Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Fisico-Matemáticas

Aplicación del Método de Transformadas para Opciones Barreras Dobles

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

por

Beatriz Adriana Jiménez Andrade

asesorada por

Dr.Francisco S. Tajonar Sanabria.

Puebla Pue.
Mayo de 2011

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Fisico-Matemáticas

Aplicación del Método de Transformadas
para Opciones Barreras Dobles

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

por

Beatriz Adriana Jiménez Andrade

asesorada por

Dr.Francisco S. Tajonar Sanabria.

Puebla Pue.
Mayo de 2011

DEDICATORIA

Dedico esta tesis a un gran equipo de trabajo, el formado por mis hermanos

Jorge Jiménez Andrade.
Ma.Guadalupe Jiménez Andrade.
Enrique Jiménez Andrade.
Higinio Jiménez Andrade.
José Andres Jiménez Andrade.
Salvador Jiménez Andrade.

y mi madre

Carolina Andrade Andrade.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por permitirme concluir el trabajo que inicio hace algunos años, aquel abjetivo que al principio parecía un sueño, y que hoy es una realidad.

Agradezco infinitamente a mis hermanos Jorge Jiménez Andrade, Ma.Guadalupe Jiménez Andrade y Enrique Jiménez Andrade por el apoyo incondicional que siempre me brindaron, por su compañía, por su cariño, a lo largo de este camino, sin ellos esta meta hubiese tardado un poco más en realizarse. También agradezco a mis tíos en especial a Miguel Andrade Andrade, Judith Navarro Jiménez e Isabel Andrade Andrade por estar conmigo en los momentos más difíciles y por el apoyo económico que me otorgaron.

No podría concluir estas sinceras palabras, sin agradecer a los profesores que me dieron clase a lo largo de la licenciatura, en especial al Dr. Francisco Solano Tajonar Sanabria por su amistad y cooperación en este trabajo, para concluir agradezco también a mis compañeros, por la ayuda que en su momento me brindaron y por los buenos momentos en los que convivimos.

Betty

Índice general

INTRODUCCIÓN

La matemática financiera tuvo sus orígenes con los años y su objetivo principal es la construcción e investigación de modelos matemáticos de los procesos que se presentan en los mercados financieros. La matemática financiera se ha desarrollado de manera rápida en los últimos años, ya que los mercados de valores requieren de los métodos de las matemáticas financieras.

El movimiento Browniano, llamado así en honor a su precursor Robet Brown[4], está inmerso en casi el 99 % de la teoría de valuación de portafolios y productos derivados en tiempo continuo [15].

Louis Bachelier [1] presentó el primer trabajo en finanzas, el cual modela la dinámica de los precios de acciones de la bolsa de valores de París a través del movimiento Browniano. Sin embargo, su trabajo tenía limitaciones ya que los precios de los activos podían tomar valores negativos. Este inconveniente es corregido años más tarde por Paul Samuelson [13], él introduce el concepto de movimiento Browniano económico, lo que hoy se conoce como movimiento Browniano geométrico, este nuevo concepto corrige las deficiencias en el modelo de Bachelier, pues este sólo considera precios positivos. En 1973, Black y Scholes [2] desarrollan su modelo de valuación, mismo que es formalizado y extendido en el mismo año por Merton [9].

En este trabajo se lleva a cabo el estudio de opciones barreras dobles.

Las opciones barrera se han vuelto muy populares hoy en día en los mercados financieros, uno de los motivos por los cuales esto ha sucedido, es que este tipo de opciones son más baratas que las demás. Nuestro interés es analizar opciones barreras dobles, las cuales tienen una barrera por abajo y una barrera por arriba del precio del bien subyacente. De forma analítica, se deriva la función de transición del proceso partiendo de una ecuación hacia adelante(ecuación forward) también conocida como ecuación hacia adelante de Fokker Plank, posteriormente se representa a la función de densidad del proceso a través de una serie de Fourier, de manera similar se obtiene la función de densidad de los primeros alcances de las barreras, mediante la transformada inversa de Laplace utilizando integrales de contorno. Con estas densidades de barrera, se derivan fórmulas para la valuación de nuevos tipos de opciones barreras tales como: opciones barreras eliminación directa, las cuales pagan una cantidad constante cuando una de las barreras se alcanza. También discutimos tipos más complicados de opciones barreras, en particular opciones doble knock-out, en su versión put.

La estructura de la tesis es la siguiente:
En el capítulo dos, se analizan de manera muy general los conceptos que se deben tener presentes en el desarrollo de este trabajo.
En el capítulo tres, se define qué es una opción, se citan algunos tipos de opciones, se da la clasificación de opciones barreras dobles, también se analiza el modelo de valuación de Black y Scholes, por último se obtiene la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes.
En el capítulo cuatro, se obtiene tanto la función de densidad del proceso, partiendo de una ecuación forward, como las funciones de densidad de las barreras, finalmente se dan las fórmulas de valuación para opciones que pagan una cantidad constante en el vencimiento y para opciones doble knock-out en su versión put.
El el capítulo cinco, se presentan las conclusiones obtenidas a través del desarrollo de esta tesis.
Finalente se presenta la bibliografía analizada en este trabajo.

Capítulo 1

HERRAMIENTAS BÁSICAS

Los fenómenos o experimentos aleatorios que evolucionan con el tiempo son estudiados a través de la teoría de procesos estocásticos. El concepto de proceso estocástico es fundamental en la teoría financiera, las variables financieras (precios de los activos, tasas de interés, tipos de cambio, etc.) son modelados adecuadamente mediante un proceso estocástico, es por ello que se considera necesario en este trabajo introducir esta teoría, en su desarrollo se consideran otros conceptos como son; filtraciones, martingalas, etc.

1.1. Procesos Estocásticos

Definición 1.1.1. Un proceso estocástico, X, es una colección de variables aleatorias (v.a.)

$$\{X_t, t \in T\} = \{X_t(w), t \in T, w \in \Omega\},$$

definido en algún espacio muestral Ω. Para un instante de tiempo t, fijo, el proceso estocástico resulta ser una v.a.

$$X_t = X_t(w), \quad w \in \Omega,$$

para un $w \in \Omega$ fijo, es una función del tiempo.

$$X_t = X_t(w), \qquad t \in T,$$

esta función es llamada una realización o una trayectoria del proceso X.

Definición 1.1.2. Sea $X = \{X_t, t \in T\}$ un proceso estocástico y $T \subset \mathbb{R}$, un intervalo.

- Se dice que X tiene incrementos estacionarios si,

$$X_t - X_s \stackrel{d}{=} X_{t+h} - X_{s+h}, \text{ para toda } t, s \in T \quad \text{y} \quad h > 0, \text{ donde } \quad t+h, t+s \in T.$$

- Se dice que X tiene incrementos independientes si para cada elección de $t_i \in T$ con $t_1 < t_2 < ... < t_n$ y $n \geq 1$,

  $X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son v.a.independientes .

1.1.1. Filtraciones

Definición 1.1.3. Una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos del espacio muestral Ω es una σ-álgebra si cumple las siguientes condiciones:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. Si $A \in \mathcal{F}$, entonces $A^c \in \mathcal{F}$,
3. Si $A_1, A_2, ..., \in \mathcal{F}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Definición 1.1.4. La colección $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ de σ-álgebras en Ω es llamada una filtración, si dado $0 \leq s \leq t$ se tiene que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.

Por lo tanto, una filtración es un flujo creciente de información.
Para nuestro trabajo, una filtración usualmente es ligada a un proceso estocástico.

Definición 1.1.5. Se dice que el proceso estocástico $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$ es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, si $\sigma(Y_t) \subset \mathcal{F}_t$ para toda $t \geq 0$.

Observación: El proceso estocástico Y siempre es adaptado a la filtración natural generada por Y, es decir, $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_s, s \leq t)$.

Si $\mathcal{N}$ es el conjunto de eventos $B \in \mathcal{F}$ tales que $P(B) = 0$, se define la filtración aumentada de $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t \geq 0}$ mediante la familia de σ-álgebras

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{F}_t^W \subset \mathcal{N})$$

Observación: El hecho de que la filtración esté aumentada significa que hay más información conforme el tiempo transcurre y que la información pasada no es olvidada.

Definición 1.1.6. El proceso estocástico $X = \{X_t, t \geq 0\}$ es llamado una martingala a tiempo continuo con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, denotando a ésta como $\{X, (\mathcal{F}_t)\}$, si satisface las siguientes condiciones.

- $E|X_t| < \infty$, para toda $t \geq 0$.
- X es adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}$.
- $E(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s$, para toda $0 \leq s \leq t$, es decir, X_s es la mejor predicción de X_t dado $\mathcal{F}_s$.

1.1.2. Movimiento Browniano

Definición 1.1.7. Un proceso estocástico $W = \{W_t, t \in [0, \infty)\}$ es llamado movimiento Browniano estándar o un proceso de Wiener, si se satisfacen las siguientes condiciones.

1. El proceso inicia en 0, es decir, $W_0 = 0$.

2. El proceso tiene incrementos estacionarios e incrementos independientes.

3. Para cada $t > 0, W_t \sim N(0, t)$.

4. El proceso tiene trayectorias continuas.

Observación: El movimiento Browniano geométrico se obtiene mediante una transformación exponencial del movimiento Browniano estándar. Sea $\{W_t\}$ un movimiento Browniano estándar, μ una constante llamada tendencia, σ una constante positiva llamada volatilidad, S_0 un precio inicial conocido, entonces el proceso definido de la siguiente forma es un movimiento Browniano geométrico

$$S_t = S_0 + \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \sigma W_t\right\}, t \geq 0. \tag{1.1}$$

Este proceso es frecuentemente utilizado para describir el cambio porcentual, conocido también como rendimiento del precio de un activo.

1.2. Cálculo Estocástico

Esta sección la dedicaremos al estudio del cálculo estocástico, ya que éste es una herramienta muy útil de las matemáticas financieras, el cual tiene como objeto de estudio la integral, aunque en los modelos financieros se acostumbra en la mayoría de los casos hacerlo mediante una ecuación diferencial, aunque en realidad se esta pensando en una integral.

En el cálculo de variables reales, si t es una variable independiente, se tiene que el cuadrado de una cantidad infinitesimal $(dt)^2$, es una cantidad despreciable, a diferencia del cálculo estocástico, cuya regla central, la cual hace la distinción con el cálculo de variables reales es que el cuadrado de una cantidad infinitesimal normal es significativa. Más específicamente, se tiene que si $\{W_t\}$ es un movimiento Browniano estandarizado, entonces $(dW_t)^2 = dt$.

Formalmente, el cálculo estocástico conduce a que

$$\int_0^t (dW_t)^2 = \int_0^t ds = t. \tag{1.2}$$

En el cuadro 1.1 se representan las reglas básicas del cálculo estocástico.

	dt	dW_t
dt	0	0
dW_t	0	dt

Figura 1.1: Reglas básicas del cálculo estocástico

1.2.1. Integral y Diferencial Estocástica

La integral estocástica se define como el proceso estocástico

$$V_t := \int_0^t f(s)dW_s, \tag{1.3}$$

el cul satisface que

$$\lim_{n\to\infty} E^{\mathbb{P}}\left[\sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) - V_t\right]^2 = 0, \tag{1.4}$$

donde $\{W_t\}_{t\geq 0}$, es un movimiento Browniano estándar, $0 = t_0 < t_1 ... < t_n = t$ una partición del intervalo $[0, t]$, tal que $t_i - t_{i-1} = t/n$, $i = 1, 2, ..., n$ y $\mathbb{P}$ una medida de probabilidad. Note que la convergencia es en media cuadrática (la cual sedenotara por $\mathfrak{L}^2$), defnamos $\Delta W_{t_i} = W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$, además se puede probar que [15]

$$\lim_{n\to\infty} E^{\mathbb{P}}\left[\sum_{i=1}^{n}(\Delta W_{t_i})^2 - t\right]^2 = 0. \tag{1.5}$$

En consecuencia, se tiene que el límite V_t está dado por

$$\int_0^t (dW_s)^2 \equiv \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\Delta W_{t_i})^2 \overset{\mathfrak{L}^2}{=} t, \tag{1.6}$$

el cual es equivalente a

$$\int_0^t (dW_s)^2 = t. \tag{1.7}$$

De manera similar se puede probar que

$$\lim_{n\to\infty} E^{\mathbb{P}}\left[\sum_{i=1}^{n} W_{t_{i-1}}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) - \frac{1}{2}(W_t^2 - t)\right]^2 = 0, \tag{1.8}$$

de ésto se sigue que

$$\int_0^t W_s dW_s \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} W_{t_{i-1}}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \stackrel{\mathfrak{L}^2}{=} \frac{1}{2}(W_t^2 - t). \tag{1.9}$$

Como se puede observar, de lo anterior, la integral estocástica es el límite en media cuadrática de una suma de términos que comprenden incrementos independientes de un movimiento Browniano. A veces es frecuente usar la notación de una ecuación diferencial estocástica de la forma

$$dS_t = \mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t. \tag{1.10}$$

1.2.2. Integral de Itô

Definición 1.2.1. Sea $V_t \equiv \int_0^t (dW_s)^2$ un proceso estocástico que satisface lo siguiente,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} E\left[\sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) - V_t\right]^2 = 0, \tag{1.11}$$

donde $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano estándar, ahora tomemos una partición del intervalo $[0,t]$ tal que $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$, donde $t_i - t_{i-1} = t/n$, para $i = 1, 2, ..., n$.

En el límite anterior, la convergencia es en media cuadrática. Es conveniente hacer énfasis que el integrando f el cual puede ser determinista o estocástico se evalua en t_{i-1}, en los modelos financieros esta elección es adecuada, con esto se asegura que el futuro no intervenga en las acciones presentes. Cuando $f(s) = g(W_s)$, se hace la suposición de que el valor de $f(s)$ depende unicamente de los valores pasados de $W_u, u \leq s$. Cuando esto ocurre se puede hacer una predicción de f [15].

Para que la integral de Itô $\int_0^t f(s)dW_s$ esté bien definida se supone lo siguiente,

$$\int_0^t f^2(s)ds < \infty, \text{ casi en todas partes,} \tag{1.12}$$

y

$$\int_0^t E[f^2(s)]ds < \infty, \tag{1.13}$$

la primera condición nos asegura que la integral de Itô $\int_0^t f(s)dW_s$ esté bien definida y la segunda condición se hace para que la varianza de $\int_0^t f(s)dW_s$, se mantenga finita.
También observe que si

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}), \tag{1.14}$$

aplicando la desigualdad de Chebychev a V_n, se tiene que

$$P\left[|V_n - V| \geq \epsilon\right] \leq \frac{1}{2}E\left[(V_n - V)^2\right], \tag{1.15}$$

para toda $\epsilon > 0$. Esto significa que convergencia en $\mathcal{L}_t^2$(media cuadrática) implica convergencia en probabilidad [15].

Es fácil verificar que la integral estocástica o integral de Itô satisface las siguientes condiciones.

1. **Linealidad**, si f y g son tales que su integral de Itô existe y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_0^t (\alpha f(s) + \beta g(s)) dW_s = \alpha \int_0^t f(s) dW_s + \beta \int_0^t g(s) dW_s. \tag{1.16}$$

2. **Isometria**, si f es tal que la integral de Itô existe, entonces

$$E\left[\left(\int_0^t f(s) dW_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t f^2(s) ds\right] = \int_0^t E\left[f(s)^2\right] ds. \tag{1.17}$$

3. **Propiedad de martingala**, si f es tal que la integral de Itô existe, entonces

$$E\left[\int_0^t f(s) dW_s \mid F_u\right] = \int_0^u f(s) dW_s, \tag{1.18}$$

siempre que, $0 \leq u < s$.

1.2.3. Lema de Itô

Sea

$$dS_t = \mu(S_t, t) dt + \sigma(S_t, t) dW_t,$$

una ecuación diferencial estocástica. Consideremos $y = f(S_t, t)$ y $(dW_t)^2 = dt$. Nos interesa calcular la diferencial de y, para ésto hay que expandir en serie de Taylor hasta segundo orden, esto es,

$$dy = \frac{\partial f}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}(dS_t)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial S_t \partial t}(dS_t)(dt) + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2\right), \tag{1.19}$$

aplicando a dy las reglas básicas de diferenciación se tiene que

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S_t}\left(\mu(S_t, t) dt + \sigma(S_t, t) dW_t\right) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}\left[\mu^2(S_t, t)(dt)^2\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}\left[2\mu(S_t, t)\sigma(S_t, t)(dW_t)(dt)\right] \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}\left[\sigma^2(S_t, t)(dW_t)^2\right] + \frac{\partial^2 f}{\partial S_t \partial t}\left[\mu(S_t, t)(dt)^2\right] \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial S_t \partial t}\left[\sigma(S_t, t)(dW_t)(dt)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2 \end{aligned}$$

$$dy = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S_t}\mu(S_t, t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}\sigma^2(S_t, t) \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S_t}\sigma(S_t, t)dW_t, \tag{1.20}$$

en términos de integrales, la ecuación anterior se puede expresar como sigue

$$\begin{aligned} y = y_0 &+ \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial S_u}\mu(S_u, u) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S_u^2}\sigma^2(S_u, u) \right) du \\ &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial S_u}\sigma(S_u, u)dW_u, \end{aligned} \tag{1.21}$$

los resultados anteriores son conocidos como el lema de Itô, en su forma diferencial e integral respectivamente.

Capítulo 2

OPCIONES

En el presente capítulo, se analiza un tipo específico de contratos, estos son, las opciones, las cuales se dividen en dos grupos, opciones de compra(opciones call) y opciones de venta(opciones put). También se analiza el modelo de valuación de Black-Scholes.

2.1. Tipos de Opciones

Definición 2.1.1. Una opción es un contrato entre dos entes financieros, un suscriptor y un tenedor, sobre cierto activo a un precio especificado en una fecha establecida.

Se supone que la compra-venta sólo se puede llevar a cabo en la fecha de vencimiento. Se acostumbra decir que el tenedor toma una posición larga y el suscriptor una posición corta. Suponga que el contrato de la opción se establece al tiempo t (el presente) y que la compra-venta del activo a un precio predeterminado, K , se lleva acabo en una fecha futura T.
Las opciones se dividen en dos grupos, las opciones call y las opciones put.

Opción call: es un contrato que le da a su tenedor el derecho más no la obligación de comprar un número fijo de acciones de una empresa especificada en un momento permitido a un precio predeterminado y hasta una fecha establecida.

Opción put: es un contrato que le da a su tenedor el derecho de vender un número fijo de acciones de una empresa especificada en un momento permitido a un precio predeterminado y hasta una fecha establecida.

Acontinuación se citan algunos tipos de opciones, que son comercializadas en las bolsas de valores.

Opción europea: en una opción europea la fecha de vencimiento T y el precio de ejercicio K son dados desde el principio, el tenedor no puede ejercer la opción antes de la fecha de vencimiento.

Opción americana: una opción americana se puede ejercer en cualquier momento antes de la fecha de vencimiento, el precio de ejercicio es dado desde el principio.

Opción lookback: las opciones lookback le dan al tenedor el derecho de vender o de comprar en un precio igual al máximo o mínimo del precio de la acción hasta la fecha pre-especificada T.

Opción compuesta: es una opción cuyo subyacente es otra opción, y por consiguiente tiene dos fechas de vencimiento y dos precios de ejercicio.

Opción potencia: es un contrato en el que una de las partes adquiere el derecho de recibir, en una fecha futura, la diferencia entre el precio de un activo elevado a una potencia y el precio de ejercicio; como contraposición el tenedor entrega una prima a la contraparte.

2.2. Clasificación de Opciones Barrera

Definición 2.2.1. Las opciones barrera son las que se pueden ejercer si durante la vida de la opción, el precio del activo subyacente es siempre mayor o siempre menor que cierto valor B (la barrera), o de manera alternativa, si la barrera es alcanzada durante la vida de la opción.

Los 4 tipos de opciones barreras más negociadas son:

Opción down-and-out: la opción caduca sin valor si el precio de la acción cae hasta la barrera B, esto significa que la barrera es alcanzada desde arriba antes de la fecha de vencimiento.

Opción down-and-in: la opción caduca sin valor a menos que la barrera B, sea alcanzada desde arriba antes de la fecha de vencimiento.

Opción up-and-out: la opción caduca sin valor si el precio de la acción sube hasta la barrera B, esto significa que la barrera es alcanzada desde abajo antes de la fecha de vencimiento.

Opción up-and-in: la opción caduca sin valor a menos que la barrera B, sea alcanzada desde abajo antes de la fecha de vencimiento.

2.2.1. Opciones Barreras Dobles

Las opciones barreras dobles se dividen en tres clases

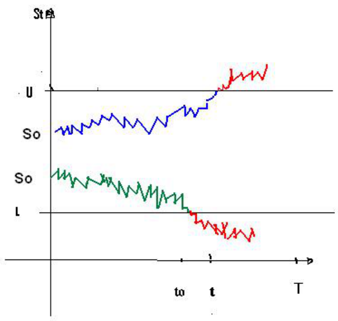

Figura 2.1: Opciones barreras dobles del tipo 1

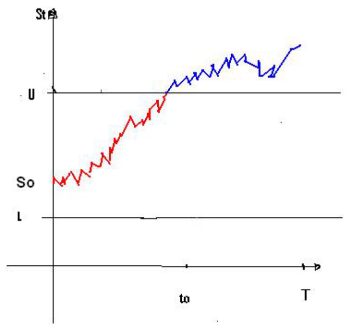

Figura 2.2: Opciones barreras dobles del tipo 2

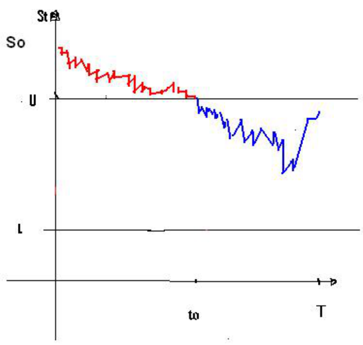

Figura 2.3: Opciones barreras dobles del tipo 3

Opción tipo 1: La opción se ejerce, si y sólo si, durante el tiempo de vida de la opción $L < S_t < U$. Si para algún t_0 el precio de la acción alcanza a L o U entonces la opción pierde su valor. En la figura(2.1) se muestra una opción de éste tipo, el color rojo indica que la opción pierde su valor, y el color azul o verde denota que la opción tiene valor.

Opción tipo 2: La opción se ejerce, si y sólo si, durante el tiempo de vida de la opción $S_t > L$ y, S_t, alcanza antes a la barrera superior U. Se sugiere que $L < S_0 < U$. En la figura(2.2) se muestra una opción de éste tipo, el color rojo indica que la opción pierde su valor, y el color azul denota que la opción tiene valor.

Opción tipo 3: La opción se ejerce, si y sólo si, durante el tiempo de vida de la opción $S_t > L$ y el precio de la acción, S_t, alcanza la barrera superior U por arriba. Se sugiere que $S_0 > U$. En la figura(2.3) se muestra una opción de éste tipo, el color rojo indica que la opción pierde su valor, y el color azul denota que la opción tiene valor.

Definición 2.2.2. Las opciones doble knock-out son las opciones que empiezan su vida como una opción call o put ordidaria, pero éstas dejan de tener valor y se vuelven no válidas, si el precio establecido al inicio del contrato(precio spot) toca alguna de las dos barreras.

Definición 2.2.3. Las opciones doble knock-in son las opciones que empiezan su vida inactivas en el sentido de que empiezan nulas y no válidas, y éstas llegan a tener valor sólo si el precio establecido al inicio del contrato(precio spot) toca alguna de las dos barreras.

2.3. Modelo de Black-Scholes

El modelo de valuación desarrollado por Black y Scholes [2] en 1973, formalizado y extendido en el mismo año por Merton [9] aún goza de gran popularidad.
El modelo se propuso de la siguiente manera: bajo el supuesto de equilibrio general, se desarrollo un modelo para valuar una opción europea sobre una acción que no paga dividendos, cuyo precio es conducido por un movimiento Browniano geométrico.

Esta sección la dedicaremos a obtener la ecuación diferencial parcial de segundo orden de Black-Scholes, cuando el precio del activo subyacente, digamos la acción, es conducido por un movimiento Browniano geométrico. La solución de la ecuación determina el precio de una opción europea cuando la condición final es el valor intrínseco del instrumento.

El modelo Black-Scholes toma como base los siguintes supuestos:

1. El activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato.

2. El precio del activo subyacente es conducido por un movimiento Browniano geométrico.

3. La volatilidad del precio del activo subyacente se mantiene constante.

4. Las ventas en corto del activo subyacente en cuestión son permitidas.
5. El activo subyacente se puede vender y comprar en cualquier fracción de unidad.
6. No hay costos por las transacciones realizadas.
7. El mercado opera de forma continua.
8. Existe un sistema bancario en el que los agentes pueden prestar y pedir prestado a una tasa de interés constante a todos los plazos y libre de riesgo de incumplimiento.
9. El mercado está en equilirio, es decir, no existe oportunidad de arbitraje.

2.3.1. Dinámica del Precio del Activo Subyacente y Riesgo de Mercado

Consideremos un movimiento Browniano geométrico $(W_t)_{t\in[0,T]}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^W)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$. Y supóngase además, que el precio del activo subyacente S_t, al tiempo t, es conducido por un movimiento Browniano geométrico de la forma

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \tag{2.1}$$

El parámetro de tendencia μ , representa el rendimiento medio esperado y σ la volatilidad instantánea por unidad de tiempo. El proceso dW_t modela las fluctuaciones propias del mercado del subyacente, además, se sabe que $dW_t \sim \mathcal{N}(0, dt)$.

El proceso $\{S_t\}_{t\geq 0}$ es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. En efecto, una simple aplicación del lema de Itô [15], conduce a

$$d\ln(S_t) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_t, \tag{2.2}$$

lo cual implica que

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}. \tag{2.3}$$

2.3.2. Dinámica del Precio de la Opción

El valor de una opción europea es claramente función de los distintos parámetros que intervienen en los términos del contrato, tales como, el precio de ejercicio K, la vida del contrato $T - t$. Además, es claro que el valor de la opción también depende de las propiedades del activo subyacente, es decir, de su precio, S_t, rendimiento, μ, y volatilidad, σ, así como de la tasa de interés, r, que prevalece en el mercado de crédito a fin de calcular el valor del dinero en el tiempo. De esto podemos escribir el valor de una opción como

$$C = C(S_t, t; K, T, \sigma, \mu, r). \tag{2.4}$$

Como podemos notar S_t y t son las variables relevantes en el contrato. En lo que sigue no haremos mención explícita de los demás paramétros, excepto cuando sea necesario, el valor de la opción lo denotaremos entonces como

$$C = C(S_t, t). \tag{2.5}$$

Durante el intervalo de tiempo $[t, t+dt]$, el activo subyacente cambia de S_t a $S_t + dS_t$, lo cual hace que el precio de la opción cambie de $C(S_t, t)$ a $C + dC$. Una aplicación del lema de Itô nos proporciona el cambio marginal en el precio de la opción [15], el cual se expresa como

$$dC = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}\right) dt + \frac{\partial C}{\partial S_t}\sigma S_t dW_t. \tag{2.6}$$

2.3.3. Dinámica de un Portafolio Combinado del Activo Subyacente y su Opción de Venta

Considere ahora un portafolio con w_1 unidades del activo subyacente con precio S_t y w_2 unidades de una opción de venta sobre el subyacente con precio $C(S_t, t)$. Denotemos con Π_t el valor actual del portafolio, luego entonces

$$\Pi_t = w_1 S_t + w_2 C(S_t, t). \tag{2.7}$$

Si consideramos el cambio en nuestro portafolio en el instante dt debido a fluctuaciones propias del mercado, tenemos que

$$d\Pi_t = w_1 dS_t + w_2 dC(S_t, t). \tag{2.8}$$

Sustituyendo a dS_t y a $dC(S_t, t)$ en (2.8), obtenemos

$$\begin{aligned} d\Pi_t = &\left(w_1 + w_2 \frac{\partial C}{\partial S_t}\right) \mu S_t dt \\ &+ \left(w_1 + w_2 \frac{\partial C}{\partial S_t}\right) \sigma S_t dW_t + w_2 \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right) dt. \end{aligned} \tag{2.9}$$

El término aleatorio multiplicado por dW_t, modela el riesgo de mercado del portafolio, el cual se puede eliminar si se eligen adecuadamente las cantidades w_1 y w_2 en la construcción del portafolio [15].

2.3.4. Administración del Riesgo de Mercado

Debemos elegir de manera adecuada a w_1 y w_2, de tal manera que se anule el término estocástico de la ecuación (2.9), esto es,

$$w_1 + w_2 \frac{\partial C}{\partial S_t} = 0. \tag{2.10}$$

Existen infinitas soluciones para la ecuación anterior [15].
Ejemplo: Si tomamos a $w_2 = 1$ y a $w_1 = -\frac{\partial C}{\partial S_t} := -\Delta$, se tiene

$$d\Pi_t^{\Delta} = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right) dt. \tag{2.11}$$

A la elección de w_1 y w_2 suele llamarse cobertura Delta. Debemos notar que la cobertura Delta sólo puede aplicarse en el instante dt. Si aplicamos esta cobertura a (2.7) obtenemos

$$d\Pi_t^{\Delta} = C - \Delta S_t. \tag{2.12}$$

Lo que significa que se está cubriendo una venta en corto de Δ unidades del subyacente con una opción de venta.

2.4. Ecuación Diferencial Parcial de Black-Scholes

Bajo el supuesto de equilibrio general y no arbitraje se tiene que

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right) dt = \left(-\frac{\partial C}{\partial S_t}S_t + C\right) r dt, \tag{2.13}$$

lo que equivale a

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial C}{\partial S_t}S_t r - rC = 0. \tag{2.14}$$

La ecuación anterior es conocida como la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes. Las condiciones de frontera y final para determinar una única solución son:

$$C(0,t) = 0 \ y \ C(S_t,T) = \text{máx}\,(K - S_t, 0).$$

Si todos los activos de un portafolio satisfacen la ecuación anterior, entonces el portafolio también la satisface.

La ecuación de Black-Scholes contiene todas las variables que determinan el valor del contrato y los parámetros, a saber, precio del activo subyacente, tiempo y volatilidad, pero no se hace mención del rendimiento medio esperado, μ, a éste lo hemos eliminado al anular el coeficiente de dW_t en el cambio del valor del portafolio. En lugar del rendimiento medio esperado aparece r la tasa de interés libre de riesgo. Lo que significa que si todos los participantes en el mercado de opciones están de acuerdo con el nivel de volatilidad del activo, entonces están igualmente de acuerdo con el valor de la opción.
La solución de la ecuación anterior es dada por [15]
Si denotamos como

$$\Phi(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} \exp\{-\frac{1}{2}y^2\}dy.$$

se tiene que

$$C(S_t,t) = S_t\Phi(d_1) - K\exp\{-r(T-t)\}\Phi(d_2),$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

y

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Capítulo 3

FUNCIÓN DE DENSIDAD Y FÓRMULAS PARA VALUAR OPCIONES

El presente capítulo se dedica a la obtención de la ecuación diferencial parcial hacia atrás (ecuación backward), la ecuación diferencial parcial hacia adelante (ecuación forward), la función de densidad del proceso y la función de densidad de barrera. Mediante la función de densidad condicional del precio de un activo conducido por el movimiento Browniano geométrico, obtenemos la ecuación diferencial parcial hacia atrás de Kolmogorov y la ecuación diferencial parcial de Fokker-Planck. De forma analítica, se deriva la función de transición del proceso partiendo de una ecuación forward también conocida como ecuación hacia adelante de Fokker-Plank, de manera similar se obtiene la función de densidad de los primeros alcances de las barreras, mediante la transformada inversa de Laplace utilizando integrales de contorno.

Con las expresiones analíticas que se han obtenido de la función de densidad del proceso, p y de las funciones de densidad g^+ y g^- podemos calcular el precio de varios tipos de opciones barreras dobles.

3.1. Función de Densidad Condicional del Precio de un Activo

Consideremos un movimiento Browniano geométrico $(W_t)_{t\in[0,T]}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^W)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$. Y supóngase además, que el precio del activo subyacente S_t, al tiempo t, es conducido por un movimiento Browniano geométrico neutral al riesgo

$$dS_t = S_t dt + \sigma S_t dW_t \ , \tag{3.1}$$

donde r es la tasa de interés libre de riesgo o equivalentemente el rendmiento medio esperado el cual se había denotado por μ.
Aplicando el lema de Itô al proceso (3.1) se obtiene

$$d(\ln S_t) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW_t \ . \tag{3.2}$$

Escribiendo la ecuación anterior en forma discreta, y tomando a $\Delta t = T - t$, se puede escribir

$$\ln S_T - \ln S_t = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma \mathcal{E}\sqrt{T-t}, \tag{3.3}$$

donde $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Luego entonces

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) \sim \mathcal{N}\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t), \sigma^2(T-t)\right). \tag{3.4}$$

Si ahora definimos a

$$g(\mathcal{E}) := S_T = S_t \mathrm{Exp}\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}\mathcal{E}\right\}, \tag{3.5}$$

se tiene que

$$g^{-1}(S_T) := \frac{\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \tag{3.6}$$

Así, la función de densidad de S_T dado S_t está dada por la siguiente expresión

$$f_{S_T|S_t}(s|S_t) = \phi_{\mathcal{E}}(g^{-1}(s)) \left|\frac{dg^{-1}(s)}{ds}\right|, \tag{3.7}$$

donde $\phi_{\mathcal{E}}(.)$ es la función de densidad de una variable aleatoria normal estánar. Note además que el Jacobiano de la transformación satisface

$$\left|\frac{dg^{-1}(s)}{ds}\right| = \frac{1}{s\sigma\sqrt{T-t}} \ .$$

En consecuencia, la función de densidad de S_T condicionada a S_t, es dada por la expresión siguiente

$$f_{S_T|S_t}(s|S_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma s} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2\right\}. \tag{3.8}$$

3.1.1. Ecuación Diferencial Parcial Hacia Atrás de Kolmogorov

Si definimos a $x = S_t$ y $y = s$, tenemos una forma alternativa de escribir la expresión (3.8). (Las cantidades t y x se denominan variables hacia atrás), la cual se expresa como

$$p(t,T;x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma y} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left(\frac{y}{x}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2\right\}. \tag{3.9}$$

Nótese que el precio de una opción europea de venta satisface la ecuación

$$C = E\left\{e^{-r(T-t)} \max\left(K - S_T, 0\right) | \mathcal{F}_t\right\}, \tag{3.10}$$

es decir,

$$C = e^{-r(T-t)} \int_0^\infty \max\left(K - S_T, 0\right) f_{S_T|S_t}(s|S_t) ds. \tag{3.11}$$

En términos de la notación definida anteriormente se tiene que

$$C(x,t) = e^{-r(T-t)} \int_0^K (K-y) p(t,T;x,y) dy, \tag{3.12}$$

luego,

$$e^{r(T-t)} C(x,t) = \int_0^K (K-y) p(t,T;x,y) dy. \tag{3.13}$$

De lo anterior se sigue que

$$e^{r(T-t)} \frac{\partial C}{\partial x} = \int_0^K (K-y) \frac{\partial p}{\partial x} dy. \tag{3.14}$$

De forma análoga

$$e^{r(T-t)} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \int_0^K (K-y) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} dy, \tag{3.15}$$

también

$$e^{r(T-t)} \frac{\partial C}{\partial t} - re^{(T-t)} C(x,t) = \int_0^K (K-y) \frac{\partial p}{\partial t} dy. \tag{3.16}$$

De las ecuaciones (3.14),(3.15) y (3.16) se sigue que

$$e^{r(T-t)} \left(\frac{\partial C}{\partial t} + rx \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - rC \right) =$$

$$\int_0^K (K-y) \left(\frac{\partial p}{\partial t} + rx \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) dy. \tag{3.17}$$

Observe que el paréntesis en el lado izquierdo de la expresión anterior es la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes, en consecuencia se tiene que

$$\frac{\partial p}{\partial t} + rx \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \ . \tag{3.18}$$

Esta expresión es conocida con el nombre de ecuación diferencial parcial hacia atrás de Kolmogorov. Si ahora denotamos como $\tau = T - t$ y $p = p(\tau; x, y)$, obtenemos

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = rx \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \ . \tag{3.19}$$

3.1.2. Ecuación Diferencial Parcial de Fokker-Planck

A las variables t y y en la función de densidad de S_T condicionada a S_t, se les denomina variables hacia adelante.

Considere la siguiente función de densidad condicional

$$q(t,T;y,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma y} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{x}{y}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\}. \tag{3.20}$$

La función anterior cumple que

$$\frac{\partial q}{\partial T} = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2(y^2 q)}{\partial y^2} - r\frac{\partial(yq)}{\partial y}. \tag{3.21}$$

La cual se denomina ecuación diferencial parcial de Fokker-Planck.

3.2. Obtención de la Función de Densidad de Transición del Proceso

Si se considera que el bien subyacente de la opción puede ser modelado como un movimiento Browniano geométrico, podemos modelar el logaritmo del precio del bien subyacente mediante la siguiente ecuación diferencial estocástica,

$$dz = \mu dt + \sigma dW_t, \tag{3.22}$$

donde μ y σ son constantes.

En este trabajo se pretende valuar opciones doble barrera. Esto puede ser modelado suponiendo que el proceso z deja de tener valor tan pronto como éste alcanza una de las dos barreras.

Supóngase que se tienen dos barreras, la barrera inferior se localiza en 0, la barrera superior en el nivel l. Esta especificación es general, puesto que siempre podemos desplazar el proceso z mediante una constante tal que la barrera inferior sea colocada en 0.

Sea $p(t,x;s,y)$ la función de densidad de transición , la cual describe la densidad de probabilidad de que el proceso z inicie en el tiempo t en $z(t) = x$ y sobreviva hasta el tiempo s y termine en $z(s) = y$. Por supuesto, tenemos que $t \leq s$ y $0 \leq x, y \leq l$. La función de densidad de transición $p(t,x;s,y)$ puede ser determinada por el método de separación de variables y representada en términos de una serie de Fourier, como se muestra a continuación.

Suponga que $p(t,x;s,y)$ satisface las ecuaciones backward y forward (o ecuaciones de Kolmogorov, la última también conocida como ecuación de Fokker-Plank). Utilizando la ecuación forward sujeta a las condiciones de frontera y condición inicial respectivamente

$p(.,.;s,0) = p(.,.;s,l) = 0$ y $p(t,x;t,y) = \delta(x-y)$, tenemos

$$-p_s - \mu p_y + \frac{1}{2}\sigma^2 p_{yy} = 0, \tag{3.23}$$

ahora para poder utilizar el método de separación de variables supóngase también que $p(.,.;s,y)$ se puede escribir como $p(.,.;s,y) = V(s)W(y)$. Sustituyendo en (3.23) se tiene lo siguiente [5]

$$-V^{'}(s)W(y) - \mu V(s)W^{'}(y) + \frac{1}{2}\sigma^2 V(s)W^{''}(y) \quad = \quad 0,$$

lo cual implica que

$$\frac{-V^{'}(s)}{V(s)} = \frac{\left[-\frac{1}{2}\sigma^2 W^{''}(y) + \mu W^{'}(y)\right]}{W(y)} = k, \tag{3.24}$$

donde k es la constante de separación, cuyo valor será determinado de las condiciones iniciales y de frontera. De (3.24) resulta el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$-V^{'}(s) - kV(s) \quad = \quad 0, \tag{3.25}$$

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 W^{''}(y) + \mu W^{'}(y) - kW(y) \quad = \quad 0. \tag{3.26}$$

Resolviendo (3.25) tenemos

$$\frac{-V^{'}(s)}{V(s)} = k,$$

integrando se obtiene que

$$V(s) = Ae^{-ks}.$$

Por otro lado, para resolver (3.26) se tiene que hallar el polinomio característico de la ecuación diferencial, esto es,

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + \mu u - k = 0 \ ,$$

resolviendo para u, se tiene

$$u = \frac{\mu}{\sigma^2} \pm \frac{\sqrt{\mu^2 - 2\sigma^2 k}}{\sigma^2},$$

con el fin de tener la solución deseada, es decir, los casos no triviales se supone que $\mu^2 - 2\sigma^2 k < 0$, para que las raices sean complejas, luego entonces, la solución para la ecuación diferencial (3.26) es dada por, [3]

$$W(y) = e^{\frac{\mu}{\sigma^2}y}\left\{B\cos\frac{\sqrt{\mu^2-2\sigma^2k}}{\sigma^2}y + C\,\mathrm{sen}\,\frac{\sqrt{\mu^2-2\sigma^2k}}{\sigma^2}y\right\},$$

luego, como $p(.,.;s,y) = V(s)W(y)$, se sigue que

$$p(.,.;s,y) = e^{-ks+\frac{\mu}{\sigma^2}y}\left\{D\cos\frac{\sqrt{\mu^2-2\sigma^2k}}{\sigma^2}y + E\,\mathrm{sen}\,\frac{\sqrt{\mu^2-2\sigma^2k}}{\sigma^2}y\right\},$$

donde $AB = D$ y $AC = E$.

Si aplicamos la condición de frontera $p(.,.;s,0) = 0$, se tiene que

$$p(.,.;s,0) = De^{-ks} = 0 \Rightarrow D = 0,$$

cuando aplicamos la condición de frontera $p(.,.;s,l) = 0$, obtenemos

$$p(.,.;s,l) = Ee^{-ks+\frac{\mu}{\sigma^2}l}\,\mathrm{sen}\,\frac{\sqrt{\mu^2-2\sigma^2k}}{\sigma^2}l = 0,$$

busquemos las soluciones no triviales , es decir, $E \neq 0$, entonces debemos tener que $\mathrm{sen}\,\frac{\sqrt{\mu^2-2\sigma^2k}}{\sigma^2}l = 0$, esto se da cuando

$$\frac{\sqrt{\mu^2-2\sigma^2k}}{\sigma^2}l \quad = \quad n\pi,$$

para $n = 1, 2, 3, ...$ y tomando en cuenta que $\mu^2 - 2\sigma^2k < 0$, tenemos que

$$k \quad = \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} + \frac{n^2\pi^2\sigma^2}{l^2}\right).$$

Para obtener la solución que se desea es conveniente tomar la costante de separación k como negativa.
Ahora sea [7]

$$p_n(.,.;s,y) = E_ne^{\lambda_ns+\frac{\mu}{\sigma^2}y}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{l}y,$$

donde

$$\lambda_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} + \frac{n^2\pi^2\sigma^2}{l^2}\right).$$

sólo falta analizar la condición inicial $p(t,x;t,y) = \delta(x-y)$, para esto consideremos la función

$$p(.,.;s,y) = \sum_{n=1}^{\infty}p_n(.,.;s,y) = \sum_{n=1}^{\infty}E_ne^{\lambda_ns+\frac{\mu}{\sigma^2}y}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{l}y,$$

ahora, la condición $p(t,x;t,y) = \delta(x-y)$ es equivalente a [7]

$$p(t,x;t,y)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n e^{\lambda_n t+\frac{\mu}{\sigma^2}y}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}y=\delta(x-y). \tag{3.27}$$

Considérense las siguientes propiedades de la función delta

$$\delta(x) \;=\; \delta(-x), \tag{3.28}$$

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)dx \;=\; \begin{cases} f(x_0)\text{ , si } a<x_0<b, \\ 0\text{, si } x_0<a \text{ o } b<x_0. \end{cases} \tag{3.29}$$

Como en la solución (3.27) aparecen los coeficientes E_n, los cuales no han sido determinados y, a demás se tiene de la propiedad (3.28) que la función delta de Dirac es par esto significa que las condiciones iniciales en la ecuación backward y forward son equivalentes, por éste motivo es necesario resolver la ecuación backwar, para poder determinar completamente la solución.

Pongamos la ecuación backward sujeta a las condiciones de frontera $p(t,0;.,.)=p(t,l;.,.)=0$ y condición inicial $p(s,x;s,y)=\delta(y-x)$,

$$p_t+\mu p_x+\frac{1}{2}\sigma^2 p_{xx}=0. \tag{3.30}$$

Para resolver la ecuación (3.30) se hace uso del método de separación de variables. Supóngase que $p(t,x;.,.)$ se puede escribir como $p(t,x;.,.)=V(t)W(x)$. Sustituyendo en (3.30) se tiene lo siguiente

$$V^{'}(t)W(x)+\mu V(t)W^{'}(x)+\frac{1}{2}\sigma^2 V(t)W^{''}(x) \;=\; 0,$$

lo cual implica que

$$\frac{V^{'}(t)}{V(t)}=\frac{\left[-\frac{1}{2}\sigma^2 W^{''}(x)-\mu W^{'}(x)\right]}{W(x)}=k, \tag{3.31}$$

donde k es la constante de separación, cuyo valor será determinado de las condiciones de frontera. De (3.31) resulta el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$V^{'}(t)-kV(t) \;=\; 0, \tag{3.32}$$

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 W^{''}(x)-\mu W^{'}(x)-kW(x) \;=\; 0. \tag{3.33}$$

Resolviendo (3.32) tenemos

$$\frac{V'(t)}{V(t)} = k,$$

integrando se obtiene

$$V(s) = Ae^{kt}.$$

Por otro lado, para resolver (3.33) tenemos que hallar el polinomio característico de la ecuación diferencial, esto es,

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 - \mu u - k = 0,$$

resolviendo para u, se tiene

$$u = \frac{-\mu}{\sigma^2} \pm \frac{\sqrt{\mu^2 - 2\sigma^2 k}}{\sigma^2},$$

con el fin de tener la solución deseada, es decir, los casos no triviales se supone que $\mu^2 - 2\sigma^2 k < 0$, para que las raices sean complejas, y entonces la solución para la ecuación diferencial (3.33) está dada por

$$W(y) = e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}x} \left\{ B \cos \frac{\sqrt{\mu^2 - 2\sigma^2 k}}{\sigma^2} x + C \operatorname{sen} \frac{\sqrt{\mu^2 - 2\sigma^2 k}}{\sigma^2} x \right\},$$

luego, como $p(t, x; ., .) = V(s)W(y)$, tenemos

$$p(t, x; ., .) = e^{kt - \frac{\mu}{\sigma^2}x} \left\{ D \cos \frac{\sqrt{\mu^2 - 2\sigma^2 k}}{\sigma^2} x + E \operatorname{sen} \frac{\sqrt{\mu^2 - 2\sigma^2 k}}{\sigma^2} x \right\},$$

donde $AB = D$ y $AC = E$.
Si aplicamos la condición de frontera $p(t, 0; ., .) = 0$, se sigue que

$$p(t, 0; ., .) = De^{kt} = 0, locualimplicaqueD = 0,$$

cuando aplicamos la condición de frontera $p(t, l; ., .) = 0$, obtenemos

$$p(t, l; ., .) = Ee^{kt - \frac{\mu}{\sigma^2}l} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{\mu^2 - 2\sigma^2 k}}{\sigma^2} l = 0,$$

busquemos las soluciones no triviales, es decir, $E \neq 0$, entonces debemos tener que $\sin \frac{\sqrt{\mu^2 - 2\sigma^2 k}}{\sigma^2} l = 0$, esto se da cuando

$$\frac{\sqrt{\mu^2 - 2\sigma^2 k}}{\sigma^2} l \quad = \quad n\pi,$$

para $n = 1, 2, 3, ...$ y tomando en cuenta que $\mu^2 - 2\sigma^2 k < 0$, tenemos que

$$k \quad = \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} + \frac{n^2 \pi^2 \sigma^2}{l^2} \right).$$

Para obtener la solución deseada es conviente tomar la costante de separación k como negativa.
Ahora sea [7]

$$p_n(t,x;.,.) = E_n e^{-\lambda_n t - \frac{\mu}{\sigma^2}x} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l}x,$$

donde,

$$\lambda_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} + \frac{n^2\pi^2\sigma^2}{l^2}\right) \ ,$$

sólo resta analizar la condición inicial $p(s,x;s,y) = \delta(y-x)$, para esto consideremos la función

$$p(t,x;.,.) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t,x;.,.) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-\lambda_n t - \frac{\mu}{\sigma^2}x} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l}x,$$

La condición $p(s,x;s,y) = \delta(y-x)$, usando la propiedad (3.28) es equivalente a [7]

$$p(s,x;s,y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-\lambda_n s - \frac{\mu}{\sigma^2}x} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l}x = \delta(y-x) = \delta(x-y). \tag{3.34}$$

De esto, tenemos que (3.27) es equivalente a (3.34), es decir,

$$p(s,x;s,y) = \delta(y-x) = p(t,x;t,y) = \delta(x-y),$$

luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-\lambda_n s - \frac{\mu}{\sigma^2}x} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l}x = \sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{\lambda_n t + \frac{\mu}{\sigma^2}y} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l}y = \delta(x-y) \ .$$

De lo anterior se sigue que los E_n son los coeficientes de la serie de Fourier de senos de $\delta(x-y)$ [7], es decir,

$$E_n = \frac{2}{l}\int_0^l \delta(y-x) e^{\lambda_n t + \frac{\mu}{\sigma^2}y} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} y dx. \tag{3.35}$$

Usando las propiedades (3.28) y (3.29) se tiene que

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \delta(x-y) e^{\lambda_n t + \frac{\mu}{\sigma^2}y} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} y dx \\ &= \frac{2}{l} e^{\lambda_n t + \frac{\mu}{\sigma^2}y} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} y. \end{aligned}$$

Finalmente, tenemos que la función de densidad de transición del proceso se escribe como

$$p(t,x;s,y) = e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(y-x)} \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n (s-t)} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} y. \tag{3.36}$$

La anterior caracterización de la función de densidad de que el proceso sobreviva hasta el tiempo s es usada para calcular los precios de opciones doble knock-out, en específico para las opciones que caducan tan pronto como una de las barreras es alcanzada.

3.3. Obtención de las Funciones de Densidad de las Barreras

Ahora nuestro interés es la función de densidad de alcanzar la barrera superior y la barrera inferior.

Sea $g^+(t,x;s)$ la función de densidad de alcanzar primero la barrera superior hasta el tiempo s, antes de alcanzar la barrera inferior, esta función de densidad satisface la ecuación backward

$$g_t^+ + \mu g_x^+ + \frac{1}{2}\sigma^2 g_{xx}^+ = 0,$$

Debido a que μ y σ son constantes, entonces $g^+(t,x;s)$ depende unicamente de $s-t$. Sea $\tau = s-t$, con $\tau > 0$, podemos escribir $g^+(t,x;s) = g^+(\tau,x)$, asi la ecuación backward se expresa como

$$-g_\tau^+ + \mu g_x^+ + \frac{1}{2}\sigma^2 g_{xx}^+ = 0, \tag{3.37}$$

sujeta a $g^+(\tau,l) = \delta(\tau)$, $g^+(0,x) = \delta(l-x)$ y $g^+(\tau,0) = 0$.
Para hallar una expresión de g^+ considere la transformada de Laplace

$$\gamma^+(x;v) = \int_0^\infty e^{-v\tau} g^+(\tau,x)d\tau,$$

para algún $v \geq 0$. Sustituyendo γ^+ en (3.37) y de las condiciones de frontera, (3.37) se expresa ahora como [11, 12],

$$-v\gamma^+ + \mu\gamma_x^+ + \frac{1}{2}\sigma^2\gamma_{xx}^+ = 0, \tag{3.38}$$

sujeta a las condiciones $\gamma^+(0) = 0$ y $\gamma^+(l) = 1$. Para hallar la solución de la anterior ecuación diferencial, se determina el polinomio característico, esto es,

$$\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + \mu u - v = 0,$$

resolviendo para u se tiene que

$$u = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 v}}{\sigma^2}.$$

Para no tener soluciones triviales, suponemos como antes que $\mu^2 + 2\sigma^2 v < 0$, de esta manera las raíces son complejas y así la solución de la ecuación diferencial es [3],

$$\gamma^+(x) = e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}x}(A\,\mathrm{senh}(\theta x) + B\cosh(\theta x)),$$

donde

$$\theta = \frac{1}{\sigma^2}\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 v}.$$

los coeficientes son determinados de las condiciones de frontera, como se muestra a continuación

$$\gamma^+(0) = B = 0,$$

$$\gamma^+(l) \;=\; e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}l} A \operatorname{senh}(\theta l) = 1,$$

luego

$$A = \frac{e^{\frac{\mu}{\sigma^2}l}}{\operatorname{senh}(\theta l)},$$

ahora representemos con $\theta(v) = \frac{1}{\sigma^2}\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 v}$, por la dependencia que se tiene de v, de lo anterior tenemos que la solución particular de (3.38) se expresa como

$$\gamma^+(x; v) = e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x)} \frac{\operatorname{senh}(\theta(v)x)}{\operatorname{senh}(\theta(v)l)} \;,$$

Para obtener g^+ tenemos que invertir la transformada de Laplace γ^+. Para esto consideremos que γ^+ es una función en la variable compleja z, que es analítica sobre el plano z, salvo en un número finito de singularidades. Sea L_R un segmento de recta vertical y $z = c + i\tau$, $(-R \leq \tau \leq R)$, donde la constante c es positiva y lo suficiente grande como para que el segmento esté a la derecha de todas las singularidades, entonces g^+ de variable real τ se define de la siguiente manera para valores positivos de τ [14],

$$g^+(\tau, x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to\infty} \int_{L_R} e^{\tau z} \gamma^+(x; z) dz, \tag{3.39}$$

suponiendo que el límite existe.

Los residuos se utilizan con frecuencia para calcular el límite en la expresión (3.39). Sean $z_1, z_2, ..., z_k$ las singularidades de $\gamma^+(x; z)$. Denotemos ahora como R_0 el mayor de sus módulos, y consideremos un semicírculo C_R con representación paramétrica

$$z = c + Re^{i\theta},$$

donde $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ y $c + R_0 < R$. Nótese ahora, que para cada singularidad z_k

$$|z_k - c| \leq |z_k| + c \leq c + R_0 < R.$$

Así logramos que todas las singularidades esten en el interior de la región semicircular limitada por C_R y L_R, la cual denotaremos con Φ

La ventaja de agregar C_R a la integral de línea para transformarla en integral de contorno es que esta trayectoria no tiene contribución en la integral, pues ésta se desvanece cuando R tiende a infinito. Así tenemos, por el Teorema de los Residuos de Cauchy [14] que

$$\oint_{\Phi} e^{\tau z} \gamma^+(x; z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{z=z_k} \left[e^{\tau z} \gamma^+(x; z) \right]. \tag{3.40}$$

Ahora, de la teoría de funciones complejas, sabemos que el residuo de las singularidades z_k es igual al coeficiente a_{-1} de la expansión de Laurent,

$$e^{\tau z}\gamma^{+}(x;z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left(z - z_k\right)^n , \tag{3.41}$$

alrededor de la singularidad z_k.
La parte positiva de la serie (3.41) es la expansión de Taylor, la parte negativa involucra una potencia negativa de $z - z_k$, la cual da el comportamiento de la singularidad. La potencia negativa más grande en la expansión de Laurent nos da el orden de la singularidad. Para una singularidad de orden n el residuo se calcula como sigue [14],

$$res\left[e^{\tau z}\gamma^{+}(x;z)\right] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_k} \frac{d^{(n-1)}}{dz^{n-1}} \left[(z - z_k)^n \ e^{\tau z}\gamma^{+}(x;z)\right].$$

Luego como nuestro caso se reduce a una singularidad de primer orden, se tiene que

$$res\left[e^{\tau z}\gamma^{+}(x;z)\right] = \lim_{z\to z_k} \left(z - z_k\right) \ e^{\tau z}\gamma^{+}(x;z). \tag{3.42}$$

La tarea ahora es encontrar las singularidades en la expresión $e^{\tau z}\gamma^{+}(x;z)$ y éstas sólo pueden ser ocasionadas cuando el término en el denominador de $\gamma^{+}(x;z)$ se hace cero. Usando la identidad $\operatorname{senh}(z) = -i \operatorname{sen}(iz)$, encontramos que $\operatorname{senh}(\theta(z)l) = -i \operatorname{sen}(i\theta(z)l)$ es cero si $i\theta(z)l = k\pi$, $k = 1, 2, 3, ...$ entonces, despejando a z tenemos que

$$\theta(z) = \frac{k\pi}{il},$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{\sigma^2}\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 z} &= \tfrac{k\pi}{il}, \\
\tfrac{1}{\sigma^4}\left(\mu^2 + 2\sigma^2 z\right) &= -\tfrac{k^2\pi^2}{l^2}, \\
z &= -\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\mu^2}{\sigma^2} + \tfrac{k^2\pi^2\sigma^2}{l^2}\right).
\end{aligned}$$

Tomando a $z_k = z$, por la dependencia que se tiene de k.
Además, observe que cuando

$$z \to z_k, \quad \theta(z) = \frac{ik\pi}{l}.$$

Regresando a la ecuación (3.42) se obtiene que

$$\begin{aligned}
res\left[e^{\tau z}\gamma^{+}(x;z)\right] &= \lim_{z\to z_k} \left(z - z_k\right) e^{\tau z} e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x)} \frac{\operatorname{senh}(\theta(z)x)}{\operatorname{senh}(\theta(z)l)} \\
&= e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x)} e^{z_k\tau} \operatorname{senh}\left(\frac{ik\pi}{l}x\right) \lim_{z\to z_k} \frac{(z - z_k)}{\operatorname{senh}(\theta(z)l)},
\end{aligned}$$

usando la regla de L´Hospital se obtiene

$$
\begin{aligned}
res\left[e^{\tau z}\gamma^{+}(x;z)\right] &= e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x)}e^{z_k\tau}\operatorname{senh}\left(\frac{ik\pi}{l}x\right)\lim_{z\to z_k}\frac{1}{\cosh(\theta(z)l)\frac{\partial\theta}{\partial z}l} \\
&= e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x)}e^{z_k\tau}\operatorname{senh}\left(\frac{ik\pi}{l}x\right)\frac{1}{\cosh(ik\pi)\frac{l^2}{ik\pi\sigma^2}} \\
&= e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x)}e^{z_k\tau}\operatorname{senh}\left(\frac{ik\pi}{l}x\right)\frac{1}{\cos(k\pi)}\frac{ik\pi\sigma^2}{l^2} \\
&= e^{z_k\tau}e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x)}\frac{\sigma^2}{l^2}k\pi\operatorname{sen}\left(-\frac{k\pi}{l}x\right)\cos(k\pi) \\
&\quad +\operatorname{sen}(k\pi)\cos\left(-\frac{k\pi}{l}x\right) \\
&= e^{z_k\tau}e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x)}\frac{\sigma^2}{l^2}k\pi\operatorname{sen}\left(k\pi\frac{(l-x)}{l}\right).
\end{aligned}
$$

Una vez que se han encontrado los residuos podemos determinar a g^+ la cual resulta ser la suma infinita de los residuos [11, 12],

$$
g^+(t,x;s) = e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x)}\frac{\sigma^2}{l^2}\sum_{k=1}^{\infty}e^{z_k\tau}k\pi\operatorname{sen}\left(k\pi\frac{(l-x)}{l}\right)
$$

$$
= e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x)}\frac{\sigma^2}{l^2}\sum_{k=1}^{\infty}e^{z_k(s-t)}k\pi\operatorname{sen}\left(k\pi\frac{(l-x)}{l}\right), \tag{3.43}
$$

donde $\tau = s-t$.

También se tiene que g^- satisface la ecuación backward, es decir,

$$
g_t^- + \mu g_x^- + \frac{1}{2}\sigma^2 g_{xx}^- = 0,
$$

observemos además que $g^-(t,x;s)$ depende unicamente de $s-t$, sea $\tau = s-t$, luego entonces $g^-(t,x;s) = g^-(\tau,x)$, así (3.43) se convierte en

$$
-g_\tau^- + \mu g_x^- + \frac{1}{2}\sigma^2 g_{xx}^- = 0, \tag{3.44}
$$

sujeta a las condiciones de frontera $g^-(\tau,0) = \delta(\tau)$, $g^-(0,x) = \delta(x-0)$ y $g^-(\tau,l) = 0$. Si ahora definimos a

$$
\gamma^-(x;v) = \int_0^\infty e^{-\tau z}g^-(\tau,x)dz, \qquad \text{para } \ v \geq 0.
$$

Sustituyendo γ^- en (3.44) se obtiene

$$
-v\gamma^- + \mu\gamma_x^- + \frac{1}{2}\sigma^2\gamma_{xx}^- = 0, \tag{3.45}
$$

sujeta a las condiciones de frontera $\gamma^-(l) = 0$ y $\gamma^-(0) = 1$.
La ecuación diferencial (3.45) es la misma que (3.38) por lo que la solución general es [3],

$$\gamma^-(x) = e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}x}(A\,\mathrm{senh}(\theta x) + B\cosh(\theta x)),$$

donde,

$$\theta = \frac{1}{\sigma^2}\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 v},$$

los coeficientes se determinan de las condiciones de frontera

$$\gamma^-(0) = B = 1,$$

$$\gamma^-(l) \;=\; e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}l}(A\,\mathrm{senh}(\theta l) + \cosh(\theta l)) = 0,$$

lo cual implica que

$$A = \frac{-\cosh(\theta l)}{\mathrm{senh}(\theta l)},$$

ahora representemos con $\theta(v) = \frac{1}{\sigma^2}\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 v}$, por la dependencia que se tiene de v, de esta manera

$$\gamma^-(x) \;=\; e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}x}\left[\frac{-\cosh(\theta(v)l)\,\mathrm{senh}(\theta(v)x)}{\mathrm{senh}(\theta(v)l)} + \frac{\cosh(\theta(v)x)\,\mathrm{senh}(\theta(v)l)}{\mathrm{senh}(\theta(v)l)}\right]$$

$$= e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}x}\frac{\mathrm{senh}(\theta(v)(l-x))}{\mathrm{senh}(\theta(v)l)}. \tag{3.46}$$

Note que

$$\gamma^-(x) = e^{-2\frac{\mu}{\sigma^2}x}\gamma^+(l-x).$$

Haciendo la respectiva sustitución en (3.42) se tiene

$$g^-(t,x;s) = e^{\frac{-\mu}{\sigma^2}x}\frac{\sigma^2}{l^2}\sum_{k=1}^{\infty} e^{z_k(s-t)}k\pi\,\mathrm{sen}\left(k\pi\frac{x}{l}\right). \tag{3.47}$$

3.4. Fórmulas de Valuación

En los casos que se analizarán, se toma el bien subyacente como una razón F/X. Sea S_t el spot de tasa cambiaria el día de hoy, r_d la tasa de interés doméstico, r_f la tasa de interés extranjero y σ la volatilidad de la tasa cambiaria. Sea U que denota la barrera superior, L la barrera inferior las cuales satisfacen que,

$$L < S_t < U.$$

Dividiendo entre L y tomando logaritmo, se tiene que,

$$0 < \frac{S_t}{L} < U$$

así tenemos que, para $s > t$,

$$z(s) = \log\left(\frac{S_s}{L}\right)$$

donde z es el proceso definido anteriormente, con $x = z(t) = \log(\frac{S_t}{L})$, de lo cual se tiene que

$$l = \log\left(\frac{U}{L}\right) \ .$$

El término flotante μ del proceso z es igual (bajo la equivalente medida de martingala) a

$$\mu = r_d - r_f - \frac{1}{2}\sigma^2$$

Denotemos con T la fecha de vencimiento en todas las opciones [11, 12].

3.4.1. Opciones que Pagan una Cantidad Constante al Vencimiento

Los opciones que pagan una cantidad constante en la fecha de vencimiento, son un tipo de opciones barrera doble que se considera en este trabajo.

Supóngase que se recibe una cantidad K_U si la barrera superior se alcanza primero, una cantidad K_L si la barrera inferior se alcanza primero y una cantidad K si ninguna barrera se alcanza durante la vida de la opción. Cualquier cantidad que se pague será en la fecha de vencimiento.

Sea S_T el precio del bien subyacente al finalizar el contrato, si durante el tiempo de vida de la opción el precio del bien subyacente está por arriba de S_T se ejerce la opción, pero nos interesa conocer el precio del bien subyacente cuando éste está por debajo de S_T, el cual es dado por la siguiente expresión.

$$V_{CPM}(t) = e^{-r_d(T-t)} S_T \ . \tag{3.48}$$

Si $P^+(T)$ y $P^-(T)$ denotan la probabilidad de alcanzar primero la barrera superior y la barrera inferior respectivamente antes del tiempo T. Denotemos con $P(S)$ la probabilidad de que el proceso sobreviva hasta el tiempo T, la cual es dada por

$$P(S) = 1 - P^+(T) - P^-(T) \ .$$

De esto se tiene que,

$$S_T = K_U P^+(T) + K_L P^-(T) + K(1 - P^+(T) - P^-(T)).$$

Finalmente,

$$V_{CPM}(t) = e^{-r_d(T-t)}(K_U P^+(T) + K_L P^-(T) + K(1 - P^+(T) - P^-(T))). \tag{3.49}$$

La tarea ahora es encontrar P^+ y P^-, para esto, se tiene que integrar a las densidades de barrera, obtenidas anteriormente. Es decir,

$$\begin{aligned} P^{\pm}(T) &= \int_t^T g^{\pm}(t,x;s)ds \\ &= \int_t^{\infty} g^{\pm}(t,x;s)ds - \int_T^{\infty} g^{\pm}(t,x;s)ds \end{aligned}$$

$$= \gamma^{\pm}(x;0) - \int_T^{\infty} g^{\pm}(t,x;s)ds. \tag{3.50}$$

Donde,

$$\gamma^+(x;0) = e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x)}\frac{\operatorname{senh}(\frac{\mu}{\sigma^2}x)}{\operatorname{senh}(\frac{\mu}{\sigma^2}l)}, \tag{3.51}$$

y

$$\gamma^-(x;0) = e^{\frac{-\mu}{\sigma^2}x}\frac{\operatorname{senh}(\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x))}{\operatorname{senh}(\frac{\mu}{\sigma^2}l)}. \tag{3.52}$$

De las expresiones encontradas para g^+ y para g^- se tiene que

$$\begin{aligned} \int_T^{\infty} g^+(t,x;s)ds &= \int_T^{\infty} e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x)}\frac{\sigma^2}{l^2}\sum_{k=1}^{\infty} e^{z_k(s-t)} k\pi \operatorname{sen}(k\pi\frac{(l-x)}{l})ds \\ &= e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x)}\frac{\sigma^2}{l^2}\sum_{k=1}^{\infty} k\pi \operatorname{sen}(k\pi\frac{(l-x)}{l})\int_T^{\infty} e^{z_k(s-t)}ds \\ &= e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x)}\frac{\sigma^2}{l^2}\sum_{k=1}^{\infty} k\pi \operatorname{sen}(k\pi\frac{(l-x)}{l})\left[\frac{e^{z_k(s-t)}}{z_k}\right]_T^{\infty}. \end{aligned}$$

Observe que

$$z_k = -\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\sigma^2} + \frac{k^2\pi^2\sigma^2}{l^2}\right) = -\lambda_k,$$

luego

$$\int_T^{\infty} g^+(t,x;s)ds = e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x)}\frac{\sigma^2}{l^2}\sum_{k=1}^{\infty} k\pi \operatorname{sen}(k\pi\frac{(l-x)}{l})\left[\frac{e^{-\lambda_k(T-t)}}{\lambda_k}\right]. \tag{3.53}$$

De manera similar se tiene que

$$\begin{aligned}\int_T^\infty g^-(t,x;s)ds &= \int_T^\infty e^{\frac{-\mu}{\sigma^2}x}\frac{\sigma^2}{l^2}\sum_{k=1}^\infty e^{z_k(s-t)}k\pi\,\mathrm{sen}(k\pi\frac{x}{l})ds\\ &= e^{\frac{-\mu}{\sigma^2}x}\frac{\sigma^2}{l^2}\sum_{k=1}^\infty k\pi\,\mathrm{sen}(k\pi\frac{x}{l})\int_T^\infty e^{z_k(s-t)}ds\\ &= e^{\frac{-\mu}{\sigma^2}x}\frac{\sigma^2}{l^2}\sum_{k=1}^\infty k\pi\,\mathrm{sen}(k\pi\frac{x}{l})\left[\frac{e^{z_k(s-t)}}{z_k}\right]_T^\infty.\end{aligned}$$

Observe que

$$z_k=-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\sigma^2}+\frac{k^2\pi^2\sigma^2}{l^2}\right)=-\lambda_k,$$

de aquí,

$$\int_T^\infty g^-(t,x;s)ds = e^{\frac{-\mu}{\sigma^2}x}\frac{\sigma^2}{l^2}\sum_{k=1}^\infty k\pi\,\mathrm{sen}(k\pi\frac{x}{l})\left[\frac{e^{-\lambda_k(T-t)}}{\lambda_k}\right]. \tag{3.54}$$

De (3.53) y (3.54) se obtienen las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}P^+(T) &= e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x)}\frac{\mathrm{senh}(\frac{\mu}{\sigma^2}x)}{\mathrm{senh}(\frac{\mu}{\sigma^2}l)}\\ &\quad -e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x)}\frac{\sigma^2}{l^2}\sum_{k=1}^\infty k\pi\,\mathrm{sen}(k\pi\frac{(l-x)}{l})\left[\frac{e^{-\lambda_k(T-t)}}{\lambda_k}\right]\end{aligned}$$

$$= e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x)}\left(\frac{\mathrm{senh}(\frac{\mu}{\sigma^2}x)}{\mathrm{senh}(\frac{\mu}{\sigma^2}l)}-\frac{\sigma^2}{l^2}\sum_{k=1}^\infty\frac{e^{-\lambda_k(T-t)}}{\lambda_k}k\pi\,\mathrm{sen}(k\pi\frac{l-x}{l})\right), \tag{3.55}$$

$$P^-(T) = e^{\frac{-\mu}{\sigma^2}x}\frac{\mathrm{senh}(\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x))}{\mathrm{senh}(\frac{\mu}{\sigma^2}l)}-e^{\frac{-\mu}{\sigma^2}x}\frac{\sigma^2}{l^2}\sum_{k=1}^\infty k\pi\,\mathrm{sen}(k\pi\frac{x}{l})\left[\frac{e^{-\lambda_k(T-t)}}{\lambda_k}\right]$$

$$= e^{\frac{-\mu}{\sigma^2}x}\left(\frac{\mathrm{senh}(\frac{\mu}{\sigma^2}(l-x))}{\mathrm{senh}(\frac{\mu}{\sigma^2}l)}-\frac{\sigma^2}{l^2}\sum_{k=1}^\infty\frac{e^{-\lambda_k(T-t)}}{\lambda_k}k\pi\,\mathrm{sen}(k\pi\frac{x}{l})\right). \tag{3.56}$$

Con lo que queda determinada la expresión(3.49).

3.4.2. Opciones Doble Knock-out en su Versión Put

Supóngase que tenemos una opción put doble knock-out, con un pago igual al $\max(K - S_T, 0)$, si el precio del activo subyacente, S_t, nunca alcanza alguna de las barreras durante el tiempo de vida de la opción $[t, T]$, el valor de la opción al tiempo t está dado por la siguiente expresión

$$V_{DKOP}(t) = e^{-r_d(T-t)} \int_0^l \max(K - Le^y, 0) p(t, x; T, y) dy. \tag{3.57}$$

Observe que los casos son triviales para $Le^y \leq K$, luego entonces sólo consideremos el caso en el que la opción es en dinero, $Le^y > K$, esto ocurre si y sólo si, $y > \log(\frac{K}{L}) = d$. Ahora, si asumimos que $0 \leq d \leq l$, se sigue que

$$V_{DKOP}(t) = e^{-r_d(T-t)} \int_d^l (K - Le^y) p(t, x; T, y) dy,$$

$$V_{DKOP}(t) = e^{-r_d(T-t)} \left(K \int_d^l p(t, x; T, y) dy - L \int_d^l e^y p(t, x; T, y) dy \right). \tag{3.58}$$

Note que en ambos integrandos aparece implícito el término primitivo de la forma $e^{ay} \operatorname{sen}(by)$. Además, de la teoría de cálculo integral de variables reales se tiene que una primitiva de este término es

$$\int e^{ay} \operatorname{sen}(by) dy = e^{ay} \frac{a \operatorname{sen}(by) - b \cos(by)}{a^2 + b^2}.$$

Definamos a,

$$Q(\alpha, y) = \int e^{\alpha y} p(t, x; T, y) dy.$$

Usando la primitiva dada anteriorente, se tiene que

$$\begin{aligned} Q(\alpha, y) = {} & \frac{2}{l} e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(y-x)} e^{\alpha y} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k (T-t)} \operatorname{sen}(k\pi \frac{x}{l}) \left(\frac{(\frac{\mu}{\sigma^2} + \alpha) \operatorname{sen}(k\pi \frac{y}{l})}{(\frac{\mu}{\sigma^2} + \alpha)^2 + \frac{k^2\pi^2}{l^2}} \right) \\ & - \frac{2}{l} e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(y-x)} e^{\alpha y} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k (T-t)} \operatorname{sen}(k\pi \frac{x}{l}) \left(\frac{\frac{k\pi}{l} \cos(k\pi \frac{y}{l})}{(\frac{\mu}{\sigma^2} + \alpha)^2 + \frac{k^2\pi^2}{l^2}} \right). \end{aligned} \tag{3.59}$$

De esta manera el valor de la opción put doble knock-out puede ser expresada como se muestra a continuación

$$V_{DKOP}(t) = e^{-r_d(T-t)} \left(K[(Q(0, d) - Q(0, 0))] - L[(Q(l, d) - Q(1, 0))] \right). \tag{3.60}$$

La última expresión, también es cierta para opciones en las que el pago depende de S_T^α. El pago de una opción put normal se tiene cuando $\alpha = 1$.

CONCLUSIONES

En la presente tesis se analizó el modelo de valuación desarrollado por Black y Scholes [2] en 1973, formalizado y extendido en el mismo año por Merton [9]. El modelo de valuación de Black y Scholes es en realidad un modelo de cobertura, ya que éste está constituido de tal forma que una parte se compone de acciones y la otra de bonos [10].

Una vez establecido el modelo de valuación, se obtiene la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes, posteriormente se llega a la función de densidad condicional del precio de un activo, esta función de densidad satisface la ecuación diferencial parcial hacia atrás (backward) de Kolmogorov y la ecuación diferencial parcial hacia adelante (forward) de Fokker-Planck.

Resolviendo la ecuación diferencial parcial hacia adelante de Fokker-Planck (o ecuación forward) por el método de separación de variables y asumiendo que el precio del bien subyacente es conducido por un movimiento Browniano geométrico, se obtiene la función de densidad del proceso, la cual se representa en términos de una serie de Fourier. De forma análoga se obtienen las funciones de densidad de las barreras, mediante la transformada inversa de Laplace utilizando integrales de contorno.

Con dichas expresiones para la función de densidad del proceso y para las funciones de densidad de las barreras, ya se dispone de las herramientas necesarias, para poder obtener las fórmulas para valuar opciones barreras doble knock-out y doble knock-in en sus versiones call y put. Sin embargo, en este trabajo sólo nos limitamos a valuar opciones doble knock-out en su versión put.
Para trabajos posteriores se tiene lo siguiente:

1. Determinar expresiones para valuar opciones barreras doble knock-out y doble knock-in, mediante la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes utilizando una aproximación a través de funciones de Green.

2. Determinar expresiones para valuar opciones doble knock-out y doble knock-in, mediante el método de reflexión utilizando una aproximación normal.

Bibliografía

[1] Bachelier L.
Thèorie de Speculation, Thèsis de Docteur és Sciences Mathématques
Université Paris Sorbonne. Gauthier-Villars, Paris, 1900

[2] Black F. and Scholes M.
The Pricing of Options and Corporate Liabilities
The Journal of Political Economy, vol.81. No.3, 1973

[3] Boyce W., DiPrima R.
Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera
Ed. Limusa Wiley, 2007

[4] Brown R.
A Brief Account on the Particles Contained in the Pollen of Plants; and on the General Existence of Active Molecules in Organic And Inorganic Bodies
Edinburgh New Philosofical Journal, July-September, 1828

[5] Cox R. D. and Miller H. D.
Theory of Stochastic Processes
Ed. Chapman and Hall, 1972

[6] Klebaner F. C.
Introduction to Stochastic Calculus With Applicationes
Ed. Imperial Collage Press, 2005

[7] Hernández L. O.
Métodos de Fourier: en la Física y en la Ingeniería
Ed. Trillas, 1973

[8] Hui C.H., Lo C.F., Yuen P.H.
Comment on Pricing Duble Barrier Options Using Laplace Transforms by Antoon Pelsser

Finance Stohastic,4, 105-107, 2000

[9] Merton R. C.
Theory of Rational Option Pricing
Bell Journal of Economic and Management Science, Vol.4 No.1, 1973

[10] Musiela M. and Rutkowski M.
Martingale Methods in Financial Modelling
Ed. Springer, 1997

[11] Pelsser A.
Pricing Duble Barrier Options: An Analytical Approach
Deparment of Finance, 1997

[12] Pelsser A.
Pricing Duble Barrier Options Using Laplace transforms
Finance Stohastic, 95-104, 2000

[13] Samuelson P. A.
Rational Theory of Warrent Prices
Industrial Management Review vol.6. No.2, 1965

[14] Vence Churchill R., Ward B. J.
Variable Compleja y Aplicaciones
Ed. McGraw-Hill, 1992

[15] Venegas M. F.
Riesgos financieros y económicos Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre
Ed. CENGAGE Learning, 2008