BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Propiedades Básicas del $n-$ésimo Hiperespacio de un Continuo

Tesis que para obtener el Título de

Licenciada en Matemáticas Aplicadas

presenta

Betsy Christian Cuevas Martínez

Directores de Tesis

Dr. David Herrera Carrasco

Dr. Fernando Macías Romero

Dedico este trabajo

especialmente a mi hijo

Octavio Ehécatl Pineda Cuevas

Agradecimientos

Agradezco principalmente a mis directores de tesis, David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero, por los conocimientos, el tiempo y sobre todo por la amistad que me han brindado durante la realización de esta tesis con la cual quedo muy contenta y satisfecha.

Agradezco a mis jurados: Dra. María de Jesus López Toriz, M. C. Manuel Ibarra Contreras, Dr. Raúl Escobedo Conde, por sus observaciones que mejoraron a la presentación de este trabajo.

Introducción

El material que se presenta en este trabajo pertenece a la rama de la Topología conocida como Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios. Un continuo es un espacio métrico, no vacío, compacto y conexo.

El estudio sistemático de los continuos comenzó a principios del siglo pasado, principalmente en Polonia, donde personajes como Knaster, Kuratowski y Sierpiński se dedicaron a cultivar esta nueva rama de la matemática. Casi al mismo tiempo empezaron a estudiar también los hiperespacios. Los hiperespacios más comunes de un continuo X, para $n \in \mathbb{N}$ son:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es un conjunto cerrado en } X \text{ y no vacío}\},$$

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es un conjunto conexo}\},$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.$$

A estos hiperespacios se les dota de una métrica llamada métrica de Hausdorff (Teorema 1.25).

Los primeros trabajos a principios del siglo XX se deben a los alemanes Vietoris y Hausdorff, la métrica de Hausdorff fue definida por Pompeiu en 1905 (vea las páginas 281 y 282 de [17]). En 1940 Kelley en su tesis doctoral nombrada *Un estudio de hiperespacios* hizo el primer estudio sistemático de los hiperespacios e implementó técnicas que siguen siendo utilizadas hasta hoy en día. En nuestro país, durante las últimas dos décadas, se ha intensificado el número de investigadores de estas teorías.

Durante los años veinte y treinta del siglo pasado se determinó gran parte de la estructura fundamental de los hiperespacios. Para un continuo X y $n \in \mathbb{N}$ el $n-$**ésimo hiperespacio** de X es

$$C_n(X) = \{A \subset X \colon A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}.$$

A veces en la literatura a $C_1(X)$ se le denota simplemente como $C(X)$.

Cabe mencionar que los hiperespacios que más se han estudiado son 2^X y $C(X)$. Sobre el hiperespacio $C_n(X)$ se sabe que, desde el trabajo de Wojdyslawski en 1939, vea [18], nadie se encargó de su estudio sino hasta que en 2001, Macías, vea [14, Capítulo 6], los reconsideró y hasta ahora es él quien más ha aportado a su estudio general.

No obstante los sorprendentes logros alcanzados durante más de un siglo en estas áreas de la topología, pocos son los trabajos dirigidos a estudiantes de licenciatura donde se exponen distintos temas de la teoría de continuos y sus hiperespacios. De hecho, en la literatura, sólo encontramos una introducción de las propiedades básicas del Hiperespacio $C_n(X)$ dirigida a los estudiantes [11], ésta es una contribución de 6 páginas donde no se puede decir mucho; esta tesis encuentra su fundamento en este marco.

El propósito de esta tesis es describir las propiedades más elementales (conocidas) de dicho $n-$ésimo hiperespacio. Para esto, se desarrolla este trabajo en dos capítulos.

En el Capítulo 1 se revisan algunos conceptos y resultados de la Teoría de los Continuos, por lo que en éste, se enuncian las definiciones y resultados necesarios para exponer el material del siguiente capítulo.

En el Capítulo 2 se estudian principalmente los resultados que siguen.

Teorema 2.7 [8, Teorema 2.2] El hiperespacio $C_2([0,1])$ es homeomorfo a $[0,1]^4$.

Teorema 2.11 [14, Teorema 6.11] Si X es un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{A}$ es un subconjunto cerrado y conexo de $C_n(X)$, entonces $\cup\mathcal{A}$ tiene a lo más n componentes.

Teorema 2.15 [13, Teorema 3.1] Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, entonces $C_n(X)$ es arco conexo.

Teorema 2.18 [13, Teorema 3.4] Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, entonces $C_n(X)$ contiene una n-celda.

Dichas propiedades son resultados conocidos, sin embargo, en este trabajo se exponen con detalle, esperando que esta versión de dichos resultados sirva a futuras generaciones de matemáticos.

Betsy Christian Cuevas Martínez
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas,
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
junio de 2012

Índice general

Capítulo 1

Los Hiperespacios 2^X y $C(X)$

La teoría de continuos y la teoría de los hiperespacios son dos ramas muy importantes de la topología; aunque ambas teorías se han desarrollado de manera extraordinaria en los últimos veinte años, aún tienen muchos problemas por resolver, vea por ejemplo el capítulo siete de [14] y las preguntas 8.31 a 8.37 de [15].

En este capítulo se enuncian algunos conceptos y resultados que son necesarios para el desarrollo de esta tesis tales nociones son: conexidad local, continuo, hiperespacio, la topología que tienen los hiperespacios, así como funciones de Whitney. En todo este trabajo si Z es un espacio topológico y A un subconjunto de Z, los símbolos $\overline{A}$, $fr(A)$ e $int(A)$ denotan la cerradura de A, la frontera de A y el interior de A en Z, respectivamente. Si $A \subset Y \subset Z$, entonces $\overline{A}^Y$, $fr_Y(A)$ e $int_Y(A)$ denotan la cerradura de A, la frontera de A y el interior de A en el subespacio Y de Z, respectivamente.

Como es usual, los símbolos $\emptyset$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$, representan el conjunto vacío, el conjunto de los números naturales, el conjunto de los números racionales, el conjunto de los números reales y el plano euclidiano, respectivamente. Un espacio topológico es **no**

degenerado si tiene más de un punto.

Sean Z un espacio topológico y $p \in Z$; un subconjunto V de Z es una **vecindad** de p si existe un conjunto abierto U en Z tal que $p \in U \subset V$.

Sean Y un espacio métrico con métrica d, $p \in Y$ y $\epsilon > 0$, la **bola abierta** en Y con centro en p y radio ϵ, denotada por $B_Y(\epsilon, p)$, es el conjunto $B_Y(\epsilon, p) = \{x \in Y : d(p, x) < \epsilon\}$.

Definición 1.1. *Una función f entre dos espacios topológicos es un* ***homeomorfismo*** *si es una función biyectiva y tanto f como f^{-1} son funciones continuas.*

A continuación se define el límite inferior, el límite superior y el límite de una sucesión de conjuntos.

Definición 1.2. *Sean Z un espacio topológico y $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de Z, el* ***límite inferior*** *de la sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ es*

lím ínf $K_n = \{x \in Z$: para cada conjunto abierto U, en Z con $x \in U$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap K_n \neq \emptyset$, para cada $n \geq N\}$.

Definición 1.3. *Sean Z un espacio topológico y $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de Z, el* ***límite superior*** *de la sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ es*

lím sup $K_n = \{x \in Z$: para cada conjunto abierto U, en Z con $x \in U$, existe $F \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $U \cap K_n \neq \emptyset$, para cada $n \in F\}$.

Obsérvese que a partir de las Definiciones 1.2 y 1.3 , se tiene que *lím ínf* $K_n \subset$ *lím sup* K_n.

Definición 1.4. *Sean Z un espacio topológico y $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de Z, el **límite** de la sucesión, que denotamos por* $\lim K_n$, *existe cuando*

$$\limsup K_n \subset \liminf K_n.$$

Es decir, $\lim K_n = \liminf K_n = \limsup K_n$.

1.1. Conexidad local

Una de las nociones más interesantes y fundamentales para nuestro estudio es el concepto que sigue.

Definición 1.5. *Sean Z un espacio topológico y $x \in Z$. El espacio Z es **localmente conexo en** x si para cada conjunto abierto U en Z tal que $x \in U$ existe un conjunto conexo y abierto V en Z tal que $x \in V \subset U$. El espacio topológico Z es **localmente conexo** si Z es localmente conexo en cada uno de sus puntos.*

Además recuérdese la definición de componente.

Definición 1.6. *Dado un espacio topológico Y y un punto $p \in Y$, la **componente** $C(p)$ de p en Y es*

$$C(p) = \bigcup\{D \subset Y : D \text{ es un conjunto conexo y } p \in D\}.$$

Una propiedad equivalente a ser localmente conexo, es la que sigue.

Teorema 1.7. *Un espacio topológico Z es localmente conexo si y sólo si toda componente de cada conjunto abierto en Z es un conjunto abierto en Z.*

Demostración. Supóngase que Z es un espacio topológico localmente conexo. Sean U un conjunto abierto en Z y C una componente de U. Se probará que C es un conjunto abierto en Z.

Para esto sea $x \in C$, dado que $x \in U$ y Z es localmente conexo, existe un conjunto conexo y abierto, V, en Z tal que $x \in V \subset U$. Nótese que $(C \cup V) \subset U$. Como C es un conexo maximal de U y $C \subset C \cup V$, se tiene que $C = C \cup V$. De donde $V \subset C$. Así, $x \in int(C)$. Se concluye que C es un conjunto abierto en Z.

Recíprocamente, sean $x \in Z$ y U un conjunto abierto de Z tal que $x \in U$. Sea C la componente de U tal que $x \in C$. Por hipótesis, C es un conjunto abierto en Z. Además, C es conexo y $x \in C \subset U$; así, Z es localmente conexo. □

El concepto que sigue ofrece una caracterización de la conexidad local como se ve en el Teorema 1.9

Definición 1.8. *Sean Z un espacio topológico y $x \in Z$. El espacio topológico Z es* ***conexo en pequeño en*** *x si para cada conjunto abierto U en Z tal que $x \in U$, existe un conjunto conexo V tal que $x \in int(V) \subset V \subset U$. El espacio topológico Z es* ***conexo en pequeño*** *si Z es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos.*

Teorema 1.9. *Sea Z un espacio topológico. Entonces Z es conexo en pequeño si y sólo si Z es localmente conexo.*

Demostración. Supóngase que Z es un espacio topológico localmente conexo. Sean $x \in Z$ y V un conjunto abierto en Z con $x \in V$. Por hipótesis, existe un conjunto abierto en Z y conexo U, tal que $x \in U \subset V$. Obsérvese que U es un conjunto abierto en Z con $x \in U$. Por lo que Z es conexo en pequeño en x. Dado que x es arbitrario, se tiene que Z es conexo en pequeño.

Recíprocamente, sean U un conjunto abierto en Z y C una componente de U. Se verá que C es un conjunto abierto en Z. Sea $x \in C \subset U$. Por hipótesis, existe un conexo W tal que $x \in int(W) \subset W \subset U$. Esto implica que existe un conjunto abierto en Z, llamado H, tal que $x \in H \subset W$. Nótese que $W \cup C$ es un conexo contenido en U. Por otro lado, como C es un conexo maximal de U, se concluye que $W \subset C$. Luego, $x \in H \subset C$, como H es un conjunto abierto en Z y $x \in H \subset W \subset C$, se tiene que $x \in int(C)$, así, C es un conjunto abierto en Z. Por el Teorema 1.7, se deduce que Z es localmente conexo. $\square$

1.2. Continuos e hiperespacios

En 1883 George Cantor (1845-1918), introdujo la noción de continuo diciendo que éste es un subconjunto de un espacio euclideano que es conexo, cerrado y denso en sí mismo. Ahora, las cosas han cambiado y este concepto está determinado, oficialmente, como sigue.

Definición 1.10. *Un **continuo** es un espacio métrico, no vacío compacto y conexo. Un **subcontinuo** es un continuo que está contenido en algún espacio topológico.*

M. Fréchet (1878-1973) definió, en 1906, la clase de los espacios métricos (aunque el término "espacio métrico" no fue introducido sino hasta 1914 por F. Hausdorff (1868-1942)), fue la primera clase de espacios abstractos en la cual fueron generalizados varios conceptos y resultados. En ese mismo año también fue establecida la noción de espacio de Hausdorff. Sin embargo, por un periodo extenso los espacios métricos fueron mucho más estudiados que los espacios de Hausdorff.

Una de las nociones básicas e imprescindibles de la topología es la conexidad. La definición actual de este concepto fue introducida en 1883 por C. Jordan (1838-1922), para la clase de los subconjuntos compactos del plano. El estudio sistemático de la conexidad fue iniciado en 1914 por F. Hausdorff y, en 1921 por B. Knaster (1893-1980) y K. Kuratowski (1896-1980).

Otro concepto topológico relacionado con la noción de continuo es el de compacidad. Su origen está vinculado con un teorema demostrado en 1895 por É. Borel (1871-1956), el cual establece que toda cubierta abierta numerable de un intervalo cerrado y acotado tiene una subcubierta finita. En 1903, Borel generalizó este resultado para todo subconjunto cerrado y acotado de un espacio Euclideano. La definición actual escencialmente se debe a P. S. Aleksandrov (1896-1982) y a P. S. Urysohn (1898-1924).

Ejemplos de continuos.

1. El intervalo unitario $[0,1]$ con la métrica usual es conexo [7, Teorema 1.27]. Por ser un conjunto cerrado y acotado este intervalo $[0,1]$ es compacto [7, Teorema 1.41]. Vea la Figura 1.1.

Figura 1.1: Intervalo unitario $[0,1]$

2. Considérese $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ como subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$ con la topología euclideana. Como S^1 es la imagen de la función continua f tal que $f(t) = (\cos(t), seno(t))$, se tiene que S^1 es conexo. Por [7, Teorema 1.42], dicha circunferencia unitaria es compacto, y de aquí, S^1 es un continuo. Vea la Figura 1.2.

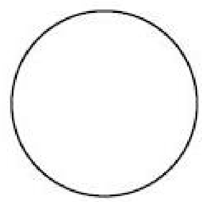

Figura 1.2: Circunferencia unitaria

Definición 1.11. *Un* ***arco*** *es un espacio topológico homeomorfo al intervalo cerrado* $[0, 1]$. *Sean* $f : [0, 1] \to A$ *un homeomorfismo,* $p = f(0)$ *y* $q = f(1)$*, los puntos* p *y* q *son los* ***puntos extremos del arco*** A*. Un arco de* p *a* q *significa un arco con puntos extremos* p *y* q*.*

Nótese que los subcontinuos, no degenerados, de la circunferencia unitaria S^1 son los arcos.

Se pueden construir nuevos continuos uniendo algunos ya conocidos. Por ejemplo, si se considera la unión de n arcos que se intersectan en un único punto, que debe ser un punto extremo de cada arco, llamado el vértice del n-odo, el resultado también es un continuo llamado **n-odo simple**. Vea la Figura 1.3.

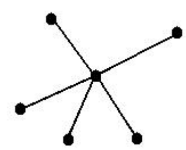

Figura 1.3: n-odo

Siguiendo esta idea se pueden considerar la unión de una cantidad finita de arcos tales que, sean ajenos dos a dos o si se intersectan lo hagan en uno o en ambos puntos extremos. A este nuevo concepto se le llama **gráfica finita**. Vea la Figura 1.4.

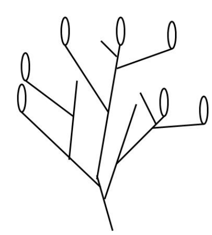

Figura 1.4: Gráfica finita

Cuando una gráfica finita no contiene curvas cerradas simples es llamada **árbol**. Vea la Figura 1.5.

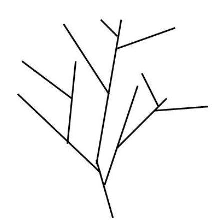

Figura 1.5: Árbol

Definición 1.12. *Dado $n \in \mathbb{N}$, al producto topológico de n intervalos $[0,1]$ se denota con I^n. Esto es:*

$$I^n = \prod_{k=1}^{n} I_k$$

donde $I_k = [0,1]$, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$.

*Una n-**celda** es un espacio topológico homeomorfo a I^n.*

Definición 1.13. *Considérese, en el espacio $\mathbb{R}^2$ con la topología usual, los siguientes conjuntos:*

$$W = \{(x, seno(\tfrac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,1]\} \text{ y } Y = \{0\} \times [-1,1].$$

*El espacio topológico $X = W \cup Y$ se le llama **el continuo seno**$(\frac{1}{x})$. Vea la Figura 1.6.*

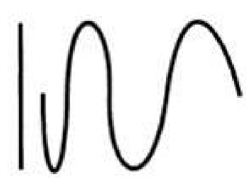

Figura 1.6: Continuo seno$(\frac{1}{x})$

A continuación se prueba que el llamado continuo seno$(\frac{1}{x})$ es, en realidad, un continuo.

Teorema 1.14. *Si $X = W \cup Y$, donde W y Y se definen como en el continuo seno$(\frac{1}{x})$, entonces:*

1. *W es homeomorfo al intervalo $[1, \infty)$.*

2. *X es un continuo.*

Demostración. Sean $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $p_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ las funciones proyección que están definidas, para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, por:

$$p_1(x, y) = x \quad \text{y} \quad p_2(x, y) = y.$$

Sea $f : W \to [1, \infty)$ la función definida, en $(x, seno(\frac{1}{x})) \in W$, como:

$$f(x, seno(\tfrac{1}{x})) = \tfrac{1}{x}.$$

Considérese ahora las funciones

$$g : [1, \infty) \to W \quad \text{y} \quad h : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R},$$

definidas, para cada $y \in [1, \infty)$ y $x \in \mathbb{R}$ por:

$$g(y) = (\tfrac{1}{y}, seno(y)) \quad \text{y} \quad h(x) = \tfrac{1}{x}.$$

Nótese que, para cada $(x, seno(\frac{1}{x})) \in W$;

$$g(f(x, seno(\tfrac{1}{x}))) = g(\tfrac{1}{x}) = (x, seno(\tfrac{1}{x})).$$

Para cada $y \in [1, \infty)$, se tiene que $f(g(y)) = f(\frac{1}{y}, seno(y)) = y$.

Luego, g es la inversa de f. Por tanto, f es biyectiva.

Como $(p_1)_{|W}$ y $h_{|(0,1]}$ son funciones continuas tales que $f = h_{|(0,1]} \circ (p_1)_{|W}$, sucede que f es continua. Ahora para ver que g es continua es conveniente ver a g como una función de $[1, \infty)$ a $\mathbb{R}^2$. Entonces g es continua si y sólo si las funciones $p_1 \circ g$ y $p_2 \circ g$ son continuas. Como $h_{|[1,\infty)}$ es una función continua tal que $p_1 \circ g = h_{|[1,\infty)}$, la composición $p_1 \circ g$ es continua. La composición $p_2 \circ g$ también es continua, porque es justo la función continua que a cada $y \in [1, \infty)$ le asocia el valor $seno(y)$.

De lo escrito en el párrafo anterior se infiere que f es una función continua y biyectiva, cuya inversa (que es la función g) es continua. Luego por la Definición 1.1, se tiene que f es un homeomorfismo.

Para ver que X es un continuo primero se mostrará que $X = \overline{W}^{\mathbb{R}^2}$. Sean $(0,y) \in Y$ y U un conjunto abierto en X tal que $(0,y) \in U$, como $\mathbb{R}^2$ posee la topología usual, existen $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ tales que:

$$(0,y) \in [(-\epsilon,\epsilon) \times (y-\delta, y+\delta)] \cap X \subset U.$$

Usando la continuidad de la función $seno(\frac{1}{x})$, no es difícil probar que $(-\epsilon,\epsilon) \times (y-\delta,y+\delta) \cap W \neq \emptyset$. Así, $U \cap W \neq \emptyset$. Luego $(0,y) \in \overline{W}^{\mathbb{R}^2}$. Esto prueba que $Y \subset \overline{W}^{\mathbb{R}^2}$ y por tanto, $X = \overline{W}^{\mathbb{R}^2}$.

Nótese ahora que $\overline{W}^{\mathbb{R}^2} \subset [0,1] \times [-1,1]$, por lo que X es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que es cerrado y acotado. Luego, X es compacto. En la parte anterior se demostró que W es homeomorfo al conjunto conexo $[1,\infty)$. Como W es denso y conexo en X, entonces X es conexo. Así X es un continuo. □

Teorema 1.15. *El continuo $seno(\frac{1}{x})$ no es localmente conexo.*

Demostración. Recuérdese que el continuo de $seno(\frac{1}{x})$, es el subespacio X de $\mathbb{R}^2$ con la topología usual, en el Teorema 1.14 se demostró que $X = \overline{W}^{\mathbb{R}^2}$, donde:

$$W = \{(x, seno(\tfrac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,1]\}.$$

Por el Teorema 1.14, W es homeomorfo al rayo $[1,\infty)$ de $\mathbb{R}$, resulta que W es localmente conexo. Entonces X es la cerradura de un espacio localmente conexo.

Se mostrará ahora que X no es localmente conexo en $(0,0)$. Para esto sean $U = X \cap B_{\mathbb{R}^2}(\frac{1}{2},(0,0))$ y A un conjunto abierto en X tal que $(0,0) \in A \subset U$. Se mostrará que A no es conexo. Para esto tómese $\delta > 0$ tal que $X \cap B_{\mathbb{R}^2}(\delta,(0,0)) \subset A$. Por la propiedad arquimediana, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\delta\pi} < k$. Sea $\eta = \frac{1}{k\pi}$. Luego $\frac{1}{\eta} = k\pi$, por lo que:

$$seno(\tfrac{1}{\eta}) = seno(k\pi) = 0.$$

Como $\frac{1}{\delta\pi} < k$, se tiene que $\eta = \frac{1}{k\pi} < \delta$. Así

$$(\eta, seno(\tfrac{1}{\eta})) = (\eta, 0) \in X \cap B_{\mathbb{R}^2}(\delta, (0,0)) \subset A \subset U.$$

Por el Teorema del valor intermedio existe $\alpha > 0$ tal que $\alpha < \eta$ y $(\alpha, 1) \in X$. Nótese que $(\alpha, 1)$ no pertenece a $B_{\mathbb{R}^2}(\frac{1}{2}, (0,0))$ y, por tanto, $(\alpha, 1)$ no pertenece a A. Luego $A = A_1 \cup A_2$, donde:

$$A_1 = \{(x,y) \in A : x < \alpha\} \text{ y } A_2 = \{(x,y) \in A : \alpha < x\}.$$

Considérese la función proyección $p_1 : X \to [0,1]$, se recuerda que está definida para cada $(x,y) \in X$, por $p_1((x,y)) = x$. Nótese que

$$p_1^{-1}([0,\alpha)) = \{(x,y) \in X : x < \alpha\} = X_1$$

y

$$p^{-1}((\alpha,1]) = \{(x,y) \in X : \alpha < x\} = X_2.$$

Así como $[0,\alpha)$ y $(\alpha,1]$ son conjuntos abiertos en $[0,1]$ y p es continua, se tiene que X_1 y X_2 son conjuntos abiertos en X, además nótese que $A_1 = X_1 \cap A$ y $A_2 = X_2 \cap A$, de donde A_1 y A_2 son conjuntos abiertos en A. Como también resulta que A_1 y A_2 son ajenos y no vacíos, ya que $(0,0) \in A_1$ y $(\eta, 0) \in A_2$, esto muestra que A no es conexo. Por tanto U es un conjunto abierto en X tal que $(0,0) \in U$ y para cualquier conjunto abierto A en X, con $x \in A \subset U$, se tiene que A es disconexo. Luego X no es localmente conexo. $\square$

El resultado que sigue se usará en la prueba del Teorema 1.17.

Teorema 1.16. *[9, Teorema 6.5] De los golpes en la frontera. Sean Z un espacio conexo, compacto y de Hausdorff, U un subconjunto propio, no vacío y abierto en Z. Si K es una componente de $\overline{U}$ entonces $K \cap fr(U) \neq \emptyset$.*

Entre dos continuos que están contenidos uno propiamente en el otro, siempre existe un continuo contenido propiamente entre los dos, de hecho este resultado es más general como se plantea a continuación.

Teorema 1.17. *Sea Z un espacio topológico conexo, compacto y de Hausdorff y sean A y B subconjuntos no vacíos, conexos y cerrados de Z tales que $A \subsetneq B$. Entonces existe un subconjunto conexo y cerrado C de Z tal que $A \subsetneq C \subsetneq B$.*

Demostración. Se elige un punto $p \in B \setminus A$. Como B es un espacio normal, existe un subconjunto abierto U de B tal que $A \subset U \subset \overline{U}^B \subset B \setminus \{p\}$. Sea C la componente de $\overline{U}^B$ que contiene a A. Nótese que C es un conjunto conexo y cerrado en Z. Como p no está en C, se tiene que $C \subsetneq B$. Sólo falta ver que $A \neq C$. Dado que U es un conjunto abierto en B, se tiene que $U \cap fr_B(U) = \emptyset$. Ya que $A \subset U$, se tiene que $A \cap fr_B(U) = \emptyset$. Por el Teorema 1.16, se tiene que $C \cap fr_B(U) \neq \emptyset$. De donde se concluye que $A \neq C$. $\square$

El Teorema 1.17 se usa en la prueba del Teorema 1.44.

Los *hiperespacios* son ciertas familias de subconjuntos de X con alguna característica particular, los más estudiados son los que se mencionan a continuación.

Definición 1.18. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Los siguientes son los **hiperespacios** de X:*

$$2^X = \{A \subset X : A \textit{ es un conjunto cerrado en } X \textit{ y no vacío}\},$$

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \textit{ es un conjunto conexo}\},$$

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \textit{ tiene a lo más } n \textit{ componentes}\},$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \textit{ tiene a lo más } n \textit{ puntos }\}.$$

El hiperespacio $C_n(X)$ se conoce como el n-ésimo hiperespacio de X. El hiperespacio $F_n(X)$ se conoce como el n-ésimo producto simétrico de X.

Definición 1.19. *Sean X un espacio métrico con métrica d, $A, B \subset X$ conjuntos no vacíos y $p \in X$. La* ***distancia*** *de A a B, denotada por $d(A,B)$, es $d(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A \text{ y } b \in B\}$ y la* ***distancia de un punto*** *p* ***a*** *B es*

$$d(p, B) = d(\{p\}, B).$$

Si A es un conjunto cerrado en X, la **nube** en X con centro en A y de radio $\epsilon > 0$, es

$$N(\epsilon, A) = \{x \in X : \textit{existe } a \in A \textit{ tal que } d(a,x) < \epsilon\}.$$

Teorema 1.20. *Si X es un continuo, $\epsilon > 0$ y $A \in 2^X$, entonces*

1. *$A \subset N(\epsilon, A)$.*

2. *$N(\epsilon, A) = \bigcup_{a\in A} B(\epsilon, a)$. Así, $N(\epsilon, A)$ es un conjunto abierto en X.*

3. *$N(\delta, A) \subset N(\epsilon, B)$ para cada $\delta > 0$ tal que $\delta < \epsilon$, y $B \in 2^X$ tal que $A \subset B$.*

4. *$N(\epsilon, A) = \bigcup\{N(\delta, A) : \delta > 0,\ \delta < \epsilon\}$.*

Demostración. *1*. Es claro que, por definición, la contención se vale.

2. Sea $x \in N(\epsilon, A)$. Existe $a \in A$ tal que $d(a, x) < \epsilon$. Luego, $x \in B(\epsilon, a)$. Así, $x \in \bigcup_{a \in A} B(\epsilon, a)$. Por lo tanto,

$$N(\epsilon, A) \subset \bigcup_{a \in A} B(\epsilon, a). \tag{1.2.1}$$

Sea $x \in \bigcup_{a \in A} B(\epsilon, a)$. Existe $a \in A$ tal que $x \in B(\epsilon, a)$. Así, $d(a, x) < \epsilon$, es decir, $x \in N(\epsilon, A)$. Por lo tanto,

$$\bigcup_{a \in A} B(\epsilon, a) \subset N(\epsilon, A). \tag{1.2.2}$$

De (1.2.1) y (1.2.2), se tiene la igualdad deseada para obtener *2*.

3. Sea $x \in N(\delta, A)$. Existe $a \in A$ tal que $d(a, x) < \delta$. Como $\delta < \epsilon$, se sigue que $d(a, x) < \epsilon$. Puesto que $A \subset B$, se implica que $a \in B$, de donde $x \in N(\epsilon, B)$. Por lo tanto, $N(\delta, A) \subset N(\epsilon, B)$.

4. Sea $x \in N(\epsilon, A)$. Existe $a \in A$ tal que $d(a, x) < \epsilon$. Sea $\delta > 0$ tal que $d(a, x) < \delta < \epsilon$. Así, $x \in N(\delta, A)$.

Luego, $x \in \bigcup\{N(\delta, A) : \delta > 0,\ \delta < \epsilon\}$. Por lo tanto,

$$N(\epsilon, A) \subset \bigcup \{N(\delta, A) : \delta > 0,\ \delta < \epsilon\}. \tag{1.2.3}$$

Por el punto *3*. de este teorema, se tiene que

$$\bigcup_{\delta < \epsilon} N(\delta, A) \subset N(\epsilon, A). \tag{1.2.4}$$

De (1.2.3) y (1.2.4), se obtiene la igualdad del inciso *4*. □

Teorema 1.21. *Si X es un continuo con métrica d, $A \in 2^X$ y U es un conjunto abierto en X tal que $A \subset U$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $N(\epsilon, A) \subset U$.*

Demostración. Sea $A \subset U$. Luego, $A \cap (X \setminus U) = \emptyset$. Nótese que A y $X \setminus U$ son conjuntos cerrados en X y así compactos. De manera que $d(A, X \setminus U) > 0$. Sea $\epsilon = \frac{d(A, X \setminus U)}{2}$. Se verá que $N(\epsilon, A) \subset U$. En efecto, si $x \in N(\epsilon, A)$, entonces existe $a \in A$ tal que $d(a, x) < \epsilon$. Así, $x \in B(\epsilon, a)$. Se afirma que $x \in U$. Porque en caso contrario, es decir, si $x \in X \setminus U$, entonces $d(A, X \setminus U) \leq d(a, x)$. Así, $d(A, X \setminus U) < \epsilon$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $x \in U$. Con esto concluye la prueba de este teorema. $\square$

La nube de la unión es la unión de las nubes como se indica a continuación.

Teorema 1.22. *Si X es un continuo con métrica d, $\epsilon > 0$ y A, $B \in 2^X$, entonces*

$$N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B) = N(\epsilon, A \cup B).$$

Demostración. Por el punto *3*. del Teorema 1.20, se infiere que $N(\epsilon, A) \subset N(\epsilon, A \cup B)$ y $N(\epsilon, B) \subset N(\epsilon, A \cup B)$. Así,

$$N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B) \subset N(\epsilon, A \cup B). \tag{1.2.5}$$

Ahora, sea $z \in N(\epsilon, A \cup B)$. Existe $b \in A \cup B$ tal que $d(b, z) < \epsilon$. Se tienen dos casos $b \in A$ o $b \in B$.

(i) Si $b \in A$, entonces $z \in N(\epsilon, A)$.

(ii) Si $b \in B$, entonces $z \in N(\epsilon, B)$.

En ambos casos, $z \in N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B)$. Por lo tanto,

$$N(\epsilon, A \cup B) \subset N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B). \tag{1.2.6}$$

De (1.2.5) y (1.2.6), se concluye que $N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B) = N(\epsilon, A \cup B)$. $\square$

Las nubes de algún mismo radio de conjuntos ajenos, son ajenos, como se presenta en seguida.

Teorema 1.23. *Si X es un continuo con métrica d y A, $B \in 2^X$ tales que $A \cap B = \emptyset$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$N(\epsilon, A) \cap N(\epsilon, B) = \emptyset.$$

Demostración. Supóngase, por el contrario, que para cada $\epsilon > 0$, se tiene que $N(\epsilon, A) \cap N(\epsilon, B) \neq \emptyset$. Puesto que $A \cap B = \emptyset$ y A, B son compactos, se tiene que $d(A, B) > 0$. Sea $\epsilon_1 = \frac{d(A,B)}{2}$, nótese que $\epsilon_1 > 0$. Por lo supuesto, se tiene que $N(\epsilon_1, A) \cap N(\epsilon_1, B) \neq \emptyset$, es decir, existe $z \in N(\epsilon_1, A) \cap N(\epsilon_1, B)$. Así, existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $d(a, z) < \epsilon_1$ y $d(b, z) < \epsilon_1$. Aplicando la desigualdad del triángulo, $d(a, b) \leq d(a, z) + d(z, b)$. Luego, $d(a, b) < 2\epsilon_1 = d(A, B)$, lo cual es una contradicción. $\square$

Definición 1.24. *Sea A un subconjunto no vacío de un continuo X con métrica d. El **diámetro** de A, denotado por diám(A), es*

$$sup\{d(a, b) : a, b \in A\}.$$

1.3. Métrica de Hausdorff

La idea intuitiva de la métrica de Hausdorff es que dos conjuntos están cercanos si ellos casi se empalman uno con el otro. Esta idea geométrica es buena, pero se tiene que notar que, por ejemplo, si A es un disco en el plano, se pueden dar conjuntos finitos tan cercanos a A como se quiera, (simplemente se toma una cuadrícula cada vez más pequeña dentro del disco y se toma como conjunto finito al conjunto de los cruces de la cuadrícula.

Para el siguiente teorema téngase presente la siguiente notación:

Para un continuo X y para cada par de elementos $A, B \in 2^X$, se definen los conjuntos

$$M(A,B) = \{\epsilon > 0 : A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A)\} \text{ y}$$
$$M(A,B) \oplus M(B,C) = \{\epsilon + \delta > 0 : \epsilon \in M(A,B) \text{ y } \delta \in M(B,C)\}.$$

Teorema 1.25. *Sea X un continuo. La función $H : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida, para cada A, $B \in 2^X$, por*

$$H(A,B) = \acute{\imath}nf\, M(A,B)$$

es una métrica para 2^X, conocida como la ***métrica de Hausdorff*** *.*

Demostración. Sean A, B, $C \in 2^X$.

(a) Se verá que H está bien definida. Para esto, se tiene que probar que el conjunto $M(A,B)$ es no vacío y está acotado inferiormente. Obsérvese que $d(x,y) < di\acute{a}m(X) + 1$, para cada x, $y \in X$. Así, $A \subset N(di\acute{a}m(X)+1, B)$ y $B \subset N(di\acute{a}m(X)+1, A)$. De manera que $di\acute{a}m(X)+1 \in M(A,B)$. Por tanto, $M(A,B) \neq \emptyset$. Es claro que $M(A,B)$ está acotado inferiormente por el cero.

(b) Para cada A, $B \in 2^X$, nótese que $H(A,B) \geq 0$.

(c) Por definición de $M(A,B)$, se deduce que $M(A,B) = M(B,A)$, de esto, para cada A, $B \in 2^X$, se tiene que $H(A,B) = H(B,A)$.

(d) Se verá que para cada A, $B \in 2^X$ se tiene que $H(A,B) = 0$ si y sólo si $A = B$.

Supóngase que $H(A,B) = 0$. Se mostrará que $A = B$.

Para esto, sean $\epsilon > 0$ y $x \in A$. Como $H(A,B) = 0$, existe $\delta \in M(A,B)$ tal que $\delta < \epsilon$. Luego, $A \subset N(\delta, B)$ y como $x \in A$, se sigue que $x \in N(\delta, B)$. Así, existe $y \in B$ tal que $d(x,y) < \delta < \epsilon$. Así, $y \in B(\epsilon, x) \cap B$, de donde $B(\epsilon, x) \cap B \neq \emptyset$

y como ϵ fue arbitrario, se tiene que $x \in \overline{B}$. Puesto que B es un conjunto cerrado en X, se sigue que $x \in B$. Por lo tanto, $A \subset B$. Análogamente, se prueba que $B \subset A$. Así, $A = B$.

Ahora supóngase que $A = B$. Luego, para todo $\epsilon > 0$, se tiene que $\epsilon \in M(A, B)$. Así, $H(A, B) = 0$.

(e) Ahora se verá que para cada A, B, $C \in 2^X$, se tiene que $H(A, C) \leq H(A, B) + H(B, C)$.

Para esto, se demostrará que $M(A, B) \oplus M(B, C) \subset M(A, C)$. Sea $\beta \in M(A, B) \oplus M(B, C)$, así, existen $\epsilon \in M(A, B)$ y $\delta \in M(B, C)$ tales que $\beta = \epsilon + \delta$. Luego, $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\delta, C)$. Se verá que $A \subset N(\beta, C)$. Para esto sea $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $d(x, y) < \epsilon$. Luego, existe $z \in C$ tal que $d(y, z) < \delta$. Así, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \epsilon + \delta = \beta$. Por lo tanto, $A \subset N(\beta, C)$. Análogamente, se puede probar que $C \subset N(\beta, A)$. De esto, se deduce que $\beta \in M(A, C)$. Por lo tanto, $M(A, B) \oplus M(B, C) \subset M(A, C)$.

Luego,

$$H(A, C) = inf M(A, C) \leq inf((M(A, B) \oplus M(B, C)). \quad (1.3.1)$$

Por otra parte, se sabe que para todo $\epsilon \in M(A, B)$ y para todo $\delta \in M(B, C)$ se tiene que

$$\begin{gathered} \inf\{M(A, B) \oplus M(B, C)\} \leq \epsilon + \delta, \text{ entonces} \\ \inf\{M(A, B) \oplus M(B, C)\} - \delta \leq \epsilon, \end{gathered}$$

se sigue que

$$\inf\{M(A, B) \oplus M(B, C)\} - \delta \leq \inf M(A, B) = H(A, B).$$

Luego

$$\begin{gathered} \inf\{M(A, B) \oplus M(B, C)\} \leq H(A, B) + \delta. \text{ Así,} \\ \inf\{M(A, B) \oplus M(B, C)\} - H(A, B) \leq \delta. \end{gathered}$$

Por lo que se tiene que

$$\text{ínf}\{M(A,B)\oplus M(B,C)\}-H(A,B)\leq \text{ínf}\, M(B,C)=H(B,C). \tag{1.3.2}$$

De (1.3.1) y (1.3.2), se sigue que

$$H(A,C)\leq \text{ínf}\{(M(A,B)\oplus M(B,C)\}\leq H(A,B)+H(B,C).$$

□

Hasta el momento se ha dotado al hiperespacio 2^X con una métrica (la de Hausdorff). Como $C_n(X)$ está contenido en 2^X, obsérvese que H también es una métrica para $C_n(X)$.

Teorema 1.26. *El hiperespacio 2^X es un continuo.*

Demostración. Por el [9, Teorema 4.2], se tiene que 2^X es compacto, además por el [9, Teorema 2.4] es conexo, por lo que 2^X es un continuo. □

A las familias 2^X y $C(X)$ con la métrica de Hausdorff se les llama *hiperespacios* del continuo X, y precisamente $C(X)$ es el hiperespacio de los subcontinuos de X.

Teorema 1.27. *Sean X un continuo, A, $B\in 2^X$ y $\epsilon>0$. Entonces $H(A,B)<\epsilon$ si y sólo si $A\subset N(\epsilon,B)$ y $B\subset N(\epsilon,A)$.*

Demostración. Supóngase que $H(A,B)<\epsilon$.

Existe $\delta'\in M(A,B)$ tal que $\delta'<\epsilon$, $A\subset N(\delta',B)$ y $B\subset N(\delta',A)$. Además, por el Teorema 1.20 parte *3*, se tiene que $N(\delta',B)\subset N(\epsilon,B)$ y $N(\delta',A)\subset N(\epsilon,A)$. Por tanto, $A\subset N(\epsilon,B)$ y $B\subset N(\epsilon,A)$.

Recíprocamente, supóngase que

$$A\subset N(\epsilon,B) \text{ y } B\subset N(\epsilon,A).$$

Así, por el Teorema 1.20 inciso 4, se tiene que $A \subset \bigcup\{N(\delta, B) : \delta > 0, \delta < \epsilon\}$. Dado que A es compacto, existen números positivos, $\delta_1, \ldots, \delta_n$, con $n \in \mathbb{N}$, tales que $\delta_i < \epsilon$ y $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(\delta_i, B)$. Sea $\alpha = máx\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$. Luego, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene que $N(\delta_i, B) \subset N(\alpha, B)$. Así, $\bigcup_{i=1}^{n} N(\delta_i, B) \subset N(\alpha, B)$. Luego, $A \subset N(\alpha, B)$. De manera análoga a lo anterior, como $B \subset N(\epsilon, A)$, existe $\gamma > 0$ tal que $\gamma < \epsilon$ y $B \subset N(\gamma, A)$. Sea $\beta = máx\{\alpha, \gamma\}$. Se tiene que $\beta < \epsilon$, $A \subset N(\beta, B)$ y $B \subset N(\beta, A)$. Así, $\beta \in M(A, B)$. En consecuencia $H(A, B) \leq \beta < \epsilon$. Por tanto, $H(A, B) < \epsilon$. □

1.4. Topología de Vietoris

Definición 1.28. *Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, \ldots, U_n$ subconjuntos no vacíos de X. El **vietórico** de $U_1, \ldots, U_n$, denotado por $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$, es el conjunto*

$$\left\{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, n\}\right\}.$$

Definición 1.29. *Dado un subconjunto A de un continuo X. Considérese las siguientes subcolecciones del hiperespacio 2^X.*

$$\Gamma(A) = \{B \in 2^X : B \subset A\},$$

$$\Lambda(A) = \{B \in 2^X : B \cap A \neq \emptyset\} \text{ y}$$

$$\Phi(A) = \{B \in 2^X : A \subset B\}.$$

Teorema 1.30. *Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, \ldots, U_n$ subconjuntos no vacíos de X. Las siguientes afirmaciones se cumplen.*

1. $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \Gamma(\bigcup_{i=1}^{n} U_i) \cap [\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)]$.

2. Para cada $A \subset X$, se tiene que $\Gamma(A) = \langle A \rangle$.

3. Para cada $A \subset X$, se tiene que $\Lambda(A) = \langle X, A \rangle$.

Demostración. Para ver que se cumple *1*, nótese que

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle =$$

$$\{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i\} \cap \{A \in 2^X : A \cap U_i \neq \emptyset, i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

$$= \Gamma(\bigcup_{i=1}^{n} U_i) \cap [\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)].$$

Por lo tanto, $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \Gamma(\bigcup_{i=1}^{n} U_i) \cap [\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)]$. El resto de la demostración de este teorema se hace usando la definición de $\Gamma(A)$ y $\Lambda(A)$. □

Teorema 1.31. *Sean X un continuo, $A \in 2^X$ y $U_1, \ldots, U_n$ conjuntos abiertos en X. Si $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$, entonces existen conjuntos abiertos $V_1, \ldots, V_n$ en X tales que*

$$A \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle \subset \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$$

y $\overline{V_i} \subset U_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Demostración. Si $a \in A$, entonces existe $i \in \{1, \ldots, n\}$, tal que $a \in U_i$, ya que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Luego, como X es regular, existe un conjunto abierto V_a en X tal que $a \in V_a \subset \overline{V_a} \subset U_i$.

Así, $A \subset \bigcup\{V_x : x \in A\}$. Como, A es compacto, existen $m \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_m \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i}$. Por otro lado, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea $b_i \in A \cap U_i$. Luego, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea W_i un conjunto abierto en X tal que $b_i \in W_i \subset \overline{W_i} \subset U_i$.

Ahora, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sean

$$J_i = \{k \in \{1, \dots, m\} : \overline{V_{x_k}} \subset U_i\} \text{ y } V_i = W_i \cup \left(\bigcup_{k \in J_i} V_{x_k}\right).$$

Se tiene que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, V_i es un conjunto abierto en X, con $\overline{V_i} \subset U_i$ y $A \cap V_i \neq \emptyset$.

Además, $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i$. Así, $A \in \langle V_1, \dots, V_n\rangle$, y $\langle V_1, \dots, V_n\rangle \subset \langle U_1, \dots, U_n\rangle$.

Por tanto, existen conjuntos abiertos $V_1, \dots, V_n$ en X tales que $A \in \langle V_1, \dots, V_n\rangle \subset \langle U_1, \dots, U_n\rangle$ y $\overline{V_i} \subset U_i$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. □

Teorema 1.32. *[3, Lema 1.8] Sean m, $n \in \mathbb{N}$, $U_1, \dots, U_n$ y $V_1, \dots, V_m$ subconjuntos de un continuo X. Si $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $V = \bigcup_{i=1}^{m} V_i$, entonces*

$$\langle U_1, \dots, U_n\rangle \cap \langle V_1, \dots, V_m\rangle =$$
$$\langle V \cap U_1, \dots, V \cap U_n, U \cap V_1, \dots, U \cap V_m\rangle.$$

Teorema 1.33. *Si X es un continuo y*

$$\mathcal{B} = \{\langle U_1, \dots, U_n\rangle : U_1, \dots, U_n \text{ son abiertos en } X \text{ y } n \in \mathbb{N}\},$$

entonces $\mathcal{B}$ es una base para una topología del hiperespacio 2^X (la topología generada por $\mathcal{B}$, denotada por τ_V es conocida como la Topología de Vietoris*).*

Demostración. Primero se verá que $2^X = \bigcup \mathcal{B}$.

Nótese que $\langle X\rangle = \{A \in 2^X : A \subset X\} = 2^X$. Así, $2^X \in \mathcal{B}$. De manera que $2^X \subset \bigcup \mathcal{B}$, luego, $2^X = \bigcup \mathcal{B}$.

La demostración de la segunda condición, es decir, que para cada $\mathcal{U}$, $\mathcal{V} \in \mathcal{B}$ con $A \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, existe $\mathcal{W} \in \mathcal{B}$ tal que $A \in \mathcal{W} \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, se tiene escribiendo por ejemplo que $\mathcal{U} = \langle U_1, \dots, U_n\rangle$, y $\mathcal{V} = \langle V_1, \dots, V_m\rangle$ con $\mathcal{U} = \bigcup U_i$ y $\mathcal{V} = \bigcup V_i$, de acuerdo al Teorema 1.32 se puede tomar $W = \langle V \cap U_1, \dots, V \cap U_m\rangle$. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es una base para la topología de 2^X. □

Todavía mejor se conoce una subbase para τ_V.

Teorema 1.34. *Sea X un continuo. El conjunto*

$$\mathcal{S} = \{\Gamma(U) : U \text{ es un conjunto abierto en } X\} \cup \{\Lambda(U) : U \text{ es un conjunto abierto en } X\}$$

es una subbase para la Topología de Vietoris.

Demostración. Sea

$$\mathcal{S}' = \big\{ \bigcap \mathcal{W} : \mathcal{W} \text{ es un subconjunto finito de } \mathcal{S}\big\}.$$

Para ver que $\mathcal{S}$ es subbase para la topología de Vietoris, basta probar que $\mathcal{S}' = \mathcal{B}$.

Sea $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$. Luego, sean $U_1, \ldots, U_n$ conjuntos abiertos en X tales que $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ y sea $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Nótese que por la parte 1. del Teorema 1.30, se tiene que $\mathcal{U} = \Gamma(U) \cap [\Lambda(U_1) \cap \cdots \cap \Lambda(U_n)]$. Es decir, $\mathcal{U}$ es una intersección finita de elementos de $\mathcal{S}$. Así, $\mathcal{U} \in \mathcal{S}'$. De manera que $\mathcal{B} \subset \mathcal{S}'$.

Por otra parte, se verá que $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$. Para esto, sea $\mathcal{V} \in \mathcal{S}$. Luego, $\mathcal{V} = \Gamma(U)$ o $\mathcal{V} = \Lambda(U)$, para algún conjunto abierto U en X, es decir, $\mathcal{V} = \langle U \rangle$ o $\mathcal{V} = \langle X, U \rangle$, de cualquier forma $\mathcal{V} \in \mathcal{B}$. Esto prueba que $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$. Además, por el Teorema 1.32, se sabe que $\mathcal{B}$ es un conjunto cerrado bajo intersecciones finitas, de manera que $\mathcal{S}' \subset \mathcal{B}$. Por lo tanto, $\mathcal{S}' = \mathcal{B}$. Lo que demuestra que $\mathcal{S}$ es subbase para la topología de Vietoris. $\square$

Teorema 1.35. *[4, Teorema 2.22] Sea X un continuo. La Topología de Vietoris y la topología inducida por la métrica de Hausdorff en 2^X son iguales.*

Teorema 1.36. *Sean X un continuo y A un subconjunto de X. Se tiene lo siguiente.*

1. *Si A es un conjunto abierto en X, entonces $\Gamma(A)$ y $\Lambda(A)$ son conjuntos abiertos en 2^X.*

2. *Si A es un conjunto cerrado en X, entonces $\Gamma(A)$, $\Lambda(A)$ y $\Phi(A)$ son conjuntos cerrados en 2^X.*

Demostración. 1. Sea A un conjunto abierto en X. Se verá que $\Gamma(A)$ es un conjunto abierto en 2^X.

Para esto, sea $B \in \Gamma(A)$, luego, $B \in 2^X$ y $B \subset A$. Como A es un conjunto abierto en X, por el Teorema 1.21, se tiene que existe $\epsilon > 0$ tal que $N(\epsilon, B) \subset A$.

Se verá que $B_{2^X}(\epsilon, B) \subset \Gamma(A)$. Sea $C \in B_{2^X}(\epsilon, B)$, es decir, $H(B, C) < \epsilon$. Por el Teorema 1.27, se tiene que $C \subset N(\epsilon, B)$ y como $N(\epsilon, B) \subset A$, se sigue que $C \subset A$. Así, $C \in \Gamma(A)$. Luego, $B_{2^X}(\epsilon, B) \subset \Gamma(A)$.

Con todo esto, para cada $B \in \Gamma(A)$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_{2^X}(\epsilon, B) \subset \Gamma(A)$, es decir, $\Gamma(A)$ es un conjunto abierto en 2^X.

Ahora, se demostrará que $\Lambda(A)$ es un conjunto abierto en 2^X.

Sea $B \in \Lambda(A)$, luego, $B \in 2^X$ y $B \cap A \neq \emptyset$. Sea $x \in B \cap A$. Como A es un conjunto abierto en X, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_X(\epsilon, x) \subset A$. Se probará que $B_{2^X}(\epsilon, B) \subset \Lambda(A)$. Sea $C \in B_{2^X}(\epsilon, B)$, luego, $H(B, C) < \epsilon$, por el Teorema 1.27, se infiere que $B \subset N(\epsilon, C)$. Como $x \in B$, existe $y \in C$ tal que $d(x, y) < \epsilon$, es decir, $y \in B_X(\epsilon, x)$. Así, $y \in A$, luego, $y \in C \cap A$, de manera que $C \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto, $C \in \Lambda(A)$. Así, $B_{2^X}(\epsilon, B) \subset \Lambda(A)$. Esto prueba que $\Lambda(A)$ es un conjunto abierto en 2^X.

2. Sea A un conjunto cerrado en X. Para probar que $\Gamma(A)$ es un conjunto cerrado en 2^X, basta ver que $\overline{\Gamma(A)} \subset \Gamma(A)$.

Sea $B \in \overline{\Gamma(A)}$ y supóngase que $B \notin \Gamma(A)$, es decir, $B \not\subset A$. Tómese $b \in B \setminus A$, como A es compacto y $b \notin A$, se tiene que $d(A, b) > 0$.

Sea $\epsilon = d(b, A)$. Dado que $B \in \overline{\Gamma(A)}$, se sigue que $B_{2^X}(\epsilon, B) \cap \Gamma(A) \neq \emptyset$.

Sea $E \in B_{2^X}(\epsilon, B) \cap \Gamma(A)$. Luego, $H(B, E) < \epsilon$ y $E \subset A$. Por el Teorema 1.27, se implica que $B \subset N(\epsilon, E)$. Como $b \in B$, existe $e \in E$ tal que $d(b, e) < \epsilon$. Dado que $E \subset A$ y $e \in A$, se tiene que $d(b, A) \leq d(b, e)$. De manera que $d(A, b) < \epsilon$, lo cual es una contradicción.

Así, $B \in \Gamma(A)$. Por lo que $\overline{\Gamma(A)} \subset \Gamma(A)$. Se concluye que $\Gamma(A)$ es un conjunto cerrado en 2^X.

Por otro lado, si A es un conjunto cerrado en X, entonces $X \setminus A$ es un conjunto abierto en X. Por *1.* de este teorema, se sigue que $\Gamma(X \setminus A)$ es un conjunto abierto en 2^X, así, $2^X \setminus \Gamma(X \setminus A)$ es un conjunto cerrado en 2^X.

Nótese que $2^X = \Lambda(A) \cup \Gamma(X \setminus A)$ y $\Lambda(A) \cap \Gamma(X \setminus A) = \emptyset$. Por lo tanto, $\Lambda(A)$ es un conjunto cerrado en 2^X.

Ahora, se verá que $\Phi(A)$ es un conjunto cerrado en 2^X. Sea $B \in \overline{\Phi(A)}$ y supóngase que $B \notin \Phi(A)$. Así, $A \not\subset B$. Sea $a \in A \setminus B$. Nótese que $d(a, B) > 0$. Sea $\epsilon = d(a, B)$. Como $B \in \overline{\Phi(A)}$, se tiene que $\Phi(A) \cap B_{2^X}(\epsilon, B) \neq \emptyset$. Tómese $E \in \Phi(A)$ tal que $H(B, E) < \epsilon$. Por el Teorema 1.27, se sigue que $E \subset N(\epsilon, B)$. Como $a \in A$ y $E \in \Phi(A)$, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \epsilon$. Como $d(a, B) \leq d(a, b)$, se tiene que $\epsilon < \epsilon$, lo cual no puede ser. Por lo tanto, $B \in \Phi(A)$. Así, $\overline{\Phi(A)} \subset \Phi(A)$. En consecuencia, se ha demostrado que $\Phi(A)$ es un conjunto cerrado en 2^X. □

Teorema 1.37. *Si X es un continuo, entonces el hiperespacio $C(X)$ con la métrica de Hausdorff es compacto.*

Demostración. Se sabe que 2^X es compacto por el Teorema 1.26, sólo se necesita probar que $C(X)$ es un conjunto cerrado en 2^X. Para esto tómese una sucesión convergente cualquiera $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$

de $C(X)$ y supóngase que $\lim A_n = A$, donde $A \in 2^X$. Se tiene que demostrar que $A \in C(X)$. Resta demostrar que A es conexo.

Esto es, supóngase por el contrario, que A no es conexo.

Luego, existen dos subconjuntos cerrados en X, ajenos y no vacíos G y K tales que $A = G \cup K$. Sea $\epsilon = \inf\{d(p,q) : p \in G$ y $q \in K\}$. Debido a la compacidad de G y K, se tiene que $\epsilon > 0$. Para el número $\frac{\epsilon}{2}$, se sabe que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $H(A, A_n) < \frac{\epsilon}{2}$. De modo que $A \subset N(\frac{\epsilon}{2}, A_n)$ y $A_n \subset N(\frac{\epsilon}{2}, A) = N(\frac{\epsilon}{2}, G) \cup N(\frac{\epsilon}{2}, K)$, esta última igualdad se debe al Teorema 1.22. Nótese que por la elección de ϵ, los conjuntos $N(\frac{\epsilon}{2}, G)$ y $N(\frac{\epsilon}{2}, K)$ son ajenos y abiertos; Como A_n es conexo, no puede intersectar a esos dos conjuntos, por lo que tiene que estar contenido en uno sólo de ellos. Supónganse por ejemplo, que $A_n \subset N(\frac{\epsilon}{2}, G)$. Luego, sea $x \in N(\frac{\epsilon}{2}, A_n)$, entonces existe un $y \in A_n$ tal que $d(x,y) < \frac{\epsilon}{2}$, también existe un $z \in G$ tal que $d(y,z) < \frac{\epsilon}{2}$. Luego se tiene que $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, por lo que $x \in N(\epsilon, G)$.

En resumen se tiene que $K \subset A \subset N(\frac{\epsilon}{2}, A_n) \subset N(\epsilon, G)$. Pero como $K \cap G = \emptyset$ se tiene también que $K \cap N(\epsilon, G) = \emptyset$, de nuevo por la elección de ϵ, así, no le queda más que ser vacío, esto contradice la elección de K y termina la prueba de que A es conexo. Por lo tanto, $C(X)$ es un conjunto cerrado en 2^X y, así es compacto.

$\square$

El siguiente teorema será útil para demostrar los Teoremas 1.54, 1.55 y 2.11.

Teorema 1.38. *Sean X un continuo, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de elementos de 2^X, tales que* $\lim A_n = A$ *y* $\lim B_n = B$, *donde $A, B \in 2^X$ entonces*

1. Si $A_n \subset B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \subset B$.

2. lím $A_n \cup B_n = A \cup B$.

3. *Si* $A_n \cap B_n \neq \emptyset$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $A \cap B \neq \emptyset$.

4. *No siempre es cierto que* lím $A_n \cap B_n = A \cap B$.

Demostración. 1. Sea $x \in A$. Se verá que $x \in B$. Puesto que B es un conjunto cerrado, basta ver que $x \in \overline{B}$. Sea $\epsilon > 0$. Como *lím* $A_n = A$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq N_1$, se tiene que $H(A_n, A) < \frac{\epsilon}{2}$.

Como *lím* $B_n = B$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N_2$, se tiene que $H(B_n, B) < \frac{\epsilon}{2}$.

Sea $N = máx\{N_1, N_2\}$. Luego, para cada $n \geq N$, se tiene que $H(A_n, A) < \frac{\epsilon}{2}$ y $H(B_n, B) < \frac{\epsilon}{2}$. Luego para cada $n \geq N$ por el Teorema 1.27, se tiene que $A \subset N(\frac{\epsilon}{2}, A_n)$, $A_n \subset N(\frac{\epsilon}{2}, A)$, $B_n \subset N(\frac{\epsilon}{2}, B)$ y $B \subset N(\frac{\epsilon}{2}, B_n)$.

Ahora, fíjese $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq N$.Como $A \subset N(\frac{\epsilon}{2}, A_m)$, existe $y \in A_m$, tal que $d(x, y) < \frac{\epsilon}{2}$. Por hipótesis, $A_m \subset B_m$ así, $y \in B_m$. Como $B_m \subset N(\frac{\epsilon}{2}, B)$, existe $z \in B$ tal que $d(y, z) < \frac{\epsilon}{2}$. Por la desigualdad del triángulo, se tiene que $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. De manera que $z \in B(\epsilon, x) \cap B$. En consecuencia, $B(\epsilon, x) \cap B \neq \emptyset$. Así, $x \in \overline{B} = B$. Por lo tanto, $A \subset B$.

2. Sea $\epsilon > 0$. Se quiere probar que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq N$, se tiene que $H(A_n \cup B_n, A \cup B) < \epsilon$.

Como *lím* $A_n = A$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq N_1$, se tiene que $H(A_n, A) < \epsilon$. Similarmente, como *lím* $B_n = B$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq N_2$, se tiene que $H(B_n, B) < \epsilon$.

Sea $N = máx\{N_1, N_2\}$. En consecuencia, para cada $n \geq N$, se tiene que $H(A_n, A) < \epsilon$ y $H(B_n, B) < \epsilon$. Luego, por el Teorema 1.27, para cada $n \geq N$, se tiene que $A \subset N(\epsilon, A_n)$, $B \subset N(\epsilon, B_n)$, $A_n \subset N(\epsilon, A)$ y $B_n \subset N(\epsilon, B)$. De manera que, para cada $n \geq N$, se tiene que $A \cup B \subset N(\epsilon, A_n) \cup N(\epsilon, B_n)$ y $A_n \cup B_n \subset N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B)$. Luego, por el Teorema 1.22, para cada $n \geq N$ se tiene que, $A \cup B \subset N(\epsilon, A_n \cup B_n)$ y $A_n \cup B_n \subset N(\epsilon, A \cup B)$. Por tanto, para cada $n \geq N$, se tiene que $H(A_n \cup B_n, A \cup B) < \epsilon$. Se concluye que $\textit{lím}\ (A_n \cup B_n) = A \cup B$.

3. Supóngase que $A \cap B = \emptyset$, por el Teorema 1.23, existe $\epsilon > 0$ tal que $N(\epsilon, A) \cap N(\epsilon, B) = \emptyset$. Por otro lado, como $\textit{lím}\ A_n = A$ y $\textit{lím}\ B_n = B$, existen $N_1,\ N_2 \in \mathbb{N}$ tales que, para cada $n \geq N_1$, se tiene que $H(A_n, A) < \epsilon$ y, para cada $n \geq N_2$, se tiene que $H(B_n, B) < \epsilon$.

Sea $N = \textit{máx}\{N_1, N_2\}$. Luego, para cada $n \geq N$, se tiene que $H(A_n, A) < \epsilon$ y $H(B_n, B) < \epsilon$. Por el Teorema 1.27, para cada $n \geq N$ se tiene que $A \subset N(\epsilon, A_n)$, $B \subset N(\epsilon, B_n)$, $A_n \subset N(\epsilon, A)$ y $B_n \subset N(\epsilon, B)$.

Fíjese $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > N$. Por hipótesis, se tiene que $A_m \cap B_m \neq \emptyset$. Sea $c_m \in A_m \cap B_m$, entonces $c_m \in N(\epsilon, A)$ y $c_m \in N(\epsilon, B)$, así, $N(\epsilon, A) \cap N(\epsilon, B) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $A \cap B \neq \emptyset$.

4. Considérese el continuo $X = [0,1] \times [0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $A_n = [\frac{1}{2}, 1] \times \{\frac{1}{n}\}$, $p_n = (1, \frac{1}{n})$, $q_n = (0, \frac{1}{n+1})$, y $B_n = \overline{p_n q_n}$, donde $\overline{p_n q_n}$ es el segmento de línea que une a los puntos p_n y q_n.

Obsérvese que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones de elementos de 2^X tales que $\textit{lím}\ A_n = A$ y $\textit{lím}\ B_n = B$, donde $A = [\frac{1}{2}, 1] \times \{0\}$, $B = [0,1] \times \{0\}$. Luego, $A \cap B = [\frac{1}{2}, 1] \times \{0\} = A$.

Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $A_n \cap B_n = \{p_n\}$. Así, $\textit{lím}\ (A_n \cap B_n) = \{p_0\}$, donde p_0 es el punto $(1, 0)$. Por lo tanto, $\textit{lím}\ (A_n \cap B_n) \neq A \cap B$. $\square$

Como consecuencia del primer punto del teorema anterior se tiene:

Corolario 1.39. *[1, Corolario 1.1] Sean* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ *tal que* $A_n \to A$ *para algún* $A \in 2^X$, *y* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ *tal que* $a_n \to a$ *para algún* $a \in X$ *y* $a_n \in A_n$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces* $a \in A$.

1.5. Funciones de Whitney

Uno de los resultados fundamentales en la teoría de hiperespacios garantiza la existencia de las funciones de Whitney para el hiperespacio de subconjuntos cerrados no vacíos de un continuo, este resultado se debe a Hassler Whitney, quien en 1933 fue el primero en construir este tipo de funciones especiales en ciertos espacios topológicos.

Definición 1.40. *Sea* X *un continuo. Una* ***función de Whitney*** *para* 2^X *es una función continua* $\mu : 2^X \to \mathbb{R}$ *tal que*

1. *Para cada* $x \in X$, *se tiene que* $\mu(\{x\}) = 0$.
2. *Para cada* $A, B \in 2^X$ *tales que* $A \subsetneq B$, *se tiene que* $\mu(A) < \mu(B)$.

Una función de Whitney para el hiperespacio $C(X)$ *es una función continua de* $C(X)$ *en* $\mathbb{R}$ *que satisface las condiciones 1 y 2.*

Las funciones de Whitney proporcionan una manera de medir el tamaño de los elementos de 2^X y constituyen una herramienta muy importante para estudiar la estructura de los hiperespacios.

El siguiente resultado es un análogo del conocido criterio M. de Weierstrass, el cual, muestra una manera de construir funciones continuas a partir de sucesiones de funciones continuas.

Esto servirá para dar una expresión explícita de algunas funciones de Whitney.

Lema 1.41. *[6, 10.5, pág. 85] Si $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ y $M > 0$ tales que $\mid \mu_n(x) \mid \leq M$, para toda $n \in \mathbb{N}$ y para toda $x \in X$, entonces la función $\mu : X \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\mu(x) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(x)}{2^n}$$

es una función continua.

Teorema 1.42. *Si X es un continuo, entonces existen funciones de Whitney para el hiperespacio 2^X.*

Demostración. Como X es un espacio métrico compacto, se puede elegir un conjunto denso y numerable, $D = \{z_1, z_2, \ldots\}$, de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define

$$\mu_n : 2^X \to [0, \infty),$$

como $\mu_n(A) = máx\{d(a, z_n) : a \in A\} - mín\{d(a, z_n) : a \in A\}$.

Como X es compacto, entonces X está acotado luego, tiene supremo y ya que la función d es continua se garantiza que alcanza su máximo y su mínimo.

"Geométricamente, $\mu_n(A)$ se puede interpretar como el ancho del anillo mínimo centrado en z_n que contiene a A".

Finalmente se define

$$\mu : 2^X \to [0, \infty),$$

como $\mu(A) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(A)}{2^n}$.

Se probará que μ cumple las propiedades *1* y *2* de la Definición 1.40. Se verá primero que para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que μ_n es continua.

Sean $\epsilon > 0$, A, $B \in 2^X$ y $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, tales que $H(A,B) < \delta$. Se demostrará que μ_n es uniformemente continua. Como A y B son compactos, existen elementos a_1, $a_2 \in A$ y b_1, $b_2 \in B$, tales que

(i) $d(z_n, a_1) = \acute{max}\{d(z_n, a) : a \in A\}$

(ii) $d(z_n, a_2) = \acute{min}\{d(z_n, a) : a \in A\}$

(iii) $d(z_n, b_1) = \acute{max}\{d(z_n, b) : b \in B\}$

(iv) $d(z_n, b_2) = \acute{min}\{d(z_n, b) : b \in B\}$.

Como $H(A,B) < \delta$, por el Teorema 1.27, se tiene que $A \subset N(\delta, B)$ y $B \subset N(\delta, A)$, de manera que existen x, $y \in A$ tales que $d(x, b_1) < \delta$ y $d(y, b_2) < \delta$. Por la desigualdad del triángulo y como $d(z_n, x) < d(z_n, a_1)$ por (i), se tiene que

$$d(z_n, b_1) \leq d(z_n, x) + d(x, b_1) < d(z_n, a_1) + \delta.$$

Así,

$$d(z_n, b_1) - d(z_n, a_1) < \delta \tag{1.5.1}$$

Por otra parte y de manera análoga a lo anterior, se tiene que

$$d(z_n, a_2) \leq d(z_n, y) \leq d(z_n, b_2) + d(b_2, y) < d(z_n, b_2) + \delta,$$

de donde

$$d(z_n, a_2) - d(z_n, b_2) < \delta \tag{1.5.2}$$

De manera análoga existen x_1, $y_1 \in B$ tales que $d(x_1, a_1) < \delta$ y $d(y_1, a_2) < \delta$. Luego,

$$d(z_n, a_1) \leq d(z_n, x_1) + d(x_1, a_1) < d(z_n, b_1) + \delta.$$

Por lo tanto,

$$d(z_n, a_1) - d(z_n, b_1) < \delta. \tag{1.5.3}$$

Además,

$$d(z_n, b_2) \leq d(z_n, y_1) \leq d(z_n, a_2) + d(a_2, y_1) < d(z_n, a_2) + \delta.$$

Así,

$$d(z_n, b_2) - d(z_n, a_2) < \delta. \tag{1.5.4}$$

Por lo tanto, de (1.5.1) y (1.5.3), se sigue que

$$\mid d(z_n, b_1) - d(z_n, a_1) \mid < \delta$$

y de (1.5.2) y (1.5.4), se obtiene que

$$\mid d(z_n, a_2) - d(z_n, b_2) \mid < \delta.$$

De manera que $\mid d(z_n, b_1) - d(z_n, b_2) - (d(z_n, a_1) - d(z_n, a_2)) \mid$

$$\leq \mid d(z_n, b_1) - d(z_n, a_1) \mid + \mid d(z_n, a_2) - d(z_n, b_2) \mid < \delta + \delta = \epsilon.$$

Es decir,

$$\mid \mu_n(B) - \mu_n(A) \mid < \epsilon. \tag{1.5.5}$$

Ahora, si $x \in X$, entonces

$$\mu_n(\{x\}) = máx\{d(z_n, a) : a \in \{x\}\} - mín\{d(z_n, a) : a \in \{x\}\}$$

$$= d(z_n, x) - d(z_n, x) = 0.$$

De aquí,

$$\mu(\{x\}) = 0. \tag{1.5.6}$$

Se probará que si $A \subsetneq B$, entonces $\mu_n(A) \leq \mu_n(B)$. Para esto, sea $A \subsetneq B$, así$\{d(z_n, a) : a \in A\} \subsetneq \{d(z_n, b) : b \in B\}$. De aquí,

$$máx\{d(z_n, a) : a \in A\} \leq máx\{d(z_n, b) : b \in B\} \text{ y}$$

$$mín\{d(z_n, b) : b \in B\} \leq mín\{d(z_n, a) : a \in A\},$$

se sigue que

$$-\text{mín}\{d(z_n, a) : a \in A\} \leq -\text{mín}\{d(z_n, b) : b \in B\}.$$

Por tanto,

$$\text{máx}\{d(z_n, a) : a \in A\} - \text{mín}\{d(z_n, a) : a \in A\} \leq$$

$$\text{máx}\{d(z_n, b) : b \in B\} - \text{mín}\{d(z_n, b) : b \in B\}$$

es decir,

$$\mu_n(A) \leq \mu_n(B). \tag{1.5.7}$$

Ahora se verá que la sucesión $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente acotada.

Para esto, si $M = \text{diám}(X)$, entonces

$$\text{máx}\{d(z_n, a) : a \in A\} - \text{mín}\{d(z_n, a) : a \in A\} \leq$$

$$\text{máx}\{d(z_n, a) : a \in A\} \leq M.$$

De donde, para toda $n \in \mathbb{N}$ y para toda $A \in 2^X$, se tiene que $\mu_n(A) \leq M$.

Luego, la función μ está bien definida. Por (1.5.5) y por el Teorema 1.41, se tiene que μ es continua. Ahora se probará que si $A \subsetneq B$, entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu_n(A) < \mu_n(B). \tag{1.5.8}$$

Sean A, $B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$. Elíjase $b_0 \in B \setminus A$. Como A es un conjunto cerrado, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_X(\epsilon, b_0) \cap A = \emptyset$. Como D es denso, existe $z_n \in D \cap B_X(\frac{\epsilon}{2}, b_0)$. Para esta n se verá que $\mu_n(A) < \mu_n(B)$. Nótese que

$$\text{máx}\{d(z_n, a) : a \in A\} \leq \text{máx}\{d(z_n, b) : b \in B\} \text{ y}$$

$$\text{mín}\{d(z_n, b) : b \in B\} \leq d(z_n, b_0).$$

Además,

$$\textit{mín}\{d(z_n, a) : a \in A\} \geq \frac{\epsilon}{2}.$$

Porque de lo contrario, si

$$\textit{mín}\{d(z_n, a) : a \in A\} < \frac{\epsilon}{2},$$

entonces existe $a \in A$ tal que $d(z_n, a) < \frac{\epsilon}{2}$ y esto implica que

$$d(a, b_0) \leq d(a, z_n) + d(z_n, b_0) < \epsilon.$$

Así, $a \in B_X(\epsilon, b_0) \cap A$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto,

$$\textit{mín}\{d(z_n, a) : a \in A\} \geq \frac{\epsilon}{2} > d(z_n, b_0) \geq \textit{mín}\{d(z_n, b) : b \in B\}.$$

Luego,

$$\mu_n(A) = \textit{máx}\{d(z_n, a) : a \in A\} - \textit{mín}\{d(z_n, a) : a \in A\}$$

$$< \textit{máx}\{d(z_n, b) : b \in B\} - \textit{mín}\{d(z_n, b) : b \in B\} = \mu_n(B).$$

Luego, se tiene que si $A \subsetneq B$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

Por tanto, μ es una función de Whitney. $\square$

El siguiente resultado asegura la existencia de una función de Whitney para $C(X)$.

Teorema 1.43. *Si X es un continuo, entonces existen funciones de Whitney para $C(X)$.*

Demostración. Por el Teorema 1.42, se sabe que si X es un continuo existen funciones de Whitney para el hiperespacio 2^X por lo que existe una función $\mu : 2^X \to [0, 1]$ que cumple con:

1. Para cada $x \in X$, se tiene que $\mu(\{x\}) = 0$.

2. Para cada $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$ se tiene que $\mu(A) < \mu(B)$.

Tómese la función $\eta : \mu\mid_{C(X)}: C(X) \to [0,1]$ se verá que es de Whitney.

Sean $A, B \in C(X)$ con $A \subsetneq B$, como $C(X) \subset 2^X$, se tiene que $\eta(A) < \eta(B)$. Por último como para todo $p \in X : \mu(\{p\}) = 0$, se tiene que η es función de Whitney. $\square$

Teorema 1.44. *Si A y B son subcontinuos de X tales que $A \subsetneq B$, $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una función de Whitney y $t \in [\mu(A), \mu(B)]$, entonces existe $C \in C(X)$ tal que $A \subset C \subset B$ y $\mu(C) = t$.*

Demostración. Sea

$$\mathcal{A} = \mu^{-1}([t,1]) \bigcap \{D \in C(X) : A \subset D \subset B\}.$$

Nótese que $\mu^{-1}([t,1])$ es un conjunto cerrado en $C(X)$ ya que μ es una funcíon continua, luego, por el Teorema 1.36, se tiene que $\{D \in C(X) : A \subset D \subset B\}$ es un conjunto cerrado en $C(X)$. Así, el conjunto $\mathcal{A}$ es cerrado en $C(X)$. Por tanto, $\mathcal{A}$ es compacto, además es diferente del vacío ya que B pertenece a él. De manera que μ alcanza su mínimo en $\mathcal{A}$, es decir, existe $E \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(E) \leq \mu(D)$ para toda $D \in \mathcal{A}$.

Ahora, sea

$$\mathcal{B} = \mu^{-1}([0,t]) \bigcap \{D \in C(X) : A \subset D \subset E\}.$$

De nuevo, el Teorema 1.36, nos garantiza que $\mathcal{B}$ es compacto y como A pertence a $\mathcal{B}$ se tiene que $\mathcal{B} \neq \emptyset$, así, μ alcanza su máximo en $\mathcal{B}$. Es decir, existe un elemento $F \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(D) \leq \mu(F)$ para toda $D \in \mathcal{B}$.

Si ocurriera que $\mu(E) = t$ o $\mu(F) = t$, se podría proponer al conjunto C como $C = E$ o $C = F$. Supóngase que $\mu(F) < t < \mu(E)$. Como, $F \subset E$, se tiene que $F \subsetneq E$. Por el Teorema 1.17, existe $G \in C(X)$ tal que $A \subset F \subsetneq G \subsetneq E \subset B$. Así, $\mu(F) < \mu(G) < \mu(E)$. Si $t \leq \mu(G)$, entonces $G \in \mathcal{A}$ y $\mu(G) < \mu(E)$, lo cual es una contradicción. Si $\mu(G) \leq t$, entonces $G \in \mathcal{B}$ y $\mu(F) < \mu(G)$, esto contradice la elección de F. Con esta doble contradicción terminamos la prueba de que $\mu(E) = t$ o $\mu(F) = t$ y también la demostración del teorema. $\square$

1.6. Arcos Ordenados

La intención de esta sección es exponer la existencia de por lo menos un arco ordenado en los Hiperespacios 2^X y $C(X)$, lo que será de utilidad para demostrar que $C_n(X)$ es arco conexo.

Definición 1.45. *Sean X un continuo y A, $B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$. Una función continua $\alpha : [0,1] \to 2^X$ es un **arco ordenado** de A a B en 2^X, si cumple lo siguiente.*

1. *$\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$.*
2. *si t, $s \in [0,1]$ tales que $t < s$, entonces $\alpha(t) \subsetneq \alpha(s)$.*

Por lo regular un arco ordenado α, de A a B, se identifica con su imagen y se dice que $\Gamma = \alpha([0,1])$ es el arco ordenado de A a B. De manera que para cada $C \in \Gamma$, se tiene que $A \subset C \subset B$.

Definición 1.46. *Un espacio topológico X es **arco conexo**, si para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe un arco en X de x a y.*

Recuérdese que un espacio topológico Y es arco conexo si para cada dos elementos diferentes p y $q \in Y$ existe un arco α en Y

cuyos extremos son p y q. También recuérdese que un arco es un espacio homeomorfo al intervalo $[0,1]$. Por otra parte, el espacio topológico Y es conexo por trayectorias si para cualesquiera dos elementos $p, q \in Y$, existe una función continua $\gamma : [0,1] \to Y$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$. Claramente los espacios arco conexos también son conexos por trayectorias, sin embargo la implicación inversa no es cierta. Véase el siguiente ejemplo.

Sea $Y = [0,1) \cup \{y, z\}$, donde y y z son puntos diferentes tales que y, z no pertenecen a $[0,1)$. Los conjuntos abiertos básicos para los puntos en $[0,1)$ se toman como los básicos de la topología que $\mathbb{R}$ le hereda a este espacio. Los conjuntos abiertos básicos para y son los conjuntos de la forma $\{y\} \cup (b,1)$, donde $b \in (0,1)$ y los conjuntos abiertos básicos para z son los conjuntos de la forma $\{z\} \cup (b,1)$, donde $b \in (0,1)$. Nótese que Y es un espacio topológico T_1 que no es de Hausdorff. Observar que Y es conexo por trayectorias pero que los puntos y y z no pueden ser conectados por ningún arco en Y. Por tanto Y no es conexo por arcos.

Una cosa sorprendente es que si le pedimos a un espacio topológico que sea de Hausdorff, entonces la conexidad por trayectorias es equivalente a la conexidad por arcos y dado que los continuos siempre son de Hausdorff se pueden usar los dos conceptos de manera indistinta, cuando se hable de continuos.

Teorema 1.47. *[16, Teorema 8.23] Cada continuo localmente conexo es arco conexo.*

El recíproco del Teorema 1.47 no es válido, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.48. *Sea* $A = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \times [0,1]) \cup (\{0\} \times [0,1])$. *El conjunto A es un continuo y es conocido como el* espacio peine, *este continuo es arco conexo pero no es localmente conexo.*

Teorema 1.49. *[16, Teorema 8.26] Todo subconjunto conexo y abierto de un continuo localmente conexo es arco conexo.*

Definición 1.50. *Dado un espacio topológico Y y un punto $p \in Y$, la **casi componente** $Q(p)$ de p en Y es*

$$Q(p) = \bigcap\{E \subset Y : E \text{ es un conjunto abierto y cerrado en } Y \text{ y } p \in E\}.$$

Teorema 1.51. *[9, Teorema 6.3] Sea Y un espacio topológico compacto y de Hausdorff. Entonces para cada punto $p \in Y$, la componente $C(p)$ de p en Y coincide con la casi componente $Q(p)$ de p en Y.*

Teorema 1.52. *Sea X un espacio topológico compacto y Hausdorff. Si K es una componente de X y F un conjunto cerrado en X tales que $F \cap K = \emptyset$, entonces existe un conjunto abierto y cerrado L en X tal que $K \subset L$ y $L \cap F = \emptyset$.*

Demostración. Sea $p \in K$, por el Teorema 1.51, se tiene que $K = C(p) = Q(p)$. Para cada $y \in F$, tenemos que $y \notin K$, de manera que existe un conjunto abierto y cerrado V_y en X tal que $p \in V_y$ y $y \notin V_y$.

Sea $X_y = X \setminus V_y$. Luego, X_y es un conjunto abierto y cerrado en X tal que $y \in X_y$ y $p \notin X_y$. Como K es un conexo y V_y, X_y forman una separación de X, se sigue que $K \subset V_y$ o $K \subset X_y$. Como $p \in V_y \cap K$, se tiene que $K \subset V_y$, así, $K \cap X_y = \emptyset$. Como la familia $\{X_y : y \in F\}$ es una cubierta abierta del compacto F, existen $m \in \mathbb{N}$ y $y_1, \ldots, y_m \in F$ tales que $F \subset X_{y_1} \cup \cdots \cup X_{y_m}$.

Sea

$$L = X \setminus (X_{y_1} \cup \cdots \cup X_{y_m})$$

$$= X \setminus X_{y_1} \cap \cdots \cap X \setminus X_{y_m}$$
$$= X \setminus (X \setminus V_{y_1}) \cap \cdots \cap X \setminus (X \setminus V_{y_m})$$
$$= V_{y_1} \cap \cdots \cap V_{y_m}.$$

Luego, L es un conjunto abierto y cerrado en X, ya que se tiene que V_{y_i} son conjuntos abiertos y cerrados en X para cada $i = \{1, \ldots, m\}$.

Luego, $X_{y_1} \cup \cdots \cup X_{y_m}$ y $X \setminus (X_{y_1} \cup \cdots \cup X_{y_m})$ forman una separación de X y K conexo. Así, $K \subset L$ o $K \subset X_{y_1} \cup \cdots \cup X_{y_m}$.

Como $K \cap L \neq \emptyset$, se tiene que $K \subset L$, además, $L \cap (X_{y_1} \cup \cdots \cup X_{y_m}) = \emptyset$, como $F \subset (X_{y_1} \cup \cdots \cup X_{y_m})$ se tiene que $L \cap F = \emptyset$. $\square$

Teorema 1.53. *[4, Teorema 3.11] Sean X, Y continuos y sea $f : X \to Y$ una función, f es continua si y sólo si para cada sucesión de puntos $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X que converge a un punto p en X se tiene que si* $\lim f(p_n) = q$, *entonces $q = f(p)$.*

Teorema 1.54. *Sean X un continuo y A, $B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$. Existe un arco ordenado de A a B en 2^X si y sólo si toda componente de B intersecta a A.*

Demostración. (Necesidad) Supóngase que existe un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \to 2^X$ de A a B en 2^X. Entonces $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$, cuando $0 \leq s < t \leq 1$.

Supóngase, por el contrario, que existe una componente K de B tal que $K \cap A = \emptyset$. Por el Teorema 1.52, existe un conjunto abierto y cerrado L en B tal que $K \subset L$ y $L \cap A = \emptyset$. Es claro que $L \cap (B \setminus L) = \emptyset$ y $L \neq \emptyset$. Ya que $A \subset B \setminus L$, se sigue que $B \setminus L \neq \emptyset$. También se tiene $L \cup (B \setminus L) = B$. Así, por el Teorema 1.36, se tiene que $\Gamma(B \setminus L)$ y $\Lambda(L)$ son conjuntos cerrados en 2^X. Nótese que $B \in \Lambda(L)$ y $A \in \Gamma(B \setminus L)$ y que $\Gamma(B \setminus L) \cap \Lambda(L) = \emptyset$. Como α es un arco ordenado en 2^X de A a

B para cada $t \in [0,1]$, se tiene que $A = \alpha(0) \subset \alpha(t) \subset \alpha(1) = B$. Se verá que $\alpha([0,1]) \subset \Gamma(B \setminus L) \cup \Lambda(L)$. Para esto sea $t \in [0,1]$. Como, $\alpha(t) \subset B = [L \cup (B \setminus L)$, si $\alpha(t) \cap L \neq \emptyset$ así $\alpha(t) \in \Lambda(L)$. Si $\alpha(t) \cap L = \emptyset$, se tiene que $\alpha(t) \subset B \setminus L$, es decir, $\alpha(t) \in \Gamma(B \setminus L)$. Por lo tanto, $\alpha([0,1]) \subset \Gamma(B \setminus L) \cup \Lambda(L)$ lo cual es una contradicción ya que $\alpha[0,1]$ es conexo y no puede estar contenido en dos conjuntos cerrados, ajenos, no vacíos intersectando a cada uno de ellos.

(Suficiencia) Ahora supóngase que toda componente de B intersecta a A. Por el Teorema 1.42 existe una función de Whitney $\mu : 2^X \to [0,1]$.

Sea $\mathcal{C}(B) = \bigcup\{D \in C(X) : D \subset B\}$.

Nótese que $\mathcal{C}(B) = C(X) \cap \Gamma(B)$. Por el Teorema 1.37, se tiene que $C(X)$ es un conjunto cerrado en 2^X. Por el Teorema 1.36, se tiene que $\Gamma(B)$ es un conjunto cerrado en 2^X. Luego, $C(X) \cap \Gamma(B)$ es un conjunto cerrado en 2^X. Así, $\mathcal{C}(B)$ es un conjunto cerrado en 2^X y por [9, Teorema 4.2], se tiene que 2^X es compacto. Luego, $\mathcal{C}(B)$ es compacto.

Ahora sea $F : A \times [0,1] \to \mathcal{C}(B)$ definida para cada $(a,t) \in A \times [0,1]$ por $F(a,t) = \bigcup\{D \in \mathcal{C}(B) : a \in D, \mu(D) \leq t\}$ y para cada $t \in [0,1]$ tómese $\alpha(t) = \bigcup_{a \in A} F(a,t)$. Se verá que $\alpha(t)$ es un conjunto cerrado en X.

Para esto se demostrará que $\alpha(t) = \alpha(\bar{t})$.

Sea $p \in \alpha(\bar{t})$. Existe una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \alpha(t)$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} p_n = p.$$

Que $p_n \in \alpha(t)$ significa que $p_n \in \bigcup\{F(a,t), a \in A\}$. Luego, existe $a_n \in A$ tal que $p_n \in F(a_n, t_n)$, esto es que $p_n \in D_n \in \mathcal{C}(B)$. Así $a_n \in D_n$ y $\mu(D_n) \leq t_n$.

Como A es compacto y $\mathcal{C}(B)$ también es compacto, se pueden tomar subsucesiones convergentes

$$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \text{ y } \{D_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \text{ de } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ y } \{D_n\}_{n=1}^{\infty}$$

de puntos de A y subcontinuos de B respectivamente, que convergen a un punto $a \in A$ y a un subcontinuo D de B, respectivamente. Con lo que se tienen dos sucesiones $\{\{a_{n_k}\}\}$ y $\{D_{n_k}\}$ tales que $\{a_{n_k}\}$ converge a $\{a\}$ y D_{n_k} converge a D, y como $\{a_{n_k}\} \bigcap D_{n_k} \neq \emptyset$ por el Teorema 1.38, se tiene que $\{a\} \cap D \neq \emptyset$. Así, $a \in D$.

Como se tenía que $a \in A$ y por lo anterior $a \in D$ se tiene que $a \in D \cap A$. Además como D_{n_k} converge a D, por continuidad de μ se tiene que $\mu(D_{n_k}) \to \mu(D)$. Así $\mu(D_{n_k}) \leq t_n$ y $\mu(D) \leq t$.

De manera que $p \in F(a,t) \subset \alpha(t)$. Por lo tanto, se tiene que $\alpha(t)$ es un conjunto cerrado.

Ahora se mostrará que la función $\alpha : [0,1] \to 2^X$ es continua.

Por el Teorema 1.53 basta probar que si $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos de $[0,1]$ tal que $\lim t_n = t$ y $\lim \alpha(t_n) = E$ para alguna $E \in 2^X$, entonces $E = \alpha(t)$. Se mostrará que estos dos conjuntos son iguales viendo las dos contenciones.

Primero tómese un punto $p \in \alpha(t)$. Luego, por definición existe un $a \in A$ tal que $p \in F(a,t)$, así por la definición de $F(a,t)$, existe $D \in \mathcal{C}(B)$ con $p \in D$ tal que $a \in D$ y $\mu(D) \leq t$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $S_n = \min\{t_n, \mu(D)\}$, considérese los dos casos posibles.

Suponiendo que $S_n = t_n$ así $t_n < \mu(D)$ por definición de mínimo. Como $\mu(\{a\}) = 0 < t_n < \mu(D)$ por el Lema 1.44 existe un subcontinuo D_n tal que $\{a\} \subset D_n \subset D$ y $\mu(D_n) = S_n$.

Ahora supóngase que $S_n = \mu(D)$. Sea $D_n = D$. Como $C(D)$ es compacto existe $\{D_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a un elemento D_0 de $C(D)$. Nótese que

$$\text{lím}\, S_n = \text{lím}\,\text{mín}\{t_n, \mu(D)\} = \text{mín}\{\text{lím}\, t_n, \mu(D)\} = \\ \text{mín}\{t, \mu(D)\} = \mu(D).$$

Luego, por la continuidad de μ se tiene que

$$\mu(D_0) = \text{lím}\, \mu(D_{n_k}) = \text{lím}\, S_{n_K} = \mu(D),$$

nótese que $\{S_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. Luego,

$$\text{lím}\, s_{n_k} = \mu(D).$$

Así, $\mu(D_0) = \mu(D)$.
Ya que $D_0 \subset D$, se concluye que $D_0 = D$, como μ es de Whitney, se tiene que $D_0 \not\subseteq D$ o $D \subset D_0$ como $D \in C(D)$, se tiene que $D_0 \subset D$. Luego, no puede suceder que $D_0 \not\subseteq D$. Así $D \subset D_0$ por lo que $D = D_0$.

Obsérvese que $D \in C(B)$, con lo que $D \subset B$. Ahora como $D_n \in C(D)$, se tiene que $D_n \subset D$. Luego, $D_n \subset B$.
Así $D_n \in C(B)$ en particular $D_{n_k} \in C(B)$.

Se tiene que $a \in D_{n_k}$, además como $s_n \leq t_n$ y $\mu(D_n) = s_n$, se tiene que $\mu(D_n) \leq t_n$ en particular $\mu(D_{n_k}) < t_{n_k}$. Luego, para cada $k \in \mathbb{N}$ $D_{n_k} \subset F(a, t_{n_k})$.

Por otro lado, nótese que $F(a, t_{n_k}) \subset \alpha(t_{n_k})$, así, $D_{n_k} \subset \alpha(t_{n_k})$ por el Teorema 1.38, se tiene que $D_0 = \text{lím}\, D_{n_k} \subset \text{lím}\, \alpha(t_{n_k}) = E$. Como $D \subset D_0$, se tiene que $D \subset E$ y como $p \in D$ se tiene que $p \in E$. Por lo tanto, $\alpha(t) \subset E$.

Ahora tómese un punto $p \in E$,existe una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X tal que $\text{lím}\, p_n = p$ y $p_n \in \alpha(t_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, existe un $a_n \in A$ tal que

$$p_n \in F(a_n, t_n) = \bigcup\{D \in \mathcal{C}(B), a_n \in D, \mu(D) \leq t_n\}$$

de aquí, existe un $D_n \in \mathcal{C}(B)$ tal que $p_n \in D_n$, ,$\mu(D_n) \leq t_n$ y $a_n \in D_n$. Con todo esto dada $n \in \mathbb{N}$ existen $a_n \in A$ y $D_n \in \mathcal{C}(B)$ tales que $p_n, a_n \in D_n$ y $\mu(D_n) \leq t_n$.

Como A y $\mathcal{C}(B)$ son compactos, existen subsucesiones

$$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \text{ y } \{D_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \text{ de } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ y } \{D_n\}_{n=1}^{\infty}$$

respectivamente tales que $\lim a_{n_k} = a'$ y $\lim D_{n_k} = D$ para algunos $a \in A$ y $D \in \mathcal{C}(B)$. Por continuidad de μ se tiene $\mu(D) \leq t$. Por el Teorema 1.38 se tiene que $p, a \in D$, esto debido a que como para todo $k \in \mathbb{N}$ pasa que $p_{n_k} \in D_{n_k}$ y $\{p_{n_k}\} \subset D_{n_k}$, nuevamente por el Teorema 1.38, se tiene que $\{p\} = \lim\{p_{n_k}\} \subset \lim D_{n_k} = D$ es decir $p \in D$.

Como también para todo $k \in \mathbb{N}$ $a_{n_k} \in D_{n_k}$, se tiene que $\{a_{n_k}\} \subset D_{n_k}$ con lo que $a \in D$. Por lo tanto, α es continua.

Luego, dado $a \in A$ se sabe que

$$F(a,0) = \bigcup\{D \in \mathcal{C}(B) : a \in D, \mu(D) \leq 0\} = \{a\}$$

por lo que

$$\alpha(0) = \bigcup\{F(a,a) : a \in A\} = \bigcup\{a : a \in A\} = A.$$

Dada $a \in A$ si $D \in \mathcal{C}(B)$ y $a \in D$, entonces D está contenida en la componente $C_B(a)$ de B que contiene a a.

Como $F(a,1) = \bigcup\{D \in \mathcal{C}(B) : a \in D, \mu(D) \leq 1\}$ donde cada D es conexo tal que $a \in D$, $F(a,1)$ es conexo con $a \in F(a,1) \subset B$. Luego, $F(a,1) \subset C_B(a)$.

Por otra parte, $C_B(a) \in \mathcal{C}(B)$. Además nótese que $a \in C_B(a)$ y $\mu(C_B(a)) \leq 1$. Luego,

$$C_B(a) \in \{D \in \mathcal{C}(B) : a \in D, \mu(D) \leq 1\}.$$

De manera que

$$C_B(a) \subset \bigcup\{D \in \mathcal{C}(B) : a \in D, \mu(D) \leq 1\} = F(a,1).$$

Con lo anterior, se tiene que $F(a,1) = C_B(a)$ para todo $a \in A$, ya que A intersecta a toda componente de B donde $B = \bigcup\{C_B(a) : a \in A\} = \bigcup\{F(a,1) : a \in A\} = \alpha(1)$. Por lo tanto, $\alpha(1) = B$.

Por otro lado si $0 \leq s \leq t \leq 1$ y $p \in \alpha(s) = \bigcup\{F(a,s) : a \in A\}$, entonces existen $a \in A$ y $D \in \mathcal{C}(B)$ tales que $a, p \in D$ y $\mu(D) \leq s \leq t$. De aquí, $D \subset F(a,t)$. Como $F(a,t) \subset \alpha(t)$, es decir $p \in D \subset \alpha(t)$. Esto demuestra que $\alpha(s) \subset \alpha(t)$.

Resta probar que si $0 \leq s < t \leq 1$, entonces $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$. Esto no es necesariamente cierto pero se dará una parametrización de α que sí cumpla con la condición.

Sean $u = \mu(A)$ y $v = \mu(B)$. Dada

$$t \in [0,1],\ A = \alpha(0) \subset \alpha(t) \subset \alpha(1) = B.$$

Así, que

$$u = \mu(A) = \mu(\alpha(0)) \leq \mu(\alpha(t)) \leq \mu(\alpha(1)) = \mu(B) = v.$$

De modo que $\mu(\alpha(t)) \in [u,v]$.

Si $\mathcal{A} = \alpha([0,1])$, entonces $\mathcal{A}$ es un subconjunto compacto de 2^X tal que $\mu(\mathcal{A}) = [u,v]$.

Dadas $s \leq t$ tales que $\alpha(s) \neq \alpha(t)$, se tiene que $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$. De modo que $\mu(\alpha(s)) < \mu(\alpha(t))$. Esto muestra que $\mu \mid \mathcal{A} : \mathcal{A} \to [u,v]$ es una biyeccion. Sea por ejemplo $\phi : [0,1] \to [u,v]$ tal que $\phi(t) = u + t(v-u)$ donde ϕ es una biyección creciente; α es un arco ordenado ya que:

$\alpha(0) = [(\mu \mid \mathcal{A})^{-1} \circ \phi](0) = (\mu \mid \mathcal{A})^{-1}(\phi(0)) = (\mu \mid \mathcal{A})^{-1}(u) = A$

$\alpha(1) = [(\mu \mid \mathcal{A})^{-1} \circ \phi](1) = (\mu \mid \mathcal{A})^{-1}(\phi(1)) = (\mu \mid \mathcal{A})^{-1}(v) = B$ □

Teorema 1.55. *Si X es un continuo y A, $B \in C(X)$ tales que $A \subsetneq B$, entonces existe un arco ordenado de A a B en $C(X)$.*

Demostración. Por el Teorema 1.43, existe una función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,1]$. Considérese el conjunto

$$E = \{\mu(A), \mu(B)\} \bigcup \Big[\big(\mu(A), \mu(B)\big) \cap \mathbb{Q}\Big].$$

Sean $r_1, r_2, \ldots$ una enumeración del conjunto E tal que $r_1 = \mu(A)$ y $r_2 = \mu(B)$.

Se verá que existe una sucesión $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ en $C(X)$ tal que, para cada $n, m \in \mathbb{N}$ si $r_n < r_m$, entonces $A_n \subset A_m$ y $\mu(A_m) = r_m$.

En efecto, sean $A_1 = A$ y $A_2 = B$ (así, $\mu(A_1) = r_1$ y $\mu(A_2) = r_2$). Como $r_3 \in (r_1, r_2)$, por el Teorema 1.44, existe $A_3 \in C(X)$ tal que $A_1 \subset A_3 \subset A_2$ y $\mu(A_3) = r_3$. Luego, como $r_4 \in (r_1, r_3)$, nuevamente por el Teorema 1.44, existe $A_4 \in C(X)$ tal que $A_1 \subset A_4 \subset A_3$ y $\mu(A_4) = r_4$.

Supóngase por inducción que ya se han construido subcontinuos $A_1, \ldots, A_n$ de X que satisfacen las propiedades señaladas. Por la densidad de E, existe un $r_{n+1} \in (r_1, r_n)$, ahora, por el Teorema 1.44, existe $A_{n+1} \in C(X)$ tal que $A_1 \subset A_{n+1} \subset A_n$ y $\mu(A_{n+1}) = r_{n+1}$.

Por lo tanto, de forma inductiva, se ha obtenido la sucesión $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ en $C(X)$ deseada.

Sea $\mathcal{A} = \overline{\{A_1, \ldots\}}^{C(X)}$. Se verá que $\mu_{|\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to [r_1, r_2]$ es un homeomorfismo.

Nótese que $\mathcal{A}$ es compacto y $\mu_{|\mathcal{A}}$ es continua. Por la construcción de $\mathcal{A}$, se tiene que $\mu(\mathcal{A}) \subset [r_1, r_2]$. Además, $\mu(\mathcal{A})$ es un compacto que contiene a todos los números racionales del intervalo no degenerado $[r_1, r_2]$. De modo que $\mu(\mathcal{A}) = [r_1, r_2]$. Por lo tanto, $\mu_{|\mathcal{A}}$ es suprayectiva.

Ahora, se verá que $\mu_{|\mathcal{A}}$ es inyectiva. Sean C, $D \in \mathcal{A}$ tales que $C \neq D$. Luego, existen subsucesiones $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{A_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ tales que $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a C y $\{A_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a D.

Considérese las respectivas subsucesiones $\{r_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{r_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Luego, para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $r_{n_k} \leq r_{m_k}$ o $r_{m_k} \leq r_{n_k}$. Como el conjunto $\mathbb{N}$ es infinito, se infiere que $r_{n_k} \leq r_{m_k}$ o $r_{m_k} \leq r_{n_k}$ ocurre, para una infinidad de números k. Así, se puede suponer que para cada $k \in \mathbb{N}$, $r_{n_k} \leq r_{m_k}$. Por la construcción de $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$, $A_{n_k} \subset A_{m_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Luego, por el Teorema 1.38, $C \subset D$. Dado que $C \neq D$, se sigue que $\mu(C) < \mu(D)$. Por lo tanto, $\mu_{|\mathcal{A}}$ es inyectiva. Puesto que $\mu_{|\mathcal{A}}$ es una biyección continua, $\mathcal{A}$ compacto y $[r_1, r_2]$ es Hausdorff, se tiene que $\mu_{|\mathcal{A}}$ es un homeomorfismo.

Considérese un homeomorfismo estrictamente creciente

$$\phi : [0,1] \to [r_1, r_2]$$

tal que $\phi(0) = r_1$ y $\phi(1) = r_2$. Defínase $\alpha = (\mu_{|\mathcal{A}})^{-1} \circ \phi : [0,1] \to \mathcal{A} \subset C(X)$. Nótese que α es continua, $\alpha(0) = (\mu_{|\mathcal{A}})^{-1}(\phi(0)) = (\mu_{|\mathcal{A}})^{-1}(r_1) = A$, análogamente $\alpha(1) = B$. Además, si $s, t \in [0,1]$ tales que $s < t$, entonces $\phi(s) < \phi(t)$. Así, $\alpha(s) < \alpha(t)$, ya que $\mu_{|\mathcal{A}}$ es una biyección. Por lo tanto, $\alpha : [0,1] \to C(X)$ es un arco ordenado de A a B en $C(X)$. □

Capítulo 2

Propiedades de $C_n(X)$

2.1. Modelos para el arco y el círculo

Concretamente, se describirán los modelos para los hiperespacios $C([0,1]), C(S^1)$ y $C_2([0,1])$. Como se ha dicho anteriormente, los hiperespacios son familias cuyos elementos son subconjuntos de un continuo X. A continuación se presentarán algunos modelos de dichos hiperespacios.

Ejemplo 2.1. *El Modelo topológico de* $C([0,1])$.

Para esto tómese en cuenta que:

$C([0,1])= \{A \subset [0,1] : A$ *es un subconjunto no vacío, conexo y cerrado en* $[0,1]\} = \{[a,b] \subset [0,1] : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$.

Obsérvese que $C([0,1])$ *es homeomorfo al conjunto* T, *donde*

$$T = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a \leq b \leq 1\}.$$

Nótese que el conjunto T *es el triángulo en* $\mathbb{R}^2$ *acotado por el eje* Y, *la diagonal y la recta que está formada por los puntos cuya segunda coordenada es igual a 1.*

Se puede decir que un modelo para $C([0,1])$ es un triángulo. De hecho el mismísimo intervalo $[0,1]$ queda representado por el punto (vértice) $(0,1)$. Un conjunto de la forma $\{p\}$, donde $p \in [0,1]$, también pertenece a $C([0,1])$ y se puede representar como $\{p\} = [p,p]$, por lo que el punto del triángulo que lo representa es el punto (p,p). De modo que si se consideran todos los puntos de esta forma, se obtiene uno de los lados del triángulo, precisamente lo que tiene en la diagonal. Vea la Figura 2.1.

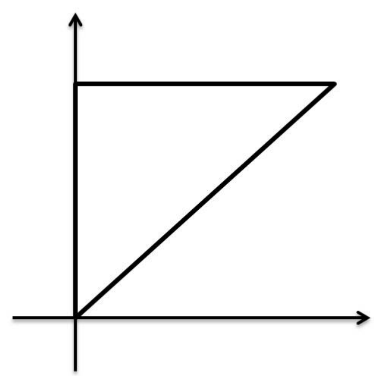

Figura 2.1: $C([0,1])$

Ejemplo 2.2. *El Modelo topológico de $C(S^1)$. Ahora considérese la circunferencia unitaria S^1, y recuérdese que tiene como subcontinuos a los conjuntos que constan de un sólo punto, los subarcos y a S^1 mismo. Cada subarco A está perfectamente determinado por su punto medio, $m(A)$, y su longitud, $l(A)$. Así, al conjunto A se le pude asignar el punto $p(A)$ que se encuentra afuera de S^1, que tiene distancia $l(A)$ de S^1 y que satisface que la recta que une a $m(A)$ y $p(A)$ pasa por el origen. Esta representación puede ser extendida a los conjuntos que constan de un sólo punto a uno de tales conjuntos $\{p\}$ simplemente asignándole p. Vea la Figura 2.2.*

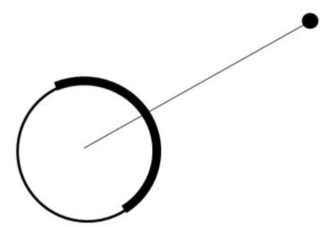

Figura 2.2: $p(A) = m(A)(l + l(A))$

Nótese que a medida que se aleja de la circunferencia, hacia afuera, los puntos respectivos representan a arcos que se parecen cada vez más a S^1*, por lo que al final de cada segmento, para que la asociación sea continua, se debería poner a un punto que represente a* S^1*. Vea la Figura 2.3.*

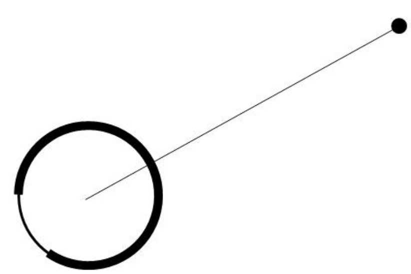

Figura 2.3: $p(A) = m(A)(l + l(A))$

Para mejorar la representación, en lugar de ir hacia afuera de la circunferencia, los segmentos van hacia adentro y terminan en el origen. De esta manera no hay problema de continuidad si a S^1 *se le asigna el origen. Esto es usando la asignación*

$$f(A) = (1 - \frac{l(A)}{2\pi})m(A),$$

para cuando A *es un subarco de* S^1 *o un conjunto de un sólo punto, y* $f(S^1) = origen$*. Vea la Figura 2.4.*

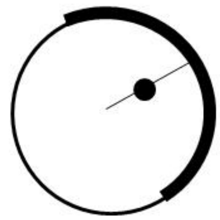

Figura 2.4: $f(A) = m(A)(\frac{l-l(A)}{2\pi})$

Así, un modelo para $C(S^1)$ es el disco unitario D (centrado en el origen) del plano.

El concepto que sigue, muy útil en la teoría de los hiperespacios, nos sirve para encontrar otro modelo de un hiperespacio, como se ve en el Teorema 2.7.

Definición 2.3. *Sea X un espacio topológico.* ***El cono sobre*** *X, que se denota por $Cono(X)$, es el espacio cociente que se obtiene del producto, $X \times [0,1]$, al considerar el subconjunto $X \times \{1\}$ como un punto. Es decir, $Cono(X)$ es el espacio topológico que se obtiene considerando la topología cociente en la partición de $X \times [0,1]$ dada por*

$$\{X \times \{1\}\} \cup \{\{(x,t)\} : x \in X, 0 \leq t < 1\}.$$

Al elemento $X \times \{1\}$ de este espacio cociente se le llama el ***vértice del Cono****(X) y se denota por $v(X)$. Al subconjunto $\{\{(x,0)\} : x \in X\}$ se le llama la* ***base del Cono****(X) y se denota por $B(X)$.*

De acuerdo al encabezado de la referencia [8, Lema 2.2], el Teorema 2.7 fue probado originalmente por R. M. Shori. Se probará dicho resultado usando tres lemas previos.

Lema 2.4. *Si* $D^1 = \{A \in C_2([0,1]) : 1 \in A\}$, *entonces el* $Cono(D^1)$ *es homeomorfo a* $C_2([0,1])$.

Demostración. Considérese la función $f : Cono(D^1) \to C_2([0,1])$ dada por $f(A,t) = (1-t)A$. Note que

$$(1-t)A = \{(1-t)a : a \in A\}.$$

Obsérvese que

$$f(A,0) = A \text{ y } f(A,1) = \{0\}.$$

Afirmación. Si $0 < t < 1$, y $[s,l] \subset [0,1]$, entonces

$$[(1-t)s, (1-t)l] \in C([0,1]).$$

Demostración de la afirmación. Como $0 \leq s \leq l \leq 1$, se tiene que $0 \leq (1-t)s < (1-t)l \leq (1-t)1 \leq 1$. Luego, $[(1-t)s, (1-t)l] \subset [0,1]$.

Ahora se probará que f está bien definida. Para esto sea $(A,t) \in$ Cono (D^1); se tienen dos casos:

1. Supóngase que A es conexo, es decir, $A = [s,1]$. Por la afirmación, $[(1-t)s, 1-t] \in C([0,1])$. Luego, $(1-t)A = [(1-t)s, 1-t] \in C([0,1]) \subset C_2([0,1])$. Es decir, $(1-t)A \in C_2([0,1])$.

2. Sea $A = [t_1, s_1] \cup [t_2, 1]$ con $s_1 < t_2$. Entonces $(1-t)A = [(1-t)t_1, (1-t)s_1] \cup [(1-t)t_2, 1-t]$ donde $(1-t)s_1 < (1-t)t_2$. Por la afirmación, $[(1-t)t_1, (1-t)s_1] \in C([0,1])$

y $[(1-t)t_2, 1-t] \in C([0,1])$. Así $(1-t)A \in C_2([0,1])$. De donde, si $(A,t) \in$ Cono (D^1), entonces $(1-t)A \in C_2([0,1])$.

Así de acuerdo a los dos casos anteriores, la función f está bien definida.

Ahora se probará que la función f es biyectiva. Para esto supóngase que $f(A,t) = f(B,s)$. Por como está definida la función f, se tiene que $1 \in A \cap B$. Por lo que $1-t = \text{máx}(1-t)A$ y $1-s = \text{máx}(1-s)B$. Esto implica que $t = s$. En el caso de que $t = s = 1$, se tiene que (A,t) representa el mismo elemento que (B,s) en el Cono D^1. Ahora supóngase que $t < 1$. De $(1-t)A = (1-s)B$, se sigue que $A = B$. Entonces f es una función inyectiva. Ahora se verá que f es una función suprayectiva esto es, sea $A \in C_2([0,1]) - \{\{0\}\}$. Sea $t = 1 - \text{máx}\, A$. Nótese que $1 - t = \text{máx}\, A \neq 0$. Entonces, $\text{máx}(\frac{1}{1-t}A) = 1$. Así, $\frac{1}{1-t}A \in D^1$ y $A = f(\frac{1}{1-t}A, t)$. Esto completa la demostración de que f es una función biyectiva. Entonces, el Cono (D^1) es homeomorfo a $C_2([0,1])$. □

Lema 2.5. *Si* $D^1 = \{A \in C_2([0,1]) : 1 \in A\}$ *y* $D^1_0 = \{A \in C_2([0,1]) : 0, 1 \in A\}$, *entonces* D^1 *es homeomorfo al Cono*(D^1_0).

Demostración. Sea la función $g : Cono(D^1_0) \to D^1$ dada por $g(A,t) = t + (1-t)A$. Procediendo de la misma manera que en la prueba del lema 2.4, puede verse que g es un homeomorfismo. Luego, D^1 es homeomorfo al Cono (D^1_0). □

Lema 2.6. *Si* $D^1_0 = \{A \in C_2([0,1]) : 0, 1 \in A\}$, *entonces* D^1_0 *es homeomorfo a* $[0,1]^2$.

Demostración. Sea $T = \{(a,b) \in E^2 : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$ y S el espacio obtenido de identificar la diagonal $\Delta = \{(a,b) \in T : a =$

$b\}$ de T a un punto. Notar que S^1 es homeomorfo a $[0,1]^2$. Sea la función $h : T \to D_0^1$ dada por $h(a,b) = [0,a] \cup [b,1]$. Entonces la función h es continua y $h(a,b) = h(c,d)$ si y sólo si $(a,b) = (c,d)$ o $a = b$ y $c = d$. Esto implica que hay un homeomorfismo entre S y D_0^1. □

Teorema 2.7. *El hiperespacio* $C_2([0,1])$ *es homeomorfo a* $[0,1]^4$.

Demostración. Por el Lema 2.4, se tiene que el hiperespacio $C_2([0,1])$ es homeomorfo al Cono(D^1). Por el Lema 2.5, se tiene que Cono(D^1) es homeomorfo al Cono(Cono(D_0^1)). Por el Lema 2.6, se tiene que Cono(Cono(D_0^1)) es homeomorfo al Cono(Cono $([0,1]^2)$) que es homeomorfo a Cono$[0,1]^3$, y éste a su vez es homeomorfo a $[0,1]^4$. □

Hasta donde se sabe no hay modelos para $C_3([0,1])$ ni $C_2(S^1)$, vea [8, Problema 5.5].

2.2. El hiperespacio $C_n(X)$ es un continuo

Téngase presente la función g definida en el Lema 2.8 que no sólo ayuda a demostrar que $C_n(X)$ es un continuo sino que también se ocupa en el Lema 2.10.

Lema 2.8. *Sea* X^n *el producto topológico de* n *copias del continuo* X. *Entonces la función* $g : X^n \to F_n(X)$ *definida por*

$$g((x_1, \ldots, x_n)) = \{x_1, \ldots, x_n\},$$

es uniformemente continua y suprayectiva.

Demostración. Sean $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in X^n$. Considérese a X^n con la métrica

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{máx}\{d(x_1, y_1), \ldots, d(x_n, y_n)\}.$$

Sean $\epsilon > 0$ y $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X^n$ tales que:

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \epsilon.$$

Así, $d(x_i, y_i) < \epsilon$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Por lo que:

$$\begin{gathered}\{x_1, \ldots, x_n\} \subset N(\epsilon, \{y_1, \ldots, y_n\}) \text{ y} \\ \{y_1, \ldots, y_n\} \subset N(\epsilon, \{x_1, \ldots, x_n\}).\end{gathered}$$

De manera que por el Teorema 1.27,

$$H(g(x_1, \ldots, x_n), g(y_1, \ldots, y_n)) < \epsilon.$$

Por lo tanto, g es uniformemente continua. Para verificar que g es suprayectiva es suficiente observar que todo elemento de $F_n(X)$ se puede escribir de la forma $\{x_1, \ldots, x_n\}$. $\square$

Teorema 2.9. *Sea X un continuo. Entonces el hiperespacio $C_n(X)$ es un continuo.*

Demostración. Se define la función

$$\begin{gathered}g : C(X)^n \to C_n(X) \text{ dada por} \\ g((A_1, \ldots, A_n)) = \{A_1, \ldots A_n\}\end{gathered}$$

Puesto que se sabe que $C(X)$ [4, Teorema 3.23] es un continuo. Con una demostración similar a la del Lema 2.8, se prueba que la función g es continua y suprayectiva. Por lo tanto, $C_n(X)$ es conexo y compacto. Luego, $C_n(X)$ es un continuo. $\square$

2.3. Función unión

El resultado principal de esta sección [Teorema 2.11] es sorprendente porque dice que a pesar de que unimos ciertos conjuntos de a lo más n componentes, su unión tiene a lo más n componentes, vea [14, Teorema 1.6.1]. Antes de probarlo se verán algunos resultados necesarios para dicha demostración.

Lema 2.10. *Si X es un continuo, $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$ y*

$$\sigma : 2^{2^X} \to 2^X \text{ dada por } \sigma(\mathcal{A}) = \cup\{A \subset X : A \in \mathcal{A}\},$$

entonces:

1. $\sigma(\mathcal{A}) \in 2^X$.
2. *Si $\mathcal{A}$ es conexo y $\mathcal{A} \cap C(X) \neq \emptyset$, entonces $\sigma(\mathcal{A}) \in C(X)$.*
3. *$\sigma : 2^{2^X} \to 2^X$ es una función continua.*

Demostración. *1.* Se probará que $\sigma(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ y que $\sigma(\mathcal{A})$ es cerrado en X.

Como $\mathcal{A} \neq \emptyset$, se puede elegir $A_0 \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A} \subset 2^X$, se tiene que $A_0 \in 2^X$. De aquí, $A_0 \neq \emptyset$ y $A_0 \subset \cup\{A : A \in \mathcal{A}\} = \sigma(\mathcal{A})$. Por lo tanto, $\sigma(\mathcal{A}) \neq \emptyset$. Además note que $\sigma(\mathcal{A}) \subset X$.

Se verá que el conjunto $\sigma(\mathcal{A})$ es cerrado en X. En efecto, si $a \in \overline{\sigma(\mathcal{A})}$, existe $\{a_n\}_n \subset \sigma(\mathcal{A})$ tal que $a_n \to a$. Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $A_n \in \mathcal{A}$ tal que $a_n \in A_n$. Como $\mathcal{A}$ es un conjunto cerrado en 2^X, se tiene que $\mathcal{A}$ es compacto. Luego, existe una subsucesión $\{A_{n_k}\}_k$ de $\{A_n\}_n$ tal que $A_{n_k} \to A$ para algún $A \in \mathcal{A}$. Por el Corolario 1.39 resulta que $a \in A$ por lo que $a \in \cup\{A \subset X : A \in \mathcal{A}\} = \sigma(\mathcal{A})$ y entonces $\sigma(\mathcal{A})$ es un conjunto cerrado en X. Se concluye que $\sigma(\mathcal{A}) \in 2^X$.

2. Supóngase que $\mathcal{A}$ es conexo y que $\mathcal{A} \cap C(X) \neq \emptyset$. Supóngase también que $\sigma(\mathcal{A})$ no es conexo. Entonces existen $H, K \in 2^X$ tales que $H \cup K = \sigma(\mathcal{A})$ y $H \cap K = \emptyset$ y con $H \neq \emptyset$ y $K \neq \emptyset$.

Sea $B \in \mathcal{A} \cap C(X)$. Como $B \in \mathcal{A}$, se tiene que $B \subset \cup\{A \subset X : A \in \mathcal{A}\} = \sigma(\mathcal{A})\} = H \cup K$. Por lo tanto, $B \subset H \cup K$. Pero como $B \in C(X)$, se puede suponer sin pérdida de generalidad que

$B \subset H$. Si $\mathcal{H} = \{A \in \mathcal{A} : A \subset H\}$ y $\mathcal{K} = \{A \in \mathcal{A} : A \cap K \neq \emptyset\}$,

entonces por el [2, Teorema 1.8], $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ son conjuntos cerrados en 2^X. Además $\mathcal{H} \neq \emptyset$ ya que $B \in \mathcal{H}$.

Si $\mathcal{K} = \emptyset$, entonces todos los elementos de $\mathcal{A}$ se encuentran en $\mathcal{H}$, por lo que $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}$ y $\mathcal{K} = \emptyset$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\mathcal{K} \neq \emptyset$. Nótese que $\mathcal{H} \cap \mathcal{K} = \emptyset$, ya que si $A \in \mathcal{H} \cap \mathcal{K}$ entonces resultaría que $\emptyset \neq A \cap K \subset H \cap K = \emptyset$ lo cual es una contradicción.

Finalmente $\mathcal{H} \cup \mathcal{K} = \mathcal{A}$. En efecto, por definición $\mathcal{H}, \mathcal{K} \subset \mathcal{A}$. Así, $\mathcal{H} \cup \mathcal{K} \subset \mathcal{A}$. Sea $A \in \mathcal{A}$. Si $A \in \mathcal{H}$, entonces $A \in \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$. Supóngase que A no está en $\mathcal{H}$, entonces $A \not\subseteq H$ y $A \subset H \cup K$. Así, $A \cap K \neq \emptyset$. De aquí, $A \in \mathcal{A}$ y por lo tanto $A \in \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$.

Con todo esto se ha probado que $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ constituyen una disconexión de $\mathcal{A}$. Dado que esto es una contradicción, se tiene que $\sigma(\mathcal{A}) \in C(X)$.

3. Se probará que σ es una función continua.

Sean $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$ y $\epsilon > 0$. Supóngase que $\mathcal{B} \in B(\epsilon, \mathcal{A})$, entonces $H(\mathcal{B}, \mathcal{A}) < \epsilon$. Así, $\mathcal{A} \subset N(\epsilon, \mathcal{B})$ y $\mathcal{B} \subset N(\epsilon, \mathcal{A})$. Se asegura que: $\sigma(\mathcal{A}) \subset N(\epsilon, \sigma(\mathcal{B}))$.

En efecto, si $a \in \sigma(\mathcal{A})$, entonces existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $a \in A$. Como $\mathcal{A} \in N(\epsilon, \mathcal{B})$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $H(A, B) < \epsilon$. Dado que $A \subset N(\epsilon, B)$ existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \epsilon$. Se ha encontrado $b \in \sigma(\mathcal{B})$ tal que $d(a, b) < \epsilon$. Así, $a \in N(\epsilon, \sigma(\mathcal{B}))$. Por lo tanto, $\sigma(\mathcal{A}) \subset N(\epsilon, \sigma(\mathcal{B}))$. Análogamente se puede verificar que $\sigma(\mathcal{B}) \subset N(\epsilon, \sigma(\mathcal{A}))$. Por el Teorema 1.27 se obtiene que $H(\sigma(\mathcal{A}), \sigma(\mathcal{B})) < \epsilon$ y con esto σ es continua en $\mathcal{A}$. $\square$

Teorema 2.11. *Si X es un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{A}$ es un subconjunto conexo y cerrado de $C_n(X)$, entonces $\cup\mathcal{A}$ tiene a lo más n componentes.*

Demostración. Supóngase, por el contrario, que $\cup\mathcal{A}$ tiene al menos $n+1$ componentes, considérese $n+1$ componentes de $\cup\mathcal{A}$, denotadas como $T_1, \ldots, T_n, T_{n+1}$. De modo que

$$\cup\mathcal{A} = \cup_{k=1}^{n+1} T_k.$$

Obsérvese, por el Teorema 2.10, que $\cup\mathcal{A}$ es un conjunto cerrado en X, se tiene que para todo k con $k \in \{1, \ldots, n+1\}$, el conjunto T_k es cerrado en 2^X.

Para cada $k \in \{1, \ldots, n+1\}$, sean

$$\mathcal{C}_k = \{A \in \mathcal{A}\colon A \cap T_k \neq \emptyset\} \subset \mathcal{A},$$
$$\mathcal{D}_k = \{A \in \mathcal{A}\colon A \cap T_k = \emptyset\} \subset \mathcal{A}.$$

Por como se definieron, estos conjuntos son disjuntos, además se tiene que $\mathcal{C}_k \cup \mathcal{D}_k = \mathcal{A}$.

Afirmación 1. Para $k \in \{1, \ldots, n+1\}$, los conjuntos $\mathcal{C}_k, \mathcal{D}_k$ son cerrados en $\mathcal{A}$. Se demostrará que se cumple $\overline{\mathcal{C}}_k \subset \mathcal{C}_k$ para toda $k \in \{1, \ldots, n+1\}$.

Sea $L \in \overline{\mathcal{C}}_k$, es decir, que existe una sucesión $\{L_i\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}_k$ con $L_i \to L$, por definición se tiene que para todo $i \in \mathbb{N}$ $L_i \cap T_k \neq \emptyset$. Por el Teorema 1.38, se tiene que $L \cap T_k \neq \emptyset$ por lo que $L \in C_k$, así $\overline{\mathcal{C}}_k \subset \mathcal{C}_k$. Entonces $\mathcal{C}_k$ es un conjunto cerrado en $\mathcal{A}$.

Por otro lado, $\mathcal{D}_k$ es un conjunto cerrado ya que cumple $\overline{\mathcal{D}}_k \subset \mathcal{D}_k$ para toda $k \in \{1, \ldots, n+1\}$. Esto es: Sea un $L \in \overline{\mathcal{D}}_k$, es decir, que existe una sucesión $\{L_i\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}_k$ con $L_i \to L$.

Por definición, para cada $i \in \mathbb{N}$, se tiene que $L_i \subset T_1 \cup \cdots \cup T_{k-1} \cup T_{k+1} \cup \cdots \cup T_{n+1}$. Por el Teorema 1.38, se tiene que

$$L \subset T_1 \cup \cdots \cup T_{k-1} \cup T_{k+1} \cup \cdots \cup T_{n+1},$$

por lo que $L \in \mathcal{D}_k$, se sigue que $\mathcal{D}_k$ es un conjunto cerrado en $\mathcal{A}$.

Afirmación 2. Para toda $k \in \{1, \ldots, n+1\}$ $\mathcal{C}_k \neq \emptyset$.

Supóngase lo contrario, es decir, que existe un $k \in \{1, \ldots, n+1\}$ tal que para todo $A \in \mathcal{A}$, $A \cap T_k = \emptyset$. Se tiene que

$$\cup\mathcal{A} = T_1 \cup \cdots \cup T_{k-1} \cup T_{k+1} \cup \cdots \cup T_{n+1}$$

pero por hipótesis se sabe

$$\cup\mathcal{A} = T_1 \cup \cdots \cup T_{k-1} \cup T_k \cup T_{k+1} \cup \cdots \cup T_{n+1}$$

por lo que $T_k \cap T_i \neq \emptyset$ con $i \neq k$ e $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe en particular un $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \cap T_k \neq \emptyset$, así $\mathcal{C}_k \neq \emptyset$.

Ahora sea $k = 1$, si $\mathcal{D}_1 \neq \emptyset$, como $\mathcal{A} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{D}_1$, $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{D}_1 = \emptyset$, por las afirmaciones 1 y 2, $\mathcal{C}_1, \mathcal{D}_1$ son conjuntos cerrados en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}_1 \neq \emptyset$, se tiene que $\mathcal{A}$ no es conexo, lo cual es una contradicción. Así, $\mathcal{D}_1 = \emptyset$. Por lo tanto, para todo $A \in \mathcal{A}, A \cap T_1 \neq \emptyset$. Si $\mathcal{D}_2 \neq \emptyset$, ocurre como en el caso $\mathcal{D}_1 \neq \emptyset$, de donde para todo $A \in \mathcal{A}$, $A \cap T_2 \neq \emptyset$. Continuando con este procedimiento se llega a que para toda $A \in \mathcal{A}$, $A \cap T_n \neq \emptyset$, nótese que estas intersecciones se hacen hasta T_n, ya que $\mathcal{A}$ tiene n componentes. Es decir, $\cup\mathcal{A} = T_1 \cup \cdots \cup T_n$, pero se supuso que $\cup\mathcal{A} = T_1 \cup \cdots \cup T_{n+1}$ por lo que $T_{n+1} \cap T_i \neq \emptyset$ para $i \neq n+1$ con $i \in \{1, \ldots, n\}$ lo cual es una contradicción. Esta última contradicción viene de suponer que $\cup\mathcal{A}$ tiene $n+1$ componentes. Así que $\cup\mathcal{A}$ tiene a lo más n componentes. $\square$

2.4. Conexidad local del hiperespacio $C_n(X)$

Teorema 2.12. *Sea X un continuo. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *X es localmente conexo,*

2. *2^X es localmente conexo,*

3. *$C(X)$ es localmente conexo.*

Demostración. Sea X localmente conexo. Se verá que 2^X también lo es. Por el Teorema 1.9, basta probar que 2^X es conexo en pequeño. Sea $A \in 2^X$ y $\mathcal{U}$ un conjunto abierto en 2^X tales que $A \in \mathcal{U}$. Por el Teorema 1.33, se tiene que

$$\mathcal{B} = \{\langle U_1, \ldots, U_n\rangle : \\ U_1, \ldots, U_n \textit{ son conjuntosabiertos en } X,\ n \in \mathbb{N}\}$$

es una base para la topología del hiperespacio 2^X. Así, existen $U_1, \ldots, U_n$ conjuntos abiertos en X tales que $A \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle \subset \mathcal{U}$.

Luego, por el Teorema 1.31, se tiene que existen conjuntos abiertos $V_1, \ldots, V_n$ en X tales que $A \in \langle V_1, \ldots, V_n\rangle \subset \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$ y $\overline{V_i} \subset U_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Sea $a \in A$. Entonces para alguna $j \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene que $a \in V_j$ ya que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i$. Considérese la componente C_a de V_j tal que $a \in C_a$. Así, $A \subset \bigcup \{C_a : a \in A\}$. Dado que X es localmente conexo, por el Teorema 1.7 se tiene que C_a es un conjunto abierto en X, para cada $a \in A$.

Como X es compacto y A es un conjunto cerrado en X, se tiene que A es compacto, luego, existen $r \in \mathbb{N}$ y $a_1, \ldots, a_r \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{r} C_{a_i}$. Obsérvese que para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, se tiene que $C_{a_i} \subset \overline{C_{a_i}} \subset U_j$, para alguna $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Por otro lado, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene que $A \cap V_i \neq \emptyset$. Así, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea $x_i \in A \cap V_i$. Luego, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sea C_{x_i} la componente de V_i tal que $x_i \in C_{x_i}$. Como X es localmente conexo, por el Teorema 1.7, para cada

$i \in \{1, \ldots, n\}$, se infiere que C_{x_i} es un conjunto abierto en X. Nótese que $C_{x_i} \subset \overline{C_{x_i}} \subset U_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Ahora, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea

$$J_i = \{k \in \{1, \ldots, r\} : C_{a_k} \cap C_{x_i} \neq \emptyset\}.$$

Nótese que $J_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $W_i = C_{x_i} \cup \left(\bigcup_{k \in J_i} C_{a_k}\right)$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Además, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene que W_i es un conjunto conexo y abierto en X, ya que es unión de conjuntos conexos y abiertos en X. De manera que $\langle W_1, \ldots, W_n \rangle$ es un conjunto abierto en 2^X, y $A \in \langle W_1, \ldots, W_n \rangle$.

Así, $W_i \subset \overline{W_i} \subset U_i$ y $A \cap W_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Luego,

$$A \in \langle W_1, \ldots, W_n \rangle \subset \langle \overline{W_1}, \ldots, \overline{W_n} \rangle \subset \langle U_1, \ldots, U_n \rangle.$$

Nótese que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, la componente C_{x_i}tiene más de un punto. En efecto, si existe $l \in \{1, \ldots, n\}$ y $x \in X$ tal que $C_{x_l} = \{x\}$, entonces C_{x_l} es un conjunto abierto y cerrado en X. De manera que $C_{x_l} = X$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene que $\overline{W_i}$ es un subcontinuo no degenerado de X. Luego, por el [4, Teorema 3.29], se infiere que $\langle \overline{W_1}, \ldots, \overline{W_n} \rangle$ es un conexo tal que $A \in int(\langle \overline{W_1}, \ldots, \overline{W_n} \rangle) \subset \mathcal{U}$. Esto prueba que 2^X es conexo en pequeño. Luego, por el Teorema 1.9, se sigue que 2^X es localmente conexo.

De manera análoga se prueba que si X es localmente conexo, entonces $C(X)$ es localmente conexo.

Ahora, supóngase que 2^X es localmente conexo, veamos que X es localmente conexo. Sean $p \in X$ y U un conjunto abierto en X tal que $p \in U$. Se sigue que $\{p\} \in \langle U \rangle$. Nótese que $\langle U \rangle$

es un conjunto abierto en 2^X. Considérese un conjunto abierto $\mathcal{W}$ en 2^X tal que $p \in \mathcal{W} \subset \overline{\mathcal{W}} \subset \langle U \rangle$. Como 2^X es localmente conexo, existe un conjunto conexo y abierto $\mathcal{V}$ en 2^X tal que $\{p\} \in \mathcal{V} \subset \mathcal{W}$. Por el Teorema 1.33, existen conjuntos abiertos $U_1, \ldots, U_n$ en X tales que $\{p\} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \subset \mathcal{V}$. Luego, por el Teorema 1.31, existen conjuntos abiertos $V_1, \ldots, V_n$ en X tales que

$$\{p\} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \supset \langle V_1, \ldots, V_n \rangle$$

y $\overline{V_i} \subset U_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Así, $\bigcup_{i=1}^n \overline{V_i} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Como $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \subset \mathcal{V} \subset \overline{\mathcal{V}} \subset \langle U \rangle$, se sigue que $\bigcup_{i=1}^n \overline{V_i} \subset \bigcup \overline{\mathcal{V}} \subset U$. Dado que $\{p\} \in \overline{\mathcal{V}} \cap C(X)$, y $\overline{\mathcal{V}} \cap C(X) \neq \emptyset$. Como, $\overline{\mathcal{V}}$ es un subcontinuo de 2^X, por el Lema 2.10, se tiene que $\bigcup \overline{\mathcal{V}}$ es un conexo de X. Sea $V = \bigcup \overline{\mathcal{V}}$, por lo tanto, $p \in \bigcup_{i=1}^n V_i \subset V \subset U$. Como, $\bigcup_{i=1}^n V_i$ es un conjunto abierto en X, se concluye que $p \in int(V) \subset V \subset U$. Así, X es conexo en pequeño. Luego, por el Teorema 1.9, se tiene que X es localmente conexo.

De manera similar se demuestra que si $C(X)$ es localmente conexo, entonces X es localmente conexo. $\square$

El siguiente resultado ayuda a demostrar que el hiperespacio $C_n(X)$ es localmente conexo, vea el Teorema 2.15.

Teorema 2.13. *Si X es un continuo, entonces el hiperespacio $C(X)$ es arco conexo.*

Demostración. Dada $A \in C(X) - \{X\}$, por el Teorema 1.55 existe un arco en $C(X)$ que conecta a A con X. Como todos los elementos se pueden conectar por arcos con X, entonces $C(X)$ es arco conexo. $\square$

Lema 2.14. *Si Z es arco conexo y $n \in \mathbb{N}$, entonces $F_n(Z)$ es arco conexo.*

Demostración. Sea Z un continuo arco conexo. La función

$$f : Z^n \to F_n(Z)$$

definida por: $f((z_1, \ldots, z_n)) = \{z_1, \ldots, z_n\}$ es suprayectiva y continua, ver Lema 2.8 de esta tesis. Tomando en cuenta que Z es un continuo arco conexo, entonces Z^n también es arco conexo. Se tiene que $F_n(Z)$ siendo imagen de un continuo arco conexo bajo una función continua, es arco conexo. $\square$

Teorema 2.15. *Si X es un continuo y $n \in N$, entonces $C_n(X)$ es arco conexo.*

Demostración. Como X es un continuo, por el Teorema 2.13, se tiene que $C(X)$ es arco conexo. Así, por el Lema 2.14, $F_n(C(X))$ es arco conexo.

Considérese la función $\psi : 2^{2^X} \to 2^X$, definida por:

$$\psi(\mathcal{A}) = \bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\}.$$

Por el Teorema, 2.10, la función ψ es continua. Tómese la función restringida $\psi|_{F_n(C(X))} : F_n(C(X)) \to 2^X$. Nótese que para $\mathcal{A} \in F_n(C(X))$, $\psi|_{F_n(C(X))}(\mathcal{A})$, tiene a lo más n componentes, con lo que

$$\psi(F_n(C(X))) \subset C_n(X).$$

Observar que $C_n(X) \subset \psi(F_n(C(X)))$. Por lo tanto

$$\psi(F_n(C(X))) = C_n(X).$$

Nuevamente dado que $F_n(C(X))$ es arco conexo, su imagen bajo una función continua es también arco conexo, por lo que $C_n(X)$ es arco conexo. $\square$

Se puede observar que se ha probado que $C_n(X)$ es arcoconexo sin pedirle a X que lo sea. Por este tipo de razones algunos dicen que los hiperespacios tienen algunas propiedades mejores que las del continuo de donde provienen. Otra propiedad del hiperespacio $C_n(X)$ es la siguiente.

Teorema 2.16. *[16, Corolario 8.17] Cualquier continuo de Hausdorff que sea imagen de un continuo localmente conexo, es un continuo localmente conexo.*

Teorema 2.17. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. El continuo X es localmente conexo si y sólo si $C_n(X)$ es localmente conexo.*

Demostración. Supóngase que X es localmente conexo y $n \in \mathbb{N}$ por el Teorema 2.12, se tiene que $C(X)$ es localmente conexo. Así $C(X)^n$ es localmente conexo.

Sea la función $f : C(X)^n \to F_n(C(X))$ definida por

$$f((A_1, \dots, A_n)) = \{A_1, \dots, A_n\};$$

por el Lema 2.8, la función f es continua y suprayectiva. Por el Teorema 2.16 se tiene que $F_n(C(X))$ es un continuo localmente conexo.

Considérese la función $\sigma : 2^{2^X} \to 2^X$, definida por

$$\sigma(\mathcal{A}) = \cup\{A : A \in \mathcal{A}\}.$$

Por el Teorema 2.10, la función σ es continua y suprayectiva. Como en la demostración del Teorema 2.15, se tiene que

$$\sigma(F_n(C(X))) = C_n(X).$$

Aplicando, nuevamente, el Teorema 2.16 se obtiene que $C_n(X)$ es localmente conexo.

Por otro lado, supóngase que $C_n(X)$ es localmente conexo. Sean x un punto en X y U un subconjunto abierto de X que contiene a x. Dado que $C_n(X)$ es localmente conexo, existe un subconjunto abierto conexo $\mathcal{V}$ de $C_n(X)$ tal que $\{x\} \in \mathcal{V} \subset \overline{\mathcal{V}} \subset \langle U \rangle_n$. Sea $\langle V_1, \ldots, V_k \rangle_n$ un conjunto básico abierto de $C_n(X)$ tal que $\{x\} \in \langle V_1, \ldots, V_k \rangle_n \subset \mathcal{V}$.

Sea $V = \cap_{j=1}^{k} V_j$. Ahora si $y \in V$ entonces $y \in \sigma(\overline{\mathcal{V}})$.

Como $\{x\} \in \overline{\mathcal{V}}$, por el Teorema 2.10 inciso 2 se tiene que $\sigma(\overline{\mathcal{V}}) \in C(X)$, . Así ambos, x y y pertenecen a $\sigma(\overline{\mathcal{V}})$. Por definición de la función σ, se tiene que $\sigma(\overline{\mathcal{V}}) \subset U$. Por lo tanto $x \in V \subset \sigma(\overline{\mathcal{V}}) \subset U$. Luego X es conexo en pequenõ en x. Dado que x es un punto arbitrario de X, se tiene que X es localmente conexo, véase el Teorema 1.9. □

2.5. Otra propiedad del hiperespacio $C_n(X)$

Teorema 2.18. *Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, entonces $C_n(X)$ contiene una $n-$celda.*

Demostración. Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $A_1, \ldots, A_n$ subcontinuos no degenerados de X, disjuntos dos a dos. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea $a_i \in A_i$. Como, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene que $\{a_i\}, A_i \in 2^X$, por el Teorema 1.54 existe un arco ordenado $\alpha_i : [0,1] \to 2^X$ de $\{a_i\}$ a A_i.

Sea $\beta : [0,1]^n \to C_n(X)$ definida, para cada $(t_1, \ldots, t_n) \in [0,1]^n$, por $\beta((t_1, \ldots, t_n)) = \alpha_1(t_1) \cup \cdots \cup \alpha_n(t_n)$. Se verá que hay un homeomorfismo entre la imagen de β y $[0,1]^n$.

Se demostrará que β es inyectiva. Sean $(r_1, \ldots, r_n) = R$ y $(s_1, \ldots, s_n) = S \in [0,1]^n$ y $\beta(R) = \beta(S)$ por demostrar que $R =$

S. Se tiene: $\beta((r_1 \ldots r_n)) = \alpha_1(r_1) \cup \cdots \cup \alpha_n(r_n)$ y $\beta((s_1 \ldots s_n)) = \alpha_1(s_1) \cup \cdots \cup \alpha_n(s_n)$. Observar que:

1. Para $i \neq j$ y $t, s \in [0,1]$, $\alpha_i(s) \cap \alpha_j(t) = \emptyset$ (porque $A_i \cap A_j = \emptyset$ y α_i, α_j son arcos ordenados).

2. Para cada $i \in \{1 \ldots n\}$ $\alpha_i : [0,1] \to C(X)$ cumple que $\alpha_i(r_i)$ es conexo.

Como $\alpha_1(r_1) \cup \cdots \cup \alpha_n(r_n) = \alpha_1(s_1) \cup \cdots \cup \alpha_n(s_n)$. Luego,

$$\alpha_i(t_i) \cap (\alpha_1(r_1) \cup \cdots \cup \alpha_n(r_n)) = \alpha_i(r_i) \cap (\alpha_1(s_1) \cup \cdots \cup \alpha_n(s_n)).$$

Por 1. y distribuyendo, se tiene que $\alpha_i(r_i) = \alpha_i(r_i) \cap \alpha_i(s_i)$ esto implica $\alpha_i(r_i) \subset \alpha_i(s_i)$; de manera análoga, $\alpha_i(s_i) \subset \alpha_i(r_i)$. Así, $\alpha_i(r_i) = \alpha_i(s_i)$. Por lo que $r_i = s_i$. Por lo tanto, $R = S$.

Ahora se verá que β es continua. Sea

$$W_k = (t_{1_k} \ldots t_{n_k}),$$

donde

$$\{(t_{1_k} \ldots t_{n_k})\}_{k=1}^{\infty} \subset [0,1]^n.$$

Supóngase que $W_k \to (r_1 \ldots r_n)$, se demostrará que $\beta(W_k) \to \beta(r_1 \ldots r_n)$. Se tiene que

$$\beta(W_k) = \alpha_1(t_{1_k}) \cup \cdots \cup \alpha_n(t_{n_k})$$
$$\beta(r_1 \ldots r_n) = \alpha_1(r_1) \cup \cdots \cup \alpha_n(r_n)$$

Ya que para cada $i \in \{1 \ldots n\}$ α_i es continua, se tiene que $\alpha_i(t_{i_k}) \to \alpha_i(r_i)$ con $i \in \{1 \ldots, n\}$, utilizando el Teorema [4, Teorema 3.9] se tiene que

$$\alpha_1(t_{1_k}) \cup \cdots \cup \alpha_n(t_{n_k}) \to \alpha_1(r_1) \cup \cdots \cup \alpha_n(r_n)$$

por lo tanto, $\beta(W_k) \to \beta(r_1 \dots r_n)$ es decir, β es continua. Ahora nótese que β es cerrada. Sea $C \subset [0,1]^n$ un conjunto cerrado, como $[0,1]^n$ es compacto se tiene que C es compacto. Luego, $\beta(C)$ es compacto. Como $\beta([0,1]^n)$ es de Hausdorff, se tiene que $\beta(C)$ es un conjunto cerrado, en $\beta([0,1]^n)$ así, β es cerrada. Como β es biyectiva, continua y cerrada se tiene que β es un homeomorfismo entre $[0,1]^n$ y la imagen de β.

$\square$

Existen otros resultados alrededor de propiedades de $C_n(X)$ por mencionar algunas, se tiene que:

Teorema 2.19. *[12, Teorema 3.8] Si un continuo X es hereditariamente indescomponible y $n \in \mathbb{N}$, entonces X es el único punto en el que $C_n(X)$ es localmente conexo.*

Teorema 2.20. *[12, Teorema 6.1] Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, entonces cada función continua de $C_n(X)$ al círculo unitario S^1, es homotópica a una función constante. En particular, se tiene que $C_n(X)$ es unicoherente.*

Pero estos serán estudiados y probados, con lujo de detalle, en una próxima ocasión.

Bibliografía

[1] Gerardo Acosta García, *Hiperespacios y la Propiedad de Kelley*, Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Universidad Autónoma de Coahuila, 1994.

[2] Gerardo Acosta García, *Continuos con Hiperespacio Único*, Tesis de Doctorado en Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, 1999.

[3] Franco Barragán Mendoza, *Funciones Inducidas entre Hiperespacios de Continuos*, Tesis de Maestría en Ciencias Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2007.

[4] Vianey Córdova Salazar, *Elementos Básicos de los Hiperespacios de Continuos*, Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2011, http://www.fcfm.buap.mx/index.php?id=30.

[5] Vianey Córdova Salazar, David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, *La Topología de los Hiperespacios* (Capítulo 26) 291-300, Matemáticas y sus Aplicaciones I, Fomento Editorial 2011, Primera Edición 2011, ISBN: 978-607-487-338-2. http://www.fcfm.buap.mx/eventos/sm/7g-snm/archivos/MatematicasYSusAplicacionesI2011.pdf

[6] James Dugundji, *Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1998.

[7] Sergio Macías, *Una introducción a la teoría de los continuos*, capítulo 1 del libro *Invitación a la Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios*, editores Raúl Escobedo, Sergio Macías, Héctor Méndez, Aportaciones Matemáticas de la Sociedad Matemática Mexicana, Textos, vol. 31, 2006.

[8] Alejandro Illanes, *The hyperspace $C_2(X)$ for a finite graph X is unique*, Glasnik Matematički. 37 (57)(2002), 347–363.

[9] Alejandro Illanes, *Hiperespacios de Continuos*, Aportaciones Matemáticas de la Sociedad Matemática Mexicana, Textos, vol. 28, 2004.

[10] Alejandro Illanes y Sam B. Nadler, Jr., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, N.Y., 1999.

[11] Fernando Macías Romero y Dolores Columba Pérez Flores, *Propiedades Topológicas de los Hiperespacios $C_n(X)$*, Memorias en Extenso del Programa Jóvenes Investigadores ll, organizado por la Vicerrectoría de Investigación y de Estudios de Posgrado de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, junio de 2007.

[12] Sergio Macías, *On the hyperspace $C_n(X)$ of a continuum X, II*, Topology Proceedings 25 (2000), 255–276.

[13] Sergio Macías, *On the hyperspace $C_n(X)$ of a continuum X*, Topology and Its Applications. 109 (2001), 237–256.

[14] Sergio Macías, *Topics on Continua*, Pure and Applied Mathematics Series, vol. 275, Chapman an Hall/CRC, Taylor and Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2005.

[15] Sam B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets.* Monographs and Texbooks Pure Applied Mathematics, vol. 49, Marcel Dekker, New York, 1978.

[16] Sam B. Nadler, Jr., *Continuum Theory. An introduction.* Monographs and Texbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

[17] Dimitrie Pompeiu, *Sur la continuité des fonctions de variables complexes*, Annales de la faculté des sciences de Toulouse, 2^a serie, tomo 7, 1905, 265-315.

[18] Menachem Wojdislawski, *Rétractes absolus et hyperespaces des continus*, Fund. Math., 32 (1939), 184-192.

Índice alfabético