# Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

# Aplicación de la Teoría de Inventarios a una empresa Poblana

Tesis

Que para obtener el Título de

**Lic. En Matemáticas Aplicadas**

Presenta

Areli Rojas De Gante

Director de Tesis:

Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar

Puebla, Pue.- Jun 05, 2013

# Índice

# Introducción

Sin duda alguna las compañías dedicadas a la compra-venta de productos o bien a la fabricación de los mismos, se han enfocado en tener un inventario, lo que les ha ocasionado un gran conflicto al no saber si es mejor tener poca mercancía en inventario o tener una reserva extra a la cantidad almacenada de productos para así evitar fluctuaciones de la demanda o la demora de los provedores. A partir de este tipo de problemas surge la necesidad de encontrar un balance en la existencia del inventario con costos mínimos en la inversión del mismo.

Anteriormente, llevar el control del inventario era independiente de la producción, en principio el control de producción era una de las funciones que el encargado de línea tenía. Con el paso del tiempo se necesitó del oficinista para que se llevara un mejor control y así poder relacionar las ventas con el tiempo de producción. De esta forma surge el control de inventarios, pues el oficinista empezó a planear todo lo relacionado con la producción como ordenar el material, entre otros preparativos.

El concepto del control de inventarios se fue desarrollando poco a poco y fue en 1915 cuando se publicó por primera vez el concepto básico de tamaño de lote económico y el enfoque estadístico para la determinación de los puntos de reorden fue presentado en 1934 por R.H. Wilson.[8]

El movimiento de la administración científica a partir de los primeros años de la década de 1890 hasta la Segunda Guerra Mundial ayudaron a reconocer que el proceso de planeación y el control de producción son actividades grupales que se ven reflejadas en un buen control de inventarios. Posteriormente surge la investigación de operaciones que se deriva de la Segunda Guerra Mundial, cuando los científicos enfocan su atención en el control de la producción y de los inventarios.

En este trabajo de tesis se estudia el caso de una empresa poblana con múltiples tiendas expendedoras de productos de diferentes tipos, los cuales abarcan desde botanas y refrescos hasta objetos decorativos. Dicha empresa no cuenta con un almacén pero se ha detectado que, en las diferentes tiendas, permanecen varios productos por largos periodos de tiempo y que ésto podría estar generando cierta pérdida a la empresa.

Para atacar el problema planteado por la empresa se hace una revisión de la Teoría de Inventarios expuesta en la literatura y se decide el modelo de inventarios que mejor se ajuste al problema. Se aplica tanto el modelo determinístico como el estocástico para satisfacer las necesidades de la empresa. Así pues, en el Capítulo uno se expone una descripción detallada de las componentes más importantes de los modelos de inventarios, como son los costos involucrados entre los que podemos encontrar Costos de fabricación, Costos de almacenamiento o mantenimiento, Costos de penalización por no satisfacer la demanda, Rendimientos o ingresos, etc.

Posteriormente en el Capítulo dos se hace un estudio del Modelo Determinístico de Revisión Continua, en este modelo lo más importante a considerar es que la demanda sea constante y conocida. Durante el capítulo se desarrollan las fórmulas que nos dan la solución óptima para este tipo de problemas. En el Capítulo tres se expone el mismo modelo que en el capítulo dos, la única diferencia es que se incluyen faltantes planeados, es decir, si el nivel de inventario no satisface la demanda, existe la posibilidad de que posteriormente sea cubierta y se debe considerar al momento de emitir una nueva orden de productos.

Para este trabajo se expone el Capítulo cuatro como una extensión del capítulo dos, donde el costo unitario de cada producto disminuye en la medida que aumenta el tamaño del lote a pedir, sin embargo solamente se hace mención pues para nuestro estudio no será útil pues el costo de cada producto que la empresa compra siempre es fijo independientemente de la cantidad que adquiera. Finalmente, para terminar con la parte teórica, en los Capítulos cinco y seis se expone todo lo relacionado a los Modelos Estocásticos o Probabilísticos, que a diferencia del Modelo Determinístico la demanda es aleatoria con función de probabilidad continua, para ello se considera el caso donde no se permiten faltantes y el caso donde se permiten faltantes respectivamente, también se desarrollan las fórmulas que nos ayudarán a encontrar la solución óptima siempre que nos encontremos con un problema de este tipo.

Finalmente en el Capítulo siete se plantea el problema y basándonos en la teoría de los capítulos anteriores se aplica el Modelo que mejor se ajuste al mismo para posteriormente dar solución óptima al problema planteado.

Para poder desarrollar nuestro tema y familiarizarnos con los términos involucrados, es importante dar una definición de los mismos. Empezaremos por el más importante y para ello nos preguntamos ¿Qué es un **inventario**? un inventario es un conjunto de mercancías o artículos terminados que permanecen almacenados en una empresa, ya sea para producir algunos artículos o simplemente para venderlos. Aunque estos artículos están sin utilizarse poseen un valor económico y que en la mayoría de los casos ocaciona grandes costos a las empresas.

Actualmente existe una preocupación en el mundo de los negocios y sus inventarios, pues debido a la mala administración de los mismos, las empresas suelen caer en un **problema de inventario**, el cual se genera cuando existe la necesidad de guardar bienes físicos o mercancias para poder satisfacer la demanda de los mismos sobre un tiempo determinado. Así, en los problemas de inventario es común encontrar un sobre-almacenamiento o sub-almacenamiento donde ambos casos son costosos. De esta forma, es necesario tomar una buena decisión de cuándo y en qué cantidad hacer pedidos para balancear dichos costos, para ello es indispensable minimizar una función de costos que se ajuste a nuestro problema y nos permita dar solución al mismo.

Para poder decidir el intervalo de tiempo en pedir una cierta cantidad de artículos, es indispensable recurrir a los **modelos**

**de inventarios** pues su objetivo principal es determinar dichas incógnitas. Una de las primeras cosas que debemos hacer en la aplicación de un modelo de inventarios, es especificar los costos involucrados, ya que éstos últimos, son los encargados de determinar la rentabilidad de nuestra política de inventario, debido a que aumentan o dismuniyen dependiendo del nivel de inventario que tengamos. Algunos de los costos más importantes son el costo de ordenar, costo por mantener y costos por faltantes, mismos que describiremos acontinuación [4].

**Costo de mantener**, también llamado *costo de almacenamiento*, representa los costos que se generan por mantener los productos en inventario hasta que se usan o se venden y además es proporcional al nivel de inventario. Para muchas empresas el costo de mantener un inventario, oscila entre el 15% y el 45% del valor promedio del mismo, dentro de este costo se involucran el capital invertido del inventario, seguros, impuestos sobre propiedades, depreciación física y obsolencia.

**Costo por ordenar**, este costo es fijo por unidad, pero varía con el número de órdenes que se coloquen y puede representarse por una función $c(z)$ donde su forma más sencilla es aquella que es directamente proporcional a la cantidad ordenada o producida, es decir $cz$, donde $c$ es el precio unitario pagado. Otro supuesto es que $c(z)$ está compuesta por dos partes (un término directamente proporcional a la cantidad ordenada y una constante $K$ para $z > 0$ y 0 para $z = 0$), es decir:

$$c(z) = \text{costo de ordenar z unidades}$$

$$c(z) = \begin{cases} 0, & \text{si } z = 0 \\ K + cz & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

donde $K$ es el costo fijo o de preparación y $c$ el costo unitario.

Este costo incluye la orden de compra, gastos de pedido, embarque, recepción, salarios proporcionales de compradores, etc. Es importante resaltar que se maneja como sinónimo ordenar o producir, dependiendo del tipo de empresa de la cual estemos hablando, en nuestro caso manejaremos el término ordenar pues los datos a trabajar son de una empresa que vende productos terminados.

**Costo por faltantes** este tipo de costos se generan cuando la demanda excede el nivel de inventario, es decir, nos genera costo pues estamos perdiendo ingresos por no satisfacer a nuestros clientes y no conforme con eso se genera una mala imagen para la empresa. Todo ello puede ocasionar la pérdida de clientes e incluso del mismo negocio.

Como ya hemos mencionado, los costos influyen radicalmente en los modelos de inventarios; sin embargo es importante definir algunos otros términos como demanda, punto de reorden, ingresos, etc., que nos serán útiles más adelante para el desarrollo de nuestro trabajo.

**Demanda** de un producto, es la cantidad de unidades necesarias que se extraen del inventario para algún uso en específico y durante un periodo específico. Es importante resaltar que la demanda es un factor importante para determinar qué política de inventarios usaremos en nuestro problema.

**Punto de reorden** es la posición del inventario en la cual debe hacerce un pedido para colocar una nueva orden, el objetivo principal de este reabastecimiento es seguir satisfaciendo la producción o la venta mientras que llega el otro pedido, para así no caer en costos por faltantes.

El **ingreso** a diferencia del punto de reorden y de la demanda no es tan relevante a menos que estemos aplicando un modelo de inventarios con faltantes, pues de esta forma la pérdida de ingresos se incluye en los costos de penalización por faltantes, debido a que la empresa no cubre la demanda y se refleja en la pérdida de ventas. Por lo tanto el rendimiento de la empresa depende de la política de inventarios.

# Capítulo 1

# Modelos Determinísticos

## 1.1 Modelos Determinísticos de Revisión Continua

Los problemas de inventarios que enfrentan las empresas actualmente son sus niveles de inventarios, pues la mayoría no logra determinar ¿Cuándo y cuánto pedir? para ello vamos a desarrollar el **modelo del lote económico o modelo EOQ**, el cual nos dará un mejor panorama de este tipo de problemas, en este modelo se hacen los siguientes supuestos:

1. Se considera que la demanda es constante y conocida por unidad de tiempo y la denotaremos por $d$.

2. También se hace el supuesto de que el inventario siempre se reabastece con una cantidad fija $Q$, misma que llega en el tiempo deseado.

3. No se permiten faltantes.

Para este modelo se manejan los siguientes costos:

$K$ = costo de preparación para ordenar un lote.
$c$ = costo unitario de producir o comprar cada unidad.
$h$ = costo de mantener el inventario por unidad, por unidad de tiempo.

El objetivo principal de este modelo es determinar la frecuencia con que se debe reabastecer un inventario y así mismo definir qué cantidad se va a colocar cada vez que se genere una nueva orden de tal forma que se minimicen los costos por unidad de tiempo.

Para ello, anexamos las siguientes definiciones que también nos serán de gran importancia.

El *tiempo de entrega* es el tiempo que se emplea entre colocar una orden y recibirla.

Se llevará acabo un proceso de *revisión continua* es decir, se podrá reabastecer el inventario cuando el nivel del mismo baje lo suficiente.

Un *ciclo*, será el tiempo entre reabastecimientos consecutivos del inventario, en general la longitud de un ciclo es $Q/d$ [1].

El costo total por unidad de tiempo $T$ se obtiene de la siguiente manera:

$$\text{Costo de producir u ordenar por ciclo} = K + cQ$$

El nivel de inventario promedio durante un ciclo es $(Q+0)/2=Q/2$ unidades, lo anterior por el supuesto dos de este modelo, pues reabasteceremos cuando nuestro nivel de inventario llega a cero. Por lo tanto el costo correspondiente es $hQ/2$ por unidad de tiempo. Como la longitud del ciclo es $Q/d$

$$\text{Costo de mantener por ciclo} = hQ^2/2d$$

Por lo tanto,

$$\text{costo total por ciclo } = K + cQ + \frac{hQ^2}{2d}$$

por lo que el costo total por unidad de tiempo es:

$$T = \frac{K + cQ + hQ^2/(2d)}{Q/d} = \frac{K}{Q/d} + \frac{cQ}{Q/d} + \frac{hQ^2/(2d)}{Q/d} = \frac{dK}{Q} + dc + \frac{hQ}{2} \tag{1.1}$$

Como $Q$ representa la cantidad que se está ordenando y se coloca cuando el nivel de inventario llega a cero, entonces $Q\epsilon(0,\infty)$. [9]

Para poder encontrar el valor que minimiza $T(Q^*)$, es necesario derivar (2.1) con respecto a $Q$ e igualar a cero, por lo que tenemos:

$$\frac{\partial T}{\partial Q} = -dKQ^{-2} + 0 + \frac{h}{2} = -\frac{dK}{Q^2} + \frac{h}{2}$$

Luego, igualamos a cero y despejamos $Q$ de esta forma obtenemos:

$$-\frac{dK}{Q^2}+\frac{h}{2}=0$$

$$\frac{dK}{Q^2}=\frac{h}{2}$$

$$Q^2=dK/(h/2)$$

por lo tanto

$$Q^*=\sqrt{\frac{2dK}{h}}$$

De esta forma obtendremos nuestra cantidad óptima a pedir y solamente resta encontrar el tiempo óptimo de ciclo, para así tener nuestra solución óptima completa. Como ya mencionamos, el tiempo de ciclo está dado por la cantidad a colocar en nuestro inventario, sobre la demanda. Es por eso que el tiempo de ciclo óptimo se da como sigue:

$$t^*=\frac{Q^*}{d}=\sqrt{\frac{2K}{dh}}$$

Es muy importante darnos cuenta que $Q^*$ y $t^*$ cambian considerablemente, dependiendo de los cambios que tengan $K$,$d$ o $h$ como se muestra en la figura 1.1, si $K$ crece, tanto $Q^*$ como $t^*$ crecen. Si $h$ aumenta, tanto $Q^*$ como $t^*$ disminuyen es decir, tendremos un nivel de inventario menor. Finalmente si $d$ crece, $Q^*$ crece pero $t^*$ disminuye, es decir, tendremos pedidos más grandes y más frecuentes.

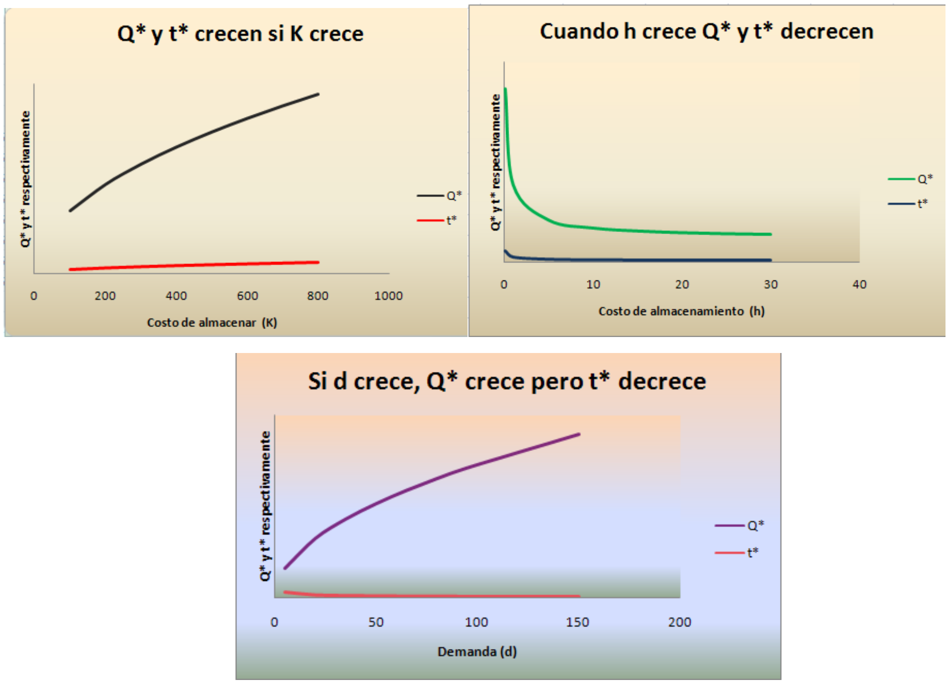



Figura 1.1: Cambios de $Q^*$ y $t^*$

### Ejemplo 2.1

Una empresa vende artículos terminados, mismos que se venden a una demanda de 18000 unidades por año, el costo de almacenar cada unidad es de \$1.2 por año y el costo de compra es de \$400.00, así mismo el costo unitario de los artículos es de \$1.00. Dicha empresa está interesada en determinar cuándo pedir un lote de productos y cuántos productos pedir, suponiendo que el año tiene 365 días.

*Solución:*
Tenemos nuestros costos, es decir:

$$K = 400 \qquad h = 1.20 \qquad d = 18000$$

de manera que

$Q^* = \sqrt{\frac{2(18000)(400)}{1.2}} = 3465 \ \ unidades$
y
$t^* = \frac{3465}{18000} = 48.125 \quad \text{días}$

Por lo tanto, nuestra solución óptima es pedir 3465 artículos cada 48 días.

## 1.2 Modelo EOQ con Faltantes Planeados

Cuando trabajamos con inventarios se presentan algunos inconvenientes, uno de los más importantes son los **faltantes**, que son demandas que no pueden surtirse. Si trabajamos con un modelo que nos permita tener faltantes, entonces el inventario puede reducirse, sin embargo, a cada unidad faltante se le debe considerar un costo agregado por faltantes, pero no solo eso, también nos trae otro tipo de problemas como son: clientes no satisfechos por no tener los productos que desean, pérdida de ingresos e incluso pérdida de clientes. Aunque pareciera que tener faltantes produce aspectos muy negativos, existen situaciones en las que permitir faltantes planeados tiene sentido desde el punto de vista administrativo. Pero un punto muy importante para que esto ocurra, es que los clientes estén dispuestos a aceptar un retraso en la recepción de sus productos.

El modelo que presentamos ahora, llamado **modelo EOQ con faltantes planeados**, toma en cuenta esta situación y solamente sustituye el tercer supuesto del modelo básico EOQ por el siguiente:

*Se permiten faltantes planeados, en caso de ocurrir un* *faltante, el cliente espera a que el producto esté nuevamente disponible, satisfaciendo sus órdenes de inmediato cuando llega la cantidad ordenada para reabastecer el inventario.* [1]

En este caso, los niveles de inventario se extienden a valores negativos que reflejan el número de unidades de los productos que faltaron. Sea

$p$ = costo de faltantes por unidad que falta por unidad de tiempo que falta.

$S$ = nivel de inventario justo después de recibir un lote de $Q$ unidades.

$Q - S$ = faltante en inventario justo antes de recibir un lote de $Q$ unidades.

Por otro lado, el costo total por unidad de tiempo se obtiene a partir de los siguientes componentes:

$$\text{Costo de producir u ordenar por ciclo} = K + cQ$$

Durante cada ciclo, el nivel de inventario es positivo durante un tiempo $S/d$. De esta forma el nivel de inventario promedio durante este tiempo es $(S+0)/2 = S/2$ artículos por unidad de tiempo y el costo correspondiente es $hS/2$ por unidad de tiempo. Entonces,

Costo de mantener el inventario por ciclo $= \frac{hS}{2}\frac{S}{d} = \frac{hS^2}{2d}$

De manera análoga, los faltantes ocurren durante un tiempo $(Q-S)/d$. La cantidad promedio de faltantes durante este tiempo es $(Q-S)/2$ artículos y el costo correspondiente por unidad de tiempo es $p(Q-S)/2$, así,

Costo de faltantes por ciclo $= \frac{p(Q-S)}{2}\frac{Q-S}{d} = \frac{p(Q-S)^2}{2d}$

Por lo tanto,

Costo total por ciclo $= K + cQ + \frac{hS^2}{2d} + \frac{p(Q-S)^2}{2d}$
y el costo total por unidad de tiempo es:

$$\begin{aligned} T &= \frac{K+cQ+hS^2/(2d)+p(Q-S)^2/(2d)}{Q/d} \\ &= \frac{K}{Q/d} + \frac{cQ}{Q/d} + \frac{hS^2/(2d)}{Q/d} + \frac{p(Q-S)^2/(2d)}{Q/d} \qquad (1.2) \\ &= \frac{dK}{Q} + dc + \frac{hS^2}{2Q} + \frac{p(Q-S)^2}{2Q} \end{aligned}$$

En este modelo hay dos variables de decisión ($S$ y $Q$), lo cual quiere decir que para encontrar nuestra solución óptima debemos hallar $S^* y\, Q^*$, haciendo un procedimiento similar al del modelo EOQ básico, es decir, derivamos (1.2) con respecto a $S$ y a $Q$,

$$\frac{dT}{\partial S} = \frac{hS}{Q} - \frac{p(Q-S)}{Q}$$
$$\frac{dT}{\partial Q} = -\frac{dK}{Q^2} - \frac{hS^2}{2Q^2} + \frac{p(Q-S)}{Q} - \frac{p(Q-S)^2}{2Q^2}$$

Luego igualando a cero obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{hS}{Q} - \frac{p(Q-S)}{Q} = 0 \tag{1.3}$$
$$-\frac{dK}{Q^2} - \frac{hS^2}{2Q^2} + \frac{p(Q-S)}{Q} - \frac{p(Q-S)^2}{2Q^2} = 0 \tag{1.4}$$

Entonces resolviendo el sistema para $S$ y $Q$, despejamos $S$ de (1.3) y obtenemos que:

$$S = \frac{pQ}{h+p} \tag{1.5}$$

Luego, sustituyendo este último valor de $S$ en (1.4) podemos obtener el valor de $Q$, haciendo los siguientes cálculos:

$$-\frac{dK}{Q^2} - \frac{h(pQ/(h+p))^2}{2Q^2} + \frac{p(Q-(pQ/(h+p)))}{Q} - \frac{p(Q-(pQ/(h+p)))^2}{2Q^2} = 0$$
$\Leftrightarrow$
$$-\frac{dK}{Q^2} - \frac{hp^2Q^2}{2Q^2(h+p)^2} + p - \frac{p^2Q}{Q(h+p)} - \frac{pQ^2}{2Q^2} + \frac{2p^2Q^2}{2Q^2(h+p)} - \frac{p^3Q^2}{2Q^2(h+p)^2} = 0$$
$\Leftrightarrow$
$$-\frac{dK}{Q^2} - \frac{hp^2}{2(h+p)^2} + p - \frac{p^2}{(h+p)} - \frac{p}{2} + \frac{p^2}{(h+p)} - \frac{p^3}{2(h+p)^2} = 0$$
$\Leftrightarrow$
$$-\frac{dK}{Q^2} - \frac{hp^2}{2(h+p)^2} + \frac{p}{2} - \frac{p^3}{2(h+p)^2} = 0$$

De lo anterior tenemos que

$$\frac{-hp^2+p(h+p)^2-p^3}{2(h+p)^2} = \frac{dK}{Q^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-hp^2+p(h^2+2ph+p^2)-p^3}{2(h+p)^2} = \frac{dK}{Q^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{hp^2+ph^2}{2(h+p)^2} = \frac{dK}{Q^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ph(p+h)}{2(h+p)^2} = \frac{dK}{Q^2}$$

$$\Leftrightarrow Q^2 = \frac{2dK(h+p)}{ph}$$

Por lo tanto nuestro valor óptimo para $Q$ es:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2dK}{h}}\sqrt{\frac{p+h}{p}}$$

Finalmente, sustituimos nuestro nuevo valor de Q en (1.5) y obtenemos el óptimo para $S$ que está dado como sigue:

$$S^* = \sqrt{\frac{2dK}{h}}\sqrt{\frac{p}{p+h}}$$

De esta forma, la longitud óptima del ciclo $t^*$ está dada por

$$t^* = \frac{Q^*}{d} = \sqrt{\frac{2K}{dh}}\sqrt{\frac{p+h}{p}}$$

Con lo anterior, podemos decir que nuestro faltante máximo es:

$$Q^* - S^* = \sqrt{\frac{2dK}{p}}\sqrt{\frac{h}{p+h}}$$

Al igual que en el modelo EOQ básico, es muy importante analizar las variaciones que se presentan, es decir: Cuando $p$ es muy grande con $h$ constante, el faltante máximo tiende a cero mientras que $Q^*$ y $t^*$ convergen a sus valores dados en el modelo EOQ básico.

Por otro lado, cuando $h$ alcanza valores muy grandes con $p$ constante, $S^*$ se aproxima a cero, por ello tener $h$ muy grande hace que no sea económico tener niveles de inventario positivos, por lo tanto cada lote nuevo de $Q^*$ unidades no va más allá de eliminar los faltantes actuales de inventario.

**Ejemplo 2.1**

Una empresa que provee jabones a una tienda departamental, decide no tener el mismo inventario pues es temporada baja; por tal razón ha decidido tener faltantes planeados en su inventario de jabones, la tienda es muy grande y con muchos clientes, por esa razón la demanda es de 75000 jabones al año, cada jabón tiene un costo de \$3 para dicha empresa, el costo del manejo es del 1% del costo del producto y el costo de adquisición es de \$20. El costo anual de los pedidos pendientes o faltantes es de \$0.05, ¿Cuál es faltante máximo de inventario?

*Solución:* De acuerdo a la información del problema tenemos los siguientes datos:

$$K = 20 \quad h = 0.03 \quad d = 75000 \quad p = 0.05$$

de manera que

$Q^* = \sqrt{\frac{2(75000)(20)}{0.03}}\sqrt{\frac{0.05+0.03}{0.05}} = 12649 \ \ jabones$

$S^* = \sqrt{\frac{2(75000)(20)}{0.03}}\sqrt{\frac{0.05}{0.05+0.03}} = 7905 \ \ jabones$

Por lo tanto, el faltante máximo de inventario es:

$Q^* - S^* = 12649 - 7905 = 4744 \ \ jabones$

## 1.3 Modelo EOQ con Descuentos por Cantidad

El modelo EOQ con descuentos por cantidad es una extensión del modelo EOQ básico, sin embargo se asume que el costo unitario disminuye en la medida que aumenta el tamaño del lote, al existir un descuento por cantidad o volumen de compra se genera un incentivo a pedir lotes de un mayor tamaño, sin embargo, ésto a la vez incrementa el costo de mantener unidades en inventario. Es por eso que el modelo EOQ con descuentos por cantidad supone que el costo unitario de un artículo depende de la cantidad de unidades que integren el lote [7].

Por otro lado se considera el caso en el que el costo de almacenar una unidad en inventario es un porcentaje del costo de adquisición. Una vez mencionado lo anterior, podemos decir que los supuestos para este modelo son los mismos que para el modelo EOQ básico, a diferencia de que las soluciones óptimas no son independientes del costo unitario.

Por tanto se busca determinar la cantidad óptima a pedir para cada nivel o quiebre de precios, analizar si dicho tamaño de pedido es factible, ajustar el tamaño de lote si es necesario y finalmente comparar las distintas alternativas para ver cuál de ellas provee el menor costo total.

En el ejemplo que presentamos para este capítulo, nuestro costo de almacenamiento depende del costo unitario de cada artículo, para el caso en el que $h$ es independiente solamente se obtiene la cantidad óptima a pedir de la misma forma en que se hizo para el modelo EOQ básico y luego se decide comprar los productos de acuerdo al costo en el que se encuentra tal cantidad.

## Ejemplo 4.1

Un proveedor ofrece los siguientes costos de descuentos para la adquisición de su producto principal cuya demanda anual es de 5000 unidades. El costo de emitir una orden es de \$49 y el costo de almacenar es el 20% del costo de adquisición del producto. ¿Cuál es la cantidad de la orden que minimiza el costo total del inventario?

| **Tamaño de lote** | **Descuento** | **Costo x unidad** |
|---|---:|---:|
| 0 a 999 | 0% | 5 |
| 1000 a 1999 | 4% | 4.8 |
| 2000 o más | 5% | 4.75 |

*Solución:*

Paso 1. Determinar el tamaño óptimo de pedido ($Q^*$) para cada quiebre de precios, en este caso $h$ no es independiente del costo unitario de los artículos por lo tanto usaremos la siguiente fórmula.

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2dK}{hc_i}}$$

$Q_1^* = \sqrt{\frac{2(5000)(49)}{(.20)(5)}} = 700$

$Q_2^* = \sqrt{\frac{2(5000)(49)}{(.20)(4.8)}} = 714$

$Q_3^* = \sqrt{\frac{2(5000)(49)}{(.20)(4.75)}} = 718$

Paso 2. Ajustar la cantidad óptima a pedir en cada quiebre de precios en caso de ser necesario, en nuestro ejemplo $Q_1^*$ se encuentra dentro del rango de unidades para ese costo por lo tanto se conserva, para $Q_2^*$ está por debajo del rango por lo tanto la ajustamos al más cercano en este caso 1000 y finalmente $Q_3^*$ también está por abajo de la cantidad miníma a pedir para ese costo por lo cual se ajusta a 2000 unidades.

Paso 3. Calcular el costo total asociado a cada una de las cantidades óptimas, utilizando la misma fórmula que en el modelo EOQ básico pero no olvidando que $h$ es dependiente del costo unitario del artículo. Para ello usamos la siguiente fórmula: [6]

$$T_i = \frac{dK}{Q} + dc_i + \frac{hc_iQ}{2}$$

$T_1 = \frac{49(5000)}{700} + 5000(5) + \frac{.20(5)(700)}{2} = 25700$
$T_2 = \frac{49(5000)}{1000} + 5000(4.8) + \frac{.20(4.8)(1000)}{2} = 24725$
$T_3 = \frac{49(5000)}{2000} + 5000(4.75) + \frac{.20(4.75)(2000)}{2} = 24822$

**Con lo anterior se concluye que el tamaño óptimo de pedido que minimiza los costos totales es de 1000 unidades, con un costo anual de $24725.**

# Capítulo 2

# Modelo Estocástico

## 2.1 Modelo Estocástico con Revisión Continua

En este capítulo se analizarán los modelos de inventarios *estocásticos*, que están diseñados para el análisis de sistemas de inventarios donde existe una gran incertidumbre sobre las demandas futuras. Para nuestro estudio, se considera un sistema de inventarios de *revisión continua*, es decir, el nivel de inventario se monitorea constantemente por lo que una nueva orden se coloca cuando el nivel llega a determinada cantidad, que es llamada *punto de reorden*. Este modelo se puede implementar a cualquier tipo de empresa que quiera tener un gran control en su inventario al vigilar constantemente las existencias que hay en el, ya que esto le permite reaccionar rápidamente ante variaciones insospechadas de la demanda.

Es importante mencionar que estos sistemas de inventarios, aplicados a un producto en específico se basan escencialmente en dos números muy importantes:

$R =$ punto de reorden
$Q =$ cantidad por ordenar

Con lo anterior podemos decir que nuestra **política de inventario** es colocar una orden de $Q$ unidades siempre que el nivel de inventario de un producto llegue a $R$ unidades, a esta política se le llama **política (R,Q)** [3].

### Supuestos del modelo

1. Cada aplicación se refiere a un solo producto.
2. El nivel de inventario es conocido, pues se emplea una revisión continua.
3. Por el punto dos se usará una política $(R, Q)$ por lo cual serán nuestros valores a encontrar.
4. Hay un tiempo de entrega entre cada colocación y recepción de $Q$, que llamarermos $L$.
5. La demanda es aleatoria y se conoce la distribución de probabilidad de la misma.
6. Antes de recibir la orden se permiten faltantes.

7. Hay un costo de preparación $K$ por cada orden colocada.
8. Excepto por este costo fijo, el costo de la orden es proporcional a la cantidad $Q$.
9. También se incurre en un costo por mantener $h$, por cada unidad por cada unidad de tiempo.
10. Si hay faltantes, hay un costo por faltantes $p$ por cada unidad que falta por unidad de tiempo hasta satisfacer la demanda pendiente.

En resumen, los supuestos de este modelo son los mismos que los del modelo EOQ con faltantes planeados excepto por el punto cinco, ya que en este caso la demanda no es conocida y por lo tanto tampoco es fija.

Dado que ambos modelos difieren únicamente por el punto cinco, los resultados son similares aunque para los modelos estocásticos con revisión continua se debe considerar un inventario de seguridad al momento de establecer los puntos de reorden, pues este último nos proporciona un extra en caso de que la demanda esté por encima del promedio durante el tiempo de entrega. El tamaño del inventario de seguridad se debe determinar de tal modo que la probabilidad de que se agote la existencia *durante* *el tiempo de entrega* no sea mayor que un valor especificado.

Por lo tanto para elegir el tamaño del lote lo hacemos simplemente usando la fórmula que se explicó para el modelo EOQ con faltantes planeados, esto es:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2dK}{h}}\sqrt{\frac{p+h}{p}}$$

Donde $d$ es la demanda promedio por unidad de tiempo. Ahora nos enfocaremos en el tamaño de la reserva o inventario de seguridad
Sean

$L =$ Tiempo de entrega entre colocación y recepción de un pedido.

$x_L =$ Variable aleatoria que representa la demanda durante el tiempo de entrega.

$\mu_L =$ Demanda promedio durante el tiempo de entrega.

$\sigma_L =$ Desviación estándar de la demanda durante el tiempo de entrega.

$B =$ Tamaño de la existencia de reserva

$\alpha =$ Probabilidad máxima admisible de que se agote la existencia durante el tiempo de entrega.

La hipótesis principal del modelo es que $x_L$,la demanda durante el tiempo de entrega $L$, tiene distribución normal, con promedio $\mu_L$ y desviación estándar $\sigma_L$, esto es, $N(\mu_L, \sigma_L)$. De esta manera, la formulación de la probabilidad que se usa para determinar $B$ se puede escribir como sigue:

$$P\{x_L \geq B + \mu_L\} \leq \alpha$$

Donde $\alpha$ mide el nivel de confiabilidad del modelo y de esta forma procedemos a convertir $x_L$ en una variable aleatoria normal estándar $N(0, 1)$ con la transformación siguiente:

$$z = \frac{x_L - \mu_L}{\sigma_L}$$

Entonces,

$$P\{z \geq \frac{B}{\sigma_L}\} \leq \alpha$$

Si hacemos $K_\alpha = \frac{B}{\sigma_L}$, podemos determinarlo mediante el uso de tablas normal estándar, de tal forma que:

$$P\{z \geq K_\alpha\} = \alpha$$

Lo anterior seria equivalente a determinar la probabilidad de que nuestra existencia no se agote durante el tiempo de entrega, por lo tanto, el tamaño de la reserva debe satisfacer

$$B \geq \sigma_L K_\alpha$$

Pues un valor de $B$ que esté por encima de $K_\alpha$ desviaciones estándar por encima de la media, no permitirá agotamientos con un nivel de confiabilidad $\alpha$.

La demanda durante el tiempo de entrega $L$ se suele describir con una función de densidad de probabilidades por unidad de tiempo a partir de la cual se puede determinar la distribución de la demanda durante el tiempo de entrega $L$. Si la demanda por unidad de tiempo es normal, con media $d$ y desviación estándar $\sigma$, la media $\mu_L$ y la desviación estándar $\sigma_L$ de la demanda, durante el tiempo de entrega $L$, se calculan como sigue:

$$\mu_L = dL$$

$$\sigma_L = \sqrt{\sigma^2 L}$$

Para ello es importante mencionar que si $L$ no es entero, se debe hacer un redondeo al entero más cercano.

## 2.2 Modelo Probabilístico de Cantidad Económica de Pedido

En este modelo a diferencia del modelo anterior, se permiten faltantes durante la demanda. Nuevamente como en el caso determinístico la política establece pedir la cantidad $Q$ siempre que el inventario llegue al nivel $R$, así los valores óptimos de $Q$ y $R$ se determinan minimizando el costo esperado por unidad de tiempo que es la suma de los costos de preparación, almacenamiento y faltante.

El modelo se basa en tres hipótesis

1. La demanda no satisfecha durante el tiempo de entrega se acumula.
2. No se permite más de un pedido vigente.
3. La demanda durante el tiempo de entrega permanece estacionaria con el tiempo.

Para reducir la función de costo total por unidad de tiempo, sean

$f(x) =$ Función de distribución de probabilidades de la demanda $x$ durante el tiempo de entrega.

$D =$ Demanda esperada por unidad de tiempo

$h =$ Costo de almacenamiento por unidad de inventario y por unidad de tiempo

$p =$ Costo de faltante por unidad de inventario

$K =$ Costo de preparación por pedido

Una vez dadas las definiciones anteriores, podemos determinar los elementos de la función de costo.

1. *Costo de preparación*. La cantidad aproximada de pedidos por unidad de tiempo es $\frac{D}{Q}$, por lo que el costo de preparación por unidad de tiempo es $\frac{KD}{Q}$.

2. *Costo esperado de almacenamiento*. El inventario promedio por unidad de tiempo es

$$\begin{aligned} I &= \frac{Q+E\{R-x\}+E\{R-x\}}{2} \\ &= \frac{Q}{2} + \frac{E\{R\}}{2} - \frac{E\{x\}}{2} + \frac{E\{R\}}{2} - \frac{E\{x\}}{2} \\ &= \frac{Q}{2} + E\{R\} - E\{x\} \\ &= \frac{Q}{2} + R - E\{x\} \end{aligned} \tag{2.1}$$

La fórmula se basa en el promedio de los inventarios esperados inicial ($Q + E\{R - x\}$) y el final ($E\{R -$

$x\}$), ambos solamente pertenecen a un ciclo. Es importante mencionar que no se considera el caso en el que $R - E\{x\}$ sea negativo. Así el costo esperado por mantener el inventario por unidad de tiempo es entonces igual a $hI$.

3. *Costo esperado por faltante*. Decimos que habrá un faltante cuando $x > R$. Por lo tanto la cantidad esperada de faltante por ciclo es

$$S = \int_R^\infty (x - R) f(x) dx$$

Como se supone que $p$ sólo es proporcional a la cantidad de faltante, el costo esperado de faltante por ciclo es $pS$, y para $\frac{D}{Q}$ ciclos por unidad de tiempo, el costo de faltante por unidad de tiempo es $\frac{pDS}{Q}$.

De esta manera, la función de costo total por unidad de tiempo que resulta es:

$$TCU(Q, R) = \frac{DK}{Q} + h(\frac{Q}{2} + R - E\{x\})$$
$$+ \frac{pD}{Q} \int_R^\infty (x - R) f(x) dx$$

Para encontrar las soluciones óptimas $Q^*$ y $R^*$ derivamos $TCU$ con respecto a cada una de estas variables esto es,

$$\frac{\partial TCU}{\partial Q} = -\frac{DK}{Q^2} + \frac{h}{2} - \frac{pDS}{Q^2} = 0$$

$$\frac{\partial TCU}{\partial R} = h - (\frac{pD}{Q})\int\limits_{R}^{\infty} f(x)dx = 0$$

Así se llega a

$$Q^* = \sqrt{\frac{2D(K+pS)}{h}} \tag{2.2}$$

$$\int\limits_{R}^{\infty} f(x)dx = \frac{hQ^*}{pD} \tag{2.3}$$

Aun cuando hayamos obtenido las dos ecuaciones anteriores, no se pueden determinar $Q^*$ y $R^*$ de tal forma que una no dependa de la otra, por lo que para este caso se usa un algoritmo numérico desarrollado por Hadley y Whitin para determinar las soluciones [3]. El algoritmo converge en una cantidad finita de iteraciones, siempre y cuando exista una solución factible.

Para $R = 0$, las dos ecuaciones anteriores dan como resultado lo siguiente

$$\hat{Q} = \sqrt{\frac{2D(K + pE\{x\})}{h}}$$

$$\tilde{Q} = \frac{pD}{h}$$

Esto es porque si $R = 0$, entonces

$$S = \int_{R}^{\infty} (x) f(x) dx = E(x)$$

y además

$$\int_{R}^{\infty} f(x) dx = \int_{0}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Si $\tilde{Q} \geq \hat{Q}$, existen valores óptimos únicos de $Q$ y $R$. En el método de solución se reconoce que el valor mínimo de $Q^*$ es $\sqrt{\frac{2DK}{h}}$, que se alcanza cuando $S = 0$.

Los pasos del algoritmo son los siguientes:

**Paso 0**. Usar la solución inicial $Q_1 = Q^* = \sqrt{\frac{2DK}{h}}$ y hacer $R_0 = 0$. Igualar $i = 1$ y seguir en el paso $i$.

**Paso i**. Usar $Q_i$ para determinar $R_i$ con la ecuación $\int\limits_R^{\infty} f(x)dx = \frac{hQ^*}{pD}$. Si $R_i \approx R_{i-1}$,detenerse; la solución óptima es $Q^* = Q_i$ y $R^* = R_i$. En caso contrario, usar $R_i$ en la ecuación (2.3) para hacer el cálculo de $Q_i$. Igualar $i = i + 1$ y repetir el paso $i$.

# Capítulo 3

# Aplicación de la Teoría de Inventarios a una empresa Poblana

En los capítulos anteriores, hemos estudiado la Teoría de Inventarios y a partir de éllo vamos a hacer la aplicación de la misma a una empresa poblana.

## 3.1 Descripción del problema

El problema surge debido a la preocupación que tiene una empresa poblana por el mal funcionamiento de su almacén y debido a ello, busca poder encontrar un modelo que sea el que mejor se ajuste a las necesidades de la empresa para evitar el sobrealmacenamiento de sus productos. Dicha empresa pertenece al sector turístico y dentro de sus instalaciones tiene diversas tiendas a las que el almacén debería abastecer de productos siempre que alguna lo requiera. Hay tres tipos de tiendas dentro de la empresa, tiendas de souvenirs, de comida y dulcerías. Dentro de los grandes problemas que originan esta inquietud se encuentran los siguientes:

1. El almacén no funciona como tal, pues cada una de sus tiendas tiene su propia “bodega” de productos.

2. La persona encargada de hacer pedidos no tiene indicadores para realizar los mismos por tal razón emite una nueva orden de productos de acuerdo a su criterio.

3. Hay pérdidas muy grandes debido a que existe un sobrealmacenamiento de productos o bien, cuando los turistas requieren algún artículo no hay en existencia.

4. Los productos estancados no se pueden pagar a tiempo, pues no hay fluidez de los mismos y por lo tanto los recursos son tomados de otros ingresos para así poder liquidarlos.

Así, ante estos problemas se busca encontrar una solución que nos ayude a disminuirlos o bien solucionarlos totalmente, aplicando la Teoria de Inventarios estudiada en los capítulos anteriores. Es por eso que durante esta sección plantearemos nuestro problema y daremos una solución a las necesidades de la empresa entre las cuales se encuetran las siguientes:

1. Encontrar un modelo para la optimización de su inventario.
2. Dar a conocer la cantidad óptima a pedir para cada artículo que se maneja dentro del inventario .
3. Determinar los puntos de reorden para el reabastecimiento del inventario.
4. Optimizar los costos generados al pedir una nueva orden de artículos.
5. Dar solución a los cuatro puntos anteriores pero ahora los resultados se dividen en seis temporadas[1].

Como ya mencionamos anteriormente dentro de esta empresa hay diversas tiendas, sin embargo, solo nos enfocaremos en una de las dulcerías que más venden durante el año. Para nuestro estudio, la empresa nos ha proporcionado información diaria de sus ventas por artículo y a su vez solamente haremos nuestro estudio en los diez artículos más vendidos, pues dentro del inventario existen más de 250 productos y de los cuales más de la mitad

[1]La empresa considera seis temporadas donde tres de ellas son consideradas bajas es decir casi no hay fluencia de turistas y tres altas que son las correspondientes a las vacaciones de Semana Santa, verano y diciembre según el calendario escolar de la SEP

tienen una demanda anual por abajo de 100 unidades vendidas, es decir, la demanda llega a ser nula gran parte del año. Los diez artículos que servirán para nuestro estudio tienen una demanda anual por arriba de 1000 unidades vendidas y por eso consideramos que vale la pena estudiar el comportamiento de dichos productos.

## 3.2 Solución del problema

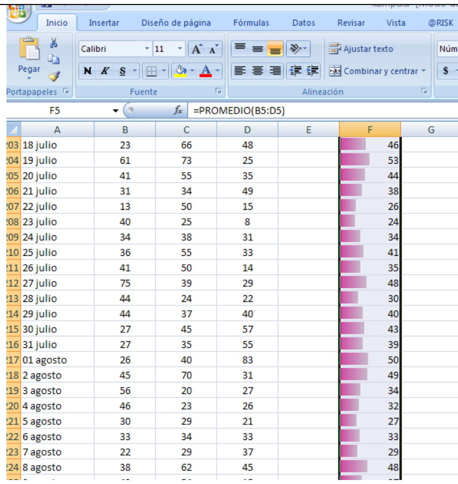
Lo primero que vamos a hacer es encontrar la cantidad óptima a pedir de cada artículo cada vez que sea necesario emitir una nueva orden, es decir, $Q^*$ y para eso aplicamos la teoría del modelo EOQ básico del capítulo dos. Se cumplen los supuestos de este modelo pues estamos tomando el promedio diario de la demanda de cada producto, por lo que podemos considerar que la demanda es constante, también queremos que la cantidad a pedir en cada orden sea siempre la misma por lo cual se cumple el supuesto número dos y finalmente no se permiten faltantes.

Una vez que encontramos el valor de $Q^*$ aplicando el modelo EOQ básico, vamos a utilizar lo estudiado en el capítulo seis del modelo probabilístico de cantidad económica de pedido. Como podemos observar, los dos modelos que utilizaremos para la solución de nuestro problema y de cada uno de nuestros artículos, no permiten faltantes. Lo anterior se justifica, pues dado que es una empresa del sector turístico, si el turista pide algún producto el día de su visita y no lo encuentra, no hay manera de cubrir esa demanda por faltante posteriormente.

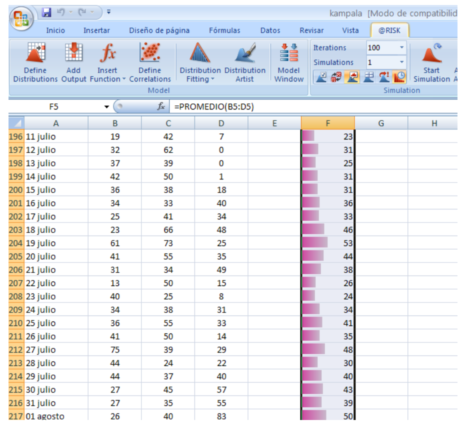
El siguiente paso consiste en usar el modelo probabilístico para encontrar el tamaño de la reserva cada vez que se emita una nueva orden de productos, es importante suponer que la demanda durante el tiempo de entrega $L$ tiene una distribución normal con parámetros $\mu_L = dL$ y $\sigma_L = \sqrt{\sigma^2 L}$. Para poder estimar estos dos últimos parámetros primero vamos a tomar la muestra de los datos y mediante el método de bondad de ajuste de Kolmogorov Smirnov[2] veremos si efectivamente los datos provienen de una distribución normal. Para ello, utilizamos un paquete estadístico llamado @RISK el cual nos muestra diversas distribuciones a las cuales pueden ajustarse los datos de nuestra muestra, una vez encontradas dichas distribuciones vamos a enfocarnos a la Normal ya que es la que nos será útil para nuestro estudio, consideraremos que nuestros datos provienen de una distribución Normal siempre y cuando @RISK concluya que dicha distribución

[2]Ver Apéndice uno

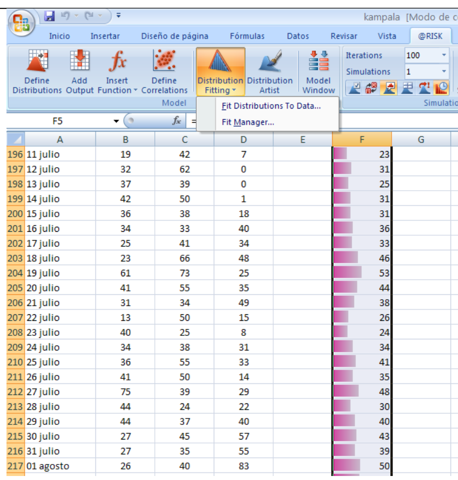
es una de las adecuadas, para poder encontrar los resultados deseados es importante realizar los pasos que se muestran en la figura 3.1, también es importante mencionar que las ventas diarias por producto que vamos a utilizar son el resultado del promedio diario de los años 2008, 2009 y 2010 que fue la información proporcionada por la empresa.



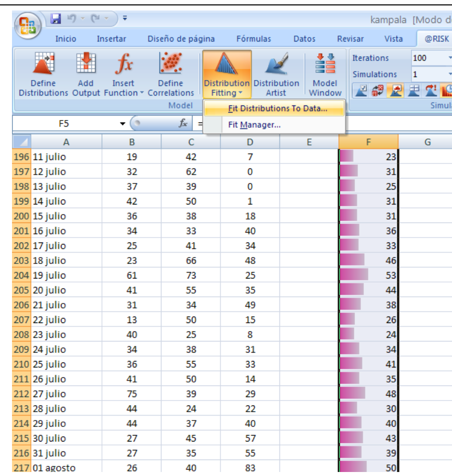
1.Seleccionar los datos de nuestra muestra



2.Dar click en la pestaña de @risk



3.Damos click en Distribution Fitting



4.Luego en Fit Distributions to Data

Figura 3.1: Como introducir los datos en @RISK

Una vez que le hemos proporcionado los datos al paquete estadístico como lo indicamos en los pasos anteriores, vamos a realizar la prueba de Kolmogorov-Smirnov como se indica a continuación para ver si nuestros datos pueden ajustarse a una distribución Normal y así encontrar los paráметros que nos servirán para el cálculo de nuestra reserva, para posteriormente dar a conocer la solución óptima a cada uno de nuestros artículos de manera global y dar la solución para cada una de las temporadas.

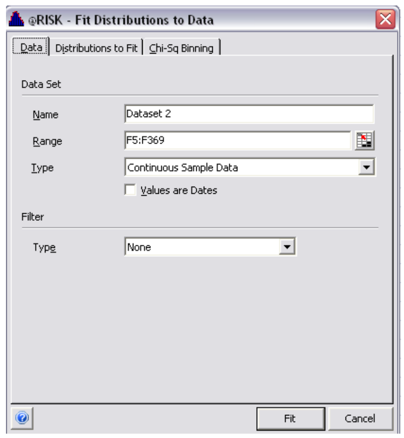



Figura 3.2: El programa nos arrojará esta ventana damos click en Fit

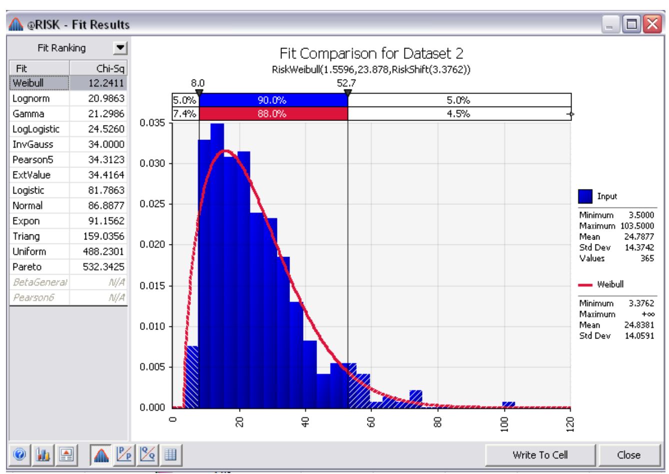



Figura 3.3: Posibles distribuciones a las que pueden ajustarse nuestros datos

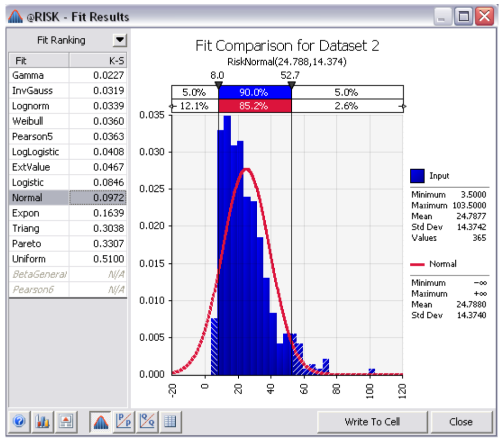



Figura 3.4: Seleccionar la distribución Normal

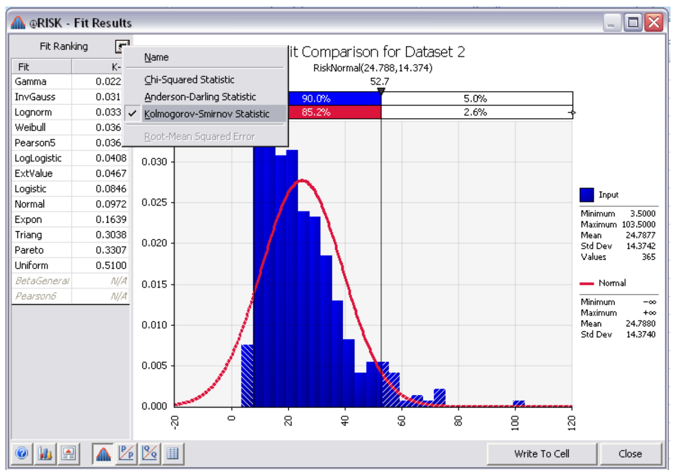



Figura 3.5: Finalmente realizar la prueba de Kolmogorov

Debido a que la empresa desea saber cuál modelo de inventarios deber usar para el manejo de su almacén y al mismo tiempo poder optimizar los costos generados en el manejo de su inventario, daremos inicio a la solución ordenando nuestros productos a estudiar del uno al diez, donde uno es el más vendido, dos el segundo producto más vendido y asi sucesivamente. A continuación presentamos una tabla de nuestros productos y el promedio de ventas anuales que cada uno tiene y enseguida daremos solución a cada uno de ellos:

| **Producto** | **Unidades anuales vendidas** |
|---|---:|
| 1 | 9573 |
| 2 | 3145 |
| 3 | 2764 |
| 4 | 2127 |
| 5 | 1596 |
| 6 | 1591 |
| 7 | 1278 |
| 8 | 1246 |
| 9 | 1136 |
| 10 | 1128 |

Table 3.1: Promedio de la venta anual de los artículos

### 3.2.1 Solución óptima del problema para cada uno de los productos tomando la demanda anual

Para no hacer tan repetitivo el método de solución de cada producto, se muestra la tabla 3.2 la cual contiene la solución óptima para cada uno de los productos considerando la demanda promedio anual. Posteriormente, se explica cómo se obtuvieron estos resultados solamente para el producto uno, pues los cálculos para el resto de los productos son similares.

| **Producto** | **h** | **d** | $\mu$ | $\sigma^2$ | $\mu_L$ | $\sigma_L$ | $Q^*$ | **Reserva** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| uno | 5.28 | 25 | 24.78 | 14.37 | 100 | 7.58 | 88 | 12 |
| dos | 3.3 | 8 | 8.24 | 7.12 | 32 | 5.34 | 63 | 9 |
| tres | 5.02 | 7 | 7.24 | 6.69 | 28 | 5.17 | 48 | 9 |
| cuatro | 4.3 | 6 | 6.15 | 4.93 | 24 | 4.44 | 48 | 7 |
| cinco | 6.75 | 4 | 4.2 | 4.29 | 16 | 4.14 | 31 | 7 |
| seis | 4.5 | 5 | 5.35 | 4.01 | 20 | 4 | 43 | 7 |
| siete | 4.2 | 5 | 3.44 | 2.69 | 12 | 3.28 | 34 | 5 |
| ocho | 4.5 | 5 | 4.3 | 3.4 | 16 | 3.69 | 38 | 6 |
| nueve | 3.86 | 3 | 3.34 | 2.25 | 12 | 3 | 36 | 4 |
| diez | 4.79 | 3 | 3.01 | 2.5 | 12 | 3.16 | 32 | 5 |

Table 3.2: Solución para la demanda promedio anual

Finalmente basándonos en los datos de la tabla tenemos que la solución óptima a pedir para cada uno de los productos será:

**Pedir $Q^*$ siempre que el nivel de inventario baje a $\mu_L + Reserva$.**

Ahora observemos cómo se realizan los cálculos para encontrar los resultados que se mostraron en la tabla anterior. Para ello tomaremos como ejemplo el producto uno y daremos la explicación a cada uno de los pasos realizados.

Lo primero que debemos ver es con qué datos contamos para poder aplicar la teoría, a continuación damos los datos proporcionados para el caso del producto uno:

Costo unitario = \$5.28 = $c$

Costo de preparación = \$827.00 = $K$

Tiempo de entrega entre la colocación y recepción de un pedido = $L$ = Cuatro días.

Además vamos a considerar el costo de almacenamiento igual al costo unitario de cada producto, pues mantener una unidad en inventario equivale a no poder disponer del dinero invertido en cada artículo para otros fines. Es decir, para este caso $h = \$5.28$.

De acuerdo con el método de solución explicado en la sección 3.2 encontramos $Q^*$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2(827)(25)}{5.28}} = \sqrt{\frac{41350}{5.28}} = \sqrt{7831.4} = 88.49$$

Al ingresar nuestras ventas diarias por artículo en @RISK, se hace la prueba de Kolmogorov-Smirnov y nos arroja el siguiente resultado:

Nuestros datos provienen de una normal con parámetros $\mu = 24.788$ y $\sigma^2 = 14.374$, por lo que el siguiente paso consiste en calcular $\mu_L$ y $\sigma_L$, es decir:

$$\mu_L = dL = 25(4) = 100$$
$$\sigma_L = \sqrt{\sigma^2 L} = \sqrt{14.374(4)} = 7.58$$

Por lo tanto de acuerdo con las tablas de distribución normal y recordando que estamos trabajando con $\alpha = 0.05$ tenemos que

$$K_{0.05} = 1.645$$

En consecuencia se calcula el tamaño de la reserva como sigue:

$$B \geq \sigma_L K_\alpha = 7.58 * (1.645) \approx 12$$

**Por lo tanto dado que $Q^* = 88\ unidades$, la política óptima de inventario con reserva $B = 12$ establece comprar $88$ unidades siempre que el nivel de inventario baje a 112 unidades.**

Como pudimos observar todos los cálculos son realizados basándonos en la teoría estudiada en los capítulos anteriores, sin embargo para el caso de nuestro problema es muy importante mencionar que el costo de preparación será el mismo para todos los productos que la empresa adquiere, al igual que el tiempo de entrega $L = 4$ y el nivel de confiabilidad $\alpha = 0.05$ y como consecuencia de este último $K = 1.645$ también será igual para todos y cada uno de los productos.

### 3.2.2 Solución óptima del problema para la temporada uno

La temporada uno se considera desde que finalizan las vacaciones de diciembre-enero hasta un día antes de que inicien las vacaciones de Semana Santa según marque el calendario escolar. La empresa considera este periodo como temporada baja pues no hay mucha afluencia de turistas y las ventas son relativamente bajas. Para dar a conocer la solución óptima de este periodo nos hemos basado en el calendario escolar y se han tomado los datos de cada año, de los cuales se ha tomado el promedio de la temporada y así ingresar los datos al paquete estadístico. Los pasos para encontrar las respuestas son análogos al método de la sección 3.2.1. y por tal motivo sólo se muestra la tabla 3.3 la cual muestra los datos necesarios para la solución óptima al problema de cada uno de los productos en esta temporada.

| **Producto** | **h** | **d** | $\mu$ | $\sigma^2$ | $\mu_L$ | $\sigma_L$ | $Q^*$ | **Reserva** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| uno | 5.28 | 24 | 24.26 | 11.49 | 96 | 6.78 | 87 | 11 |
| dos | 3.3 | 7 | 7.29 | 6.15 | 28 | 4.96 | 59 | 8 |
| tres | 5.02 | 6 | 6.14 | 3.96 | 24 | 3.98 | 44 | 7 |
| cuatro | 4.3 | 5 | 4.71 | 3.56 | 20 | 3.77 | 44 | 6 |
| cinco | 6.75 | 4 | 3.68 | 2.58 | 16 | 3.21 | 31 | 5 |
| seis | 4.5 | 5 | 5.26 | 3.97 | 20 | 3.98 | 43 | 7 |
| siete | 4.2 | 4 | 3.56 | 2.94 | 16 | 3.43 | 40 | 6 |
| ocho | 4.5 | 5 | 5.05 | 4.2 | 20 | 4.1 | 43 | 7 |
| nueve | 3.86 | 4 | 3.64 | 1.75 | 16 | 2.65 | 41 | 4 |
| diez | 4.79 | 3 | 3.13 | 2.09 | 12 | 2.89 | 32 | 5 |

Table 3.3: Resultados para la solución óptima de la temporada uno

### 3.2.3 Solución óptima del problema para la temporada dos

La temporada dos es el periodo que se establece en el calendario escolar como vacaciones de Semana Santa, es considerada para la empresa alta e inclusive la más alta del año.

| **Producto** | **h** | **d** | $\mu$ | $\sigma^2$ | $\mu_L$ | $\sigma_L$ | $Q^*$ | **Reserva** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| uno | 5.28 | 49 | 14.02 | 32.67 | 196 | 11 | 124 | 322 |
| dos | 3.3 | 20 | 20.14 | 14.47 | 80 | 8 | 100 | 132 |
| tres | 5.02 | 23 | 23.29 | 20 | 92 | 9 | 87 | 151 |
| cuatro | 4.3 | 14 | 13.82 | 10.6 | 56 | 7 | 73 | 92 |
| cinco | 6.75 | 14 | 13.79 | 10.32 | 56 | 6 | 59 | 92 |
| seis | 4.5 | 8 | 8.05 | 7.82 | 32 | 6 | 54 | 53 |
| siete | 4.2 | 5 | 5.38 | 3.41 | 20 | 4 | 44 | 33 |
| ocho | 4.5 | 7 | 7.11 | 5.4 | 28 | 5 | 51 | 46 |
| nueve | 3.86 | 5 | 4.61 | 2.62 | 20 | 3 | 46 | 33 |
| diez | 4.79 | 7 | 7.14 | 4.71 | 28 | 4 | 49 | 46 |

Table 3.4: Resultados para la solución óptima de la temporada dos

### 3.2.4 Solución óptima del problema para la temporada tres

La temporada tres basándonos en el calendario escolar es considerada como el periodo comprendido desde que termina Semana Santa hasta un día antes de que inicien las vacaciones de verano y al igual que la temporada uno es considerada baja.

| **Producto** | **h** | **d** | $\mu$ | $\sigma^2$ | $\mu_L$ | $\sigma_L$ | $Q^*$ | **Reserva** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| uno | 5.28 | 25 | 25.25 | 11.88 | 100 | 7 | 88 | 165 |
| dos | 3.3 | 10 | 10.19 | 6.76 | 40 | 5 | 71 | 66 |
| tres | 5.02 | 8 | 8.08 | 6.47 | 32 | 5 | 51 | 53 |
| cuatro | 4.3 | 5 | 5.46 | 5.06 | 20 | 4 | 44 | 33 |
| cinco | 6.75 | 5 | 4.98 | 4.09 | 20 | 4 | 35 | 33 |
| seis | 4.5 | 4 | 4.49 | 3.41 | 16 | 4 | 38 | 26 |
| siete | 4.2 | 3 | 3.33 | 2.27 | 12 | 3 | 34 | 20 |
| ocho | 4.5 | 4 | 3.54 | 3.09 | 16 | 4 | 38 | 26 |
| nueve | 3.86 | 3 | 2.87 | 2.38 | 12 | 3 | 36 | 20 |
| diez | 4.79 | 3 | 3.22 | 2.41 | 12 | 3 | 32 | 20 |

Table 3.5: Resultados para la solución óptima de la temporada tres

### 3.2.5 Solución óptima del problema para la temporada cuatro

La temporada cuatro es la temporada alta más larga para la empresa pues comprende las vacaciones de verano según lo marque el calendario escolar.

| **Producto** | **h** | **d** | $\mu$ | $\sigma^2$ | $\mu_L$ | $\sigma_L$ | $Q^*$ | **Reserva** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| uno | 5.28 | 32 | 31.97 | 10.09 | 128 | 6 | 88 | 211 |
| dos | 3.3 | 11 | 10.73 | 5.38 | 44 | 5 | 71 | 72 |
| tres | 5.02 | 10 | 9.88 | 5.12 | 40 | 5 | 51 | 66 |
| cuatro | 4.3 | 9 | 8.91 | 5.27 | 36 | 5 | 44 | 59 |
| cinco | 6.75 | 6 | 5.79 | 3.49 | 24 | 4 | 35 | 39 |
| seis | 4.5 | 7 | 6.94 | 3.02 | 28 | 4 | 38 | 46 |
| siete | 4.2 | 5 | 5.13 | 3.04 | 20 | 3 | 34 | 33 |
| ocho | 4.5 | 5 | 5.27 | 2.51 | 20 | 3 | 38 | 33 |
| nueve | 3.86 | 4 | 4.18 | 2.12 | 16 | 3 | 36 | 26 |
| diez | 4.79 | 4 | 3.87 | 1.98 | 16 | 3 | 32 | 26 |

Table 3.6: Resultados para la solución óptima de la temporada cuatro

### 3.2.6 Solución óptima del problema para la temporada cinco

Esta temporada se considera una de las temporadas bajas para la empresa y el periodo abarca desde que terminan las vacaciones de verano hasta un día antes de que inicien las vacaciones de diciembre no olvidado que todo es basándose en el calendario escolar.

| **Producto** | **h** | **d** | $\mu$ | $\sigma^2$ | $\mu_L$ | $\sigma_L$ | $Q^*$ | **Reserva** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| uno | 5.28 | 16 | 15.5 | 6.4 | 64 | 5 | 71 | 105 |
| dos | 3.3 | 4 | 3.87 | 2.66 | 16 | 3 | 45 | 26 |
| tres | 5.02 | 3 | 3.41 | 2.25 | 12 | 3 | 31 | 20 |
| cuatro | 4.3 | 5 | 4.75 | 2.76 | 20 | 3 | 44 | 33 |
| cinco | 6.75 | 2 | 1.56 | 1.28 | 8 | 2 | 22 | 13 |
| seis | 4.5 | 4 | 3.96 | 2.69 | 16 | 3 | 38 | 26 |
| siete | 4.2 | 2 | 2.25 | 1.72 | 8 | 3 | 28 | 13 |
| ocho | 4.5 | 3 | 3.09 | 2.49 | 12 | 3 | 33 | 20 |
| nueve | 3.86 | 3 | 2.66 | 1.84 | 12 | 3 | 36 | 20 |
| diez | 4.79 | 1 | 1.48 | .99 | 4 | 2 | 19 | 7 |

Table 3.7: Resultados para la solución óptima de la temporada cinco

### 3.2.7 Solución óptima del problema para la temporada seis

La sexta y última temporada considerada como alta comprende todas las vaciones de diciembre-enero según marque el calendario escolar vigente.

| **Producto** | **h** | **d** | $\mu$ | $\sigma^2$ | $\mu_L$ | $\sigma_L$ | $Q^*$ | **Reserva** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| uno | 5.28 | 40 | 39.95 | 28.96 | 160 | 11 | 112 | 263 |
| dos | 3.3 | 12 | 11.85 | 8.15 | 48 | 6 | 78 | 79 |
| tres | 5.02 | 9 | 9.61 | 6.14 | 36 | 5 | 54 | 59 |
| cuatro | 4.3 | 10 | 9.33 | 6.11 | 40 | 5 | 62 | 66 |
| cinco | 6.75 | 5 | 5.26 | 3.34 | 20 | 4 | 35 | 33 |
| seis | 4.5 | 11 | 10.75 | 6.77 | 44 | 5 | 64 | 72 |
| siete | 4.2 | 5 | 5.2 | 3.78 | 20 | 4 | 44 | 33 |
| ocho | 4.5 | 6 | 6.42 | 4.23 | 24 | 4 | 47 | 39 |
| nueve | 3.86 | 5 | 5.31 | 3.81 | 20 | 4 | 46 | 33 |
| diez | 4.79 | 4 | 4.26 | 2.66 | 16 | 3 | 37 | 26 |

Table 3.8: Resultados para la solución óptima de la temporada seis

# Conclusiones

Durante este trabajo se pudo observar que la Teoría de Inventarios es un tema muy importante que muchas empresas deben considerar, al mismo tiempo se presentaron diversos modelos de inventario, que se pueden aplicar según sean las necesidades de la empresa con la que se esté trabajando.

Durante el desarrollo del trabajo se planteó el problema de una empresa poblana y analizando los datos que dicha empresa nos proporcionó, se consideran el Modelo EOQ básico para los primeros cálculos y posteriormente el Estocástico como los dos modelos que mejor se ajustan a las necesidades de la empresa debido a que por pertenecer al sector turístico no se permiten faltantes. Con lo anterior se logra cubrir las espectativas de la empresa pues se encuentra un modelo para la optimización de su inventario, mediante el cual es posible dar a conocer la cantidad óptima a pedir siempre que se emita una nueva orden y al mismo tiempo saber cuándo realizar cada pedido no dejando de lado los gastos que ésto implica.

Posteriormente se hace un análisis de las temporadas que la empresa considera, de las cuales se nota que efectivamente la temporada más alta es la que comprende el periodo de las vacaciones de Semana Santa, pues aunque se hace un análisis a nivel general donde se considera la demanda promedio anual los resultados para esta temporada son los que presentan gran diferencia con respecto al resto de las temporadas, donde los resultados son más equilibrados entre una y otra.

Un punto importante que se resalta en los resultados es que cuando trabajamos la demanda promedio anual, la cantidad óptima a pedir siempre está por arriba del punto de reorden en el inventario (dado por $\mu_L + Reserva$). Mientras que, cuando se trabaja por temporadas esta relación es variable en las temporadas consideradas como bajas. En las temporadas altas la cantidad óptima, la mayoría de las veces, es más grande que la existencia en inventario. Con esto podemos afirmar que obtenemos mejores resultados cuando consideramos la demanda por temporada que cuando consideramos el promedio anual.

Como pudimos ver el trabajo solamente se enfocó a una empresa que vende productos terminados, sin embargo hay mucha aplicación para empresas que no solamente se dedican a la venta de productos sino también a la fabricación de los mismos. Por lo que podemos concluir que actualmente esta Teoria de Inventarios puede tener un gran impacto tanto en pequeñas como en grandes empresas.

# Apéndice 1

## Prueba de Bondad de Ajuste de Kolmogorov Smirnov

La prueba de bondad de ajuste de Kolmogorov Smirnov es una alternativa para probar que una muestra proviene de una distribución continua **Normal**. Esta prueba se basa en la comparación entre la función de distribución acumulada de una distribución teórica $F_t(X)$ con la función distribución acumulada de la muestra $F_m(X)$.

Si las funciones de distribución acumulada teórica y muestral no son significativamente diferentes, entonces decimos que la muestra proviene de la distribución cuya función distribución acumulada es $F_t(X)$. Sin embargo, si las diferencias entre las funciones distribución acumuladas son muy grandes como para que no sean solamente por azar, rechazamos $H_0$. Los pasos a seguir en la prueba de Kolmogorov-Smirnov son los siguientes:

1. Plantear la hipótesis:

$$H_0 : F_m(X) = F_t(X) \ \ para \ \ todo \ \ X \epsilon R$$

$$H_0 : F_m(X) = F_t(X) \ \ por \ \ lo \ \ menos \ \ para \ \ un \ \ X$$

2. Calcular todos los valores $F_m(X)$ de la muestra $X_1, X_2, ...X_n$
3. Determinar la desviación máxima, que está dada por el supremo de los valores absolutos de las diferencias entre los valores de la función acumulada téorica y de la muestra: $D = sup|F_m(X) - F_t(X)|$
4. Escoger un nivel de significancia $\alpha$.
5. No se rechaza $H_0$ si el valor calculado $D$ es menor o igual que el valor de la tabla
6. Se rechaza $H_0$ si el valor $D$ es mayor que el de la tabla.

Las suposiciones en la prueba de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov son:

1. Muestras aleatorias.
2. La población debe ser continua en la variable observada
3. La prueba no es válida si se tienen que estimar uno o más parámetros usando los datos de la muestra.

# Referencias


[1] Marcos Javier Moya Navarro, *Investigación de Operaciones*, Universidad Estatal a Distancia, San José Costa Rica, 1990.

[2] Steven Nahmias, *Perishable Inventory Systems*, Springer, Santa Clara University, Santa Clara California.

[3] Hamdy A. Taha, *Investigación de Operaciones*, Septima Edición, Pearson Educación, México, 2004.

[4] F.J. Weston y E.F. Brigham, *Fundamentos de Administración Financiera*, Septima Edición, Mc Graw Hill, México, 1992, Pág. 195-208.

[5] María José Marques Dos Santos, *Estadística Básica un enfoque no parametrico*, UNAM, México, 1992, Pág. 40-42.

[6] `www.investigaciondeoperaciones.net/eoq_con_descuentos.html`

[7] www.investigacion-operaciones.com
/Inventario-1.htm

[8] http://catarina.udlap.mx/u_dl_a/tales/
documentos/mepi/de_l_ap/capitulo4.pdf
Cosultada el 24-Nov-2012

[9] http://www.sites.upiicsa.ipn.mx/polilibros/
portal/Polilibros/P_terminados/SimSist/
doc/SIMULACI-N-153.htm Cosultada el 24-Enero-2013