente recuperada para N=20')
axis([0 1 -5 5 -1000 1000])
```