

**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS**



**Solución del problema inverso de la tomografía de
capacitancias, para un fluido bifásico con una inclusión
circular**

**TESIS PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADO EN
MATEMÁTICAS APLICADAS**

Autor: AURELIO REYES MORA

Director de tesis: DR. ANDRÉS FRAGUELA COLLAR

Codirector de tesis: DR. EMMANUEL ABDIAS ROMANO
CASTILLO

Tesis realizada con el apoyo económico del proyecto PRODEP, clave
UTMIX-PTC-068
7 de agosto de 2020

DEDICATORIA

En especial para mi familia

AGRADECIMIENTO

A mi familia por su apoyo incondicional a lo largo de la carrera, por sus consejos, observaciones, ánimos y en especial a mi hermana la DRA. SILVIA REYES MORA, también quiero agradecer al DR. ANDRÉS FRAGUELA COLLAR por su apoyo por dirigir este trabajo de tesis, al DR. EMMANUEL ABDIAS ROMANO CASTILLO por su ayuda brindada durante este proceso.

ÍNDICE

| | |
|---|-----------|
| RESUMEN | 2 |
| I. Introducción | 3 |
| 1.1. Tomografía de Capacitancia Eléctrica | 6 |
| 1.2. Modelado matemático de la TCE | 9 |
| 1.2.1. Deducción de la ecuación $\text{div}(\epsilon \nabla V) = 0$ | 12 |
| 1.2.2. Deducción de las condiciones en la frontera | 14 |
| 1.2.3. El modelo y planteamiento del problema | 17 |
| 1.2.4. Marco teórico | 26 |
| II. Formulación débil del problema inverso | 27 |
| 2.1. Conceptos básicos | 27 |
| 2.1.1. Algunas definiciones de la Física | 28 |
| 2.1.2. Algunos conceptos de Análisis funcional | 29 |
| 2.1.3. Espacios de Sobolev | 32 |
| 2.2. Formulación débil del problema de contorno en $\Omega_1 \cup \Omega_2$ | 33 |
| 2.3. Planteamiento débil del problema inverso en Ω_1 | 36 |
| III. Solución del problema inverso | 38 |
| 3.1. Información a priori sobre la solución | 38 |
| 3.2. Solución del problema en término de la condición de irrotacionalidad | 39 |
| 3.3. Aproximación de la solución del problema inverso | 43 |
| 3.4. Solución del problema inverso cuando se tiene una inclusión circular | 49 |
| 3.5. Experimentos numéricos | 54 |

RESUMEN

En esta tesis se presenta un modelo matemático para la tomografía de capacitancia eléctrica y se estudia la deducción del mismo. Posteriormente se plantea el problema inverso de identificación de la permitividad, en término de la solución débil de un problema de contorno. Se propone un método para resolver el problema inverso, para el caso que se tiene un fluido compuesto por dos fases, cada una con permitividad diferente y en la que una de ellas es una inclusión circular.

Este método de solución propuesto, se basa fuertemente en el conocimiento de valores de permitividad en ciertos puntos en el interior de la región de estudio, los cuales se obtienen en una tesis doctoral en curso a partir del conocimiento de las capacitancias mutuas. Por lo que, a partir la aproximación a esos datos, se obtiene la reconstrucción de la permitividad dentro de la región de estudio.

Capítulo I

Introducción

La producción de un pozo petrolero es una mezcla compleja que contiene principalmente aceite, agua y gas, cuya medición implica grandes dificultades. Existe un método tradicional para realizar la medición, que consiste en separar la mezcla en sus tres componentes, los cuales se miden independientemente usando métodos convencionales de medición de flujo monofásico, como placa de orificio para el gas y turbina para el aceite. Estos métodos, tienen la desventaja de que los separadores trifásicos requeridos son excesivamente voluminosos, tienen un alto costo de instalación y necesitan una atención considerable para su operación y mantenimiento. Por lo tanto, se necesita contar con un medidor de flujo multifásico relativamente simple, que permita medir directamente cada componente sin necesidad de efectuar la separación de la mezcla. El medidor de flujo multifásico ideal tendría, entre otras, las siguientes características:

1. No invasor, para evitar caídas de presión y la erosión del sensor.

2. Respuesta inmediata, para proporcionar una retroalimentación instantánea al operador de producción.
3. Medición en línea, para evitar problemas de representatividad de la muestra.
4. Alta confiabilidad (sin partes móviles) para minimizar el costo del mantenimiento.
5. Independiente del régimen o patrón de flujo.

En los últimos años se han realizado grandes esfuerzos a nivel mundial por desarrollar medidores de flujo multifásico, y actualmente hay varios modelos disponibles en el mercado, basados en diversos principios. Sin embargo, ninguno de ellos ha resultado ser cien por ciento satisfactorio, y todos presentan limitaciones son sensibles, en mayor o menor medida, a los cambios en el régimen de flujo; la mayoría requiere que el flujo sea homogéneo para alcanzar una exactitud aceptable, condición que en ocasiones no es posible lograr, sobre todo en tuberías inclinadas u horizontales.

En el futuro, habrá una demanda creciente de medidores de flujo multifásico para ser instalados en el fondo marino y aún dentro de los mismos pozos. En estos casos el régimen de flujo puede ser diferente de la mezcla homogénea ideal, y se ahorraría en los costos de bombeo y mantenimiento si se pudiera prescindir de los mezcladores en línea. Para ello, los medidores de flujo multifásico de la próxima generación deberán ser independientes del régimen de flujo.

A diferencia de los medidores actuales, cuya correcta operación depende de la distribución de componentes en la mezcla, el empleo de técnicas tomográficas de visualización de flujo permite la posibilidad de desarrollar un nuevo tipo de medidor de flujo multifásico conceptualmente simple, insensible a las variaciones del régimen de flujo, y cuyas características se acercan mucho a las del medidor ideal. Alternativamente, la tomografía puede ser empleada como un instrumento para determinar el régimen de flujo, y así poder compensar los efectos del mismo en los medidores actuales.

En términos generales, la tomografía (cuyo nombre se deriva del griego *tomos*, que significa corte o sección) sirve para obtener una imagen del corte transversal de un objeto en un plano determinado. La tomografía de rayos *X* fue la primera en ser desarrollada (en la década de los setenta) y actualmente se usa de manera rutinaria en el área médica, así como en algunas aplicaciones industriales para realizar inspección interna de piezas y detección de fallas en materiales, por ejemplo.

Posteriormente, se han venido desarrollando nuevos métodos de tomografía orientados más bien a procesos industriales, conocidos con el nombre genérico de tomografía de procesos. La finalidad de estos métodos, es obtener una imagen de la distribución de fases o componentes en un proceso industrial, usando únicamente sensores externos y sin causar alguna perturbación en el proceso. Esto representa un modo radicalmente distinto de obtener información estructural del proceso a nivel global, a diferencia de los métodos tradicionales, que se basan en el muestreo local en un

determinado número de puntos. El proceso puede ocurrir en un reactor o mezcladora, en un lecho fluidizado, en el interior de un separador, o dentro de una tubería transportando flujo multifásico, por poner algunos ejemplos.

Existen diferentes principios y técnicas que pueden ser explotados en la tomografía de procesos, incluyendo métodos eléctricos basados en la medición de impedancia, ultrasónicos, de resonancia magnética, ópticos, y a base de radiación ionizante (rayos X o gama). En general, los métodos de radiación ionizante producen las imágenes de mejor definición, pero son relativamente lentos. Por otro lado, los métodos eléctricos producen imágenes de baja resolución pero son mucho más rápidos, de construcción robusta y de costo relativamente bajo. Particularmente en el caso de la tomografía eléctrica, se ha dado un progreso muy notable en los últimos años. Este tipo de tomografía tiene dos modalidades principales: la tomografía de capacitancia y la tomografía de resistencia.

En esta tesis nos enfocamos al estudio de flujos multifásicos dieléctricos con componentes no reactivas y que fluyen por una tubería vertical, en el que utilizaremos la Tomografía de Capacitancia Eléctrica, que a continuación describimos.

1.1. Tomografía de Capacitancia Eléctrica

La Tomografía de Capacitancia Eléctrica (TCE) es una técnica emergente dirigida a la visualización interna no invasiva de mezclas eléctricamente no conductoras en procesos industriales como mezclado, separación

y flujo multifásico. El principio básico de este método consiste en colocar un sensor que contiene un arreglo de N electrodos de detección contiguos alrededor de la tubería que transporta los fluidos en proceso, en la sección transversal a ser investigada. La pared de la tubería debe ser eléctricamente no conductora en la zona de los electrodos. El sensor también tiene una cubierta exterior cilíndrica de metal que lo cubre por completo, la cual se conserva siempre a un potencial eléctrico de cero volts (se conecta a tierra).

La TCE ha sido probada recientemente para obtener imágenes en una sección transversal de una tubería que contiene un fluido multifásico dieléctrico cuyas componentes no son reactivas, con la finalidad de determinar la distribución de permitividades y, por lo tanto, la distribución de las fases que componen el fluido.

El equipo electrónico de medida proporciona los datos de las llamadas capacitancias mutuas, que se obtienen de aplicar un potencial conocido a un electrodo, llamado “electrodo de referencia” y de medir la capacitancia mutua de cada uno del resto de los electrodos con el electrodo de referencia. Este proceso de medición se repite cambiando el electrodo de referencia entre todos los electrodos del arreglo; de modo que al final, se miden las capacitancias mutuas entre todos los pares de electrodos posibles. Es decir, en un sensor compuesto por N electrodos se efectúan $N(N - 1)/2$ mediciones de capacitancias mutuas independientes en cada registro de datos. En la práctica, la determinación de las cargas de los electrodos es normalmente hecha directamente por mediciones de las corrientes del electrodo, y el potencial aplicado a los electrodos es en la forma de una señal periódica.

ca de amplitud y frecuencia conocida ([3]). Las capacitancias medidas son funciones no lineales respecto a la permitividad eléctrica relativa desconocida ([6]).

La computadora tiene la función principal de utilizar los datos obtenidos de las mediciones y usar un adecuado algoritmo de reconstrucción para obtener una imagen de la distribución de las permitividades de la sección transversal determinada por el anillo de electrodos.

Cuando la tubería está compuesta de un material dieléctrico y a su alrededor se coloca un arreglo de electrodos que actúan como superficies equipotenciales, fijando uno de ellos como referencia se pueden medir las capacitancias mutuas entre dicho electrodo y los restantes. Para un electrodo arbitrario j denotemos mediante C_{ij} la capacitancia mutua entre dicho electrodo y el electrodo de referencia i . Entonces la relación entre la capacitancia C_{ij} , la distribución de permitividades $\varepsilon(x, y)$ y el potencial $V^{(i)}$ generado por el campo de desplazamiento eléctrico, puede expresarse como:

$$C_{ij} = -\frac{1}{V} \int_{S_j} \varepsilon(z) \frac{\partial V^{(i)}(z)}{\partial n} ds, \quad (1.1)$$

donde S_j es la superficie total del electrodo j , y V es el potencial inducido, que se considera igual a 1. A partir de la ecuación (1.1) se obtiene una relación funcional entre las capacitancias mutuas C_{ij} , medidas en el arreglo de electrodos al variar el electrodo de referencia y la distribución de permitividades en la sección transversal:

$$C_{ij} = F(\varepsilon). \quad (1.2)$$

Usando esta relación es posible desarrollar métodos alternativos a fin de resolver el problema inverso de determinar la permitividad a través de las mediciones de capacitancias. Sin embargo, la solución del problema (1.2) tiene las siguientes dificultades:

1. Esta relación es altamente no lineal.
2. El número de mediciones de capacitancia independientes $N(N - 1)/2$, donde N es el número de electrodos, es mucho menor que el orden de la discretización requerida para identificar la distribución de permitividades y de esta forma el problema discretizado está indeterminado, por lo cual su solución puede no ser única.
3. Cualquier método que se utilice para obtener una solución particular sería inestable, debido a que este problema de identificación es sensible al error en las mediciones.

De lo anterior se concluye que cualquier método que intente resolver este problema debe considerar su no linealidad y debe brindar una solución numéricamente estable. Los métodos iterativos necesitan resolver un problema de contorno en cada iteración, lo cual resulta en un costo computacional elevado ([5],[6]).

1.2. Modelado matemático de la TCE

Denotamos por Ω a la región que corresponde a una sección transversal de una tubería, la cual está conformada por la unión de tres subregiones:

un círculo Ω y dos anillos concéntricos adyacentes Ω_2 y Ω_3 .

Ω_1 representa el interior del tubo, donde fluye la mezcla o sustancia de la cual se intenta obtener información. La región Ω_2 representa el grosor del material del cual está hecho el tubo, generalmente un material dieléctrico; la frontera interior de esta región representa la superficie interior del tubo y la frontera exterior representa la superficie exterior del tubo. Finalmente Ω_3 representa la región comprendida entre la superficie exterior del tubo y la protección de los electrodos, en esta región están colocados los N electrodos, fijos a la superficie exterior del tubo. Los electrodos al ser muy delgados y tener huecos muy pequeños entre ellos, se pueden modelar como superficies equipotenciales (líneas en el modelo bidimensional) que cubren toda la frontera entre Ω_2 y Ω_3 . La protección de los electrodos se modela como una línea equipotencial en el perímetro exterior de Ω . Así la región Ω se puede representar como:

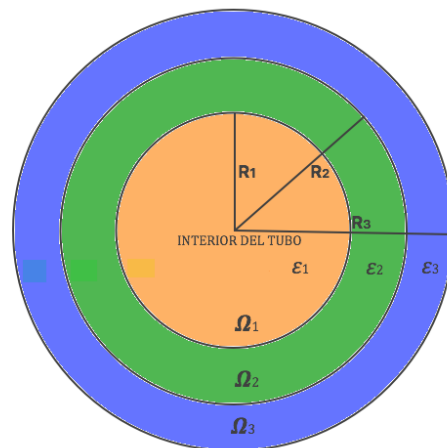


Figura 1.1: Corte transversal de la tubería, que es nuestra región de estudio.

de manera que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$, y

$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{R}^2 : |z| \leq R_1\},$$

$$\Omega_2 = \{z \in \mathbb{R}^2 : R_1 \leq |z| \leq R_2\},$$

$$\Omega_3 = \{z \in \mathbb{R}^2 : R_2 \leq |z| \leq R_3\},$$

Debemos considerar que el electrodo i -ésimo se puede describir y denotar por:

$$S_i = \{z \in \mathbb{R}^2 : |z| = R_2 \text{ y } \frac{2\pi(i-1)}{N} \leq \arg(z) \leq \frac{2\pi i}{N} N\}.$$

De esta manera cuando el electrodo i -ésimo definido se toma como electrodo de referencia, se obtienen $N - 1$ mediciones de capacitancias mutuas C_{ij} , $1 \leq j \leq N$, $j \neq i$; luego, al variar el electrodo de referencia i con $1 \leq i \leq N$, habremos efectuado un total de $N(N - 1)$ mediciones de capacitancia mutua. Como se cumple que $C_{ij} = C_{ji}$ entonces tendremos $\frac{N(N-1)}{2}$ mediciones independientes. Las capacitancias se expresan matemáticamente como una integral sobre la superficie del electrodo como:

$$C_{ij} = K \int_{S_j} \epsilon(x, y) \frac{\partial V^{(i)}}{\partial \vec{n}} ds, \quad (1.3)$$

donde $V^{(i)}$ es el potencial generado en el interior de la región al inducir un potencial en la superficie del electrodo i -ésimo, $\epsilon(x, y)$ es la permitividad del medio, S_j es la superficie del electrodo j -ésimo y K es la permitividad del vacío. Denotemos por ϵ_k la permitividad relativa en la región Ω_k para $k = 1, 2, 3$ y por $V_k^{(i)}(z)$, $i = 1, 2, 3, \dots, N$, $k = 1, 2, 3$; al potencial producido en Ω_k cuando el potencial en el electrodo i está ajustado a 1 y en los electrodos restantes ajustado a cero.

1.2.1. Deducción de la ecuación $\text{div}(\epsilon \nabla V) = 0$

Para nuestro problema, suponemos que el medio es homogéneo, lineal e isotrópico, suponiendo que el flujo cambia infinitesimalmente durante el tiempo requerido para un conjunto de mediciones, y que la frecuencia del voltaje de excitación es tan pequeña que la correspondiente longitud de onda es más grande que las dimensiones del sensor, se puede considerar un modelo estático.

Se conoce que las leyes de Maxwell son:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v, \text{ Ley de Gauss para el campo eléctrico;}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \text{ Ley de Gauss para el campo magnético;}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \text{ Ley de Faraday;}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \text{ Ley de Ampere-Maxwell;}$$

donde:

\vec{E} es campo eléctrico, \vec{H} es el campo magnético, \vec{D} es la densidad de flujo eléctrico, \vec{B} la densidad de flujo magnético, \vec{J} es la densidad de corriente eléctrica y ρ es la densidad volumétrica de carga eléctrica.

Además $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$, $\vec{J} = \sigma \vec{E}$; donde ϵ , μ y σ son la permitividad eléctrica, permitividad magnética y la conductividad respectivamente.

Estamos considerando que nuestro modelo representa un modelo aislado de cualquier campo magnético exterior, además también todos los electrodos están aislados entre sí para evitar inducción de campos magnéticos entre ellos, de tal manera que de existir un campo magnético dentro del sistema, este es tan pequeño que se puede descartar. Por ello podemos considerar que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. Como el campo \vec{E} es constante, entonces su rota-

cional es el vector cero, así $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, además en caso de existir densidad de flujo magnético esta debe ser constante y por lo tanto $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$; pues la derivada parcial respecto a cualquier variable de un vector constante, es el vector cero. Como $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ y $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, entonces existe una función potencial tal que $\vec{E} = -\nabla V$, por lo tanto: $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) = \rho_v$, luego $\nabla \cdot (\epsilon(-\nabla V)) = \rho_v$, por tanto $-\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = \rho_v$.

Como ρ_v representa la densidad volumétrica de carga eléctrica al interior del tubo y en el interior hay un medio no conductor, en el cual no se ha introducido desde el exterior carga adicional alguna, entonces la carga libre total en todo el volumen del dieléctrico se conserva igual a cero, es decir que $\rho_v = 0$, otra forma de explicar que la divergencia dentro de la región dieléctrica es cero, es que aunque hay cargas positivas dentro de la región, estas están en reposo pues no hay electrones libres que las transporten de un punto a otro dentro de la región, por lo tanto en cada punto de la región no hay fuentes ni sumideros y de esta manera no hay densidad de flujo eléctrico y por lo tanto la divergencia del campo eléctrico es cero y si se induce un campo eléctrico desde fuera de la región, entonces en cada superficie cerrada en una vecindad de cada punto la cantidad de flujo eléctrico que entra es la misma que la que sale de la superficie. Por lo tanto la ecuación que satisface el potencial eléctrico es: $\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = 0$.

1.2.2. Deducción de las condiciones en la frontera

Las condiciones en la frontera para los vectores de campo eléctrico, en la zona interfacial entre dos medios pueden obtenerse aplicando la ley de Gauss. Estos medios pueden ser dos dieléctricos con diferentes propiedades, un medio dieléctrico y un medio conductor o dos medios conductores. El vacío suele considerarse como un dieléctrico de permitividad ϵ_0 . Debido a que nuestra región de estudio está conformada por medios dieléctricos, consideremos dos medios dieléctricos en contacto con permitividades ϵ_1 y ϵ_2 respectivamente.

Supondremos que hay una densidad superficial de carga externa, a la cual llamaremos σ , que puede variar de un punto a otro en la zona interfacial. Construyamos ahora una pequeña superficie S en forma de cilindro, (ver Figura 1.2) que corta a la zona interfacial y encierra un área ΔS de dicha zona, siendo la altura del cilindro muy pequeña comparada con el diámetro de las bases. La carga encerrada por S es: $\sigma\Delta S + \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)V$,

Donde el volumen V del cilindro es despreciablemente pequeño, de modo que el último término puede despreciarse. Aplicando la ley de Gauss a S , vemos que

$$D_2 \cdot \vec{n}_2 \nabla S + D_1 \cdot \vec{n}_1 \nabla S = \sigma \Delta S \implies (D_2 - D_1) \cdot \vec{n}_2 = \sigma$$

en este caso $D_1 = \epsilon_1 \vec{E}_1$ y $D_2 = \epsilon_2 \vec{E}_2$ son los desplazamientos eléctricos en ambos medios dieléctricos.

Puesto que \vec{n}_2 es la normal exterior a la zona interfacial, entonces.

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma;$$

en esta igualdad $D_{2n} = D_2 \cdot \vec{n}_2$ y $D_{1n} = D_1 \cdot \vec{n}_2$ son las componentes nor-

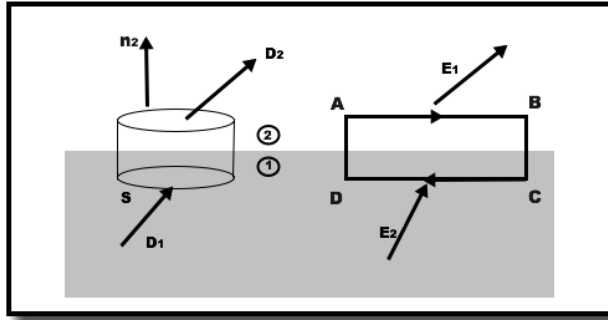


Figura 1.2: Representación gráfica de la interpretación de las condiciones de frontera del modelo.

males a la superficie interfacial de los vectores de desplazamiento eléctrico en los medios dieléctricos. De modo que la discontinuidad en la componente normal de D está dada por la densidad superficial de la carga externa sobre la zona interfacial. Dicho de otra forma, si no hay carga en la zona interfacial entre dos medios, entonces la componente normal de D es continua. Es decir $D_{2n} - D_1 = 0$; lo cual nos lleva a $D_{2n} = D_1$;

y como $D_{2n} = D_2 \cdot \vec{n}_2$ y $D_{1n} = D_1 \cdot \vec{n}_2$ y además $D_2 \cdot \vec{n}_2 = \epsilon_2 E_2 \cdot \vec{n}_2 = -\epsilon_2 \nabla V_2 \cdot \vec{n}_2 = -\frac{\partial V_2}{\partial \vec{n}_2}$ (definición de derivada normal), como consecuencia llegamos a $\epsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial \vec{n}_2} = \epsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial \vec{n}_2}$.

Debido a que el campo electrostático E puede obtenerse como menos el gradiente de un potencial, la integral de línea de $E \cdot dl$ alrededor de cualquier trayectoria cerrada se anula. Apliquemos este resultado a la trayecto-

ria rectangular ABCD de la Figura 1.2. Sobre esta trayectoria, los segmentos AB y CD se considerarán iguales a Δl y los segmentos AD y BC se supondrán despreciablemente pequeños. Por consiguiente $E_2 \cdot \Delta_1 + E_1 \cdot (-\Delta l) = 0$ lo cual implica que $(E_2 - E_1) \cdot \Delta l = 0$, donde E_2 y E_1 son los campos eléctricos en ambos medios. En consecuencia, el resultado es $E_{2t} = E_{1t}$; que son las componentes tangenciales de los campos eléctricos. Demostraremos que si $E_{t1} = E_{t2}$ Entonces $\epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n}$.

Denotemos por E al campo eléctrico en $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ y por E_1 al campo E en Ω_1 , análogamente por E_2 al campo E en Ω_2 , Como $E = -\vec{\nabla} \phi$ entonces

$$E_1 = -\vec{\nabla} \phi_1 \text{ y } E_2 = -\vec{\nabla} \phi_2 \quad (1.4)$$

multiplicando por el vector normal \vec{n} en ϵ_1 y ϵ_2 a (1.4) tenemos:

$$\epsilon_1 E_1 \cdot n = -\epsilon_1 \vec{\nabla} \phi_1 \cdot n \text{ y } \epsilon_2 E_2 \cdot n = -\epsilon_2 \vec{\nabla} \phi_2 \cdot n$$

pero $\epsilon_1 E_1 = D_1$ y $\epsilon_2 E_2 = D_2$ entonces

$$D_{1n} = -\epsilon_1 \vec{\nabla} \phi_1 \cdot n \text{ y } D_{2n} = -\epsilon_2 \vec{\nabla} \phi_2 \cdot n$$

Luego

$$\epsilon_1 \vec{\nabla} \phi_1 \cdot n = \epsilon_2 \vec{\nabla} \phi_2 \cdot n \quad (1.5)$$

pero como:

$$\vec{\nabla} \phi \cdot n ds = \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \text{ entonces:}$$

$$\epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n}$$

Por lo tanto, la componente tangencial del campo eléctrico es continua al atravesar una zona interfacial. Por lo anterior, el potencial eléctrico $V_k^{(i)}(z)$, para $i = 1, \dots, N$ satisface la siguiente ecuación:

$$\operatorname{div}(\epsilon_k(z)\nabla V_k^{(i)}) = 0, \text{ para } z \in \Omega_k, k = 1, 2, 3.$$

1.2.3. El modelo y planteamiento del problema

Resumiendo lo analizado anteriormente, en nuestro problema la configuración de la sección transversal está formada por tres círculos concéntricos que determinan tres regiones Ω_k , $k = 1, 2, 3$. Dentro del círculo interior Ω_1 (con radio R_1) se tiene un flujo multifásico con una permitividad desconocida $\epsilon_1(z)$, mientras que en las regiones anulares Ω_2 y Ω_3 , con radios exteriores R_2 y R_3 , se tienen materiales con permitividades constantes y conocidas $\epsilon_2(z)$, $\epsilon_3(z)$. Se considera un arreglo de N (8 a 16) electrodos contiguos S_j colocados de manera equidistante sobre la superficie del círculo intermedio. El potencial $V^{(i)}$ generado en esta configuración por el campo de desplazamiento eléctrico, cuando los electrodos son considerados como superficies equipotenciales con potencial igual a uno en un electrodo de referencia i y con el resto de los electrodos j , $j \neq i$, $j \in \{1, \dots, N\}$ conectados a tierra, tiene tres componentes $V_1^{(i)}$, $V_2^{(i)}$ y $V_3^{(i)}$ asociadas de manera natural a cada una de las regiones Ω_k , $k = 1, 2, 3$.

La pantalla se modela como una línea equipotencial circular, que corresponde a la frontera exterior de Ω_3 , con potencial igual a cero. El modelo que satisfacen los potenciales $V_k^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, N$ y $k = 1, 2, 3$; es el siguiente:

$$\operatorname{div} \left(\epsilon_1(z) \nabla V_1^{(i)}(z) \right) = 0, \quad \text{para } z \in \Omega_1; \quad (1.6)$$

$$\Delta V_2^{(i)}(z) = 0, \quad \text{para } z \in \Omega_2; \quad (1.7)$$

$$\Delta V_3^{(i)}(z) = 0, \quad \text{para } z \in \Omega_3; \quad (1.8)$$

con las condiciones de continuidad de los potenciales y de las corrientes normales:

$$V_1^{(i)}(z) = V_2^{(i)}(z), \quad \text{si } |z| = R_1; \quad (1.9)$$

$$V_3^{(i)}(z) = 0, \quad \text{si } |z| = R_3; \quad (1.10)$$

$$\varepsilon_1(z) \frac{\partial V_1^{(i)}}{\partial n_1}(z) = \varepsilon_2(z) \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial n_1}(z), \quad \text{si } |z| = R_1; \quad (1.11)$$

$$V_2^{(i)}(z) = V_3^{(i)}(z) = \varphi^{(i)}(z), \quad \text{si } |z| = R_2; \quad (1.12)$$

donde n_l es el vector unitario exterior al círculo $\{z : |z| = R_l\}$, $l = 1, 2$ y $\varphi^{(i)}(z)$, en coordenadas polares, se define como:

$$\varphi^{(i)}(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{si } \frac{2\pi i}{N} + \frac{\theta_0}{2} \leq \theta \leq \frac{2\pi(i-1)}{N} - \frac{\theta_0}{2}; \\ \frac{\theta - \theta_i^-}{\theta_0} + 1, & \text{si } \frac{2\pi(i-1)}{N} - \frac{\theta_0}{2} \leq \theta \leq \frac{2\pi(i-1)}{N} + \frac{\theta_0}{2}; \\ 1, & \text{si } \frac{2\pi(i-1)}{N} + \frac{\theta_0}{2} \leq \theta \leq \frac{2\pi i}{N} - \frac{\theta_0}{2}; \\ \frac{\theta_i^+ - \theta}{\theta_0} + 1, & \text{si } \frac{2\pi i}{N} - \frac{\theta_0}{2} \leq \theta \leq \frac{2\pi i}{N} + \frac{\theta_0}{2}; \end{cases}$$

$$\text{donde } \theta_i^- = \frac{2\pi(i-1)}{N} + \frac{\theta_0}{2} \text{ y } \theta_i^+ = \frac{2\pi i}{N} - \frac{\theta_0}{2}.$$

La capacitancia mutua entre el i -ésimo electrodo, considerado como electrodo de referencia, y el j -ésimo electrodo con $j \neq i$, que de acuerdo

a la fórmula (1.1), está dada por:

$$C_{ij} = \kappa \int_{S_j} \varepsilon(z) \frac{\partial V^{(i)}}{\partial n_2} ds, \quad (1.13)$$

κ es la permitividad del vacío, n_2 es el vector unitario normal exterior al círculo de radio R_1 , $\varepsilon(z)$ es la permitividad relativa en el interior de $\Omega_1 \cup \Omega_2$ y S_j es la superficie total del electrodo j -ésimo.

De la ecuación (1.13) se puede obtener la siguiente relación debido a que se considera al electrodo como parte de la frontera de Ω_2 y Ω_3 respectivamente.

$$\varepsilon_2 \int_{S_j^-} \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial n_2} ds = \left\{ \varepsilon_3 \int_{S_j^+} \frac{\partial V_3^{(i)}}{\partial n_2} ds - \frac{C_{ij}}{\kappa} \right\}; \quad (1.14)$$

donde S_j^- y S_j^+ denotan el arco S_j obtenido como un conjunto de puntos límite de Ω_2 y Ω_3 , respectivamente.

Para ilustrar a la función pontencial φ y a la distribución de los electrodos, vamos a suponer que tenemos cuatro electrodos e inducimos el voltaje igual a 1 en el electrodo uno y suponemos que el ángulo de separación es de $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$.

En la Figura 1.3, mostramos la gráfica de la función φ cuando $i = 1$ y $N = 4$.

$$\varphi^{(1)}(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{si } \frac{\pi+\theta_0}{2} \leq \theta \leq \frac{\theta_0}{2}; \\ \frac{2\theta\theta_0-\theta_0}{2}, & \text{si } -\frac{\theta_0}{2} \leq \theta \leq \frac{\theta_0}{2}; \\ 1, & \text{si } \frac{\theta_0}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi-\theta_0}{2}; \\ \frac{\pi-\theta_0-2\theta}{2\theta_0}, & \text{si } \frac{\pi-\theta_0}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi+\theta_0}{2}; \end{cases}$$

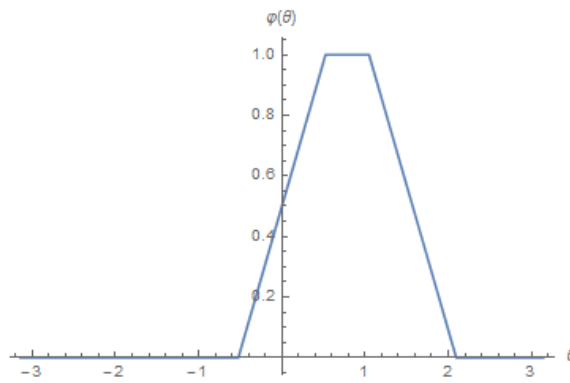


Figura 1.3: Gráfica de $\varphi^{(i)}(\theta)$, con $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$.

Ahora bien observamos que la función $V_3^{(i)}$ se puede desacoplar en el modelo (1.6)-(1.12), primero hallaremos una expresión para $V_3^{(i)}$ en Ω_3 y como es armónica y de periodo 2π , entonces representamos a $\varphi^{(i)}(\theta)$ como un desarrollo en serie de Fourier de la forma:

$$\varphi^{(i)}(\theta) = \frac{A_0^{(i)}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{A_k^{(i)}(\theta_0)\cos k\theta + B_k^{(i)}(\theta_0)\sen k\theta\},$$

donde

$$A_k^{(i)}(\theta_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi^{(i)}(\theta) \cos k\theta d\theta, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$B_k^{(i)}(\theta_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi^{(i)}(\theta) \sen k\theta d\theta, k = 1, 2, 3, \dots$$

Sólo para ilustrar, calcularemos $A_0^{(i)}(\theta_0)$:

$$\begin{aligned} A_0^{(i)}(\theta_0) &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{\theta_i^{(-)} - \theta_0}^{\theta_i^{(-)}} \left(\frac{\theta - \theta_i^{(-)}}{\theta_0} + 1 \right) d\theta + \int_{\theta_i^{(-)}}^{\theta_i^{(+)}} d\theta + \int_{\theta_i^{(+)}}^{\theta_i^{(+)} + \theta_0} \left(\frac{\theta_i^{(+)} - \theta}{\theta_0} + 1 \right) d\theta \right], \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{\theta_0} \left(\frac{\theta^2}{2} \Big|_{\theta_i^{(-)} - \theta_0}^{\theta_i^{(-)}} - \theta_i^{(-)} \theta \Big|_{\theta_i^{(-)} - \theta_0}^{\theta_i^{(-)}} \right) + \theta_0 + \theta_i^{(+)} - \theta_i^{(-)} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{1}{\theta_0} \left(\theta_i^{(+)} \theta \Big|_{\theta_i^{(+)}}^{\theta_i^{(+)} + \theta_0} - \frac{\theta^2}{2} \Big|_{\theta_i^{(+)}}^{\theta_i^{(+)} + \theta_0} \right) + \theta_0 \right], \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\theta_0 + \theta_i^{(+)} - \theta_i^{(-)} \right], \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\theta_0 + \frac{2\pi i}{N} - \frac{\theta_0}{2} - \frac{2\pi(i-1)}{N} - \frac{\theta_0}{2} \right], \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{2\pi}{N} \right], \\ &= \frac{2}{N}. \end{aligned}$$

Análogamente, se puede ver que:

$$\begin{aligned} A_k^{(i)}(\theta_0) &= \frac{2\beta_k^{(i)} \sen \frac{k\theta_0}{2}}{k^2 \pi \theta_0} \\ B_k^{(i)}(\theta_0) &= \frac{2\alpha_k^{(i)} \sen \frac{k\theta_0}{2}}{k^2 \pi \theta_0}. \end{aligned}$$

Al sustituir los valores en $\varphi^{(i)}(\theta)$ podemos calcular explícitamente la expresión en serie de Fourier de $\varphi^{(i)}(\theta)$:

$$\varphi^{(i)}(\theta) = \frac{2}{N} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{2\beta_k^{(i)} \operatorname{sen} \frac{k\theta_0}{2}}{k^2 \pi \theta_0} \operatorname{cos} k\theta + \frac{2\alpha_k^{(i)} \operatorname{sen} \frac{k\theta_0}{2}}{k^2 \pi \theta_0} \operatorname{sen} k\theta \right\} \quad (1.15)$$

donde

$$\beta_k^{(i)} = \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{N} - \operatorname{sen} \frac{2\pi(i-1)k}{N} \quad \text{y} \quad \alpha_k^{(i)} = \operatorname{cos} \frac{2\pi(i-1)k}{N} - \operatorname{cos} \frac{2k\pi}{N}$$

Una vez conociendo a $\varphi^{(i)}(\theta)$, resolveremos el problema de contorno:

$$\Delta V_3^{(i)}(z) = 0 \text{ en } \Omega_3.$$

$$V_3^{(i)}(r, \theta) = \begin{cases} 0, & \text{si } r = R_3; \\ \varphi^{(i)}(\theta), & \text{si } r = R_2. \end{cases} \quad (1.16)$$

Debido a que $V_3^{(i)}$ satisface $\Delta V_3^{(i)} = 0$ en Ω_3 , entonces buscamos la función armónica $V_3^{(i)}(r, \theta)$ en el anillo en la forma:

$$\begin{aligned} V_3^{(i)}(r, \theta) &= a_0^{(i)} + b_0^{(i)} \ln r \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(a_k^{(i)} r^k + b_k^{(i)} r^{-k} \right) \operatorname{cos} k\theta + \left(c_k^{(i)} r^k + d_k^{(i)} r^{-k} \right) \operatorname{sen} k\theta \right] \end{aligned}$$

que además cumpla con las condiciones de contorno (1.16). Por lo anterior en las fronteras $|z| = R_2$ y $|z| = R_3$ deben cumplirse las siguientes

relaciones:

$$\begin{aligned}
a_0^{(i)} + b_0^{(i)} \ln R_3 &= 0; \\
a_0^{(i)} + b_0^{(i)} \ln R_2 &= \frac{1}{N}; \\
a_k^{(i)} R_3^k + b_k^{(i)} R_3^{-k} &= 0; \\
a_k^{(i)} R_2^k + b_k^{(i)} R_2^{-k} &= \frac{2\beta_k^{(i)} \operatorname{sen} \frac{k\theta_0}{2}}{k^2 \pi \theta_0}; \\
c_k^{(i)} R_3^k + d_k^{(i)} R_3^{-k} &= 0; \\
c_k^{(i)} R_2^k + d_k^{(i)} R_2^{-k} &= \frac{2\alpha_k^{(i)} \operatorname{sen} \frac{k\theta_0}{2}}{k^2 \pi \theta_0}.
\end{aligned}$$

Así tenemos un sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas que al resolverlo obtenemos que:

$$\begin{aligned}
a_0^{(i)} &= \frac{1 \ln R_3}{N \ln \frac{R_3}{R_2}}, \\
b_0^{(i)} &= \frac{1}{N \ln \frac{R_2}{R_3}}, \\
a_k^{(i)} &= \frac{-2}{k^2 \pi \theta_0} \operatorname{sen} \frac{k\theta_0}{2} \frac{R_2^k}{R_3^{2k} - R_2^{2k}} \beta_k^{(i)}, \\
b_k^{(i)} &= \frac{2}{k^2 \pi \theta_0} \operatorname{sen} \frac{k\theta_0}{2} \frac{R_2^k R_3^{2k}}{R_3^{2k} - R_2^{2k}} \beta_k^{(i)}, \\
c_k^{(i)} &= \frac{-2}{k^2 \pi \theta_0} \operatorname{sen} \frac{k\theta_0}{2} \frac{R_2^k}{R_3^{2k} - R_2^{2k}} \alpha_k^{(i)}, \\
d_k^{(i)} &= \frac{2}{k^2 \pi \theta_0} \operatorname{sen} \frac{k\theta_0}{2} \frac{R_2^k R_3^{2k}}{R_3^{2k} - R_2^{2k}} \alpha_k^{(i)}.
\end{aligned}$$

Al sustituir los coeficientes en la ecuación se llega a una expresión para la

función armónica $V_3^{(i)}(r, \theta)$.

$$\begin{aligned}
V_3^{(i)}(r, \theta) &= \frac{1}{N} \frac{\ln(R_3)}{\ln \frac{R_3}{R_2}} + \frac{1}{N \ln \frac{R_2}{R_3}} \ln r \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{(i)} \frac{2}{k^2 \pi \theta_0} \sin \frac{k \theta_0}{2} \left(\frac{R_2^k R_3^{2k}}{R_3^{2k} - R_2^{2k}} r^{-k} - \frac{R_2^k}{R_3^{2k} - R_2^{2k}} r^k \right) \cos k \theta \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(i)} \frac{2}{k^2 \pi \theta_0} \sin \frac{k \theta_0}{2} \left(\frac{R_2^k R_3^{2k}}{R_3^{2k} - R_2^{2k}} r^{-k} - \frac{R_2^k}{R_3^{2k} - R_2^{2k}} r^k \right) \sin k \theta;
\end{aligned}$$

donde

$$\beta_k^{(i)} = \operatorname{sen} \frac{2k\pi i}{N} - \operatorname{sen} \frac{2k\pi(i-1)}{N} \quad \text{y} \quad \alpha_k^{(i)} = \operatorname{cos} \frac{2\pi k(i-1)}{N} - \operatorname{cos} \frac{2\pi k i}{N}.$$

Esto nos permite obtener el valor del lado derecho de la ecuación (1.14), ya que también conocemos los valores de las capacitancias mutuas C_{ij} medidos experimentalmente. Por tal razón, a estos valores conocidos los denotamos por:

$$c_{ij}^* = \left\{ \varepsilon_3 \int_{S_j^+} \frac{\partial V_3^{(i)}}{\partial n_2} ds - \frac{C_{ij}}{\kappa} \right\};$$

luego, de la ecuación (1.14) se cumple:

$$c_{ij}^* = \varepsilon_2 \int_{S_j^-} \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial n_2} ds. \tag{1.17}$$

En adelante, nos referiremos a c_{ij}^* como “capacitancias mutuas modificadas”.

Como ya hemos calculado al potencial $V_3^{(i)}$, el problema (1.6)-(1.12) se reduce al problema de contorno siguiente:

$$\operatorname{div} \left(\varepsilon_1(z) \nabla V_1^{(i)}(z) \right) = 0, \quad \text{para } z \in \Omega_1; \quad (1.18)$$

$$\Delta V_2^{(i)}(z) = 0, \quad \text{para } z \in \Omega_2; \quad (1.19)$$

con condiciones de continuidad de los potenciales y de las corrientes normales en R_1 y con condición de Dirichlet en R_2 :

$$V_1^{(i)}(z) = V_2^{(i)}(z), \quad \text{si } |z| = R_1; \quad (1.20)$$

$$V_2^{(i)}(z) = \varphi^{(i)}(z), \quad \text{si } |z| = R_2; \quad (1.21)$$

$$\varepsilon_1(z) \frac{\partial V_1^{(i)}}{\partial n_1}(z) = \varepsilon_2(z) \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial n_1}(z), \quad \text{si } |z| = R_1; \quad (1.22)$$

donde n_1 es el vector unitario exterior al círculo $\{z : |z| = R_1\}$ y $\varphi^{(i)}(z)$, es la función que describe el potencial inducido en los electrodos.

El problema directo consiste en calcular a la solución $V_1^{(i)}(z)$ y $V_2^{(i)}(z)$ del problema con valores en la frontera (1.18)-(1.22), a partir del conocimiento de la permitividad $\varepsilon_1(z)$; el problema directo es un problema bien planteado en el sentido de Hadamard y es numéricamente estable ([7]).

El problema inverso consiste en determinar aproximadamente el valor de $\varepsilon_1(z)$ usando el modelo (1.18)-(1.22), a partir de **los $N(N - 1)/2$ valores c_{ij}^* de las capacitancias mutuas modificadas, donde $i, j = 1, 2, \dots, N$ con $i < j$** . Se puede ver que el problema inverso es mal planteado en sentido de Hadamard ([6]).

Se debe resaltar que aunque las hipótesis básicas de trabajo están orientadas a resolver un problema de la industria petrolera, este problema tiene muchas otras aplicaciones dentro de la tomografía de procesos.

1.2.4. Marco teórico

En [7], se encuentra la solución del problema directo para el caso de un fluido bifásico anular. En [8] se encuentra la solución del problema directo para cuando se tiene un medio dieléctrico bifásico, cuando una de las dos fases no necesariamente pasa por el centro del ducto; esta solución se da explícitamente en forma de serie de Fourier. En [4], se expone un planteamiento para detectar el tamaño mínimo de una inhomogeneidad en un medio bifásico.

En [6] se describe un método para resolver el problema inverso; este método no es iterativo y consiste en desacoplar el problema original en cinco problemas de menor complejidad. Sin embargo, los autores no presentan la forma explícita para la aproximación de $\frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial n_2}$.

En este trabajo de tesis resolvemos el problema inverso de identificación de $\epsilon(x, y)$ a partir del conocimiento de datos de permitividad eléctrica en el interior de la región de estudio; los cuales son aproximaciones obtenidas a partir de la formulación débil y de información a priori sobre el campo generado en la región donde pasa el flujo.

Capítulo II

Formulación débil del problema inverso

En este capítulo vamos a hacer la formulación débil del problema inverso que resolveremos en la tesis; para ello vamos a exponer algunas definiciones y teoremas principales que son necesarios para obtener la formulación débil del problema.

2.1. Conceptos básicos

En esta sección vamos a citar algunas definiciones, teoremas e inclusive algunos ejemplos de la teoría que será necesaria para desarrollar la tesis. Primero describiremos algunos conceptos de la Física y posteriormente algunos conceptos de matemáticas.

Comenzaremos con algunos conceptos de la Física, que intervienen en el problema de la TCE; fueron tomados de [2].

2.1.1. Algunas definiciones de la Física

Medio Isótropo: Objeto o sustancia que tiene una propiedad o característica física medible, la cual tiene el mismo valor cuando se mide en cualquier dirección a partir de un punto (localmente). En el caso del modelo de TCE, el medio en el cual se hacen las mediciones es heterogéneo; y la característica a medir es la permitividad eléctrica ϵ . La permitividad depende del punto en el que se hace la medición, pero como las sustancias presentes en el medio no se mezclan completamente, se puede considerar que localmente nuestro medio es isótropo; así que al ubicarnos en un punto y medir la permitividad, ésta tendrá el mismo valor en cualquier dirección en una vecindad pequeña del punto.

Medio homogéneo: Medio o sustancia con las mismas propiedades físicas y químicas en cualquier punto. En nuestro caso cuando la permitividad no depende del punto de posición, el medio es homogéneo. En la mayoría de los casos, los materiales usados para la experimentación muestran no homogeneidad muy pequeña, por lo que se les da el tratamiento como materiales homogéneos. La atmósfera es un ejemplo de medio no homogéneo, ya que su permitividad varía con la altitud. Nuevamente en nuestro caso, aunque dentro del modelo hay un medio heterogéneo, las sustancias no se mezclan completamente, por lo tanto consideraremos que de manera local nuestro medio se comporta como un medio homogéneo. Es decir que la permitividad no cambia de un punto a otro en una vecindad, excepto tal vez en la frontera de dicha vecindad.

Medio lineal: Un medio lineal es aquel en que se mantiene la propor-

cionalidad causa- efecto entre dos magnitudes relacionadas por una característica física. Los materiales en los cuales sus parámetros constitutivos ϵ , μ y σ no están en función de la intensidad del campo eléctrico, magnético, o de ambos (bianisotrópicos) se conocen como lineales. En el caso contrario se conocen como no lineales. En un medio lineal, la relación entre el campo eléctrico \vec{E} y la densidad de flujo eléctrico \vec{D} y también entre el campo magnético \vec{H} y la densidad de flujo magnético \vec{B} es lineal. Un material dieléctrico en el que se aplica $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ es lineal si la densidad de campo eléctrico \vec{D} varía linealmente con la intensidad del campo \vec{E} , y no lineal en caso contrario. La permitividad y la permeabilidad son escalares cuando las cargas están en medios homogéneos e isótropos. En medios isótropos y heterogéneos, en los cuales las sustancias o materiales no se mezclan completamente, la permitividad y la permeabilidad aún siguen siendo escalares, aunque dependen de la posición, pues la región de interés puede dividirse en subregiones, en cada una de las cuales el medio puede considerarse homogéneo.

2.1.2. Algunos conceptos de Análisis funcional

Debido a que trabajaremos con el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$, vamos a citar algunas definiciones y resultados principales que nos permitirán definir y trabajar con estos espacios que intervienen en la solución de nuestro problema. Estas definiciones y teoremas fueron tomados de [10].

Definición 1. (Producto Escalar, Espacio Pre-Hilbert). Sea X un espacio vectorial sobre el campo $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$. Un producto escalar o producto

interno es una función

$$(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow K,$$

con las siguientes propiedades:

$$(i) (x + y, z) = (x, z) + (y, z), \forall x, y, z \in X,$$

$$(ii) (\alpha x, y) = \alpha(x, y), \forall x, y \in X, \alpha \in K,$$

$$(iii) (x, y) = \overline{(y, x)}, \forall x, y \in X,$$

$$(iv) (x, x) \in \mathbb{R}, (x, x) \geq 0, \forall x \in X,$$

$$(v) (x, x) > 0, \text{ si } x \neq 0.$$

Un espacio vectorial X sobre K con producto interno (\cdot, \cdot) es llamado espacio pre-Hilbert sobre K .

Las siguientes propiedades son una consecuencia de la Definición 1:

$$(vi) (x, y + z) = (x, y) + (x, z), \forall x, y, z \in X,$$

$$(vii) (x, \alpha y) = \bar{\alpha}(x, y), \forall x, y \in X; \alpha \in K.$$

Definición 2. *Sea X un espacio vectorial sobre el campo $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$.*

Una norma sobre X es una función

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R},$$

con las siguientes propiedades:

$$(i) \|x\| > 0, \forall x \in X, x \neq 0;$$

$$(ii) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall x \in X, \alpha \in K;$$

$$(iii) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X.$$

Un espacio vectorial X sobre K con norma $\|\cdot\|$ es llamado espacio normado sobre K .

La propiedad (iii) es llamada desigualdad del triángulo, que aplicándola a las identidades $x = (x - y) + y$, $y = (y - x) + x$ produce la segunda desigualdad triangular $\|x - y\| \leq \left| \|x\| - \|y\| \right|$, $\forall x, y \in X$.

Antes de continuar con más definiciones, vamos a dar un ejemplo de un espacio normado y Pre-Hilbert.

Ejemplo 1. *El espacio $C[a, b]$ (funciones continuas sobre $[a, b]$) es un espacio pre-Hilbert sobre \mathbb{R} con producto interno:*

$$(x, y) := \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt, \quad x, y \in C[a, b].$$

Además, es un espacio normado con la norma dada por:

$$\|x\| := \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 dt}, \quad \forall x \in C[a, b].$$

Definición 3. (Espacio de Banach, Espacio de Hilbert).

*Un espacio normado X sobre K es llamado completo o espacio de Banach si cada sucesión de Cauchy converge en X . Un espacio completo pre-Hilbert es llamado **espacio de Hilbert**.*

El espacio de \mathbb{C}^n y \mathbb{R}^n son espacios de Hilbert con respecto a su producto interno canónico.

Ejemplo 2. *L^2 dotado del producto interno $\langle f, g \rangle = \int fg \, d\mu$, es un espacio de Hilbert.*

Definición 4. (Sistema ortogonal) Un conjunto contable de elementos

$A = \{x_k : k = 1, 2, 3, \dots\}$ es llamado un sistema ortonormal si:

(i) $(x_k, x_j) = 0, \forall k \neq j,$

(ii) $\|x_k\| = 1, \forall k \in \mathbb{N}.$

El conjunto A es llamado sistema ortonormal completo o sistema ortonormal maximal si $B \subset A$, para todo conjunto ortonormal B con $A \neq B$.

2.1.3. Espacios de Sobolev

Definición de los espacios de Sobolev

Definición 5. Sea $I \subseteq \mathbb{R}^*$ un intervalo abierto y sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq \infty$, definimos el espacio de Sobolev $W^{1,p}(I)$ por:

$$W^{1,p}(I) := \{u \in L^p(I) : \exists g \in L^p(I) \text{ tal que } \int_I u\varphi' = - \int_I g\varphi \forall \varphi \in C_c^1(I)\}$$

donde $C_c^1(I)$ es el espacio de las funciones de clase C^1 y de soporte compacto. En particular, $H^1(I) := W^{1,2}(I)$.

Dado $u \in W^{1,2}(I)$, a la función g dada en las condiciones de la Definición, la llamaremos derivada débil de u y denotaremos por $g = u'$. A las funciones φ se les suele llamar funciones test.

Lema 6. (Linealidad de la derivada débil) Sean $u, v \in W^{1,p}(I)$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$(u + cv)' = u' + cv'.$$

$W^{1,p}$ esta dotado de la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$$

o a veces, si $1 \neq p \neq \infty$, con la norma equivalente $(\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p)^{1/p}$.

El espacio $H^1(I)$ esta dotado del producto escalar

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} = \int_I (uv + u'v')$$

con la norma asociada

$$\|u\|_{H^1} = (\langle u, u \rangle_{L^2} + \langle u', u' \rangle_{L^2})^{1/2} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2)^{1/2}.$$

Finalizamos el capítulo con el planteamiento del problema inverso a resolver.

2.2. Formulación débil del problema de contorno

en $\Omega_1 \cup \Omega_2$

Comenzamos planteando la formulación débil del problema de contorno (1.18)-(1.22), para posteriormente incorporar las capacitancias mutuas modificadas.

A partir de las ecuaciones (1.18) y (1.19), podemos escribir:

$$\operatorname{div} (\varepsilon(z) \nabla V^{(i)}(z)) = 0, \quad \text{para } z \in \Omega_1 \cup \Omega_2;$$

donde $\varepsilon(z) = \varepsilon_1(z)$ en Ω_1 , $\varepsilon(z) = \varepsilon_2(z)$ en Ω_2 , $V^{(i)}(z) = V_1^{(i)}(z)$ en Ω_1 y $V^{(i)}(z) = V_2^{(i)}(z)$ en Ω_2 . Al multiplicar por cualquier función $V \in$

$H^1(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ tal que $V(z) = V_1(z)$ para $z \in \Omega_1$ y $V(z) = V_2(z)$ para $z \in \Omega_2$ e integrar sobre $\Omega_1 \cup \Omega_2$, obtenemos:

$$0 = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \operatorname{div}(\varepsilon(z) \nabla V^{(i)}) V dz;$$

que en términos de V_1 , V_2 , $V_1^{(i)}$ y $V_2^{(i)}$ y, la identidad $\operatorname{div}(fF) = f \operatorname{div}F + F \nabla f$ se expresa por:

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{\Omega_1} \operatorname{div}(\varepsilon_1(z) \nabla V_1^{(i)} V_1) dz - \int_{\Omega_1} \varepsilon_1(z) \nabla V_1^{(i)} \nabla V_1 dz + \\ & \varepsilon_2 \int_{\Omega_2} \operatorname{div}(\nabla V_2^{(i)} V_2) dz - \int_{\Omega_2} \varepsilon_2 \nabla V_2^{(i)} \nabla V_2 dz. \end{aligned}$$

Aplicamos el teorema de la divergencia a la primera y tercera integral y obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{|z|=R_1} \varepsilon_1(z) V_1 \frac{\partial V_1^{(i)}}{\partial n_1} ds - \int_{\Omega_1} \varepsilon_1(z) \nabla V_1^{(i)} \nabla V_1 dz + \\ & \varepsilon_2 \int_{\partial \Omega_2} V_2 \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial n_2} ds - \varepsilon_2 \int_{\Omega_2} \nabla V_2^{(i)} \nabla V_2 dx. \end{aligned}$$

Como $\partial \Omega_2 = \{z : |z| = R_1\} \cup \{z : |z| = R_2\}$, al descomponer la tercera integral en dos integrales obtenemos:

$$\begin{aligned}
0 = & \int_{|z|=R_1} \varepsilon_1(z) V_1 \frac{\partial V_1^{(i)}}{\partial n_1} ds - \int_{\Omega_1} \varepsilon_1(z) \nabla V_1^{(i)} \nabla V_1 dz + \varepsilon_2 \int_{|z|=R_2} V_2 \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial n_2} ds \\
& - \varepsilon_2 \int_{|z|=R_1} V_1 \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial n_1} ds - \varepsilon_2 \int_{\Omega_2} \nabla V_2^{(i)} \nabla V_2 dz. \tag{2.1}
\end{aligned}$$

Por las condiciones de compatibilidad en $|z| = R_1$, y dadas en la ecuación (1.22), se cumple lo siguiente:

$$\int_{|z|=R_1} \varepsilon_1(z) V_1 \frac{\partial V_1^{(i)}}{\partial n_1} ds - \varepsilon_2 \int_{|z|=R_1} V_1 \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial n_1} ds = 0, \tag{2.2}$$

Sustituyendo (2.2) en (2.1), obtenemos la relación integral:

$$\varepsilon_2 \int_{|z|=R_2} V_2 \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial n_2} ds = \int_{\Omega_1} \varepsilon_1(z) \nabla V_1^{(i)} \nabla V_1 dz + \varepsilon_2 \int_{\Omega_2} \nabla V_2^{(i)} \nabla V_2 dz.$$

De lo anterior, formulamos la definición de solución débil del problema de contorno (1.18)-(1.22) como sigue:

Definición 7. La pareja de funciones $V_1^{(i)}$, $V_2^{(i)}$ es la solución débil del problema (1.18)-(1.22), si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. $V_2^{(i)}(z) = \varphi^{(i)}(z)$ para $z \in \{z : |z| = R_2\}$;
2. $V_1^{(i)}(z) = V_2^{(i)}(z)$ para $z \in \{z : |z| = R_1\}$;
3. para todo par de funciones $V_1 \in H^1(\Omega_1)$, $V_2 \in H^1(\Omega_2)$ tales que:
 $V_1(z) = V_2(z)$ para $z \in \{z : |z| = R_1\}$, se cumple la igualdad:

$$\int_{\Omega_1} \varepsilon_1(z) \nabla V_1^{(i)} \nabla V_1 dz + \varepsilon_2 \int_{\Omega_2} \nabla V_2^{(i)} \nabla V_2 dz = \varepsilon_2 \int_{|z|=R_2} V_2 \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial n_2} ds. \quad (2.3)$$

Observación 8. *Nótese que la segunda condición en la definición anterior implica que si $V_1^{(i)}$ pertenece a $H^1(\Omega_1)$ y $V_2^{(i)}$ pertenece a $H^1(\Omega_2)$, entonces la función $V^{(i)}$ construida “pegando” a $V_1^{(i)}$ y $V_2^{(i)}$, pertenece a $H^1(\Omega_1 \cup \Omega_2)$.*

2.3. Planteamiento débil del problema inverso

en Ω_1

En [9] se puede ver que este problema se puede reducir a un problema sólo en Ω_1 en lugar de $\Omega_1 \cup \Omega_2$. En esta tesis vamos a resolver el problema a partir de este planteamiento reducido.

Denotemos mediante:

$$\mathcal{L}_+^2(\Omega_1) := \left\{ \varepsilon_1(z) \in L^2(\Omega_1) : \text{Existe } M > 0, \text{ tal que } \varepsilon_1(z) > M, \text{ c.d en } \Omega_1 \right\}$$

y sea

$$\mathcal{E}_*(\Omega_1) := \left\{ \varepsilon_1(z) \in L_+^2(\Omega_1) : \left\| \varepsilon_1 \frac{\partial V_1^{(i)}}{\partial n_1} \right\|_{L^2(|z|=R_1)} \leq \varepsilon_2 M_1, \left\| \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial n_2} \right\|_{L^2(|z|=R_2)} \leq M_2 \right\},$$

Entonces el problema inverso consiste en identificar la función $\varepsilon_1(z)$ en la clase $\mathcal{E}_*(\Omega_1)$, que satisface simultáneamente N problemas de tipo Calderón:

$$\operatorname{div} \left(\varepsilon_1(z) \nabla V_1^{(i)}(z) \right) = 0, \quad \text{para } z \in \Omega_1; \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_1(z) \frac{\partial V_1^{(i)}}{\partial n_1}(z) = \varepsilon_2 \Psi^{(i)}(z), \quad \text{para } z \in \{|z| = R_1\}; \quad (2.5)$$

$$V_1^{(i)}(z) = \Phi^{(i)}(z), \quad \text{para } z \in \{|z| = R_1\}; \quad (2.6)$$

para $i = 1, 2, \dots, N$ y donde la función $\Phi^{(i)}$ es ortogonal a las constantes en $L^2(|z| = R_1)$ y consta de un número finito de coeficientes de Fourier $(\Psi_{n,1}^{(i)}, \Psi_{n,2}^{(i)})$ con $n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$, que satisfacen el sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} \left\{ \Gamma_n \left(\psi_{n,1}^{(i)} \alpha_n^{(j)} + \psi_{n,2}^{(i)} \beta_n^{(j)} \right) \right\} = \frac{c_{ij}}{\varepsilon_2 \pi} - \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} \left\{ \gamma_n \left(\alpha_n^{(i)} \alpha_n^{(j)} + \beta_n^{(i)} \beta_n^{(j)} \right) \right\}, \quad (2.7)$$

y la función $\Phi^{(i)}$ está definida mediante:

$$\begin{aligned} \Phi^{(i)} = & \frac{1}{N} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n}{1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n}} \left(\alpha_n^{(i)} \cos n\theta + \beta_n^{(i)} \sin n\theta \right) + \\ & R_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n} - 1}{n \left[1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n} \right]} \left(\psi_{n,1}^{(i)} \cos n\theta + \psi_{n,2}^{(i)} \sin n\theta \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Capítulo III

Solución del problema inverso

3.1. Información a priori sobre la solución

En el capítulo anterior, obtuvimos el planteamiento final del problema inverso, en el que la condición de Neumann dada por $\Psi^{(i)}$, satisface restricciones adicionales.

En este capítulo vamos a resolver el problema inverso utilizando información a priori sobre la solución; esta información a priori, es información que tenemos acerca de la solución. En nuestro caso, lo que sabemos acerca de la solución es que el flujo no forma vórtices en su paso por la tubería, al momento de la extracción; es decir, la información a priori acerca de la solución es que la función ε_1 satisface $rot \left(\varepsilon_1 \nabla V_1^{(i)} \right) = 0$. Así, denotamos y definimos a la clase de funciones en la que buscaremos a la solución como:

$$\mathcal{E}_1(\Omega_1) = \left\{ \varepsilon_1 \in \mathcal{E}_*(\Omega_1) : \varepsilon_1 > 0, rot \left(\varepsilon_1 \nabla V_1^{(i)} \right) = 0 \right\},$$

donde $\mathcal{E}_*(\Omega_1)$ se ha definido anteriormente y está dado por:

$$\mathcal{E}_*(\Omega_1) := \left\{ \varepsilon_1(z) \in L^2(\Omega_1) : \left\| \varepsilon_1 \frac{\partial V_1^{(i)}}{\partial n_1} \right\|_{L^2(|z|=R_1)} \leq \varepsilon_2 M_1 \text{ y } \left\| \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial n_2} \right\|_{L^2(|z|=R_2)} \leq M_2 \right\},$$

y donde M_1 y M_2 son constantes que se definen en término del error del equipo de medición, el número de electrodos, los radios de las tuberías y su grosor y de la separación entre cada dos electrodos consecutivos.

En este capítulo plantaremos un método de solución al problema inverso y; resolvemos el problema para el caso en que se tiene una inclusión circular. Además presentaremos la implementación numérica.

3.2. Solución del problema en término de la condición de irrotacionalidad

Como estamos buscando a la solución en la clase de funciones $\mathcal{E}_1(\Omega_1)$, entonces ε_1 y $V_1^{(i)}$ satisfacen la llamada condición de irrotacionalidad, que está dada por:

$$\text{rot} \left(\varepsilon_1 \nabla V_1^{(i)} \right) = 0, \text{ en } \Omega_1. \quad (3.1)$$

A partir de la condición de irrotacionalidad (3.1), se puede obtener la ecuación equivalente:

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x} \frac{\partial V_1^{(i)}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y} \frac{\partial V_1^{(i)}}{\partial x} = 0, \text{ en } \Omega_1, \quad (3.2)$$

que utilizaremos más adelante. Pero la misma condición de irrotacionalidad garantiza la existencia de una función $W_1^{(i)}(z)$, que satisface:

$$\varepsilon_1 \nabla V_1^{(i)}(z) = \nabla W_1^{(i)}(z), \text{ para } z \in \Omega_1, \quad (3.3)$$

Como:

$$\nabla W_1^{(i)}(z) = \varepsilon_1 \nabla V_1^{(i)}(z), z \in \bar{\Omega}_1,$$

entonces

$$\nabla W_1^{(i)} \cdot n_1(z) = \varepsilon_1 \nabla V_1^{(i)} \cdot n_1(z), z \in \partial\Omega_1$$

de donde se sigue que:

$$\frac{\partial W_1^{(i)}}{\partial n_1}(z) = \varepsilon_1 \frac{\partial V_1^{(i)}}{\partial n_1}(z), z \in \partial\Omega_1$$

por tanto

$$\frac{\partial W_1^{(i)}}{\partial n_1}(z) = \varepsilon_2 \varphi^{(i)}(z), z \in \partial\Omega_1$$

Por otro lado, debido a que:

$$\nabla W_1^{(i)}(z) = \varepsilon_1 \nabla V_1^{(i)}(z), z \in \Omega_1,$$

al aplicar divergencia en ambos lados de la igualdad tenemos:

$$\nabla \cdot \nabla W_1^{(i)}(z) = \nabla \cdot \epsilon_1 \nabla V_1^{(i)}(z) = 0,$$

luego, para $W_1^{(i)}$ obtenemos que:

$$\Delta W_1^{(i)}(z) = 0.$$

y, por lo tanto, de las ecuaciones (2.4)-(2.5) se obtiene el planteamiento del problema para $W_1^{(i)}$:

$$\Delta W_1^{(i)}(z) = 0, \text{ para } z \in \Omega_1; \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial W_1^{(i)}}{\partial n_1} = \epsilon_2 \Psi^{(i)}(z), \text{ para } z \in \{|z| = R_1\}. \quad (3.5)$$

Este problema tiene solución que se puede escribir en la forma:

$$W_1^{(i)}(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n^{(i)} \cos n\theta + b_n^{(i)} \sin n\theta) \quad (3.6)$$

donde $a_n^{(i)}$ y $b_n^{(i)}$ se determinan de la condición de contorno (3.5), y son:

$$a_n^{(i)} = \frac{\epsilon_2 \psi_{n,1}^{(i)}}{nR_1^{n-1}}, \quad b_n^{(i)} = \frac{\epsilon_2 \psi_{n,2}^{(i)}}{nR_1^{n-1}}. \quad (3.7)$$

Al sustituir los coeficientes de Fourier en la solución (3.6) obtenemos:

$$W_1^{(i)}(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon_2 R_1}{n} \left(\frac{r}{R_1} \right)^n \left(\psi_{n,1}^{(i)} \cos n\theta + \psi_{n,2}^{(i)} \sin n\theta \right). \quad (3.8)$$

A partir del planteamiento del problema inverso, para aplicaciones prác-

ticas utilizaremos la aproximación a $W_1^{(i)}(r, \theta)$, siguiente:

$$W_1^{(i)}(r, \theta) \approx \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} \frac{\varepsilon_2 R_1}{n} \left(\frac{r}{R_1} \right)^n \left(\psi_{n,1}^{(i)} \cos n\theta + \psi_{n,2}^{(i)} \sin n\theta \right). \quad (3.9)$$

Ahora bien, con el conocimiento de $W_1^{(i)}(x, y)$ y a partir de la ecuación dada en (3.3) se deduce que:

$$\frac{\partial W_1^{(i)}}{\partial x} = \varepsilon_1 \frac{\partial V_1^{(i)}}{\partial x}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial W_1^{(i)}}{\partial y} = \varepsilon_1 \frac{\partial V_1^{(i)}}{\partial y}, \quad (3.10)$$

y en consecuencia, al multiplicar por ε_1 a ambos lados de la ecuación (3.2), esta ecuación se escribe como:

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x} \frac{\partial W_1^{(i)}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y} \frac{\partial W_1^{(i)}}{\partial x} = 0, \quad \text{en } \Omega_1, \quad (3.11)$$

que en coordenadas polares equivale a:

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial r} \frac{\partial W_1^{(i)}}{\partial \theta} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \theta} \frac{\partial W_1^{(i)}}{\partial r} = 0, \quad \text{en } \Omega_1. \quad (3.12)$$

La ecuación (3.11) es una ecuación para ε_1 en términos de la función conocida $W_1^{(i)}$. Por el método de las características se puede ver que todas las soluciones de la ecuación (3.11) se escriben como:

$$\varepsilon_1(x, y) = G^{(i)} \left(W_1^{(i)}(x, y) \right). \quad (3.13)$$

Un problema abierto que consiste en encontrar una forma de $G^{(i)}$.

Por ello, en lo que sigue, vamos a suponer que conocemos a la función $G^{(i)} \left(W_1^{(i)}(x_k, y_k) \right)$, en algunos puntos (x_k, y_k) .

3.3. Aproximación de la solución del problema inverso

Notemos que a partir de la ecuación (3.13), obtenemos sólo una función ε_1 y varias expresiones que dependen de i . Por ello para cada i fijo; resolveremos un problema de optimización para aproximar a la solución ε_1 , suponiendo que es de la forma:

$$\varepsilon_1 = \sum_{j=1}^L a_j \varepsilon_1^{(j)}, \quad (3.14)$$

donde $\varepsilon_1^{(j)}$ denota la permitividad de una componente circular, contenida en la región Ω_1 ; L el número máximo de componentes que pueden ser detectables por el equipo de medición y, a_j son constantes distintas de cero.

Como se espera que la permitividad sea constante en cada componente circular, proponemos que las funciones $\varepsilon_1^{(j)}$ sean funciones gaussianas, con centro en (x_j, y_j) y radio r_j , que fuera del círculo toman un valor constante b , y su altura máxima es a_j . En este sentido, vamos a considerar que la función $\varepsilon_1(x, y)$, es de la forma:

$$\varepsilon_1(x, y) = \sum_{j=1}^L a_j \varepsilon_0 \left(\frac{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}{r_j^2} \right) + b;$$

donde ε_0 es una de estas funciones gaussianas ¹, como por ejemplo:

$$\varepsilon_0(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2c^2}}, & \text{si } x^2 + y^2 < R^2; \\ 0, & \text{si } x^2 + y^2 \geq R^2. \end{cases}$$

donde $c > -1$, $c \neq 0$ y R es una constante positiva. Así, el problema de optimización que resolveremos es:

$$\min_{a_j, b, x_j, y_j, r_j} \sum_{i=1}^N \left\| \varepsilon_1 - G^{(i)}(W_1^{(i)}) \right\|_{L_2(|z| \leq R_1)}^2, \quad (3.16)$$

donde N es el número de electrodos y las incógnitas a_j, b, x_j, y_j, r_j , satisfacen las siguientes restricciones:

$$b = \varepsilon^*, \text{ donde } \varepsilon^* \text{ es constante}; \quad (3.17)$$

$$\sqrt{x_j^2 + y_j^2} + r_j \leq R_1; \quad (3.18)$$

$$\varepsilon_{min} \leq b \leq \varepsilon_{max}; \quad (3.19)$$

$$0 < \varepsilon_{min} \leq a_j \leq \varepsilon_{max}; \quad (3.20)$$

$$0 < r_{min} \leq r_j. \quad (3.21)$$

La condición (3.17) significa que la permitividad toma un valor ε^* cons-

¹Esta función se puede obtener al considerar a la curva gaussiana $c(t)$ en el plano yz , dada por:

$$c(t) = \left(t, e^{-\frac{t^2}{2c^2}} \right), \quad -R < t < R;$$

donde $c > -1$, $c \neq 0$ y rotarla sobre el eje z . Obtenemos la forma paramétrica de la superficie:

$$x = t \cos \theta, \quad y = t \sin \theta, \quad z = e^{-\frac{t^2}{2c^2}}; \text{ donde } 0 < \theta \leq \pi, \quad -R_1 < t < R_1. \quad (3.15)$$

tante fuera de cada inclusión

La condición (3.18) significa que toda inclusión debe estar contenida en el círculo de radio R_1 y que a lo más puede ser tangente a este.

Las condiciones (3.19) y (3.20) significan que la permitividad b está acotada por ε_{min} y ε_{max} y la condición (3.21) significa que el radio de cada inclusión r_j debe ser mayor que r_{min} donde r_{min} es el radio de la inclusión más pequeña que puede detectarse por el equipo de medición.

Observamos que las ecuaciones (3.18) y (3.21), determinan que la región en forma de un cono truncado, que es un conjunto compacto y, las ecuaciones (3.17), (3.19) y (3.20), determinan que la región es un paralelepípedo, que es un conjunto compacto. Como el producto cruz de conjuntos compactos es compacto, se tiene que la región es un conjunto compacto; esto significa que existe el mínimo del funcional.

Ahora bien, en lo que sigue vamos a buscar una forma explícita del funcional, en el que aparezcan las incógnitas a optimizar.

Como se cumple:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left\| \varepsilon_1 - G^{(i)}(W_1^{(i)}) \right\|_{L_2(|z| \leq R_1)}^2 &= \sum_{i=1}^N \left\langle \varepsilon_1 - G^{(i)}(W_1^{(i)}), \varepsilon_1 - G^{(i)}(W_1^{(i)}) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^N \langle \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle - 2 \sum_{i=1}^N \left\langle \varepsilon_1, G^{(i)}(W_1^{(i)}) \right\rangle + \sum_{i=1}^N \left\| G^{(i)}(W_1^{(i)}) \right\|_{L_2(|z| \leq R_1)}^2. \end{aligned}$$

El último sumando se puede calcular aparte ya que no depende de ε_1 .

El primer sumando se desarrolla como sigue:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \langle \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle = N \langle \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle = \\
N \sum_{l,j=1}^L & \left\langle a_j \varepsilon_0 \left(\frac{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}{r_j^2} \right) + b, a_l \varepsilon_0 \left(\frac{(x-x_l)^2 + (y-y_l)^2}{r_l^2} \right) + b \right\rangle \\
& = N \sum_{l,j=1}^L a_j a_l \left\langle \varepsilon_0 \left(\frac{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}{r_j^2} \right), \varepsilon_0 \left(\frac{(x-x_l)^2 + (y-y_l)^2}{r_l^2} \right) \right\rangle \\
& \quad + N\pi R_1^2 b^2 + 2Nb \sum_{l,j=1}^L a_j a_l \left\langle \varepsilon_0 \left(\frac{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}{r_j^2} \right), 1 \right\rangle
\end{aligned}$$

Como $\left\langle \varepsilon_0 \left(\frac{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}{r_j^2} \right), \varepsilon_0 \left(\frac{(x-x_l)^2 + (y-y_l)^2}{r_l^2} \right) \right\rangle = 0$ para $j \neq l$; entonces:

ces:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \langle \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle & = N \sum_{j=1}^L a_j^2 \left\| \varepsilon_0 \left(\frac{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}{r_j^2} \right) \right\|_{L_2(|z| \leq r_j)}^2 \\
& \quad + N\pi R_1^2 b^2 + 2Nb \sum_{l,j=1}^L a_j a_l \left\langle \varepsilon_0 \left(\frac{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}{r_j^2} \right), 1 \right\rangle.
\end{aligned}$$

Además, a partir de la norma de la función y mediante el cambio de variable:

ble:

$$\bar{x} = \frac{x-x_j}{r_j}, \quad \bar{y} = \frac{y-y_j}{r_j},$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \left\| \varepsilon_0 \left(\frac{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}{r_j^2} \right) \right\|_{L_2(|z| \leq r_j)}^2 &= \int_{|z| \leq r_j} \left(\varepsilon_0 \left(\frac{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}{r_j^2} \right) \right)^2 dz \\ &= \int_{|\bar{z}| \leq 1} (\varepsilon_0 (\bar{x}^2 + \bar{y}^2))^2 r_j^2 d\bar{z}; \end{aligned}$$

y también:

$$\begin{aligned} \left\langle \varepsilon_0 \left(\frac{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}{r_j^2} \right), 1 \right\rangle &= \int_{|z| \leq r_j} \varepsilon_0 \left(\frac{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}{r_j^2} \right) dz \\ &= \int_{|\bar{z}| \leq 1} \varepsilon_0 (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) r_j^2 d\bar{z}. \end{aligned}$$

De lo anterior, concluimos que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \langle \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle &= N \sum_{j=1}^L a_j^2 \int_{|\bar{z}| \leq 1} [\varepsilon_0 (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)]^2 r_j^2 d\bar{z} + \\ &+ N\pi R_1^2 b^2 + 2Nb \sum_{j=1}^L a_j \int_{|\bar{z}| \leq 1} \varepsilon_0 (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) r_j^2 d\bar{z}. \quad (3.22) \end{aligned}$$

Por otra parte, una expresión para $\langle \varepsilon_1, G^{(i)}(W_1^{(i)}) \rangle$, se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon_1, G^{(i)}(W_1^{(i)}) \rangle &= \int_{|z| \leq R_1} \varepsilon_1 G^{(i)}(W_1^{(i)}) dz \\
&= \int_{|z| \leq R_1} \left(\sum_{j=1}^L a_j \varepsilon_0 \left(\frac{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}{r_j^2} \right) + b \right) G^{(i)}(W_1^{(i)}) dz \\
&= \int_{|z| \leq R_1} \left[\sum_{j=1}^L a_j \left(\varepsilon_0 \left(\frac{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}{r_j^2} \right) \right) \right] G^{(i)}(W_1^{(i)}) dz + \\
&\quad + \int_{|z| \leq R_1} b G^{(i)}(W_1^{(i)}) dz \\
&= \sum_{j=1}^L a_j \int_{|\bar{z}| \leq 1} r_j^2 \varepsilon_0 (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) G^{(i)}(W_1^{(i)}) d\bar{z} \\
&\quad + b \int_{|z| \leq R_1} G^{(i)}(W_1^{(i)}) dz;
\end{aligned}$$

A partir de este resultado, obtenemos:

$$\begin{aligned}
-2 \sum_{i=1}^N \langle \varepsilon_1, G^{(i)}(W_1^{(i)}) \rangle &= -2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^L a_j \int_{|\bar{z}| \leq 1} r_j^2 \varepsilon_0 (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) G^{(i)}(W_1^{(i)}) d\bar{z} - \\
&\quad - 2 \sum_{i=1}^N \int_{|z| \leq R_1} G^{(i)}(W_1^{(i)}) dz. \tag{3.23}
\end{aligned}$$

De (3.22) y (3.23), tenemos una expresión para el funcional, en término de

las incógnitas:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \left\| \varepsilon_1 - G^{(i)}(W_1^{(i)}) \right\|_{L_2(|z| \leq R_1)}^2 &= N \sum_{j=1}^L a_j^2 \int_{|\bar{z}| \leq 1} [\varepsilon_0 (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)]^2 r_j^2 d\bar{z} + \\
&\quad + N\pi R_1^2 b^2 + 2Nb \sum_{j=1}^L a_j \int_{|\bar{z}| \leq 1} \varepsilon_0 (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) r_j^2 d\bar{z} - \\
-2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^L a_j \int_{|\bar{z}| \leq 1} r_j^2 \varepsilon_0 (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) G^{(i)}(W_1^{(i)}) d\bar{z} &- 2 \sum_{i=1}^N b \int_{|z| \leq R_1} G^{(i)}(W_1^{(i)}) dz + \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \int_{|z| \leq R_1} \left(G^{(i)}(W_1^{(i)}) \right)^2 dz. \quad (3.24)
\end{aligned}$$

De la ecuación para el funcional dado en (3.24), podemos observar que las incógnitas aparecen como funciones polinomiales.

Desarrollaremos el funcional para $L = 1$ y encontraremos los valores para a_1 , b , y r_1 . Vamos a considerar que la función $\varepsilon_1(x, y)$, es de la forma:

$$\varepsilon_1(x, y) = a_1 e^{-\frac{((x-x_1)^2 + (y-y_1)^2)}{2r_1^2 c^2}} + b;$$

3.4. Solución del problema inverso cuando se tiene una inclusión circular

El funcional dado en (3.24), debe minimizarse a partir del conocimiento de $G^{(i)}(W_1^{(i)})$ en algunos puntos del interior de Ω_1 . En lo que sigue, vamos a suponer que tenemos un fluido bifásico, en el que existe sólo una inclusión de centro (x_1, y_1) y radio r_1 ; vamos a obtener una aproximación

a la permitividad ϵ_1 en el interior del círculo de radio R_1 . Para esto, utilizaremos el funcional obtenido en la sección anterior.

Hemos visto que el primer sumando es:

$$\sum_{i=1}^N \langle \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle = N a_1^2 \left\| e^{-\frac{((x-x_1)^2+(y-y_1)^2)}{2r_1^2 c^2}} \right\|_{L_2(|z| \leq r_1)}^2 + N \pi R_1^2 b^2 + 2b N a_1 \left\langle e^{-\frac{((x-x_1)^2+(y-y_1)^2)}{2r_1^2 c^2}}, 1 \right\rangle.$$

Además, a partir de la norma de la función y mediante el cambio de variable:

$$\bar{x} = \frac{x - x_1}{r_1}, \quad \bar{y} = \frac{y - y_1}{r_1},$$

obtenemos:

$$\left\| e^{-\frac{((x-x_1)^2+(y-y_1)^2)}{2c^2 r_1^2}} \right\|_{L_2(|z| \leq r_1)}^2 = \int_{|\bar{z}| \leq 1} \left(e^{-\frac{(\bar{x}^2+\bar{y}^2)}{2c^2}} \right)^2 r_1^2 d\bar{z};$$

Luego usando el cambio de variable $\bar{x} = r \cos \theta$ y $\bar{y} = r \sin \theta$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{|\bar{z}| \leq 1} \left(e^{-\frac{(\bar{x}^2+\bar{y}^2)}{2c^2}} \right)^2 r_1^2 d\bar{z} &= -r_1^2 \frac{c^2}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(-\frac{2}{c^2} r e^{-\frac{r^2}{c^2}} \right) dr d\theta \\ &= -r_1^2 \frac{c^2}{2} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{c^2}} \Big|_0^1 d\theta \\ &= -r_1^2 c^2 \pi \left(e^{-\frac{1}{c^2}} - 1 \right) \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} \left\langle e^{-\frac{((x-x_1)^2+(y-y_1)^2)}{2c^2r_1^2}}, 1 \right\rangle &= \int_{|z|\leq r_1} e^{-\frac{((x-x_1)^2+(y-y_1)^2)}{2c^2r_1^2}} dz \\ &= \int_{|\bar{z}|\leq 1} e^{-\frac{(\bar{x}^2+\bar{y}^2)}{2c^2}} r_1^2 d\bar{z}. \end{aligned}$$

Luego usando el cambio de variable $\bar{x} = r\cos\theta$, $\bar{y} = r\sin\theta$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{|\bar{z}|\leq 1} e^{-\frac{(\bar{x}^2+\bar{y}^2)}{2c^2}} r_1^2 d\bar{z} &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r_1^2 e^{-\frac{r^2}{2c^2}} r dr d\theta \\ &= -r_1^2 c^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(-\frac{r}{c^2}\right) e^{-\frac{r^2}{2c^2}} dr d\theta \\ &= -r_1^2 c^2 \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2c^2}} \Big|_0^1 d\theta \\ &= -r_1^2 c^2 2\pi \left(e^{-\frac{1}{2c^2}} - 1\right) \end{aligned}$$

De lo anterior obtenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \langle \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle &= -Nr_1^2 a_1^2 c^2 \pi \left(e^{-\frac{1}{2c^2}} - 1\right) + N\pi R_1^2 b^2 \\ &\quad - 4r_1^2 N b a_1 c^2 \pi \left(e^{-\frac{1}{2c^2}} - 1\right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Por otra parte, la expresión para $\langle \varepsilon_1, G^{(i)}(W_1^{(i)}) \rangle$, se transforma en:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_1, G^{(i)}(W_1^{(i)}) \rangle &= a_1 \int_{|\bar{z}|\leq 1} r_1^2 e^{-\frac{\bar{x}^2+\bar{y}^2}{2c^2}} G^{(i)}(W_1^{(i)}) d\bar{z} \\ &\quad + b \int_{|z|\leq R_1} G^{(i)}(W_1^{(i)}) dz; \end{aligned}$$

A partir de este resultado, obtenemos:

$$\begin{aligned}
-2 \sum_{i=1}^N \left\langle \varepsilon_1, G^{(i)}(W_1^{(i)}) \right\rangle &= -2 \sum_{i=1}^N a_1 \int_{|\bar{z}| \leq 1} r_1^2 e^{-\frac{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)}{2c^2}} G^{(i)}(W_1^{(i)}) d\bar{z} - \\
&- 2 \sum_{i=1}^N b \int_{|z| \leq R_1} G^{(i)}(W_1^{(i)}) dz. \quad (3.26)
\end{aligned}$$

De (3.25), (3.26) y el último sumando de la ecuación (3.24) tenemos una expresión para el funcional, en término de las incógnitas:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \left\| \varepsilon_1 - G^{(i)}(W_1^{(i)}) \right\|_{L_2(|z| \leq R_1)}^2 &= -Na_1^2 r_1^2 \pi \left(e^{-\frac{1}{c^2}} - 1 \right) + N\pi R_1^2 b^2 - \\
-4Nbr_1^2 a_1 c^2 \pi \left(e^{-\frac{1}{2c^2}} - 1 \right) &- 2 \sum_{j=1}^N a_1 \int_{|\bar{z}| \leq 1} r_1^2 e^{-\frac{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)}{2c^2}} G^{(i)}(W_1^{(i)}) d\bar{z} - \\
-2 \sum_{i=1}^N b \int_{|z| \leq R_1} G^{(i)}(W_1^{(i)}) dz &+ \sum_{i=1}^N \int_{|z| \leq R_1} \left(G^{(i)}(W_1^{(i)}) \right)^2 dz. \quad (3.27)
\end{aligned}$$

De la ecuación para el funcional dado en (3.27), encontraremos los valores para a_1, b y r_1 que minimizan el funcional y con ello una aproximación para $\varepsilon_1(x, y)$ que estamos buscando.

Observamos que la integral del cuarto sumando de (3.27)

$$-2 \sum_{j=1}^N a_1 \int_{|\bar{z}| \leq 1} r_1^2 e^{-\frac{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)}{2c^2}} G^{(i)}(W_1^{(i)}) d\bar{z}$$

en el círculo de radio r_1 , $G^{(i)}(W_1^{(i)})$ es igual que $r_1^2 e^{-\frac{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)}{2c^2}}$; más aún si la aproximación a la solución es lo suficientemente buena, entonces podremos considerar que la integral anterior está dada por:

$$\begin{aligned}
-2 \sum_{j=1}^N a_1 \int_{|\bar{z}| \leq 1} r_1^2 e^{-\frac{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)}{2c^2}} G^{(i)}(W_1^{(i)}) d\bar{z} &= -2 \sum_{j=1}^N a_1 \int_{|\bar{z}| \leq 1} \left(e^{-\frac{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)}{2c^2}} \right)^2 r_1^4 d\bar{z} \\
&= 2Na_1 r_1^4 \frac{c^2}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(-\frac{2}{c^2} r e^{-\frac{r^2}{c^2}} \right) dr d\theta \\
&= 2Na_1 r_1^4 \frac{c^2}{2} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{c^2}} \Big|_0^1 d\theta \\
&= 2Na_1 r_1^4 c^2 \pi \left(e^{-\frac{1}{c^2}} - 1 \right)
\end{aligned}$$

Así finalmente tenemos la expresión del funcional a minimizar, que es como sigue:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \left\| \varepsilon_1 - G^{(i)}(W_1^{(i)}) \right\|_{L_2(|z| \leq R_1)}^2 &= -Na_1^2 r_1^2 \pi \left(e^{-\frac{1}{c^2}} - 1 \right) + N\pi R_1^2 b^2 - \\
-4Nbr_1^2 a_1 c^2 \pi \left(e^{-\frac{1}{2c^2}} - 1 \right) &+ 2Na_1 r_1^4 c^2 \pi \left(e^{-\frac{1}{c^2}} - 1 \right) - \\
-2 \sum_{i=1}^N b \int_{|z| \leq R_1} G^{(i)}(W_1^{(i)}) dz &+ \sum_{i=1}^N \int_{|z| \leq R_1} \left(G^{(i)}(W_1^{(i)}) \right)^2 dz. \quad (3.28)
\end{aligned}$$

Observemos que el funcional a minimizar no dependerá de x_1 , y_1 y que además el valor mínimo que puede alcanzar r_1 , es cero. Sin embargo, r_1 no puede ser cero; pues $r_1 \geq r_{min}$ que es el radio detectable por el equipo de medición; esto nos lleva a concluir que necesitamos otro método que nos permita encontrar los valores de r_1 , x_1 y y_1 .

Por lo anterior, vamos a encontrar los valores para a_1 y b , que minimicen el funcional. Para esto, debe cumplirse que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial a_1} &= -a_1 r_1^2 \pi \left(e^{-\frac{1}{c^2}} - 1 \right) - 2br_1^2 c^2 \pi \left(e^{-\frac{1}{2c^2}} - 1 \right) + r_1^4 c^2 \pi \left(e^{-\frac{1}{c^2}} - 1 \right) = 0, \\
\frac{\partial F}{\partial b} &= N\pi R_1^2 b - 2Nr_1^2 a_1 c^2 \pi \left(e^{-\frac{1}{2c^2}} - 1 \right) - 2 \sum_{i=1}^N \int_{|z| \leq R_1} G^{(i)}(W_1^{(i)}) dz = 0;
\end{aligned}$$

y resolviendo el sistema anterior tenemos que:

$$b = \frac{2Nr_1^2c^4\pi(e^{-\frac{1}{2c^2}} - 1) + 2\sum_{i=1}^N \int_{|z|\leq R_1} G^{(i)}(W_1^{(i)})dz}{N\pi R_1^2 + 4Nr_1^2c^4(e^{-\frac{1}{2c^2}} - 1)^2} \quad (3.29)$$

y

$$a_1 = c^2 - \frac{2c^2(e^{-\frac{1}{2c^2}} - 1)[2Nr_1^2c^4\pi(e^{-\frac{1}{2c^2}} - 1) + 2\sum_{i=1}^N \int_{|z|\leq R_1} G^{(i)}(W_1^{(i)})dz]}{(e^{-\frac{1}{c^2}} - 1)[N\pi R_1^2 + 4Nr_1^2c^4(e^{-\frac{1}{2c^2}} - 1)^2]} \quad (3.30)$$

3.5. Experimentos numéricos

En esta sección vamos a construir experimentos sintéticos con el objetivo de mostrar la recuperación de la distribución de permitividades en Ω_1 . Vamos a aproximar numéricamente los valores de r_1 , x_1 y y_1 , a partir del conocimiento de las permitividades en un número finito de puntos al interior de Ω_1 .

Para obtener una aproximación a los valores de la permitividad en la inclusión y fuera de ella, usaremos las aproximaciones dadas para a_1 y b obtenidas analíticamente. Es decir vamos a resolver el problema inverso a partir del conocimiento de las permitividades en una cantidad finita de puntos (x_k, y_k) , $k = 1, 2, \dots, k_0$ al interior de Ω_1 . Para ello, vamos a suponer conocidos los valores $G^{(i)}(W_1^{(i)}(x_k, y_k))$.

Ejemplo 1.- Consideramos un primer caso en que se tiene una distribución de dos fases; una de ellas consiste en una inclusión circular en Ω_1^* con una permitividad relativa $\epsilon_1(x, y) = 80$; mientras que su complemento tiene

una permitividad relativa $\epsilon_c(x, y) = 16,5$; como se muestra en la Figura 3.1, donde Ω_1 es un círculo de radio 2 y Ω_1^* es un círculo de radio 0.5.

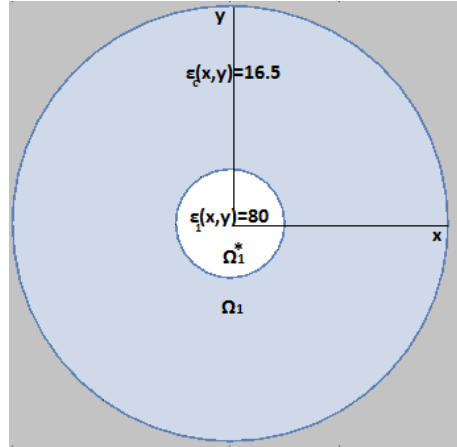


Figura 3.1: Distribución de permitividades en Ω_1 con inclusión circular concéntrica Ω_1^* .

Para recuperar x_1 y_1 y r_1 ; utilizamos una aproximación numérica; la cual nos mostrará la geometría de la inclusión, a partir del conocimiento de la permitividad en un número finito de puntos (x_k, y_k) dentro de Ω_1 .

Esta aproximación numérica consiste en elegir un punto $(x_k, y_k) \in \Omega_1$; del cual se conoce su permitividad $G^{(i)}(W_1^{(i)}(x_k, y_k))$ para posteriormente construir y agrupar a todos los puntos que tengan la misma permitividad, en un conjunto A .

A continuación se define el radio r_{min} del menor círculo detectable por el equipo de medición y se construyen círculos con centro en cada punto del conjunto A y radio r_{min} . La unión de estos círculos conforman una primera aproximación a la región dentro de Ω_1 que tiene permitividad $G^{(i)}(W_1^{(i)}(x_k, y_k))$, y cuyo complemento será la aproximación a la región

dentro de Ω_1 con permitividad distinta que denotamos por ϵ_2^* .

Como un segundo paso, se toman parejas de puntos en Ω_1 y se construye el círculo de área mínima que contenga a esos puntos y cuyo radio sea mayor o igual a r_{min} , siempre que este círculo no contenga a un punto que tenga permitividad ϵ_2^* nuevamente se unen estos círculos para formar una segunda aproximación a la región dentro de Ω_1 con permitividad ϵ_1^* y cuyo complemento tendrá permitividad ϵ_2^* .

En un tercer paso, se toman tercias de puntos en Ω_1 y se construye el círculo de área mínima que contenga a estos puntos y cuyo radio sea mayor o igual que r_{min} , siempre que este círculo no contenga a un punto que tenga permitividad ϵ_2^* ; al unir estos círculos se obtiene un tercera aproximación. Bajo el mismo esquema se eligen $4,5,\dots,l$ para $l < k$; de manera que al final se obtiene una aproximación a la distribución de permitividad dentro de Ω_1 .

Los resultados se muestran para dos casos:

- Caso 1: Región Ω_1 con una inclusión circular concéntrica. Así después de aplicar el algoritmo y de acuerdo a los datos $G^{(i)}(W_1^{(i)}(x_k, y_k))$; se obtienen distintas recuperaciones para distintos números de datos conocidos; estas recuperaciones se muestran en la Figura 3.2

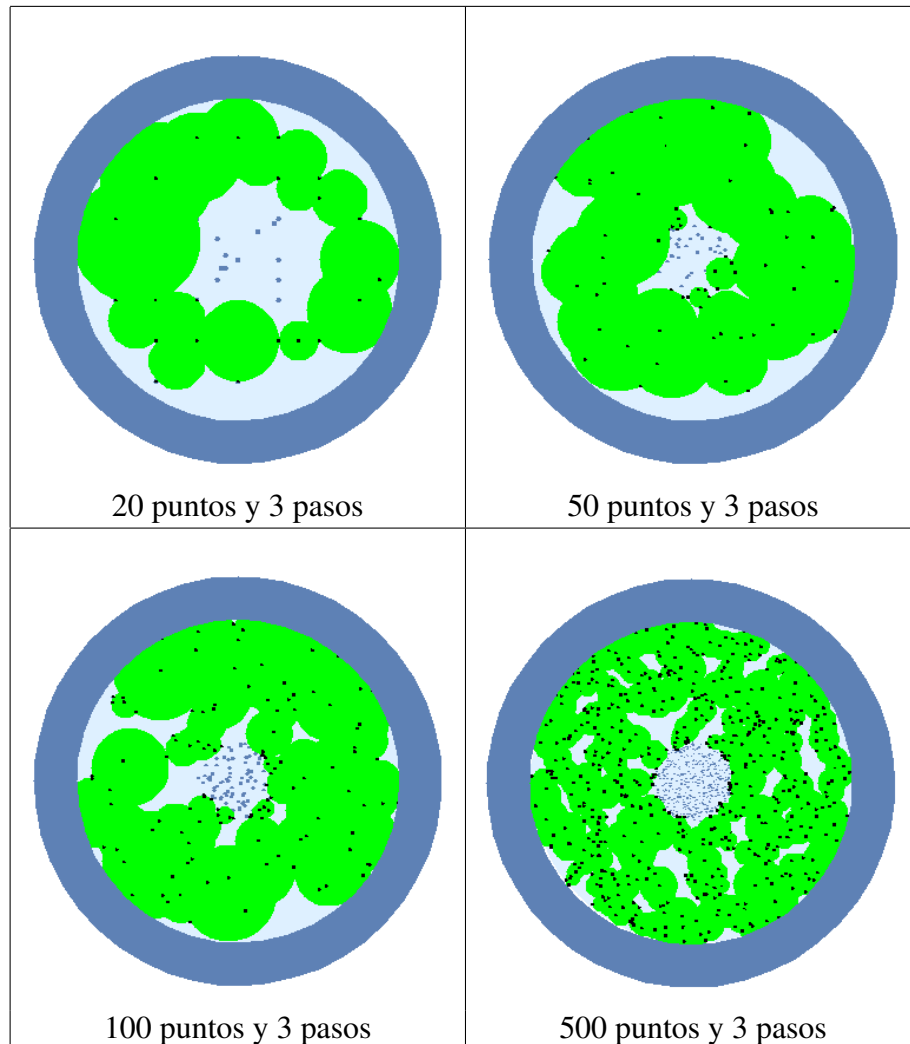


Figura 3.2: Recuperación de la forma y localización de las fases aplicando el algoritmo.

A continuación se hace una descripción de la recuperación de las fases siguiendo los pasos de algoritmo, obteniendo la forma y localización.

Como podemos observar cuando se tienen 20 puntos, la recuperación

no se ve claramente en la imagen la separación de las dos fases pues la unión de círculos verdes deja espacios en azul claro; sin embargo en la imagen con 50 puntos la nube verde que es la unión de puntos con la misma permitividad se empieza a visualizar en el centro de el círculo; pero a diferencia de la imagen con 100 puntos la nube verde cubre casi todo el círculo y se empieza a visualizar las dos fases y, por último con 500 puntos se distingue claramente la distribución de las dos fases.

- Caso 2: Región Ω_1 con una inclusión circular no concéntrica. Consideramos ahora el caso en que se tiene una distribución de dos fases; una de ellas consiste en una inclusión circular en Ω_1^* que no está necesariamente en el origen, con una permitividad relativa $\epsilon(x, y) = 80$; mientras que su complemento tiene una permitividad relativa $\epsilon(x, y) = 16,5$.

En lo que sigue resolveremos el problema inverso a partir del conocimiento de las permitividades en una cantidad finita de puntos (x_k, y_k) , $k = 1, 2, 3, \dots, k_0$ aleatorios al interior de Ω_1 . Para ello, vamos a suponer conocidos los valores $G^{(i)}(W_1^{(i)}(x_k, y_k))$ en esos puntos.

Así, después de haber aplicado el algoritmo y de acuerdo a los datos $G^{(i)}(W_1^{(i)}(x_k, y_k))$; se obtienen distintas recuperaciones para distintos números de datos conocidos; estas recuperaciones se muestran en la Figura 3.3

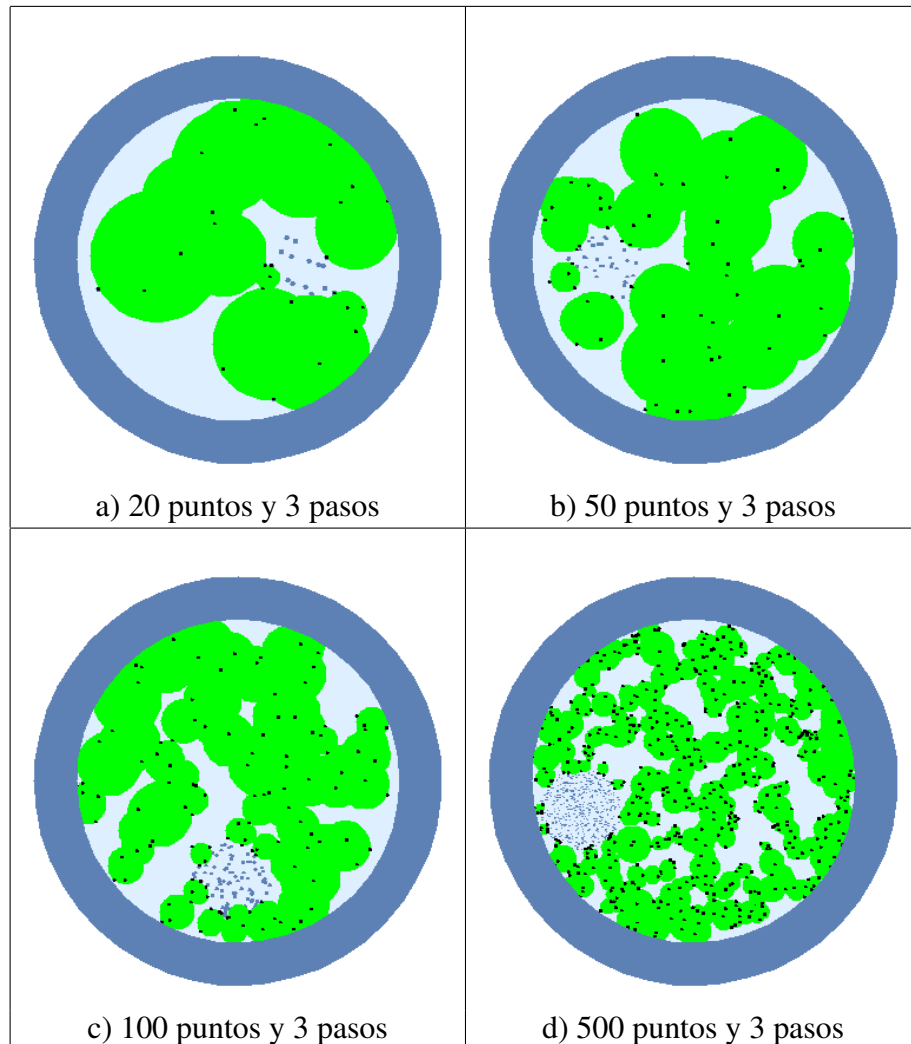


Figura 3.3: Recuperación de la forma y localización de las fases aplicando el algoritmo.

Como podemos observar cuando se tienen 20 puntos, la recuperación no se ve claramente en la imagen la separación de las dos fases pues la unión de círculos verdes deja espacios en azul claro; mas sin embargo en la imagen con 50 puntos la nube verde que es la unión de puntos con la misma permitividad se empieza a visualizar en el

centro de el círculo; pero a diferencia de la imagen con 100 puntos la nube verde cubre casi todo el círculo y se empieza a visualizar las dos fases y, por último con 500 puntos se distingue claramente la distribución de las dos fases.

Conclusiones

Con el desarrollo de la teoría para lograr resolver el problema inverso de encontrar la permitividad del flujo nos dimos cuenta que, no es tan simple como esperábamos ya que en el caso de un flujo bifásico sólo nos enfocamos en un fluido con patrón de flujo anular, de ahí la inclusión circular que desarrollamos con el algoritmo, entre las desventajas del desarrollo de la solución fue que el funcional a minimizar no dependerá de x_1 , y_1 y que además el valor mínimo que puede alcanzar r_1 , es cero. Sin embargo, r_1 no puede ser cero; pues $r_1 \geq r_{min}$ que es el radio detectable por el equipo de medición; esto nos llevo a concluir que necesitamos otro método que nos permita encontrar los valores de r_1 , x_1 y y_1 . También quedamos a la espera de $G^{(i)}(W_1^{(i)}(x_k, y_k))$ para cada punto que suponemos que conocemos las permitividades en una cantidad finita de puntos.

Como problemas abiertos de este trabajo se encuentran los siguientes:

- 1.- Buscar otras formas para obtener teóricamente los valores de r_1, x_1 y y_1 .
- 2.- Proponer nuevas formas de minimización del funcional; para lograr identificar la inclusión, a partir del conocimiento de $G^{(i)}(W_1^{(i)}(x_k, y_k))$.

Bibliografía

- [1] J.L. BACCA MORENO. Un instrumento virtual para tomografía por capacitancia eléctrica. Tesis de Maestría en Electrónica, INAOE; 2013.

- [2] A. ALCALÁ VALLEJO, Un algoritmo de inversión basada en ecuaciones integrables para resolver el problema inverso de Tomografía de Capacitancia eléctrica para flujos bifásicos; Tesis de Maestría en Modelación Matemática, UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA ; 2017.

- [3] J.C Gamio, C. Ortiz-Alemán, R. Martín “Electrical capacitance tomography two-phase oil-gas, flow imaging by the linear back-projection algorithm”, Geofísica Internacional (2005), Vol.44, No. 3, pp.265-273

- [4] S.Reyes Mora. Construcción de un problema sintético de tomografía de capacitancias para un flujo dieléctrico bifásico anular en un ducto. FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS-

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA;
2004.

- [5] J.L. Fernández Marrón, J. Alberdi Primicia, J.M. Barcala Riveira, “Desarrollo de algoritmos de reconstrucción de imágenes en tomografía de capacitancia eléctrica”. Informe técnico CEMAT. Octubre de 2007.
- [6] A. Fraguela C., J. Oliveros, L. Cervantes, M. Morín, y S. Gómez. “Un algoritmo no iterativo para la tomografía de capacitancia eléctrica”. *Revista Mexicana de Física* (2005) 51 (3), pp. 236-242
- [7] S. Reyes, A. Fraguela & E. Romano, Mathematical development of the obtaining of the minimal area, of a detectable unhomogeneity for the equipment of measurement of capacitances, for a two-phase flow to annul in a duct. *International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences*. Vol. 3, issue 2. pp. 475-484 e ISSN 076-734x, EISSN 2076-7366 (2012).
- [8] S. Reyes Mora. Cálculo de capacitancias mutuas para el caso de un fluido bifásico anular dieléctrico con una inclusión circular, Tesis de Maestría, Maestría en Ciencias Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, julio de 2007.
- [9] A. Piceno Rivera. El problema de conductividad inversa aplicada a la Tomografía de Capacitancia bajo la condición de irrotacionalidad

de flujo. Tesis de Doctorado en Modelación Matemática, Universidad Tecnológica de la Mixteca. 2020.

- [10] A. Kirsch. An introduction to the mathematical theory of inverse problems Springer; New York; 2011.