Caminata aleatoria del elefante: un enfoque a través de martingalas

Carlos Uriel Herrera Espinoza
Director de tesis: Víctor Hugo Vázquez Guevara

23 de marzo de 2021

Agradecimientos

Las siguentes páginas no bastarán para esclarecer la magnificencia del apoyo recibido por las personas que forman parte esencial de mi vida. Cualquier intento es fútil, pero el fracaso de dicha empresa está justificado por la conclusión de algo que parecía improbable. También deseo iniciar con una disculpa a la memoria. Los recuerdos que son aquí proclamados no siempre reflejan su importancia, pero sí que cada persona incluida en esta lista dejó huella en la travesía emprendida hace ya varios años.

Agradezco a mis papás, Uriel y Elena. Gracias por el soporte en todas la direcciones posibles: desde el apoyo en perseguir esta licenciatura, hasta aguardar en silencio el hastío que pude causar en las noches golpeando un pizarrón en aras de entenderme a mí mismo. Esos recuerdos son un simbolismo de lo que el amor infinito significa; y será imposible retribuir en cantidad el amor demostrado sin tantas precauciones. ¡Los amo!.

A mi asesor, Víctor Hugo. Gracias infinitas por ser mucho más que un mentor. Por culpa de los años, de las charlas, del apoyo inmerecido, he resuelto que las palabras *amigo* y *mentor* son indistinguibles, con el propósito de reparar en el valor de su fe inagotable. Dos memorias muestran el valor de nuestra amistad: el día que discutíamos sobre vinos, y la tarde en la que decidimos no interrumpir nuestra conversación por la divergencia de nuestros caminos. Confío en que el tiempo me permitirá retribuir todo su apoyo. Una vez más, ¡gracias!.

Al Dr. David Herrera. Le debo mi caracter y mi obstinación. Pocos entienden sus métodos, y admito que fue mucho después que comprendí su insistencia en resolver libros enteros. El mundo de las ideas es un laberinto infinito, pero me mostró que siempre es posible hallar *una* salida en un tiempo mucho menos que infinito.

A todos ustedes, profesores. Hugo Adán, Armando, Manuel *Ibarra*, Iván *Martínez*, Mari *Toriz*, Carlos *Andrade*. El matemático que estoy a punto de ser (o soy, aún no lo sé) no es mas que un espejo roto, y cada fragmento refleja la apoteosis de un curso, una charla o un simple consejo. ¡Muchas gracias!.

No podemos olvidarnos de las personas contemporáneas que convierten nuestras aventuras en algo

más que extraordinarias: los amigos. La lista pretende ser exhaustiva, pero el imbécil que permea mi juicio, me obliga a pedir una disculpa anticipada.

Iván, mi mejor amigo de antaño. ¿Puedo decir algo nuevo acerca de lo que esto significa? Creo que no, y una disculpa es lo que puedo ofrecer cuando la distancia no ofrece problemas a la integridad de una amistad. Los recuerdos son muchos, pero aprecio que hicieras aquellas clases, ajenas a tu vida misma, tan amenas.

Erikita, es imposible a las palabras cubrir mi gratitud por tu inigualable amistad. Eres leal, una virtud que pocas personas poseen. Tengo que hacer huelga en tu inmerecida paciencia, porque soportaste la peor versión de este tonto. Gracias por abrirme la puerta de tu(s) casa(s). *Puebla 33* permanecerá en mi corazón.

Catalina, mi amiga; quien no tiene miedo a expresar todo lo que piensa. Esa es una cualidad que atesoro porque una minúscula parte de la población es valiente en el mundo de la ideas. Nunca podré agradecerte por las *becas*, por el infinito apoyo durante la licenciatura. No tengo dudas que tus ocurrencias hicieron de este viaje, uno de los más maravillosos y divertidos. Mi corazón observa con fervor cada *beca*, no porque representa un apoyo pecuniario, sino porque es una alegoría a tu sencillez y a tu amabilidad. ¡Tortas infinitas!.

David, expedito en esta labor humana llamada ciencia, y si queremos ser precisos, matemática. La contrariedad de ti mismo me sorprende. Admiro tu habilidad de *imaginar* y *visualizar* un teorema. Agradezco tu lealtad y los dulces a cuenta durante las clases de teoría de grupos. Te debo una disculpa por los sucesos desafortunados contra tu persona que me parecieron hilarantes. ¿Recuerdas el robo de tu bicicleta? Perdón por soltar aquel chiste que se volvió símbolo, al menos para mí, de nuestra amistad. Las tertulias que llevamos acabo permanecerán en la memoria de este sujeto que se dice matemático (aplicado).

Felipe, mi compañero de ping-pong. Gracias por unirte al equipo de estudio. Sin duda, un elemento valioso para resolver problemas. El lugar en común para los recuerdos: *Puebla 33*. No diré más porque bastará que sueltes una carcajada mientras lees estas líneas y puedas apreciar el valor que tiene para mí tu amistad. ¡Salud!

Levent, te debo parte de mi madurez como el matemático que pretendo ser. Invaluables como artísticas son las dicusiones que surgían después de un par de cervezas. Gracias por los consejos, consecuencia de mis trivialidades. ¡Un abrazo!

Eduardo, quien en la cultura popular de la facultad se conoce por *Nava*. Amigo, te debo tanto que mi amistad apenas me parece suficiente. Las simetrías que surgían en tu cocina sobre nuestra vida resultaron en *una* de las tantas figuras que sostienen nuestra hermandad. ¡Qué linda coincidencia fue el curso de computación I! Aquella tarde mostraste coraje, y admiro eso de ti. Gracias por esa

maravillosa escena. Agradezco que me abrieras la puerta de tu casa cuando me quedaba huérfano, que estuvieras abierto a escuharme. Invaluables son nuestras conversaciones profundas en *la cocina*; donde todos desbordamos las partes ocultas de nuestros espejismos. Hay tantos recuerdos que será mejor mantenerlos en el anonimato. Básteme decir que eres uno de mis mejores amigos, y te deseo lo mejor en Canadá.

Brian, el compañero de teoría de grupos que necesitamos, pero no el que merecemos. Me parece increíble el curso que tomó nuestra amistad; eres el sujeto más *lógico* que conozco, y admiro la creatividad con la que resuelves, prácticamente, cualquier problema. Al igual que con Felipe, muchos recuerdos permanecen en *Puebla 33*; pero unos cuantos tienen hogar en otros lugares. Gracias también por ser tan honesto conmigo, por impulsarme a ser mejor en diferentes aspectos de mi vida. Tu ironía y sarcasmo son herramientas fatales. ¡Vamos!

Bruno, sin duda, el congreso potenció nuestra amistad. Tengo que agradecerte por siempre tener la razón, amigo mío. Gracias por escucharme, por ser un buen amigo. Hasta ahora me doy cuenta de lo importante que es (fue) *Puebla 33* para nosotros, y es por eso que estos recuerdos también permanecerán en las sombras; porque siempre me incluían en sus planes, sin importar la cantidad infinita de veces que mi respuesta fue negativa. ¡Los amo!

Yansi, gracias por ser tan linda conmigo y tu apoyo con Verónica. Que me respaldaras en la organización de un seminario significa mucho para mí. Agradezco que también me abrieras la puerta de tu casa, donde pude disfrutar de dos noches de karaoke. ¡Te quiero!

Alba, y nuestra historia con los calcetines. No creo que anécdota alguna supere dicha travesía para representar lo que tu amistad significa para mí. Gracias por tu confianza, por tu cariño y por sacudirme en los momentos adecuados. Siempre estaré cuando lo necesites. ¡Ánimo!

Toño, gracias por ser el adulto en los momentos oportunos, por los consejos, académicos o seculares. Nunca olvidaré cómo te quedaste dormido en el sillón de Nava. Sin duda, una reunión espectacular para ser *más* amigos. ¡Salud!

Itzel, Wendy y *Ángel*, ¿qué más puede decirse de los días en las palapas? Gracias por su apoyo incondicional.

¿Qué clase de tonto sería si no agradezco a todas las personas que aparecieron en mi vida en los últimos seis meses? Mi temor a enumerarlos es grande, pero sepan que los aprecio mucho.

Esta obra permanecerá incompleta por culpa del conflicto más sublime: el romántico. Las contradicciones son necesarias porque atestiguan lo que admitimos por *realidad* (o invisible; ya lo dijo *El Principito*: lo esencial es invisible para los ojos). Estas líneas son evidencia del fracaso que estoy a punto de concluir, y es culpa de las infinitas vísperas imaginarias que preceden al cierre de esa historia intermedia, entre la imaginación y la *realidad*. Es el suceso más ilógico que he experimentado,

y hasta ahora sé que no es mi tarea entenderlo. *Espectacular* y *magnífico* son las palabras que he encontrado para describirlo, pero aun son minúsculas ante su tamaño. El nombre no es necesario. Gracias a ti, por hacerme *más*, a pesar del fin.

Estado del arte

Los modelos estocásticos con memoria de toda su historia no son nuevos [35], pues surgen de manera natural en distintas disciplinas como química, biología o finanzas [30]. La caminata aleatoria del elefante tiene su génesis en la dificultad de estudiar dichos procesos. A pesar de la variedad de técnicas para realizar un análisis significativo sobre los efectos de la memoria, dos deficiencias se hacen presentes, y tienen que ver con el error inducido de las aproximaciones y con el origen de la memoria, el cual, se oscurece durante el proceso de estudio [38].

El valor de dicho artículo radica en el proceso estocástico mismo, así como en la deducción de una *ecuación de Fokker-Planck* no markoviana que describe la evolución temporal de las probabilidades, lo que implicaba que; en el límite, el elefante presentaba el mismo comportamiento que el de una partícula sujeta al movimiento Browniano en cualquier valor de p.

Pasaron cerca de 10 años para que la evidencia numérica sobre el régimen súper-difusivo se hiciera presente, y mostrara que la distribución límite del proceso escalado no es gaussiana [11].

No pasó mucho tiempo para que este proceso despertara interés en la comunidad científica. Por ejemplo, en 2014, Hyun-Joo Kim [24] considera varios modelos de caminatas no Markovianas que describen difusión anómala, y entre ellos, una variante de la caminata aleatoria del elefante que resulta ser equivalente al modelo de Schütz y Trimper. Al año siguiente, Rüdiger Kürsten presenta una maravillosa y sorprendente conexión entre la caminata aleatoria del elefante y los árboles aleatorios recursivos a través del modelo de Kim [26]. El propósito del trabajo de Kürsten es traducir los resultados conocidos sobre la caminata aleatoria del elefante en propiedades relativas a los procesos de percolación.

Jean Bertoin y Erich Baur [2], por su parte, realizan un estudio sobre la caminata del elefante mediante urnas de Pólya generalizadas: considere un proceso de urna con pelotas de dos colores, negro y rojo. La composición de la urna al instante n está dada por un vector aleatorio de dimensión dos. La dinámica es la siguiente. En el instante n se saca una pelota de la urna de manera uniforme, se observa su color y es regresada a la urna junto con una pelota del mismo color con probabilidad p, y con probabilidad $1-p$, es regresada junto con una pelota de diferente color. Ahora, la posición del elefante

al instante n está dada por la diferencia de las coordenadas del vector aleatorio. El comportamiento *ad infinitum* de la composición de la urna queda determinado por los valores y vectores propios de su *matriz de remplazo*; de modo que, esta conexión permite formalizar las razones de la transición de fase en $p = 3/4$.

A continuación, Bernard Bercu [4] observa que la caminata aleatoria del elefante tiene propiedades multiplicativas respecto a la esperanza condicional, lo que permite construir una martingala a tiempo discreto. Su estrecha relación con la función Γ brinda un argumento distinto al de Bertoin y Baur de la existencia del cambio de fase. Además, se obtiene una prueba rigurosa de que la distribución límite no es gaussiana en el caso súper-difusivo.

En 2019, Silvia Businger [8] propone una nueva caminata aleatoria con memoria de todo el pasado. Las diferencias respecto a la del elefante son, en primer lugar, que la distribución de los incrementos es cualquier distribución α-estable, y en segundo lugar, que al considerar el modelo de Kim para construir este nuevo proceso, no es equivalente a la construcción dada por Schütz y Trimper. Businger retoma la conexión con los árboles aleatorios dada por Kürsten para estudiar el comportamiento de este proceso.

Hasta hoy, se desconoce la distribuición límite de la caminata aleatoria del elefante en el régimen súper-difusivo; y otra pregunta que surge de manera natural es la recurrencia y transitoriedad de este proceso. Muy recientemente, Coletti y Papageorgiou [10] dan respuesta a esta interrogante mediante funciones de Lyapunov; concluyendo que la caminata del elefante es recurrente positiva cuando $p < 1/2$.

Índice general

Agradecimientos II

Estado del arte VI

1. Preliminares 2
- 1.1. Transformaciones regulares de sucesiones . . . 2
- 1.2. Notación asintótica . . . 3
- 1.3. Teoremas límite para martingalas . . . 4
  - 1.3.1. Conceptos previos . . . 4
  - 1.3.2. Resultados principales . . . 5

2. Caminata aleatoria del elefante 9
- 2.1. Definiciones y propiedades básicas . . . 9
- 2.2. Descomposición en sumas parciales . . . 14
- 2.3. Resultados asintóticos . . . 18
  - 2.3.1. Régimen difusivo . . . 19
  - 2.3.2. Régimen crítico . . . 24
  - 2.3.3. Régimen súper-difusivo . . . 29

3. Simulación 33
- 3.1. Ley de los grandes números . . . 33
- 3.2. Teorema del límite central . . . 34
- 3.3. Ley del logaritmo iterado . . . 35

Conclusiones 37

Bibliografía 39

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo tiene la intención de familiarizar al lector con la teoría necesaria para el desarrollo subsecuente. Los teoremas que se presentan aquí no necesariamente se estudian en cursos de análisis o procesos estocásticos; pero el material estándar es suficiente para entender, al menos de manera intuitiva, lo que éstos implican. No se presentan pruebas de los resultados, pero se refiere al lector a la amplia bibliografía correspondiente a cada sección.

1.1. Transformaciones regulares de sucesiones

Un resultado básico de análisis afirma que la sucesión

$$t_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k \tag{1.1}$$

converge a ℓ, donde $S = \{s_n\}$ es una sucesión convergente cuyo límite también es ℓ. Esta proposición puede escribirse de forma matricial como sigue. Si A la matriz cuyas entradas están definidas por

$$a_{nm} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } \ m \leq n, \\ 0 & \text{si } \ m > n. \end{cases} \tag{1.2}$$

Entonces $t_n = A_n^\top S$, donde A_n es el n-ésimo renglón de la matriz A, y tanto a S como a A_n se les considera como "vectores" columna en $\mathbb{R}^\infty$. Por lo tanto, si $T = \{t_n\}$ se cumple que

$$T = A \cdot S, \quad \text{y} \quad \lim T = \lim A \cdot S = \lim S. \tag{1.3}$$

Informalmente, la ecuación (1.3) permite hablar de una transformación A, cuyo dominio y contradominio son las sucesiones convergentes, y que "preserva" límites. Obsérvese que las entradas de la

matriz A satisfacen las siguientes dos propiedades:

$$\lim_{n\to\infty} a_{nm} = 0, \quad \text{y} \quad \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = 1,$$

las cuales, son suficientes para caracterizar a todas las transformaciones que cumplen con (1.3), y es el teorema que se presenta a continuación.

Teorema 1.1.1 (Toeplitz)**.** *Sean $A = (a_{nm})$ una matriz infinita que satisface que:*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = 1, \quad y \quad \sup_{n\geq 1} \sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| < \infty, \tag{1.4}$$

y $\{x_m\}$ una sucesión que converge a un número real x, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} a_{nm} x_m = x \iff \forall\, m \in \mathbb{N}\colon \lim_{n\to\infty} a_{nm} = 0. \tag{1.5}$$

*A una matriz A que cumple con (1.4) y (1.5) se denomina **transformación regular**.*

Este teorema se hará presente en las demostraciones del capítulo 2, en particular, en la ley cuadrática fuerte y en el teorema del límite central para la caminata aleatoria del elefante. Su prueba puede ser consultada en [30] o [38].

1.2. Notación asintótica

Los conceptos que se presentan a continuación no son complicados, y pueden consultarse en cualquier libro de cálculo o análisis (vea, por ejemplo, [39]). Sin embargo, se hacen presentes en las pruebas del capítulo siguiente.

La *notación asintótica* es usada para describir el comportamiento límite de sucesiones, usualmente, en términos de otras más sencillas de manipular. El primer concepto es el de equivalencia: dos sucesiones reales $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son **asintóticamente equivalentes** si $a_n/b_n \to 1$ cuando $n \to \infty$, y se denota por $a_n \sim b_n$. Si $a_n/b_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, la sucesión $\{a_n\}$ es **o-pequeña** de $\{b_n\}$, denotado por $a_n = \mathbf{o}(b_n)$. Si existen constantes $C > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $|a_n| \leq C|b_n|$ para cada $n \geq n_0$, entonces la sucesión $\{a_n\}$ es **O-grande** de $\{b_n\}$, denotado por $a_n = \mathcal{O}(b_n)$.

Las propiedades respectivas pueden deducirse inmediatamente de la definición; algunas de ellas se enlistan a continuación. Si $a_n \sim b_n$, entonces $a_n^r \sim b_n^r$ donde r es un número real cualquiera.

Adicionalmiente, si los términos de dichas sucesiones son iguales a 1 sólo una cantidad finita de veces, entonces $\log a_n \sim \log b_n$. Si $\{c_n\}$ es otra sucesión, $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ y $b_n = \mathcal{O}(c_n)$, entonces $a_n = \mathcal{O}(c_n)$. La última propiedad es conocida como **transitividad**, y un resultado análogo es válido para el caso $\mathbf{o}(a_n)$.

1.3. Teoremas límite para martingalas

La palabra *martingala* tiene historia por sí misma, más allá de designar propiamente a una clase especial de procesos estocásticos. El concepto que ésta determina lo introdujo Paul Lévy en 1934, recibiendo su nombre en 1939 por J. André Ville. El desarrollo de toda una teoría alrededor de las martingalas se debe a Joseph L. Doob, y una de las ideas que motivó su estudio fue exhibir la inexistencia de estrategias ganadoras en juegos de azar. A continuación se enlistan todos los conceptos y propiedades relativas a martingalas. El propósito de la presente lista no es servir como un texto de martingalas a tiempo discreto, sino: a) mostrar qué formas de los conceptos y resultados son necesarios; b) para indicar al principiante con qué conceptos y propiedades debe familiarizarse antes de estudiar o leer el capítulo 2, y c) servir como una referencia simple de las cosas que el lector debe mantener en mente.

1.3.1. Conceptos previos

Como es usual, se asume la existencia de un espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, así como cada enunciado sobre variables aleatorias será entendido en el sentido casi-seguro (c.s.), y será señalado cuando pueda existir ambigüedad alguna a lo largo de todo el trabajo.

El **espacio** $\mathcal{L}^p$ es el conjunto de todas las variables aleatorias p-**integrables**, y está dotado con la norma $||X||_p \coloneqq \mathbb{E}\left[|X|^p\right]^{1/p}$. Una sucesión $\{X_n\}$ de elementos en $\mathcal{L}^p$ es **acotada** si $\sup_n ||X_n||_p$ es finito.

Una **filtración** es una sucesión creciente de σ-álgebras $\{\mathcal{F}_n\}$ tal que, para cada número natural n, $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$. Un proceso $\{X_n\}$ es **adaptado** a una filtración $\{\mathcal{F}_n\}$ si, para cada número natural n, X_n es $\mathcal{F}_n$-medible. El proceso $\{X_n\}$ es **predecible** si es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_{n-1}\}$, donde, convencionalmente, $\mathcal{F}_0 \coloneqq \{\varnothing, \Omega\}$.

Un proceso adaptado $\{M_n\}$ es una **martingala** si, para cada número natural n, $M_n \in \mathcal{L}^1$ y $\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = M_n$ c.s. Una **martingala en diferencias** es un proceso adaptado $\{X_n\}$ con la propiedad de que la sucesión de sus sumas parciales es una martingala. Sea $\{M_n\}$ una martingala; si para cada número natural n, $M_n \in \mathcal{L}^p$, se le llama **martingala** p-**integrable**. Una martingala

p-integrable es convergente casi-seguramente y en $\mathcal{L}^p$ siempre que sea acotada en $\mathcal{L}^p$, donde p es mayor a uno [42].

En particular, si $p = 2$, se llama **martingala cuadrado integrable** o **martingala de cuadrado integrable**. Dada una martingala de cuadrado integrable, el proceso $\{\langle M\rangle_n\}$ definido por $\langle M\rangle_0 := 0$, y para cada número n mayor o igual a cero, $\langle M\rangle_{n+1} - \langle M\rangle_n := \mathbb{E}\left[(M_{n+1} - M_n)^2 \mid \mathcal{F}_n\right]$, es llamado **proceso creciente** o **variación cuadrática predecible**. Si el proceso creciente es convergente, entonces $\{M_n\}$ converge c.s. a una variable aleatoria finita [46]. En lo sucesivo, se hará uso del símbolo "$\to$" para indicar convergencia. En particular, "$\xrightarrow{\mathcal{P}}$" y "$\xrightarrow{\mathcal{D}}$" denotarán convergencia en probabilidad y convergencia en distribución, respectivamente.

1.3.2. Resultados principales

El término *caminata aleatoria* generalmente se utiliza para designar a la clase de procesos que pueden descomponerse en sumas de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Sin embargo, desde hace varios años el concepto corresponde a un conjunto más grande de modelos estocásticos, en el sentido de que la única propidedad que lo define es la descomposición de sus elementos como sumas de variables aleatorias. Para evitar ambigüedades, en esta sección se utilizará el concepto de *caminata aleatoria* o *caminata al azar* para designar a la primera clase descrita, con el fin de motivar los resultados subsecuentes.

Las martingalas constituyen una fascinante y poderosa clase de procesos que generaliza adecuadamente a las caminatas aleatorias de media cero; de modo que; 1) la independencia de los incrementos no es necesaria y 2) "conservan" el comportamiento promedio de éstas. En este sentido, es natural preguntarse qué tan adecuada es. Dicho de otro modo, ¿los teoremas presentes en la teoría de caminatas al azar tienen su respectivo lugar en esta generalización?. La respuesta es afirmativa, y el resultado más representativo en el contexto de martingalas es la ley de los grandes números. Una versión de este teorema se debe a Neveu y puede consultarse en [34]. La versión que se presenta a continuación se debe a T.L Lai y C.Z. Wei [29], y se utilizará en el siguiente capítulo.

Teorema 1.3.1 (Ley de los grandes números para martingalas)**.** *Sea $\{\varepsilon_n\}$ una martingala en diferencias en $\mathcal{L}^2$, y tal que*

$$\sup_n \mathbb{E}\left[\varepsilon_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n\right] \leq C,$$

donde C es una variable aleatoria finita. Supóngase que $\{a_n\}$ es un proceso predecible respecto

a la filtración $\{\mathcal{F}_n\}$. *Si*

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \quad y \quad M_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \varepsilon_k,$$

y el límite de $\{s_n\}$ *es infinito, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{s_n} = 0, \quad c.s., \quad y \quad |M_n|^2 = \mathcal{O}\left(\log\left(s_n\right) s_n\right), \quad c.s.$$

Además, si $\{\varepsilon_n\}$ es una sucesión de variables independientes e indénticamente distribuidas, y $a_k = 1$ para todo $k \geq 0$, se obtiene la ley de los grandes números atribuida a Kolmogorov y es el resultado visto en un curso básico de probabilidad. La demostración del Teorema 1.3.1 puede consultarse en [16] o en [29].

Por otra parte, la ley del logaritmo iterado es un resultado que debe su origen a la teoría de números, y brinda información acerca de los puntos de acumulación de una caminata aleatoria. La primera versión de este teorema se atribuye a A. Y. Khinchine en 1924. Un resultado más general se debe a Kolmogorov en 1929. Una de las primeras versiones para martingalas es de W. Stout, publicada en 1970. La versión que se presenta a continuación está inspirada en la demostración dada por Stout [43], y es un resultado de M. Duflo [15].

Teorema 1.3.2 (Ley del logaritmo iterado para martingalas)**.** *Sea* $\{\varepsilon_n\}$ *una martingala en diferencias y tal que,*

1. $\limsup \mathbb{E}\left[|\varepsilon_{n+1}|^2 \mid \mathcal{F}_n\right] \leq c^2$;
2. $\exists\ \eta,\ 0 < \eta < 1$, *tal que* $\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}\left[|\varepsilon_{n+1}|^{2(1+\eta)} \mid \mathcal{F}_n\right] < \infty$.

Sea $\{a_n\}$ *un proceso predecible. Defínase*

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varepsilon_k \quad y \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2,$$

y suponga además que $\lim s_n = \infty$ *y* $\sum a_k^{2(1+\eta)} s_n^{-(1+\eta)} < \infty$.

1. *Entonces,*

$$\limsup \left[2 s_n \log\left(\log s_n\right)\right]^{-1/2} |M_n| \leq c. \tag{1.6}$$

2. *Más aún, si* $\limsup \mathbb{E}\left[|\varepsilon_{n+1}|^2 \mid \mathcal{F}_n\right] = c^2$ *y* $|a_n| = \mathbf{o}\left(s_n \left(\log\left(\log s_n\right)\right)^{-1/\eta}\right)$ *entonces,*

$$\limsup \left[2 s_n \log\left(\log s_n\right)\right]^{-1/2} M_n = c. \tag{1.7}$$

Más detalles sobre este tipo de resultados para martingalas pueden revisarse en [21] o [36].

Quizá el resultado más emblemático en la teoría de caminatas al azar es el teorema central del límite, el cual, justifica la aproximación de varias distribuciones a través de la distribución normal apropiada. Lo más sorpendente de este teorema es que, para n suficientemente grande, la función de distribución depende únicamente de la media y varianza de los incrementos de la caminata aleatoria. Naturalmente, este resultado también tiene lugar en la teoría de martingalas. El teorema que se presenta a continuación es corolario de un resultado válido para arreglos triangulares de martingalas.

Teorema 1.3.3 (Teorema central del límite para martingalas)**.** *Sean* $\{M_n\}$ *una martingala de cuadrado integrable y* $\{b_n\}$ *una sucesión de números reales creciente que diverge a infinito. Si*

1. $b_n^{-1}\langle M\rangle_n$ *converge en probabilidad a un úmero real* $\ell > 0$,

2. *La condición de Lindeberg se satisface:*

$$\forall\ \varepsilon > 0\colon\ b_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[(M_k - M_{k-1})^2\, \mathbf{1}_{|M_k - M_{k-1}| \geq \varepsilon \sqrt{b_n}} \mid \mathcal{F}_{k-1}\right] \xrightarrow{\mathcal{P}} 0.$$

Entonces

$$\frac{M_n}{\sqrt{b_n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \ell) \tag{1.8}$$

La demostración de este teorema puede consultarse en [21], o bien, en [42].

El último resultado de esta sección es conocido como *ley cuadrática fuerte*, y puede pensarse como un refinamiento de la ley de los grandes números para martingalas. En el siguiente capítulo será evidente en qué sentido es un refinamiento.

Teorema 1.3.4. *Sean* $\{\varepsilon_n\}$ *una martingala en diferencias tal que* $\lim \mathbb{E}\left[\varepsilon_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n\right] = \sigma^2$, *y* $\{a_n\}$ *un proceso predecible. Supóngase que existe* $p \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}\left[\varepsilon_{n+1}^a \mid \mathcal{F}_n\right] < \infty, \quad \textit{para algún} \quad a > 2p.$$

Además,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{s_n} = 0, \quad \textit{donde} \quad s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k^2,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log s_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{s_k} \left(\frac{M_k^2}{s_k}\right)^p = \frac{\sigma^{2p}\,(2p)!}{2^p p!}. \tag{1.9}$$

Una prueba de este resultado puede verse en [3].

Capítulo 2

Caminata aleatoria del elefante

Suponga que un elefante realiza una visita a los números enteros, iniciando en el punto cero y siguiendo la siguiente dinámica. En el primer instante; $n = 1$, el mamífero decide moverse a la derecha con probabilidad q, o a la izquierda con probabilidad $1 - q$. Para la etapa $n + 1$, el elefante cuenta con un historial de n movimientos, ya sea a izquerda o derecha. En este punto, el elefante elige un punto en el pasado con probabilidad $1/n$, y el mamífero persiste en su elección con probabilidad p, o cambia de signo con probabilidad $1 - p$.

El propósito de este capítulo es estudiar el comportamiento asintótico de dicho elefante pensando en un proceso estocástico que describe la dinámica ya descrita. Para este fin, considere $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad donde el proceso estocástico descrito a continuación existe. Cuando sea mencionado que una propiedad se satisface casi-seguramente (c.s.), se hace con respecto a la medida $\mathbb{P}$.

2.1. Definiciones y propiedades básicas

Sea S_n la posición del elefante al tiempo n. De acuerdo al párrafo anterior, $S_0 = 0$ y $S_1 = X_1$ con

$$X_1 = \begin{cases} +1 & \textit{con prob.} \quad q, \\ -1 & \textit{con prob.} \quad 1 - q. \end{cases} \tag{2.1}$$

La evolución descrita arriba indica una construcción recursiva del proceso. Hasta el tiempo n, el elefante ha realizado n movimientos, a saber $X_1, \ldots, X_n$. La dependencia de la $(n+1)-$ésima elección en los tiempos previos está determinada por una variable aleatoria; denotada por X_{n+1}, que satisface:

$$X_{n+1} = \begin{cases} +X_k & \textit{con prob.} \quad p, \\ -X_k & \textit{con prob.} \quad 1-p, \end{cases} \tag{2.2}$$

donde k se escoge de manera uniforme sobre $\{1, \ldots, n\}$. Por lo tanto, la posición del mamífero al tiempo $n+1$ está dada por

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}. \tag{2.3}$$

Una elección entre los n tiempos previos puede expresarse mediante una variable β_n que tiene una distribución uniforme sobre el conjunto $\{1, \ldots, n\}$. Por lo tanto, la ecuación (2.2) puede escribirse de diferentes maneras. Por ejemplo,

$$X_{n+1} = (-1)^{Y-1} X_{\beta_n}$$

donde Y es una variable aleatoria Bernoulli de parámetro p. Siguiendo la presentación del proceso en [4], puede verificarse que

$$X_{n+1} = \alpha_n X_{\beta_n}, \tag{2.4}$$

es equivalente a (2.2); en donde α_n es una variable aleatoria que tiene una distribución Rademacher de parámetro p; esto significa que $p = \mathbb{P}(\alpha = +1) = 1 - \mathbb{P}(\alpha = -1)$. Dicha distribución se denota por $\mathcal{R}(p)$. Notemos que β_n no depende de la evolución del proceso, al igual que α_n. Esto permite suponer que α_n y β_n son independientes de $X_1, \ldots, X_n$. Supondremos además que α_n y β_n son independientes.

Por otro lado, el proceso descrito líneas arriba es llamado *caminata aleatoria del elefante* en alusión al famoso dicho que los elefantes recuerdan dónde han estado. De hecho, p es llamado *parámetro de memoria* por obvias razones.

En resumen, $\{S_n\}$ es un proceso a tiempo discreto con espacio de estados $\mathbb{Z}$, inicia en cero y sus incrementos no son independientes. Para convencer al lector de esto último, considere un contexto de apuestas: S_n, las ganancias acumuladas hasta el tiempo n, evolucionan de acuerdo a (2.3) y (2.4). Esto significa que el historial de ganancias en cada tiempo, tiene impacto uniforme sobre la próxima apuesta; y por lo tanto, p es una medida de la *tendencia* del juego. Es decir, la frecuencia con la que una ganancia es seguida de otra ganancia o viceversa.

Definición 2.1.1. Sea $\{S_n : n \geq 0\}$ un proceso estocástico a tiempo discreto con espacio de estados $\mathbb{Z}$. $\{S_n : n \geq 0\}$ es llamado caminata aleatoria del elefante si satisface las siguientes condiciones:

a) $S_0 = 0$ c.s.,

b) $S_1 = X_1$, donde $X_1 \sim \mathcal{R}(q)$ y $q \in [0,1]$,

c) Para cada $n \geq 1$, $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$, donde $X_{n+1} = \alpha_n X_{\beta_n}$. Además $\alpha_n \sim \mathcal{R}(p)$ y $\beta_n \sim \mathcal{U}\{1, \ldots, n\}$.

Como es de esperarse, parte de entender la dinámica de $\{S_n\}$ es hallar sus probabilidades de transición. Sin embargo, la deducción de la fórmula podría parecer oscura y por arte de magia. El siguiente teorema esclarece los pasos a seguir.

Teorema 2.1.1. *Las probabilidades de transición de $\{S_n\}$ satisfacen la siguiente relación:*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x \mid X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} [1 + (2p-1)\, x \cdot X_k], \quad x \in \{-1, 1\}.$$

Demostración. Sea $1 \leq k \leq n$. La ocurrencia del evento $\{\beta_n = k\}$ implica que X_{n+1} toma el valor X_k con probabilidad p o toma el valor $-X_k$ con probabilidad $1-p$. Ahora, el teorema de probabilidad total implica que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} = x \mid X_1, \ldots, X_n) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_{n+1} = x \mid X_1, \ldots, X_n, \beta_n = k) \cdot \mathbb{P}(\beta_n = k) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_{n+1} = x \mid X_1, \ldots, X_n, \beta_n = k) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\alpha_n X_k = x \mid X_k)
\end{aligned}$$

Finalmente, observe que $[1 + (2p-1)(1)] = 2p$ y $[1 + (2p-1)(-1)] = 2(1-p)$. Por lo tanto,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x \mid X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1 + (2p-1)\, x \cdot X_k}{2} \right]$$

como afirma el teorema. ■

Es natural preguntarse acerca de las probabilidades de transición cuando $p = 1/2$. Intuitivamente, el proceso S_n pierde memoria de su pasado, y el único estado del cual se requiere información es S_{n-1}. Basta una simple sustitución en la fórmula del Teorema 2.1.1 para ver que esto es cierto.

Ahora bien, considere la filtración generada por los incrementos de $\{S_n\}$; esto es, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Como el valor esperado de S_n es finito, y en virtud de la memoria de la caminata aleatoria, tiene sentido hablar del efecto de $\mathcal{F}_n$ sobre el valor esperado de S_{n+1}.

Lema 2.1.1. *Si $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, entonces*

$$\mathbb{E}[X_{\beta_n} \mid \mathcal{F}_n] = \frac{S_n}{n}, \quad c.s. \tag{2.5}$$

Demostración. Condicionando sobre β_n y la independencia se cumple

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{\beta_n} \mid \mathcal{F}_n] &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k \mid \mathcal{F}_n] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \quad (X_k \text{ es } \mathcal{F}_n\text{-medible}) \\ &= \frac{S_n}{n}\end{aligned}$$

donde todas las igualdades son en el sentido casi-seguro, obteniendo lo que se requería. ■

Teorema 2.1.2. *Con la misma notación del lema, se cumple:*

$$\mathbb{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \gamma_n S_n, \quad c.s., \tag{2.6}$$

donde $\gamma_n = (n + 2p - 1)/n$

Demostración. Como S_n es $\mathcal{F}_n$-medible, basta calcular el valor esperado condicional de X_{n+1}. En virtud del lema anterior y la independencia de α_n con β_n y $\mathcal{F}_n$ se obtiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[\alpha_n X_{\beta_n} \mid \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}[\alpha_n]\,\mathbb{E}[X_{\beta_n} \mid \mathcal{F}_n] \\ &= (2p-1)\frac{S_n}{n}, \quad \text{c.s.},\end{aligned} \tag{2.7}$$

lo cual implica directamente el resultado. ■

Es importante recordar que el propósito es asociar una martingala a la caminata aleatoria del elefante, y el Teorema 2.1.2 muestra qué tan cerca estamos de tal objetivo. Bastará modificar por constantes multiplicativas a S_n para llegar a la conclusión deseada. La notación es sugerente, porque

el coeficiente tiene estrecha relación con la función Γ. Esta conexión se hace explícita en la proposición que sigue.

Proposición 2.1.1. *El producto de los primeros n términos de la sucesión $\{\gamma_k^{-1}\}$ puede calcularse a través de la función Γ de la siguiente manera:*

$$\prod_{k=1}^{n} \gamma_k^{-1} = \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(2p)}{\Gamma(n+2p)}. \tag{2.8}$$

La prueba es muy sencilla y será omitida. Sin embargo, hay puntos a considerar sobre la proposición anterior. La función Γ no está definida en cero, pues las únicas restricciones impuestas a p son la no negatividad y que no exceda el valor de uno.

Una solución ante dicha dificultad es considerar a Γ^* definida de la forma

$$\Gamma^*(x) = \begin{cases} 1, & si \quad x = 0, \\ \Gamma(x), & si \quad x > 0, \end{cases}$$

y sustituir en (2.8) cuando el argumento es $2p$.

Bajo el supuesto que p tome el valor cero, el comportamiento del elefante es interesante: después de dos pasos regresa a cero. Dicho lo anterior, el lector notará que el producto en (2.8) comienza a tener sentido cuando $n = 3$, y el valor inicial de k es dos.

En estas circunstancias, es necesario que el lector preste atención para los cambios requeridos cuando $p = 0$. En realidad, los argumentos generales son válidos incluso en este caso singular, y por lo tanto, ya no serán mencionadas en lo subsecuente.

De vuelta a la principal tarea de asociar una martingala con la caminata aleatoria, será suficiente que una constante multiplicativa afecte a S_n. De hecho, los productos finitos de $\{\gamma_k^{-1}\}$ son esta constante. Por lo tanto, es conveniente considerar

$$a_n \coloneqq \prod_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{-1}, \quad \text{para cada } n \geq 2. \tag{2.9}$$

y $a_0 \coloneqq 1 =: a_1$. Es claro de la definición que $a_n = \gamma_n a_{n+1}$. El siguente teorema es la solución a la labor primordial de esta sección.

Teorema 2.1.3. *El proceso $\{M_n\}$ es una martingala con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_n\}$, donde*

$$M_n \coloneqq a_n S_n, \quad \textit{para cada } n \geq 0. \tag{2.10}$$

Por convención, $\mathcal{F}_0 \coloneqq \{\emptyset, \Omega\}$.

Demostración. Las identidades (2.10), (2.9) y (2.6) implican que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] &= a_{n+1}\left(\gamma_n S_n\right) \\ &= a_n S_n, \quad \text{c.s.},\end{aligned}$$

como se afirmó. ■

2.2. Descomposición en sumas parciales

El lector podrá notar que los resultados sobre martingalas del capítulo anterior están en términos de una martingala en diferencias. El objetivo de esta sección es descomponer en sumas parciales a la martingala M_n para discernir el comportamiento asintótico de S_n. Para tal fin, es evidente que, si $\{r_n\}$ es una sucesión de números reales con $r_0 = 0$,

$$r_n = \sum_{k=1}^{n}(r_k - r_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}\Delta r_k, \quad \Delta r_k \coloneqq r_k - r_{k-1}.$$

Entonces, como $a_{k-1} = \gamma_{k-1}a_k$, cálculos directos muestran que

$$\Delta M_k = a_k\left(S_k - \gamma_{k-1}S_{k-1}\right), \tag{2.11}$$

de modo que si $\varepsilon_k \coloneqq S_k - \gamma_{k-1}S_{k-1}$, obtenemos:

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\varepsilon_k, \quad \text{para cada } n \geq 1. \tag{2.12}$$

que es la representación buscada, como afirma la siguiente proposición.

Proposición 2.2.1. *La colección $\{\varepsilon_n\}$ es una martingala en diferencias con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_n\}$; es decir:*

$$\mathbb{E}\left[\varepsilon_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = 0, \quad \textit{para cada } n \geq 0. \tag{2.13}$$

Más aún,

$$\mathbb{E}\left[\varepsilon_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n\right] = 1 - (2p-1)^2\left(\frac{S_n}{n}\right)^2, \tag{2.14}$$

y

$$\mathbb{E}\left[\varepsilon_{n+1}^4 \mid \mathcal{F}_n\right] = 1 - 3\,(2p-1)^4\left(\frac{S_n}{n}\right)^4 + 2\,(2p-1)^2\left(\frac{S_n}{n}\right)^2. \tag{2.15}$$

ambas válidas para cada $n \geq 0$.

La demostración consiste de varios pasos, y en orden de no complicar la prueba, se establece un lema que simplificará los cálculos.

Lema 2.2.1. *Las expresiones cerradas para los momentos segundo y cuarto condicionales de S_n son:*

$$\mathbb{E}\left[S_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n\right] = 1 + (2\gamma_n - 1)\, S_n^2, \tag{2.16}$$

y

$$\mathbb{E}\left[S_{n+1}^4 \mid \mathcal{F}_n\right] = 1 + (4\gamma_n - 3)\, S_n^4 + (4\gamma_n + 2)\, S_n^2 \tag{2.17}$$

Demostración. Las igualdades (2.3) y (2.7), junto con la linealidad de la esperanza condicional, implican que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[S_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n\right] &= S_n^2 + 2S_n\mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] + 1 \\ &= 1 + 2\,(\gamma_n - 1)\, S_n^2.\end{aligned}$$

Así, (2.16) es válida. Ahora bien, por el teorema del binomio,

$$\mathbb{E}\left[S_{n+1}^4 \mid \mathcal{F}_n\right] = 1 + \left(1 + \frac{4\,(2p-1)}{n}\right) S_n^4 + \left(6 + \frac{4\,(2p-1)}{n}\right) S_n^2.$$

Un poco de álgebra elemental conduce a

$$\mathbb{E}\left[S_{n+1}^4 \mid \mathcal{F}_n\right] = 1 + (4\gamma_n - 3)\, S_n^4 + (4\gamma_n + 2)\, S_n^2$$

lo que comprueba la validez del lema. ■

Ahora, procedemos con la demostración de la proposición:

Demostración (Proposición 2.6). La ecuación (2.13) es evidente en virtud del Teorema 2.1.2. Como consecuencia inmediata de lo anterior, se verifica que:

$$\mathbb{E}\left[\varepsilon_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[S_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n\right] - \gamma_n^2 S_n^2.$$

Ahora, (2.16) implica que

$$\mathbb{E}\left[\varepsilon_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n\right] = 1 - \left(\gamma_n^2 - 2\gamma_n + 1\right) S_n^2.$$

La última igualdad desemboca en (2.14).

Por otro lado, mostrar que (2.15) es cierta requiere más trabajo computacional. De hecho, a lo largo de la prueba, ciertas igualdades son tan extensas que requieren ser escritas a lo largo de las páginas. Esto conlleva a desmenuzar la demostración en dos importantes pasos.

Paso 1. Nuevamente, el teorema del binomio implica

$$\mathbb{E}\left[\varepsilon_{n+1}^4 \mid \mathcal{F}_n\right] = \sum_{i=0}^{4} (-1)^i \binom{4}{i} \mathbb{E}\left[S_{n+1}^{4-i} \mid \mathcal{F}_n\right] \gamma_n^i S_n^i.$$

Así, los cálculos se reducen a cada sumando. De hecho, gran parte del trabajo está listo. Solo es necesario hallar una expresión para el segundo término. Es muy sencillo ver que

$$\mathbb{E}\left[S_{n+1}^3 \mid \mathcal{F}_n\right] = (3\gamma_n - 2)\, S_n^3 + (\gamma_n + 2)\, S_n. \tag{2.18}$$

En consecuencia,

$$\mathbb{E}\left[S_{n+1}^3 \mid \mathcal{F}_n\right] \gamma_n S_n = \gamma_n (3\gamma_n - 2)\, S_n^4 + \gamma_n (\gamma_n + 2)\, S_n^2.$$

Esto muestra que cada sumando, en su desarrollo, contiene únicamente, potencias pares de S_n.

Paso 2. La suma, término a término, concluye en una expresión de la forma:

$$1 + A_n S_n^4 + B_n S_n^2,$$

donde A_n y B_n son constantes. En realidad,

$$A_n = -3\,(\gamma_n - 1)^4 \quad \text{y} \quad B_n = 2\,(\gamma_n - 1)^2.$$

Esto significa que

$$\mathbb{E}\left[\varepsilon_{n+1}^4 \mid \mathcal{F}_n\right] = 1 - 3\,(\gamma_n - 1)^4\, S_n^4 + 2\,(\gamma_n - 1)^2\, S_n^2.$$

De donde, inmediatamente se deduce (2.15). ■

Gracias a esta proposición, obtenemos cotas superiores para la esperanza condicional, que quedan establecidas en el siguiente corolario.

Corolario 2.2.0.1. *La sucesión $\{\varepsilon_n\}$ es acotada en $\mathcal{L}^2$ y $\mathcal{L}^4$; esto es:*

$$\sup_n \mathbb{E}\left[\varepsilon_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n\right] \leq 1 \quad y \quad \sup_n \mathbb{E}\left[\varepsilon_{n+1}^4 \mid \mathcal{F}_n\right] \leq 4/3. \tag{2.19}$$

Demostración. Para el cuarto momento, basta considerar a $f(x) = 1 - 3x^4 + 2x^2$ y maximizar. La cota superior del restante, es evidente. ■

Continuando con la idea de obtener información de un proceso estocástico a través de otro, el *proceso creciente* es importante en el estudio de martingalas de cuadrado integrable.

El teorema siguiente brinda una fórmula para el proceso creciente de la martingala $\{M_n\}$; obteniendo además, una relación precisa con los coeficientes a_n.

Teorema 2.2.1. *El proceso creciente asociado a M_n tiene la siguente expresión:*

$$\langle M\rangle_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 - (2p-1)^2\,\zeta_n, \quad \textit{donde} \quad \zeta_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}^2 \left(\frac{S_k}{k}\right)^2. \tag{2.20}$$

Demostración. Por definición, junto con la igualdad (2.14) se obtiene que

$$\begin{aligned}\langle M\rangle_n &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[(\Delta M_k)^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}\right] \\ &= a_1^2 + \sum_{k=2}^{n} a_k^2 \left[1 - (2p-1)^2 \left(\frac{S_{k-1}}{k-1}\right)^2\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k^2 - (2p-1)^2 \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}^2 \left(\frac{S_k}{k}\right)^2\end{aligned}$$

y la prueba está completa. ■

Ahora, la expresión (2.20) implica directamente que

$$\langle M\rangle_n \leq \nu_n, \quad \text{donde} \quad \nu_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

Por lo tanto, será suficiente conocer el comportamiento límite de la sucesión $\{\nu_n\}$ (después de nuestros primeros resultados de convergencia, se verá que dicha cota y el proceso creciente son asintóticamente equivalentes). Como cada elemento puede expresarse en términos de la funcón Γ, resultados elementales de análisis aseguran la validez de la siguiente proposición; no sin antes establecer un poco de notación.

El símbolo

$${}_3F_2\left[\begin{matrix} a,\ b,\ c \\ d,\ e \end{matrix}; z\right]$$

corresponde a la *función hipergeométrica generalizada* evaluada en z; y se define por medio de la

expresión

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix} a,\ b,\ c \\ d,\ e \end{matrix}; z\right] \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k\,(b)_k\,(c)_k}{(d)_k\,(e)_k\,k!} z^k, $$

donde, para cualquier número real a, la notación $(a)_k$ corresponde al *símbolo de Pochhammer*:

$$ (a)_k \coloneqq a\,(a+1)\,(a+2)\cdots(a+k-1) $$

y $(a)_0 \coloneqq 1$.

Proposición 2.2.2. *En el caso $0 \leq p \leq 3/4$, ν_n tiende a infinito. La velocidad de crecimiento está dada por los siguientes límites:*

$$ 1. \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n}{n^{3-4p}} = \frac{[\Gamma(2p)]^2}{3-4p}, \quad si \quad p \neq 3/4, \tag{2.21} $$

y

$$ 2. \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n}{\log n} = \frac{\pi}{4}, \quad si \quad p = 3/4. \tag{2.22} $$

En otro caso, la sucesión es convergente:

$$ 3. \quad \lim_{n\to\infty} \nu_n = {}_3F_2\left[\begin{matrix} 1,\ 1,\ 1 \\ 2p,\ 2p \end{matrix}; 1\right]. \tag{2.23} $$

La demostración será omitida, porque no forma parte de los propósitos de este trabajo. Sin embargo, vale la pena mencionar que los casos 1 y 2 se obtienen mediante una simple aplicación de las desigualdades presentadas en [28] y la fórmula de Faulhaber [32], la cual, es válida para cada potencia real a mayor que -1. Para el último caso, puede revisar [26].

2.3. Resultados asintóticos

El trabajo realizado hasta ahora ha rendido frutos: una martingala y la variación cuadrática predecible; ambos procesos, de alguna manera, asociados a la posición del elefante S_n. La finalidad de esta sección es obtener propiedades asintóticas de la caminata aleatoria del elefante, a través de M_n y el proceso creciente relacionado con dicha martingala.

En realidad, la Proposición 2.2.2 hace notorias las diferencias de comportamiento que presenta el elefante de acuerdo al valor del parámetro de memoria. Por lo tanto, es conveniente considerar la siguente definición.

Definición 2.3.1. Se dice que la sucesión $\{S_n\}$ está en el **régimen difusivo** si $p < 3/4$; en el **régimen crítico** si $p = 3/4$; y en el **régimen súper-difusivo** si $p > 3/4$.

2.3.1. Régimen difusivo

Ahora, el resto de la sección está enfocada al análisis de $\{S_n\}$ bajo el supuesto que $p < 3/4$. El primer resultado tiene que ver con convergencia casi-segura. Incluso, a simple vista se notará que la conclusión del teorema es una mera aplicación de la ley fuerte de los grandes números clásica cuando $p = 1/2$.

Teorema 2.3.1. *El cociente entre la posición del elefante y el tiempo n converge a cero casi-seguramente. En símbolos:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0, \quad c.s. \tag{2.24}$$

Demostración. En virtud del Teorema 1.3.1 se cumple que:

$$\frac{M_n}{\nu_n} \to 0, \quad \text{c.s.}$$

Gracias a la Proposición 2.2.2, esta convergencia es válida sobre todo Ω. Más aún, la identidad (2.21) asegura que

$$\frac{M_n}{n^{3-4p}} \to 0, \quad \text{c.s.}$$

Ahora, la segunda parte del mismo teorema implica

$$\frac{M_n^2}{\nu_n} = \mathcal{O}\left(\log\left(\nu_n\right)\right), \quad \text{c.s.}$$

Nuevamente, haciendo uso de (2.21) se obtiene

$$\frac{M_n^2}{n^{3-4p}} = \mathcal{O}\left(\log\left(\nu_n\right)\right), \quad \text{c.s.}$$

Como (2.21) implica que $|\log(\nu_n) - \log(\ell n^{3-4p})| \to 0$[a], entonces

$$\frac{M_n^2}{n^{3-4p}} = \mathcal{O}\left(\log\left(n\right)\right), \quad \text{c.s.}$$

Por otro lado, resultados estándar sobre la función Γ garantizan la convergencia de la sucesión $a_n n^{2p-1}$ al número real $\Gamma(2p)$, el cual, es positivo. Luego

$$\frac{S_n^2}{n} = \mathcal{O}\left(\log\left(n\right)\right), \quad \text{c.s.} \tag{2.25}$$

lo cual, es consecuencia inmediata de la siguiente identidad

$$\frac{S_n^2}{n} = \frac{M_n^2}{n^{3-4p}} \cdot \left(a_n n^{2p-1}\right)^{-2}.$$

Ahora bien, sea $\omega \in \Omega$ para el cual (2.25) es cierta. Entonces existen n_ω y $C_\omega > 0$ tales que:

$$0 \leq \frac{S_n^2(\omega)}{n} \leq C_\omega \log(n), \quad \text{para cada} \quad n \geq n_\omega.$$

Dividiendo por n, y tomando el límite cuando n tiende a infinito se concluye que

$$\frac{S_n(\omega)}{n} \longrightarrow 0,$$

válido para cada $\omega \in \Omega$ que satisface (2.25). Ya que dicho subconjunto de Ω tiene probabilidad uno de ocurrencia, (2.24) es verdadera. ■

[a] Aquí, ℓ se define como el lado derecho de (2.21).

Corolario 2.3.1.1. *La sucesión de segundos momentos condicionales de ε_n converge a uno. Esto es,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\varepsilon_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n\right] = 1, \quad c.s. \tag{2.26}$$

Demostración. Es consecuencia inmediata de (2.14). ■

Una pregunta natural es si el Teorema 2.3.1 es suficiente para asegurar la convergencia de las sumas parciales de S_n/n. El siguiente resultado muestra que esto no es cierto, pero es posible conocer la velocidad a la que crecen a infinito las sumas parciales de $(S_n/n)^2$.

Teorema 2.3.2. *Las sumas parciales de $(S_n/n)^2$ divergen a velocidad logarítmica. Esto significa que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n)} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{S_k}{k}\right)^2 = \frac{1}{3-4p}, \quad c.s. \tag{2.27}$$

Demostración. Sea $f_n := a_n^2/\nu_n$. Se afirma que f_n tiende a cero. En efecto, la identidad

$$\frac{a_n^2}{\nu_n} = \left(a_n n^{2p-1}\right)^2 \cdot \left(\frac{n^{3-4p}}{\nu_n}\right) \cdot \frac{1}{n},$$

hace evidente dicha afirmación. La igualdades (2.26) y (2.19), junto con la convergencia de f_n, implican la conclusión del Teorema 1.3.4, así

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(\nu_n)} \sum_{k=1}^{n} f_k \left(\frac{M_k^2}{\nu_k}\right) = 1, \quad \text{c.s.}$$

Ahora, el límite (2.21) implica que $\log(\nu_n) \sim \log(n^{3-4p})$. En consecuencia

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(3-4p)\log(n)} \sum_{k=1}^{n} a_k^4 \left(\frac{S_k}{\nu_k}\right)^2 = 1, \quad \text{c.s.}$$

Además, es claro que

$$\frac{\nu_k^2 (3-4p)^2}{a_k^4 \cdot k^2} \to 1.$$

Por lo que el lema de Toeplitz-Silverman (Teorema 1.1.1) implica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k^2 (3-4p)^2}{a_k^4 \cdot k^2} \cdot \frac{a_k^2 \cdot M_k^2}{\nu_k^2 (3-4p)} = 1, \quad \text{c.s.}$$

Cálculos directos muestran que (2.27) es cierta, como se afirmó. ■

Bajo el contexto de apuestas, las ganancias (o pérdidas), eventualmente, son muy grandes en un periodo de tiempo prolongado; pero, ¿qué tan grandes?. El siguiente resultado es la respuesta a esta pregunta.

Teorema 2.3.3. *Se cumple la ley del logaritmo iterado; es decir*

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n\log\log n}\right)^{1/2} S_n = \frac{1}{\sqrt{3-4p}}, \quad \textit{c.s.} \tag{2.28}$$

Demostración. Por la ley del logaritmo iterado para martingalas (Teorema 1.3.2) es suficiente mostrar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^4}{\nu_k^2} < \infty. \tag{2.29}$$

De la demostración del Teorema 2.3.2 se obtiene que

$$\frac{a_n^4 \cdot \nu_n^{-2}}{(3-4p)\, n^{-2}} \to 1.$$

De donde

$$\sum_{k=n_1}^{n} a_k^4 \cdot v_k^{-2} \leq 2\left(3-4p\right)^2 \sum_{k=n_1}^{n} k^{-2}, \quad \text{para algún } n_1 \geq 1.$$

El criterio de comparación implica que (2.29) es cierta. Por lo tanto

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2\nu_n \log\log \nu_n}\right)^{1/2} M_n = 1, \quad \text{c.s.}$$

Como $M_n = a_n S_n$, entonces

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{a_n^2}{2\nu_n \log\log \nu_n}\right)^{1/2} S_n = 1, \quad \text{c.s.}$$

Por otra parte, es fácil ver que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \nu_n}{\log\left(n^{3-4p}\right)} = 1,$$

y en consecuencia

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\log \nu_n}{\log\log n} = 1.$$

Esto último conduce a que

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{a_n^2}{2\nu_n \log\log n}\right)^{1/2} S_n = 1, \quad \text{c.s.}$$

Ahora, la convergencia establecida en (2.21) implica que

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{a_n^2\left(3-4p\right)}{\Gamma\left(2p\right)^2 2n^{3-4p} \log\log n}\right)^{1/2} S_n = 1, \quad \text{c.s.}$$

Finalmente, el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n\sqrt{3-4p}}{\Gamma\left(2p\right) n^{1-2p}} = \sqrt{3-4p},$$

muestra la validez de (2.28), como se deseaba probar. ■

El último resultado es sobre normalidad; el cual, establece que el factor adecuado de escalamiento es $\sqrt{n}$ para que las sumas parciales converjan en distribución a una variable aleatoria normal. Observe una vez más que, en el caso $p = 1/2$, se presenta el teorema clásico para variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

Teorema 2.3.4. *La sucesión $\{S_n/\sqrt{n}\}$ converge en distribución a una variable aleatoria gaussiana de media cero y varianza $(3-4p)^{-1}$.*

Demostración. El Teorema 2.3.1, junto con la convergencia establecida en (2.21) y el lema de Toeplitz, implica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\zeta_n}{\nu_n} = 0, \quad \text{c.s.}$$

y en virtud de la igualdad (2.20) se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\langle M\rangle_n}{\nu_n} = 1, \quad \text{c.s.}$$

Para hacer uso del Teorema 1.3.3, resta mostrar que la condición de Lindeberg se satisface. Para este propósito, note que

$$\left(\varepsilon^2\nu_n\right)\left(|\Delta M_k|^2 1_{|\Delta M_k|\geq\varepsilon\sqrt{\nu_n}}\right) \leq |\Delta M_k|^4 1_{|\Delta M_k|\geq\varepsilon\sqrt{\nu_n}}, \quad \text{c.s.}$$

En consecuencia,

$$\frac{1}{\nu_n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[|\Delta M_k|^2 1_{|\Delta M_k|\geq\varepsilon\sqrt{\nu_n}} \mid \mathcal{F}_{k-1}\right] \leq \frac{1}{\varepsilon^2\nu_n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[|\Delta M_k|^4 \mid \mathcal{F}_{k-1}\right].$$

Ahora bien, el Corolario 2.2.0.1 implica que

$$\frac{1}{\nu_n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[|\Delta M_k|^2 1_{|\Delta M_k|\geq\varepsilon\sqrt{\nu_n}} \mid \mathcal{F}_{k-1}\right] \leq \frac{4}{3\varepsilon^2\nu_n^2}\sum_{k=1}^{n} a_k^4.$$

En virtud de (2.29) y el lema de Kronecker se obtiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\nu_n^2}\sum_{k=1}^{n} a_k^4 = 0,$$

por lo tanto,

$$\frac{1}{\nu_n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[|\Delta M_k|^2 1_{|\Delta M_k|\geq\varepsilon\sqrt{\nu_n}} \mid \mathcal{F}_{k-1}\right] \xrightarrow{\mathcal{P}} 0;$$

y la condición de Lindeberg se satisface. Entonces, el teorema central del límite para martingalas implica que

$$\frac{1}{\sqrt{\nu_n}} M_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1); \tag{2.30}$$

además, de la prueba del Teorema 2.3.2, se puede verificar el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{\sqrt{3-4p}}, \quad \text{donde} \quad c_n := \frac{\sqrt{\nu_n\,(3-4p)}}{\sqrt{n\,(3-4p)a_n}}.$$

Esto último, con la convergencia (2.30), el Teorema de Slutsky [10], y la igualdad siguiente

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} = c_n \frac{M_n}{\nu_n},$$

hacen evidente el resultado. ■

2.3.2. Régimen crítico

Al igual que en la sección anterior, la finalidad es obtener convergencia casi-segura, una ley del logaritmo iterado y un teorema central de límite cuando el párametro de memoria toma el valor 3/4. Dicho lo anterior, las técnicas usadas arriba brindan un esquema para el caso crítico; en otras palabras, sería suficiente recurrir a *mutatis mutandis* para obtener resultados similares a los ya mencionados.

En orden de hacer evidente dicho esquema, las demostraciones serán desarrolladas casi en su totalidad, y el primer resultado es de convergencia casi-segura del proceso $\{S_n\}$.

Teorema 2.3.5. *El cociente entre S_n y $\sqrt{n}\log n$ converge a cero casi-seguramente. En símbolos,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}\log n} = 0, \quad \textit{c.s.} \tag{2.31}$$

Demostración. El Teorema 1.3.1 implica que

$$\frac{M_n}{\nu_n} \to 0, \quad \text{c.s.}$$

sobre el conjunto $\{\nu_\infty = \infty\}$. Gracias a la Proposición 2.2.2, esta convergencia es válida sobre todo Ω. Más aún, la identidad (2.22) asegura que

$$\frac{M_n}{\log n} \to 0, \quad \text{c.s.}$$

Ahora bien, la segunda parte del mismo teorema implica la tasa de convergencia

$$\frac{M_n^2}{\nu_n} = \mathcal{O}\left(\log \nu_n\right), \quad \text{c.s.}$$

Nuevamente, haciendo uso de (2.22) se obtiene que

$$\frac{M_n^2}{\log n} = \mathcal{O}\left(\log \nu_n\right), \quad \text{c.s.}$$

Como (2.22) implica que $|\log(\nu_n) - \log((\pi/4)\log(n))| \to 0$, entonces

$$\frac{M_n^2}{\log n} = \mathcal{O}\left(\log\log n\right), \quad \text{c.s.}$$

Por otro lado, resultados estándar de la función Γ garantizan la convergencia de la sucesión na_n^2 a $\pi/4$, un número real positivo. Luego

$$\frac{S_n^2}{n\log n} = \mathcal{O}\left(\log\log n\right), \quad \text{c.s.} \tag{2.32}$$

lo cual, es una consecuencia inmediata de la siguiente identidad

$$\frac{S_n^2}{n\log n} = \frac{M_n^2}{\log n} \cdot \left(na_n^2\right)^{-1}.$$

Ahora bien, sea $\omega \in \Omega$ para el cual (2.32) es cierta. Entonces existen n_ω, y $C_\omega > 0$ tales que

$$0 \leq \frac{S_n^2(\omega)}{n\log n} \leq C_\omega \log\log n, \quad \text{para cada } n \geq n_\omega.$$

Dividiendo por $\log n$ y tomando límite cuando n tiende a infinito se concluye que

$$\frac{S_n(\omega)}{\sqrt{n}\log n} \to 0,$$

válido para cada $\omega \in \Omega$ que satisface (2.32). Ya que dicho subconjunto de Ω tiene probabilidad uno de ocurrencia, (2.31) es verdadera. ■

Corolario 2.3.5.1. *La sucesión de segundos momentos condicionales de ε_n converge a uno. Esto es,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\varepsilon_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n\right] = 1, \quad \textit{c.s.} \tag{2.33}$$

Demostración. Es consecuencia inmediata de (2.14). ■

El Teorema 2.3.5 implica que $S_n/(n\log n)$ converge a cero con probabilidad uno. El siguiente resultado es un refinamiento de dicha convergencia: la cantidad $S_n/(n\log n)$ es pequeña, pero no lo

suficiente para asegurar la existencia del límite para sus sumas parciales.

Teorema 2.3.6. *Las sumas parciales de la sucesión* $\{(S_n/(n\log n))^2\}$ *divergen a infinito. Más aún,*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log\log n}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{S_k}{k\log k}\right)^2=1,\quad c.s. \tag{2.34}$$

Demostración. Una vez más, sea $f_n := a_n^2/\nu_n$. Se afirma que tiende a cero. En efecto, la igualdad

$$\frac{a_n^2}{\nu_n}=\frac{1}{n\log n}\cdot\frac{\log n}{\nu_n}\cdot\left(na_n^2\right)$$

hace evidente dicha afirmación. Ahora, (2.33) y el Corolario 2.2.0.1; junto con la convergencia de f_n, implican la conclusión del Teorema 1.3.4, así

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log\nu_n}\sum_{k=1}^{n}f_k\left(\frac{M_k^2}{\nu_k}\right)=1,\quad \text{c.s.}$$

El límite (2.22) implica que $\log\nu_n\sim\log\log n$. En consecuencia

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log\log n}\sum_{k=1}^{n}a_k^4\left(\frac{S_k}{\nu_k}\right)^2=1,\quad \text{c.s.}$$

Además, es claro que

$$\frac{\nu_k^2}{\log^2 n}\cdot\frac{1}{k^2a_k^4}\to 1,$$

por lo que el lema de Toeplitz-Silverman implica que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log\log n}\sum_{k=2}^{n}a_k^4\left(\frac{S_k}{\nu_k}\right)^2\cdot\frac{\nu_k^2}{k^2a_k^4\log^2 k}=1,\quad \text{c.s.}$$

Cálculos directos muestran que (2.34) es cierta, como se afirmó. ■

Ahora, se establece una ley del logaritmo iterado para $p = 3/4$. Observe que la tasa de crecimiento descrita en el siguiente teorema es muy inusual.

Teorema 2.3.7. *Es válida la siguiente ley del logaritmo iterado*

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n\log n\log\log\log n}\right)^{1/2} S_n = 1, \quad c.s. \tag{2.35}$$

Demostración. Basta mostrar que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k^4}{\nu_k^2} < \infty. \tag{2.36}$$

De la prueba del teorema anterior, se desprende que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_k^4\nu_k^{-2}}{k^{-2}\log^{-2}k} = 1.$$

De donde,

$$\sum_{k=n_1}^{n} a_k^4\cdot\nu_k^{-2} \le 2\sum_{k=n_1}^{n} k^{-2}\log^{-2}k, \quad \text{para algún } n_1 \ge 1.$$

Ahora, el criterio de comparación implica que (2.36) es cierta. Por lo tanto,

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\nu_n\log\log\nu_n}\right)^{1/2} M_n = 1, \quad \text{c.s.}$$

Como $M_n = a_n S_n$, entonces

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{a_n^2}{2\nu_n\log\log\nu_n}\right)^{1/2} S_n = 1, \quad \text{c.s.}$$

Sea $\ell := \pi/4$. El límite (2.22) implica

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{a_n^2}{2\ell\log n\log\log\log n}\right)^{1/2} S_n = 1, \quad \text{c.s.}$$

Finalmente, como na_n^2 converge a ℓ,

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n\log n\log\log\log n}\right)^{1/2} S_n = 1, \quad \text{c.s.}$$

lo cual, concluye la demostración. ■

El último resultado es sobre convergencia en distribución. Observe que la normalidad también se

hace presente en este caso, con el factor de escala adecuado.

Teorema 2.3.8. *La sucesión* $\{S_n/\sqrt{n\log n}\}$ *converge en distribución a una variable normal estándar. Más precisamente,*

$$\frac{S_n}{\sqrt{n\log n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)\,. \tag{2.37}$$

Demostración. Del mismo modo que en el Teorema 2.3.4 se verifica que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\langle M\rangle_n}{\nu_n} = 1, \quad \text{c.s.} \tag{2.38}$$

Por otra parte, $\lim \nu_n/\log n = \lim na_n^2$ implica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2\nu_n^{-1}}{(n\log n)^{-1}} = 1.$$

Una vez más, el criterio de comparación muestra que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^4}{\nu_n^2} < \infty, \tag{2.39}$$

a través de la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2\,(\log k)^2}.$$

La cual, es convergente en virutd del criterio de condensación de Cauchy. Ya se mostró en el Teorema 2.3.4 que (2.39) es suficiente para exhibir que la condición de Lindeberg es satisfecha. En consecuencia, el teorema central del límite para martingalas implica

$$\frac{M_n}{\nu_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)\,.$$

Un sencillo artífice algebraico y el Teorema de Slutsky [10] conduce a (2.37). ■

Puede notarse que, tanto para el caso difusivo como para el crítico, se recurre a los mismos argumentos en las demostraciones de los teoremas respectivos; haciendo evidente un esquema de trabajo para este proceso.

2.3.3. Régimen súper-difusivo

En contraste con los casos anteriores, las técnicas para obtener conclusiones sobre este régimen tienen como base teoremas relacionados a la convergencia en $\mathcal{L}^p$.

El Corolario 2.2.0.1 es un excelente lugar para iniciar con el análisis asintótico, de modo que, los valores de p son $p = 2$ y $p = 4$. El primer resultado de esta índole asegura la existencia del límite M_∞.

Teorema 2.3.9. *La martingala $\{M_n\}$ converge casi-seguramente a una variable aleatoria finita M_∞. Más aún, M_∞ es no degenerada y esta convergencia también es válida en $\mathcal{L}^4$.*

Demostración. Será suficiente mostrar que $\{M_n\}$ es una martingala acotada en $\mathcal{L}^4$. Primero, nótese que $\{M_n\}$ es acotada en $\mathcal{L}^2$. En efecto, la identidad

$$\mathbb{E}\left[M_n^2\right] = \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_n\right],$$

demuestra que el valor esperado de M_n^2 está dominado por ν_n; i.e.,

$$\mathbb{E}\left[M_n^2\right] \leq \nu_n, \quad \text{para cada } n \geq 1.$$

Dado que $\{\nu_n\}$ es una sucesión monótona convergente, se cumple que

$$\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}\left[M_n^2\right] < \infty.$$

Por otro lado, $M_{k+1}^4 = (a_{k+1}\varepsilon_{k+1} + M_k)^4$, de modo que,

$$\mathbb{E}\left[M_{k+1}^4 \mid \mathcal{F}_k\right] = \sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i} a_{k+1}^i M_k^{4-i} \mathbb{E}\left[\varepsilon_{k+1}^i \mid \mathcal{F}_k\right]. \tag{2.40}$$

Al igual que en la prueba de la Proposición 2.2.1 se verifica que

$$\mathbb{E}\left[\varepsilon_{k+1}^3 \mid \mathcal{F}_k\right] = 2\,(2p-1)\,\frac{S_k}{k}\left((2p-1)^2\left(\frac{S_k}{k}\right)^2 - 1\right),$$

de donde se obtiene la siguiente desigualdad:

$$M_k \mathbb{E}\left[\varepsilon_{k+1}^3 \mid \mathcal{F}_k\right] \leq 2\,(2p-1)\left((2p-1)^2 - 1\right).$$

En consecuencia,

$$M_k \mathbb{E}\left[\varepsilon_{k+1}^3 \mid \mathcal{F}_k\right] \leq 0, \quad \text{para cada } k \geq 0.$$

En virtud de (2.19) y (2.40), se concluye de manera inmediata que

$$\mathbb{E}\left[M_{k+1}^4 \mid \mathcal{F}_k\right] \leq \frac{4}{3}a_{k+1}^4 + 6a_{k+1}^2 M_k^2 + M_k^4.$$

Tomando esperanza de ambos lados de la desigualdad se obtiene que

$$\mathbb{E}\left[M_{k+1}^4\right] - \mathbb{E}\left[M_k^4\right] \leq \frac{4}{3}a_{k+1}^4 + 6a_{k+1}^2 \mathbb{E}\left[M_k^2\right]$$

Al realizar la suma sobre k se cumple

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_n^4\right] &\leq \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{n} a_k^4 + 6\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \mathbb{E}\left[M_{k-1}^2\right] \\
&\leq 6\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^4 + \nu_n \sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \\
&= 6\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^4 + \nu_n^2\right).
\end{aligned}$$

Finalmente, nótese que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $a_k \leq 1$ y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_n^4\right] &\leq 6\left(\nu_n + \nu_n^2\right) \\
&= 6\left(1 + \nu_n\right)\nu_n,
\end{aligned}$$

haciendo evidente que la martingala $\{M_n\}$ es acotada en $\mathcal{L}^4$. ■

Corolario 2.3.9.1. *El límite escalado de la caminata aleatoria del elefante existe casi-seguramente. Dicha convergencia también es válida en $\mathcal{L}^4$.*

Demostración. Por el Teorema 2.3.9, $M_n \to M_\infty$ c.s., donde

$$M_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varepsilon_k, \quad \text{c.s.}$$

Como $M_n = a_n S_n$, y la sucesión $\{n^{2p-1}a_n\}$ converge a $\Gamma(2p)$, se obtiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^{2p-1}} = \frac{M_\infty}{\Gamma(2p)} \coloneqq L, \quad \text{c.s.},$$

exhibiendo, además, que el cambio de escala es n^{2p-1}. Argumentos análogos son suficientes para mostrar la convergencia en $\mathcal{L}^4$. ■

Note que la convergencia casi-segura de $\{M_n\}$ hacia una variable aleatoria M_∞ también queda garantizada por la finitud del proceso creciente *ad infinitum*. Sin embargo, el Teorema 2.3.9 brinda una herramienta para exhibir, de manera elemental, que la distribución límite del proceso escalado no es gaussiana.

La herramienta en cuestión es la capacidad de intercambiar límites por integrales, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[L_n\right] = \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} L_n\right].$$

El siguiente resultado permite conocer con exactitud los primeros cuatro momentos de L, y a través de un análisis de la asimetría (*skewness*) y de la curtosis, se muestra que la distribución límite es sub-gaussiana.

Teorema 2.3.10. *Los primeros cuatro momentos de la variable aleatoria L son:*

$$\mathbb{E}\left[L\right] = \frac{2q-1}{\Gamma\left(2p\right)}, \tag{2.41}$$

$$\mathbb{E}\left[L^2\right] = \frac{1}{\left(4p-3\right)\Gamma\left(2\left(2p-1\right)\right)}, \tag{2.42}$$

$$\mathbb{E}\left[L^3\right] = \frac{2p\left(2q-1\right)}{\left(2p-1\right)\left(4p-3\right)\Gamma\left(3\left(2p-1\right)\right)}, \tag{2.43}$$

$$\mathbb{E}\left[L^4\right] = \frac{6\left(8p^2-4p-1\right)}{\left(8p-5\right)\left(4p-3\right)^2\Gamma\left(4\left(2p-1\right)\right)}. \tag{2.44}$$

La demostración de este teorema no es complicada, sin embargo, requiere de mucho trabajo computacional; razón por la cual, se omite. Puede consultarse en [4]. El método utilizado en la prueba descansa en la manipulación de sumas de cocientes de la función Γ y del intercambio entre límites y esperanza.

La utilidad del teorema inmediato anterior es probar que S_n/n^{2p-1} no presenta normalidad en el límite. Para este fin, recuerde que la asimetría y la curtosis están definidas como

$$\alpha = \frac{\mathbb{E}\left[\left(L-\mu\right)^3\right]}{\sigma^3}, \quad \text{y} \quad \kappa = \frac{\mathbb{E}\left[\left(L-\mu\right)^4\right]}{\sigma^4},$$

respectivamente; donde μ es la media y σ^2 es la varianza. Bajo el supuesto $q = 1/2$, se obtiene el

siguiente resultado.

Teorema 2.3.11. *La distribución de la variable aleatoria L es simétrica respecto a su media y no es gaussiana. Más precisamente,*

$$1 \leq \kappa < 3; \tag{2.45}$$

lo que implica que es sub-gaussiana.

Demostración. Como $q = 1/2$, el Teorema 2.3.10 implica que

$$\mu = 0 \quad \text{y} \quad \alpha = 0.$$

La última igualdad significa que la distribución de L es simétrica respecto al origen. Ahora, por la defínción de curtosis,

$$\kappa = \frac{6\left(8p^2 - 4p - 1\right)\left(\Gamma\left(2\left(2p-1\right)\right)\right)^2}{\left(8p-5\right)\Gamma\left(4\left(2p-1\right)\right)}.$$

Sencillos artífices algebraicos permiten concluir que κ es decreciente como función de p. Por lo tanto, una simple evaluación de κ en los extremos del intervalo $(3/4, 1]$ muestra la validez de (2.45). ■

Capítulo 3

Simulación

El propósito de este capítulo es agrupar y representar graficamente los resultados del Capítulo 2, de modo que su importancia sea clara. Se comparan los resultados respectivos entre cada régimen del proceso.

3.1. Ley de los grandes números

La idea general de la Ley de los grandes números es hallar dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ (podrían ser aleatorias) que satisfacen:

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{\text{c.s.}} 0,$$

donde $\{b_n\}$ es una sucesión que crece a infinito. En muchos casos, $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Particularmente, en los regímenes difusivo y crítico, se puede observar que $\{b_n\}$ no depende de p y q. Más precisamente, $b_n = n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ en el primer caso, y $b_n = \sqrt{n}\log n$ en el último. A continuación se presentan simulaciones respectivas a los casos difusivo y crítico, las cuales, ilustran numéricamente (2.24) y (2.31).

Observe que $\left(\sqrt{n}\log n\right)/n \to 0$, esto significa que la sucesión $\{b_n\}$ para el caso crítico crece lentamente en comparación con la del régimen difusivo. El resultado es sorprendente en sí mismo dada la posición de p: en el caso crítico, p es más "grande", por lo que se esperaría que $\{b_n\}$ crezca a infinito más rápido que la del régimen difusivo. Entonces, se clarifica el valor del adjetivo "crítico" cuando $p = 3/4$.

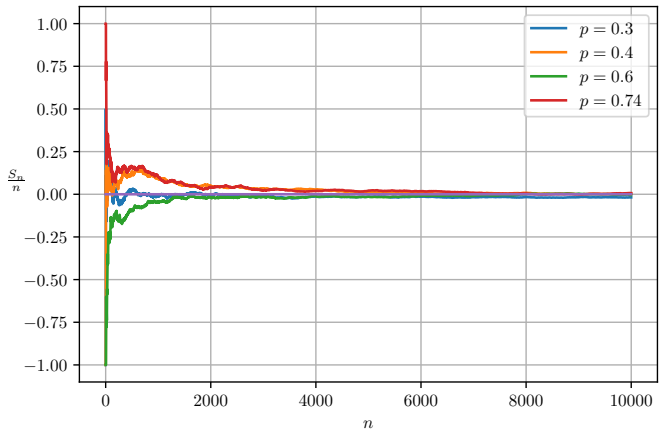


Figura 3.1: Cuatro trayectorias con diferentes valores de p del régimen difusivo

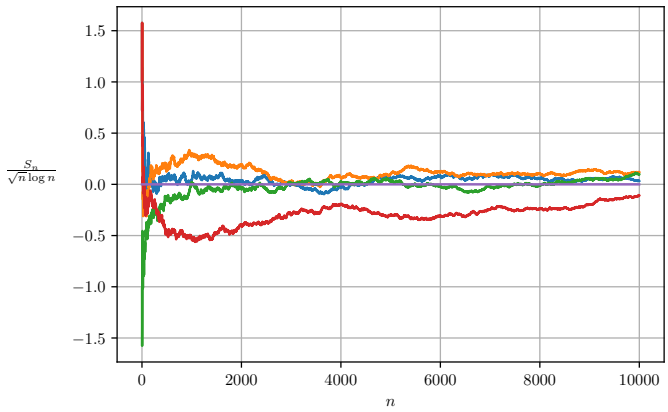


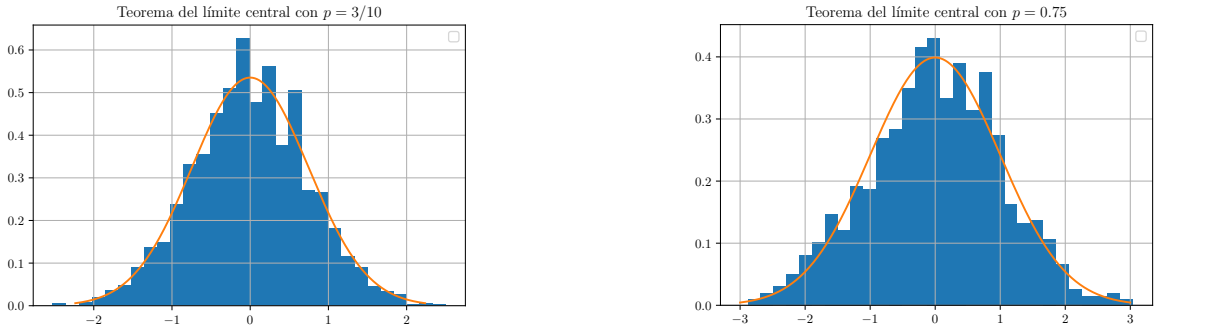
Figura 3.2: Cuatro trayectorias del caso crítico.

En las Figuras 3.1 y 3.2 se ilustran las respectivas Leyes de los grandes números para la caminata aleatoria de elefante, observando que en ambos casos, se da la convergencia casi-segura a cero con cierta rapidez.

3.2. Teorema del límite central

El Teorema del central del límite es sin duda uno de los descubrimientos más importantes en las áreas de Probabilidad y Estadística. El resultado clásico postula que la suma de variables aleatorias independientes tiene una distribución normal cuando el número de sumandos es muy grande. Observe

que el teorema clásico no requiere que todos los sumandos sean idénticamente distribuidos, pero sí independientes. Sin embargo, condiciones adicionales deben ser añadidas. La propiedad principal es la condición de Lindeberg, la cual, intuitivamente, estipula que las fluctuaciones aleatorias se deben a las masas concentradas en un intervalo, cuya longuitud es pequeña comparada con S_n (en el caso martingala, con M_n) [18].



(a) Histograma (azul) del cociente $S_n/\sqrt{n}$.

(b) Histograma (azul) del cociente $S_n/\sqrt{n \log n}$.

Figura 3.3: Ajuste de las simulaciones con la densidad normal

Nuevamente, el problema es hallar dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, pero con la propiedad de que la siguente convergencia

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1),$$

se cumpla. En el caso de la caminata aleatoria del elefante, tanto en el caso difusivo como en el crítico, las sucesiones $\{a_n\}$ son cero. La sucesión respectiva al caso crítico no es nueva, pues hay ejemplos de variables independientes y con la misma distribución que presentan la misma sucesión normalizante $\{b_n\}$, salvo constantes [17, 18].

En las Figura 3.3 se ilustra el Teorema del límite central para los casos difusivo y crítico, en ambos casos se consideraron 1,000 trayectorias de tamaño 10,000. En ellas se observa un ajuste apropiado de las simulaciones respecto a la densidad normal correspondiente.

3.3. Ley del logaritmo iterado

La Ley del logaritmo iterado es un resultado intermedio. Se sitúa "entre" la ley de los grandes números y el teorema del central del límite. Para ilustrar esto, suponga por un momento que $p = 1/2$:

la ley de los grandes números afirma que S_n crece lentamente en comparación con n, y el teorema del central del límite permite mostrar que [19]:

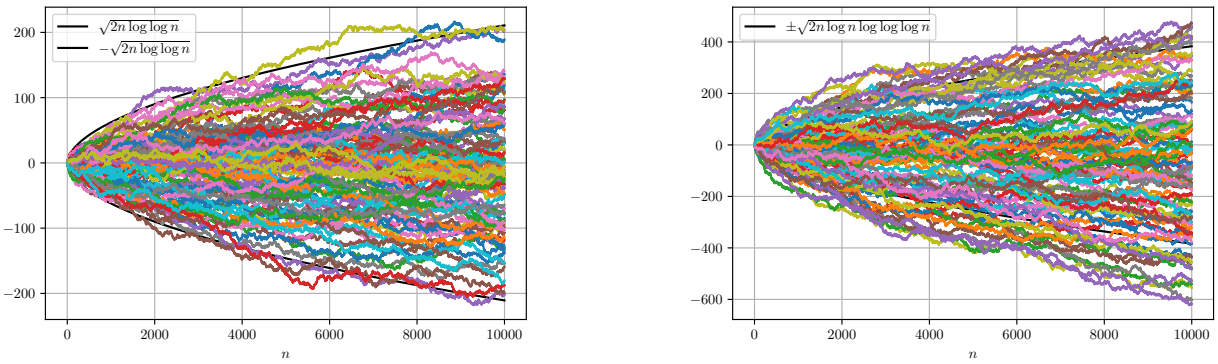
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \infty, \quad \text{c.s.}$$

Por lo tanto, el propósito de la ley del logaritmo iterado es hallar una sucesión $\{b_n\}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n} \leq b_n \leq n$, y que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{b_n} = 1, \quad \text{c.s.}$$

En otras palabras, la ley del logaritmo iterado es un resultado que brinda información acerca del crecimiento de S_n cuando n es suficientemente grande. Ya que $p = 1/2$, $b_n = \sqrt{2n \log\log n}$, de donde, el resultado obtiene su nombre [10]. Sorprendentemente, la misma sucesión es válida para cada $p < 3/4$, salvo algunas constantes que dependen del parámetro de memoria.

Ahora bien, la ley del logartimo iterado clarifica el comportamiento de S_n en el caso crítico, complementando la ley de los grandes números como sigue: Si los valores de S_n son arbitrariamente grandes, es natural pensar que la convergencia a cero sea más lenta.



(a) $p = 7/10$ (régimen difusivo). (b) $p = 3/4$

Figura 3.4: Trayectorias de S_n en los regímenes difusivo y crítico

En la Figura 3.4 puede apreciarse este resultado para el caso difusivo y crítico, respectivamente. En ambos casos se consideraron 100 trayectorias de tamaño 10,000. Observe que la mayoría de las trayectorias permanece dentro del área delímitada por las sucesiones $\{\pm b_n\}$.

Conclusiones

Quizá, la caminata aleatoria del elefante es el proceso más natural con memoria de toda su historia. Es un modelo fascinante que despertó interes en la literatura, y cuenta con multiples extensiones o modificaciones. Por ejemplo, el caso donde el elefante recuerda el primer y último paso [20], o bien, donde el elefante sólo tiene dos opciones: avanzar o permanecer [1]. El modelo original ya es interesante por sí mismo, y al parecer, posee la mayoría de propiedades deseables en este tipo de procesos.

Por otro lado, la teoría de martingalas luce como la más adecuacada para estudiar el proceso en cuestión. Obsérvese, por ejemplo, que el trabajo necesario después de la correcta aplicación de los teoremas relativos a martingalas es álgebra de límites así como de tasas de crecimiento. Observe que, para la martingala $\{M_n\}$ la sucesión $\{a_n\}$ es constante, por lo que también es predecible. Esto permite que se conserve la propiedad martingala de las sumas parciales de la sucesión $\{\varepsilon_n\}$. De hecho, es lo único que se requeire. Las referencias citadas presentan una discrepancia con los índices, pero las conclusiones siguen siendo válidas por lo mencionado anteriormente. Puede consultarse [29] para más detalles.

Por otra parte, en el año 2018, fue publicado un artículo sobre el uso de la caminata aleatoria del elefante como una herramienta en la detección temprana de autismo [33]. Las consideraciones matemáticas en dicho trabajo son mínimas, pero el propósito es reflejar síntomas del espectro autista en un proceso que depende de la posición del elefante. En 2019, Bercu, Chebanol y Ruch [5] utilizan las expresiones del Teorema 2.3.10 para demostrar identidades relativas a funciones hipergeométricas, las cuales, tienen importancia en ecuaciones diferenciales y teoría de números. Erich Baur, por su parte, señala su potencial para ser aplicada en otras áreas como inteligencia artificial [1], pero no se aborda algo en concreto, salvo la idea de que los movimientos microscópicos de partículas siguen trayectorias dictadas por caminatas aleatorias [25].

Finalmente, como trabajo a futuro, el autor cree que es posible obtener resultados de recurrencia y transitoriedad permaneciendo en el contexto de martingalas a tiempo discreto; lo que permite un enfoque más propio de la probabilidad que el de funciones de Lyapunov. En adición, una pregunta

interesante desde el punto de vista matemático es conocer propiamente al proceso $\{R_n\}$, donde

$$R_n = \max_{k \leq n} S_k.$$

Muy recientemente, Bercu y Laulin [6] analizan el centro de masa de la caminata aleatoria del elefante a través de martingalas multidimensionales. El centro de masa, así como el diámetro de la envoltura convexa de la caminata son de interés en física y mecánica estadística. Note que el diámetro podría dar información acerca del proceso R_n.

Cabe señalar que la caminata aleatoria del elefante no despertó interes sino hasta 2014, como puede observarse en la bibliografía, por lo cual, es un tema actual que sigue atrayendo a la comunidad científica, en particular, a la de mecánica estadística y física en general.

Bibliografía

[1] Erich Baur. «On a class of random walks with reinforced memory». En: *arXiv preprint arXiv:1909.04633* (2019).

[2] Erich Baur y Jean Bertoin. «Elephant random walks and their connection to Pólya-type urns». En: *Physical Review E* 94.5 (2016), pág. 052134.

[3] B. Bercu. «On the convergence of moments in the almost sure central limit theorem for martingales with statistical applications». En: *Stochastic Process. Appl.* 111.1 (2004), págs. 157-173. ISSN: 0304-4149. DOI: 10.1016/j.spa.2002.10.001. URL: https://doi.org/10.1016/j.spa.2002.10.001.

[4] Bernard Bercu. «A martingale approach for the elephant random walk». En: *J. Phys. A* 51.1 (2018), págs. 015201, 16. ISSN: 1751-8113. DOI: 10.1088/1751-8121/aa95a6. URL: https://doi.org/10.1088/1751-8121/aa95a6.

[5] Bernard Bercu, Marie-Line Chabanol y Jean-Jacques Ruch. «Hypergeometric identities arising from the elephant random walk». En: *J. Math. Anal. Appl.* 480.1 (2019), págs. 123360, 12. ISSN: 0022-247X. DOI: 10.1016/j.jmaa.2019.07.050. URL: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.07.050.

[6] Bernard Bercu y Lucile Laulin. «On the center of mass of the elephant random walk». En: *arXiv preprint arXiv:1911.06781* (2019).

[7] Bernard Bercu y Lucile Laulin. «On the multi-dimensional elephant random walk». En: *J. Stat. Phys.* 175.6 (2019), págs. 1146-1163. ISSN: 0022-4715. DOI: 10.1007/s10955-019-02282-8. URL: https://doi.org/10.1007/s10955-019-02282-8.

[8] Zdzisław Brzeźniak y Tomasz Zastawniak. *Basic stochastic processes*. Springer Undergraduate Mathematics Series. A course through exercises. Springer-Verlag London, Ltd., London, 1999, págs. x+225. ISBN: 3-540-76175-6. DOI: 10.1007/978-1-4471-0533-6. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0533-6.

[9] Silvia Businger. «The shark random swim (Lévy flight with memory)». En: *J. Stat. Phys.* 172.3 (2018), págs. 701-717. ISSN: 0022-4715. DOI: 10.1007/s10955-018-2062-5. URL: https://doi.org/10.1007/s10955-018-2062-5.

[10] Kai Lai Chung y Kailai Zhong. *A course in probability theory*. Academic press, 2001.

[11] Cristian F Coletti y Ioannis Papageorgiou. «Asymptotic analysis of the elephant random walk». En: *arXiv preprint arXiv:1910.03142* (2019).

[12] MAA Da Silva y col. «Non-Gaussian propagator for elephant random walks». En: *Physical Review E* 88.2 (2013), pág. 022115.

[13] Burgess Davis. «Reinforced random walk». En: *Probab. Theory Related Fields* 84.2 (1990), págs. 203-229. ISSN: 0178-8051. DOI: 10.1007/BF01197845. URL: https://doi.org/10.1007/BF01197845.

[14] J. L. Doob. *Stochastic processes*. Wiley Classics Library. Reprint of the 1953 original, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990, págs. viii+654. ISBN: 0-471-52369-0.

[15] M. Duflo, R. Senoussi y A. Touati. «Sur la loi des grands nombres pour les martingales vectorielles et l'estimateur des moindres carrés d'un modèle de régression». En: *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* 26.4 (1990), págs. 549-566. ISSN: 0246-0203. URL: http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1990__26_4_549_0.

[16] Marie Duflo. *Random iterative models*. Vol. 34. Applications of Mathematics (New York). Translated from the 1990 French original by Stephen S. Wilson and revised by the author. Springer-Verlag, Berlin, 1997, págs. xviii+385. ISBN: 3-540-57100-0. DOI: 10.1007/978-3-662-12880-0. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-662-12880-0.

[17] William Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. I*. Third edition. John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1968, págs. xviii+509.

[18] William Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II*. Second edition. John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1971, págs. xxiv+669.

[19] Janos Galambos. *Advanced probability theory*. Second. Vol. 10. Probability: Pure and Applied. Marcel Dekker, Inc., New York, 1995, págs. xii+461. ISBN: 0-8247-9332-3.

[20] Allan Gut y Ulrich Stadtmüller. «Variations of the elephant random walk». En: *arXiv preprint arXiv:1812.01915* (2018).

[21] P. Hall y C. C. Heyde. *Martingale limit theory and its application*. Probability and Mathematical Statistics. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1980, págs. xii+308. ISBN: 0-12-319350-8.

[22] Paul G. Hoel, Sidney C. Port y Charles J. Stone. *Introduction to probability theory*. The Houghton Mifflin Series in Statistics. Houghton Mifflin Co., Boston, Mass., 1971, págs. xi+258.

[23] Svante Janson. «Functional limit theorems for multitype branching processes and generalized Pólya urns». En: *Stochastic Process. Appl.* 110.2 (2004), págs. 177-245. ISSN: 0304-4149. DOI: 10.1016/j.spa.2003.12.002. URL: https://doi.org/10.1016/j.spa.2003.12.002.

[24] Rajeeva L. Karandikar y B. V. Rao. *Introduction to stochastic calculus*. Indian Statistical Institute Series. Springer, Singapore, 2018, págs. xiii+441. ISBN: 978-981-10-8317-4; 978-981-10-8318-1. DOI: 10.1007/978-981-10-8318-1. URL: https://doi.org/10.1007/978-981-10-8318-1.

[25] Hyun-Joo Kim. «Anomalous diffusion induced by enhancement of memory». En: *Physical Review E* 90.1 (2014), pág. 012103.

[26] Wolfram Koepf. *Hypergeometric summation*. Second. Universitext. An algorithmic approach to summation and special function identities. Springer, London, 2014, págs. xviii+279. ISBN: 978-1-4471-6463-0; 978-1-4471-6464-7. DOI: 10.1007/978-1-4471-6464-7. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4471-6464-7.

[27] Rüdiger Kürsten. «Random recursive trees and the elephant random walk». En: *Phys. Rev. E* 93.3 (2016), págs. 032111, 11. ISSN: 2470-0045. DOI: 10.1103/physreve.93.032111. URL: https://doi.org/10.1103/physreve.93.032111.

[28] Andrea Laforgia y Pierpaolo Natalini. «On some inequalities for the gamma function». En: *Adv. Dyn. Syst. Appl.* 8.2 (2013), págs. 261-267. ISSN: 0973-5321.

[29] Tze Leung Lai y Ching Zong Wei. «Least squares estimates in stochastic regression models with applications to identification and control of dynamic systems». En: *Ann. Statist.* 10.1 (1982), págs. 154-166. ISSN: 0090-5364. URL: http://links.jstor.org/sici?sici=0090-5364(198203)10:1%3C154:LSEISR%3E2.0.CO;2-U&origin=MSN.

[30] Paul Loya. *Amazing and aesthetic aspects of analysis*. Springer, New York, 2017, págs. xv+722. ISBN: 978-1-4939-6793-3; 978-1-4939-6795-7.

[31] Benoit B. Mandelbrot. *The fractal geometry of nature*. Schriftenreihe für den Referenten. [Series for the Referee]. W. H. Freeman y Co., San Francisco, Calif., 1982, págs. v+460. ISBN: 0-7167-1186-9.

[32] Kevin J. McGown y Harold R. Parks. «The generalization of Faulhaber's formula to sums of non-integral powers». En: *J. Math. Anal. Appl.* 330.1 (2007), págs. 571-575. ISSN: 0022-247X. DOI: 10.1016/j.jmaa.2006.08.019. URL: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.08.019.

[33] T. R. S. Moura, U. L. Fulco y E. L. Albuquerque. «A random walk model to evaluate autism». En: *Phys. A* 492 (2018), págs. 1694-1699. ISSN: 0378-4371. DOI: 10.1016/j.physa.2017.11.090. URL: https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.11.090.

[34] J. Neveu. *Discrete-parameter martingales*. Revised. Translated from the French by T. P. Speed, North-Holland Mathematical Library, Vol. 10. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-Oxford; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1975, págs. viii+236.

[35] Jacques Neveu. *Mathematical foundations of the calculus of probability*. Holden-day, 1965.

[36] Mariane Pelletier. «On the almost sure asymptotic behaviour of stochastic algorithms». En: *Stochastic processes and their applications* 78.2 (1998), págs. 217-244.

[37] Robin Pemantle. «A survey of random processes with reinforcement». En: *Probab. Surv.* 4 (2007), págs. 1-79. DOI: 10.1214/07-PS094. URL: https://doi.org/10.1214/07-PS094.

[38] George Pólya y Gabor Szegő. *Problems and theorems in analysis. I*. Classics in Mathematics. Series, integral calculus, theory of functions, Translated from the German by Dorothee Aeppli, Reprint of the 1978 English translation. Springer-Verlag, Berlin, 1998, págs. xx+389. ISBN: 3-540-63640-4. DOI: 10.1007/978-3-642-61905-2. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-642-61905-2.

[39] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*. Third. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, 1976, págs. x+342.

[40] Gunter M Schütz y Steffen Trimper. «Elephants can always remember: Exact long-range memory effects in a non-Markovian random walk». En: *Physical Review E* 70.4 (2004), pág. 045101.

[41] Albert N. Shiryaev. *Probability. 1*. Third. Vol. 95. Graduate Texts in Mathematics. Translated from the fourth (2007) Russian edition by R. P. Boas and D. M. Chibisov. Springer, New York, 2016, págs. xvii+486. ISBN: 978-0-387-72205-4; 978-0-387-72206-1.

[42] Albert N. Shiryaev. *Probability. 2*. Vol. 95. Graduate Texts in Mathematics. Third edition of [MR0737192], Translated from the 2007 fourth Russian edition by R. P. Boas and D. M. Chibisov. Springer, New York, 2019, págs. x+348. ISBN: 978-0-387-72207-8; 978-0-387-72208-5.

[43] William F. Stout. «A martingale analogue of Kolmogorov's law of the iterated logarithm». En: *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* 15 (1970), págs. 279-290. DOI: 10.1007/BF00533299. URL: https://doi.org/10.1007/BF00533299.

[44] William F. Stout. *Almost sure convergence*. Probability and Mathematical Statistics, Vol. 24. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1974, págs. x+381.

[45] Otto Toeplitz. «Über allgemeine lineare Mittelbildungen.» En: *Prace matematyczno-fizyczne* 22.1 (1911), págs. 113-119.

[46] David Williams. *Probability with martingales*. Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press, Cambridge, 1991, págs. xvi+251. ISBN: 0-521-40455-X; 0-521-40605-6. DOI: 10.1017/CBO9780511813658. URL: https://doi.org/10.1017/CBO9780511813658.