# Un análisis del Dilema del Prisionero Iterado

Presenta:

Ciria Ruth Briones García

Tesis presentada como requisito para
obtener el título de:

Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Asesor:
Dr. Víctor Hugo Vázquez Guevara

Puebla, México, Julio de 2016

*A mi familia…*

# *Agradecimientos*

Me gustaría agradecer a todas las personas que de alguna u otra manera formaron parte de la realización de este proyecto.

En primer lugar a la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado (VIEP), por su apoyo al proyecto **El modelo de los bandidos armados con horizonte y sucesión de descuento aleatorios y su aplicación a la asignación personal.**, que hizo posible la elaboración de esta tesis.

Al Dr. Victor Hugo Vázquez Guevara, asesor de tesis, por apoyarme durante la elección y desarrollo del tema, por el tiempo dedicado a la elaboración y revisión, sin su dirección esto no habría sido posible.

A mis sinodales: Dr. Hugo Adán Cruz Suárez, Dr. Bulmaro Juárez Hernández y Dr. José Dionisio Zacarías Flores, por sus contribuciones y correcciones al trabajo.

# Introducción

La Teoría de juegos se inició formalmente en 1944 con la publicación del libro *The theory of games and economic behavior* de John Von Neumann (1903-1957)[17] y Oskar Morgenstern (1902-1977)[11], aunque antes Cournot, Bertrand y Edgeworth habían planteado ciertas ideas sobre el tema.

John Von Neumann y Oskar Morgenstern estudiaron dos planteamientos distintos de la Teoría de juegos. En el primero, el comportamiento no cooperativo: se sabe específicamente lo que cada jugador puede y no puede hacer durante el juego y después se busca una estrategia óptima. El segundo planteamiento conocido como del comportamiento cooperativo en el que buscaron describir la conducta óptima en juegos con muchos jugadores.

Desde ese momento hubo un desarrollo importante en esta teoría, en los años 50 Luce y Raiffa (1957), con su libro *Games and Decisions, Introduction and Critical Survey*, Kuhn (1953) que permitió establecer una forma de atacar los juegos cooperativos y John Forbes Nash (1928-2015) quien escribió una tesis en la que expuso por primera vez su solución para juegos no-cooperativos, lo que llamó *Equilibrio de Nash*, bajo la dirección de Albert W. Tucker (1905-1995)[1], con lo que consiguió un gran reconocimiento entre los especialistas, lo cual permitió extender la teoría de juegos no-cooperativos más generales que los de suma cero. Durante esa época la mayor parte de las aplicaciones se concentraban en temas de estrategia militar.

El equilibrio de Nash es una situación en la que ninguno de los jugadores sienten la necesidad de cambiar de estrategia ya que cualquier cambio implicaría una disminución de las ganancias. Von Neumann y Oskar Morgenstern habían presentado ya una solución similar pero solo para juegos de suma cero. Para la solución formal del problema, Nash utilizó funciones de mejor respuesta. Esta teoría se presenta en el Capítulo 1, además de algunos teoremas que usan dicho equilibrio para hallar solución de distintos juegos.

Albert W. Tucker es el autor de la paradoja del *Dilema del Prisionero* [5], [8], [9], [10], [12], [13] y [15], la cual sirve para ilustrar la dificultad de analizar los juegos que no son de suma cero. Esta sencilla paradoja ha dado lugar a una amplia literatura en diferentes áreas como la filosofía, biología, ciencia política y economía, así como la propia Teoría de juegos.

Es precisamente de esta paradoja de lo que se hablará en el Capítulo 2, se analiza este juego en diferentes presentaciones y se da solución hallando los equilibrios de Nash. Pero es la forma iterada la que será de nuestro mayor interés. Robert Axelrod (1943-) es quien propone realizar este juego de manera iterada para explicar la evolución del comportamiento [3], además de ser quien realiza el *Torneo del Dilema del Prisionero Iterado* [2] y [16], tema que será abordado en el Capítulo 3.

La Teoría de juegos se usa actualmente en diversas áreas de estudio, tales como la biología, sociología, psicología y filosofía, a pesar de que fue desarrollada principalmente para entender el comportamiento de la economía. Se presentan algunas aplicaciones en el Capítulo 3.

# Índice general

# Índice de figuras

# Capítulo 1

# Teoría de Juegos

En este Capítulo se da una breve introducción a la Teoría de juegos y se ha dividido en dos secciones. En la primera se enuncian las definiciones, teoremas e ideas básicas de esta teoría, además de presentar el equilibrio de Nash, uno de los conceptos más importantes, el cual será utilizado en el Capítulo 2 para dar solución al juego del Dilema del Prisionero en el caso estático o dinámico, finito o infinito.

En la segunda sección se presenta un método sencillo para hallar dicho equilibrio, que se utilizará en el Capítulo 2 para dar solución al juego del Dilema del Prisionero en el caso dinámico.

## 1.1. Juegos estáticos

A partir de ahora se usarán los términos juego, estrategia y ganancia, mismas que a continuación se definirán.

**Definición 1.1.1.** Un *juego* es cualquier situación de decisión caracterizada por una interdependencia estratégica, gobernada por reglas y con un resultado definido.

El resultado que se obtiene, al que se le denomina *ganancia*, depende no sólo de la estrategia que se elige, sino también de las estrategias que eligen los competidores guiados por sus propios intereses.

**Definición 1.1.2.** Una *estrategia* es una regla para elegir una acción en cada punto donde una decisión puede ser tomada.

**Definición 1.1.3.** Un *juego estático* es aquél en el que cada jugador toma solo una decisión, ningún jugador tiene conocimiento de la decisión tomada por los otros jugadores antes de tomar su propia decisión.

En un juego estático, una estrategia pura es cada una de las posibles decisiones de algún jugador.

Denotaremos al conjunto (no vacío) de todas las estrategias puras como $S$, como $P_i$ al $i$-ésimo jugador y como $S_i \subset S$ al conjunto de estrategias puras para $P_i$.

La solución de un juego debería indicar a cada jugador qué resultado esperar y cómo alcanzarlo. Los jugadores o participantes de cada juego intentan obtener el mejor resultado para sus intereses.

Para poder llevar a cabo un juego son necesarios al menos dos jugadores, un conjunto de estrategias para cada jugador y una relación sobre posibles resultados o ganancias.

A continuación se presenta la descripción tabular de un juego, ganancias de los jugadores representadas en una tabla, ya que de esta manera se presentarán las ganancias de los jugadores.

Supongamos que se tiene un juego con dos jugadores, para $P_1$ tenemos el conjunto de estrategias $S_1 = \{X, Y\}$ y para $P_2$ el mismo conjunto, es decir que $S_1 = S_2$. Las ganancias están dadas de la siguiente manera: Si $P_1$ elige $X$ y $P_2$ también $X$, la ganancia para $P_1$ es $a$ y la ganancia para $P_2$ es $b$; pero si $P_2$ elige $Y$, las ganancias son $c$ y $d$ para $P_1$ y $P_2$ respectivamente. Si $P_1$ elige $Y$ y $P_2$ elige $X$ las ganancias son $e$ para $P_1$ y $f$ para $P_2$; mientras que si $P_2$ elige $Y$ las ganancias para los jugadores son $g$ y $h$, respectivamente.

Una forma gráfica de representar esta situación es a través de una tabla como la siguiente:

$P_2$

|  |  | $X$ | $Y$ |
|---|---|---|---|
| $P_1$ | $X$ | $a, b$ | $c, d$ |
|  | $Y$ | $e, f$ | $g, h$ |

TABLA 1.1: Descripción tabular de dos jugadores con $S_1 = S_2 = \{X, Y\}$.

**Definición 1.1.4.** Una descripción tabular de un juego, utilizando estrategias puras, se llama *forma normal* o *forma estratégica* de un juego.

**Definición 1.1.5.** Una *estrategia mixta* para $P_i$ es un vector $(p_1, \ldots, p_n)$ en donde $S_i = \{s_1, \ldots, s_n\}$ y $p_i$ es la probabilidad con la que $P_i$ elige $s_i$.

Una estrategia mixta se denotará $\sigma_i$ y el conjunto de todas las posibles estrategias mixtas para $P_i$ se denota por $\Sigma_i$ con $i = 1, 2$.

**Definición 1.1.6.** El *soporte* de una estrategia $\sigma$ para $P_i$, con $i \in \{1, 2\}$, es el conjunto $S_i(\sigma) \subseteq S_i$, tal que $p(s) > 0$ si $s \in S_i(\sigma)$, donde $p(s)$ es la probabilidad con la que se juega la estrategia $s$.

Para representar las ganacias de cada jugador usaremos la notación $\pi_i(X, Y)$, que es la ganancia de $P_i$ usando el par de estrategias $X, Y$, por parte de $P_1$ y $P_2$ respectivamente:

- $\pi_1(X, X) = a$
- $\pi_1(Y, X) = e$
- $\pi_1(X, Y) = c$
- $\pi_1(Y, Y) = g$
- $\pi_2(X, X) = b$
- $\pi_2(Y, X) = f$
- $\pi_2(X, Y) = d$
- $\pi_2(Y, Y) = h$

Para ilustrar el caso de estrategias mixtas supongamos que $P_1$ elige $X$ con probabilidad $p$ y $Y$ con probabilidad $1-p$, mientras que $P_2$ elige $X$ con probabilidad $q$ y $Y$ con probabilidad $1 - q$. Entonces los conjuntos de estrategias mixtas para $P_1$ y $P_2$ son $\Sigma_1 = \{\sigma_1\}$ y $\Sigma_2 = \{\sigma_2\}$, respectivamente.

La ganancia de $P_i$ está dada por

$$\pi_i(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{s_1 \in S_1} \sum_{s_2 \in S_2} p(s_1) q(s_2) \pi_i(s_1, s_2),$$

donde $p(s_1)$ es la probabilidad con la que se juega la estrategia $s_1$ y $q(s_2)$ la probabilidad con la que se juega la estrategia $s_2$. Por ejemplo para $\pi_1(\sigma_1, \sigma_2)$ y $\pi_2(\sigma_1, \sigma_2)$ tenemos:

- $\pi_1(\sigma_1, \sigma_2) = p(aq + c(1-q)) + ((1-p)(eq + g(1-q)))$,
- $\pi_2(\sigma_1, \sigma_2) = q(bp + f(1-p)) + (1-q)(dp + h(1-p))$.

### 1.1.1. Equilibrio de Nash

En la Teoría de juegos podemos clasificar a los diferentes tipos de juegos en categorías según el método que se aplica para resolverlos.

Frente a la ausencia de una clasificación de las ganancias que logre la unanimidad de los jugadores se plantea una combinación de estrategias (una por jugador) en la que si ningún jugador puede aumentar sus ganancias por un cambio unilateral de estrategia, entonces esa combinación es una solución. El matemático John Nash estableció un importante resultado en 1950 sobre la existencia de situaciones de este tipo, se habla entonces de la existencia de equilibrios de Nash.

**Definición 1.1.7.** Un *equilibrio de Nash* (para dos jugadores) es un par de estrategias $(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ tal que

$$\begin{aligned} &\pi_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \geq \pi_1(\sigma_1, \sigma_2^*), \quad \forall \sigma_1 \in \Sigma_1 \qquad \text{y} \\ &\pi_2(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \geq \pi_2(\sigma_1^*, \sigma_2), \quad \forall \sigma_2 \in \Sigma_2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Se presenta a continuación una definición alternativa de equilibrio de Nash que puede ser más útil para hallarlos, para esto es necesario definir los conceptos de mejor respuesta y de argumento máximo.

**Definición 1.1.8.** Supongamos que $x$ es un elemento arbitrario de algún conjunto $X$. Sea $f$ una función con dominio en $X$. Entonces el *argumento máximo* de la función $f$ se denota por argmáx y se define como

$$x^* \in \underset{x \in X}{\operatorname{argmáx}} \; f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x^*) = \max_{x \in X} f(x). \tag{1.2}$$

**Definición 1.1.9.** Una estrategia $\hat{\sigma}_1$ para $P_1$, es una *mejor respuesta* para alguna estrategia fija $\sigma_2$ de $P_2$, si

$$\hat{\sigma}_1 \in \underset{\sigma_1 \in \Sigma_1}{\operatorname{argmáx}} \quad \pi_1(\sigma_1, \sigma_2). \tag{1.3}$$

Análogamente, $\hat{\sigma}_2$ es una mejor respuesta para $\sigma_1 \in \Sigma_1$ si

$$\hat{\sigma}_2 \in \underset{\sigma_2 \in \Sigma_2}{\operatorname{argmáx}} \quad \pi_2(\sigma_1, \sigma_2). \tag{1.4}$$

**Definición 1.1.10.** Un par de estrategias $(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ es un Equilibrio de Nash si

$$\begin{aligned} \sigma_1^* &\in \underset{\sigma_1 \in \Sigma_1}{\operatorname{argmáx}} \quad \pi_1(\sigma_1, \sigma_2^*) \quad \text{y} \\ \sigma_2^* &\in \underset{\sigma_2 \in \Sigma_2}{\operatorname{argmáx}} \quad \pi_2(\sigma_1^*, \sigma_2). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Los siguientes ejemplos muestran cómo hallar los equilibrios de Nash usando la teoría presentada en este capítulo.

**Ejemplo 1.** Considere el juego cuya forma normal está dada por la Tabla 1.2. Mostremos que $(D, L)$ y $(U, M)$ son equilibrios de Nash.

| | | $P_2$ | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $L$ | $M$ | $R$ |
| $P_1$ | $U$ | $10, 0$ | $5, 1$ | $4, -2$ |
| | $D$ | $10, 1$ | $5, 0$ | $1, -1$ |

Tabla 1.2: Forma normal del juego del Ejemplo 2.

*Solución:*

Usando la Definición 1.1.7, verificamos que $(D, L)$ es efectivamente un equilibrio de Nash. Sea $p \in [0, 1]$ la probabilidad de que $P_1$ elija $U$ y $1-p$ la probabilidad de que elija $D$, es decir, $\sigma_1 = (p, 1-p)$. Entonces:

$$\begin{aligned} \pi_1(\sigma_1, L) &= 10(p) + 10(1-p) \\ &= 10 \\ &= \pi_1(D, L). \end{aligned}$$

Sean $q$ y $r$ en $[0, 1]$ tales que $\sigma_2 \in \Sigma_2$ y $\sigma_2 = (q, r, 1 - q - r)$. Entonces:

$$\begin{aligned}\pi_2(D, \sigma_2) &= 1(q) + 0(r) - 1(1 - q - r)\\ &= -1 + 2q + r\\ &= \pi_2(D, L).\end{aligned}$$

Note que: $2q + r - 1 \leq 1$, pues $0 \leq r + q \leq 1$

$$\begin{gathered}0 \leq 2q + 2r \leq 2\\ -1 \leq 2q + 2r - 1 \leq 1 \quad \text{y} \quad 2q + r - 1 \leq 2q + 2r - 1 \quad 2q + r - 1 \leq 1.\end{gathered}$$

Así, $\pi_2(D, L) \geq \pi_2(D, \sigma_2)$.

Por lo tanto $(D, L)$ es un equilibrio de Nash.

Ahora mostramos que $(U, M)$ también es un equilibrio de Nash. Usando $\sigma_1$ y $\sigma_2$ como se definieron anteriormente, tenemos que:

$$\begin{aligned}\pi_1(\sigma_1, M) &= 5(p) + 5(1 - p)\\ &= 5\\ &= \pi_1(U, M)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\pi_2(U, \sigma_2) &= 0(q) + 1(r) - 2(1 - q - r)\\ &= 3r + 2q - 2.\\ \pi_2(U, M) &= 1.\end{aligned}$$

Note que: $3r + 2q - 2 \leq 1$, pues $0 \leq q + r \leq 1$

$$\begin{gathered}0 \leq 3q + 3r \leq 3\\ -2 \leq 3q + 3r - 2 \leq 1 \quad \text{y} \quad 2q + 3r - 2 \leq 3q + 3r - 2\\ 2q + 3r - 2 \leq 1\\ \pi_2(U, \sigma_2) \leq \pi_2(U, M).\end{gathered}$$

Por lo tanto, $(U, M)$ también es un equilibrio de Nash.

**Ejemplo 2.** Hallamos todos los equilibrios de Nash del siguiente juego representado por la Taba 1.3.

$P_2$

|  |  | $L$ | $R$ |
|---|---|---|---|
| $P_1$ | $U$ | $4,3$ | $2,2$ |
|  | $D$ | $2,2$ | $1,1$ |

Tabla 1.3: Forma normal del juego del Ejemplo 3.

*Solución:*

Sea $\sigma_1 = (p, 1-p)$ y $\sigma_2 = (q, 1-q)$ con $p, q \in [0,1]$, entonces:

$$\begin{aligned}
\pi_1(\sigma_1, \sigma_2) &= 4pq + 2p(1-q) + 2(1-p)q + 1(1-p)(1-q) \\
&= 4pq + 2p - 2pq + 2q - 2pq + 1 - p - q + pq \\
&= 1 + p + q + pq \\
&= 1 + q + p(1+q).
\end{aligned}$$

La manera en la que el $P_1$ puede maximizar esta función es que $p$ sea lo más grande posible, entonces $\hat{\sigma}_1 = (1,0)$ es la mejor respuesta de $P_1$.

Para $P_2$ tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\pi_2(\sigma_1, \sigma_2) &= 3pq + 2p(1-q) + 2(1-p)q + 1(1-p)(1-q) \\
&= 3pq + 2p - 2pq + 2q - 2pq + 1 - p - q + pq \\
&= 1 + p + q.
\end{aligned}$$

$P_2$ maximiza la función con $q = 1$, entonces $\hat{\sigma}_2 = (1,0)$ es la mejor respuesta de $P_2$, es decir, que $P_2$ elige $L$ con probabilidad igual a uno.

Por lo tanto $(U, L)$ es equilibrio de Nash.

**Ejemplo 3.** Encontramos todos los equilibrios de Nash del siguiente juego representado por la Tabla 1.4.

$P_2$

| | | $R$ | $W$ |
|---|---|---|---|
| $P_1$ | $F$ | $0, 0$ | $2, 1$ |
| | $M$ | $1, 2$ | $0, 0$ |

TABLA 1.4: Forma normal del juego del Ejemplo 4.

*Solución:*

Sea $\sigma_1 = (p, 1-p)$ y $\sigma_2 = (q, 1-q)$, entonces:

$$\begin{aligned}\pi_1(\sigma_1, \sigma_2) &= 0(pq) + 2p(1-q) + 1(1-p)q + 0(1-p)(1-q)\\ &= 2p - 2pq + q - pq\\ &= q + 2p - 3pq\\ &= q + p(2-3q).\end{aligned}$$

Ahora hay que maximizar esta función, para ello consideremos los siguientes casos

- Si $2 - 3q > 0$, esto pasa cuando $q < \frac{2}{3}$ y maximizamos $\pi_1(\sigma_1, \sigma_2)$ haciendo $p = 1$.
- Si $2 - 3q < 0$, esto pasa cuando $q > \frac{2}{3}$ y maximizamos $\pi_1(\sigma_1, \sigma_2)$ haciendo $p = 0$.
- Si $2 - 3q = 0$, esto pasa cuando $q = \frac{2}{3}$, para este caso consideramos $p = x$ con $x \in [0, 1]$.

Entonces la mejor respuesta para $P_1$ es:

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{cases}(1,0), & \text{si } q < \frac{2}{3}\\ (0,1), & \text{si } q > \frac{2}{3}\\ (x, 1-x) \text{ con } x \in [0,1], & \text{si } q = \frac{2}{3}.\end{cases}$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned}\pi_2(\sigma_1,\sigma_2) &= 0(pq)+1p(1-q)+2(1-p)q+0(1-p)(1-q)\\ &= p-pq+2q-2pq\\ &= p+2q-3pq\\ &= p+q(2-3p).\end{aligned}$$

Entonces la mejor respuesta para $P_2$ es:

$$\hat{\sigma}_2=\begin{cases}(1,0), & \text{si } p<\frac{2}{3}\\ (0,1), & \text{si } p>\frac{2}{3}\\ (y,1-y) \text{ con } y\in[0,1], & \text{si } p=\frac{2}{3}.\end{cases}$$

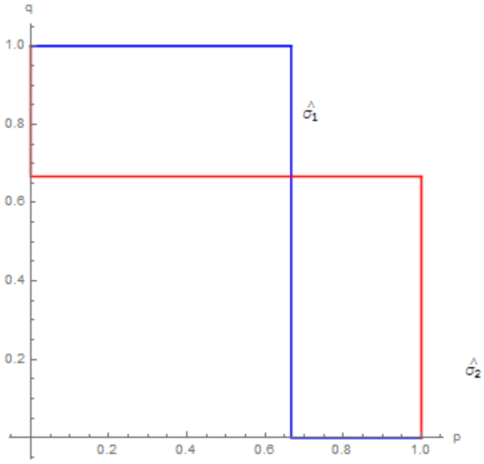

FIGURA 1.1: Gráfica de $\hat{\sigma}_1$ vs $\hat{\sigma}_2$.

Podemos observar en la Figura 1.1 que los puntos de intersección son $(0,1)$, $(1,0)$ y $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$.

Por lo tanto los equilibrios de Nash son: $(M,R),(F,W)$ y $\sigma_1^*=\sigma_2^*=(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$.

Se puede simplificar el proceso de hallar los equilibrios de Nash haciendo uso de los siguientes dos teoremas. En particular, el Teorema 1.1.1 simplifica la búsqueda de los equilibrios de Nash de estrategias puras.

**Teorema 1.1.1.** Sea $(s_1^*, s_2^*)$ un par de estrategias puras tales que

$$\begin{aligned} \pi_1(s_1^*, s_2^*) &\geq \pi_1(s_1, s_2^*), \quad \forall s_1 \in S_1 \quad \text{y} \\ \pi_2(s_1^*, s_2^*) &\geq \pi_2(s_1^*, s_2), \quad \forall s_2 \in S_2. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Entonces $(s_1^*, s_2^*)$ es un equilibrio de Nash.

**Demostración:**

Para toda $\sigma_1 \in \Sigma_1$ se tiene que

$$\begin{array}{lrl} & \pi_1(\sigma_1, s_2^*) & = \sum_{s \in S_1} p(s)\pi_1(s_1, s_2^*) \\ \text{por hipótesis} & \pi_1(s_1^*, s_2^*) & \geq \pi_1(s_1, s_2^*), \quad \forall s_1 \in S_1 \\ & \sum_{s \in S_1} p(s)\pi_1(s_1, s_2^*) & \leq \sum_{s \in S_1} p(s)\pi_1(s_1^*, s_2^*) \\ & \pi_1(\sigma_1, s_2^*) & \leq \pi_1(s_1^*, s_2^*). \end{array}$$

Para toda $\sigma_2 \in \Sigma_2$ se tiene que

$$\begin{array}{lrl} & \pi(\sigma_1^*, s_2) & = \sum_{s \in S_2} q(s)\pi_2(s_1^*, s_2) \\ \text{por hipótesis} & \pi_2(s_1^*, s_2^*) & \geq \pi_2(s_1^*, s_2), \quad \forall s_2 \in S_2 \\ & \sum_{s \in S_2} q(s)\pi_2(s_1^*, s_2) & \leq \sum_{s \in S_2} q(s)\pi_2(s_1^*, s_2^*) \\ & \pi(\sigma_1^*, s_2) & \leq \pi_2(s_1^*, s_2^*). \end{array}$$

Por lo tanto $(s_1^*, s_2^*)$ es un equilibrio de Nash. □

**Teorema 1.1.2** (Igualdad de ganancias)**.** Sea $(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ un equilibrio de Nash, y sea $S_1^*$ el soporte de $\sigma_1^*$. Entonces:

$$\pi_1(s, \sigma_2^*) = \pi_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*), \quad \forall s \in S_1^* \tag{1.7}$$

**Demostración:**

Si el conjunto $S_1^*$ tiene sólo una estrategia, entonces el teorema es cierto pues $\sigma_1^*$ sería esa única estrategia.

Ahora supongamos que el conjunto $S_1^*$ tiene más de una estrategia. Si el teorema es falso, entonces existe al menos una estrategia $s' \in S_1$ para la cual $P_1$ obtiene una mayor ganancia usando esta, que al usar $\sigma_1^*$, entonces:

$$\begin{aligned}\pi(\sigma_1^*, \sigma_2^*) &= \sum_{s \in S_1^*} p^*(s)\pi_1(s, \sigma_2^*) \\ &= \sum_{s \neq s'} p^*(s)\pi_1(s, \sigma_2^*) + p^*(s')\pi_1(s', \sigma_2) \\ &< \sum_{s \neq s'} p^*(s)\pi_1(s', \sigma_2^*) + p^*(s')\pi_1(s', \sigma_2) \\ &= \pi_1(s', \sigma_2^*)\end{aligned}$$

lo que contradice la hipótesis de que $(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ es un equilibrio de Nash, es decir, que $\pi_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \geq \pi_1(\sigma_1, \sigma_2^*)$ $\forall \sigma_1 \in \Sigma_1$ $\square$

Por último la Proposición 1.1.1 nos garantiza la existencia de un equilibrio de Nash.

**Proposición 1.1.1.** Todo juego con dos jugadores y dos acciones tiene al menos un equilibrio de Nash.

**Demostración:**

Consideremos un juego con dos jugadores y dos estrategias para cada uno de ellos, con ganancias arbitrarias como se muestra en la Tabla 1.5:

| | | $P_2$ | |
|---|---|---|---|
| | | $L$ | $R$ |
| $P_1$ | $U$ | $a, b$ | $c, d$ |
| | $D$ | $e, f$ | $g, h$ |

TABLA 1.5: Forma normal del juego de la Proposición 1.1.1.

Primero tratamos de hallar un equilibrio de Nash de estrategias puras :

1. si $a \geq e$ y $b \geq d$ entonces $(U, L)$ es un equilibrio de Nash;
2. si $e \geq a$ y $f \geq h$ entonces $(D, L)$ es un equilibrio de Nash;

3. si $c \geq g$ y $d \geq b$ entonces $(U, R)$ es un equlibrio de Nash;
4. si $g \geq c$ y $h \geq f$ entonces $(D, R)$ es un equlibrio de Nash.

Observe que no existe un equilibrio de Nash de estrategias puras en los siguientes casos:

- $a > e$ y $f < h$ y $g < c$ y $d < b$, o
- $a > e$ y $f > h$ y $g > c$ y $d > b$.

En estos casos buscamos un equilibrio de Nash de estrategias mixtas utilizando el teorema de Igualdad de Ganancias. Sea $\sigma_1^* = (p^*, 1-p^*)$ y $\sigma_2^* = (q^*, 1-q^*)$. Entonces:

$$\begin{aligned} \pi_1(U, \sigma_2^*) &= \pi_1(D, \sigma_2^*) \\ aq^* + c(1-q^*) &= eq^* + g(1-q^*) \\ q^* &= \frac{(c-g)}{(c-g)+(e-a)} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \pi_2(\sigma_1^*, L) &= \pi_2(\sigma_1^*, R) \\ bp^* + f(1-p^*) &= dp^* + h(1-p^*) \\ p^* &= \frac{(h-f)}{(h-f)+(b-d)}. \end{aligned}$$

En ambos casos tenemos un equilibrio de Nash de estrategias mixtas con $0 < p^*, q^* < 1$ $\square$

## 1.2. Juegos Dinámicos Finitos

Se dice que un juego es *dinámico* cuando los jugadores actúan en determinado orden y las decisiones se toman de forma consecutiva.

La *información perfecta* de un juego dinámico indica que en cada etapa del juego el jugador a quien le corresponde decidir conoce la historia completa de todas las decisiones tomadas hasta ese momento. Y un juego es de *información completa* cuando las funciones de pago o ganancias de los jugadores son del dominio público.

Este tipo de juegos puede ser representado mediante un árbol, al cual llamaremos *árbol de decisión*.

Es importante mencionar que en los juegos dinámicos la palabra *estrategia* se reserva para designar a todo un plan de acciones de respuesta de un jugador frente a las acciones del otro.

Como ejemplo sencillo de un juego de este tipo consideremos el siguiente.

**Ejemplo 4.** Considere el árbol de decisión de la Figura 1.2

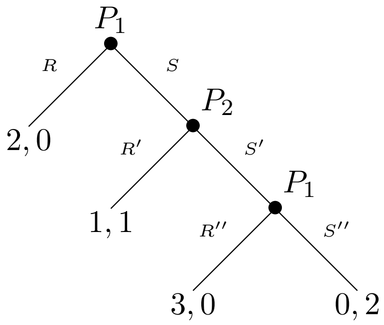

Figura 1.2: Árbol del juego del Ejemplo 4.

En este juego $P_1$ decide dos veces, en la primera etapa puede decidir entre las estrategias $R$ y $S$, si elige $R$ entonces el juego termina y obtiene una ganancia de 2, mientras que el jugador 2 obtiene ganancia cero. Si $P_1$ elige $S$, el juego continúa con la decisión de $P_2$, este puede elegir entre $R'$ y $S'$, si elige $R'$ el juego termina y cada jugador obtiene una ganancia de 1, pero si $P_2$ elige $S'$ el juego continúa y nuevamente es el turno de $P_1$. Para esta última etapa, $P_1$ puede elegir entre $R''$ y $S''$. Si $P_1$ elige $R''$, éste obtiene una ganancia de 3 dejando a $P_2$ con ganancia cero, y si elige $S''$, obtiene ganancia cero pero $P_2$ obtiene una ganancia de 2, con lo cual finaliza el juego.

Notemos que este juego es de información perfecta y completa.

### 1.2.1. Inducción Hacia Atrás

El principio de inducción hacia atrás consiste en predecir el resultado en cada etapa futura del juego, es decir razonar hacia atrás en la etapa presente. Se inicia en la última etapa del juego y se retrocede progresivamente hacia la primera.

La inducción hacia atrás es una forma natural de obtener un equilibrio de Nash en un juego dinámico, pues siempre se intenta hallar la mejor respuesta ante cualquier acción del contrario.

**Ejemplo 5.** Retomando el Ejemplo 4 hallemos su(s) equilibrio(s) de Nash (si es que existe(n)).

Empezamos por la última etapa, donde $P_1$ elige $R''$ como mejor respuesta ya que su ganancia es mayor eligiendo $R''$ que $S''$.

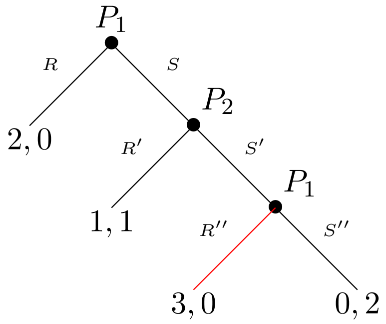

FIGURA 1.3: Inducción hacia atrás del Ejemplo 5 (a).

En la segunda etapa $P_2$ sabe que $P_1$ elegirá $R''$, entonces como mejor respuesta $P_2$ deberá elegir $R'$.

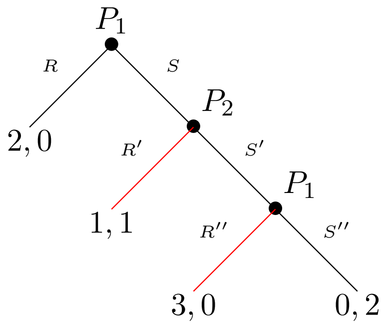

FIGURA 1.4: Inducción hacia atrás del Ejemplo 5 (b).

En la primera etapa $P_1$ sabe que $P_2$ elegirá $R'$, entonces como mejor respuesta $P_1$ deberá elegir $R$.

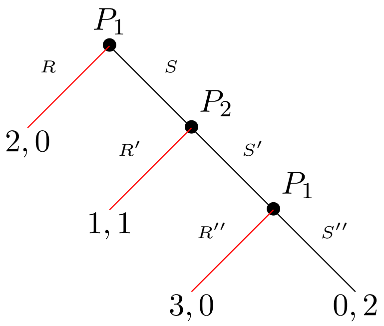

Figura 1.5: Inducción hacia atrás del Ejemplo 5 (c).

En este caso, $(RR'', R')$ es un equilibrio de Nash, es decir, que $P_1$ debe elegir $R$ en la primera etapa pero en el caso de que no lo hiciera puede mejorar sus ganancias eligiendo $R''$ en la última etapa (esto si $P_2$ elige $S'$) y $P_2$ deberá elegir $R'$.

Finalmente analizamos el siguiente ejemplo que en un principio está dado como un juego estático.

**Ejemplo 6.** El siguiente juego describre una pareja que dispone de dos escenarios alternativos para pasar una velada juntos, una novela y un partido de fútbol. Aunque ambos prefieren pasar juntos la velada, la mujer, que será $P_1$, prefiere la novela; mientras que el hombre, que será $P_2$, prefiere el fútbol. La descripción tabular para este juego es:

| | | $P_2$ | |
|---|---|---|---|
| | | $N$ | $F$ |
| $P_1$ | $N$ | $2, 1$ | $-1, -1$ |
| | $F$ | $-1, -1$ | $1, 2$ |

Tabla 1.6: Forma normal del juego del Ejemplo 6.

En donde, representamos la acción de elegir novela por $N$ y la acción de elegir fútbol por $F$.

*Solución:*

Primero resolveremos este juego en su forma estática. Si fijamos la estrategia $N$ para $P_1$, la mejor respuesta para $P_2$ es también $N$.

Si fijamos la estrategia $F$ para $P_1$, la mejor respuesta para $P_2$ es $F$.

| | | $P_2$ | |
|---|---|---|---|
| | | $N$ | $F$ |
| $P_1$ | $N$ | $2, \underline{\mathbf{1}}$ | $-1, -1$ |
| | $F$ | $-1, -1$ | $1, \underline{\mathbf{2}}$ |

Tabla 1.7: Mejores respuestas de $P_2$.

Si fijamos la estrategia $N$ para $P_2$, la mejor respuesta $P_1$ es $N$.

Si fijamos la estrategia $F$ para $P_2$, la mejor respuesta $P_1$ es $F$.

| | | $P_2$ | |
|---|---|---|---|
| | | $N$ | $F$ |
| $P_1$ | $N$ | $\underline{\mathbf{2}}, \underline{\mathbf{1}}$ | $-1, -1$ |
| | $F$ | $-1, -1$ | $\underline{\mathbf{1}}, \underline{\mathbf{2}}$ |

Tabla 1.8: Mejores respuestas de $P_1$ y $P_2$.

Entonces los equilibrios de Nash de estrategias puras son $(N, N)$ y $(F, F)$.

Hallemos equilibrios de Nash de estrategias mixtas, sea $\sigma_1 = (p, 1-p)$ y $\sigma_2 = (q, 1-q)$ con $p, q \in (0, 1)$, entonces:

$$\pi_1(\sigma_1, N) = 2p - (1-p) = 3p - 1 < 2 = \pi_1(N, N)$$

$$\pi_1(\sigma_1, F) = -p + (1-p) = 1 - 2p < 1 = \pi_1(F, F)$$

$$\pi_2(N, \sigma_2) = q - (1-q) = 2q - 1 < 1 = \pi_2(N, N)$$

$$\pi_2(F, \sigma_2) = -q + 2(1-q) = 2 - 3q < 2 = \pi_2(F, F)$$

Por lo tanto no hay equilibrios de Nash de estrategias mixtas.

Ahora representemos este juego estático como un juego dinámico, para ello hay que suponer que alguno de los dos jugadores elige primero. Si $P_1$ elige primero, entonces el árbol de decisión es:

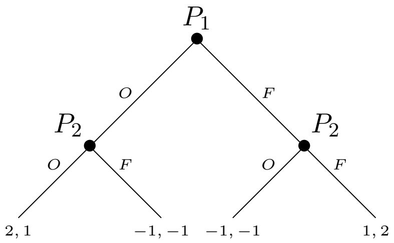

Figura 1.6: Árbol del juego del Ejemplo 6 cuando $P_1$ elige primero (a).

Usando inducción hacia atrás tenemos:

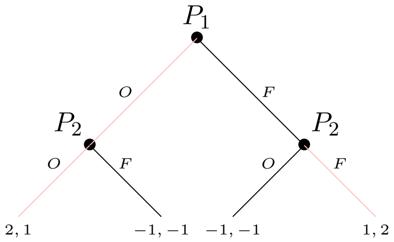

Figura 1.7: Árbol del juego del Ejemplo 6 cuando $P_1$ elige primero (b).

Por lo tanto un equilibrio de Nash es $(N, N)$.

Pero si primero elige $P_2$, el árbol de decisión es el siguiente:

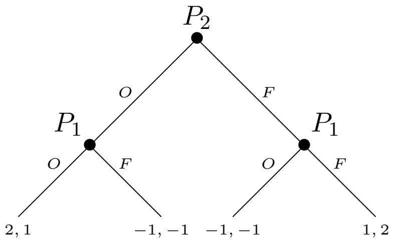

Figura 1.8: Árbol del juego del Ejemplo 6 cuando $P_2$ elige primero (a).

Usando inducción hacia atrás tenemos:

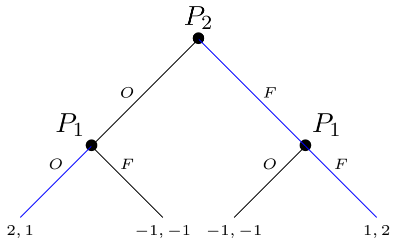

FIGURA 1.9: Árbol del juego del Ejemplo 6 cuando $P_1$ elige primero (b).

Por lo tanto otro equilibrio de Nash es $(F, F)$.

# Capítulo 2

# Dilema del Prisionero Iterado

En este Capítulo se desarrolla el problema del Dilema del Prisionero, en su forma estática, dinámica e iterada y en las tres formas del juego se hallan los equilibrios de Nash usando la teoría presentada en el Capítulo 1.

Se introduce un factor de descuento para ayudar a la solución del caso iterado, además de nuevas estrategias que estan diseñadas para tomar "infinitas" decisiones. Analizamos algunos ejemplos para mostrar que efectivamente se hallaron los equilibrios de Nash.

## 2.1. Dilema del Prisionero

El análisis de este juego se plantea de la siguiente manera: dos ladrones están siendo interrogados por la policía en relación con un delito grave. Están recluidos en celdas separadas y no pueden hablar entre sí. Sin una confesión, la policía sólo tiene evidencia suficiente para condenar a los dos ladrones por un cargo menor. La policía hace la siguiente oferta a ambos presos: si solo uno confiesa que ambos cometieron el delito grave, entonces el confesor será puesto en libertad y el otro pasará 5 años en prisión; si ambos confiesan, entonces van a tener una sentencia de 4 años cada uno; si ninguno confiesa, entonces su sentencia será de 2 años por el delito menor.

La forma normal de este juego se presenta en la Tabla 2.1:

$P_2$

| | | $Q$ | $S$ |
|---|---|---|---|
| $P_1$ | $Q$ | $-2, -2$ | $-5, 0$ |
| | $S$ | $0, -5$ | $-4, -4$ |

TABLA 2.1: Forma normal del Dilema del Prisionero.

Donde $Q$ es no confesar y $S$ es confesar.

Notemos que este es un juego estático, ya que cada jugador toma solo una decisión. Para hallar la solución haremos uso de los teoremas y definiciones del Capítulo 1.

Usando la Proposición 1.1.1 tenemos que existe al menos un equilibrio de Nash, entonces usando el Teorema 1.1.1 supongamos que $(s_1^*, s_2^*) = (Q, Q)$ es un equilibrio de Nash, esto implicaría que

$$\begin{aligned} \pi_1(Q, Q) &\geq \pi_1(S, Q) \\ -2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción así que $s_1^* = S$ y entonces $(s_1^*, s_2^*) = (S, Q)$,

$$\begin{aligned} \pi_2(S, Q) &\geq \pi_2(S, S) \\ -5 &\geq -4. \end{aligned}$$

Que es también una contradicción.

Por lo tanto, $(s_1^*, s_2^*) = (S, S)$ es un equilibrio de Nash de estrategias puras.

Ahora veamos si existe un equilibrio de Nash de estrategias mixtas. Supongamos que existe $(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ (equilibrio de Nash), de manera que para $\sigma_2$ se elige $Q$ con probabilidad $q$ y $S$ con probabilidad $1 - q$, para $q \in (0, 1)$, entonces por el

Teorema 1.1.2

$$\begin{aligned}
\pi_1(Q, \sigma_2^*) &= \pi_1(S, \sigma_2^*) \\
q\pi_1(Q, Q) + (1-q)\pi_1(Q, S) &= q\pi_1(S, Q) + (1-q)\pi_1(S, S) \\
q(-2) + (1-q)(-5) &= (1-q)(-4) \\
q &= -1
\end{aligned}$$

pero se había dicho que $q \in (0, 1)$, por lo tanto no hay un equilibrio de Nash de estrategias mixtas.

## 2.2. Juego Dinámico

En esta sección se representa el juego del dilema del prisionero en un *árbol de decisión*, para ello es necesario considerarlo como un juego dinámico, es decir, supondremos que el jugador 1 elige primero y que el jugador 2 conocerá la decisión que tome el otro jugador antes de tomar su propia decisión.

El árbol del juego es el siguiente

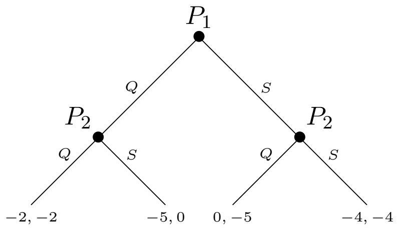

FIGURA 2.1: Árbol del Dilema del Prisionero.

Hallemos la solución de este juego usando inducción hacia atrás. Primero, para las dos ramas del lado izquierdo de la Figura **??** entre las que $P_2$ puede elegir son $Q$ y $S$, con ganancias $-2$ y $0$ respectivamente, por lo tanto elegimos $S$. Análogamente para las ramas del lado derecho, obteniendo lo siguiente:

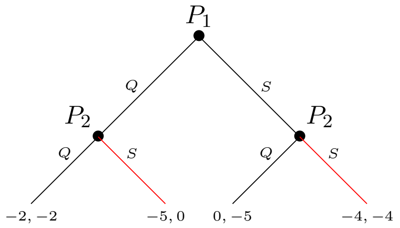

FIGURA 2.2: Árbol del Dilema del Prisionero, inducción hacia atrás (a).

Ahora veamos qué es lo que más le conviene a $P_1$, si elige $Q$ entonces $P_2$ elegirá $S$ y $P_1$ tendrá una ganancia de $-5$, mientras que si elige $S$, entonces $P_2$ elegirá $S$ y $P_1$ tendrá una ganancia de $-4$. Por lo tanto, lo que más le conviene a $P_1$ es elegir $S$.

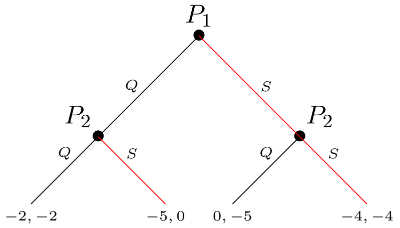

FIGURA 2.3: Árbol del Dilema del Prisionero, inducción hacia atrás (b).

Por lo tanto el equilibrio de Nash es $(S, S)$.

Pareciera que el jugador que elige primero tiene cierta desventaja sobre el otro jugador. Vemos si eso pasa en este caso, así que consideremos el siguiente árbol de decisión.

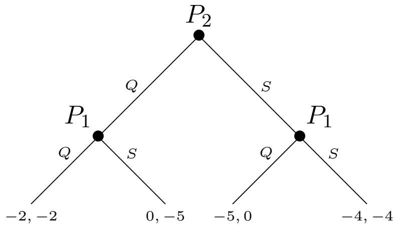

FIGURA 2.4: Árbol del Dilema del Prisionero, $P_2$ elige primero.

Así

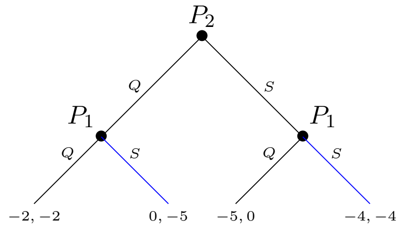

FIGURA 2.5: Árbol del Dilema del Prisionero, $P_2$ elige primero, inducción hacia atrás (a)

Por lo que

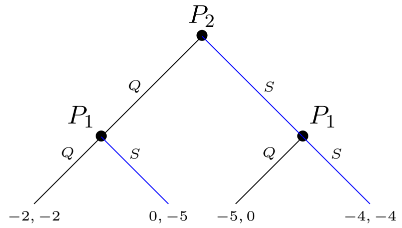

FIGURA 2.6: Árbol del Dilema del Prisionero, $P_2$ elige primero, inducción hacia atrás (b).

Por lo tanto el equilibrio de Nash es $(S, S)$ y vemos que no importa quien elige primero.

## 2.3. Juego Iterado

Notemos que tanto para el caso estático como para el dinámico el equilibrio de Nash es el mismo, pero en ambos casos sólo se toma una decisión, entonces nos preguntamos ¿qué ocurre cuando el juego es iterado?, es decir, repetimos el juego al menos dos veces.

Para iniciar con este análisis, consideremos ahora las ganancias y estrategias que se muestran en la Tabla 2.2:

| | | $P_2$ | |
|---|---|---|---|
| | | $C$ | $D$ |
| $P_1$ | $C$ | $3,3$ | $0,5$ |
| | $D$ | $5,0$ | $1,1$ |

Tabla 2.2: Forma normal del Dilema del Prisionero Iterado.

Donde se ha sumado 5 a cada ganancia con el fin de trabajar con números no negativos.

Además de esto consideraremos dos casos: finito e infinito.

### 2.3.1. Caso Finito

Considerando una etapa a la vez, se pensaría que la única estrategia global para un jugador es usar su estrategia de Equilibrio de Nash para el juego en cada etapa. Sin embargo, si el juego se ve completo, el conjunto estrategias se convierte en uno mucho más rico, pues los jugadores pueden condicionar su comportamiento en las últimas acciones de sus oponentes o cambiar su estrategia en el futuro si el transcurso del juego no sigue una trayectoria satisfactoria.

Considere el dilema del prisionero con dos etapas. El conjunto de estrategias para cada jugador es:

$$\{CC, CD, DC, DD\}$$

$CC$ denota cooperar en la primera y segunda etapa,

$CD$ denota cooperar en la primera etapa y en la segunda no cooperar,

$DC$ denota no cooperar en la primera etapa y en la segunda cooperar,

$DD$ denota no cooperar en ninguna etapa.

Y la forma normal del juego está dada en la Tabla 2.3:

$P_2$

| | | $CC$ | $CD$ | $DC$ | $DD$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $CC$ | $6, 6$ | $3, 8$ | $3, 8$ | $0, 10$ |
| $P_1$ | $CD$ | $8, 3$ | $4, 4$ | $5, 5$ | $1, 6$ |
| | $DC$ | $8, 3$ | $5, 5$ | $4, 4$ | $1, 6$ |
| | $DD$ | $10, 0$ | $6, 1$ | $6, 1$ | $2, 2$ |

Tabla 2.3: Forma normal del Dilema del Prisionero con una iteración.

Usando la Definición 1.1.7 y la Definición 1.1.9, las mejores respuestas se muestran en la Tabla 2.4:

$P_2$

| | | $CC$ | $CD$ | $DC$ | $DD$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $CC$ | $6, 6$ | $3, 8$ | $3, 8$ | $0, \underline{\mathbf{10}}$ |
| $P_1$ | $CD$ | $8, 3$ | $4, 4$ | $5, 5$ | $1, \underline{\mathbf{6}}$ |
| | $DC$ | $8, 3$ | $5, 5$ | $4, 4$ | $1, \underline{\mathbf{6}}$ |
| | $DD$ | $\underline{\mathbf{10}}, 0$ | $\underline{\mathbf{6}}, 1$ | $\underline{\mathbf{6}}, 1$ | $\underline{\mathbf{2}}, \underline{\mathbf{2}}$ |

Tabla 2.4: Mejores respuestas de $P_1$ y $P_2$ para el Dilema del Prisionero Iterado con una iteracón.

O trabajando con el *árbol del juego* y usando inducción hacia atrás:

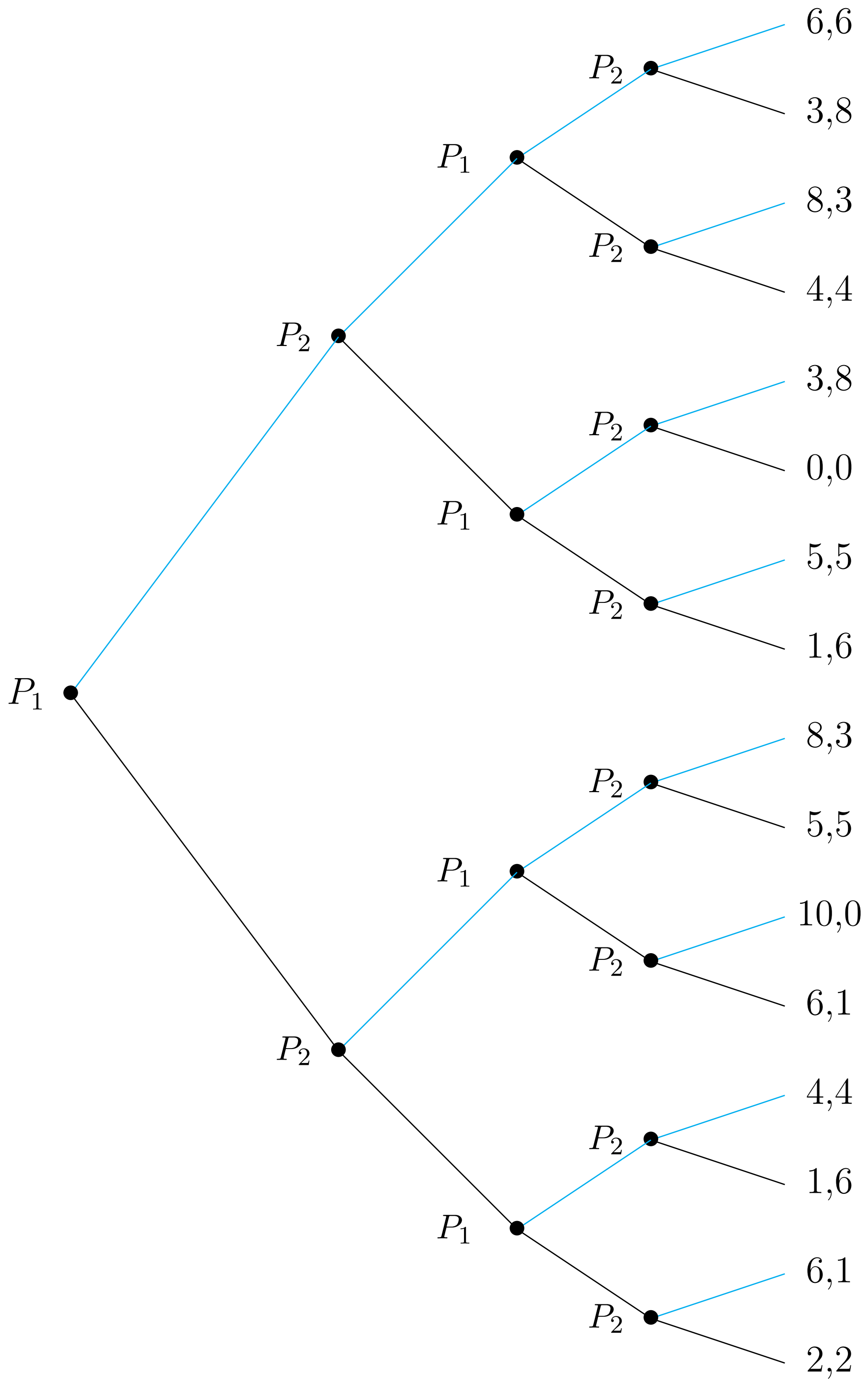

FIGURA 2.7: Árbol del Dilema del Prisionero con dos etapas.

Y por lo tanto un equilibrio de Nash es $(DD, DD)$.

Probemos ahora que $(DD, DD)$ es el único equilibrio de Nash.

Para esto observemos que:

$$
\begin{aligned}
2 = \pi_1(DD, DD) > \pi_1(DC, DD) = 1 \\
2 = \pi_1(DD, DD) > \pi_1(CD, DD) = 1 \\
2 = \pi_1(DD, DD) > \pi_1(CC, DD) = 0
\end{aligned}
$$

Y también

$$
\begin{aligned}
2 = \pi_2(DD, DD) > \pi_2(DD, DC) = 1 \\
2 = \pi_2(DD, DD) > \pi_2(DD, CD) = 1 \\
2 = \pi_2(DD, DD) > \pi_2(DD, CC) = 0
\end{aligned}
$$

Note que $(DD, DD)$ es estrictamente dominante sobre las otras estrategias, esto nos lleva a asegurar que es el único equilibrio de Nash.

Como hemos mencionado, ahora los jugadores pueden condicionar su comportamiendo dependiendo de las acciones de su oponente o simplemente cambiar de estrategia, es por eso que definimos las siguientes estrategias:

- $S_C$ jugar siempre $C$,
- $S_D$ jugar siempre $D$,
- $S_T$ llamada $T$it-Fot-Tat, "Inicia cooperando; a continuación hace lo que el otro jugador hizo en la etapa anterior" ,
- $S_A$ que es una versión de Tit-For-Tat, "Inicia no cooperando (deserta) y luego hace lo que el otro jugador hizo en la etapa anterior",
- $S_G$ llamada a veces $G$rim, "Inicia cooperando y sigue cooperando hasta que el otro no lo haga, y luego no coopera (deserta) para siempre"
- $S_Q$ "Coopera con probabilidad $q$ y no coopera con probabilidad $1 - q$",
- $S_P$ "Inicia cooperando y sigue cooperando si el otro también lo hace, en otro caso coopera con probabilidad $p$ y no coopera con probabilidad $1 - p$.

### 2.3.2. Caso Infinito

Ahora consideremos un número infinito de repeticiones, en este caso no tenemos una etapa final para trabajar con inducción hacia atrás. Además de que tendríamos un problema con ciertas estrategias que a contiuación se presentan.

**Definición 2.3.1.** Una *estrategia estacionaria* es aquella en la que la regla para elegir una acción es la misma en todas las etapas (esto no significa que la acción elegida en cada etapa será la misma).

La ganancia para una estrategia estacionaria es la suma infinita de ganancias obtenidas en cada etapa. Desafortunadamente, este enfoque conduce a un problema. Supongamos que ambos jugadores utilizan la estrategia $S_C$, la ganancia total para cualquiera de los jugadores es

$$\begin{aligned}\pi_i(S_C, S_C) &= \sum_{t=0}^{\infty} 3 \\ &= \infty\end{aligned}$$

mientras que, si un jugador usa la estrategia $S_D$, la ganancia total para el desertor es

$$\begin{aligned}\pi_1(S_D, S_C) &= \pi_2(S_C, S_D) \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} 5 \\ &= \infty\end{aligned}$$

De esta manera, nos es imposible decidir cuál es la mejor estrategia.

Una solución es introducir un factor de descuento $\delta$ con $0 < \delta < 1$, así la ganancia total de un jugador esta dada por

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t r_i(t),$$

donde $r_i(t)$ es la ganancia del jugador $i$ en la etapa $t$.

Entonces, la ganancia total para ambos jugadores usando la estrategia $(S_D, S_D)$ es:

$$\begin{aligned}\pi_i(S_D, S_D) &= \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \\ &= 1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots \\ &= \frac{1}{1-\delta}.\end{aligned}$$

La ganancia total para $P_1$ usando la estrategia $(S_D, S_C)$ es:

$$\begin{aligned}\pi_1(S_D, S_C) &= \pi_2(S_C, S_D) \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} 5\delta^t \\ &= 5 + 5\delta + 5\delta^2 + 5\delta^3 + \dots \\ &= \frac{5}{1-\delta}.\end{aligned}$$

Hallemos ahora las ganancias usando el conjunto de estrategias $S = \{S_D, S_C, S_G, S_T, S_A\}$ para ambos jugadores.

Ya hemos calculado las ganancias de $P_1$ y $P_2$ usando el par de estrategias $(S_D, S_D)$, la ganancia de $P_1$ usando $S_D, S_C$ y la ganancia de $P_2$ usando $(S_C, S_D)$. Calculemos las que restan:

- $\pi_2(S_D, S_C) = 0.$
- $\pi_1(S_D, S_G) = 5 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots = 5 + \frac{\delta}{1-\delta} = \frac{5-4\delta}{1-\delta}.$
- $\pi_2(S_D, S_G) = \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots = \frac{\delta}{1-\delta}.$
- $\pi_1(S_D, S_T) = 5 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots = 5 + \frac{\delta}{1-\delta} = \frac{5-\delta}{1-\delta}.$
- $\pi_2(S_D, S_T) = \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots = \frac{\delta}{1-\delta}.$
- $\pi_1(S_D, S_A) = 1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots = \pi_2(S_D, S_A) = \frac{1}{1-\delta}.$
- $\pi_1(S_C, S_D) = 0.$
- $\pi_2(S_C, S_D) = 5 + 5\delta + 5\delta^2 + 5\delta^3 + \dots = \frac{5}{1-\delta}.$
- $\pi_1(S_C, S_C) = 3 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \dots = \pi_2(S_C, S_C) = \frac{3}{1-\delta}.$

- $\pi_1(S_C, S_G) = 3 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \ldots = \pi_2(S_C, S_G) = \frac{3}{1-\delta}$.
- $\pi_1(S_C, S_T) = 3 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \ldots = \pi_2(S_C, S_T) = \frac{3}{1-\delta}$.
- $\pi_1(S_C, S_A) = 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \ldots = \frac{3\delta}{1-\delta}$.
- $\pi_2(S_C, S_A) = 5 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \ldots = 5 + \frac{3\delta}{1-\delta} = \frac{5-2\delta}{1-\delta}$.
- $\pi_1(S_G, S_D) = \delta + \delta^2 + \delta^3 + \ldots = \frac{\delta}{1-\delta}$.
- $\pi_2(S_G, S_D) = 5 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \ldots = 5 + \frac{\delta}{1-\delta} = \frac{5-4\delta}{1-\delta}$.
- $\pi_1(S_G, S_C) = 3 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \ldots = \pi_2(S_G, S_C) = \frac{3}{1-\delta}$.
- $\pi_1(S_G, S_G) = 3 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \ldots = \pi_2(S_G, S_G) = \frac{3}{1-\delta}$.
- $\pi_1(S_G, S_T) = 3 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \ldots = \pi_2(S_G, S_T) = \frac{3}{1-\delta}$.
- $\pi_1(S_G, S_A) = 5\delta + \delta^2 + \delta^3 + \delta^4 + \ldots = 5\delta^2 + \frac{\delta^2}{1-\delta} = \frac{5\delta-4\delta^2}{1-\delta}$.
- $\pi_2(S_G, S_A) = 5 + \delta^2 + \delta^3 + \delta^4 + \ldots = 5 + \frac{\delta^2}{1-\delta} = \frac{5-5\delta+\delta^2}{1-\delta}$.
- $\pi_1(S_T, S_D) = \delta + \delta^2 + \delta^3 + \ldots = \frac{\delta}{1-\delta}$.
- $\pi_2(S_T, S_D) = 5 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \ldots = 5 + \frac{\delta}{1-\delta} = \frac{5-4\delta}{1-\delta}$.
- $\pi_1(S_T, S_C) = 3 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \ldots = \pi_2(S_T, S_C) = \frac{3}{1-\delta}$.
- $\pi_1(S_T, S_G) = 3 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \ldots = \pi_2(S_T, S_G) = \frac{3}{1-\delta}$.
- $\pi_1(S_T, S_T) = 3 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \ldots = \pi_2(S_T, S_T) = \frac{3}{1-\delta}$.
- $\pi_1(S_T, S_A) = 5\delta + 5\delta^3 + 5\delta^5 + \ldots = \frac{5\delta}{1-\delta^2}$.
- $\pi_2(S_T, S_A) = 5 + \delta^2 + \delta^4 + \ldots = \frac{5}{1-\delta^2}$.
- $\pi_1(S_A, S_D) = 1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \ldots = \pi_2(S_A, S_D) = \frac{1}{1-\delta}$.
- $\pi_1(S_A, S_C) = 5 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \ldots = 5 + \frac{3\delta}{1-\delta} = \frac{5-2\delta}{1-\delta}$.
- $\pi_2(S_A, S_C) = 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \ldots = \frac{3\delta}{1-\delta}$.
- $\pi_1(S_A, S_G) = 5 + \delta^2 + \delta^3 + \delta^4 + \ldots = 5 + \frac{\delta^2}{1-\delta} = \frac{5-5\delta+\delta^2}{1-\delta}$.
- $\pi_2(S_A, S_G) = 5\delta + \delta^2 + \delta^3 + \delta^4 + \ldots = 5\delta + \frac{\delta^2}{1-\delta} = \frac{5\delta-4\delta^2}{1-\delta}$.
- $\pi_1(S_A, S_T) = 5 + \delta^2 + \delta^4 + \ldots = \frac{5}{1-\delta^2}$.

- $\pi_2(S_A, S_T) = 5\delta + 5\delta^3 + 5\delta^5 + \ldots = \frac{5\delta}{1-\delta^2}$.
- $\pi_1(S_A, S_A) = 1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \ldots = \pi_2(S_A, S_A) = \frac{1}{1-\delta}$.

La forma normal para este juego aparece en la Tabla 2.5:

| | | $P_2$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $S_D$ | $S_C$ | $S_G$ | $S_T$ | $S_A$ |
| $P_1$ | $S_D$ | $1,1$ | $5,0$ | $5-4\delta,\delta$ | $5-4\delta,\delta$ | $1,1$ |
| | $S_C$ | $0,5$ | $3,3$ | $3,3$ | $3,3$ | $3\delta,5-2\delta$ |
| | $S_G$ | $\delta,5-4\delta$ | $3,3$ | $3,3$ | $3,3$ | $5\delta-4\delta^2,5-5\delta+\delta^2$ |
| | $S_T$ | $\delta,5-4\delta$ | $3,3$ | $3,3$ | $3,3$ | $\frac{5\delta}{1+\delta},\frac{5}{1+\delta}$ |
| | $S_A$ | $1,1$ | $5-2\delta,3\delta$ | $5-5\delta+\delta^2,5\delta-4\delta^2$ | $\frac{5}{1+\delta},\frac{5\delta}{1+\delta}$ | $1,1$ |

TABLA 2.5: Forma normal del Dilema del Prisionero Iterado para el caso infinito, teniendo como factor común a $\frac{1}{1-\delta}$.

Para hallar algún equilibrio de Nash, se usa la Definición 1.1.9. Utilizaremos también algunas gráficas como apoyo.

Si $P_1$ juega $S_D$, $P_2$ tiene las ganancias que se muestran en la Tabla 2.6:

| **Estrategia** | $S_D$ | $S_C$ | $S_G$ | $S_T$ | $S_A$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Ganancia** | 1 | 0 | $\delta$ | $\delta$ | 1 |

TABLA 2.6: Ganancias de $P_2$ cuando $P_1$ juega $S_D$.

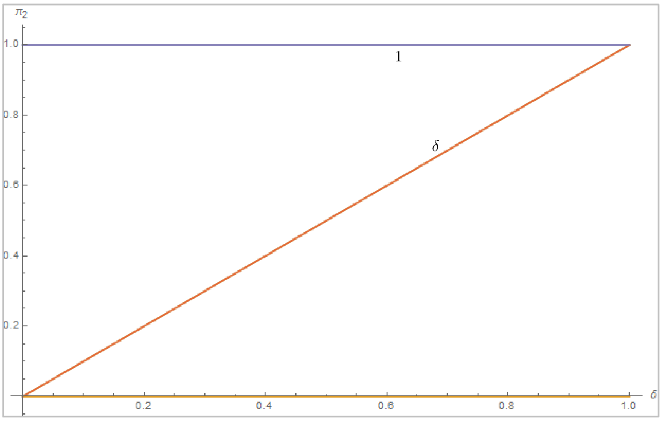

Figura 2.8: Gráfica de las ganancias de la Tabla 2.6.

Así, la mejor respuesta de $P_2$ es $S_D$ o $S_A$.

Si $P_1$ juega $S_C$, $P_2$ tiene las ganancias que se muestran en la Tabla 2.7:

| **Estrategia** | $S_D$ | $S_C$ | $S_G$ | $S_T$ | $S_A$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Ganancia** | 5 | 3 | 3 | 3 | $5 - 2\delta$ |

Tabla 2.7: Ganancias de $P_2$ cuando $P_1$ juega $S_C$.

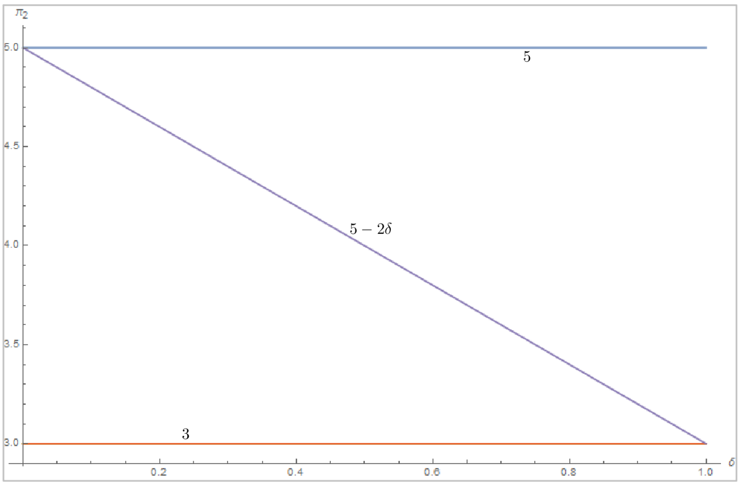

Figura 2.9: Gráfica de las ganancias de la Tabla 2.7.

Así, la mejor respuesta de $P_2$ es $S_D$.

Si $P_1$ juega $S_G$, $P_2$ tiene las ganancias que se muestran en la Tabla 2.8:

| **Estrategia** | $S_D$ | $S_C$ | $S_G$ | $S_T$ | $S_A$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Ganancia** | $5-4\delta$ | 3 | 3 | 3 | $5-5\delta+\delta^2$ |

Tabla 2.8: Ganancias de $P_2$ cuando $P_1$ juega $S_G$.

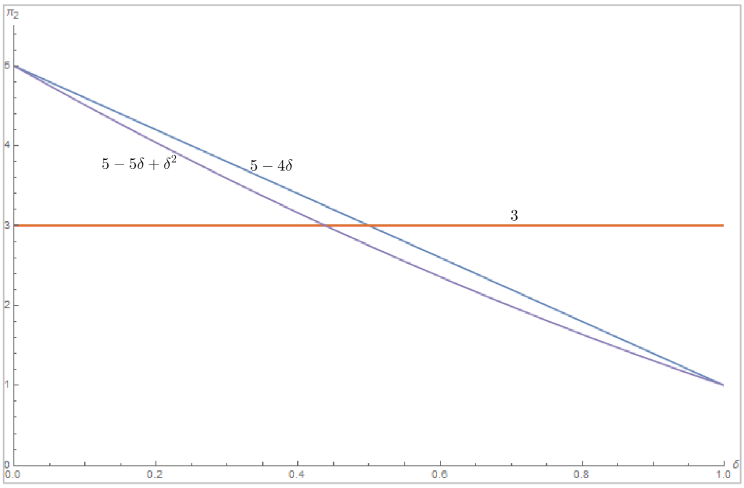

Figura 2.10: Gráfica de las ganancias de la Tabla 2.8.

Notemos que:

$$\begin{aligned}
\pi_2(S_G, S_D) &> \pi_2(S_G, S_A)\\
5-4\delta &> 5-5\delta+\delta^2\\
0 &> \delta(\delta-1), \text{ como } \delta>0\\
0 &> \delta-1\\
1 &> \delta
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\pi_2(S_G, S_D) &> \pi_2(S_G, S_C) = \pi_2(S_G, S_G) = \pi_2(S_G, S_T)\\
5-4\delta &> 3\\
2(1-2\delta) &> 0\\
1-2\delta &> 0\\
\frac{1}{2} &> \delta.
\end{aligned}$$

Así, la mejor respuesta de $P_2$ es $S_D$ si $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ y $S_C$, $S_G$ o $S_T$ para $\delta \in [\frac{1}{2}, 1)$.

Si $P_1$ juega $S_T$, $P_2$ tiene las ganancias que se muestran en la Tabla 2.9:

| **Estrategia** | $S_D$ | $S_C$ | $S_G$ | $S_T$ | $S_A$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Ganancia** | $5-4\delta$ | 3 | 3 | 3 | $\frac{5}{1+\delta}$ |

Tabla 2.9: Ganancias de $P_2$ cuando $P_1$ juega $S_T$.

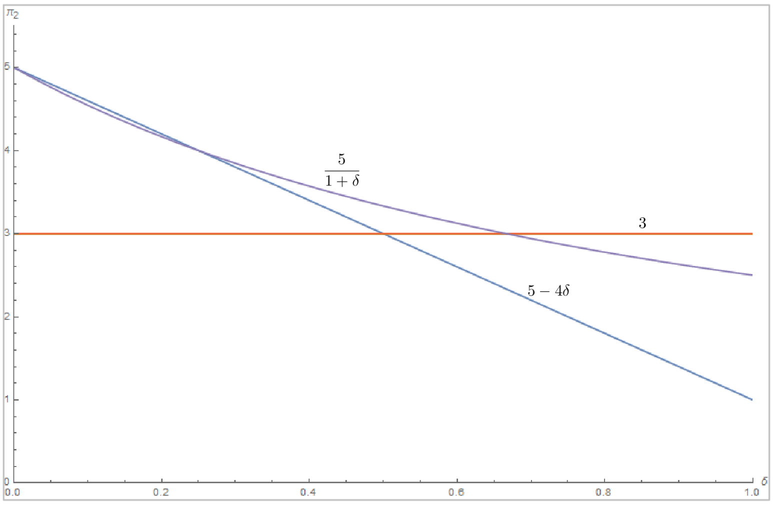

Figura 2.11: Gráfica de las ganancias de la Tabla 2.9.

Notemos que:

$$\begin{aligned}\pi_2(S_T,S_D) &> \pi_2(S_T,S_C)=\pi_2(S_T,S_G)=\pi_2(S_T,S_T)\\ \frac{1}{2} &> \delta,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\pi_2(S_T,S_D) &> \pi_2(S_T,S_A)\\ 5-4\delta &> \frac{5}{1+\delta}\\ \delta(1-4\delta) &> 0\\ 1-4\delta &> 0\\ \frac{1}{4} &> \delta\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\pi_2(S_T, S_A) > \pi_2(S_T, S_C) &= \pi_2(S_T, S_G) = \pi_2(S_T, S_T)\\
\frac{5}{1+\delta} &> 3\\
5 &> 3 + 3\delta\\
\frac{2}{3} &> \delta.
\end{aligned}$$

Así, la mejor respuesta de $P_2$ es $S_D$ si $\delta \in (0, \frac{1}{4})$, $S_A$ para $\delta \in [\frac{1}{4}, \frac{2}{3})$ y $S_C$, $S_G$ o $S_T$ en otro caso.

Si $P_1$ juega $S_A$, $P_2$ tiene las ganancias que se muestran en la Tabla 2.10:

| **Estrategia** | $S_D$ | $S_C$ | $S_G$ | $S_T$ | $S_A$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Ganancia** | 1 | $3\delta$ | $5\delta - 4\delta^2$ | $\frac{5\delta}{1+\delta}$ | 1 |

Tabla 2.10: Ganancias de $P_2$ cuando $P_1$ juega $S_A$.

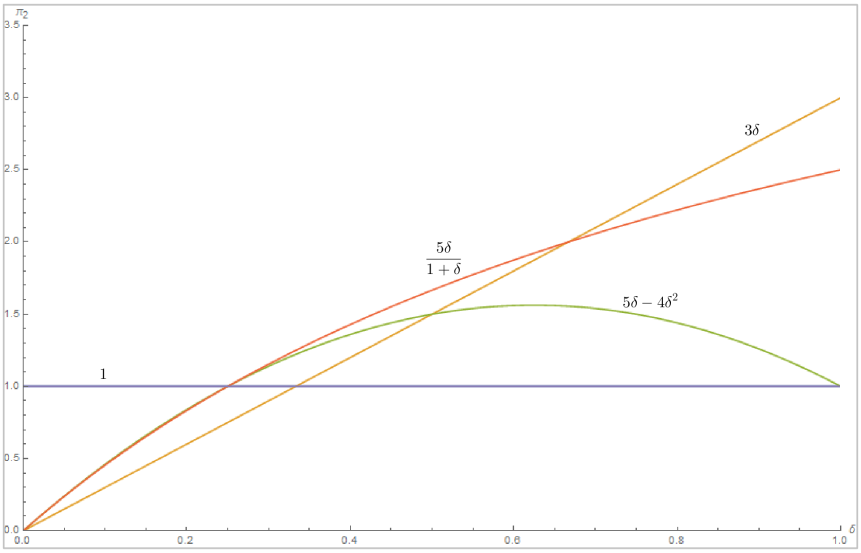

Figura 2.12: Gráfica de las ganancias de la Tabla 2.10.

Notemos que:

$$\begin{aligned} \pi_2(S_A, S_D) &> \pi_2(S_A, S_G) \\ 1 &> 5\delta - 4\delta^2 \\ 1 + \delta &> 5\delta \\ \frac{1}{4} &> \delta, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \pi_2(S_A, S_T) &> \pi_2(S_A, S_C) \\ \frac{5\delta}{1+\delta} &> 3\delta \\ 0 &> 3\delta^2 - 2\delta \\ 0 &> 3\delta - 2 \\ \frac{2}{3} &> \delta, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \pi_2(S_A, S_T) &> \pi_2(S_A, S_G) \\ \frac{5}{1+\delta} &> 5\delta - 4\delta^2 \\ 0 &> \delta^2 - 4\delta^3 \\ 0 &< 1 - 4\delta \\ \frac{1}{4} &< \delta \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \pi_2(S_A, S_D) &> \pi_2(S_A, S_G) \\ 1 &> 5\delta - 4\delta^2 \\ \delta^2 - \frac{5}{4}\delta + 1 &> 0 \\ (\delta - 1)(\delta - \frac{1}{4}) &> 0 \end{aligned}$$

ésto si y solo si $(\delta > 1 \wedge \delta > \frac{1}{4}) \vee (\delta < 1 \wedge \delta < \frac{1}{4})$, de las cuales se cumple la segunda conjunción.

Así, la mejor respuesta de $P_2$ es $S_D$ o $S_A$ si $\delta \in (0, \frac{1}{4})$, $S_T$ para $\delta \in [\frac{1}{4}, \frac{2}{3})$ y $S_C$ en otro caso.

Haciendo un análisis análogo obtenemos las mejores respuestas de $P_1$, y así los equilibrios de Nash son:

- $(S_D, S_D), (S_D, S_A), (S_A, S_D), (S_A, S_A)$ para $\delta < \frac{1}{4}$,
- $(S_D, S_D), (S_T, S_A), (S_A, S_T)$ para $\frac{1}{4} \leq \delta < \frac{1}{2}$,
- $(S_D, S_D), (S_G, S_G), (S_T, S_A), (S_A, S_T)$ para $\frac{1}{2} \leq \delta < \frac{2}{3}$,
- $(S_D, S_D), (S_G, S_G), (S_T, S_G), (S_G, S_T), (S_T, S_T)$ en otro caso.

Consideremos ahora el conjunto de estrategias $\{S_D, S_C, S_G, S_T, S_A, S_Q, S_P\}$. Las ganancias para $P_1$ y $P_2$ son las siguientes:

- $\pi_1(S_Q, S_D) = 1 - q + (1 - q)\delta + (1 - q)\delta^2 + \ldots = \frac{1-q}{1-\delta}$.
- $\pi_2(S_Q, S_D) = 1 + 4q + (1 + 4q)\delta + (1 + 4q)\delta^2 + \ldots = \frac{1+4q}{1-\delta}$.
- $\pi_1(S_Q, S_C) = 5 - 2q + (5 - 2q)\delta + (5 - 2q)\delta^2 + \ldots = \frac{5-2q}{1-\delta}$.
- $\pi_2(S_Q, S_C) = 3q + 3q\delta + 3q\delta^2 + \ldots = \frac{3q}{1-\delta}$.
- $\pi_1(S_Q, S_G) = 5 - 2q + (1 + 3q - q^2)\delta + (1 + 3q - q^2)\delta^2 + \ldots = \frac{5-2q+(-4+5q-q^2)\delta}{1-\delta}$.
- $\pi_2(S_Q, S_G) = 3q + (1 + 3q - q^2)\delta + (1 + 3q - q^2)\delta^2 + \ldots = \frac{3q+(1-q^2)\delta}{1-\delta}$.
- $\pi_1(S_Q, S_T) = 5 - 2q + (1 + 3q - q^2)\delta + (1 + 3q - q^2)\delta^2 + \ldots = \frac{5-2q+(-4+5q-q^2)\delta}{1-\delta}$.
- $\pi_2(S_Q, S_T) = 3q + (1 + 3q - q^2)\delta + (1 + 3q - q^2)\delta^2 + \ldots = \frac{3q+(1-q^2)\delta}{1-\delta}$.
- $\pi_1(S_Q, S_A) = 1 - q + (1 + 3q - q^2)\delta + (1 + 3q - q^2)\delta^2 + \ldots = \frac{1-q+(4q-q^2)\delta}{1-\delta}$.
- $\pi_2(S_Q, S_A) = 1 + 4q + (1 + 3q - q^2)\delta + (1 + 3q - q^2)\delta^2 + \ldots = \frac{1+4q+(-q-q^2)\delta}{1-\delta}$.
- $\pi_1(S_Q, S_Q) = 1 + 3q - q^2 + (1 + q - q^2)\delta + (1 + 3q - q^2)\delta^2 + \ldots = \frac{1+3q-q^2}{1-\delta} = \pi_2(S_Q, S_Q)$
- $\pi_1(S_Q, S_P) = 1 - 2q + (1 + 4q + 3p - 4p^2 + 3q^2 - 5pq - 3q^2p + 4qp^2)\delta + (1 + 4q + 3p - 4p^2 + 3q^2 - 5pq - 3q^2p + 4qp^2)\delta^2 + \ldots = \frac{1-2q+(6q+3q^2-3q^2p+4p^2q+3p-4p^2)\delta}{1-\delta}$.

- $\pi_2(S_Q, S_P) = 3q + (1 - q - p + 3q^2 + pq)\delta + (1 - q - p + 3q^2 + pq)\delta^2 + \ldots = \frac{3q+(-4q+1-p+3q^2+pq)\delta}{1-\delta}$.
- $\pi_1(S_P, S_D) = (1 - p)\delta + (1 - p)\delta^2 + \ldots = \frac{(1-p)\delta}{1-\delta}$.
- $\pi_2(S_P, S_D) = 5 + (4p + 1)\delta + (4p + 1)\delta^2 + \ldots = \frac{5+(4p-4)\delta}{1-\delta}$.
- $\pi_1(S_P, S_C) = \pi_2(S_P, S_C) = \pi_1(S_P, S_G) = \pi_2(S_P, S_G) = \pi_1(S_P, S_T) = \pi_2(S_P, S_T) = \pi_1(S_P, S_P) = \pi_2(S_P, S_P) = \frac{3}{1-\delta}$.
- $\pi_1(S_P, S_A) = (5 - 2p)\delta + 3p\delta^2 + (5 - 2p)\delta^3 + 3p\delta^4 + \ldots = \frac{(5\delta+p\delta+3p)\delta-3p}{1-\delta^2}$.
- $\pi_2(S_P, S_A) = 5 + 3p\delta + (5 - 2p)\delta^2 + 3p\delta^3 + (5 - 2p)\delta^4 + \ldots = \frac{2p+(5-2p+p\delta)\delta}{1-\delta^2}$.

La forma normal para este juego aparece en la Tabla 2.11

$P_2$

$P_1$

| | $S_D$ | $S_C$ | $S_G$ | $S_T$ | $S_A$ | $S_Q$ | $S_P$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_D$ | $1, 1$ | $5, 0$ | $5-4\delta, \delta$ | $5-4\delta, \delta$ | $1, 1$ | $1+4q, 1-q$ | $5+(4p-4)\delta,$ $(1-p)\delta$ |
| $S_C$ | $0, 5$ | $3, 3$ | $3, 3$ | $3, 3$ | $3\delta, 5-2\delta$ | $3q, 5-2q$ | $3, 3$ |
| $S_G$ | $\delta, 5-4\delta$ | $3, 3$ | $3, 3$ | $3, 3$ | $5\delta-4\delta^2,$ $5-5\delta+\delta^2$ | $3q+(1-q^2)\delta,$ $5-2q+(-4+5q-q^2)\delta$ | $3, 3$ |
| $S_T$ | $\delta, 5-4\delta$ | $3, 3$ | $3, 3$ | $3, 3$ | $\frac{5\delta}{1+\delta}, \frac{5}{1+\delta}$ | $3q+(1-q^2)\delta,$ $5-2q+(-4+5q-q^2)\delta$ | $3, 3$ |
| $S_A$ | $1, 1$ | $5-2\delta, 3\delta$ | $5-5\delta+\delta^2,$<br>$5\delta-4\delta^2$ | $\frac{5}{1+\delta}, \frac{5\delta}{1+\delta}$ | $1, 1$ | $1+4q+(-q-q^2)\delta,$ $1-q+(4q-q^2)\delta$ | $\frac{2p+(5-2p+p\delta)\delta}{1+\delta},$<br>$\frac{(5\delta+p\delta+3p)\delta-3p}{1+\delta}$ |
| $S_Q$ | $1-q,$<br>$1+4q$ | $5-2q, 3q$ | $5-2q+(-4+5q-q^2)\delta,$<br>$3q+(1-q^2)\delta$ | $5-2q+(-4+5q-q^2)\delta,$<br>$3q+(1-q^2)$ | $1-q+(4q-q^2)\delta,$<br>$1+4q+(-q-q^2)\delta$ | $1-3q-q^2,$<br>$1-3q-q^2$ | $1-2q+(6q+3q^2-3q^2p+4p^2q+3p-4p^2)\delta,$<br>$3q+(1-4q-p+3q^2+pq)\delta$ |
| $S_P$ | $(1-p)\delta,$<br>$5+(4p-4)\delta$ | $3, 3$ | $3, 3$ | $3, 3$ | $\frac{(5\delta+p\delta+3p)\delta-3p}{1+\delta},$<br>$\frac{2p+(5-2p+p\delta)\delta}{1+\delta}$ | $3q+(1-4q-p+3q^2+pq)\delta,$ $1-2q+(6q+3q^2-3q^2p+4p^2q+3p-4p^2)\delta$ | $3, 3$ |

TABLA 2.11: Forma normal del Dilema del Prisionero Iterado para el caso infinito usando el conjunto de estrategias $\{S_D, S_C, S_G, S_T, S_A, S_Q, S_P\}$, teniendo como factor común a $\frac{1}{1-\delta}$.

Ahora usemos la Definición1.1.9 para hallar algún equilibrio de Nash.

Si $P_1$ juega $S_D$, $P_2$ tiene las ganancias que se muestran en la Tabla 2.12:

| **Estrategia** | $S_D$ | $S_C$ | $S_G$ | $S_T$ | $S_A$ | $S_Q$ | $S_P$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Ganancia** | 1 | 0 | $\delta$ | $\delta$ | 1 | $1-q$ | $(1-p)\delta$ |

Tabla 2.12: Ganancias de $P_2$ cuando $P_1$ juega $S_D$.

Es fácil ver que $S_D$ y $S_A$ son las mejores respuestas de $P_2$, ya que $p, q, \delta \in (0,1)$.

Si $P_1$ juega $S_C$, $P_2$ tiene las ganancias que se muestran en la Tabla 2.13:

| **Estrategia** | $S_D$ | $S_C$ | $S_G$ | $S_T$ | $S_A$ | $S_Q$ | $S_P$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Ganancia** | 5 | 3 | 3 | 3 | $5-2\delta$ | $5-2q$ | 3 |

Tabla 2.13: Ganancias de $P_2$ cuando $P_1$ juega $S_C$.

Como $5-2\delta < 5$ y $5-2q < 5$, $S_D$ es la mejor respuesta de $P_2$.

Si $P_1$ juega $S_G$, $P_2$ tiene las ganancias que se muestran en la Tabla 2.14:

| **Estrategia** | $S_D$ | $S_C$ | $S_G$ | $S_T$ | $S_A$ | $S_Q$ | $S_P$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Ganancia** | $5-4\delta$ | 3 | 3 | 3 | $5-5\delta+\delta^2$ | $5-2q+(-4+5q-q^2)\delta$ | 3 |

Tabla 2.14: Ganancias de $P_2$ cuando $P_1$ juega $S_G$.

La mejor respuesta de $P_2$ es

- $S_D$ si

$$\begin{cases} q < \frac{5\sqrt{17}-21}{\sqrt{12}-5} & \text{y} \quad \delta < \frac{2}{5-q} \\ q > \frac{5\sqrt{17}-21}{\sqrt{12}-5} & \text{y} \quad \delta < \frac{5-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

- $S_G$ si $\delta \geq \frac{-2+2q}{-4+5q-q^2}$,
- $S_T$ si $\delta \geq \frac{2}{3}$,
- $S_Q$ si

$$\begin{cases} q < 0.64139 & \text{y} \quad \delta > \frac{1+5q-q^2-\sqrt{q^4+10q^3+23q^2-10q+1}}{4q} \\ q > 0.64139 & \text{y} \quad \delta > \frac{2}{5-q} \end{cases}$$

- $S_P$ si $\delta \geq \frac{-2+2q}{-4+5q-q^2}$, $p\delta^2 + (2-2p)\delta + 2p - 3 \leq 0$ y $-2 - 2q + (6q + 3q^2 - 3q^p + 4p^2q + 3p - 4p^2) \leq 0$.

Si $P_1$ juega $S_T$, $P_2$ tiene las ganancias que se muestran en la Tabla 2.15:

| **Estrategia** | $S_D$ | $S_C$ | $S_G$ | $S_T$ | $S_A$ | $S_Q$ | $S_P$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Ganancia** | $5-4\delta$ | 3 | 3 | 3 | $\frac{5}{1+\delta}$ | $5-2q+(-4+5q-q^2)\delta$ | 3 |

Tabla 2.15: Ganancias de $P_2$ cuando $P_1$ juega $S_T$.

La mejor respuesta de $P_2$ es

- $S_D$ si $\delta < \frac{1}{4}$,
- $S_G$, $S_T$ o $S_P$ si $\delta \geq \frac{2}{3}$,
- $S_A$ si
  $\frac{1}{4} < \delta < \frac{2}{3}$ y $q \in (0, \frac{1}{2}(7-2\sqrt{10}-\sqrt{13-4\sqrt{10}}))\bigcup(\frac{1}{2}(7-2\sqrt{10}+\sqrt{13-4\sqrt{10}}),1)$
- $S_Q$ si

$$\begin{cases} q \in (0, \frac{1}{2}(7-2\sqrt{10}-\sqrt{13-4\sqrt{10}})) \text{ y } \delta > \frac{2}{4-q} \\ q \in (\frac{1}{2}(7-2\sqrt{10}+\sqrt{13-4\sqrt{10}}),1) \text{ y } \frac{2}{4-q} < \delta < \frac{1+3q-q^2-\sqrt{1-26q+47q^2-14q^3-q^4}}{2(4-5q+q^2)} \end{cases}$$

Si $P_1$ juega $S_A$, $P_2$ tiene las ganancias que se muestran en la Tabla 2.16

| **Estrategia** | $S_D$ | $S_C$ | $S_G$ | $S_T$ | $S_A$ | $S_Q$ | $S_P$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Ganancia** | 1 | $3\delta$ | $5\delta-4\delta^2$ | $\frac{5\delta}{1+\delta}$ | 1 | $1-q+(4q-q^2)\delta$ | $\frac{(5\delta+p\delta+3p)\delta-3p}{1+\delta}$ |

Tabla 2.16: Ganancias de $P_2$ cuando $P_1$ juega $S_A$.

La mejor respuesta de $P_2$ es

- $S_D$ o $S_A$ si,

$$\begin{cases} p < \frac{5}{11} & \text{y} \quad \delta < \frac{3p}{5+p} \\ p \geq \frac{5}{11} & \text{y} \quad \delta < \frac{1}{4} \end{cases}$$

o

$$\begin{cases} p < \frac{1}{23} & \text{y} \quad \delta < \frac{1+6p}{5+p} \\ p \geq \frac{1}{23} & \text{y} \quad \delta < \frac{1}{4} \end{cases}$$

- $S_T$ si $\frac{1}{4} \leq \delta \leq \frac{2}{3}$, $1 - q + (-4 + 3q - q^2)\delta + (4q - q^2)\delta^2 \leq 0$ y $-3p + (3p + 5)\delta + (5 + p)\delta^2 \leq 0$,

- $S_Q$ si
  $0 < q \leq \frac{1}{12}(21 - \sqrt{21} + \sqrt{270\sqrt{21} - 1050})$ y $\delta > \frac{1}{2}(\sqrt{21} - 3)$ y $\delta < \frac{1}{1+q}$ y $\delta > \frac{1}{8}(5 - 4q + q^2 + \sqrt{9 - 24q + 26q^2 - 8q^3 + q^4})$ y $p < \frac{-1+q+(-1-3q+q^2)\delta+(5-4q+q^2)\delta^2}{3-3\delta-\delta^2}$,

- $S_P$ si,
  $p < \frac{5}{11}$ y $\delta \in (\frac{3}{4}, \frac{1}{2}(\sqrt{21} - 3)$ y $p < \frac{-1+q+(-1-3q+q^2)\delta+(5-4q+q^2)\delta^2}{3-3\delta-\delta^2}$.

Si $P_1$ juega $S_Q$, $P_2$ tiene las ganancias que se muestran en la Tabla 2.17:

| **Estrategia** | $S_D$ | $S_C$ | $S_G$ | $S_T$ | $S_A$ | $S_Q$ | $S_P$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Ganancia** | $1 + 4q$ | $3q$ | $3q + (1 - q^2)\delta$ | $3q + (1 + q^2)\delta$ | $1 + 4q + (-q - q^2)\delta$ | $1 - 3q - q^2$ | $3q + (1 - 4q - p + 3q^2 + pd)\delta$ |

Tabla 2.17: Ganancias de $P_2$ cuando $P_1$ juega $S_Q$.

La mejor respuesta de $P_2$ es $S_D$.

Si $P_1$ juega $S_P$, $P_2$ tiene las ganancias que se muestran en la Tabla 2.18:

| **Estrategia** | $S_D$ | $S_C$ | $S_G$ | $S_T$ | $S_A$ | $S_Q$ | $S_P$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Ganancia** | $5 + (4p - 4)\delta$ | 3 | 3 | 3 | $\frac{2p+(5-2p+p\delta)\delta}{1+\delta}$ | $1 - 2q + (6q + 3q^2 - 3q^2p + 4p^2q + 3p - 4p^2)\delta$ | 3 |

Tabla 2.18: Ganancias de $P_2$ cuando $P_1$ juega $S_P$.

La mejor respuesta de $P_2$ es

- $S_D$ si $\delta \leq \frac{-2}{4p-4}$, $5 - 2p + (6p - 4)\delta + (3p - 4)\delta^2 \geq 0$ y $-4 - 2q + (6q + 3q^2 - 3q^2p + 4p^2q + 3p - 4p^2 + 4)\delta \leq 0$,

- $S_G$, $S_T$ o $S_P$ si $\delta \leq \frac{1}{2-2p}$, $p\delta^2 + (2 - 2p)\delta + 2p - 3 \leq 0$ y $-2 - 2q + (6q + 3q^2 - 3q^2p + 4p^2q + 3p - 4p^2)\delta \leq 0$,

- $S_A$ si $p < \frac{1}{2}$ y $\delta < \frac{-b_1+\sqrt{b_1^2-4a_1c_1}}{2a_1}$ o $\frac{-b_1-\sqrt{b_1^2-4a_1c_1}}{2a_1}$,
  donde,
  $a_1 = -6q - 3q^2 + 3q^2p - 2p + 4p^2$,
  $b_1 = 4 - 4q - 3q^2 + 3q^2p - 5p + 4p^2$,
  $c_1 = 2p + 2q - 1$,

- $S_Q$ si
  $(q \leq \frac{1}{2}$ o $((q > \frac{1}{10}$ o $q > \frac{1}{3}(2\sqrt{3} - 3))$y $\frac{1-2q}{p^2(4-4q)+p(3q^2-4)-3q^2-6q+1}))$ y $(p \leq \frac{3}{4}$ o $(p > \frac{3}{4}$ y $\frac{3+2p^2-\sqrt{9-9p+33p^2-12p^3+4p^4}}{3(p-1)}))$.

Haciendo un análisis análogo obtenemos las mejores respuestas de $P_1$, y así los equilibrios de Nash son:

- $(S_D, S_D)$ para cualesquiera $\delta, p, q \in (0,1)$, es decir, siempre.

- $(S_D, S_A)$, $(S_A, S_D)$ o $(S_A, S_A)$ si

$$\begin{cases} p < \frac{5}{11} & \text{y} \quad \delta < \frac{3p}{5+p} \\ p \geq \frac{5}{11} & \text{y} \quad \delta < \frac{1}{4} \end{cases}$$

  o

$$\begin{cases} p < \frac{1}{23} & \text{y} \quad \delta < \frac{1+6p}{5+p} \\ p \geq \frac{1}{23} & \text{y} \quad \delta < \frac{1}{4} \end{cases}$$

- $(S_G, S_G)$ si $\delta \geq \frac{-2+2q}{-4+5q-q^2}$.

- $(S_G, S_T)$, $(S_T, S_G)$ y $(S_T, S_T)$ si $\delta \geq \frac{2}{3}$.

- $(S_G, S_P)$ y $(S_P, S_G)$ si $p\delta^2 + (2-2p)\delta + 2p - 3 \leq 0$ y $-2 - 2q + (6q + 3q^2 - 3q^2p + 4p^2q + 3p - 4p^2)\delta \leq 0$.

- $(S_T, S_A)$ y $(S_A, S_T)$ si $\frac{1}{4} \leq \delta \leq \frac{2}{3}$, $-2q + (1 + 3q - q^2)\delta + (-4 + 5q - q^2)\delta^2$, $1 - q + (-4 + 3q - q^2)\delta + (4q - q^2)\delta^2$ y $-3p + (3p - 5) + (5 + p)\delta^2$.

- $(S_T, S_P)$ y $(S_P, S_T)$ si $p \geq \frac{1}{4}$, $\delta \geq \frac{2}{3}$, $\frac{1}{2-2p}$, $3 + 2p + (2 - 2p)\delta + p\delta^2 \leq 0$ y $-2 - 2q + (6q + 3q^2 - 3q^2p + 4p^2q + 3p - 4p^2)\delta \leq 0$.

- $(S_A, S_T)$ y $(S_T, S_A)$ si $\frac{1}{4} \leq \delta \leq \frac{2}{3}$, $1 - q + (-4 + 3q - q^2)\delta + (4q - q^2)\delta^2 \leq 0$, $-3p + (3p - 5)\delta + (5 + p)\delta^2$ y $-2q + (1 + 3q - q^2)\delta + (-4 + 5q - q^2)\delta^2$.

- $(S_P, S_A)$ y $(S_A, S_P)$ para $p < \frac{5}{11}$ y $\delta > \frac{x}{y}$ y ($\delta > \frac{-b_2-\sqrt{b_2^2-4a_2c_2}}{2a_2}$ o $\delta > \frac{-b_2+\sqrt{b_2^2-4a_2c_2}}{2a_2}$),
  donde:
  $x = 1-3p+3q-q^2+\sqrt{21+58p+21p^2-30q-70pq+27q^2+18pq^2-10q^3+q^4}$,
  $y = 2(5+p-4q+q^2)$,
  $a_2 = -6q-3q^2+3q^2p-2p+4p^2$,
  $b_2 = 4-4q-3q^2+3q^2p-5p+4p^2$,
  $c_2 = 2p+2q-1$.

#### 2.3.2.1. Ejemplos

En los siguientes ejemplos se hallan los equilibrios de Nash para $p, \delta$ y $q$ dados.

**Ejemplo 7.** Sean $p = \frac{4}{11}$, $\delta = \frac{12}{59}$ y $q = \frac{3}{4}$. La forma normal del juego es:

$P_2$

$P_1$

| | $S_D$ | $S_C$ | $S_G$ | $S_T$ | $S_A$ | $S_Q$ | $S_P$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_D$ | $1,1$ | $5,0$ | $\frac{247}{59},\frac{12}{59}$ | $\frac{247}{59},\frac{12}{59}$ | $1,1$ | $4,\frac{1}{4}$ | $\frac{2909}{649},\frac{84}{649}$ |
| $S_C$ | $0,5$ | $3,3$ | $3,3$ | $3,3$ | $\frac{36}{59},\frac{271}{59}$ | $\frac{9}{4},\frac{7}{2}$ | $3,3$ |
| $S_G$ | $\frac{12}{59},\frac{247}{59}$ | $3,3$ | $3,3$ | $3,3$ | $\frac{2964}{348},\frac{14009}{3481}$ | $\frac{138}{59},\frac{787}{236}$ | $3,3$ |
| $S_T$ | $\frac{12}{59},\frac{247}{59}$ | $3,3$ | $3,3$ | $3,3$ | $\frac{60}{71},\frac{295}{71}$ | $\frac{138}{59},\frac{787}{1236}$ | $3,3$ |
| $S_A$ | $1,1$ | $\frac{271}{59},\frac{36}{59}$ | $\frac{14009}{3481},\frac{2964}{3481}$ | $\frac{295}{71},\frac{60}{71}$ | $1,1$ | $\frac{881}{236},\frac{44}{59}$ | $\frac{61700}{46079},\frac{-420}{781}$ |
| $S_Q$ | $\frac{1}{4},4$ | $\frac{7}{2},\frac{9}{4}$ | $\frac{787}{236},\frac{138}{59}$ | $\frac{787}{236},\frac{138}{59}$ | $\frac{44}{59},\frac{881}{236}$ | $\frac{-29}{16},\frac{-29}{16}$ | $\frac{23663}{28556},\frac{1407}{1649}$ |
| $S_P$ | $\frac{89}{649},\frac{2909}{649}$ | $3,3$ | $3,3$ | $3,3$ | $\frac{-420}{781},\frac{61700}{46079}$ | $\frac{1407}{649},\frac{23663}{28556}$ | $3,3$ |

Así los equilibrios de Nash son: $(S_D, S_D)$, $(S_A, S_D)$, $(S_D, S_A)$ y $(S_A, S_A)$.

**Ejemplo 8.** Sean $p = \frac{4}{11}$, $\delta = 0.76$ y $q = 0.32$. La forma normal del juego es:

$P_2$

$P_1$

| | $S_D$ | $S_C$ | $S_G$ | $S_T$ | $S_A$ | $S_Q$ | $S_P$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_D$ | $1,1$ | $5,0$ | $1.96,0.76$ | $1.96,0.76$ | $1,1$ | $2.28,0.68$ | $2.78909,0.552727$ |
| $S_C$ | $0,5$ | $3,3$ | $3,3$ | $3,3$ | $2.28,3.48$ | $0.96,4.36$ | $3,3$ |
| $S_G$ | $0.76,1.96$ | $3,3$ | $3,3$ | $3,3$ | $1.4896,1.7776$ | $1.64218,2.45818$ | $3,3$ |
| $S_T$ | $0.76,1.96$ | $3,3$ | $3,3$ | $3,3$ | $2.15909,2.84091$ | $1.64218,2.45818$ | $3,3$ |
| $S_A$ | $1,1$ | $3.48,2.28$ | $1.776,1.4896$ | $2.84091,2.15909$ | $1,1$ | $1.95898,1.57498$ | $2.32298,1.61884$ |
| $S_Q$ | $0.68,2.28$ | $4.36,0.96$ | $2.45818,1.64218$ | $2.45818,1.64218$ | $1.57498,1.95898$ | $-0.0624,-0.0624$ | $2.45706,0.83972$ |
| $S_P$ | $0.552727,2.78909$ | $3,3$ | $3,3$ | $3,3$ | $1.61884,2.32298$ | $0.839727,2.45706$ | $3,3$ |

Así los equilibrios de Nash son: $(S_D, S_D)$, $(S_D, S_A)$, $(S_G, S_G)$, $(S_G, S_T)$, $(S_G, S_P)$, $(S_T, S_G)$, $(S_T, S_T)$, $(S_T, S_P)$, $(S_P, S_G)$, $(S_P, S_T)$ y $(S_P, S_P)$.

**Ejemplo 9.** Sean $p = \frac{4}{11}$, $\delta = \frac{12}{59}$ y $q = \frac{3}{4}$. La forma normal del juego es:

$P_2$

| | | $S_D$ | $S_C$ | $S_G$ | $S_T$ | $S_A$ | $S_Q$ | $S_P$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | $S_D$ | $1, 1$ | $5, 0$ | $4, \frac{1}{4}$ | $4, \frac{1}{4}$ | $1, 1$ | $3, \frac{1}{2}$ | $\frac{41}{10}, \frac{9}{40}$ |
| | $S_C$ | $0, 5$ | $3, 3$ | $3, 3$ | $3, 3$ | $\frac{3}{4}, \frac{9}{2}$ | $\frac{3}{2}, 4$ | $3, 3$ |
| | $S_G$ | $\frac{1}{4}, 4$ | $3, 3$ | $3, 3$ | $3, 3$ | $1, \frac{61}{16}$ | $\frac{27}{16}, \frac{57}{16}$ | $3, 3$ |
| | $S_T$ | $\frac{1}{4}, 4$ | $3, 3$ | $3, 3$ | $3, 3$ | $1, 4$ | $\frac{27}{16}, \frac{57}{16}$ | $3, 3$ |
| | $S_A$ | $1, 1$ | $\frac{9}{2}, \frac{3}{4}$ | $\frac{61}{16}, 1$ | $4, 1$ | $1, 1$ | $\frac{45}{16}, \frac{15}{16}$ | $\frac{9}{8}, \frac{3}{40}$ |
| | $S_Q$ | $\frac{1}{2}, 3$ | $4, \frac{3}{2}$ | $\frac{57}{16}, \frac{27}{16}$ | $\frac{57}{16}, \frac{27}{16}$ | $\frac{15}{16}, \frac{45}{16}$ | $\frac{-3}{4}, \frac{-3}{4}$ | $\frac{791}{800}, \frac{57}{40}$ |
| | $S_P$ | $\frac{9}{40}, \frac{41}{10}$ | $3, 3$ | $3, 3$ | $3, 3$ | $\frac{3}{40}, \frac{9}{8}$ | $\frac{57}{40}, \frac{791}{800}$ | $3, 3$ |

Así los equilibrios de Nash son: $(S_D, S_D)$, $(S_D, S_A)$, $(S_T, S_A)$, $(S_A, S_D)$, $(S_A, S_T)$ y $(S_A, S_A)$

## 2.4. Conclusiones

En el DPI, no siempre es correcto decir que una estrategia es la mejor, por ejemplo si consideramos una población donde todos desertan siempre excepto un único individuo que sigue la estrategia "Tit-For-Tat", $S_T$ en nuestro análisis, tendrá una pequeña desventaja porque pierde en la primer etapa.

Sin embargo, hemos observado en el análisis que se hizo para hallar los equilibrios de Nash con un conjunto de estrategias $S = \{S_D, S_C, S_G, S_T, S_A, S_Q, S_P\}$ y con los ejemplos para $p, \delta$ y $q$ dados, que $S_T$ es un buena estrategia y mejor aún, resulta ser parte de los equilibrios de Nash.

# Capítulo 3

# Aplicaciones

Este Capítulo se encuentra dividido en tres secciones, en la primera se presentan algunas aplicaciones de la Teoría de juegos en áreas como biología, política, docencia, entre otras. Mostramos además algunas aplicaciones del Dilema del Prisionero, que serán abordadas en la segunda sección, donde se analizan los resultados de cada juego.

Y finalmente el torneo de Axelrod, un interesante torneo sobre el Dilema del Prisionero Iterado, donde se muestran algunas estrategias más que las presentadas en el Capítulo 2, las cuales fueron diseñadas para participar en dicho torneo.

## 3.1. Aplicaciones en la Teoría de Juegos

Las aplicaciones de la Teoría de juegos son muchas y en distintos campos como la economía, la política, la biología, la filosofía, la informática, el campo militar, etc. A continuación se mencionan algunas de ellas.

Inicialmente se utilizó la Teoría de Juegos en biología para explicar la evolución de las proporciones de los sexos. También se ha utilizado para analizar la evolución de la comunicación de los animales. Pero es con el problema halcón-paloma, utilizado para estudiar la conducta entre individuos “agresivos” (halcones) e individuos “prudentes” (palomas), que se ha demostrado lo difícil que es la evolución del comportamiento cooperativo.

En economía la Teoría de Juegos ha sido utilizada para analizar distintos problemas económicos como oligopolios, duopolios, subastas, la divisón equitativa de propiedades y herencias. También sirve para comprender la negociación entre empresas y sindicatos.

Además podemos encontrar aplicaciones en la política, en donde se ha utilizado para explicar la teoría de la paz democrática, en informática para el modelado de programas que interactúan entre sí, en sociología con el estudio de los problemas que aparecen en la toma de decisiones, en estrategías militares se ha utilizado para esudiar conflictos de interés, en epidemiología en donde ayuda en relación a operaciones de inmunización y métodos de prueba de vacunas y otros medicamentos.

## 3.2. Aplicaciones del Dilema del Prisionero Iterado

En esta sección se desarrollan algunos ejemplos donde encontramos situaciones similares a las estudiadas en el dilema del prisionero y analizaremos las posibles opciones y resultados del juego.

### 3.2.1. Economía

Los resultados de una empresa dependen de las decisiones de las empresas competidoras y no solamente de su decisión.

Supongamos que dos empresas A y B forman un duopolio en el sector textil. En la época de las rebajas, ambas empresas normalmente invierten grandes cantidades en publicidad. Esta inversión es tan alta que suele implicar la pérdida de todo el beneficio obtenido con las rebajas. Dado que solo hay dos empresas, estas se ponen de acuerdo y deciden no invertir en publicidad para obtener todo el beneficio que generen las ventas. Sin embargo, si una de las dos empresas rompe el acuerdo y lanza una campaña publicitaria en el último momento, conseguirá atraer a todos los consumidores, por lo que sus beneficios serán mucho mayores, mientras que la empresa competidora perderá dinero. La forma normal de este juego se muestra en la Tabla 3.1.

| | | Empresa B | |
|---|---|---|---|
| | | Invierte | No invierte |
| Empresa A | Invierte | Nadie obtiene ganancias mayores | A obtiene mayores ganancias |
| | No invierte | B obtiene mayores ganancias | Ambos obtienen mayores ganancias |

TABLA 3.1: Forma normal de invertir en publicidad.

Si una de las empresas, por ejemplo la empresa A, piensa que B va a invertir en la publicidad, ella también debería invertir ya que de esta forma no obtiene beneficios pero tampoco pérdidas. Si piensa que B cumplirá con el acuerdo, A piensa que también debería cumplir con el acuerdo, ya que de esta manera obtendrán beneficios muy altos. Sea cual sea la estrategia de la empresa B, lo que más le conviene a la empresa A es traicionar el acuerdo. Además de que esta conclusión será la misma a la que llegue B. Por lo tanto, ambas empresan romperán con el acuerdo y obtendrán resultados peores que si hubieran mantenido el acuerdo.

### 3.2.2. Docencia

Al inicio de un curso se les propone a los alumnos un método de evaluación distinto al clásico de realizar un examen final al terminar el curso. Los alumnos obtienen un beneficio al no tener que hacer este examen, ya que al finalizar los cursos suelen tener muchos exámenes y poco tiempo para estudiar.

Este método consiste en una evaluación continua mediante la realización y entrega de ejercicios en grupos. Si la mayoría de los ejercicios están bien, no habrá examen final. Pero si los alumnos no se esfuerzan y los ejercicios no son buenos tendrán que hacer un examen final del curso.

Se considera que los alumnos han trabajado cuando a lo largo del curso, la media de los alumnos que han realizado bien los ejercicios es superior o igual al 80 %. La forma tabular de este problema se representa en la Tabla 3.2.

| | 80 % se esfuerza | 80 % no se esfuerza |
|---|---|---|
| 20 % se esfuerza | Nadie hace el examen final, todos trabajaron | Todos tienen que hacer el examen final, la minoría trabajó |
| 20 % no se esfuerza | Nadie hace el examen final, la mayoría trabajó | Todos tienen que hacer el examen final, nadie trabajó |

Tabla 3.2: Forma normal del Prisionero en la Docencia.

Normalmente los alumnos intentarán aprobar la asignatura realizando el mínimo esfuerzo y pensarán que el resto de compañeros sí se esforzará para librarse del examen, beneficiándose de ello. El problema es que no se sabe si el resto se esforzará o todos pensarán lo mismo.

Consideremos un grupo de alumnos, grupo A, este grupo de alumnos puede pensar que todos los demás grupos se esforzarán para no hacer el examen final, entonces para el grupo A la opción óptima sería no trabajar, ya que serían los únicos que no entregarían buenos ejercicios pero como todos los demás están bien entonces se librarían del examen final y aprobarían fácilmente. Si el grupo A piensa que el resto no se va a esforzar, lo mejor para ellos sería no trabajar, ya que de cualquier manera tendrían que hacer el examen final pero por lo menos no trabajarán durante el curso.

Así para todos los grupos el no esforzarse es una estrategía dominante. El problema es que esta estrategia no lleva a un resultado óptimo ya que ninguno se esfuerza, no habrán trabajado durante el curso pero tendrán que hacer un examen final.

### 3.2.3. Bienes Comunes

En un pequeño pueblo en el que se vive de forma mayoritaria de la ganadería, cada familia posee su propio ganado, pero los pastos en los que se alimentan los animales son un bien común. Cada una de estas familias puede optar por dos estrategias, cuidar los pastos o no cuidarlos. La forma normal de este juego se muestra en la tabla 3.3

Resto de familias

| | | cuidarlos | no cuídarlos |
|---|---|---|---|
| Mi familia | cuidarlos | todos trabajan | sólo mi familia trabaja |
| | no cuídarlos | el resto trabaja | nadie trabaja |

Tabla 3.3: Forma normal del cuidado de los pastos respecto al trabajo realizado.

Las ganancias de todos aumentan al no cuidar los pastos ya que nadie trabaja y todos se ven beneficiados de los pastos, aunque esto pueda implicar que en un periodo de tiempo ya no tengan pastura para su ganado.

Esto ocurre habitualmente cuando se habla de recursos comunes como transporte público, parques infantiles, pago de impuestos, explotación de aguas comunitarias para la pesca, etc.

Por lo tanto, su estrategia preferida será no cuidar los pastos esperando que los demás sí.

### 3.2.4. Deporte

Supongamos el caso de dos ciclistas que se encuentran alejados del pelotón. El problema de ir alejados es que, al estar en una posición delantera, no pueden refugiarse del viento. Normalmente ambos ciclistas compartirán la pesada carga de esta posición. Si ninguno de ellos hace un esfuerzo por permanecer adelante, el pelotón los alcanzará rápidamente, perdiendo ambos la posibilidad de obtener ventaja en la carrera. Si uno de los ciclistas hace todo el trabajo y mantiene a ambos alejados del pelotón, posiblemente esto llevará a una victoria del segundo ciclista que ha tenido una carrera fácil gracias al otro ciclista. Si ambos ciclistas realizan un esfuerzo por permanecer adelante, ambos se cansarán. En este caso es posible que uno de ellos gane la carrera o simplemente que ambos estén muy cansados y sean alcanzados por el resto del pelotón.

Esto ocurre a menudo en las carreras ciclistas, en las que corredores de un mismo equipo se sacrifican en beneficio del equipo, ya que uno de los ciclistas hace el esfuerzo para que otro corredor con mayores posibilidades gane la carrera. La forma normal se muestra en la Tabla 3.4.

| | | Ciclista A | |
| --- | --- | --- | --- |
| | | No hace esfuerzo | Hace el esfuerzo |
| Ciclista B | No hace el esfuerzo | Ambos son alcanzados por el pelotón | B puede ganar la carrera |
| | Hace el esfuerzo | A puede ganar la carrera | Ambos se cansarán |

Tabla 3.4: Forma normal de los ciclistas.

Si los ciclistas actúan buscado su propio beneficio, el resultado será peor, ya que de esta forma no obtendrán ventaja. La estrategía óptima sería buscar el beneficio del grupo.

### 3.2.5. Ciencias Políticas

Encontramos el dilema del prisionero cuando tenemos dos estados involucrados en una carrera de armas. Las opciones de ambos estados son: incrementar el gasto militar en armas para estar preparados para un conflicto, disponiendo en este caso de menos presupuesto para otras cosas, o llegar a un acuerdo con el otro estado para reducir el armamento y poder invertir ambos más dinero en investigación u otras cosas.

Si llegan a un acuerdo para reducir las armas ninguno de los dos estará seguro de que el otro cumplirá el trato, por lo tanto ambos estados comprarán más armas para estar preparados en caso de tener que enfrentarse a un conflicto. La forma normal del juego se muestra en la Tabla 3.5.

Estado A

| | | Reduce su armamento | Compra más armas |
|---|---|---|---|
| Estado B | Reduce su armamento | Ambos pueden dedicar el dinero a otras cosas | A esta más preparado en caso de un conflicto |
| | Compra más armas | B esta más preparado en caso de un conflicto | Ambos malgastan el dinero en armas |

TABLA 3.5: Forma normal de compra de armas

El resultado óptimo se obtiene cuando se busca el beneficio del grupo y no el beneficio particular. Sin embargo, en esta situación es difícil que se consiga la cooperación entre los estados.

## 3.3. El Torneo sobre el DPI

En los 80ś Axelrod invitó a colegas académicos de todo el mundo para idear estrategias automatizadas para competir en un torneo de DPI. Los programas que participaron variaban ampliamente en la complejidad del algoritmo, hostilidad inicial y capacidad de perdón.

Se realizaron dos torneos, ambos de 200 jugadas, el primero contó con 14 participantes (programas) y el segundo con 72.

Se descubrió que la mejor estrategia determinista era “Tit-For-Tat”, que fue desarrollada y presentada en el torneo por Anatol Rapoport. Era el más simple de todos los programas presentados, conteniendo únicamente cuatro líneas de BASIC, y que fue el que ganó el concurso.

Axelrod concluyó que cuando se repiten estos encuentros durante un largo periodo de tiempo con muchos jugadores, cada uno con distintas estrategias, las estrategias “egoístas” tendían a ser peores, mientras que las estrategias “altruistas” eran mejores, juzgándolas únicamente con respecto al interés propio. Usó esto para mostrar un posible mecanismo que explicase lo que antes había sido un difícil punto en la teoría de la evolución: ¿Cómo puede evolucionar un comportamiento altruista desde mecanismos puramente egoístas en la selección natural?

Una estrategia ligeramente mejor es “Tit-For-Tat con capacidad de perdón”. Cuando $P_2$ deserta, en la siguiente etapa $P_1$ coopera con una pequeña probabilidad (del 1 % al 5 %). Es la mejor estrategia cuando se introducen problemas de comunicación en el juego.

Algunas estrategias más que fueron utilizadas en las simulaciones, además de algunas que se expusieron en los capítulos anteriores, son:

- Spiteful. Inicia cooperando y sigue cooperando hasta que el otro no lo hace, una vez que el otro jugador no coopera este siempre deserta.
- Soft majo. Juega el movimiento que ha jugado el mayor número de veces el otro jugador, si es igual entonces coopera. El primer movimiento es considerado dentro de la igualdad.
- Per DDC. Juega periódicamente (deserta, deserta, coopera).
- Per CCD. Juega periódicamente (coopera, coopera, deserta).
- Per CD. Juega periódicamente (coopera, deserta).
- Pavlov. Coopera si y solo si ambos jugadores eligieron la misma opción en la etapa anterior.
- TF2T. Coopera excepto si el otro jugador ha desertado dos veces consecutivas.
- Hard TFT. Coopera excepto si el otro jugador ha desertado una vez en las dos etapas anteriores.
- Slow TFT. Juega cooperar, cooperar y si el otro jugador elige dos veces el mismo movimiento entonces el primero juega su movimiento.
- Hard majo. Juega el movimiento que ha jugado el mayor número de veces el otro jugador, si es igual entonces deserta. El primer movimiento es considerado dentro de la igualdad.

Otro dato importante que ocurrió en el vigésimo aniversario del Torneo del DPI (2004), el equipo de la Universidad de Southampon ganó las primeras posiciones, venciendo entre los demás competidores a algoritmos del tipo "Tit-For-Tat" y sus derivados. La competencia era de la variante del DPI con problemas de comunicación. Se presentaron 223 competidores de los cuales 60 fueron inscritos por la Universidad de Southampon. Todos eran variantes de un mismo algoritmo, y en las primeras 5 a 10 iteraciones del DPI utilizaban sus respuestas como "saludo secreto" para identificarse entre sí. De esta manera identificaban a un jugador del grupo o sociedad y algunas estrategias estaban diseñadas para sacrificarse cooperando siempre, de manera que los otros, desertando siempre, pudiesen conseguir una puntuación alta. Si no identificaban al otro jugador como perteneciente al grupo, todas las variantes desertaban para siempre.

Esta estrategia se ajusta a las reglas de la competencia y es así como Southampon consiguió que tres de sus participantes ocuparan las tres primeras posiciones, a costa de que muchos de sus otros algoritmos quedaran entre los de peor puntuación.

# Capítulo 4

# Conclusiones

El Dilema del Prisionero Iterado es un juego ya estudiado en diversas áreas de investigación, sin embargo nos encontramos en [12], con la pregunta de ¿qué pasaría si el dilema se repitiera un número infinito de veces? Lo primero que había que hacer es definir las estrategias con las que se jugaría, algunas estrategias conocidas eran $S_D$, $S_C$, la famosa $S_T$ o "Tit-For-Tat", $S_A$ y $S_G$. Pero para hallar los equilibrios de Nash se introdujo $\delta$, idea que se presenta en [12, pág 122], un factor de descuento que nos permitió decidir cual es la mejor solución.

Para iniciar con el análisis de este juego, se tomó como conjunto de estrategias para ambos jugadores a $S = \{S_D, S_C, S_G, S_T, S_A\}$, calculamos las ganancias para cada jugador, se representó en su forma normal y para finalizar con esta parte se hallaron los equilibrios de Nash. Después se tomaron dos estrategias más que fueron inspiradas por el torneo de este dilema, $S_P$ y $S_Q$, con estas estrategias se buscaban valores de $p$ y $q$ tales que fueran mejores estrategias que $S_T$, sin embargo gracias al torneo de Axelrod ya se esperaba que $S_T$ y $S_A$ fueran equilibrios de Nash, la diferencia era que se jugaba con un factor de descuento.

Así se procedió a hallar las ganancias de cada jugador ahora para el conjunto de estrategias $S = \{S_D, S_C, S_G, S_T, S_A, S_Q, S_P\}$, se representó el juego en su forma normal y finalmente se hallaron los equilibrios de Nash.

Con las condiciones que se dan para los equilibrios pareciera que es muy dificíl hallar los valores de $\delta$, $p$ y $q$ que cumplan con éstas, sin embargo en los ejemplos vemos que es posible hallarlos.

La importancia de hacer este tipo de análisis recae en sus aplicaciones, ya que el factor de descuento podría representar un factor de producción, abiotico, de sobrepoblación, eficiencia, rendimiento, productividad, etc. Dependiendo del área en la que se trabaje.

# Bibliografía

[1] 0126tucker.html. (2016) *Princeton.edu.* Revisado el 23 de junio de 2016, de https://goo.gl/3XEM9J

[2] Axelrod Tournament Demo Home Page. (2016) *Www2.econ.iastate.edu*, revisado el 23 de junio de 2016, de http://goo.gl/hy4psV

[3] Axelrod Robert (1981). *The Evolution of Cooperation.* New York: Basic Books, Publisher.

[4] Beaufils, B., Delahaye, J. y Mathieu, P. (1n.d.). *Our Meeting With Gradual: A Good Strategy For The Iterated Prisioners Dilemma.* Revisado el 23 de junio de 2016, de http://goo.gl/A82Jdh

[5] Diccionario Crítico de Ciencias Sociales. Dilema del prisionero (2016) *Pendientedemigracion.ucm.es.* Revisado el 23 de junio de 2016, de http://goo.gl/IGqw1u

[6] Dresher Melvin (1961). *Games of Strategy Theory and Applications.* United States of America: Prentice-Hall, Inc.

[7] Dresher Melvin (1981). *The Mathematics of Games of Strategy Theory and Applications.* New York: Dover Publications, Inc.

[8] El Dilema del Prisionero: Cooperacion - Vìdeo Dailymotion (2016) *Dailymotion.* Revisado el 23 de junio de 2016, de http://goo.gl/9vMUNL

[9] El Dilema del Prisionero y la Gestion de Proyectos (2016) *Slideshare.net.* Revisado el 23 de junio de 2016, de http://goo.gl/D05w0J

[10] E. N. Barron (2008). *Game Theory An Introduction.* United States of America: Wiley-Intercience.

[11] Es.wikipedia.org (2016). *Oskar Morgenstern.* Revisado el 24 de junio de 2016, de https://goo.gl/C4ECS1

[12] James N. Web (2007). *Game Theory, Decisions, Interaction and Evolution.* London: Springer-Verlag.

[13] Kuhn, S. (1991) Prisoner's Dilemma. *Plato.stanford.edu* Revisado el 23 de junio de 2016, de http://goo.gl/PZWqrj

[14] Owen Guillermo (1982). *Game Theory.* New York: Academic Press, Inc.

[15] Prisoner's Dilemma. (2016) *Prisoners-dilema.com.* Revisado el 23 de junio de 2016, de http://goo.gl/BmxHY9

[16] Results, 2. (2014) iterated prisoner's dilemma tournament- Less Wrong. *Lesswrong.com.* Revisado el 23 de junio de 2016, de http://goo.gl/KZR546

[17] Ugr.es (2016) *John von Neumann.* Revisado el 24 de junio de 2016, de http://goo.gl/AoocC8

[18] Véntsel E. S. (1977). *Elementos de la Teoría de los Juegos.* Moscú: Mir.