BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

ACTIVIDADES EN GEOGEBRA PARA LÍMITES AL INFINITO BASADAS EN LAS TEORÍAS APOE Y DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

TESIS PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA

CARMEN MORALES LUIS

DIRECTORA DE TESIS

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR

PUEBLA, PUE. JUNIO, 2022

RESUMEN

En este trabajo se propone una secuencia de actividades diseñadas en el software GeoGebra, con las que se busca favorecer el aprendizaje y comprensión del concepto límite al infinito.

Las actividades se sustentan en las teorías APOE y de Registros de Representación Semiótica, además de considerar resultados, dificultades reportadas y aportaciones de investigaciones referentes al límite de una función. En esta secuencia se destaca la importancia de la construcción de la noción de infinito potencial e infinito actual, ya que ambos juegan un papel fundamental en la comprensión de límites al infinito.

También se reporta el efecto de la secuencia de actividades cuando se aplicó a un grupo de alumnos de licenciatura de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Los resultados obtenidos permitieron evaluar las estructuras mentales y las transformaciones semióticas que los alumnos manifestaron al dar respuesta a las preguntas que forman parte de las actividades.

ÍNDICE

DEDICATORIA

Dedico esta tesis a mi madre, que con mucho esfuerzo me ha sacado adelante, a mi tío quien ha fungido como un padre, a mi tía quien es como una segunda madre y a mi abuelita, el soporte de todos nosotros.

Jamás habría estudiado esta carrera ni realizado este trabajo, sin ustedes.

INTRODUCCIÓN

La situación crítica de pandemia por la que la sociedad ha pasado en el transcurso de los últimos dos años, ha obligado a todos a adaptarse a nuevas formas de convivencia, trabajo y educación. En este último aspecto, la educación ha pasado de la forma convencional a la adaptación de la modalidad en línea para todos los niveles, implicando así un reto tanto para los alumnos como para los maestros. Esta situación permitió entrever la dificultad existente por parte de los maestros para adaptarse a la tecnología, a nuevos métodos e incorporar herramientas con la finalidad de mejorar la calidad de aprendizaje en sus alumnos; así como también, permitió observar las dificultades de los alumnos con respecto a su forma de aprender. Las dificultades de aprendizaje se encuentran presentes en todos los niveles, incluso en estudiantes de licenciatura y es necesario tratarlas adecuadamente. En particular, en los temas de Cálculo, como el límite de una función, se han reportado diversas dificultades por autores como Monaghan (1982), Cornu (1983, 1991) y Tall (1992). Esto fue lo que motivó la elección del tema "límites al infinito" y la creación de una secuencia de actividades con uso de tecnología que propicien una mejor comprensión.

Las actividades se sustentan en la teoría APOE y la teoría de Registros de Representación Semiótica y fueron elaboradas en el software GeoGebra. Para su diseño también se consideraron aspectos históricos, análisis, estudios y resultados de investigaciones que se presentan en el capítulo 1 de Antecedentes.

El objetivo de este trabajo es diseñar una secuencia de actividades que favorezca la comprensión del concepto límite al infinito, así como evaluarlas a través de las teorías APOE y de Registros de Representación Semiótica.

El uso de este tipo de herramientas digitales no es exclusivo de la situación de pandemia. En las escuelas siempre se ha recomendado incluir medios tecnológicos para favorecer el aprendizaje de los alumnos, debido a que el uso de este tipo de herramientas ayuda a los alumnos a desarrollar el pensamiento matemático y crítico, habilidades y capacidades, esto mencionado por Tall (1992), así como Inzunsa (2014) y Jiménez (2017) quienes se refirieron al uso de herramientas digitales como GeoGebra. Además de que permite a los docentes el desarrollo e implementación de nuevos métodos de enseñanza.

La importancia de la concepción del infinito potencial e infinito actual frente al tema de límites al infinito es muy alta. Esto se explica en el capítulo 1 de antecedentes y capítulo 2, en donde se abordan las teorías en las que se fundamentan las actividades.

La secuencia de actividades se presenta en el capítulo 3. Dicha secuencia está conformada por tres actividades, teniendo cada una un nivel de dificultad diferente. Las actividades están conformadas por tablas de valores, applets manipulables y preguntas. La metodología utilizada es de tipo cualitativo. La técnica utilizada para la recolección de información consistió en la aplicación de la secuencia de actividades en un libro de GeoGebra y a través de una sesión en Classroom de la misma plataforma. Cada actividad cuenta con una serie de preguntas con las que se busca que el alumno evidencie el tratamiento que da a los registros de representación involucrados en las actividades, y a su vez, que las respuestas muestren tanto el proceso mental realizado, como también dificultades en la construcción del proceso infinito y encapsulación del objeto infinito actual.

En el capítulo 4 se presentan los resultados, su análisis y mejoras de las actividades derivadas de su aplicación a un grupo de alumnos de licenciatura perteneciente a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Finalmente, se presentan las conclusiones de este trabajo.

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 ANTECEDENTES

1.1.1 EVOLUCIÓN HISTÓRICA DEL CONCEPTO DE LÍMITE

Los orígenes del concepto de límite se remontan a la antigua Grecia (Boyer, 1999); cuando Eudoxo empleó el método de exhaución para calcular el área de figuras planas. Según Arquímedes, Eudoxo enunció el lema que ahora es conocido como el lema de Arquímedes, el cual afirma que si se tienen dos magnitudes que tengan una razón, entonces se puede encontrar un múltiplo de cualquiera de ellas que exceda a la otra. Dicha propiedad no incluía a los infinitésimos: segmentos indivisibles de cantidad constante. Los infinitésimos parecen estar presentes en los trabajos de Demócrito, aunque él afirmaba que todos los fenómenos había que explicarlos en términos de átomos infinitamente pequeños e infinitamente variados tanto en forma como en tamaño.

Con el pasar del tiempo, hacia la primera mitad del siglo XVIII, el concepto de límite aún no existía, así como tampoco se había establecido formalmente el concepto de función; todo fue establecido de manera intuitiva e implícita. Más aún, se pensaba que estos dos conceptos funcionaban de forma separada. Para 1704, Isaac Newton (1648-1727) en su obra *Tractatus Quadratura Curvarum* explicó el método de las razones primeras y últimas, y expuso una idea de límite un tanto metafísica, utilizando expresiones imprecisas como "desvanecerse". Fue en su obra *Principia Mathematica* en donde Newton aclaró el concepto de límite:

> Cantidades, y la razón de cantidades, que en cualquier intervalo finito de tiempo convergen continuamente a la igualdad, y que antes del final de dicho tiempo se aproximan una a la otra más que cualquier diferencia dada, se hacen finalmente iguales. (Espíritu y Navarro, 2014, p. 32)

Por otra parte, Leibniz (1646-1716), a través de su teoría sobre los Diferenciales, se dio cuenta de que la pendiente de la tangente de una curva depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y de las abscisas, cuando estas diferencias se hacen infinitamente pequeñas. En esta época, los matemáticos solían trabajar los problemas de manera geométrica, por lo que el concepto de límite se concibió de esta manera (op. Cit., p. 32).

En la segunda mitad del siglo XVIII, los matemáticos necesitaban una idea clara del concepto de función, pero aún no se daban cuenta de la necesidad del concepto de límite. Euler (1707-1783) estudió los procesos infinitos, introdujo la función continua como sumas, productos y composiciones de funciones elementales. Euler consideraba a las cantidades infinitamente grandes como inversas de las infinitamente pequeñas, lo cual fue desechado cuando D'Alembert (1717-1783) dio su definición de límite; ya que, a partir de ese momento, lo infinitamente grande se expresaría en términos de límites. Fue así como D'Alembert creó la teoría de límites y en el tomo IX de *Encyclopédie* establece la siguiente definición de límite:

> Se dice que una cantidad es el límite de otra cantidad, cuando la segunda puede aproximarse a la primera más que cualquier cantidad dada por pequeña que se la pueda suponer, sin que,

> no obstante, la cantidad que se aproxima pueda jamás sobrepasar a la cantidad a la que se aproxima; de manera que la diferencia entre una tal cantidad y su límite sea absolutamente inasignable. (Espíritu y Navarro, 2014, p. 33)

Tiempo después, Lagrange (1736-1823) trabajó en el desarrollo de funciones en series de potencia, creyendo que podía evitar el uso de límites; de esta manera, continuó haciendo desarrollos en serie de potencias sin darse cuenta de que la convergencia de las mismas necesitaba del concepto de límite (op. Cit., p. 33).

Hacia finales del siglo XVIII y comienzos del siglo XIX, ya se requería construir aún más la teoría de límites. Cauchy (1789-1857) retomó el concepto de límite de D'Alembert, dándole un carácter más aritmético, pero impreciso:

> …, cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás. (Boyer, 1999, p. 647).

La intención de Cauchy fue dar más precisión a la definición de límite, esto a través de la imposición de un carácter aritmético prescindiendo de la geometría, de los infinitésimos y de las velocidades de cambio. Según Boyer (op. Cit., p. 647), Cauchy hizo uso de expresiones tales como "valores sucesivos", "aproximarse indefinidamente" o "tan pequeño como uno quiera".

Sin embargo, Weierstrass (1815-1897) y Heine, dan una definición satisfactoria del concepto de límite, la cual es una definición métrica, puramente estática: "Si, dado cualquier ε , existe un n_0 , tal que para $0 < n < n_0$, la diferencia $f(x_0 \pm n) - L$ es menor en valor absoluto que ε ,entonces se dice que L es el límite de f(x) para $x = x_0$" (Ferrante, 2009, citado por Espíritu y Navarro, 2014, p. 33).

Para esta etapa, el concepto de límite ya era parte fundamental de las matemáticas y sirvió de soporte para otros conceptos como la continuidad, derivada e integral.

1.1.2 DESARROLLO HISTÓRICO DEL INFINITO: INFINITO POTENCIAL E INFINITO ACTUAL

En el concepto de límite finito de una sucesión, la variable independiente tiende a infinito y el conjunto formado por los elementos de una sucesión y su límite es un conjunto infinito. Según Boyer (1999), Wallis fue el primero en usar el símbolo infinito en el cálculo de límites; más concretamente, lo usó para calcular el límite de la sucesión:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6n}$$

Concluyendo así que el límite era $\frac{1}{3}$. Wallis llamó al símbolo de infinito "lazo del amor".

Asociados a la noción de infinito se encuentran el infinito potencial y el infinito actual. El infinito potencial se relaciona con la idea de proceso infinito; esta idea es bastante antigua y se remonta a la antigua Grecia, donde se consideraba que el tiempo no tenía final. Aristóteles empleó en sus trabajos este concepto, así como incluso llegó a plantearse el infinito actual. En el libro III de la Física, se hallan evidencias del rechazo que Aristóteles mostró hacia el infinito actual; esto debido a que él empleaba el carácter finito en sus razonamientos.

Aristóteles quería determinar si algo en el espacio y el tiempo es infinito. Esto lo llevó a definir al infinito como aquello que es intransitable, su definición era aplicada a todo lo que pudiera describirse en términos de un proceso sin fin, una secuencia infinita de pasos en los que cada paso sucesivo difiere de todos sus predecesores. Haciendo uso de esta definición, un círculo; que, a pesar de no tener un comienzo ni un final, no se consideró como infinito, porque cada recorrido sucesivo de su circunferencia es como el primero; por otro lado, el conjunto de los números naturales se considera infinito porque al construirlos, el proceso de sumar uno, produce un sucesor que difiere de todos sus predecesores (Dubinsky, 2005). Aunque Aristóteles aceptó la existencia de cada número natural, argumentó que la totalidad de todos los números naturales no era transitable y, por tanto, no podían ser concebidos por los seres humanos. Aristóteles no consideró a los números naturales como una colección finita actual; si no como un infinito potencial, esto en el sentido de que el proceso de contar, el acto de atravesar, no podía completarse por lo que requería todo el tiempo. Debido a que la existencia humana es limitada por el tiempo, Aristóteles creía que los humanos eran incapaces de pensar en un proceso infinito en su totalidad; por ello encontró incomprensible la noción de cantidad infinita. Para él, una cantidad era un número; un número era algo a lo que se llegaba contando y, dada la imposibilidad de atravesar el proceso de contar, no podía existir una cantidad infinita (Moore, 1999). Pero, Aristóteles no podía rechazar al infinito por completo ya que su existencia fue indicada por una serie de consideraciones: el tiempo (que parece ser infinito tanto por división como por adición), materia (que parece ser infinitamente divisible) y el espacio (cuya extensión parece no tener fin).

Fue así como Aristóteles distinguió dos tipos de infinito: el infinito como un proceso de crecimiento o de subdivisión sin final (infinito potencial) y el infinito como una totalidad completa (infinito actual). Esto le permitió reconocer la existencia del infinito, siempre que no estuviera presente "todo a la vez" (Moore, 1999, p. 39). Aristóteles definió al infinito actual como el infinito presente en un momento en el tiempo, lo consideró incomprensible porque el proceso subyacente de tal actualidad requería todo el tiempo. Él sostuvo que, si el infinito se captara en absoluto, sólo podría entenderse como presentado en el tiempo, es decir, como un infinito potencial; por otro lado, la infinitud potencial se consideraba un "rasgo fundamental de la realidad", lo que lo hacía aceptable (Moore, 1995, p. 114).

Esta dicotomía (potencial y actual) de Aristóteles, dominó las concepciones del infinito durante siglos. Existió una problemática entre el infinito potencial y el infinito actual: "la discusión aristotélica sobre el infinito actual y potencial en la aritmética y en la geometría ejerció una profunda influencia en muchos escritores posteriores sobre los fundamentos de las matemáticas" (Boyer, 1999; página 138).

La idea de infinito actual siguió un camino más difícil. Muchos autores negaron su existencia, así como Aristóteles, también D'Alembert. No fue hasta que Galileo Galilei empezó a admitir la existencia del infinito actual, aunque su definición definitiva llegaría con Bolzano, Cantor y Dedekind.

Cantor hace patente la diferencia entre ambos infinitos; más aún, revela la existencia de varios infinitos en la matemática. Fue él quien supuso el inicio de la formalización de conjuntos como $\mathbb{R}$ o $\mathbb{Q}$; sin embargo, la formalización definitiva de los conjuntos numéricos $\mathbb{N}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ llegó con Dedekind (Claros, 2010).

Kant (1724-1804) creía que los seres humanos son finitos en un mundo infinito. Consideraba al mundo; el cual lo pensaba en términos metafísicos, como independiente de los humanos: "un todo unificado completo absoluto" (Moore, 1999, p. 86). Debido a la finitud inherente propia de los humanos, argumentó, que no es posible concebir el todo, sino solo recibir lo que es parcial y finito.

La definición dada por Kant al primer tipo de infinito es la siguiente: *"*el infinito potencial no es más que ese avance de la razón en su proceso constructivo que avanza sin interrupción y sin límite*"* (Cañón, 1993, citado por Claros, 2010, p. 33).

Respecto al infinito actual, Kant lo definió como la capacidad de la razón para aprehender una totalidad infinita; posicionándolo así fuera del mundo conceptual. Hitt (2003) recoge que Kant afirmó también que la distinción entre ambos infinitos debe realizarse en torno a la experiencia, según la cual, el infinito potencial se puede concebir mediante ella; mientras que el infinito actual se debe construir mediante la reflexión.

Kant y Aristóteles pudieron haber creído que un proceso infinito puede existir como una totalidad (el todo metafísico), pero que no puede ser concebido por los seres humanos como tal (Moore, 1999).

Poincaré, citado en la traducción de Bolduc (1963), escribió "no hay infinito actual, cuando hablamos de una colección infinita, entendemos una colección a la que podemos agregar nuevos elementos sin cesar" (p. 47); esto hace que sea imposible definir una colección en su totalidad, como resultado de ello, la colección no puede existir actualmente, sino sólo potencialmente.

Para Fischbein (1982) el infinito potencial es intuitivo, y responde a una interpretación natural e intuitiva del infinito, mientras que el infinito actual es contraintuitivo. Fischbein (1987, p. 52) sostiene que referirse a conjuntos infinitos actuales es "contradictorio en términos intuitivos naturales"; él comenta: *"*un infinito actual es una construcción conceptual puramente lógica, no intuitivamente aceptable*"*. Algunos años más tarde, escribió:

> En el momento en que comenzamos a tratar con el infinito (infinito actual) parece que nos encontramos con contradicciones. Aunque no podemos concebir el conjunto completo de números naturales, podemos concebir la idea de que después de cada número natural, no importan cuán grande sea, hay otro número natural. (Fischbein, 2001, p. 310)

1.1.3 Un soporte para el infinito actual

Los racionalistas alentaron la aceptación del infinito actual. Creían que los seres humanos eran capaces de invocar la razón pura para comprender el mundo que les rodea. Al aplicar la razón, creían que era posible trascender la propia finitud, debido a que los humanos no están limitados únicamente en el sentido físico. Uno de los primeros defensores del infinito actual fue el rabino Hasdai Crescas (1340-1410), cuyas opiniones pudieron haber influido en pensadores como Galileo (1564-1642) y Bolzano (1741-1848). En el siguiente extracto, es posible apreciar que su noción de "una infinidad de cosas conocidas*"* fue motivada, en parte, por creencias religiosas.

> Se puede sugerir que el conocimiento [de Dios] no se extiende a los detalles como tales, es decir, este conjunto de tres [cosas] o cuatro, o cualquier conjunto específico de tres o cuatro [cosas]. Pero, dado que no hay forma de escapar del hecho de que Su conocimiento debe incluir algún número, si yo supiera si Él conoce todos los demás números también o no. Ahora bien, si Él los conoce, ya que el número puede sumarse sin fin, entonces Su conocimiento se extiende a una infinidad de números. Si no los conoce todos, necesariamente

> debe haber un límite más allá del cual Él no los conoce. Pero entonces queda la pregunta: ¿por qué Él conoce los números hasta ese límite, pero no conoce los mayores? ¿Ha sufrido el cansancio y la fatiga su conocimiento? No se puede evitar la conclusión de que hay una infinidad de cosas conocidas. (Crescas, citado por Rabinovitch, 1970, p. 228)

Muchos racionalistas que siguieron a Crescas también sustentaron sus justificaciones de la existencia del infinito a través de sus creencias religiosas.

Para Descartes (1596-1650), era posible invocar la razón para tocar la idea del infinito que Dios ha impartido a las personas "aunque nuestra finitud inherente nos impidiera experimentarlo o imaginarlo" (Moore, 1999, p. 76). En otras palabras, la capacidad de los seres humanos para razonar a priori es un don de Dios que permite trascender las limitaciones inherentes; lo infinito, inherente a la naturaleza de Dios, resultaba para Descartes algo real que trascendía lo meramente indefinido.

> Nunca uso la palabra "infinito" para significar solo lo que no tiene fin, algo que es negativo y a lo que he aplicado la palabra "indefinido", sino para significar algo real, que es incomparablemente más grande que todo lo que tiene un fin. (Descartes, citado por Moore, 1999, p. 77)

Bolzano jugó un papel muy importante en el avance de la noción de una totalidad infinita cuando rechazó la afirmación de Aristóteles de que una colección no existe como un todo completo a menos que uno forme una imagen de cada elemento o reflexione sobre cada paso del proceso que lo genera. Para Bolzano, una persona puede pensar en un conjunto simplemente describiendo sus elementos. Es posible usar la mente para concebir una colección infinita como completa sin tener que pensar en cada elemento individualmente, esto llevó a Bolzano a ver una colección infinita como una totalidad (Bolzano, traducción de Prihonsky, 1950).

1.1.4 OBSTÁCULOS HISTÓRICOS DEL CONCEPTO DE LÍMITE

Cornu (1983) comenta que la constitución del concepto de límite en un alumno no tiene por qué ser una recapitulación histórica de cómo se ha llegado a formular actualmente el concepto de límite; sin embargo, surgen ciertas semejanzas entre lo que le ocurre al alumno y lo que ha ocurrido en el desarrollo histórico del concepto.

Los obstáculos históricos en el desarrollo de la noción de límite, según Cornu (1991), son:

1. *El límite, noción metafísica*
   Cuando los alumnos manejan el concepto de límite, es necesario también manejar el concepto de infinito, lo cual lleva a los términos: infinito potencial e infinito actual. Cornu señala que las nociones de infinito y de límite son nociones relevantes en la metafísica, más que de las matemáticas.

2. *La noción de infinitamente pequeño y de infinitamente grande*
   Al hacer uso de la definición de límite es necesario manejar cantidades mayores que cero, pero muy próximas a él, sin llegar a ser nunca cero o el manejo de un número mayor que todos los demás; esto es una fuente permanente de errores.

3. *El límite puede ser alcanzado*
   En Claros (2010), se menciona que antes de que apareciera el concepto unificador de límite, los matemáticos no podían aclarar las nociones de "grandeza última", "aproximación última" y otras semejantes. Los alumnos tienden a pensar en sucesiones monótonas que no alcanzan el límite.

4. *La transposición numérica*
   El límite, en sus orígenes, se vio vinculado al campo geométrico; después, fue llevado al dominio numérico. Este salto es considerado por Cornu como uno de los obstáculos más difíciles de superar.

El autor señala que estos obstáculos están presentes actualmente en los alumnos y que ocurren, en parte, debido a la naturaleza del concepto matemático. Según Cornu (1991) los anteriores obstáculos epistemológicos se transmiten en la enseñanza, y lo denomina "transmisión didáctica de los obstáculos epistemológicos". Cornu también señala que los intentos por simplificar demasiado la enseñanza pueden llevar directamente a los obstáculos que han sido descritos anteriormente, los cuales son una parte esencial del proceso de enseñanza; cuando estos aparecen requieren una construcción cognitiva en la que cabe observar periodos de conflictos y confusión.

1.1.5 Enseñanza del concepto de infinito

Respecto a la enseñanza del concepto de infinito, Claros (2010) revisa los trabajos de Tsamir y Tirosh (1999), Mamona-Dawns, J. (2001), Hitt (2003) y Penalva (2001) y menciona que, en el trabajo de Tsamir y Tirosh (1999), la enseñanza del infinito se realiza a través de la teoría de cardinales; en el trabajo de Mamona-Dawns (2001), la enseñanza del concepto de infinito se aborda a través del concepto de límite de una sucesión; en el trabajo de Hitt (2003) se aborda el estudio del infinito a través de la relación que mantiene éste con el límite; por otra parte, el trabajo de Penalva (2001) aborda la comprensión de los alumnos sobre los conjuntos infinitos. También agrega que, Tsamir y Tirosh (1999) estudian el concepto de cardinal infinito. Demuestran que las inconsistencias de los estudiantes responden a diferentes representaciones de conjuntos infinitos, las cuales pueden ser usadas para eliminar contradicciones en diferentes razonamientos empleados y pueden guiar al alumno hacia el uso de la correspondencia uno a uno como el único criterio para la comparación de cantidades infinitas.

La principal aportación de la autora es que la decisión de los estudiantes para afirmar si dos conjuntos tienen el mismo número de elementos, estará basada en la específica representación de los conjuntos infinitos presentados en el problema. Ella describe también un estudio empírico en el que se usa una actividad en la que los alumnos producen reacciones contradictorias ante ella. La mayoría de los participantes evita las contradicciones inherentes a través de una aproximación informal al concepto de cardinal infinito, usando la correspondencia uno a uno como el único criterio de comparación de conjuntos infinitos.

Mamona-Dawns (2001) se ocupa del estudio de límite de una sucesión; más concretamente, del límite finito de una sucesión. En dicho estudio, dedica un apartado al infinito y lo aborda a través de un ejemplo de una bola de ping-pong, la cual es lanzada desde una determinada altura y da una serie de botes; de tal manera que, en cada bote, la altura que toma es la mitad de la altura que tomó anteriormente. El infinito aparece en algunas de las respuestas de los alumnos, respecto al número de botes que da dicha pelota. La autora señala que muchos alumnos consideran al infinito como el número que resulta de contar indefinidamente. Mamona-Dawns (2001) señala también que un elemento para manejar el concepto de límite, es la necesidad de comprender el conjunto de los números naturales; ya que afirma que, si no se comprende bien dicho conjunto, no se comprenderá el concepto de sucesión infinita.

Hitt (2003) abordó el estudio del concepto de infinito basándose en la relación que mantiene éste con el concepto de límite; y señala que, para aprender el concepto de límite, es necesario no solamente manejar los procesos algorítmicos de límite, sino también distinguir entre el infinito potencial y el infinito actual en las actividades en las que aparecen procesos infinitos. Este autor consideró al infinito un obstáculo, en términos de obstáculo epistemológico.

Hitt (2003), en relación con las dificultades observadas en los alumnos, respecto al límite y más concretamente al límite infinito, señaló que estas dificultades estaban relacionadas con las dificultades que los mismos profesores manifiestan.

Penalva (2001) trabajó en la enseñanza de los conjuntos infinitos. Su investigación realizada aporta información sobre cómo evoluciona la comprensión de los alumnos sobre los conjuntos infinitos en relación con las diferentes concepciones mantenidas por ellos. Para la autora es muy importante que los profesores conozcan los significados que los estudiantes dan a los contenidos de matemáticas con los que se está trabajando, así como las dificultades que surgen en relación a ello.

Penalva (2001) considera necesario trabajar una amplia variedad de actividades en función de las distintas concepciones detectadas, para así darle un tratamiento a la diversidad.

Sin embargo, ¿qué sucede con las nociones de infinito potencial y de infinito actual? Núñez (1993) informa sobre un estudio de la construcción de procesos infinitos por niños de 9 a 14 años de edad. Señala que ninguno de sus sujetos mostró signos de pensar en un infinito actual; ya que todos sus comentarios fueron en términos de infinito potencial. Él sugiere que la razón es que el concepto de infinito actual no surge antes de los 15 años. Su punto de vista está respaldado por los resultados de Hauchart y Rouche (1987) quienes encontraron que algunos estudiantes de 12 a 18 años, parecen tener el concepto de infinito actual; para estos autores el concepto de infinito actual está ligado al concepto de límite. Consideran principalmente sucesiones y series infinitas; discuten la relación entre infinito potencial y actual en términos del movimiento desde un proceso infinito hasta su límite (op. Cit., p. 91), pero no exploran ningún mecanismo cognitivo para realizar esta transición, no dicen si hay un infinito actual relacionado con el infinito potencial en una sucesión o serie que no converge.

1.1.6 DIFICULTADES GENERALES DE LA NOCIÓN DE LÍMITE

1.1.6.1 DIFICULTADES RESPECTO AL ANÁLISIS MATEMÁTICO

Tall (1992) señala que es en el análisis donde los alumnos se encuentran por primera vez con un concepto que involucra procesos infinitos. En torno a las dificultades que presenta el concepto de límite, Tall recoge las siguientes:

- *Dificultades suscitadas por la lengua:*
  Los términos como límite, tender o aproximarse tienen un significado ordinario que choca con el concepto formal. Estas dificultades han sido señaladas por Monaghan (1982) y Cornu (1991).

  Monaghan (1982) investigó las dificultades que el lenguaje podía ocasionar en la comprensión del concepto de límite; y para ello analizó las ambigüedades que podían presentar los términos *tender a, aproximarse, convergencia* y *límite,* cuyos significados en los alumnos podrían ser distintos al verdadero significado matemático.

  Monaghan (1982) presentó los resultados obtenidos después de aplicar dos cuestionarios que construyó, para tratar de aclarar qué significado asignaban los estudiantes a los términos indicados. El primer cuestionario lo administró a 27 estudiantes y el segundo a 190. Las conclusiones que obtuvo se resumen en los siguientes puntos:

  - El término *aproximarse* presenta pocas dificultades en los alumnos debido a que es un término impreciso.
  - *Tender a* es visto con un significado similar a aproximarse, aunque en su uso diario no suele aparecer asociado a situaciones en las que aparece el concepto de límite.
  - *Convergencia* a menudo se asocia con líneas que convergen; esto impide que muchos alumnos puedan ver cómo una sucesión de números pueda converger.
  - *Límite* es visto como un punto frontera, que no se puede sobrepasar. También se observa que los alumnos suelen tener dificultades relacionas con el concepto de infinito, un ejemplo de ello es la sucesión 0.9, 0.99, 0.999, …; algunos alumnos consideran que el límite es 1 mientras que otros tienen problemas para admitir este hecho.

    Monaghan sostiene que estas conclusiones no pueden ser generalizadas, ya que los resultados pueden variar según el contexto en el que se planteen las cuestiones y depender de los estudiantes a los que les sean presentadas.

    Cornu (1991) estableció que algunos conceptos matemáticos se ven influenciados por las creencias o concepciones debido al uso del término en la vida diaria. Denominó *concepción espontánea* a un conjunto de ideas, imágenes, intuiciones que el estudiante tiene sobre el uso corriente de un cierto término.
    Para el caso de la noción de límite, esto representa un inconveniente debido a que la palabra "límite" admite variedad de usos en la cotidianidad, como, por ejemplo: límite de velocidad, horario límite de atención, límite de un país, límites de conducta, entre otras.
    Esto, influye sobre la idea de límite que construyen generando suposiciones no necesariamente correctas, tales como: el límite es un valor que se alcanza, es un valor al

que se puede acercar sin llegar a él, es una barrera, es una aproximación sin alcanzar el valor, entre otras.

- El proceso de límite no se puede transformar en una simple operación aritmética o algebraica, sino que involucra un proceso infinito.

- Una variable que se hace cada vez más pequeña puede ser interpretada como infinitésimo, que es una cantidad variable arbitrariamente pequeña.

- La cantidad de N haciéndose arbitrariamente grande sugiere la idea de números infinitos.

- Dificultades relacionadas con la idea de si el límite es alcanzado o no.

- Confusión sobre el paso de lo finito a lo infinito.

1.1.6.2 DIFICULTADES ESPECÍFICAS DEL CONCEPTO DE LÍMITE

Claros (2010) recoge todas las dificultades descritas por Tall (1991), las cuales engloban las dificultades relativas al concepto de límite, lo que denominó dificultades del análisis en general. Entre estas se encuentran las siguientes:

1. *Restricción excesiva de las funciones que se usan.*
Suelen aparecer dificultades cuando los alumnos se encuentran con funciones dadas por ramas o mediante valor absoluto. En el caso concreto del límite de una sucesión, en la mayoría de los libros de texto se usan sucesiones que tienen límite, y cuando el alumno se topa con una sucesión que no tiene límite, no sabe qué responder.

2. *La notación de Leibniz (una útil ficción o un genuino significado)*
Tall (1991) menciona lo siguiente: muchos exámenes de análisis se centran en la manipulación simbólica más que en la resolución de problemas.

3. *Traslación de problemas reales dentro de la formulación del análisis.*
Dificultad en los estudiantes para relacionar o aplicar los conocimientos teóricos adquiridos a situaciones y problemáticas de la vida real.

4. *Selección y uso de representaciones apropiadas.*
Claros (2010) cita de la siguiente manera: Tall recoge los trabajos de Robert y Boschet (1984) los cuales afirmaban que los estudiantes que tenían más éxito en análisis eran aquellos que podrían flexibilizar el uso de una variedad de aproximaciones: simbólica, numérica y visual.

5. *Manipulaciones algebraicas o carencia de ellas.*
El modo preferido para muchos estudiantes es la manipulación de símbolos algebraicos.

6. *Absorción de ideas complejas en un tiempo limitado.*
El concepto de límite podría iniciar siendo, para el alumno, un proceso intuitivo de “cada vez más próximo”, después de ello, viene la definición “épsilon-delta”, pero después de varios

teoremas probados, la definición es suprimida y entonces se emplea únicamente los teoremas demostrados. De esta manera, los estudiantes se van enfrentando a diferentes definiciones de un mismo concepto a lo largo de su desarrollo escolar.

7. *Manejo de cuantificadores en definiciones múltiplemente cuantificadas.*
Los cuantificadores constituyen una parte formal e importante formalizada, pero causan una gran tensión en los estudiantes. El alumno debe tener un conocimiento flexible y cambiar de representaciones eligiendo la que sea más adecuada en cada caso particular.

8. *Preferencia de los estudiantes por métodos procedimentales frente a métodos conceptuales.*
Tall señala que existe en los alumnos una preferencia por el empleo de métodos procedimentales frente a los conceptuales, los cuales pueden ocasionar dificultades de comprensión.

Bustos (2016) plantea las siguientes dificultades de la noción de límite:

- *Asociadas al concepto matemático*
    - Existe la dificultad para reconocer el límite como un proceso infinito.
    - Dificultad para interpretar gráficas
    - Dificultad para deducir el límite de una función a través de algoritmos y procesos simbólicos
    - Dificultad de implementar herramientas ejecutables que ayuden a la concepción del límite.

- *Asociadas a los procesos propios del pensamiento matemático*
    - Dificultad en considerar que el proceso de límite no se puede transformar en una simple operación aritmética o algebraica.
    - Dificultad en tener idea si el límite se alcanza o no.

- *Asociadas a los procesos de enseñanza*
    - Dificultad como consecuencia de que la idea de límite se enseña a partir del sistema de representación simbólico, sin apoyarse en otros sistemas de representación.

- *Asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos*
    - Dificultad de abstracción de la terminología.
    - Dificultad para interpretar y argumentar los procesos realizados.

- *Asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas*
    - Dificultad para explorar, comprobar y aplicar ideas.
    - Dificultad para adquirir seguridad para hacer conjeturas, para explicar sus razonamientos y para resolver problemas.

1.1.7 PROPUESTAS DE MEJORA EN LA ENSEÑANZA

1.1.7.1 PROGRAMAS EXTRANJEROS ANTE EL CONCEPTO DE LÍMITE

En diferentes países, los conceptos abordados en Cálculo son introducidos a los estudiantes una vez se encuentran en universidad, siendo así, una formación exclusiva de la educación superior; sin embargo, en otros países, ideas formales de conceptos de cálculo son abordados a partir de la escuela secundaria.

Tall (1992) recoge algunas críticas hechas por Cornu (1992) y Williams (1991) con respecto a cómo se aborda el concepto de límite en los programas francés y estadounidense.

En el programa francés, los libros dedican una lección al concepto de límite en el que se incluye una definición formal, una afirmación de su unicidad y teoremas relativos a operaciones aritméticas. Sin embargo; los ejercicios propuestos no se centran en el concepto de límite, sino que se centran en el sentido “operatorio” de carácter puramente aritmético. Esto también es constatado por Cornu (1992).

El programa estadounidense produce una división entre el conocimiento procedimental (lo que incluye: sustituir variables en funciones continuas, factorizar y cancelar, usar la regla de L´Hôpital para resolver indeterminaciones) y el conocimiento conceptual, esto constatado por Williams (1991).

En Grecia, se hace uso de los métodos formales de la definición de límite $\varepsilon - \delta$, lo que implica una reducción de los métodos infinitesimales. Sin embargo, existen dificultades de comprensión en los alumnos respecto al concepto de límite; y, como consecuencia de ello, los griegos conciben el límite como un objeto más que como un proceso dinámico.

Una solución a la anterior sería no guiar el análisis y concepto de límite hacia el análisis estándar y formal, sino hacia el análisis no estándar. Tall cita a los estudios de Sullivan (1976) donde evidencia el aparente éxito.

1.1.7.2 CARACTERÍSTICAS DE LOS ALUMNOS

Tall (1992) menciona que muchos estudiantes tienen una comprensión pre rigurosa del concepto de límite, pero pocos alcanzan la comprensión de la definición meramente rigurosa. También recoge las afirmaciones de Davis y Vinner (1986), mencionan que los ejemplos específicos (como las sucesiones monótonas) dominan el aprendizaje; lo que hace que domine el concepto imagen de los estudiantes sobre el límite de una sucesión.

Claros (2010) recoge las características de los alumnos, mencionadas por Tall, las cuales son:

- *No suelen emplear argumentos globales:* Usan diferentes argumentos dependiendo el caso, pueden aparecer conflictos que están en diferentes compartimentos; pueden aparecer ideas contradictorias mantenidas por el mismo alumno.
- *Aprenden las cosas que ellos necesitan para pasar el examen.*
- *Cuando la técnica usada falla, inventan una nueva que no suele ser consistente con la antigua.*

Teniendo en cuenta las características anteriores y resultados que produce la enseñanza del cálculo, Tall menciona que es posible que el énfasis puesto en la enseñanza de procedimientos en educación básica condicione el desarrollo posterior del análisis.

1.1.7.3 PROPUESTAS PARA MEJORAR EL APRENDIZAJE REFERENTE AL CÁLCULO

Para mejorar el aprendizaje de los estudiantes en lo referente al cálculo, Tall (1992) propone varias hipótesis de trabajo, las cuales son recogidas por Claros (2010). Las hipótesis de trabajo, son las siguientes: Aprendizaje activo, Construcción de intuiciones adecuadas para su futura formalización, Gráficos en el ordenador, Programas de ordenador y Software de manipulación simbólica.

- *Aprendizaje activo:* Se centra en el uso de materiales. Cummins (1960) realizó un experimento en donde concluyó que se obtienen mejores resultados en cuestiones donde se requiere mayor comprensión conceptual si se usan materiales.
- *Construcción de intuiciones adecuadas para su futura formalización:* Según Dubinsky (1991), los alumnos deben trabajar en grupos y reflexionar sobre la construcción de programas (en lenguaje de programación), los cuales deben estar diseñados para mejorar el crecimiento del pensamiento matemático. La encapsulación permite a un proceso ser concebido como un proceso y como un objeto que podrá ser manipulado en un nivel superior.
- *Gráficos en el ordenador:* esto puede ayudar a los alumnos a observar algunas propiedades de las funciones como diferenciabilidad. Tall (1986) afirma que la potencia de los gráficos tiene que ser completada con aproximaciones simbólicas y numéricas, y que el éxito en cálculo está ligado a la versatilidad de representaciones y al movimiento entre unas y otras.
- *Programas de ordenador:* Actividad constructiva. En el trabajo de Dubinsky con estudiantes, se les animaba a realizar sus construcciones matemáticas y a reflejar en ellas su comprensión de las mismas.
- *Software de manipulación simbólica:* Un ejemplo del uso del ordenador lo presenta Palmiter (1991), quien usó el software Macsyma para enseñar cálculo integral durante cinco semanas, mientras que en paralelo se estudiaba durante diez semanas con otro conjunto de estudiantes. Los resultados extraídos fueron mejores en el grupo experimental que, en el grupo de control, tanto en el examen conceptual como en el examen computacional.

1.1.7.4 ALGUNAS ACTIVIDADES PROPUESTAS Y DIFICULTADES OBSERVADAS

A continuación, se mostrarán algunas actividades propuestas y aplicadas para la enseñanza y puesta en práctica del concepto de límite al infinito. Las actividades y resultados se han extraído del trabajo de Morales et al. (2013). Se trabajó con 16 alumnos de segundo semestre de licenciatura en Matemáticas del estado de Guerrero, cada una de las actividades está acompañada de los objetivos que se espera que el alumno alcance, las respuestas dadas y las dificultades encontradas.

La aplicación de dichas actividades se organizó en cinco sesiones de 50 minutos cada una; además, los alumnos trabajaron de forma individual las dos primeras actividades y en equipos las restantes, procurando la integración de un líder para promover la discusión e interacción.

Actividad 1.Considere la siguiente definición

Definición 1. Un número L se dice que es el límite de la función f en ∞ (o cuando x aumenta indefinidamente), lo que se escribe $\underset{\infty}{lím}\, f = L$ ó $\underset{x\to\infty}{lím}\ f = L$. Si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número N tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$. Siempre que $x \in D_f$ y $x > N$.

a) Proponer un ejemplo de límite de una función que cumpla la definición anterior.
b) Representa gráficamente el ejemplo que propuso.
c) Justificar que la función que propuso satisface las condiciones de la definición.

Acerca de las respuestas:

El objetivo de la actividad es que los alumnos identifiquen y propongan un ejemplo como caso particular que satisfaga las condiciones que establece la definición. A pesar de que no se exige lo formal del concepto, consideramos que pueden aparecer producciones sobre intentos de utilizar la definición para justificar la situación particular que proponen.

Por otra parte, se espera que los alumnos contrasten el ejemplo dado en la forma analítica o numérica con la representación gráfica, con la finalidad de ver si son capaces de pasar de un registro de representación a otro cuando tratan el mismo ejemplo.

Figura 1. Actividad 1 (Morales, et al., 2013).

Algunas respuestas al primer inciso son las siguientes:

Respuesta que dan los estudiantes a la actividad 1 con respecto al inciso a) y c).	
Funciones	Justificación
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \left\|\frac{1}{x} - 0\right\| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \varepsilon$ $\Rightarrow \varepsilon > \frac{1}{x}, \quad x < \varepsilon.$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \varepsilon = 0.0001, \quad x = 99999, \quad N = 99998, \quad \|f(x) - L\| < \varepsilon.$ $\left\|\frac{1}{99999} - 0\right\| < 0.0001, \|0.00001\| < 0.001.$ Satisface la condición de la definición.
Otros casos: $f(x) = \frac{1}{x} + 2, \quad f(x) = \frac{1}{2^x}.$	
Casos erróneos: $f(x) = \sqrt{x},$	Para todo $\varepsilon > 0, \exists N$ t.q $\|f(x) - L\| < \varepsilon$ siempre que $x \in D_f$ y $x > N$.

Figura 2. Respuestas dadas al inciso a) de actividad 1 (Morales, et al., 2013).

Respuestas dadas por los estudiantes al inciso b)

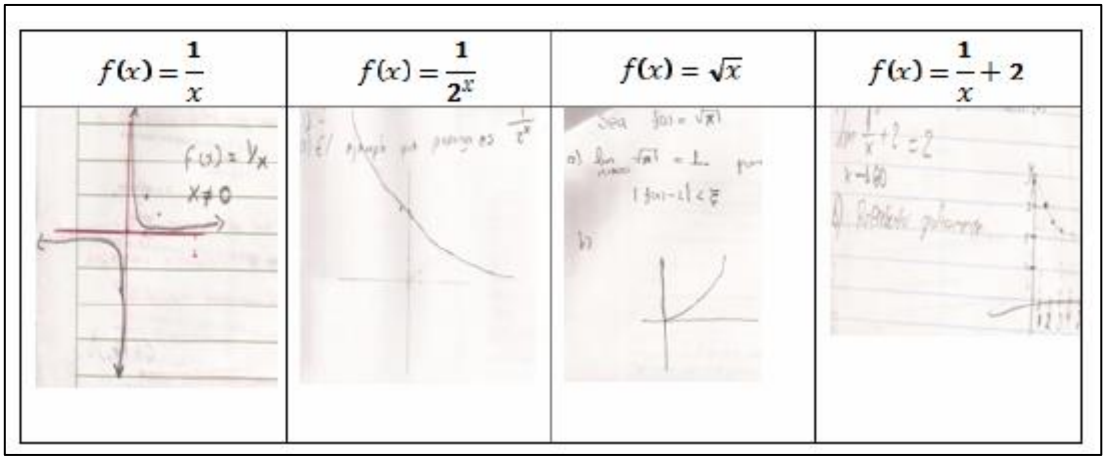
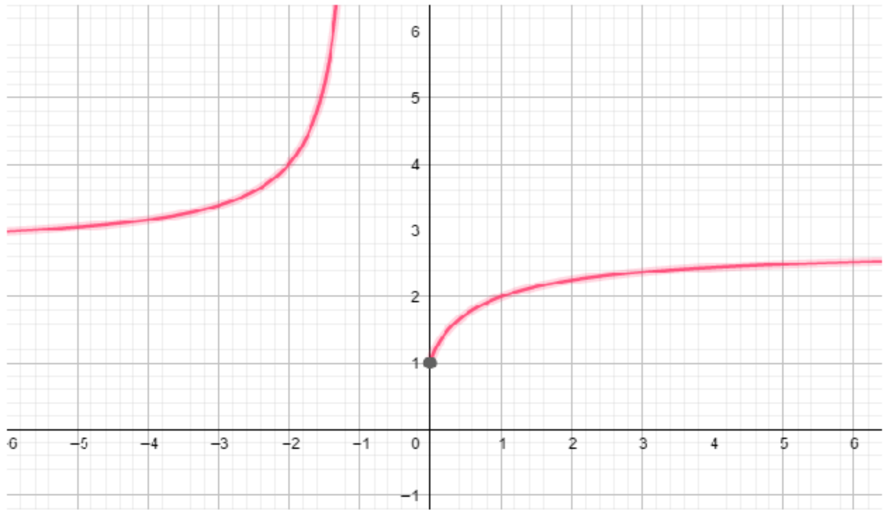


Figura 3. Respuestas dadas al inciso b) de actividad 1 (Morales, et al., 2013).

Las dificultades observadas en esta primera actividad, según los resultados obtenidos de Morales (et al., 2013) son las siguientes:

- Se observa que cuando los alumnos quieren dar una justificación formal utilizando el modelo $\varepsilon - N$ tienen problemas con ello, pues estas dificultades están asociadas a la utilización de los cuantificadores; es decir, solo asignan valores particulares a ε y N y no usan los cuantificadores "para todo", "existe" para establecer las relaciones entre ε, N y los valores x del dominio.
- Dificultad para establecer analogías.

Actividad 2. Considere la siguiente función $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ **cuyo gráfico se muestra a continuación.**



Actividad:

a) Evalúe la función dada en los valores de x = 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 128 y observe el comportamiento de la función.

b) Establezca una conjetura sobre el límite de la función a medida que la variable x aumenta indefinidamente.

c) ¿El límite de la función es un número real?

Con esta actividad, se espera que los alumnos conjeturen que el límite de la función a medida que la variable crece ilimitadamente es el valor de e, ya que en actividades anteriores a éstas, ellos ya han estudiado los límites

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \text{ y } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e.$$

Figura 4. Actividad 2 (Morales, et al., 2013). Recreación de gráfica (Elaboración propia).

Para esta actividad, los alumnos efectuaron correctamente el inciso a); las dificultades pueden observarse a partir del inciso b), algunas de las respuestas son las siguientes:

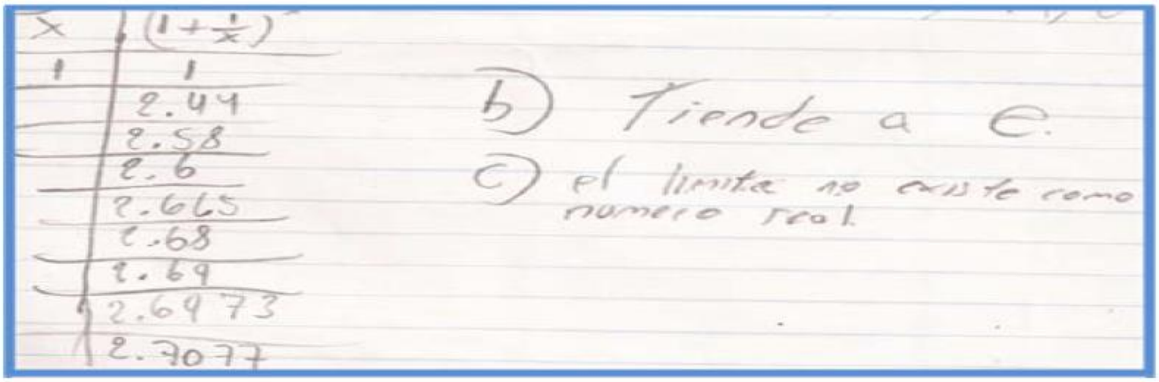
- El valor de la función va disminuyendo y sus valores van variando entre 1 y 2.

Es posible observar la dificultad de los alumnos para generalizar el comportamiento de la función, no consideran la condición de monotonía y no realizan el análisis correspondiente; únicamente se guían por la intuición.

- $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=3$. Hay dificultad para inducir, a partir de casos particulares.
- La función tiende a e, a medida que $x\to\infty$. Sin embargo, presentan dificultad para argumentar o demostrar la validez de la conjetura.

Figura 5. Respuestas al inciso b) de la Actividad 2 (Morales, et al., 2013).

Para el inciso c), varios alumnos mencionan que el límite sí existe como número real y es 2 o 3, pero cuando los alumnos mencionan que el límite tiende a e, mencionan que no existe como número real. A continuación de muestran algunas respuestas:



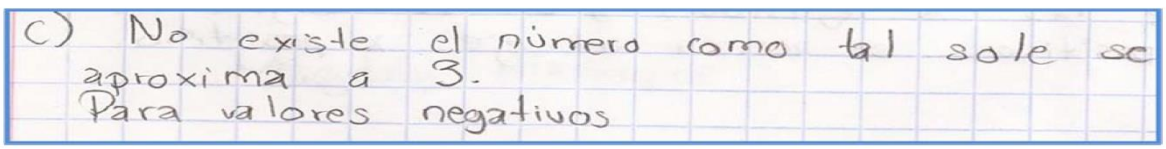
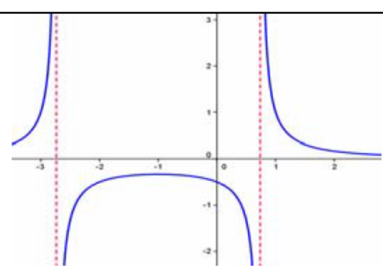


Figura 6. Respuestas al inciso c) de la Actividad 2 (Morales, et al., 2013).

Actividad 3. A continuación se muestran algunos gráficos que corresponden a ciertas funciones reales de variable real, analice dichos gráficos y conteste lo que se le pide, recuerde que la argumentación de su respuesta es importante.



Gráfica 1

Responda y en cada caso argumente su respuesta.

1. ¿ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = ?$, ¿ $\lim\limits_{x^+\to\left(-1+\sqrt{3}\right)} f(x) = ?$, ¿ $\lim\limits_{x^-\to\left(-1+\sqrt{3}\right)} f(x) = ?$

Con respecto a la gráfica 1. ¿ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = ?$, con esta pregunta, se espera que el alumno concluya que el límite es cero, y reconozca un caso particular del concepto de límite al infinito en el registro gráfico. Por otra parte, también se pretende que el alumno identifique otros tipos de límite, como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y establecer qué características tienen los límites al infinito.

Figura 7. Actividad 3: Gráfica 1 (Morales, et al., 2013).

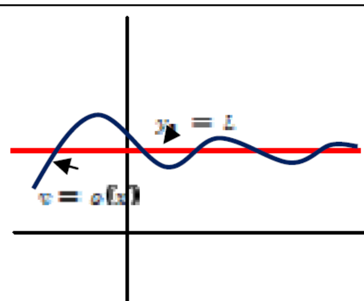
La actividad 3 se realizó por equipos, las respuestas obtenidas del equipo 1 (E1) y del equipo 2 (E2), son las siguientes:

E1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x^{+}\to\left(-1+\sqrt{3}\right)} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x^{-}\to\left(-1+\sqrt{3}\right)} f(x)=\infty$

E2. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x^{+}\to\left(-1+\sqrt{3}\right)} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x^{-}\to\left(-1+\sqrt{3}\right)} f(x)=-0.3$

Figura 8. Respuestas a Actividad 3: Gráfica 1 (Morales, et al., 2013).

Las respuestas dadas por el equipo 1 y el equipo 2 a esta pregunta muestran diferencias, y estas evidencian que no identifican correctamente un caso de límite al infinito ya que suelen confundirlo con límites finitos. Según Morales et al. (2013), consideran que esta situación puede presentarse por la dificultad que existe en la lectura e interpretación de gráficas; además, también se identificó dificultad en los estudiantes para analizar límites laterales.



Gráfica 2

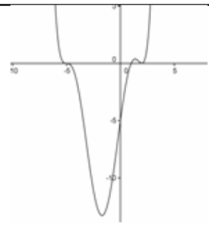
2. ¿A qué valor se aproxima la función a medida que la variable independiente tiende a crecer (tiende a $+\infty$)?

En relación a la gráfica 2. Se pretende que el alumno concluya que la función tiende a L, que es la recta paralela al eje horizontal y que corresponde a la función constante. A pesar de que la curva no explicita a alguna función en particular, se trata de que los alumnos identifiquen el concepto de límite al infinito.

Figura 9. Actividad 3: Gráfica 2 (Morales, et al., 2013).

Algunos equipos concluyeron que el límite es igual a 0, y otros que el límite es L. A través de esto, se afirmó que los equipos que respondieron que el límite es 0, no leen correctamente la gráfica y los que respondieron que el límite es L, solo argumentaron intuitivamente sus respuestas.

$y = f(x)$



Gráfica3

3. Si la variable independiente tiende a crecer (tiende a $+\infty$),
   a) ¿cuál es explicación que puede dar sobre el hecho de que la función también tiende a infinito?
   b) ¿Qué significa que la función tienda a $+\infty$?

Para la gráfica 3. Se espera que los alumnos identifiquen que las imágenes de la función crecen a medida que la variable independiente tiende a crecer, ya que esto se corresponde con la definición intuitiva del concepto de límite infinito. También, pueden mencionar que la gráfica no es acotada, que no es posible determinar un cierto número, para todo valor arbitrario dado. A partir del cual, la diferencia de la función y un cierto número real sea menor que el valor dado arbitrariamente.

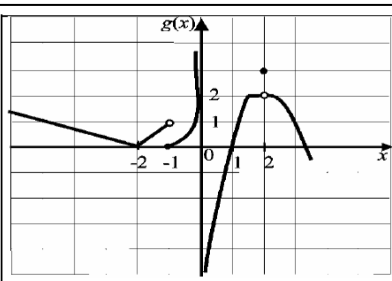
Figura 10. Actividad 3: Gráfica 3 (Morales, et al., 2013).

Algunas respuestas son las siguientes:

E.1 a) Cuando toma valores positivos la gráfica crece. **b)** La gráfica crece.
E5 a) Hay una correspondencia entre la variable independiente y la función. **b)** El valor de la función incrementa.

Figura 11. Respuestas a la Actividad 3: Gráfica 3 (Morales, et al., 2013).

A esta pregunta, la mayoría respondió que es la gráfica la que crece, implícitamente está la idea de crecimiento de las imágenes.



$y = g(x)$

Gráfica 4

4.- a) ¿ $\lim_{x \to 2} g(x)$?

b) ¿ $\lim_{x \to 0} g(x)$?

5. a) ¿Es continua la función en los puntos $x = -2$, $x = 2$?, b) ¿Qué valor alcanza la función en cada uno de los puntos indicados anteriormente?

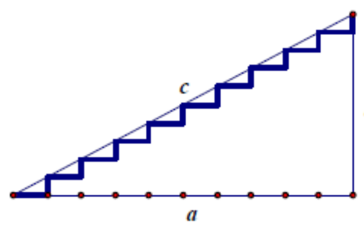
En relación a la gráfica 4. Se plantean preguntas con la finalidad de identificar si los alumnos diferencian las condiciones para la existencia de límite y para la continuidad puntual, si el alumno reconoce que la existencia de límite es sólo una de las condiciones para la continuidad en este caso puntual.

Figura 12. Actividad 3: Gráfica 4 (Morales, et al., 2013).

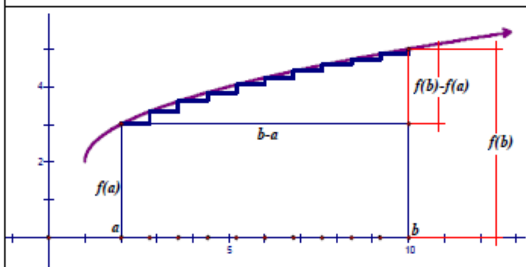
A través de esta pregunta, se encontró que en los puntos donde la función no es continua, los alumnos tuvieron dificultades para determinar el límite.

ACTIVIDAD 4. Se pretende que el alumno haga uso en un primer momento de la intuición sobre el concepto de límite al infinito, para identificarlo en la representación dada y después caracterizarlo a partir de establecer que el límite de las curvas escalonadas a medida que la división se incremente tiende al segmento de curva.

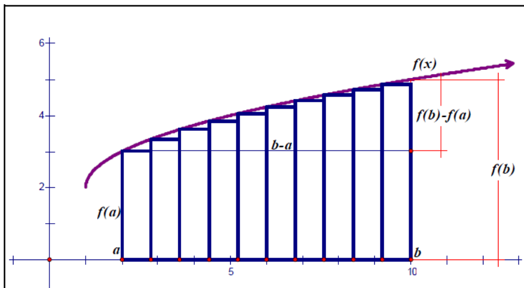
Actividades específicas:



Caso 1: Si consideramos un triángulo rectángulo como el que se muestra en la figura, y pensamos en dividir el cateto *a* en un número *n* creciente (al infinito) de partes iguales, y construimos la *curva escalonada*, entonces, a pesar de que la curva escalonada está cada vez más cerca de la hipotenusa, en la situación límite de este proceso infinito, ¿ocurre que la curva escalonada sea igual a la hipotenusa?



Caso 2: Si consideramos un segmento de la curva $f(x)$, como la que se muestra en la figura, y pensamos en dividir el intervalo $[a,b]$ en un número *n* creciente (al infinito) de partes iguales, y construimos la curva escalonada, entonces, a pesar de que la curva escalonada está cada vez más cerca de la curva de $f(x)$, en la situación límite de este proceso infinito no ocurre que su longitud igual sea igual a la longitud de curva. ¿Qué explicación le das a esta situación?



Caso 3: En cambio, si consideramos un segmento de la curva de *f(x)*, y pensamos en dividir el intervalo [*a*, b]en un número *n* creciente (al infinito) de partes iguales, y construimos los rectángulos bajo la curva como se muestra en la figura, entonces, a medida que el número de divisiones crece, la suma de las áreas de los rectángulos se aproxima más al área bajo la curva. Así, en la situación límite de este proceso infinito, la suma de las áreas de los rectángulos es igual al área bajo la curva en dicho intervalo. ¿Cuál es la explicación que se puede dar en cada caso?

- Para el primer caso se pretendía que los alumnos identificaran dos situaciones 1. Que en la situación límite del proceso de división del cateto adyacente, las curvas escalonadas convergen a la hipotenusa. En este caso, habrán identificado un caso particular de límite al infinito. 2. Por otra parte, se esperaba que los alumnos, identificaran que las longitudes de las curvas escalonadas permanecen constantes, por lo que, podían concluir que el hecho de que haya límite no significa que coincidan o lleguen a coincidir las longitudes de las curvas escalonadas y la longitud de la hipotenusa.

Figura 13. Actividad 4 y objetivo de caso 1 (Morales, et al., 2013).

Algunas respuestas al primer caso, son:

- No, porque aun cuando los escalones sean cada vez más pequeños siempre existirá un hueco entre ellos y no permitirá la igualdad entre la curva escalonada y la hipotenusa.
- No ocurre eso, porque la curva escalonada será igual a la hipotenusa si tendiera al infinito el número de divisiones del cateto adyacente.

Figura 14. Respuestas al caso 1 de Actividad 4 (Morales, et al., 2013).

En la mayoría de los casos propuestos, no se llegó a lo que se esperaba. Para esta pregunta, se pudo observar que los alumnos tienen dificultades para establecer una convergencia; además, los alumnos no identifican que hay proceso infinito como tal, y que este proceso puede estar relacionado con la situación de límite. En las argumentaciones de las respuestas de los estudiantes, hay ideas intuitivas sobre la convergencia de las curvas escalonadas; sin embargo, los alumnos no logran identificar este caso de límite.

- Para el segundo caso la actividad estuvo puesta, para que los alumnos establecieran analogías en relación con los contenidos que ya habían trabajado en cursos de Cálculo, es importante señalar, que los alumnos podían intuir que a partir de la inscripción de rectángulos, se podía haber generado la curva escalonada, y que a medida que se incrementaba la división, los segmentos que las conforman iban decreciendo, esa podía ser otra vía para la explicación a la situación, ya que este razonamiento lleva implícito la noción de límite al infinito.

Figura 15. Objetivo al caso 2 de Actividad 4 (Morales, et al., 2013).

Algunas de las respuestas para este caso, son:

- La curva escalonada nunca coincidirá con el segmento de curva, porque aun cuando los escalones sean cada vez más chicos existirá un hueco entre ellos y no permitirá la igualdad entre la curva escalonada y el segmento de curva de $f(x)$.
- A pesar de que tengamos infinidades de divisiones del intervalo, la curva escalonada nunca será igual al segmento de curva.
- En el proceso infinito no ocurre que la curva escalonada sea igual a la curva porque sólo se toma en cuenta un intervalo para dividirlo en n partes iguales y como no se toma en cuenta la otra parte de la función eso hace que la curva escalonada no sea igual a la curva $f(x)$ definida en el intervalo dado.

Figura 16. Respuestas al caso 2 de Actividad 4 (Morales, et al., 2013).

Para este caso, dentro de las argumentaciones de los alumnos es posible identificar dos situaciones: la convergencia de la curva escalonada hacia el segmento de curva, y las longitudes de éstas.

❖ Para el tercer caso se pretendía que los alumnos reconocieran que la integral definida era un caso particular de límite al infinito, a partir de interpretar la situación que se les presenta. Se esperaba también, que los alumnos identificaran que la sucesión de curvas escalonadas converge al segmento de curva definida en el intervalo dado, que en este caso, ese sería un segundo ejemplo de límite al infinito.

Figura 17. Objetivo de caso 3 de Actividad 4 (Morales, et al., 2013).

Algunas respuestas para este caso, son las siguientes:

➢ La suma de las áreas de los rectángulos llega a coincidir con el área bajo la curva, en la situación límite del proceso infinito, porque los triángulos que sobran al dibujar los rectángulos son cada vez más pequeños al aumentar el número de rectángulos en este intervalo.
➢ A medida que la división del intervalo tiende a ser infinito cada vez más se agota el área de la región bajo la curva, ya que va habiendo menos espacios entre la curva y los rectángulos por eso cuando tiende a infinito, el área de los rectángulos es igual al área bajo la curva.

Figura 18. Respuestas al caso 3 de actividad 2 (Morales, et al., 2013).

A través de estas respuestas es posible concluir que los estudiantes sostienen la idea de infinito potencial; ya que argumentan que la curva escalonada no converge al segmento de curva de $f(x)$. Cuando ellos reflexionan sobre el área, mencionan que en el proceso infinito la suma de las áreas de los rectángulos coincide con el área bajo la curva en el intervalo dado, en este caso el proceso infinito tiene una situación de límite.

A través de todo lo anterior, es posible identificar las principales dificultades observadas en la realización de las actividades:

- Dificultad de comprensión.
- Dificultad en el uso de terminología, así como lenguaje simbólico.
- Dificultad de interpretación y lectura de gráficas.
- Dificultad en el uso y transformaciones de registros (gráfico, numérico, algebraico, verbal).
- Dificultad para relacionar conceptos.

Más aún, las actividades han sido planteadas de manera bastante abstracta, y en las respuestas de los alumnos, es posible identificar que sus argumentaciones son mayormente intuitivas. En algunas de las situaciones, los alumnos realizaron acciones específicas como la evaluación de una cantidad específica en la función. Dubinsky (2005), mostró en su trabajo la forma en la que los alumnos conciben el infinito actual e infinito potencial. Es importante conocer y distinguir estos dos tipos de infinito a la hora de abordar el estudio de límites, debido a que detrás de un concepto o definición estática y métrica, con uso de cuantificadores y lenguaje simbólico, existe un proceso dinámico de aproximación. Una de las primeras acciones que el alumno debe realizar para la construcción del infinito potencial (concebirlo como un proceso) y encapsulación del infinito actual, es el sustituir o evaluar cantidades específicas en una función, esto haciendo analogía de la explicación de Dubinsky, en torno a la construcción de los números naturales para su futura encapsulación de infinito actual, es decir que, para poder construir el proceso de infinito potencial, es necesario comenzar con los primeros pasos como, por ejemplo, el contar 1, 2, 3 en la construcción del conjunto de los números naturales; esto es una concepción de acción.

Haciendo una comparación de los resultados obtenidos en estas actividades con respecto al trabajo de Dubisnky (2005), es posible percatarse de que algunos alumnos recién comienzan con la concepción de acción. La falta de dominio del tema puede observarse en la dificultad de aplicar transformaciones a los registros de representación. Además, en la secuencia de actividades se da un salto repentino al caso particular de límites al infinito: la integral; ocasionando respuestas desfavorables como resultado de las dificultades anteriores.

1.2 JUSTIFICACIÓN

Desde el año 2019, la sociedad se ha visto envuelta en una emergencia sanitaria, provocando así la suspensión y limitación de diversas actividades; entre ellas, la suspensión de clases para todos los niveles educativos. Ante dicha problemática, los maestros y profesores, se vieron en la necesidad de impartir las clases de sus respectivas asignaturas a través de medios digitales y recursos tecnológicos. Claramente, la mayoría de los profesionales en la educación, no estaban familiarizados con esta modalidad de impartición de clases; así como tampoco los alumnos.

La adaptación a dicho modo de clases “online” ha sido muy difícil tanto para profesores como para alumnos; y como consecuencia de ello, la situación escolar ha sido complicada.

Cabe destacar que el uso de las tecnologías en la educación, no es algo exclusivo de la situación de pandemia. Las herramientas digitales son fundamentales para el aprendizaje y desarrollo de los estudiantes a través de su preparación, ya que esto ayuda a estimular y activar su pensamiento, así como también poner en práctica lo aprendido; incluso motiva e incita al estudiante a conocer y explorar diferentes temas de interés por su propia cuenta. Sin embargo, la situación de pandemia sí refleja el grave problema existente de muchos estudiantes mexicanos ante la accesibilidad de contar con un dispositivo tecnológico, internet; o incluso de forma más general, esta situación refleja la poca accesibilidad de muchos niños, jóvenes y adultos a la educación.

La creación de las actividades propuestas en esta sección, no solo surgen a partir de la dificultad de los estudiantes de matemáticas en la comprensión de diferentes conceptos, dada la situación de pandemia; sino especialmente, por las dificultades respecto al análisis matemático en general y las dificultades específicas del concepto de límite, las cuales han sido abordadas anteriormente en el capítulo uno, en la sección de antecedentes. Estas actividades se orientan al tema de límites al infinito, abordado en el curso de Cálculo Diferencial y pueden utilizarse tanto en la modalidad “online”, como también en el salón de clases, e incluso, pueden ser adaptables para el aprendizaje autónomo.

Las actividades se plantean de forma secuencial, y se busca que el alumno encapsule el proceso dinámico del infinito potencial para construir el objeto mental de infinito actual. Ambos conceptos, sumamente importantes en el estudio de Cálculo Diferencial; y más específicamente, en el estudio y análisis de límites de una función al infinito, que es el tema central de este trabajo.

1.3 OBJETIVO Y PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Objetivo

Evaluar el efecto de una secuencia de actividades, implementadas en GeoGebra y basadas en las teorías APOE y de Registros de Representación Semiótica para la comprensión del concepto límite al infinito de una función real en estudiantes de licenciatura de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Pregunta de investigación

¿De qué manera se favorece la comprensión del concepto de límite al infinito de una función real en estudiantes de licenciatura de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, cuando se aplica una secuencia de actividades diseñadas en GeoGebra y basadas en las teorías APOE y de Registros de Representación Semiótica?

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

2.1 TEORÍA APOE

La teoría APOE se adhiere al principio de que existe una estrecha relación entre la naturaleza de un concepto matemático y su desarrollo en la mente de un individuo (Piaget, 1970, p. 13); las explicaciones que propone esta teoría son tanto epistemológicas como psicológicas. Según esta teoría, un individuo se enfrenta a una situación matemática mediante el uso de ciertos mecanismos mentales para construir estructuras cognitivas que se aplican a la situación. Los principales mecanismos se denominan interiorización y encapsulación, y las estructuras principales son: Acción, Proceso, Objeto y Esquema.

La teoría APOE, de la cual Dubinsky es considerado su progenitor, es una teoría constructivista y modela lo que sucede en la mente de un individuo cuando este se enfrenta a un concepto matemático para aprenderlo.

Piaget, definió a la abstracción reflexiva como la actividad mental que desarrolla el pensamiento, así como el mecanismo que propicia a las estructuras lógico-matemáticas. Piaget distingue dos etapas dentro de la abstracción reflexiva: la primera asociada al pensamiento contemplativo y la segunda, está ligada a la reconstrucción y reorganización del contenido adquirido. Como consecuencia de esta serie de ideas, Dubinsky, en la década de los 80's, propuso que la abstracción reflexiva podría usarse para describir el proceso mediante el cual se construyen los conceptos matemáticos en la educación superior. Así, Dubinsky (1991), distingue a las cuatro estructuras mentales anteriormente mencionadas, por las cuales un individuo transita cuando aprende un concepto. La forma en que se construyen dichas estructuras mentales, es a través de los mecanismos de abstracción reflexiva denominados: Interiorización, Coordinación, Reversión, Encapsulación y Desencapsulación. La relación entre las estructuras y mecanismos mentales, es concebida por Dubisnky (1991) como un sistema circular de retroalimentación. En Arnon et al. (2014), se describe cómo se relacionan las estructuras y mecanismos para la construcción del conocimiento:

- Acción. Un individuo tiene una concepción Acción de un concepto si su comprensión está limitada a transformaciones dirigidas de manera externa; ante un concepto matemático puede decirse que el individuo no es capaz de imaginar ni saltarse pasos mientras no supere esta etapa.
- Proceso. Cuando un individuo reflexiona sobre las acciones y puede recrearlas mentalmente sin la necesidad de depender de estímulos externos, se dice que ha interiorizado las acciones en un Proceso. El individuo debe ser capaz de dejar de depender de las representaciones externas, así como también, lograr la reversión de las acciones interiorizadas que dieron origen al proceso. Una estructura Proceso se construye mediante los mecanismos de interiorización, de reversión o de coordinación.
- Objeto. Se logra a través del mecanismo de encapsulación. Cuando un individuo aplica acciones a un Proceso (ente dinámico), y lo transforma en un ente estático para el cual es capaz de aplicar nuevas acciones, se dice que el individuo ha encapsulado el Proceso en un Objeto cognitivo. Un Objeto puede Desencapsularse para generar nuevos Procesos coordinados que den origen a otro Objeto.

- Esquema. Es una construcción coherente de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas cuya reconstrucción es permanente y determinada por una situación matemática particular a la cual se enfrenta un individuo. La aplicación coherente de Acciones, Procesos y Objetos generan un esquema.

La teoría postula que un concepto matemático comienza a formarse cuando uno aplica una transformación a los objetos para obtener otros objetos; una transformación se concibe primero como una acción. Cuando un individuo repite y reflexiona sobre una acción, puede ser interiorizada en un proceso mental. Un proceso es una estructura mental que realiza la misma operación que la acción que se interioriza, pero totalmente en la mente del individuo, lo que le permite imaginar la realización de transformaciones sin tener que ejecutar explícitamente cada paso. Si un individuo se da cuenta de un proceso como una totalidad, se da cuenta de que las transformaciones pueden actuar sobre esa totalidad y de hecho puede construir tales transformaciones; entonces se dice que el individuo ha encapsulado el proceso en un objeto cognitivo. Un tema matemático a menudo implica muchas acciones, procesos y objetos que deben organizarse y vincularse en un marco coherente, el cual se denomina esquema.

Las explicaciones ofrecidas por un análisis APOE se limitan a descripciones del pensamiento que un individuo podría ser capaz de hacer; no se afirma que tales análisis describan lo que realmente sucede en la mente de un individuo, ya que esto es probablemente incognoscible.

2.1.1 ¿CÓMO SE CONSTRUYE LA NOCIÓN DE INFINITO POTENCIAL Y ACTUAL EN LOS ALUMNOS?

Bolzano logró ver una colección infinita como una totalidad. Un ejemplo dado por él, es el siguiente: "puedo pensar en un conjunto, en el agregado, o si lo prefieres, en la totalidad de los habitantes de Praga o de Pekín sin formar una representación separada de cada habitante*"* (Bolzano, extraído de la traducción de Prihonsky, 1950); sin embargo, este ejemplo trata sobre un conjunto finito; pero parecía estar pensando en el proceso de construcción de un conjunto como una totalidad completa, ¿cómo fue posible?

En esta sección se abordará con detalle el trabajo de Dubinsky (2005) orientado al concepto de infinito potencial y actual. Es importante conocer cómo es concebido el concepto de infinito en los estudiantes debido a que es esta la herramienta utilizada al momento de abordar otros conceptos como el límite de sucesiones y de funciones en cálculo diferencial; la comprensión de dicho concepto ayuda a entender que detrás del concepto de límite y definiciones "estáticas" se encuentra un proceso dinámico.

Dubinsky (2005) describió, basándose en la teoría APOE y a través del análisis histórico de la concepción de infinito potencial e infinito actual, y, sobre todo, se fijó en la forma en la que Cantor y Bolzano pudieron encapsular la noción de infinito y lograron verlo como una totalidad. Se describe entonces un mecanismo de interiorización involucrado en la construcción mental de procesos infinitos. La encapsulación de dicho concepto se relaciona con los problemas de concebir lo realmente infinito, distinguir lo alcanzable e inalcanzable, así como diferenciar lo potencial y lo actual.

Con respecto a la concepción de infinito potencial como un infinito actual, Dubinsky (2005) mencionó que, los pasos individuales son acciones y la capacidad de imaginar un conjunto infinito de pasos como algo completado es posible a través de los mecanismos de coordinación de estas acciones e interiorizarlas en un proceso. Así, este proceso puede verse como una totalidad completa. Este es un aspecto crucial del mecanismo mental de encapsulación.

La teoría APOE es útil para comprender la distinción entre lo potencial y lo actual, lo alcanzable y lo inalcanzable. Cuando se comprende al infinito potencial, se tiene la concepción del infinito como un proceso. Para poder construir este proceso, es necesario comenzar con los primeros pasos; como, por ejemplo, el contar 1, 2, 3 en la construcción del conjunto de los números naturales; esto es una concepción de la acción. Cuando se repiten estos pasos como sumar 1 siempre, es decir, infinitamente, requiere una interiorización de esa acción en un proceso. El infinito actual es un objeto mental que se obtiene mediante la encapsulación de dicho proceso. Sin embargo, el proceso infinito subyacente que condujo a tal objeto mental sigue estando disponible; además, muchas situaciones matemáticas requieren que un individuo desencapsule un objeto de regreso al proceso que lo condujo. Es posible decir, que, a través del encapsulado, el infinito se vuelve alcanzable cognitivamente. No obstante, lo inalcanzable es una instancia del infinito, en forma de proceso que no ha sido encapsulado, esto llega a suceder porque el proceso aún no logra verse como una totalidad y puede deberse a que no ha tenido lugar la encapsulación. Una vez que un individuo puede ver todos los pasos de un proceso infinito como una sola operación que puede llevarse a acabo y finalizarse y, además, está presente en un momento en el tiempo, puede entonces concebir al infinito como una totalidad completa. Cuando se encapsula dicha totalidad, la noción de potencialidad se transforma en una instancia del infinito actual, una entidad matemática a la que se le pueden aplicar acciones (Dubinsky, 2005).

Cabe destacar que la existencia de uno no niega al otro, ni mucho menos es un error con respecto al otro. Lo potencial y lo actual representan dos concepciones cognitivas diferentes, y se relacionan por el mecanismo mental de encapsulación. Ambas concepciones pasan a formar parte del esquema infinito del individuo.

2.2 TEORÍA DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

Raymond Duval, quien es creador de la teoría de representaciones semióticas, afirma que, para tener acceso al conocimiento matemático, es necesario que los objetos sean representados de diferentes formas. De forma general, los objetos matemáticos tienen diferentes registros de representación, como el registro numérico, registro gráfico, registro verbal y registro simbólico. Duval afirma que un concepto se ha adquirido cuando se es capaz de transitar en por lo menos dos diferentes representaciones semióticas del propio concepto.

El uso de la teoría de registros de representación semiótica de Duval contiene ventajas y limitaciones. Algunas de las ventajas, son mencionadas en *Teoría de Registros de Representación Semiótica* (Hernández et al, 2017), y son las siguientes:

a) Un aprendizaje centrado en la conversión de las representaciones y, como consecuencia, en la coordinación de diferentes tipos de registros semióticos produce una *comprensión efectiva e integradora*, lo cual posibilita la transferencia de conocimientos aprendidos y genera resultados positivos en las macro-tareas de producción y comprensión como lectura, escritura y resolución de problemas (Egret, 1989; Duval, 1991, citados en García y Perales, 2006).
b) Las *transformaciones* de unas representaciones en otras, tienen un papel fundamental e importante; permiten obtener nueva información y propiedades; así como extraer

conocimiento nuevo de los objetos, ideas y conceptos representados (Duval, citado en Macías, 2014)

c) Cada registro de representación resalta características y propiedades determinadas del objeto matemático, obteniendo una configuración del *concepto en toda su expresión y profundidad.*
d) El presentar a los objetos matemáticos a través de sus múltiples representaciones permite *atender a las singularidades de aprendizaje de cada alumno*.

Hernández et al. (2017) recoge las limitaciones del uso de esta teoría, según lo especifican García & Perales (2006), referenciando a otros autores:

- Los alumnos no suelen comprender la naturaleza mediática y metafórica.
- Cuando se analizan varias representaciones, se suelen centrar en una sola de ellas, la que resulta más familiar y concreta; así como se centran también en sus características superficiales, las no relevantes conceptualmente.
- Cuando los alumnos usan diferentes representaciones, se tienen dificultades en su coordinación e integración, y sólo realizan conexiones entre ellas cuando se enfrentan a un proceso de resolución de problemas.

La Teoría de los Registros de Representación Semiótica de Duval (1993, 1995), constituye un marco teórico adecuado que permite analizar las representaciones que los alumnos (y los docentes) emplean para resolver un problema; y considera que los sistemas de representación que utiliza la matemática son las figuras, las gráficas, la escritura simbólica y el lenguaje natural.

Duval (1993) menciona que, para que un numeral o un dibujo, por ejemplo, funcionen como representaciones de los objetos matemáticos correspondientes, es necesario que la representación funcione verdaderamente dando acceso al objeto representado.

> Es necesario que el objeto no sea confundido con sus representaciones y que se le reconozca en cada una de ellas. Es bajo esas dos condiciones que una representación funciona verdaderamente como representación, es decir, que ella proporciona el acceso al objeto representado. (Duval, 1993, citado en Varettoni, 2010, p. 3)

Varettoni (2010) menciona que, Duval (1993, 1995), en forma general, divide a las representaciones en internas (privadas) y externas (visibles y observables públicamente), considerando que estas últimas son por naturaleza semióticas, ya que se producen mediante un sistema de signos y son accesibles a todos los sujetos capaces de interpretar este sistema de signos. Respecto al aprendizaje matemático, establece que la diversificación de representaciones semióticas de un mismo objeto aumenta la comprensión de los sujetos y recíprocamente, las representaciones externas (enunciados, fórmulas, gráficas, etc.) son el medio por el cual las personas exteriorizan sus imágenes y representaciones mentales haciéndolas accesibles a otras personas; asignando así un doble papel a las representaciones externas:

- Actúan como un estímulo para los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales.
- Expresan la red de significados personales de los sujetos que los usan.

El uso de diversos sistemas de representación semióticos en un mismo objeto matemático fortalece la capacidad cognitiva del individuo enriqueciendo sus representaciones mentales (Barriero et al., 2016).

2.2.1 EL REGISTRO DE REPRESENTACIÓN

En matemáticas, los signos y representaciones no tienen como función primordial comunicar o evocar algún objeto ausente, sino que el papel fundamental e importante lo constituyen las transformaciones de unas representaciones en otras, ya que esto permite obtener nueva información y propiedades, así como extraer nuevos conocimientos de los objetos, ideas y conceptos representados (Duval, 2006a).

En el trabajo matemático suelen usarse objetos en representación de otros, especialmente cuando se trata de nociones abstractas, existiendo una correspondencia que es a menudo implícita, entre el objeto representante y el representado. Los sistemas de símbolos y los registros de representación permiten generalizar ideas, así como utilizar dichas ideas en diferentes situaciones. Esto permite la transferencia del aprendizaje y la comprensión.

Duval (2006) introdujo el marco teórico de sus investigaciones sobre los procesos cognitivos propios del pensamiento matemático, dando dos observaciones acerca de la variedad de "contextos de representación" en los cuales aparecen los objetos de conocimiento matemático.

- La actividad matemática se realiza necesariamente en un "contexto de representación". Un ejemplo de ello es la representación de los números naturales en algún material como cerillas; también es posible representar al número con puntos, con una representación poligonal o el sistema de notación decimal.
- Los estudiantes deben ser capaces de reconocer el mismo objeto matemático en otros contextos de representación y usarlos.

Los contextos de representación usados en la actividad matemática son necesariamente semióticos. Al tener en cuenta la naturaleza semiótica de las mismas, también implica tener en cuenta tanto las formas en que se utilizan como los *requisitos cognitivos* que involucran:

- La importancia de su propiedad de *transformación,* porque el procesamiento matemático implica alguna transformación de representaciones semióticas. Esta transformación depende del sistema semiótico de representación dentro de las representaciones que se producen; es por ello que hay mediaciones semióticas diferentes.
- La actividad matemática requiere una *coordinación interna* la cual debe ser construida; sin esta coordinación dos representaciones diferentes significarán dos objetos diferentes sin ninguna relación entre ambos, incluso si son dos contextos de representación diferentes de un mismo objeto.

Lo anterior, son dos aspectos de la actividad matemática que no se deben considerar de forma separada.

Duval remarca en su teoría de los Registros de Representación Semiótica, la existencia de múltiples y diversos sistemas semióticos que hacen referencia a un mismo concepto matemático, donde cada uno tiene sus dificultades y limitaciones. Entiende por representación semiótica a la producción constituida por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias limitaciones de significado y de funcionamiento (Duval, 1995).

Jaimes et al. (2015) citó a Guzmán (1998) haciendo mención de que las representaciones semióticas son aquellas en las cuales la producción no puede hacerse sin el cambio o movilización de un sistema semiótico: así las representaciones semióticas pueden ser producciones discursivas (en lenguaje natural, en lenguaje formal) o no discursivas (figuras, gráficos, esquemas…).

Para Duval, un sistema semiótico (un sistema de signos) y un sistema de representación son cosas diferentes, de modo que para que un sistema semiótico sea un sistema de representación, debe poder permitir las tres acciones siguientes (Duval, 1993, 1995):

- Identificación: consiste en el reconocimiento de las representaciones que se presentan ante el sujeto, lo que implica una selección de rasgos en el contenido a representar.
- Tratamiento: consiste en la transformación de una representación en otra del mismo sistema.
- Conversión: consiste en la transformación de una representación en una representación de otro sistema semiótico.

Así, cuando un estudiante entra en contacto con un objeto matemático, lo hace a través de una de sus representaciones semióticas, ya que no puede tener acceso directo a él y sólo a través de tales representaciones es aprehensible un objeto matemático. Duval (2004) llamó semiósis y noesis a los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto, la discriminación de una diferencia o la comprensión de una inferencia, más específicamente, a la aprehensión de representaciones semióticas y a la aprehensión conceptual de los objetos representados.

En toda actividad matemática se distinguen dos clases de transformaciones: los tratamientos y las conversiones. Un tratamiento ocurre dentro del mismo registro donde se ha formado, es decir, es una transformación interna y existen reglas propias a cada registro; una conversión consiste en cambiar de un registro a otro, sin cambiar el objeto denotado. La conversión es un proceso cognitivo más complejo que el tratamiento.

Un ejemplo sencillo de tratamiento y conversión es el siguiente:

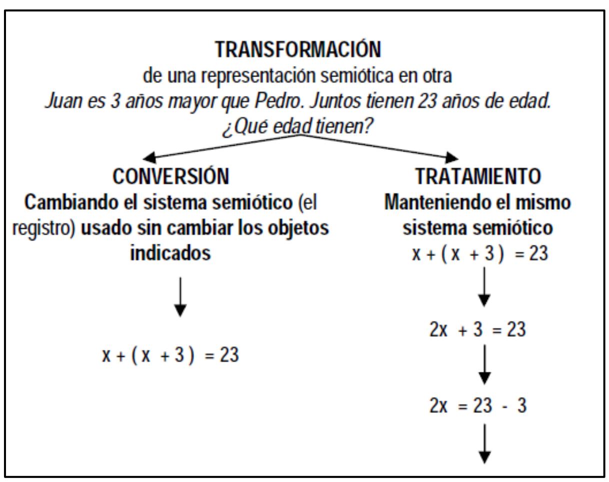


Figura 19. Los dos procesos cognitivos fundamentales del pensamiento (Duval, 2006).

Duval (1996, citado por Barriero et al., 2016) establece que sólo se puede acceder a los objetos matemáticos mediante representaciones que utilizan signos, símbolos, letras, lenguaje natural, etc., llamadas *representaciones semióticas*, las cuales se dan en diferentes tipos de registros semióticos tales como el verbal, algebraico, numérico y gráfico, siendo éstos imprescindibles para comprender el objeto matemático. Además, consideró dos tipos de sistemas de representación de acuerdo a la cantidad de funciones cognoscitivas puestas en juego: el monofuncional y el polifuncional. El primero es usado para una sola función cognoscitiva relacionada con el proceso matemático algorítmico; el segundo, abarca una gama más amplia de funciones cognoscitivas tales como comunicación, imaginación y procesamiento de información.

Para el caso de límite funcional, Blázquez y Ortega (2001, citado por Barriero et al., 2016), menciona que existen diversos sistemas de representación para abordar y trabajar el concepto. Dichos sistemas son:

- *Verbal*: es una aproximación optima de los valores que toma la función en un entorno del punto en cuestión.
- *Numérico*: es un proceso de tendencia basado en una tabla de valores de la variable independiente y sus correspondientes imágenes, donde se mejora cualquier aproximación al límite con valores muy cercanos al punto de interés.
- *Gráfico*: el límite se representa como un punto en el eje de las ordenadas tal que a todo entorno que lo contiene le corresponde otro entorno del punto de interés sobre el eje x, en el que se proyecta.
- *Algebraico*: corresponde a la definición topológica, donde aparecen $\varepsilon - \delta$ que no son otra cosa que los controles de las aproximaciones.

Algunos de los sistemas anteriormente mencionados poseen un carácter dinámico, mientras que otros son estáticos. El uso del sistema verbal y numérico evidencian una concepción de límite de carácter dinámico: la aproximación cumple un rol central. Mientras que el sistema algebraico y gráfico posee un carácter estático, el primero permite ver una concepción de límite estática y abstracta con alto grado de precisión, mientras que el sistema gráfico con menor formalidad, centra la atención en la visualización de las variables que entran en juego.

De manera general y con base en lo anteriormente mencionado, puede considerarse que los registros de representación semiótica que suelen ser utilizados en matemáticas para representar objetos matemáticos son los siguientes:

- Registro numérico
- Registro simbólico
- Registro gráfico
- Registro verbal

Se menciona al registro simbólico debido a que, en matemáticas, se requiere de un apoyo en el lenguaje simbólico formal, el cual, a veces es denominado algebraico (Romiti et al., 2014), donde los símbolos pueden considerarse objetos con valor propio y representan un concepto, una operación, una entidad matemática según ciertas reglas. A su vez, se considera el registro simbólico integrado por dos partes:

- Simbólico de predominio procedimental: aquel en el que el alumno debe aplicar estrategias sencillas o rutinarias para resolver un problema planteado. Un ejemplo de ello es el calcular el límite de una función o casos que requieran factorización.
- Simbólico de predominio conceptual: aquel en donde el alumno necesite conocer y manejar los símbolos matemáticos propios de las definiciones y propiedades de límite. Esto involucra un trabajo más riguroso, un pensamiento más formal y abstracto.

Los cuatro registros mencionados anteriormente son considerados en la realización de este trabajo.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

3.1 TIPO DE ESTUDIO

Esta es una investigación que consiste en la valoración de actividades didácticas diseñadas con el software GeoGebra que buscan favorecer la comprensión del concepto de límite de una función en el infinito en estudiantes de nivel superior. Después de la aplicación de las actividades, las respuestas de los alumnos se analizaron para valorar dos aspectos, su comprensión del concepto y la pertinencia de las actividades. Tanto el diseño de las actividades como el análisis de las respuestas de los alumnos utilizan un método de tipo cualitativo que se sustenta en el marco teórico de APOE y de Registros de Representación Semiótica, explicado en el capítulo 2.

A continuación, se describen las actividades y la población a la que se aplicaron estas.

3.2 DESCRIPCIÓN DE LA POBLACIÓN

Las actividades se aplicaron a un grupo de veinte estudiantes de las carreras de física, matemáticas y actuaría de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, utilizando Classroom de GeoGebra. Los estudiantes se encontraban cursando la materia de Cálculo Diferencial en su segundo semestre de licenciatura. Previamente, habían revisado el tema de límites finitos.

3.3 PROPUESTA DIDÁCTICA (ACTIVIDADES)

El diseño de las actividades propuestas considera las dificultades reportadas en investigaciones previas, y se fundamenta en la teoría APOE y en la de teoría de Registros de Representación Semiótica, por lo que involucran a los registros de representación numérico, simbólico, gráfico y verbal; así como también cuestionamientos que buscan favorecer las estructuras mentales de la Teoría APOE.

Las actividades, de forma conjunta, tienen los siguientes objetivos:

1. *Desarrollo de habilidades matemáticas.*
   Esto se lleva a cabo a partir de que el alumno aborda el problema planteado, analiza y comprende la situación del problema. Construye sus respuestas y plantea soluciones, a partir de la aplicación de sus conocimientos previos; busca, utiliza y relaciona conceptos, realiza razonamientos e inferencias. Se busca que el alumno pueda intuir, visualizar y comprender el comportamiento y límite de una función cuando $x \to \infty$, esto para su futura formalización.

2. *Realización de transformaciones semióticas en y entre los registros de representación involucrados en las actividades.*
   En las actividades planteadas, el alumno debe trabajar en los diferentes registros semióticos. Para responder a los cuestionamientos él tendrá que hacer tratamientos y conversiones en y entre estos registros. Lo anterior, favorecerá la comprensión del concepto límite al infinito

porque lo observará en sus diferentes representaciones. Se espera también que, al trabajar en diferentes registros, el alumno pueda comparar la información, visualizar, deducir y rectificar sus respuestas.

3. *Encapsulación del proceso dinámico del infinito potencial y construcción del objeto infinito actual.*
   La encapsulación del infinito potencial se pretende lograr a través de que el alumno utilice los registros en los que se plantean las actividades. Al hacer uso de la tabla de valores, el alumno puede pensar en que los valores de x pueden continuar incrementándose (o disminuyendo), sin embargo, puede observar que las imágenes de la función presentan una tendencia a hacerse más pequeñas (o más grandes) y que se aproximan a algún valor en específico (o no, según sea el caso) y a través de ello puede inferir si existe o no una cantidad a la cual se aproximan las imágenes de la función; es decir, identificar el límite de una función; o todo lo contrario, identificar que el límite de la función no existe.
   En el capítulo 1, en la sección de antecedentes, se expone una variedad de dificultades de los alumnos ante el análisis matemático y con respecto al estudio de límite de funciones. Una de las dificultades en el estudio del límite de una función es el pensar que el límite no es alcanzado. A través de la interiorización del proceso infinito (infinito potencial), el alumno logra ver al límite de una función como un proceso dinámico en el cual el límite es una cantidad a la que se aproximan las imágenes de la función, más no la alcanzan. Pero, si el alumno construye el objeto mental de infinito actual, entonces puede entender que el límite es alcanzado al menos de manera cognitiva. Para realizar dicha construcción a través de las actividades, los registros utilizados y las preguntas, así como su secuencia, han sido diseñadas y planteadas con la finalidad de que el alumno pueda relacionar unas respuestas con otras, y a través de ellas, llegar a concluir qué pasaría con la función cuando $x \to \infty$, sin necesidad de hacer la acción de evaluar la función en valores más grandes de x; sino más bien, que el alumno logre visualizar la situación como una totalidad y concluir si el límite de la función existe o no.

4. *Construir el concepto de límite al infinito*
   Una vez alcanzados los objetivos anteriores, entonces puede decirse que, en el alumno, los conocimientos adquiridos han pasado a formar parte de su esquema cognitivo y serán usados como herramienta a la hora de abordar alguna problemática o situación futura que represente un reto para él. Uno de estos retos es el abordar el concepto de límite de manera formal. Como se ha mencionado anteriormente, el uso de cuantificadores, elementos simbólicos, la terminología utilizada, el lenguaje formal, lectura e interpretación de gráficas, entre otros, son situaciones que representan una mayor dificultad para el alumno en el momento de su aprendizaje. A través de estas actividades, se pretende que la abstracción y formalización del concepto no sean un problema u obstáculo imposible de superar.

Las actividades diseñadas también se apoyan en las afirmaciones de Tall (1992) y en sus aportaciones de mejora en la enseñanza, las cuales son recogidas por Claros (2010) y son las siguientes:

- Construcción de intuiciones adecuadas para su futura formalización: debido a que la encapsulación permite a un proceso ser concebido como un objeto que podrá ser manipulado en un nivel superior.

- Gráficos en el ordenador: Tall (1992) afirma que el éxito del cálculo está ligado a la versatilidad de representaciones y al movimiento entre unas y otras.

Las actividades propuestas fueron elaboradas en el software GeoGebra, con la finalidad de hacerlas llamativas, didácticas y manipulables. Se trabajaron con las siguientes funciones:

- $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$
- $f(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = x^3$

ACTIVIDAD 1: NAVE ESPACIAL

Objetivo de la actividad

El alumno logra identificar que x toma valores cada vez más alejados del origen, y las imágenes de la función, se aproximan a cero. Trabaja sobre los registros de representación. Puede inferir qué sucederá con la función si $x \to \infty$ y finalmente logra concluir que la nave espacial no volverá al trayecto original.

Indicaciones

Una nave espacial no tripulada despega exitosamente de su base; su misión es explorar el universo. Los científicos e ingenieros que planearon tal hazaña tenían previsto que el trayecto de la nave sería rectilíneo, todo marchaba bien; sin embargo, al cruzar la última capa de la atmósfera de la tierra, la nave sufrió fuertes turbulencias, lo que alteró el trayecto planeado.

Los matemáticos y físicos pusieron manos a la obra, utilizaron el plano cartesiano para proyectar la posición de la nave con respecto a x, siendo el eje x el trayecto inicialmente planeado; así como también modelaron dicha posición de la nave con respecto a la trayectoria planeada (eje x) a través de la función $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

Los expertos, dudosos de qué posición tendría la nave cuando se alejara cada vez más del origen del plano cartesiano (que representa su salida de la tierra), elaboraron una tabla como la siguiente, para valores grandes de x.

x (km)	$\frac{x}{1+x^2}$
20	0.0498753117207
50	0.0199920031987
100	0.0099990001
200	0.0049998750031
500	0.001999992
900	0.0011111097394
1000	0.000999999
1000000	0.000001
200000000	0.000000005
99900000000	0.00000000001
1000000000000	0.000000000001

Tabla 1. Valores correspondientes a la función que modela el trayecto de la nave.

Observa los valores de x y de $f(x)$ que aparecen en la tabla y responde lo siguiente:

1.- ¿Qué pasa con los valores de x? ¿se aproximan a algún número, a cuál? Explica con detalle.

2.- ¿Qué pasa con los valores de $f(x)$? ¿se aproximan a algún número, a cuál? Explica con detalle.

3.- Imagina que el valor de x continúa incrementándose, ¿será posible que $f(x)$ sea cero en algún momento?

4.- De acuerdo a la tabla de valores ¿Qué pasa con la trayectoria de la nave conforme se aleja del punto de partida? ¿Será posible que en algún momento regrese al trayecto planeado sobre el eje x?

Usa el botón de "play" en el applet siguiente, observa la gráfica, puedes reiniciar o detener en caso de que sea necesario y responde a las preguntas siguientes:

Figura 20. Applet de la actividad. Fuente: elaboración propia.

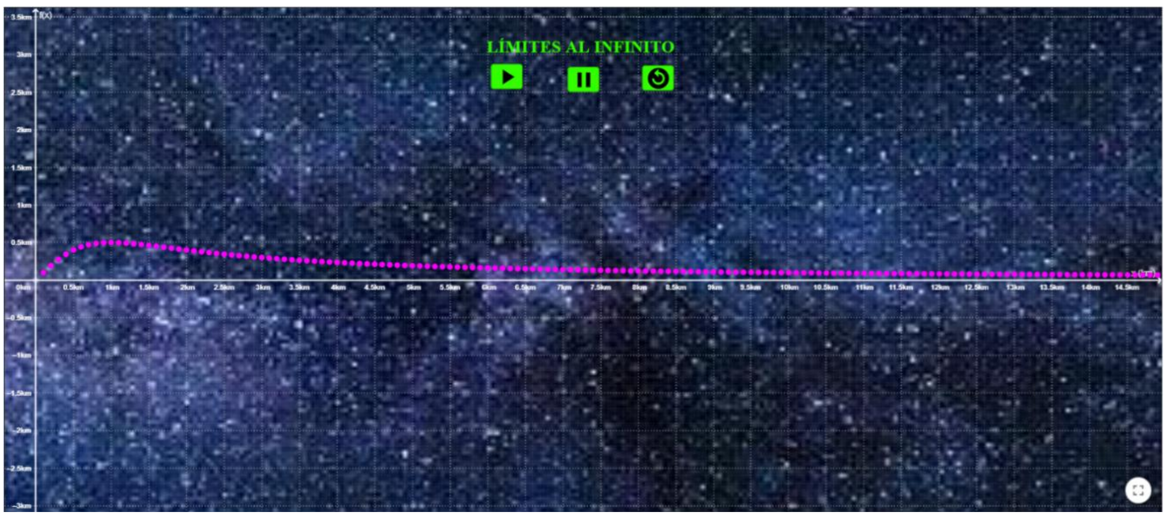


Figura 21. Imagen del applet después de que el estudiante da play. Fuente: elaboración propia.

5.- Según la gráfica, ¿cuál es el comportamiento de la función con respecto a x?

a) se acercan al eje x b) No es posible saberlo

Justifica tu respuesta a la pregunta anterior.

6.- Existe algún valor de x para el cual $f(x)$ es igual a 0? Justifica tu respuesta.

Cuando se piensa que x puede tomar valores más grandes que 100; 1,000,000 ó 999,000,000,000; se dice entonces que x puede tomar valores infinitamente grandes, y se usa el símbolo ∞ para *representar simbólicamente a dichas cantidades inimaginablemente grandes; cabe destacar que ∞ NO es un número.*

7.- Si x toma valores infinitamente grandes ($x \to \infty$), ¿qué sucede con los valores de $f(x)$? Justifica tu respuesta.

Descripción de la actividad

La actividad propone una situación hipotética y fantasiosa, con la finalidad de atraer la atención del estudiante. Se planteó en el contexto del espacio infinito para favorecer la comprensión del infinito potencial y el infinito actual, a través de la idea de que la nave avanzará y avanzará sin fin; el infinito actual, englobando todo este comportamiento en el concepto de límite.

Se propone al alumno que imagine, apoyándose de la tabla de valores, qué sucede cuando la nave se encuentra más alejada, incluso si x toma valores superiores a los propuestos en la tabla de valores. Las preguntas de la 1 a la 4 llaman su atención y a su reflexión sobre los valores numéricos de x y de $f(x)$, con lo cual, se realiza un tratamiento en el registro numérico.

Después se le invita a manipular un applet en el que puede observar la trayectoria de la nave espacial. Cuando la nave comienza a avanzar hacia la derecha de la gráfica, se marca el recorrido dejando un rastro, esto para que el alumno tenga la idea de cómo se comporta esta función cuando los valores de x aumentan su valor.

Las preguntas de la 5 a la 7 fomentan tratamientos en el registro gráfico y verbal, así como la interiorización de acciones que permitirán al estudiante concebir la aproximación de los valores de $f(x)$ al valor de cero como un proceso.

Para favorecer la encapsulación del proceso anterior, y que el estudiante conciba que, en el infinito, el límite de la función es cero, se recomienda que el profesor dé la siguiente explicación.

EXPLICACIÓN:

Las imágenes de la función, es decir, las evaluaciones de la función en cada valor de x, conforme x toma valores cada vez más grandes, se acercan cada vez más a 0, lo que significa que para cualquier valor "inimaginablemente grande" o "infinitamente grande" que x pueda tomar, la función tomará valores cada vez "más pequeños" que se van aproximando cada vez más 0, siendo este valor el límite de la función.

Dicho de una manera diferente: El límite de $f(x)$ cuando x tiende a infinito ($x \to \infty$) es 0.

Lo anterior puede pensarse como: El límite de la función $f(x)$ cuando x se hace cada vez más grande, se aproxima a 0. Y la manera simbólica y formal de representarlo es la siguiente:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{1 + x^2} = 0$$

La finalidad de esta explicación es introducir un lenguaje simbólico y algebraico, además del concepto formal. Es posible que una vez finalizada la actividad y dada su respectiva explicación, el maestro les muestre a los alumnos cómo operar de manera algebraica.

Dentro de la actividad, se hace uso de lenguaje algebraico y simbólico, esto al representar el comportamiento de la nave a través de una función, así como también la simbología utilizada para representar objetos matemáticos involucrados. Lo que fomenta que el alumno realice tratamientos sobre el registro simbólico.

ACTIVIDAD 2: LÍMITES AL INFINITO Y MENOS INFINITO (PARTE 1)

Objetivo de la actividad

El alumno comprende y utiliza correctamente al menos un registro de representación, se espera también que sea capaz de realizar transformaciones semióticas a dicho registro. Infiere qué pasa con los valores de la función cuando $x \to \pm\infty$ y logra deducir si estos valores se aproximan a un valor en específico. Identifica cuál es el límite de la función cuando $x \to \pm\infty$. Reconoce características importantes de la función planteada.

Indicaciones

A continuación, se presentan las tablas de valores y la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ que te ayudarán a responder a las preguntas planteadas.

Tabla: valores positivos de x

x	$\frac{1}{x}$
1	1
2	0.5
6	0.1666666667
8	0.125
10	0.1
24	0.0416666667
50	0.02
100	0.01
1000	0.001
5000	0.0002
1000000	0.000001
1000000000	0.000000001

Tabla 2. Tabla de valores para valores positivos de x, perteneciente a la actividad 2.

Analiza la tabla de valores anterior, lee con atención cada pregunta y responde:

1.- ¿A qué valor se aproxima la función $f(x)$ cuando x crece sin límite, es decir, $x \to +\infty$?

2.- ¿Qué pasa con los valores que toma la función $f(x)$ cuando x crece sin límite, es decir, $x \to +\infty$?

x	$\frac{1}{x}$
-1	-1
-2	-0.5
-6	-0.1666666667
-8	-0.125
-10	-0.1
-24	-0.0416666667
-50	-0.02
-100	-0.01
-1000	-0.001
-5000	-0.0002
-1000000	-0.000001
-100000000	-0.00000001

Tabla: valores negativos de x

Tabla 3. Tabla de valores para valores negativos de x, perteneciente a la actividad 2.

3.- ¿Qué pasa con los valores que toma la función $f(x)$ cuando x decrece sin límite, es decir, $x \to -\infty$?

4.- ¿A qué valor se aproxima la función $f(x)$ cuando x decrece sin límite, es decir, $x \to -\infty$?

Usa el siguiente applet, puedes introducir cualquier valor para x, por ejemplo $x = 10$ ó $x = -10$, incluso puedes arrastrar el punto; esto te ayudará a visualizar qué pasa con la gráfica para diversos valores de x, tanto positivos como negativos.

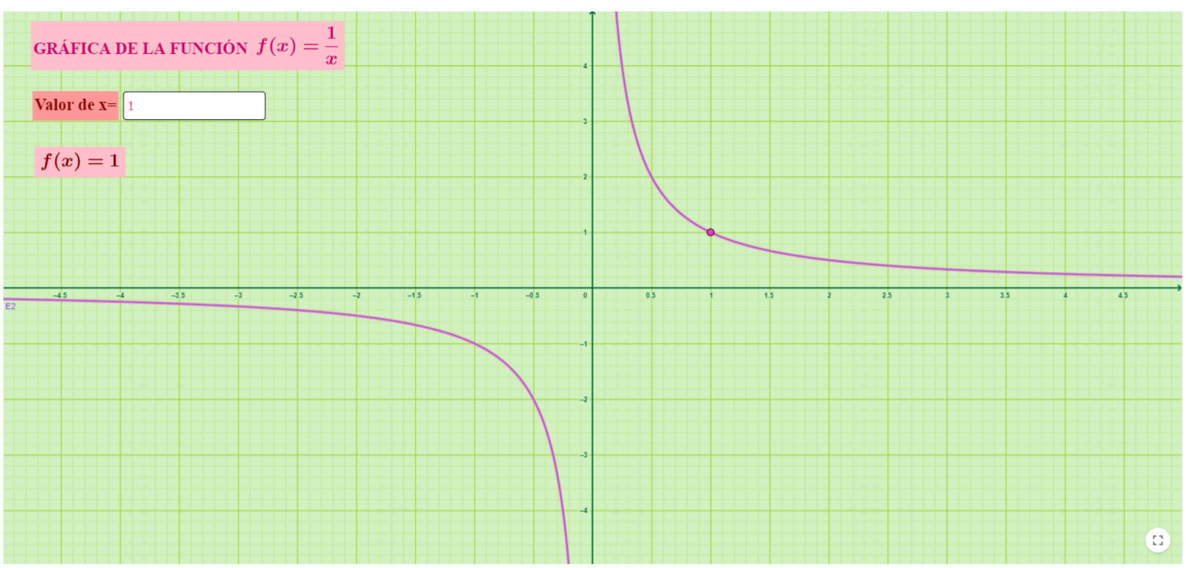


Figura 22. Applet de la actividad 2. [Captura] Fuente: elaboración propia.

Observa la gráfica, analiza las tablas de valores, lee con atención cada pregunta y responde:

5.- ¿A qué valor se aproxima la función $f(x)$ cuando x crece sin límite, es decir, $x \to +\infty$?

6.- ¿A qué valor se aproxima la función $f(x)$ cuando x decrece sin límite, es decir, $x \to -\infty$?

Con base en las respuestas anteriores, responde:

7.- El límite de la función $f(x)$ cuando $x \to +\infty$, ¿existe? De existir, ¿cuál es? Justifica tu respuesta.

8.- El límite de la función $f(x)$ cuando $x \to -\infty$, ¿existe? De existir, ¿cuál es? Justifica tu respuesta.

Pregunta extra:

¿Qué pasa con la función $f(x)$ cuando $x = 0$? Justifica tu respuesta.

En esta parte de la actividad, se ofrece un recurso para aclarar o reforzar la respuesta dada a la pregunta anterior:

Título del video: ¿Por qué un número dividido entre cero "da" infinito?

Canal: Derivando

https://www.youtube.com/watch?v=5mjX7g9EbGY

Descripción de la actividad

En esta actividad se propone al alumno analizar una función a través de los registros de representación involucrados. El alumno cuenta con tablas de valores, para valores positivos y negativos de x, y a través de las preguntas de la 1 a la 4, se espera que realice un tratamiento en el registro numérico y conversiones del registro numérico al registro verbal. El lenguaje utilizado en las preguntas es, tanto formal (usando simbología matemática) como informal, con la finalidad de favorecer el conocimiento del objeto matemático en el registro verbal y registro simbólico.

Posteriormente, se le invita al alumno a manipular un applet el cual ha sido diseñado para que él pueda visualizar la gráfica en cualquier punto; incluso, pueda arrastrar el punto y esto hará crecer o disminuir la vista gráfica, mostrando que las asíntotas formadas no terminan. Las preguntas de la 5 a la 8 fomentan transformaciones sobre el registro gráfico, y la interiorización de las acciones le permitirán concebir la aproximación de los valores de $f(x)$ al valor de cero como un proceso.

Para favorecer la encapsulación del proceso anterior y la concepción de que, en el infinito, el límite de la función es alcanzable, es necesario que un profesor dirija y retroalimente la actividad, implementando el lenguaje simbólico y matemático. Al hacer esto, la idea de que x toma una infinidad de valores se engloba en $x \to \infty$, esto da el salto a infinito actual.

Además, se plantea una pregunta extra la cual pretende que el alumno reflexione y responda sobre qué sucede con la función cuando $x = 0$, lo que permitirá observar sus conocimientos previos referentes a funciones.

Actividad 3: Límites al infinito y menos infinito (parte 2)

Objetivo de la actividad

El alumno realiza transformaciones semióticas en al menos un registro de representación. Infiere qué pasa con los valores de la función cuando $x \to \pm\infty$, y determina que los valores no se aproximan a ningún valor en específico. Logra deducir cuál es el límite de la función cuando $x \to \pm\infty$. Reconoce características importantes de la función planteada y hace comparaciones de la función actual con la función planteada en la actividad anterior.

Indicaciones

A continuación, se presentan las tablas de valores y la gráfica de la función $f(x) = x^3$, que te ayudarán a responder a las preguntas planteadas.

Tabla: valores positivos de x	
x	x^3
1	1
2	8
6	216
8	512
10	1000
24	13824
50	125000
100	1000000
1000	1000000000
5000	125000000000
1000000	1000000000000000000
1000000000	1000000000000000000000000000

Tabla 4. Tabla de valores para valores positivos de x, perteneciente a la actividad 3.

Analiza la tabla de valores anterior, lee con atención cada pregunta y responde:

1.- ¿Qué pasa con los valores que toma la función $f(x)$ cuando x crece sin límite, es decir, $x \to \infty$?

2.- ¿A qué valor se aproxima la función $f(x)$ cuando x crece sin límite, es decir, $x \to +\infty$?

Tabla: valores negativos de x	
$-x$	x^3
-1	-1
-2	-8
-6	-216
-8	-512
-10	-1000
-24	-13824
-50	-125000
-100	-1000000
-1000	-1000000000
-5000	-125000000000
-1000000	-1000000000000000000
-1000000000	-1000000000000000000000000000

Tabla 5. Tabla de valores para valores negativos de x, perteneciente a la actividad 3.

Analiza la tabla de valores anterior, lee con atención cada pregunta y responde:

3.- ¿Qué pasa con los valores que toma la función $f(x)$ cuando x decrece sin límite, es decir, $x \to -\infty$?

4.- ¿A qué valor se aproxima la función $f(x)$ cuando x decrece sin límite, es decir, $x \to -\infty$?

Usa el siguiente applet, puedes introducir cualquier valor para x, por ejemplo $x = 10$ ó $x = -10$, incluso puedes arrastrar el punto; esto te ayudará a visualizar qué pasa con la gráfica para diversos valores de x, tanto positivos como negativos.

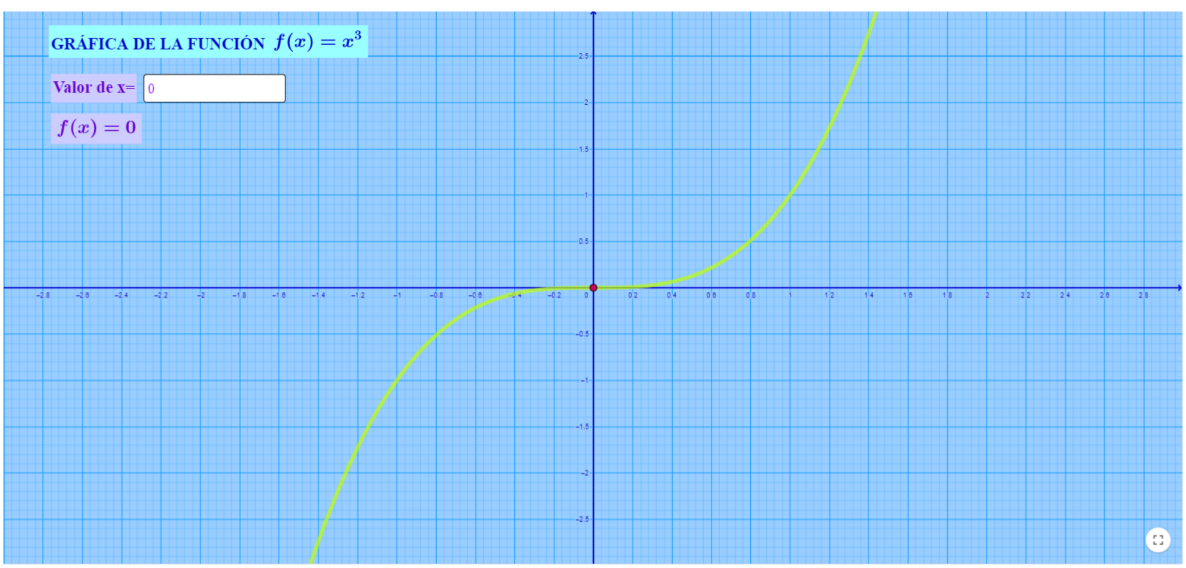


Figura 23. Applet de la actividad. [Captura] Fuente: Elaboración propia.

5.- ¿A qué valor se aproxima la función $f(x)$ cuando x crece sin límite, es decir, $x \to +\infty$?

6.- ¿A qué valor se aproxima la función $f(x)$ cuando x decrece sin límite, es decir, $x \to -\infty$?

Con base en las respuestas anteriores, responde:

7.- El límite de la función $f(x)$ cuando $x \to +\infty$, ¿existe? De existir, ¿cuál es? Justifica tu respuesta.

8.- El límite de la función $f(x)$ cuando $x \to -\infty$, ¿existe? De existir, ¿cuál es? Justifica tu respuesta.

Pregunta extra:

Compara esta actividad (Actividad 3: Límites al infinito y menos infinito (parte 2)) con la actividad anterior (Actividad 2: Límites al infinito y menos infinito (parte 1)), responde y justifica tus respuestas:

¿Qué diferencias encuentras en el comportamiento de las funciones $f(x) = x^3$ y $f(x) = \frac{1}{x}$? ¿Los límites de ambas funciones cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ existen?

Descripción de la actividad

En esta actividad también se propone una función que debe ser analizada por el alumno, la cual podría resultar sencilla en comparación con las funciones anteriormente planteadas, sin embargo, representa un reto distinto dado que esta función no tiene límite.

Cuenta también con tablas de valores, para valores tanto negativos como positivos de x. A través de las preguntas de la 1 a la 4, se espera que el alumno realice un tratamiento en el registro numérico y conversiones de este sobre el registro verbal.

Las preguntas planteadas contienen lenguaje formal e informal con la finalidad de favorecer la construcción del objeto matemático en el registro verbal y simbólico.

El applet propuesto para esta actividad está diseñado para que el alumno pueda visualizar la gráfica de la función en cualquier punto, incluso puede arrastrar el punto con el cursor. Las preguntas de la 5 a la 8 pretenden que el alumno realice transformaciones sobre el registro gráfico al registro verbal, así como fomentar la interiorización de acciones que le permitan construir la concepción del proceso infinito. En este punto, se espera que el alumno sea capaz de mostrar indicios de encapsulación del proceso anteriormente mencionado, esto a través de concluir que el límite de la función propuesta es infinito o no existe.

Para favorecer la total encapsulación del proceso anteriormente mencionado, se recomienda que la actividad sea dirigida y retroalimentada por el profesor, el cual trabaje sobre los registros en los que se observaron dificultades, e instruya al alumno en el trabajo sobre el registro simbólico.

CAPÍTULO 4. APLICACIÓN DE ACTIVIDADES, ANÁLISIS Y MEJORAS

4.1 APLICACIÓN, ALGUNOS RESULTADOS Y ÁNALISIS LOCALES

Después de la aplicación de las actividades y basándose en la teoría APOE, así como en la teoría de Representaciones Semióticas de Duval, fue posible analizar las respuestas de cada alumno, lo que permitió identificar de manera individual cómo comprende el concepto de límite en el infinito. También el uso de los registros de representación y sus habilidades matemáticas.

En la tabla 6 se presentan los niveles en los que se clasificaron a los alumnos y los aspectos que se tomaron en cuenta para definir cada nivel. Después de la tabla se describen dichos niveles de manera extensa.

Nivel	**Aspectos identificados sobre Registros de Representación Semiótica**	**Aspectos identificados sobre la Teoría APOE**	**Otros aspectos importantes**
1	El alumno no realiza las transformaciones semióticas requeridas por las actividades. Se identifica una falta de coordinación interna de los registros de representación semiótica.	Se observa una falta de encapsulación del proceso infinito como infinito actual (objeto). Para justificar alguna respuesta, el alumno hace uso de acciones específicas como evaluar en la función un objeto o valor, lo que indica que recién comienza la construcción de infinito potencial y actual. No identifica cuál es el valor al que se aproximan las imágenes de la función ni cuál es el límite de la función.	El alumno tiende a argumentar con conceptos u objetos matemáticos de manera errónea. Tampoco comprende el comportamiento de la función. Se observa dificultad para realizar inferencias y deducciones.
2	El alumno realiza algunas conversiones, pero falla en otras. Existe dificultad en los tratamientos requeridos.	Presencia de la concepción del infinito potencial. No identifica cuál es el valor al que se aproxima la función o cuál es el límite de la función. El alumno no distingue cuándo el límite es alcanzado o no.	El alumno presenta dificultad para argumentar respuestas, realizar inferencias y deducciones. Dificultad para comprender el comportamiento de la función.
3	El alumno realiza tratamientos y conversiones en y entre los registros involucrados en las actividades.	Presencia de encapsulación del proceso infinito como infinito actual (objeto) y desencapsulación del objeto. Distingue cuándo el límite de una función es	Comprende el comportamiento de la función. Realiza inferencias y deducciones.

	Manifiesta coordinación interna de los registros de representación.	alcanzable y cuándo no. Identifica cuál es el valor al que se aproxima la función y cuál es el límite de dicha función.	

Tabla 6. Niveles de comprensión identificados en las respuestas de los alumnos.

DESCRIPCIÓN DE LOS NIVELES DE COMPRENSIÓN

Nivel 1

En esta categoría, el alumno evidencia dificultad al trabajar sobre los registros involucrados en la actividad. No realiza las transformaciones esperadas sobre los registros de representación. La falta de coordinación interna se hace visible cuando el alumno da significados distintos o interpreta información distinta entre diferentes registros de representación los cuales se encuentran representando un mismo concepto.

El alumno puede llegar a presentar una distorsión de los conceptos y objetos que ha abordado en algún momento, y los representa de una manera inadecuada o confusa. La forma en la que expresa dichos objetos y conceptos, muestra que no se han comprendido completamente, o están siendo interpretados de una forma totalmente distinta a la que deberían interpretarse.

Con respecto al infinito potencial y actual el alumno requiere de más información de la presentada en las tablas de valores para comprender qué le sucede a la función a medida que $x \to \pm\infty$, respectivamente. Como consecuencia de ello, el alumno evidencia una concepción acción de infinito y no ha construido el proceso de este concepto. Además, puede suceder que el alumno no identifique a qué valor se aproxima la función y como consecuencia, no identifique cuál es el límite de la función; o incluso puede suceder que el alumno espere encontrar un valor x tal que haga que la función tome ese valor exacto que “posiblemente” sea el límite.

Nivel 2

El alumno muestra comodidad al trabajar en determinado registro de representación, sin embargo, comete errores en otro registro. Un ejemplo de esto es cuando el alumno realiza transformaciones en y del registro de representación gráfica al verbal de manera exitosa; sin embargo, tiene problemas para trabajar con la tabla de valores (registro numérico) y realizar las respectivas transformaciones al registro verbal.

Es posible identificar en el alumno la presencia del concepto de infinito potencial, ya que en sus respuestas se evidencia el pensamiento de que, el proceso de sustitución de valores en la función continuará indefinidamente, esto lleva a buscar al alumno:

- “Un valor exacto” que, en determinado momento, tomarán las imágenes de la función, siendo este el límite de dicha función.
- Un valor al cual las imágenes de la función se aproximarán, pero jamás serán igual; por lo tanto, puede llegar a deducir que el límite no existe.

El alumno, al fallar en realizar transformaciones a algún registro de representación, hace inferencias y conclusiones con inseguridad, lo que implica falta de comprensión del tema.

En este nivel el alumno muestra indicios de concepción acción, así como construcción del proceso infinito, sin embargo, evidencia problemas de encapsulación de dicho proceso. Además, es posible notar que el alumno tiene dificultades para argumentar sus respuestas, usando términos, objetos y conceptos matemáticos de manera errónea.

Nivel 3

El alumno muestra comprensión, habilidad y comodidad al utilizar y realizar transformaciones en los registros de representación de la actividad. Manifiesta una coordinación interna de los registros de representación, lo que implica una comprensión del comportamiento de la función y del concepto planteado. En este nivel, el alumno realiza inferencias, deducciones y conclusiones coherentes, así como argumentaciones con objetos y conceptos matemáticos que comprende.

Manifiesta la concepción del infinito potencial e infinito actual (objeto) y es capaz de desencapsular dicho objeto, según la situación a la que se esté enfrentando dentro de la actividad. Identifica a qué valor se aproxima la función, así como cuál es el límite de dicha función. A su vez, es capaz de identificar, cuándo y cómo un límite es alcanzado.

De los veinte alumnos a los que se les aplicaron las actividades, se seleccionaron a cuatro de ellos para mostrar sus respectivas respuestas. Dichos alumnos son etiquetados como E1, E2, E3, E4 y fueron clasificados en el nivel 1 dadas sus respuestas en la primera actividad. Se dará seguimiento a su progreso a través de la secuencia de actividades, así como se reportará de manera general el avance de los alumnos a través de las actividades.

4.1.1 NAVE ESPACIAL

En la aplicación de la primera actividad, de un total de veinte estudiantes, la mitad dio respuestas que se ubicaron en el nivel 3 y el resto dio respuestas de nivel 1.

Los alumnos clasificados en el nivel 3 lograron identificar que, mientras los valores de x incrementaban, las imágenes de la función se aproximaban a 0, manifestando la estructura de proceso infinito; y, en sus justificaciones manifestaron la noción de infinito actual. Además, las respuestas evidencian que se realizaron las transformaciones requeridas sobre los registros numérico, simbólico, gráfico y verbal; mostrando coordinación interna. En contraste con lo anterior, los alumnos clasificados en el nivel 1 manifestaron dificultades al trabajar sobre los registros de representación, más específicamente sobre el registro de representación numérico y verbal.

Como se mencionó anteriormente, a continuación, se muestran las respuestas dadas por los alumnos E1, E2, E3 y E4.

Observa los valores de x y de $f(x)$ que aparecen en la tabla y responde lo siguiente:

1.- ¿Qué pasa con los valores de x? ¿se aproximan a algún número, a cuál? Explica con detalle.

Nivel 1:

E1: *Se aproximan al 20 de forma ascendente y de forma descendiente a una cantidad grande.*

E2: *Se aproximan a 1, ya que, tomando la última columna vemos a 1.10^-12.*

E3: *Los valores de "x" se van determinando conforme la distancia de la nave a la tierra, como podemos ver en la tabla el valor llega hasta una distancia grande, más no nos indica alguna aproximación ni de arriba para abajo ni de abajo para arriba, que quiero decir, pues que no me maneja en la tabla en que parte por decirse exacto se encuentra la nave " x " de distancia a la tierra, por lo tanto, puedo confirmar que " x " no tiene alguna aproximación correcta.*

E4: *Sí, a 1,000,000,000,000.*

2.- ¿Qué pasa con los valores de $f(x)$? ¿se aproximan a algún número, a cuál? Explica con detalle.

Nivel 1:

E1: *Se aproximan al 0.05 de forma ascendente y de forma descendente a un número muy chico con varios decimales.*

E2: *Se aproximan al 0.05 de forma ascendente y de forma descendente a un número muy chico con varios decimales.*

E3: *Los valores de $f(x)$ los interpreto como la aproximación a las coordenadas o lugar donde esté la nave, en este caso podemos ver que va dando cada vez más cerca el punto exacto a la nave, es decir, el punto "0".*

E4: *Sí, a -0.1*

3.- Imagina que el valor de x continúa incrementándose, ¿será posible que $f(x)$ sea cero en algún momento?

Nivel 1:

E1: *No, siempre va a existir un número menor que no sea 0.*

E2: *Nunca.*

E3: *Como observamos en la tabla de datos cada vez la distancia que tomamos como " x " entre más grande sea el valor, más exacto será para $f(x)$ determinar donde se encuentre la nave, por tanto, si es posible que $f(x)$ sea "0" en cierto punto de un valor de " x ".*

E4: *Sí.*

4.- De acuerdo a la tabla de valores ¿Qué pasa con la trayectoria de la nave conforme se aleja del punto de partida? ¿Será posible que en algún momento regrese al trayecto planeado sobre el eje x?

Nivel 1:

E1: *No creo ya que cada vez se aleja más.*

E2: *No es posible, ya que no es exacto el trayecto.*

E3: *En la tabla maneja que la trayectoria tuvo una ligera inclinación al no poder ascender verticalmente en un punto Y, entonces dependiendo de la distancia de alejamiento pudieron enderezar las coordenadas como era debido, no obstante, también está la posibilidad de que el trayecto sufra otro desvío hacia el eje ($-x$) si llega hacer la función* $f(x) > 0$.

E4: *No porque cada vez se aleja más.*

5.- Según la gráfica, ¿cuál es el comportamiento de la función con respecto a x?

a) Se acercan al eje x b) No es posible saberlo

Justifica tu respuesta a la pregunta anterior.

Nivel 1:

E1: *a)- Cada vez se va acercando mucho más al eje* x *positivo.*

E2: *a)- Se acerca al eje, pero nunca lo va a tocar.*

E3: *a)- Empieza con una ligera elevación en cierto punto de "* x *", pero después su trayectoria se vuelve más cercano al eje* x *haciéndose cada vez más aproximado a él.*

E4: *a)- Porque se ve claramente en la gráfica, va en disminución, acercándose al eje de las* x.

6.- Existe algún valor de x para el cual $f(x)$ es igual a 0? Justifica tu respuesta.

Nivel 1:

E1: *No, siempre existirá un número menor que no sea igual a 0.*

E2: *No sería posible tomar un número* x*, porque no será 0.*

E3: *En la gráfica solo vemos a* $f(x)$ *aproximarse al eje* x*, por lo tanto, existe un* x *que pertenece a los enteros tal que* $x = 0$.

E4: *No sé concretamente, pero creo que entre más grande se vaya haciendo el valor en* x*, en algún valor del mismo* $f(x)$ *se hará* y.

7.- Si x toma valores infinitamente grandes ($x \to \infty$), ¿qué sucede con los valores de $f(x)$? Justifica tu respuesta.

Nivel 1:

E1: *Toma igual valores infinitos negativos.*

E2: *Entonces el límite no existe.*

E3: *Sí manejamos a* $x = a$ *una unidad infinita es decir cualesquiera, mi* $f(x)$ *también puede tender a ser infinito.*

E4: *También se vuelven proporcionalmente infinitamente grandes.*

ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD 1

En la sección anterior se muestran ejemplos de respuestas dadas por alumnos clasificados en el nivel 1. Es posible apreciar que estos alumnos presentan dificultad en el registro numérico, así como también en el registro verbal. Con respecto a las conversiones y los tratamientos requeridos, se puede identificar que existe dificultad en la lectura y extracción de la información disponible en cada registro, como se puede ver en la interpretación del problema planteado verbalmente y a su vez la falta de coordinación interna. Además, se puede apreciar que el alumno llega a realizar evaluaciones en la función de algún objeto matemático; en otras respuestas analizadas, también se ha identificado la evaluación de cantidades específicas en la función, lo que indica que recién se inicia la construcción de la noción de infinito potencial y actual. Es posible notar que el alumno E3 llega a justificar sus respuestas a través de conceptos u objetos matemáticos que no comprende en su totalidad.

El objetivo de esta actividad no fue alcanzado por los alumnos clasificados en el nivel 1.

4.1.2 LÍMITES AL INFINITO Y MENOS INFINITO (PARTE 1)

De manera general y con respecto a esta actividad, de veinte estudiantes trece se ubicaron en el nivel 3, cuatro en el nivel 2 y tres en el nivel 1.

Para la clasificación correspondiente a esta actividad, se pudo observar que:

- De diez alumnos que se clasificaron en el nivel 1 en la actividad anterior, cuatro se posicionaron en el nivel 3, tres se posicionaron en el nivel 2 y tres más permanecieron en el nivel 1.
- Solo uno de los alumnos que perteneció al nivel 3 en la actividad anterior, en esta ocasión se posicionó en el nivel 2.

Los alumnos pertenecientes al nivel 3, dieron respuestas que evidencian sus habilidades matemáticas y la habilidad de cambiar de registro de representación, así como realizar transformaciones sobre dichos registros. Se destaca la correcta lectura e interpretación que dieron a las tablas de valores, situación que resultó ser un gran obstáculo en contraste con alumnos clasificados en nivel 1. Además, los alumnos clasificados en nivel 3 fueron capaces de identificar el valor al que se aproxima la función, así como cuál es el límite de dicha función. También, pueden identificar cuándo un límite es alcanzado.

Los alumnos pertenecientes a la clasificación de nivel 2 fueron capaces de identificar el valor al que las imágenes de la función se aproximaban, o bien, el límite de la función; que a diferencia de los alumnos de nivel 1, no pudieron lograr. Estos alumnos mostraron inconsistencias en sus actividades. Ambas clasificaciones presentaron dificultades en la comprensión de la función en sus diferentes representaciones, impidiéndoles concluir adecuadamente la actividad.

A continuación, se muestran las respuestas dadas por los alumnos E1, E2, E3 y E4 a la segunda actividad con su respectiva clasificación.

Analiza la tabla de valores anterior, lee con atención cada pregunta y responde:

1.- ¿A qué valor se aproxima la función $f(x)$ cuando x crece sin límite, es decir, $x \to +\infty$?

Nivel 2:

E1: *A valores con varios decimales.*

E3: $f(x)$ *tiende a tener una aproximación a "0", no obstante, si* x *implica a infinito yo diría que* $f(x) = 0 < x$ *más no igual a 0.*

Nivel 1:

E2: *A* $+\infty$.

E4: *A 0 y pronto a los negativos.*

2.- ¿Qué pasa con los valores que toma la función $f(x)$ cuando x crece sin límite, es decir, $x \to +\infty$?

Nivel 2:

E1: *Comienza a tomar valores infinitos pero decimales sin llegar a 0.*

E3: *Que los valores de* $f(x)$ *son más próximos a 0.*

Nivel 1:

E2: *Que el número seguirá creciendo exponencialmente.*

E4: *Se acercan a los negativos.*

3.- ¿Qué pasa con los valores que toma la función $f(x)$ cuando x decrece sin límite, es decir, $x \to -\infty$?

Nivel 2:

E1: *Comienza a decrecer en el lado de los números negativos.*

E3: $f(x)$ *tiende a tener una aproximación a "0", no obstante, si* $-x$ *implica a infinito negativo,* $f(x) = 0 > x$ *más no igual a 0.*

Nivel 1:

E2: *Se va tornando -∞.*

E4: *Tienden a los números negativos.*

4.- ¿A qué valor se aproxima la función $f(x)$ cuando x decrece sin límite, es decir, $x \to -\infty$?

Nivel 2:

E1: *A valores negativos decimales infinitos.*

E3: $f(x)$ *se aproximará a cero, más no podrá ser 0 debido a que no hay regla que determine que el espacio entre un dato a otro no exista un infinito, es decir que dentro de algo finito podamos no manejar una teoría de existente algo infinito.*

Nivel 1:

E2: *El número seguirá decreciendo cada vez más, entonces los valores de* x *van aumentando.*

E4: *A -1.*

Después de usar el applet:

5.- ¿A qué valor se aproxima la función $f(x)$ cuando x crece sin límite, es decir, $x \rightarrow +\infty$?

Nivel 2:

E1: *A 2.*

E3: $f(x)$ *se aproxima a 0.*

Nivel 1:

E2: *Se aproxima a 1.*

E4: *A 0.*

6.- ¿A qué valor se aproxima la función $f(x)$ cuando x decrece sin límite, es decir, $x \rightarrow -\infty$?

Con base en las respuestas anteriores, responde:

Nivel 2:

E1: *A -3.*

E3: *También se aproxima a 0 desde sus* x.

Nivel 1:

E2: *A -1.*

E4: *A – infinito.*

7.- El límite de la función $f(x)$ cuando $x \rightarrow +\infty$, ¿existe? De existir, ¿cuál es? Justifica tu respuesta.

Nivel 2:

E1: *Es 0 ya que seguirá tomando decimales hasta que sea 0.*

E3: *Existe por orden de números enteros, que sería en este caso 0, más de acuerdo a como está establecida la función* $f(x)$ *cual sea* x *nunca será igual a 0.*

Nivel 1:

E2: *El límite de la función* $f(x)$ *cuando* x *tiende a infinito es igual a* k, *pero nunca la llega a tocar.*

E4: *No.*

8.- El límite de la función $f(x)$ cuando $x \rightarrow -\infty$, ¿existe? De existir, ¿cuál es? Justifica tu respuesta.

Nivel 2:

E1: *0, tomará decimales hasta que llegue al 0.*

E3: *Por orden de números enteros* $f(x)$ *tiende a tener aproximación al 0 mas no podrá ser = a él.*

Nivel 1:

E2: *Es - ∞, ya que la función tiende irse hacia abajo.*

E4: *No.*

Pregunta extra:

¿Qué pasa con la función $f(x)$ cuando $x = 0$? Justifica tu respuesta.

Nivel 2:

E1: *Da infinito ya no se puede dividir un numero entre 0 y al ser 0 toma valores infinitos.*

E3: *Es indefinido pues el valor de cero no es divisible ante nada.*

Nivel 1:

E2: *No existe, porque no está definida.*

E4: *No existe.*

ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD 2

En esta ocasión, se contrastan respuestas diferentes, correspondientes a las clasificaciones de nivel 1 y nivel 2.

Es posible notar que, en el caso de los alumnos que pertenecen a la clasificación de nivel 2, llegan a concluir cuál es valor al que se aproxima la función o cuál es el límite de la función. Es decir, el alumno puede llegar a deducir, a través de la información obtenida, al trabajar con los registros de representación, cuál es valor al que se están aproximando las imágenes de la función a medida que $x \to \pm\infty$ (respectivamente), pero puede llegar a tener dificultades para deducir cuál es el límite de la función, o viceversa. Así como también, es notoria la dificultad para identificar cuándo y cómo es alcanzable el límite de una función. En esta situación, se aprecia que el alumno busca un valor "exacto" y argumenta, pensando en que el límite "es un valor exacto". Como ya se mencionó anteriormente en el marco teórico, esta es una de las dificultades que suelen presentar los alumnos a la hora de abordar el concepto límite al infinito.

Con lo que respecta a los alumnos de nivel 1, nuevamente se observa la falta de coordinación interna, la dificultad para realizar transformaciones a los registros de representación involucrados en la actividad, así como la dificultad para identificar a qué valor se aproximan las imágenes de $f(x)$ y cuál es el límite de dicha función.

Es posible notar en los alumnos E2 y E3, el uso incorrecto de términos y conceptos matemáticos en las argumentaciones de sus respuestas.

4.1.3 LÍMITES AL INFINITO Y MENOS INFINITO (PARTE 2)

Para esta actividad del total de 20 alumnos, 18 se encuentran clasificados en el nivel 3 y dos en el nivel 1. Con respecto a la clasificación de esta actividad, se observó que:

- Entre los 18 alumnos pertenecientes al nivel 3, se encuentran cuatro que en la actividad anterior se posicionaron en el nivel 2 y tres que se posicionaron en el nivel 1.
- Solo un alumno que anteriormente se encontraba en el nivel 2 y otro más que perteneció al nivel 3, ahora se encuentran clasificados en el nivel 1.

En esta actividad, la mayoría de los estudiantes fueron clasificados en el nivel 3, lo que significa que esta actividad obtuvo los mejores resultados en comparación con las dos actividades anteriores. Las respuestas de los alumnos evidencian tanto la presencia del proceso infinito como también el infinito actual. Además, se observó su habilidad matemática y la habilidad de cambiar de un registro de representación a otro, así como la realización de las transformaciones requeridas sobre dichos registros. También se observó coordinación interna. En esta situación, claramente se puede observar el esquema de conocimiento del alumno con respecto a sus conocimientos previos de Cálculo Diferencial, esto al enfrentarse a una situación distinta a las planteadas en las actividades anteriores, pero, además, sobre una función que es conocida. El objetivo de esta actividad fue alcanzado por estos estudiantes.

Con respecto a los estudiantes clasificados en el nivel 1, se observó dificultad en el trabajo sobre los registros de representación, más específicamente sobre el registro de representación numérico y verbal. Los alumnos manifiestan dificultad en la concepción del proceso infinito, lo que complica la encapsulación de dicho proceso en el objeto infinito actual.

Para esta actividad, de los cuatro alumnos E1, E2, E3, E4 mostrados inicialmente, sólo E1 fue clasificado en el nivel 1 y el resto, en el nivel 3. Las respuestas de E1 se muestran a continuación.

Analiza la tabla de valores anterior, lee con atención cada pregunta y responde:

1.- ¿Qué pasa con los valores que toma la función $f(x)$ cuando x crece sin límite, es decir, $x \to \infty$?

Nivel 1:

E1: *A un número muy grande llegando al infinito.*

2.- ¿A qué valor se aproxima la función $f(x)$ cuando x crece sin límite, es decir, $x \to +\infty$?

Nivel 1:

E1: *Un número pequeño llegando al – infinito.*

Analiza la tabla de valores anterior, lee con atención cada pregunta y responde:

3.- ¿Qué pasa con los valores que toma la función $f(x)$ cuando x decrece sin límite, es decir, $x \to -\infty$?

Nivel 1:

E1: *Se vuelve un número pequeño alejándose del 0.*

4.- ¿A qué valor se aproxima la función $f(x)$ cuando x decrece sin límite, es decir, $x \to -\infty$?

Nivel 1:

E1: *Se aproxima al – infinito.*

Después de usar el applet:

5.- ¿A qué valor se aproxima la función $f(x)$ cuando x crece sin límite, es decir, $x \to +\infty$?

Nivel 1:

E1: *A infinito positivo.*

6.- ¿A qué valor se aproxima la función $f(x)$ cuando x decrece sin límite, es decir, $x \to -\infty$?

Con base en las respuestas anteriores, responde:

Nivel 1:

E1: *A – infinito.*

7.- El límite de la función $f(x)$ cuando $x \to +\infty$, ¿existe? De existir, ¿cuál es? Justifica tu respuesta.

Nivel 1:

E1: *0, porque tomará números decimales hasta poder llegar a 0.*

8.- El límite de la función $f(x)$ cuando $x \to -\infty$, ¿existe? De existir, ¿cuál es? Justifica tu respuesta.

Nivel 1:

E1: *0 porque cuando llegue a 0 ya no podrá tomar más valores.*

Pregunta extra:

Compara esta actividad (Actividad 3: Límites al infinito y menos infinito (parte 2)) con la actividad anterior (Actividad 2: Límites al infinito y menos infinito (parte 1)), responde y justifica tus respuestas:

¿Qué diferencias encuentras en el comportamiento de las funciones $f(x) = x^3$ y $f(x) = \frac{1}{x}$? ¿Los límites de ambas funciones cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ existen?

Nivel 1:

E1: *Su comportamiento es diferente con cada función y sus límites son iguales ya que siempre tomarán todos los valores hasta poder llegar a 0.*

ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD 3

Al igual que en las secciones anteriores donde se presentaron respuestas de alumnos pertenecientes a la categoría de nivel 1, se aprecia la falta de coordinación interna y como consecuencia, el alumno no pudo concluir concretamente cuál es el valor (si existe) al que se aproxima la función cuando $x \to \pm\infty$ y cuál es límite de la función cuando $x \to \pm\infty$. Cabe destacar que, aun cuando el alumno logró inferir que cuando $x \to \infty$ la función también tiende a infinito; no pudo deducir qué pasaba con la función cuando $x \to -\infty$. También se observa la dificultad al realizar transformaciones entre los registros de representación involucrados.

En la pregunta 2: ¿A qué valor se aproxima la función $f(x)$ cuando x crece sin límite, es decir, $x \to +\infty$?, la respuesta del alumno fue la siguiente: "un número pequeño llegando al – infinito". La tabla que se planteó en la actividad contenía un error, el último valor tenía un signo negativo. Puede que esta situación haya llevado al alumno a deducir dicha respuesta, sin embargo, esto no guarda relación con la respuesta dada por el mismo alumno en la pregunta 1.

Con respecto a la cantidad de alumnos que se clasificaron en el nivel 2, se puede inferir que esta actividad tuvo resultados bastante favorables. Es posible que estos resultados se deban al reconocimiento o familiarización que los alumnos tienen con la función $f(x) = x^3$, esto tanto numérica como gráficamente.

4.2 ANÁLISIS GLOBAL

De los resultados observados, es posible deducir que, al final de las actividades, la mayoría de los alumnos aplicaron transformaciones en al menos un registro de representación; algunos de ellos prefirieron las tablas de valores y otros más, las gráficas. Algunos de ellos mencionaron que, al utilizar la gráfica, corroboraban con la tabla de valores para así rectificar si lo que estaban deduciendo en la gráfica, era correcto; otros más, mencionaron que, al consultar la tabla de valores "imaginaban la gráfica", esto último, específicamente en el caso de la primera actividad: Nave espacial. Otro de los aspectos observados en las respuestas de los estudiantes, es la acción de sustituir una cantidad específica en la función propuesta, esto como apoyo para la deducción del comportamiento de la función. Esto es un paso fundamental a la hora de abordar la situación y más aún, a la hora de concebir al infinito potencial como un proceso. Este aspecto lo menciona Dubinsky (2005). Sin embargo, también hay alumnos que imaginan la acción de que a medida que x toma valores cada vez más grandes (o más pequeños, dependiendo el caso), la función se comportará de cierta manera, y a través de esto, logran inferir si la función tendrá un límite o no (construcción del proceso infinito). En este grupo de alumnos, algunos manifestaron la concepción del infinito potencial como un proceso (Dubisnky, 2005).

La presencia del infinito actual, como un objeto, puede verse en las afirmaciones de aquellos alumnos que alcanzaron el objetivo de la actividad, ya que lograron ver el proceso como una totalidad. Sin embargo, cabe resaltar que, aunque varios alumnos se encontraban clasificados en el nivel 3, los veinte alumnos comparten una característica en general: dificultad en el uso de la terminología matemática. Varios alumnos utilizaron palabras y símbolos de manera errónea, por ejemplo, un alumno escribió "x implica a…" lo que, en realidad quiso decir "$x\ tiende\ a\ ...$"; de esta forma, evoca y expresa el objeto: $x \to \infty$. Por otra parte, algunos alumnos suelen intercalar símbolos en sus respuestas cuando se están expresando de forma verbal, un ejemplo de ello: "la función no es = a 0", es posible que esto se deba a que el responder de esta forma les resulta más práctico, o porque al realizar las actividades a través de una plataforma, la manera de expresarse o incluso de usar símbolos como ∞ resulta complicado.

En el registro verbal también existen problemas, un ejemplo de ello es cuando los alumnos analizaron qué pasaba con la función $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando $x = 0$, la mayoría de ellos argumentaron con los términos "indefinido" o "indeterminado"; aún no reconocen la diferencia entre un término y otro. Tall (1992) mencionó las "dificultades suscitadas por la lengua" y añadió el trabajo de Monaghan (1991) quien aplicó un cuestionario a alumnos para investigar las dificultades que el lenguaje podía ocasionar en la comprensión del concepto de límite y analizó las ambigüedades que los alumnos podrían presentar con los términos *tender a, aproximarse, convergencia y límite*. En los resultados obtenidos en las actividades, se aprecia que los alumnos suelen pensar que el límite de una función, es un cierto valor que es "alcanzable" a través de la evaluación de valores cada vez más grandes de x en la función; suelen utilizar las palabras *igual o exacto.* Algún alumno llegó a mencionar que "*el límite no es alcanzado físicamente, pero sí teóricamente*", lo cual indica que la diferencia de lo alcanzable e inalcanzable cognitivamente está presente en sus palabras.

También, hay alumnos que no comprenden el significado de convergencia y divergencia, esto se puede notar cuando los alumnos analizan $\lim_{x\to\infty} x^3$ y concluyen que el límite sí existe y es ∞. Otros más mencionan que la función diverge, sin embargo, a la hora de justificar mencionan algo parecido a que el límite sí existe y es ∞. Varios alumnos suelen utilizar las palabras *acercarse, cercano, parecerse* y *aproximarse*, esto al observar que las imágenes de la función se van aproximando cada vez más a cierto valor. Sin embargo, algunos alumnos concluyeron en el caso de $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ que, el límite de la función no existe porque los valores de la función se van acercando a cero, pero no son exactamente igual a cero.

Algunas palabras utilizadas de manera informal en las respuestas de los alumnos, son las siguientes:

- Pasos
- Un uno después de muchos ceros del lado decimal
- Alargar
- Físicamente
- Prepotencia matemática
- Decadencia
- x implica a infinito
- x implica a infinito negativo
- Incrementa demasiado
- Pequeño
- Extremadamente pequeño

También es posible encontrar respuestas sin argumentación adicional. Los alumnos al término de la actividad comentaron que les fue difícil expresar lo que pensaban (tratamiento en el registro verbal), especialmente cuando los resultados o inferencias resultaban obvias para ellos. En algunos, es común encontrar en sus respuestas argumentación de manera procedimental o manipulativa, es decir, a la hora de concluir sobre el límite de la función, llegaron a calcularlo a través de operaciones algebraicas (tratamiento simbólico) y no mencionan nada de lo anteriormente visto en los registros numérico y gráfico, o algún argumento teórico que conozcan previamente.

Una de las características de los alumnos, mencionadas por Tall (1992), es que no suelen emplear argumentos globales, usando diferentes argumentos dependiendo el caso, además de que pueden aparecer ideas contradictorias mantenidas por el mismo alumno. Esta es una característica que tienen varios de los veinte alumnos a los que se les aplicaron las actividades. Es por ello que, a algunos de ellos les resultó difícil el relacionar unas respuestas con otras y tener una coordinación interna, impidiendo la construcción de su conclusión e imposibilitando el alcance del objetivo.

Con respecto al esquema de cada alumno, la mayoría de los alumnos no habían tenido ningún acercamiento con el concepto de límite al infinito, sin embargo, habían abordado el concepto de límites finitos. Un alumno justificó el análisis de $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$ a través del análisis de: $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}$ y $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}$ lo cual era una situación que conocía y terminó concluyendo que, $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\pm\infty$. De forma general, pese a algunas excepciones, la mayoría de los alumnos logró aplicar conceptos que conocían previamente para dar solución a las actividades planteadas; sin olvidar que existen detalles que ya han sido mencionados. Al término de las actividades, solo un par de alumnos manifestaron tener noción de límites al infinito, ya que abordaron el tema cuando cursaron bachillerato o preparatoria.

4.3 MODIFICACIONES A LAS ACTIVIDADES

En el diseño original del applet de GeoGebra de la actividad Nave Espacial, se pasó por alto el hecho de que, en la gráfica, el trayecto de la nave se representara con un rastro de puntos (collar de perlas). Es por esto que el diseño se replanteó para no causar en los alumnos la sensación de no continuidad de la función representada.

Un alumno se dio cuenta de ello, a la hora de utilizar el applet; y al responder a la pregunta: ¿Existe algún valor de x para el cual $f(x)$ es igual a 0? respondió que: "No es posible determinar con esta gráfica, pues como f(x) es una línea punteada, parece que no pasa por el origen, pero no es posible estar seguro".

Además, el fondo estrellado usado en el applet, se ve pixelado y no luce estéticamente bien. Por tales motivos, el fondo fue cambiado y la representación del trayecto de la nave a través de puntos se cambió por un trayecto continuo y suave, como se muestra a continuación:

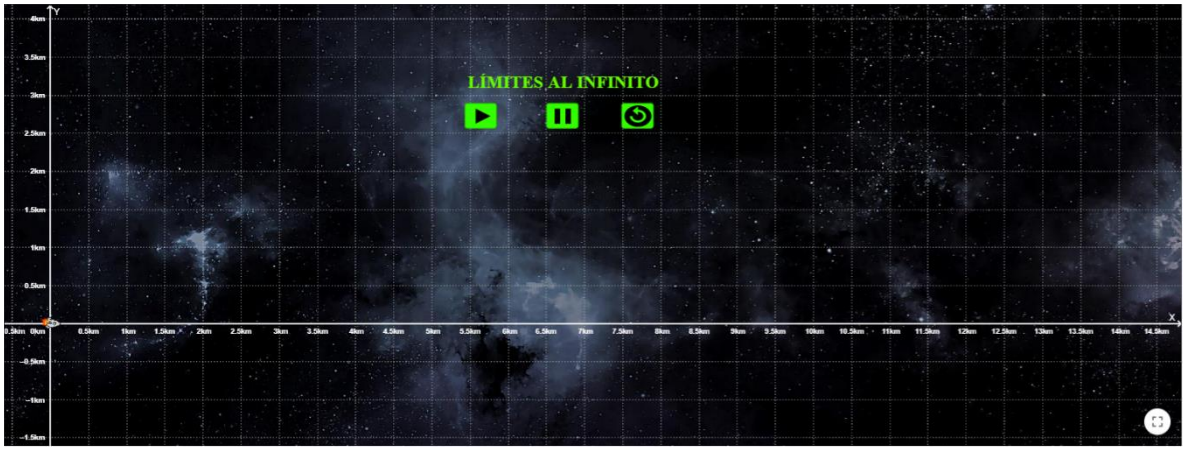


Figura 24. Imagen del applet antes de presionar el botón play. Fuente: Elaboración propia.

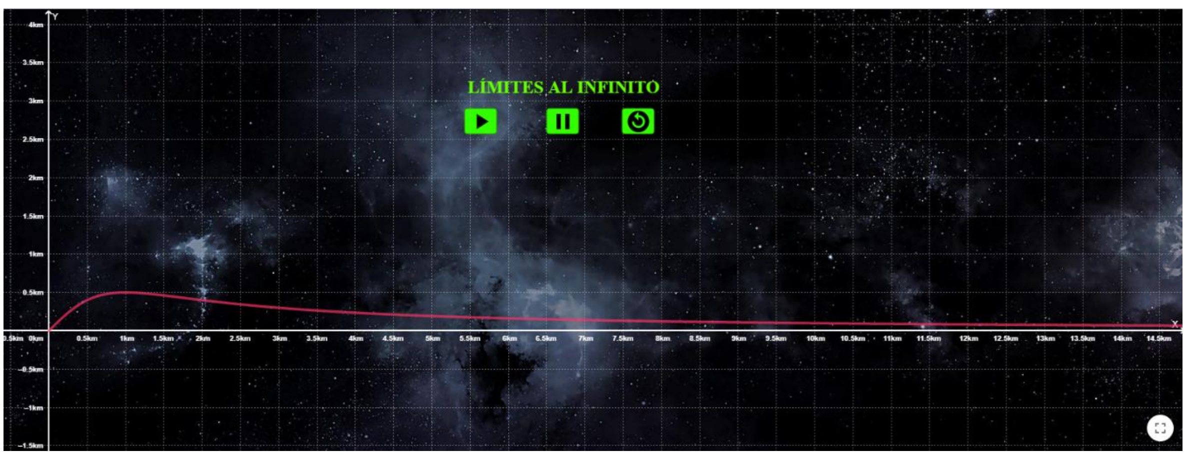


Figura 25. Imagen del applet después de presionar el botón play. Fuente: Elaboración propia.

Además, también se hizo la corrección correspondiente a la tabla de la tercera actividad:

Tabla original

Tabla: valores positivos de x	
x	x^3
1	1
2	8
6	216
8	512
10	1000
24	13824
50	125000
100	1000000
1000	1000000000
5000	125000000000
1000000	1000000000000000000
1000000000	-1000000000000000000000000000

Tabla corregida

Tabla: valores positivos de x	
x	x^3
1	1
2	8
6	216
8	512
10	1000
24	13824
50	125000
100	1000000
1000	1000000000
5000	125000000000
1000000	1000000000000000000
1000000000	1000000000000000000000000000

Tabla 7. Tabla antes y después de la corrección.

El libro de actividades puede consultarse a través del siguiente enlace:

https://www.geogebra.org/m/bgtsupat

CONCLUSIÓN

Los resultados obtenidos mediante la aplicación de las actividades propuestas permiten analizar los obstáculos que los alumnos presentaron al enfrentarse al estudio del concepto. Además, evidenciaron un progreso en la comprensión conforme avanzaron en la secuencia. Inicialmente, en la actividad 1, la mitad de los alumnos mostraron dificultades en su resolución. Entre las dificultades observadas se encuentra tanto la dificultad para hacer transformaciones sobre registros de representación, como dificultad en la compresión de funciones. Es por esto último, que los alumnos clasificados en el nivel 1 (de manera general), muestran indicios de los primeros pasos de construcción de la concepción del infinito potencial como un proceso.

Para la segunda actividad, se observó un avance en los niveles de comprensión definidos en esta tesis. Una dificultad observada en los alumnos pertenecientes al nivel 2 fue la expresión verbal/lingüística y simbólica de sus respuestas (problemas al trabajar sobre el registro verbal y simbólico). Además, mostraron indicios de concepción acción y la construcción del proceso infinito, pero dificultad de encapsulación de dicho proceso, lo que impidió a estos alumnos alcanzar el objetivo de la actividad.

Finalmente, en la tercera actividad se obtuvo un resultado favorable en la mayoría de los alumnos, sólo dos fueron clasificados en el nivel 1. En los alumnos de este nivel se observaron dificultades tanto en la expresión verbal/lingüística (problemas sobre el registro de representación verbal) como también sobre la interpretación de las tablas de valores (problemas sobre el registro numérico). Con respecto a los resultados favorables obtenidos en esta actividad, es posible que el resultado haya sido influenciado por el conocimiento y familiarización que los alumnos tienen con respecto a la función $f(x) = x^3$, sin embargo, los datos y preguntas representaban un reto distinto; con una dificultad mayor con respecto a las dos actividades anteriores.

Se buscó presentar las tres actividades de una forma clara y amena, debido a que su finalidad fue introducir el concepto para su futura formalización. Sin embargo, en las respuestas de los alumnos, especialmente en las actividades 2 y 3, se logró apreciar la habilidad matemática y la aplicación de sus conocimientos previos. Las actividades de manera conjunta, buscaron propiciar un ambiente en el cual los alumnos pudieran concebir el proceso de infinito potencial y encapsularlo a través del objeto de infinito actual.

El uso del software GeoGebra, ayudó a que las actividades fueran más comprensibles y atractivas a los ojos del alumno. Las tablas de valores ayudaron a comprender el comportamiento de la función de manera numérica fomentando la construcción de proceso infinito, además, esto impulsó a los alumnos a imaginar cómo sería la gráfica de dicha función y realizar transformaciones del registro numérico al registro gráfico. También, el applet fomentó la encapsulación del proceso infinito.

Jiménez (2017) mencionó que el uso de este tipo de herramientas, como GeoGebra, ayudan a la comprensión, ya que es posible modelar funciones, así como comprender el comportamiento de éstas, y a su vez, facilita la exploración dinámica de las situaciones planteadas. Estudios, como el que realizó Inzunsa (2014) muestran que GeoGebra permite el desarrollo del pensamiento matemático, esto como consecuencia del diseño del software que permite que el usuario sea partícipe en la construcción de su propio conocimiento, ya que puede interactuar con componentes y representaciones. Además, facilita la conversión y la interacción con los registros de representación semiótica de un mismo objeto matemático, por lo que este tipo de herramientas deben de formar parte de las estrategias del profesor.

Los aspectos mencionados por estos investigadores lograron visualizarse en los resultados de esta investigación, pues al final de la secuencia, la mayoría de los alumnos mostró evidencias de comprensión del infinito actual (concepción objeto del infinito), lo que les permitió construir una concepción del límite al infinito, al menos para las funciones que aquí se presentaron. Así mismo, la mayoría evidenció coordinación interna de los registros de representación y comprensión del comportamiento de las funciones con las que trabajaron.

En las respuestas de los alumnos guardadas en Classroom, se observó la manipulación realizada por ellos de los diferentes applets. Además, al finalizar la secuencia, los comentarios de los alumnos con respecto al diseño y la aplicación de las actividades a través del software GeoGebra fueron favorables, pues expresaron que las actividades fueron agradables, llamativas y claras.

Referencias

Arnon, I., Cotrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory, A framework for research and curriculum development in Mathematics Education*, New York, Springer. https://doi-org.proxydgb.buap.mx/10.1007/s40753-015-0015-9

Barriero, P., Bressan, A., Camós, C., Carnelli, G., Cassetta, I., Crespo, C., Colombano, V., Formica, A., Marino, T., Nápoles, J., Ortíz, M., Pochulu, M., Rodríguez, M., Scaglia, S., Visokolskis, S. y Zolkower, B.; compilado por Marcel D. Pochulu y Mabel A. Rodríguez (2016). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde dinstintos enfoques teóricos*. Editorial Universitaria Villa María. Buenos Aires, Argentina: Universidad Nacional de General Sarmiento.

Bolzano, B. (1950). *Paradoxes of the infinite* (translate from German of the posthumous edition by Fr. Prihonsky and furnished with a historical introduction by Donald A. Steele). Routledge & Paul. London.

Boyer, C. (1999). *Historia de la Matemática*. Alianza Editorial, Barcelona.

Bustos, J., Naranjo, Y., Pisco, R., Torres, G. y Romero, I. (2016). *Capítulo 4: Idea intuitiva de límite de una función en un punto*. En Gómez, Pedro (Ed.). Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 2 (pp. 141-199). Bogotá: Universidad de los Andes.

Cañón, C. (1993). *Las matemáticas: creación y descubrimiento*. Madrid: Universidad Pontificia de Comillas.

Claros, F. (2010). *Limite finito de una sucesión: fenómenos que organiza.* Tesis de doctorado. Universidad de Granada.

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de límite: conceptions et obstacles. Thèse de 3ème cycle, Mathématiques*. Grenoble: Université I de Grenoble.

Cornu, B. (1991). *Limits*. En D. Tall (Ed.): *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer, 153-166.

Cummins, K. (1960). A student Experience-Discovery Approach to the teaching of Calculus. *Mathematics Teacher*, reprinted in *Readings from the Mathematics Teacher.* NCTM (1977), 31-39.

Davis, R. y Vinner, S. (1986). The notion of Limit: some semingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematical Behavior*. 5, 281-303.

Dubinsky, E. (1991). *Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics*. In L.P. Steffe (Ed.): *Epistemological foundations of mathematical experience* (p. 160-202). Springer, New York, NY. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3178-3_9. In Tall, D. (Ed.), Advanced mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer. 95-123.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. and Brown, A. (2005). *Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity*: *an APOS-based analysis*: part 1. Springer.

Duval, R. (1993). *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, Estrasburgo.

Duval R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berna, Peter Lang.

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales. Universidad del Valle, Colombia.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*, Vol. 9.1.

Espíritu, V. y Navarro, C. (2014). Límites indeterminados mediante el uso de tablas de valores y gráficas. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas.* Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Ferrante, J. (2009). *Una introducción al concepto de límite (dos mil años en un renglón).* Buenos Aires: edUTecNe.

Fischbein, E. (1982). Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics*. Vol 3(2), 9-19.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics.* Reidel Publishing, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Fischbein, E. (2001). Tacit models of infinity. *Educational Studies in Mathematics* 48(2/3), 309-329.

García, J. y Perales, F. (2006). ¿Cómo usan los profesores de Química las representaciones semióticas? *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*. 5 (2). 247-259.

Guzmán, I. (1998). *Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes*. Relime, Vol. 1, Núm. 1, 5-21.

Hauchart, C and Rouche, N. (1987). *Apprivoiser l´infini: Un enseignement des débuts de l´analyse*. CLACO, Louvain.

Hernández, A., Cervantes, J., Ordoñez, J. y García, M. (2017). *Teoría de Registros de Representaciones Semiótica.* Universidad Autónoma de Guerrero.

Hitt, F. (2003). El concepto de infinito: Obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. En *Matemática Educativa: Aspectos de la Investigación Actual*. México D.F: Editorial Fondo Educativo Interamericano.

Inzunsa, S. (2014). *GeoGebra: Una herramienta cognitiva para la enseñanza de la probabilidad.* En Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación.

Jaimes, L., Cháves, R. y Hernández, C. (2015). *Planteamiento de una ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas: Una dificultad en la movilización entre registros de representación, lenguaje natural y algebraico.* Universidad Distrital Francisco

José de Caldas, Bogotá, Colombia. Universidad Francisco de Paula Santander, Cúcuta, Colombia.

Jiménez, J. y Jiménez, S. (2017). GeoGebra, una propuesta para innovar el proceso enseñanza-aprendizaje en matemáticas. *Revista Electrónica sobre Tecnología, Educación y Sociedad.* Vol. 4. Núm. 7.

Macías, J. (2014) Los registros semióticos en Matemáticas como elemento personalizado en el aprendizaje. *Revista de Investigación Educativa*. Conect@2, 4(9): 27-57

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal; a didactical aproach for the understanding of the limit of a sequense. *Educational Studies in Mathematics*. 48, 259-288.

Monaghan, M. (1982). Problems with the language of Limits. *For the Learning of Mathematic.* 11(3), 20-24.

Moore, A. (1995). A brief history of infinity. *Scientific American.* 272(4), 112-116.

Moore, A. (1999). *The infinite,* 2nd ed. Routledge & Paul, London.

Morales, A., Reyes, L. y Hernández, J. (2013). *El límite al infinito. Análisis preliminar para la elaboración de una estrategia metodológica de su enseñanza-aprendizaje.* Universidad Autónoma de Guerrero.

Núñez, R. (1993). *En deça de transfini.* Éditions Universitaires, Fribourg.

Palmiter, J. (1991). Effect of Computer Álgebra Systems on Concept and Skill Adcquisition in Calculus. *Journal for Research in Mathematics Education.* 22(2), 151-156.

Poincaré, H. (1963). *Mathematics and science: Last Essays* (translated by John W. Bolduc). Dover, New, York.

Penalva, M. (2001). Implicaciones didácticas de las dificultades en el aprendizaje de conjuntos infinitos. *Reunión científica de Pensamiento Numérico y Algebraico (SEIEM)*. Universidad de Valladolid-Palencia.

Rabinovitch, N. (1970). *Rabbi Hasdai Crescas (1340-1410) on numerical infinities*. Isis 61(2), 224-230.

Romiti, R. et al. (2014). *Preferencia de registros de representación en el concepto de límite de funciones de alumnos de primer año de ingeniería*. Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas.

Sullivan, K. (1976). The teaching of Elementary calculus: an approach using infinitesimals. American Mathematic Monthly. 83, 5 370-375.

Tall, D. (1986). *Graphic Calculus, I, II, III* (BBC compatible software). Glentop Press. London

Tall, D. (1991) *The Psychology of Advanced Mathematical Thinking*. En Tall, D. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer, 3-21.

Tall, D. (1992). *Student's Difficulties in Calculus*. Plenary presentation in working Group 3 (p. 1-8). Québec: ICME.

Tsamir, P. y Tirosh, D. (1999). *The Transition from Comparison of Finite to the Comparison of Infinite Sets: Teaching Prospective Teachers*.

Varettoni, M. y Elichiribehety, I. (2010). Los registros de representaciones que emplean docentes de Educación Primaria: un estudio exploratorio. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias.* Argentina.

Williams, S. (1991). Models of Limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 22 (3), 219-236.