# Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas


## Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales y el teorema de Poincaré-Bendixson

Tesis presentada como requisito para la obtención del título de:

Licenciado en Matemáticas Aplicadas


Presentada por:
Ana Luisa González Pérez

Dirigida por:
M.C. Julio Erasto Poisot Macías



Noviembre 2012
Puebla, Puebla.

# Reconocimientos


- A la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado de la BUAP por las becas otorgadas que motivaron y favorecieron la conclusión de esta tesis, así como su impresión mediante el proyecto de investigación "Aprendizaje de la modelación matemática con ecuaciones diferenciales y en diferencias" (CEGL-EXC12-G).

- Al CA de Ecuaciones Diferenciales y Modelación Matemática (BUAP-CA-33), el cual, mediante los seminarios y actividades académicas contribuyó a mi formación de manera importante y con las becas otorgadas a través del Apoyo a las redes temáticas del programa PROMEP de la Secretaría de Educación Pública (SEP), apoyó el desarrollo de este trabajo.

# Agradecimientos

Son muchas personas especiales a las que me gustaría agradecer su amistad, apoyo, ánimo y compañía en las diferentes etapas de mi vida. Algunas están aquí conmigo y otras en los recuerdos y en el corazón. Sin importar en donde estén mil gracias por formar parte de mi.

A Dios por darme la oportunidad de vivir y por estar conmigo en cada paso que doy, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente y por haber puesto en mi camino a aquellas personas que han sido mi soporte y compañía durante todo mi periodo de estudio.

A mis padres José Luis González Mota y Leticia Pérez Hernández por haberme apoyado en todo momento a lo largo de mi vida, por sus consejos, su paciencia y comprensión, por respetar mis decisiones sin importar que me equivocara, por los valores que siempre me han inculcado, por la motivación constante que me ha permitido ser una persona de bien, pero más que nada, por su amor, su confianza y permanecer a mi lado tanto en mis triunfos como en mis fracasos. Esta tesis se las dedico con mucho cariño a ustedes, como símbolo de gratitud por el amor incondicional que siempre me han manifestado, mil gracias por todo los quiero mucho.

A mis hermanas Anabel, Gema y Wendy, ustedes han sido quienes me han apoyado dándome ánimos para seguir adelante y compartir conmigo momentos felices. En particular a mi hermana Anabel gracias por su ayuda por ser el ejemplo de una hermana mayor, por compartir sus experiencias conmigo y ayudar a nuestros padres a que pudiera concluir una etapa más en mi vida, las quiero mucho.

A mis abuelitos Eugenio González Tejeda (QEPD), Leonila Mota Cruz (QEPD), Basilio Pérez Casiano y Celestina Hernández López por quererme y apoyarme siempre, esto también se lo debo a ustedes. A mis tíos, primos y demás familiares que han estado conmigo apoyándome a pesar de que no todos estuvieron de acuerdo con mi decisión de estudiar esta carrera me apoyaron para poder concluir esta etapa de mi vida, muchas gracias, los quiero.

A mi director de tesis el M.C. Julio Poisot Macías por haberme permitido elaborar esta tesis bajo su supervisión, por su gran apoyo y motivación para que pudiera culminar mi carrera, por sus enseñanzas, sus consejos , sugerencias y principalmente por su tiempo y paciencia que me tuvo durante la realización de este trabajo, muchas gracias.

A la Dra. Lucia Cervantes Gómez por el apoyo que me brindo a lo largo de mi formación académica, por sus consejos, por compartir su experiencia y conocimientos conmigo, por su tiempo y por su paciencia los cuales me permitieron concluir esta tesis, muchísimas gracias.

Al Dr. Gerardo Torres y Dr. Jacobo Oliveros por el tiempo que dedicaron a la revisión de mi tesis mediante sus observaciones y sugerencias las cuales permitieron el mejoramiento de este trabajo.

A los profesores de la FCFM-BUAP quienes contribuyeron a mi formación académica, además por compartir sus experiencias, su tiempo, su paciencia, y algunos de ellos por la amistad, apoyo y consejos que me brindaron, los cuales fueron factores importantes que me ayudaron a poder concluir la carrera.

A todos mis amigos, sin excluir a ninguno, pero en especial a Gabriela, Miguel, Javier, Germán, Carlos, Marco, Andres, Paco (QEPD), Ana Gabriela, Laura, Areli, Anaid, y a don Pedro pues ustedes han sido quienes me han acompañado en cada una de las etapas de mi vida, que me han hecho ver las cosas de una forma diferente, por compartir buenos y malos momentos, en cada uno de ustedes hay una persona especial que jamas olvidaré pues forman parte de mi y sobre todo mil gracias por su amistad, los quiero.

A mis compañeros que estuvieron conmigo a lo largo de mis estudios de licenciatura, gracias por haber sido parte de mi vida y por compartir experiencias y conocimientos conmigo.

Finalmente agradezco a todas aquellas personas que tal vez no mencione pero que de una u otra forma colaboraron para que pudiera llevar a termino mi carrera y me apoyaron para poder culminar este trabajo.

A todos y cada uno de ustedes
Muchas gracias

# Índice general

# Introducción

Una ecuación de la forma $F(t, x, x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}) = 0$, donde la incógnita $x$ es una función de una variable, se llama ecuación diferencial ordinaria. Muchas leyes generales de la Física, Biología, Economía, Química, así como en la modelación y resolución de diversos problemas de Ingeniería encuentran su expresión natural en esta clase de ecuaciones. Por otro lado muchas cuestiones en la propia matemática, por ejemplo en Topología y Geometría Diferencial y en el Calculo de Variaciones, son formuladas por ecuaciones diferenciales ordinarias o se reducen a ellas.

El estudio de las ecuaciones diferenciales comenzó con métodos del Calculo Diferencial e Integral, descubiertos por Newton y Leibniz, y elaborados para resolver problemas motivados por consideraciones físicas y geométricas. Estos métodos en su evolución, poco a poco llevaron a la consolidación de las ecuaciones diferenciales como una nueva rama de la Matemática, que a mediados del siglo XVIII se transformó en una disciplina independiente.

En las primeras etapas del estudio de las ecuaciones diferenciales el interés principal era la obtención de soluciones de ellas expresadas en términos de lo que llamamos funciones elementales. En esta época se descubrieron los métodos elementales de resolución (integración) de varios tipos especiales de ecuaciones diferenciales tales como las de variables separables, las lineales, las de Bernoulli, las de Clairaut, las de Riccatti estudiados hasta nuestros dias en los cursos introductorios de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Este enfoque tuvo un éxito completo en el caso de ecuaciones lineales con coeficientes constantes, sin embargo dificultades mayores aparecieron en esta dirección en el caso de ecuaciones diferenciales no lineales.

Para algunas aplicaciones las ecuaciones diferenciales no lineales resultan ser mejores modelos para diversos problemas de interés científico por lo cual nos vemos en la necesidad de estudiarlas.

Un marco de referencia fundamental en la evolución de las ecuaciones diferenciales es el trabajo de Poincaré "Memoire sur les courbes définiés par une équation différentielle" (1881) en el que se sentaron las bases de la Teoría Cualitativa de las ecuaciones diferenciales. Esta teoría pretende la descripción de la configuración general de las soluciones y el efecto de pequeñas perturbaciones de condiciones iniciales (estabilidad). El estudio de la estabilidad de un sistema es de gran importancia en la tecnología contemporánea, tuvo su origen en problemas de Mecánica Celeste estudiadas inicialmente por Newton, Lagrange y Laplace. Se pregunta si una pequeña perturbación en la posición y la velocidad de un cuerpo celeste lo coloca en una órbita que se aleja o que converge a la órbita original. El problema general de la estabilidad fue simultáneamente estudiado por Liapounov, que juntamente con Poincaré, es considerado fundador de la Teoría Cualitativa de las ecuaciones diferenciales. Otro aspecto de la Teoría Cualitativa, también estudiado por Poincaré, pretende describir el comportamiento asintótico de las soluciones y la estructura de sus conjuntos límite. El comportamiento asintótico de una solución se obtiene cuando se hace la variable independiente (tiempo) tender a infinito y se estudia su conjunto límite. Un conjunto límite puede ser un punto de equilibrio, una solución periódica u otro conjunto más complicado. La teoría de Poincaré-Bendixson, que estudiaremos en detalle en esta tesis, responde a este tipo de preguntas en el plano y nos da elementos para hacer una generalización en superficies bidimensionales como la esfera $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

La estructura del trabajo es la siguiente: en el capítulo 1 se estudiarán resultados relacionados con la teoría fundamental sobre la existencia y unicidad de soluciones para problemas de valor inicial de las ecuaciones diferenciales ordinarias, el teorema sobre la existencia de un intervalo de máximo de definición de las soluciones para estos problemas y algunos resultados básicos respecto a la dependencia continua de las soluciones en relación a condiciones iniciales; en el capítulo 2 se introducen conceptos de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales tales como el concepto de flujo local asociado a un campo vectorial, retrato de fase, el teorema de rectificación local, definición, ejemplos y propiedades de los conjuntos $\alpha$ y $\omega$ límite de una órbita y en el capítulo 3 se presenta y demuestra el teorema de Poincaré-Bendixson que nos dice que si tenemos un campo $F$ de clase $C^k, k \geq 1$ en un abierto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$, una órbita del campo definida para todo $t \geq 0$ contenida en un conjunto compacto $K \subset \mathcal{U}$ y $F$ posse a lo más un número finito de singularidades en el $\omega$ límite de la órbita, entonces este $\omega$ límite (que nos describe topológicamente el comportamiento a largo plazo de la solución) tiene una de las siguientes formas alternativas: es un punto de equilibrio, una órbita periódica o un conjunto de órbitas, cada una de las cuales tiende a uno de esos puntos singulares cuando $t \to \pm\infty$. Finalmente demostramos una aplicación del teorema de Poincaré-Bendixson, el cual afirma que si tenemos un campo $F$ de clase $C^1$ definido en un abierto de $\mathbb{R}^2$, una órbita cerrada de $F$ tal que el interior de esta órbita esta contenida en este abierto, entonces existe un punto singular de $F$ contenido en el interior de esta órbita, es decir, este resultado nos da condiciones suficientes para la existencia y ubicación de singularidades de $F$.

# Capítulo 1

# Preliminares

El objetivo de este capítulo es exponer la teoría fundamental sobre la existencia y unicidad de soluciones para problemas de valor inicial de las ecuaciones diferenciales ordinarias, así como el teorema sobre la existencia de un intervalo máximo de definición de las soluciones para estos problemas. Presentamos también resultados básicos sobre la importante cuestión de la *dependencia continua* de las soluciones respecto a las condiciones iniciales. Se utilizará un lenguaje riguroso en la definición de conceptos (por ejemplo, la definición precisa de *solución* de una ecuación diferencial) y en la demostración de algunos de los resultados expuestos. En esté capítulo seguimos las referencias [4], [6].

Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomo en un abierto $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ x_2' &= f_2(x_1, \ldots, x_n), \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde cada $f_i : \mathcal{U} \to \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n$, es una función la cual supondremos diferenciable, digamos de clase $C^k, k \geq 1$ y cada $x_i$ es una función real de variable real. Aquí $x_i'$ denota la derivada con respecto a la variable real t : $x_i' = dx_i/dt$.

Una familia $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, donde cada $\varphi_i : I \to \mathbb{R}, i = 1, \dots n$ es una función diferenciable en un intervalo $I$ de $\mathbb{R}$, se llama *solución del sistema* (1.1) en el intervalo $I$, si:

i) Para todo $t \in I, \varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in \mathcal{U}$.

ii) Para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

$$\frac{d\varphi_i}{dt}(t) = f_i(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$$

para todo $t \in I$.

El sistema (1.1) denotado abreviadamente por:

$$x_i' = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n \tag{1.2}$$

es equivalente a la ecuación diferencial ordinaria autónoma vectorial

$$x' = F(x) \tag{1.3}$$

donde $F = (f_1, f_2, ..., f_n) : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ es la función con coordenadas $f_i, i = 1, 2, ..., n$ y denotamos a $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

**Definición 1.1.** *Supongamos que $F \in C^1(\mathcal{U})$, donde $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Entonces $\varphi(t)$ es **solución** de la ecuación diferencial (1.3) en el intervalo $I$, si $\varphi(t)$ es diferenciable en $I$ y si para toda $t \in I$, $\varphi(t) \in \mathcal{U}$ y*

$$\varphi'(t) = F(\varphi(t))$$

*y dado $x_0 \in \mathcal{U}$, $\varphi(t)$ es una **solución del problema de valor inicial***

$$\begin{aligned} x' &= F(x), \\ \varphi(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

*en el intervalo $I$ si $t_0 \in I, \varphi(t_0) = x_0$ y $\varphi(t)$ es una solución de la ecuación diferencial (1.3) en el intervalo $I$.*

Una **condición inicial** para la solución $\varphi : I \to \mathcal{U}$ es una condición de la forma $\varphi(t_0) = x_0$, donde $t_0 \in I, x_0 \in \mathcal{U}$. Por simplicidad, usualmente tomaremos $t_0 = 0$.

Enunciaremos la condición de Lipschitz la cual es una hipótesis importante para demostrar la existencia y unicidad de soluciones para las ecuaciones diferenciales ordinarias.

**Definición 1.2.** *Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Una función $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ se dice que satisface la **condición de Lipschitz** en $\mathcal{U}$ si existe una constante $K$ tal que*

$$|F(x) - F(y)| \leq K|x - y|$$

*para todo $x, y \in \mathcal{U}$ y $K$ se llama **constante de Lipschitz** de $F$.*

*Recordemos que una bola abierta de radio $\varepsilon > 0$ y centro en $x_0$ en $\mathbb{R}^n$ se define como:*

$$B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n | |x - x_0| < \varepsilon\}.$$

*La función $F$ se dice que es **localmente Lipschitz** en $\mathcal{U}$ si para cada punto $x_0 \in \mathcal{U}$ existe una bola abierta de radio $\varepsilon > 0$ y centro $x_0$ tal que $B_\varepsilon(x_0) \subset \mathcal{U}$ y una constante $K_0 > 0$ tal que para todo $x, y \in B_\varepsilon(x_0)$*

$$|F(x) - F(y)| \leq K_0|x - y|$$

La condición de Lipschitz es una condición intermedia entre la condición de continuidad y la condición de continuidad de las derivadas parciales, como lo establece el siguiente lema.

**Lema 1.1.** *Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$. Entonces, si $F \in C^1(\mathcal{U})$, $F$ es localmente Lipschitz en $\mathcal{U}$.*

Hasta el momento hemos hablado de ecuaciones diferenciales ordinarias y sus soluciones sin preocuparnos sobre el problema de la existencia de dichas soluciones. Es de esperarse que las ecuaciones diferenciales que consideraremos en la mayoría de los casos tengan solución, de otra forma el tiempo y esfuerzo que se inviertan en buscar una solución estarían irremediablemente perdidos.

Por otra parte, el hecho de que para una ecuación diferencial en particular una persona no pueda encontrar su solución no significa que la ecuación no tenga solución. De aquí resulta muy deseable conocer algún criterio que nos permita decidir si una ecuación o bien un problema de valor inicial tienen solución.

A continuación vamos a enunciar algunos resultados de gran importancia, uno de ellos es conocido como el teorema fundamental de existencia y unicidad, que proporciona algunas condiciones que garantizan que un problema de valor inicial tenga solución única, otro de ellos nos asegura la existencia de un intervalo máximo donde el problema de valor inicial tiene solución única.

**Teorema 1.1.** ***(Teorema fundamental de existencia y unicidad local)*** *Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, que contiene a $x_0$ y supongamos que $F \in C^1(\mathcal{U})$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que el problema de valor inicial*

$$x' = F(x),$$
$$\varphi(t_0) = x_0$$

*tiene una única solución $\varphi(t)$ definida en el intervalo*

$$\varphi : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathcal{U}.$$

*Demostración.* Sea $x_0 \in \mathcal{U}$, entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x_0) \subset \mathcal{U}$ y $F$ es Lipschitz en esta bola por el lema 1.1. Supongamos que $I$ es un intervalo abierto que contiene al cero y $\varphi : I \to \mathcal{U}$ que satisface

$$\varphi'(t) = F(\varphi(t)) \tag{1.5}$$

y $\varphi(0) = x_0$. Como $\varphi(t)$ es una función continua que satisface la ecuación integral

$$\varphi(t) = x_0 + \int_0^t F(\varphi(s))ds \tag{1.6}$$

Recíprocamente si $\varphi : I \to \mathcal{U}$ satisface (1.6), entonces $\varphi(0) = x_0$ y $\varphi$ satisface (1.5) como puede verse derivando ambos lados de la ecuación (1.6). Por tanto (1.6) es equivalente a (1.5) como una ecuación para $\varphi : I \to \mathcal{U}$.

Por nuestra elección de $B_\varepsilon(x_0)$, tenemos una constante de Lipschitz $K$ para $F$ en $B_\varepsilon(x_0)$. Además $|F(x)|$ es acotada en $B_\varepsilon(x_0)$, digamos, por una constante $M$. Sea $\delta > 0$ que satisface que $\delta < \text{mín}\{\varepsilon/M, 1/K\}$ y definimos $I = [-\delta, \delta]$. Recordemos que $\varepsilon$ es el radio de la $B_\varepsilon(x_0)$. Vamos a definir una sucesión de funciones $u_1, u_2, \ldots$ de $I$ a $\mathcal{U}$. Vamos a demostrar que converge uniformemente a la función que satisface (1.6), y posteriormente que no existen otras soluciones de (1.6).

El lema que usaremos para obtener la convergencia de $u_k : I \to B_\varepsilon(x_0)$ es el siguiente:

**Lema 1.2.** ***(Lema de análisis)*** *Supongamos que $u_k : I \to \mathcal{U}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ es una sucesión de funciones continuas de un intervalo cerrado $I$ de un espacio normado $\mathcal{U}$ que cumple: Dado $\epsilon > 0$, existe un $N > 0$ tal que para cada $p, q > N$*

$$\max_{t \in I} |u_p(t) - u_q(t)| < \epsilon$$

*Entonces existe una función continua $u : I \to \mathcal{U}$ tal que*

$$\max_{t \in I} |u_k(t) - u(t)| \to 0 \quad \textit{cuando} \quad k \to \infty$$

Esto se llama convergencia uniforme de las funciones $u_k$. La demostración de este lema se puede consultar en [1].

La sucesión de funciones $u_k : I \to \mathcal{U}$ está definida como sigue:

Sea $u_0(t) \equiv x_0$

y sea $u_1(t) = x_0 + \int_0^t F(u_0(s))ds$

Suponemos que $u_k(t)$ está bien definida y que

$$|u_k(t) - x_0| \leq \varepsilon \quad \text{para toda} \quad t \in I,$$

además sea

$$u_{k+1}(t) = x_0 + \int_0^t F(u_k(s))ds$$

esto tiene sentido ya que $u_k(s) \in B_\varepsilon(x_0)$ de modo que el integrando está definido. Mostramos que $|u_{k+1}(t) - x_0| \leq \varepsilon$, es decir, $u_{k+1}(t) \in B_\varepsilon(x_0)$ para $t \in I$; esto implicaría que la sucesión puede ser continuada para $u_{k+2}, u_{k+3}$, etc. Tenemos

$$\begin{aligned} |u_{k+1}(t) - x_0| &\leq \int_0^t |F(u_k(s))| ds \\ &\leq \int_0^t M ds \\ &\leq M\delta < \varepsilon \end{aligned}$$

A continuación, probamos que existe una constante $L \geq 0$ tal que para todo $k \geq 0$:

$$|u_{k+1}(t) - u_k(t)| \leq (K\delta)^k L$$

Expresamos $L = \text{máx}\{|u_1(t) - u_0(t)| : |t| \leq \delta\}$. Obtenemos

$$\begin{aligned} |u_2(t) - u_1(t)| &= \left| \int_0^t F(u_1(s) - F(u_0(s)) ds \right| \\ &\leq \int_0^t K |u_1(s) - u_0(s)| ds \\ &\leq \delta K L \end{aligned}$$

Suponemos por inducción que, para algún $k \geq 2$, ya hemos probado que

$$|u_k(t) - u_{k-1}(t)| \leq (\delta K)^{k-1} L, \quad |t| < \delta,$$

entonces

$$\begin{aligned} |u_{k+1}(t) - u_k(t)| &\leq \int_0^t |F(u_k(s) - F(u_{k-1}(s))| ds \\ &\leq K \int_0^t |u_k(s) - u_{k-1}(s)| ds \\ &\leq (\delta K)(\delta K)^{k-1} L = (\delta K)^k L. \end{aligned}$$

Por lo tanto vemos que si denotamos $\delta K = \alpha < 1$, para algún $r > s > N$

$$\begin{aligned} |u_r(t) - u_s(t)| &\leq \sum_{k=N}^{\infty} |u_{k+1}(t) - u_k(t)| \\ &\leq \sum_{k=N}^{\infty} \alpha^k L \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

para cualquier $\epsilon > 0$ dado, $N$ es suficientemente grande.

Usando el lema de análisis (1.2), tenemos que la sucesión de funciones $u_0, u_1, \ldots$ converge uniformemente a la función continua $\varphi : I \to \mathcal{U}$. A partir de la identidad

$$u_{k+1}(t) = x_0 + \int_0^t F(u_k(s))ds,$$

y tomando límites de ambos lados se obtiene que

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= x_0 + \lim_{k\to\infty} \int_0^t F(u_k(s))ds, \\ &= x_0 + \int_0^t [\lim_{k\to\infty} F(u_k(s))]ds \\ &\quad \text{(por la convergencia uniforme)} \\ &= x_0 + \int_0^t F(\varphi(s))ds \end{aligned}$$

(por la continuidad de $F$).

Por lo tanto, $\varphi : I \to B_\varepsilon(x_0)$ satisface la ecuación integral (1.6) y por tanto es solución de la ecuación diferencial (1.5). En particular, $\varphi : I \to B_\varepsilon(x_0)$ es de clase $C^1$. Esto prueba la parte de existencia del Teorema 1.1, nos resta probar la parte de la unicidad.

Sean $\varphi, \phi : I \to \mathcal{U}$ dos soluciones de (1.3), que satisfacen $\varphi(0) = \phi(0) = x_0$, donde suponemos que $I$ es el intervalo cerrado $[-\delta, \delta]$. Vamos a demostrar que $\varphi(t) = \phi(t)$ para todo $t \in I$. Sea $Q = \max_{t\in I} |\varphi(t) - \phi(t)|$. Este máximo se alcanza en algún punto $t_1 \in I$. Entonces

$$\begin{aligned} Q = |\varphi(t_1) - \phi(t_1)| &= \left| \int_0^{t_1} \varphi'(s) - \phi'(s) ds \right| \\ &\leq \int_0^{t_1} |F(\varphi(s)) - F(\phi(s))| ds \\ &\leq \int_0^{t_1} K|\varphi(t) - \phi(t)| ds \\ &\leq \delta K Q. \end{aligned}$$

Dado que $\delta K < 1$, esto es imposible a menos que $Q = 0$. Por tanto

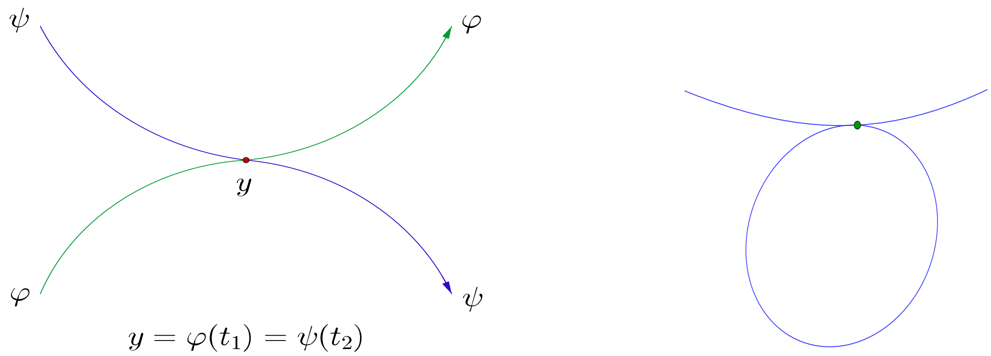
$$\varphi(t) \equiv \phi(t)$$

□

**Observación 1.1.** *En la prueba del Teorema 1.1 se hizo lo siguiente: Dada cualquier bola de radio $\varepsilon$ y centro en $x_0$ y $B_\varepsilon(x_0) \subset \mathcal{U}$ con $\max_{x \in B_\varepsilon(x_0)} |F(x)| \leq M$, donde $F$ sobre $B_\varepsilon(x_0)$ tiene una constante de Lipschitz $K$ y $0 < \delta < \min\{\varepsilon/M, 1/K\}$, entonces existe una única solución $\varphi : (-\delta, \delta) \to \mathcal{U}$ de (1.5) tal que $\varphi(0) = x_0$.*

**Observación 1.2.** *Considere la situación en que las hipótesis del teorema 1.1 se verifican, entonces dos curvas solución de $x' = F(x)$ nunca se cruzan. Esto es una consecuencia inmediata de la parte de unicidad del teorema. Supongamos $\varphi : I \to \mathcal{U}$, $\psi : I_1 \to \mathcal{U}$ son dos soluciones de $x' = F(x)$ tales que $\varphi(t_1) = \psi(t_2)$. Entonces $\varphi(t_1)$ no es un punto de intersección porque si definimos $\psi_1(t) = \psi(t_2 - t_1 + t)$, entonces $\psi_1$ también es una solución. Como $\psi_1(t_1) = \psi(t_2) = \varphi(t_1)$, se deduce que $\psi_1$ y $\varphi$ coinciden en un intervalo alrededor de $t_1$ por la afirmación sobre la unicidad incluida en el teorema 1.1.*

*Por lo tanto la situación de la figura 1.1(a) donde las soluciones $\varphi$ y $\psi$ coinciden sólo en un punto queda excluida, ya que el argumento anterior nos dice que $\varphi$ y $\psi$ coinciden en más de un punto. Similarmente, una curva solución no puede autointersectarse como en la figura 1.1(b).*




(a) (b)

Figura 1.1:

*En efecto, una curva solución $\varphi : I \to \mathcal{U}$ de $x' = F(x)$ satisface $\varphi(t_1) = \varphi(t_1 + w)$ para algún $t_1$ y $w > 0$, entonces esa curva solución deberá cerrarse como en la figura 1.2.*

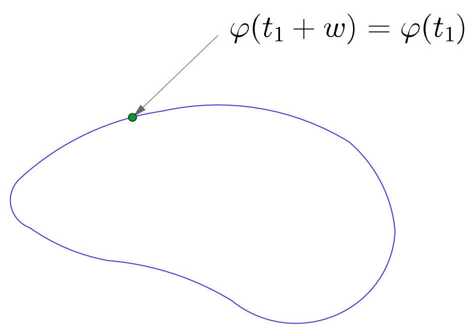



Figura 1.2:

Un complemento del teorema 1.1 es la propiedad de que las soluciones $\varphi(t)$ dependen continuamente de la condición inicial $\varphi(0)$. El siguiente teorema nos da una indicación precisa de esta propiedad.

**Teorema 1.2.** *Sea $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto y supongamos que $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ tiene una constante de Lipschitz $K$. Sean $\phi(t), \psi(t)$ soluciones de $x' = F(x)$ en un intervalo cerrado $[t_0, t_1]$. Entonces, para todo $t \in [t_0, t_1]$:*

$$|\phi(t) - \psi(t)| \leq |\phi(t_0) - \psi(t_0)| \exp(K(t - t_0))$$

La prueba de este teorema depende de la desigualdad de Gronwall, enunciada a continuación:

**Lema 1.3.** ***(Lema de Gronwall)*** *Sea* $u : [0, \alpha] \to \mathbb{R}$ *una función continua y no negativa. Supongamos* $C \geq 0, K \geq 0$ *son tales que*

$$u(t) \leq C + \int_0^t K u(s) ds$$

*para todo* $t \in [0, \alpha]$. *Entonces*

$$u(t) \leq C e^{Kt}$$

*para todo* $t \in [0, \alpha]$.

*Demostración.* Primero, supongamos $C > 0$, sea

$$U(t) = C + \int_0^t K u(s) ds > 0;$$

entonces

$$u(t) \leq U(t).$$

Por la diferenciación de $U$ encontramos que

$$U'(t) = K u(t);$$

de modo que

$$\frac{U'(t)}{U(t)} = \frac{K u(t)}{U(t)} \leq K.$$

Por lo tanto

$$\frac{d}{dt}(\log U(t)) \leq K$$

así

$$\log U(t) \leq \log U(0) + Kt$$

por integración. Como $U(0) = C$, tenemos por exponenciación

$$U(t) \leq C e^{Kt}$$

y así

$$u(t) \leq Ce^{Kt}$$

Si $C = 0$, entonces aplicamos el argumento anterior para la sucesión positiva $c_i$ que tiende a 0 cuando $i \to \infty$. Esto prueba el lema. $\square$

Ahora procedemos a la demostración del teorema.

*Demostración.* Definimos

$$v(t) = |\phi(t) - \psi(t)|.$$

Como

$$\phi(t) - \psi(t) = \phi(t_0) - \psi(t_0) + \int_{t_0}^{t} [F(\phi(s)) - F(\psi(s))] ds,$$

tenemos

$$v(t) \leq v(t_0) + \int_{t_0}^{t} Kv(s) ds.$$

Ahora aplicando el lema para la función $u(t) = v(t_0 + t)$ tenemos

$$v(t) \leq v(t_0) + \exp(K(t - t_0)),$$

que es justo la conclusión del teorema. $\square$

Veamos algunos resultados básicos sobre la extensión de soluciones de ecuaciones diferenciales.

**Teorema 1.3.** *Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y supongamos que $F \in C^1(\mathcal{U})$. Entonces para cada punto $x_0 \in \mathcal{U}$, existe un **intervalo máximo** $I$ en el que el problema de valor inicial (1.3) tiene una única solución, $\varphi(t)$; es decir, si el problema de valor inicial tiene solución $\psi(t)$ en el intervalo $J$ entonces $J \subseteq I$ y $\varphi(t) = \psi(t)$ para toda $t \in J$. Además, el intervalo máximo $I$ es abierto; es decir, $I = (\alpha, \beta)$.*

**Lema 1.4.** *Sea $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase $C^1$. Supongamos que $u(t), v(t)$ son dos soluciones de $x' = F(x)$ definidas sobre el mismo intervalo abierto $I$ que contiene a $t_0$ y satisfacen $u(t_0) = v(t_0)$. Entonces $u(t) = v(t)$ para toda $t \in I$.*

Sabemos por el teorema 1.1 que $u(t) = v(t)$ en algún intervalo abierto alrededor de $t_0$. La unión de todos estos intervalos abiertos es el mayor intervalo abierto $I^*$ contenido en $I$ alrededor de $t_0$ sobre el cual las soluciones $u$ y $v$ son iguales. Pero $I^*$ debe ser igual a $I$. Porque, de no ser así, $I^*$ tendría un punto extremo $t_1$ perteneciente a $I$; supongamos que $t_1$ es el punto extremo derecho, el otro caso será similar. Por continuidad, $u(t_1) = v(t_1)$. Por el teorema 1.1 $u = v$ en algún intervalo $I'$ alrededor de $t_1$. Entonces $u = v$ en $I^* \cup I'$ que es mayor estrictamente que $I^*$. Esta contradicción prueba el lema.

Esto no garantiza que una solución $\varphi(t)$ de una ecuación diferencial esté definida para todo $t$ (véase el ejemplo 1.1).

**Ejemplo 1.1.** *Consideremos el problema de valor inicial* $x' = 1 + x^2, \varphi(t_0) = x_0$, *cuya solución es*

$$\varphi(t) = \tan(t - c), \quad c = \textit{constante.}$$

*Esta función no se puede extender sobre un intervalo mayor que*

$$c - \frac{\pi}{2} < t < c + \frac{\pi}{2}$$

*pues* $\varphi(t) \to \pm\infty$ *cuando* $t \to \pm\frac{\pi}{2}$.

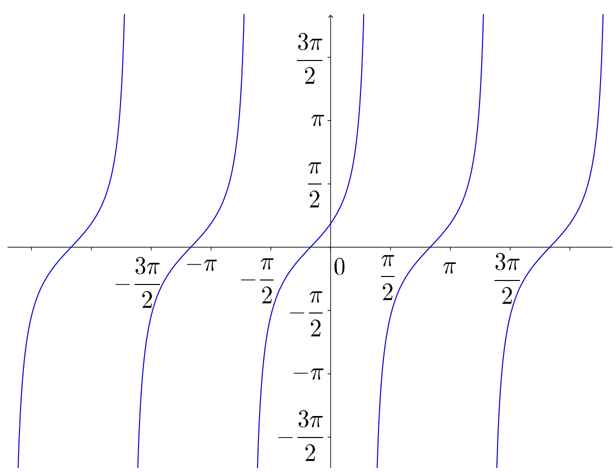



Figura 1.3: $\varphi(t) = \tan(t - c)$ para $c = 2$

Ahora consideremos una ecuación general $x' = F(x)$, donde la función $F$ es de clase $C^1$ definida sobre un conjunto abierto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$. Para cada $x_0 \in \mathcal{U}$ existe un intervalo abierto máximo $(\alpha, \beta)$ que contiene al 0 sobre el cual existe una solución $\varphi(t)$ con $\varphi(0) = x_0$. Existe un intervalo abierto que contiene al cero en el cual está definida una solución de la ecuación con $\varphi(0) = x_0$ (por el teorema 1.1); sea $(\alpha, \beta)$ la unión de todos los intervalos abiertos que contienen a 0 sobre los cuales existe una solución con $\varphi(0) = x_0$. (Posiblemente, $\alpha = -\infty$ ó $\beta = +\infty$, o ambos.) Por el lema 1.4 las soluciones sobre cualesquiera dos intervalos en esta unión coinciden sobre la intersección de los dos intervalos. Por lo tanto existe una solución sobre todo $(\alpha, \beta)$.

Ahora veamos lo que le sucede a una solución cuando nos aproximamos a los extremos de su intervalo máximo. Establecemos el resultado sólo para el límite por la derecha; el otro caso es similar.

**Teorema 1.4.** *Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, sea $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase $C^1$. Sea $\phi(t)$ una solución en un intervalo abierto máximo $I = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ con $\beta < \infty$. Entonces dado cualquier conjunto compacto $K \subset \mathcal{U}$, existe un $t \in (\alpha, \beta)$ con $\phi(t) \notin K$.*

Este teorema afirma que una si una solución $\phi(t)$ no puede ser extendida a un intervalo mayor, entonces $\phi$ abandona cualquier conjunto compacto. Esto implica que cuando $t \to \beta$, $\phi(t)$ tiende a la frontera de $\mathcal{U}$ ó $|\phi(t)|$ tiende a $\infty$ (o ambos).

*Demostración.* Supongamos que $\phi(t) \in K$ para todo $t \in (\alpha, \beta)$. Dado que $F$ es continua, existe $M > 0$ tal que $|F(x)| \leq M$ si $x \in K$.

Sea $\gamma \in (\alpha, \beta)$. Ahora probaremos que $\phi$ se extiende a una aplicación continua $[\gamma, \beta] \to \mathbb{R}^n$. Por el lema de análisis 1.2 es suficiente probar que $\phi : I \to \mathbb{R}^n$ es uniformemente continua. Para $t_0 < t_1$ en $I$ tenemos

$$\begin{aligned} |\phi(t_0) - \phi(t_1)| &= \left| \int_{t_0}^{t_1} \phi'(s) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^{t_1} |F(\phi(s))| ds \leq (t_1 - t_0) M. \end{aligned}$$

Ahora la curva extendida $\phi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable en $\beta$. Por

$$\begin{aligned} \phi(\beta) &= \phi(\gamma) + \lim_{t \to \beta} \int_\gamma^t \phi'(s) ds \\ &= \phi(\gamma) + \lim_{t \to \beta} \int_\gamma^t F(\phi(s)) ds \\ &= \phi(\gamma) + \int_\gamma^t F(\phi(s)) ds; \\ \text{entonces} \\ \phi(t) &= \phi(\gamma) + \int_\gamma^t F(\phi(s)) ds \end{aligned}$$

para todo $t$ entre $\gamma$ y $\beta$. De modo que $\phi$ es diferenciable en $\beta$, en efecto $\phi'(\beta) = F(\phi(\beta))$. Por lo que $\phi$ es una solución en $[\gamma, \beta]$. Puesto que existe una solución sobre el intervalo $[\beta, \delta)$, $\delta > \beta$, podemos extender $\phi$ para el intervalo $(\alpha, \delta)$. Por lo tanto $(\alpha, \beta)$ no puede ser el dominio máximo de una solución. Esto completa la prueba del teorema. □

La siguiente proposición es importante y sigue inmediatamente del teorema 1.4.

**Proposición 1.1.** *Sea $A$ un subconjunto compacto de un conjunto abierto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ y sea $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ de clase $C^1$. Sea $y_0 \in A$ y supongamos que se conoce que cada curva solución de la forma*

$$\phi : [0, \beta] \to \mathcal{U}, \qquad \phi(0) = y_0,$$

*está completamente contenida en $A$. Entonces existe una solución*

$$\phi : [0, \infty) \to \mathcal{U}, \qquad \phi(0) = y_0, \quad y \quad \phi(t) \in A$$

*para todo $t \geq 0$.*

Mostramos a continuación un teorema más fuerte sobre la continuidad de soluciones en términos de las condiciones iniciales. En el teorema 1.2 suponemos que ambas soluciones se definen en el mismo intervalo. En el siguiente teorema no es necesaria esta hipótesis. El teorema demuestra que soluciones que comienzan en puntos cercanos estarán definidas sobre el mismo intervalo cerrado y permanecerán cercanas unas a otras sobre él.

**Teorema 1.5.** *Sea $F(x)$ de clase $C^1$. Sea $\phi(t)$ una solución de $x' = F(x)$ definida en el intervalo cerrado $[t_0, t_1]$, con $\phi(t_0) = y_0$. Existe una vecindad $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ de $y_0$ y una constante $K$ tal que si $z_0 \in \mathcal{V}$, entonces existe una única solución $\psi(t)$ también definida en $[t_0, t_1]$ con $\psi(t_0) = z_0$; y $\psi$ satisface*

$$|\phi(t) - \psi(t)| \leq K|y_0 - z_0| \exp(K(t - t_0))$$

*para todo $t \in [t_0, t_1]$.*

Para la prueba del teorema usaremos el siguiente lema.

**Lema 1.5.** *Si $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ es **localmente Lipschitz** y $A \subset \mathcal{U}$ es un conjunto compacto (cerrado y acotado), entonces $F|_A$ es **Lipschitz**.*

La prueba del teorema es la siguiente:

*Demostración.* Por la compacidad de $[t_1, t_0]$, existe $\epsilon > 0$ tal que $x \in \mathcal{U}$ si $|x - \phi(t)| \leq \epsilon$. El conjunto de todos esos puntos es un subconjunto compacto $A$ de $\mathcal{U}$. La aplicación $F$ de clase $C^1$ es localmente Lipschitz. Por el lema 1.5, sigue que $F|_A$ tiene una constante de Lipschitz $K$. Sea $\delta > 0$ tan pequeña que $\delta \leq \epsilon$ y $\delta \exp(K|t_1 - t_0| \leq \epsilon)$. Afirmamos que si $|z_0 - y_0| < \delta$, entonces existe una única solución a través de $z_0$ definida en todo $[t_0, t_1]$. En primer lugar, $z_0 \in \mathcal{U}$ ya que $|z_0 - \phi(t_0)| < \epsilon$, por lo que existe una solución $\psi(t)$ a través de $z_0$ en un intervalo máximo $[t_0, \beta)$. Probaremos que $\beta > t_1$. Para ello supongamos que $\beta \leq t_1$. Entonces por la estimación exponencial dada por el teorema 1.2, para todo $t \in [t_1, \beta)$, tenemos

$$\begin{aligned} |\psi(t) - \phi(t)| &\leq |z_0 - t_0| \exp(K|t - t_0|) \\ &\leq \delta \exp(K|t - t_0|) \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

Así $\psi(t)$ está en un conjunto compacto $A$; por el teorema 1.4, $[t_0, \beta)$ no puede ser un intervalo máximo para la solución. Por lo tanto $\psi(t)$ está definida en $[t_0, t_1]$. La estimación exponencial sigue del teorema 1.2, y la unicidad por el lema 1.4. $\square$

Podemos interpretar el teorema también de esta manera. Dado $F(x)$ como en el teorema y una solución $\phi(t)$ definida en $[t_0, t_1]$, notamos que para todo $z_0$ suficientemente cerca de $y_0 = \phi(t_0)$, existe una única solución en $[t_0, t_1]$ iniciando en $z_0$ en el tiempo $t_0$. Si denotamos esta solución por $t \to u(t, z_0)$; entonces $u(t_0, z_0) = z_0$, y $u(t, y_0) = \phi(t)$. Entonces el teorema implica:

$$\lim_{z_0 \to y_0} u(t, z_0) = u(t, y_0),$$

uniformemente en $[t_0, t_1]$. En otras palabras, *la solución a través de* $z_0$ *depende continuamente de* $z_0$.

# Capítulo 2

# Teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales

En este capítulo se inicia el estudio de lo que se denomina teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias basándonos fundamentalmente en las referencias [4], [6] y [8].

## 2.1. Campos vectoriales

Una ecuación de la forma $x' = F(x)$, tiene la siguiente interpretación geométrica: la parte derecha de esta ecuación se puede pensar como un campo vectorial o campo de direcciones en el abierto $\mathcal{U}$, como se muestra en la figura 2.1.

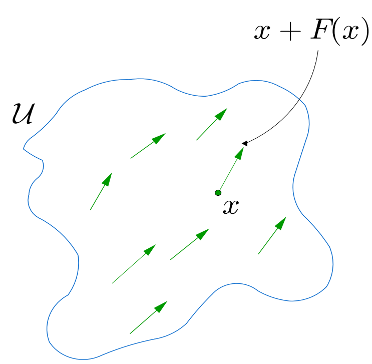



Figura 2.1: Campo vectorial asociado a $F$

Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$. Un **campo vectorial** de clase $C^k$, $1 \leq k \leq \infty$ en $\mathcal{U}$ es una aplicación $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ de clase $C^k$. Un campo vectorial asocia, a cada punto $x \in U$, un vector que se inicia en $x$ y termina en $x + F(x)$. Una **curva integral** o **trayectoria** u **órbita** del campo $F$ es una solución de la ecuación diferencial

$$x' = F(x) \qquad (x \in \mathcal{U}) \tag{2.1}$$

donde como sabemos las soluciones de está ecuación son funciones diferenciables $\varphi : I \to \mathcal{U}$ ($I$ un intervalo de la recta) tales que

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = F(\varphi(t)) \tag{2.2}$$

para todo $t \in I$.

**Observación 2.1.** *La ecuación* (2.1) *(o* (2.2)*) admite la siguiente interpretación geométrica, $\varphi : I \to \mathcal{U}$ es una **curva integral** de $F$ si y sólo si el vector velocidad $\varphi'(t)$ para todo $t \in I$ coincide con el valor del campo $F$ en $\varphi(t)$, es decir, si $\varphi$ es una solución de la ecuación diferencial $x' = F(x)$ (véase figura 2.2).*

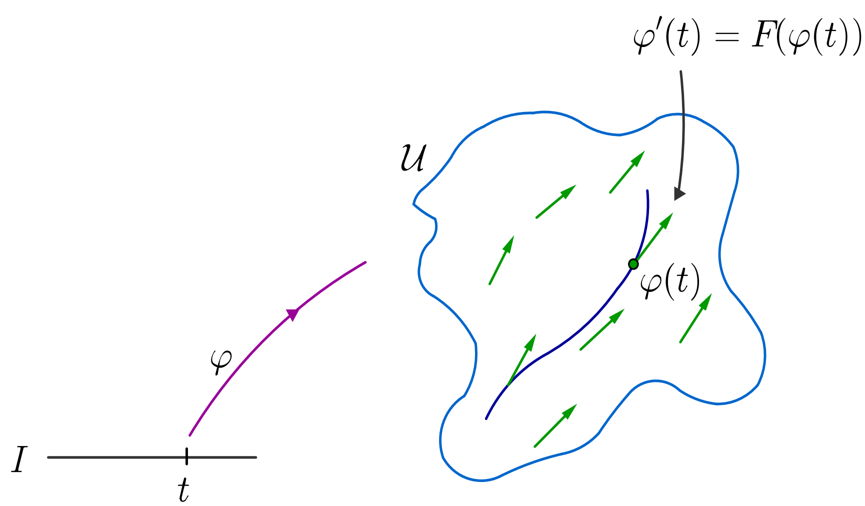



Figura 2.2: Curvas integrales asociadas a $F$

Veamos algunos ejemplos de campos vectoriales:

- Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo $C^\infty$ dado por:

$$F(x, y) = (-y, x)$$

entonces su representación gráfica esta dado por la figura 2.3.

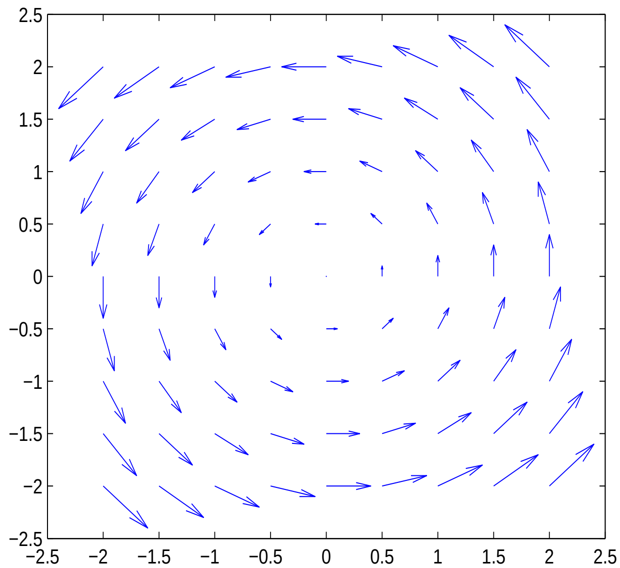



Figura 2.3: Representación gráfica del campo vectorial $F(x, y) = (-y, x)$

- Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo $C^\infty$ dado por:

$$F(x, y) = (x, -y)$$

entonces su representación gráfica esta dada por la figura 2.4.

A continuación enunciaremos algunas definiciones y teoremas que nos ayudarán a comprender el comportamiento de las soluciones de las ecuaciones diferenciales autónomas.

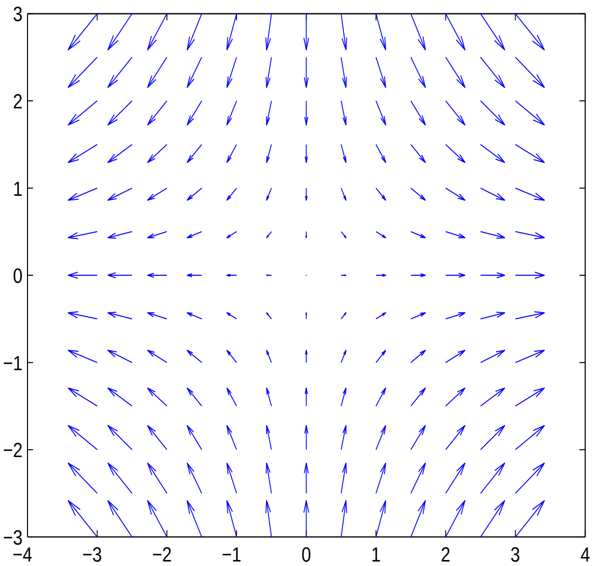



Figura 2.4: Representación gráfica del campo vectorial $F(x, y) = (x, -y)$

**Definición 2.1.** *Un punto $x \in \mathcal{U}$ se llama punto singular de $F$ si $F(x) = 0$ y punto regular de $F$ si $F(x) \neq 0$.*

**Observación 2.2.** *Si $x_0$ es un punto singular, entonces $\varphi(t) = x_0$, para toda $-\infty < t < \infty$ es solución de (1.3). Recíprocamente, si $\varphi(t) = x_0$, para toda $-\infty < t < \infty$ es solución de (1.3) entonces $x$ es un punto singular de $F$. Pues observemos:*

- *Si $x_0$ es punto singular y $\varphi(t) = x_0$ para toda $t \in \mathbb{R}$, entonces para toda $t$,*

$$\varphi'(t) = 0 = F(x_0) = F(\varphi(t))$$

- *Si $\varphi(t) = x_0$ para toda $t \in \mathbb{R}$ y es solución de la ecuación diferencial entonces para toda $t \in \mathbb{R}$:*

$$0 = \varphi'(t) = F(\varphi(t)) = F(x_0)$$

Si $x_0 \in \mathcal{U}$ y $\varphi : I \to \mathcal{U}$ es una solución máxima de la ecuación diferencial (1.3) con $\varphi(t_0) = x_0$, decimos que $I$ es el intervalo máximo de definición de la solución que en $t_0$ pasa por $x_0$, el cual denotamos como $I_{x_0}$. La imagen de una solución máxima $\varphi : I_{x_0} \to \mathcal{U}$ se llama la trayectoria, curva integral u órbita que pasa por el punto $x_0$.

## 2.2. El flujo de una ecuación diferencial

### 2.2.1. Sistemas lineales con coeficientes constantes

Estudiaremos a continuación algunos resultados acerca de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$x' = Ax \tag{2.3}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $A$ es una matriz de $n \times n$. Se demuestra que la solución del sistema lineal (2.3) junto con la condición inicial $x(0) = x_0$ está dada por

$$x(t) = e^{At} x_0$$

donde $e^{At}$ es una función matricial de $n \times n$ definida por su serie de Taylor.

**Teorema 2.1.** *Sea $t_0 > 0$, la serie de matrices*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \tag{2.4}$$

*es uniformemente convergente en cada intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ para todo $|t| \leq t_0$.*

*Demostración.* La serie (2.4) es una serie en el espacio vectorial $\mathcal{M}(n)$ de matrices $n \times n$, que identificamos con $\mathbb{R}^{n^2}$, con la norma: $|A| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$. Aplicando el método de demostración del teorema 1.1 vemos que las sucesivas aproximaciones (funciones matriciales)

$$x_0(t) = I, \quad x_{k+1}(t) = I + \int_0^t A x_k(s) ds$$

son precisamente las sucesivas sumas parciales de la serie (2.4). En efecto:

$$x_1(t) = I + \int_0^t AIds = I + tA$$

$$x_2(t) = I + \int_0^t A(I + sA)ds = I + tA + \frac{t^2A^2}{2!}$$

$$\vdots$$

$$x_k(t) = I + \int_0^t A\left(\sum_{k=0}^{k-1} \frac{s^jA^j}{j!}\right) ds = \sum_{k=0}^{k} \frac{t^jA^j}{j!}$$

Teniendo presente que la convergencia de la sucesión de aproximaciones a la solución del problema de valor inicial (como vimos en la demostración del teorema 1.1) es uniforme en cada intervalo cerrado y acotado. Con esto podemos concluir la demostración del teorema. □

En vista de la forma que tiene la serie (2.4) parece natural dar la siguiente definición:

**Definición 2.2.** *Se llama* ***exponencial de la matriz*** $A$ *a la matriz*

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \tag{2.5}$$

**Definición 2.3.** *Sea* $A$ *una matriz de* $n \times n$*. Entonces para todo* $t \in \mathbb{R}$*,*

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^kt^k}{k!}. \tag{2.6}$$

Veamos algunas propiedades que satisface la exponencial de una matriz:

a) $e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}$

b) $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$

Una proposición importante que se usaremos en la demostración de un resultado más adelante es la siguiente

**Proposición 2.1.** *Si* $A$ *y* $B$ *son matrices de* $n \times n$ *que conmutan, es decir, que satisfacen* $AB = BA$*, entonces* $e^{A+B} = e^Ae^B$*.*

A continuación establecemos el hecho fundamental de que para $x_0 \in \mathbb{R}^n$ el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} x' &= Ax, \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

tiene una única solución para todo $t \in \mathbb{R}$ que está dada por

$$x(t) = e^{At}x_0. \tag{2.8}$$

Con el fin de probar este teorema, primero calculamos la derivada de la función exponencial $e^{At}$ usando el hecho básico del análisis de que afirma que dos procesos de límite convergentes pueden ser intercambiados si uno de ellos converge uniformemente. (Véase [7] pag.149.)

**Lema 2.1.** *Sea $A$ una matriz cuadrada, entonces*

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$$

En otras palabras, la derivada de la función que a $t \in \mathbb{R}$ le hace corresponder el operador lineal $e^{At}$ es otra función que al numero $t$ le hace corresponder el operador lineal $Ae^{At}$. Esto significa la composición de $e^{At}$ con $A$, donde el orden de la composición no importa. Uno puede pensar también en $A$ y $e^{At}$ como matrices, en cuyo caso $Ae^{At}$ es su producto.

*Demostración.* Dado que $A$ conmuta con ella misma, sigue de la proposición 2.1 y por la definición 2.3 que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{At} &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} e^{At}\left(\frac{e^{Ah} - I}{h}\right) \\ &= e^{At} \lim_{h\to 0} \lim_{k\to\infty} \left( A + \frac{A^2h}{2!} + \ldots + \frac{A^k h^{k-1}}{k!} \right) \\ &= e^{At}A \end{aligned}$$

ya que el último límite es igual a $A$ esto sigue por el teorema 2.1 pues la serie que define $e^{Ah}$ converge uniformemente para $|h| \leq 1$ y podemos intercambiar los dos limites. Tenga en cuenta que $A$ conmuta con cada término de la serie por $e^{At}$, por tanto, con $e^{At}$. Esto prueba el lema. $\square$

**Teorema 2.2.** ***(El teorema fundamental para sistemas lineales)*** *Sea $A$ una matriz de $n \times n$. Entonces para un $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dado, la solución del problema de valor inicial*

$$\begin{aligned} x' &= Ax, \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

*tiene una única solución definida para todo $t \in \mathbb{R}$ dada por*

$$x(t) = e^{At}x_0 \tag{2.9}$$

*Demostración.* Por el lema 2.1, si $x(t) = e^{At}x_0$, entonces

$$x'(t) = \frac{d}{dt}e^{At}x_0 = Ae^{At}x_0 = Ax(t)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Además, $x(0) = Ix_0 = x_0$. Por lo tanto $x(t) = e^{At}x_0$ es una solución del problema de valor inicial. Para ver que esta solución es única, sea $x(t)$ cualquier solución del problema de valor inicial (2.2) y tomemos

$$y(t) = e^{-At}x(t)$$

A partir del lema 2.1 y del hecho de que $x(t)$ es una solución de (2.8)

$$\begin{aligned} y'(t) &= -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}x'(t) \\ &= Ae^{-At}x(t) + e^{-At}Ax(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ pues $e^{-At}$ y $A$ conmutan. Por lo tanto, $y(t)$ es una constante. Tomando $t = 0$ mostramos que $y(t) = x_0$ y por lo tanto cualquier solución del problema de valor inicial (2.2) está dada por $x(t) = e^{At}y(t) = e^{At}x_0$. Esto completa la prueba del teorema. $\square$

Ahora con estos resultados podemos definir el concepto de flujo.

**Definición 2.4.** ***(Flujo ó grupo a un parámetro de difeomorfismos de $\mathbb{R}^n$ de clase $C^1$)*** *Una aplicación $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $C^1$ se dice que es un flujo si:*

*i)* $\varphi(0, x) = x$ *para toda* $x \in \mathbb{R}^n$

*ii)* $\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$ *para toda* $t, s \in \mathbb{R}$

Un flujo se llama **lineal** si para cada $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_t(x) := \varphi(t, x)$ es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$.

**Observación 2.3.** *Denotaremos a $\varphi(t, x)$ como $\varphi_t(x)$ esto para todo $t \in \mathbb{R}$ y toda $x \in \mathbb{R}^n$ por tanto las propiedades de flujo las podemos reescribir de la siguiente manera:*

*i)* $\varphi_0(x) = x$ *para toda* $x \in \mathbb{R}^n$

*ii)* $\varphi_{t+s}(x) = \varphi_t(\varphi_s(x))$ *para toda* $t, s \in \mathbb{R}$

**Observación 2.4.** *A partir de la propiedad ii) de la definición de 2.4 se tiene la siguiente propiedad:*

$$\begin{aligned} \varphi_{-t}(\varphi_t(x)) &= \varphi_{-t+t}(x) \\ &= \varphi_0(x) \\ &= \varphi_{t-t}(x) \\ &= \varphi_t(\varphi_{-t}(x)) \\ &= x \end{aligned}$$

*para toda* $t \in \mathbb{R}$

Veamos que la aplicación $e^{At} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ asociada a la ecuación diferencial lineal

$$x' = Ax$$

dada de la siguiente manera para cada $t \in \mathbb{R}$ y cada $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi_t(x) := e^{At}x$ satisface las propiedades que definen un flujo :

i) $\varphi_0(x) = x$ para toda $x \in \mathbb{R}^n$, ya que $\varphi_0(x) = e^{A \cdot 0}x = I \cdot x = x$

ii) Si $t, s \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$\begin{aligned}
\varphi_t(\varphi_s(x)) &= \varphi_t(e^{As}x) \\
&= e^{At}(e^{As}x) \\
&= e^{At+As}x \\
&= e^{A(t+s)}x \\
&= \varphi_{t+s}(x)
\end{aligned}$$

Observamos que en una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, las soluciones están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$, sin embargo como ya vimos en algunos ejemplos esto no sucede en la mayoría de las ecuaciones diferenciales no lineales, por esta razón el flujo generado por un campo $F$ es llamado con frecuencia *flujo local o grupo local a un parámetro generado por* $F$ por lo cual nos interesa definir el flujo local $\varphi_t$ asociado a la ecuación diferencial $x' = F(x)$ y mostrar que bajo ciertas condiciones se satisfacen propiedades similares a las que definen un flujo.

### 2.2.2. El flujo local asociado a una ecuación diferencial

Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ existe una única solución $\varphi(t)$ con $\varphi(0) = x$ definida en un intervalo abierto máximo $I_x \subset \mathbb{R}$. Para indicar la dependencia de $\varphi(t)$ en $x$, se denotara

$$\varphi(t) = \varphi(t, x)$$

así $\varphi(0, x) = \varphi_0(x) = x$.

**Definición 2.5.** *Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $F \in C^1(\mathcal{U})$. Para $x_0 \in \mathcal{U}$, sea $\varphi(t, x_0)$ la solución al problema de valor inicial (2.2) definida en un intervalo máximo de existencia $I_{x_0}$. Entonces para $t \in I_{x_0}$, la aplicación $\varphi_t : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ definida como:*

$$\varphi_t(x_0) = \varphi(t, x_0)$$

*es llamado el* ***flujo de la ecuación diferencial*** *(1.3) o el flujo definido por la ecuación diferencial (1.3); a $\varphi_t$ también se le conoce como el* ***flujo del campo vectorial*** *$F(x)$.*

Si pensamos en el punto inicial $x_0$ variando a lo largo de $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ entonces el flujo de la ecuación diferencial $x' = F(x)$, $\varphi_t : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ puede verse como el movimiento de todos los puntos en el conjunto $\mathcal{U}$; véase la figura 2.5.

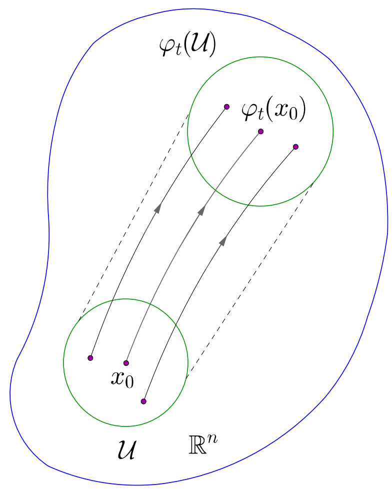



Figura 2.5: El flujo $\varphi_t$ de la ecuación $x' = F(x)$

Ahora mostraremos que las propiedades básicas i) y ii) de los flujos lineales también se cumplen por los flujos no lineales bajo ciertas condiciones. Usando la notación de la definición 2.5, sea $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathcal{U}$ el siguiente conjunto:

$$\Omega = \{(t, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{U} | t \in I_{x_0}\}$$

La aplicación $(t, x_0) \to \varphi(t, x_0)$ es entonces una función

$$\varphi : \Omega \to \mathcal{U}.$$

Llamaremos a $\varphi$ el **flujo** de la ecuación $x' = F(x)$.

A menudo escribiremos:

$$\varphi(t, x) = \varphi_t(x)$$

**Teorema 2.3.** *Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $F \in C^1(\mathcal{U})$. Entonces $\Omega$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y $\varphi$ es una aplicación continua.*

*Demostración.* Para probar que $\Omega$ es abierto, sea $(t_0, x_0) \in \Omega$. Supongamos que $t_0 \geq 0$, el otro caso es similar. Entonces, de acuerdo con la definición del conjunto $\Omega$, la curva solución $t \to (t, x_0)$ del problema de valor inicial (2.2) está definida sobre $[0, t_0]$. Así, como en la prueba del teorema 1.4, la solución $\varphi(t, x_0)$ se puede extender a un intervalo $[0, t_0 + \varepsilon]$ para algún $\varepsilon > 0$; es decir $\varphi(t, x_0)$ está definida sobre el intervalo cerrado $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. Se sigue entonces del teorema 1.5 que existe una vecindad $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ de $x_0$ tal que la solución $\varphi(t, x)$ está definida sobre $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ para toda $x \in \mathcal{V}$. Entonces $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times \mathcal{V} \subset \Omega$. Por lo tanto, $\Omega$ es abierto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Para probar que $\varphi : \Omega \to \mathcal{U}$ es continua en $(t_0, x_0)$, sean $\mathcal{V}$ y $\varepsilon$ como se definieron anteriormente. Podemos suponer que $\mathcal{V}$ tiene clausura compacta $\overline{\mathcal{V}} \subset \mathcal{U}$. Como $F$ es localmente Lipschitz y el conjunto $\mathcal{A} = \varphi([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{\mathcal{V}})$ es compacto, entonces existe $K$ una constante de Lipschitz para $F|_{\mathcal{A}}$. Sea $M = \max\{|F(x)| : x \in \mathcal{A}\}$. Sea $\delta > 0$ que satisface $\delta < \varepsilon$, y si $|x_1 - x_0| < \delta$, entonces $x_1 \in \mathcal{V}$. Supongamos

$$|t_1 - t_0| < \delta, \quad |x_1 - x_0| < \delta.$$

Entonces

$$|\varphi(t_1, x_1) - \varphi(t_0, x_0)| \leq |\varphi(t_1, x_1) - \varphi(t_1, x_0)| + |\varphi(t_1, x_0) - \varphi(t_0, x_0)|$$

El segundo término de la derecha tiende a 0 cuando $\delta \to 0$ porque la solución a través de $x_0$ es continua (incluso diferenciable) en $t$. El primer término de la derecha, por la estimación del teorema 1.5 está acotado por $\delta e^{K\delta}$ que también tiende a 0 cuando $\delta \to 0$. Esto prueba el teorema. □

**Teorema 2.4.** *Sea $\mathcal{U}$ un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $F \in C^1(\mathcal{U})$. Entonces para toda $x_0 \in \mathcal{U}$, si $s \in I_{x_0}$ y $t \in I(\varphi_s(x_0))$, resulta que $t + s \in I_{x_0}$, es decir, $I_{\varphi_s(x)} = I_x - t = \{r - t; r \in I_x\}$ y*

$$\varphi_{t+s}(x_0) = \varphi_t(\varphi_s(x_0))$$

*Demostración.* Supongamos que $t > 0$, $s \in I_{x_0}$ y $t \in I(\varphi_s(x_0))$. Sea el intervalo máximo $I_{x_0} = (\alpha, \beta)$. Entonces $\alpha < s < \beta$; mostraremos que $\beta > t + s$. Definimos la función $x : (\alpha, t+s] \to \mathcal{U}$ por

$$x(r) = \begin{cases} \varphi(r, x_0) & \text{si} \quad \alpha < r \leq s \\ \varphi(r-s, \varphi_s(x_0)) & \text{si} \quad s \leq r \leq t+s. \end{cases}$$

Entonces $x(r)$ es una solución y $x(0) = x_0$ en $(\alpha, t+s]$. Por tanto $t+s \in I_{x_0}$ pues $t+s = r$ entonces $s = r-t, t \in I_{x_0}$, es decir, $I_{\varphi_s(x)} = I_x - t = \{r-t; r \in I_x\}$ y por la unicidad de soluciones

$$\varphi_{t+s}(x_0) = x(t+s) = \varphi(t, \varphi_s(x_0)) = \varphi_t(\varphi_s(x_0))$$

Si $t = 0$ la afirmación del teorema sigue inmediatamente, y si $t < 0$, entonces definimos la función $x : [t+s, \beta) \to \mathcal{U}$ por

$$x(r) = \begin{cases} \varphi(r, x_0) & \text{si} \quad s \leq r < \beta \\ \varphi(r-s, \varphi_s(x_0)) & \text{si} \quad t+s \leq r \leq s. \end{cases}$$

Entonces $x(r)$ es una solución y $x(0) = x_0$ en $[t+s, \beta)$ y la anterior afirmación del teorema sigue por la unicidad de soluciones como en el caso anterior. □

**Teorema 2.5.** *Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $F \in C^1(\mathcal{U})$. Supongamos que $(t, x_0) \in \Omega$; entonces existe una vecindad $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ de $(x_0)$ tal que $\{t\} \times \mathcal{V} \subset \Omega$. La función $x \to \varphi_t(x)$ define una aplicación $\varphi_t : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ tal que $E = \varphi_t(\mathcal{V})$ es un conjunto abierto, $\varphi_{-t}$ está definida en $E$ y se verifica que*

$$\varphi_{-t} \circ \varphi_t(x) = \varphi_{-t}(\varphi_t(x)) = x \quad \textit{para toda } \; x \in \mathcal{V}$$

*y*

$$\varphi_t \circ \varphi_{-t}(y) = \varphi_t(\varphi_{-t}(y)) = y \quad \textit{para toda } \; y \in E$$

*Demostración.* Si $(t, x_0) \in \Omega$ entonces se sigue como en la demostración del teorema 2.3 que existe una vecindad $\mathcal{V}$ de $x_0$, tal que $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \times \mathcal{V} \subset \Omega$; así, $\{t\} \times \mathcal{V} \subset \Omega$. Para $x \in \mathcal{V}$, sea $\varphi_t(x)$ con $t \in I_x$, entonces $-t \in I_{\varphi_t(x)}$ ya que la función $h(s) = \varphi(s+t, \varphi_t(x))$ es una solución de $x' = F(x)$ en $[-t, 0]$ que satisface $h(-t) = \varphi(-t+t, \varphi_t(x)) = \varphi(0, \varphi_t(x)) = \varphi_t(x)$, es decir, $\varphi_{-t}$ está definida en el conjunto $E = \varphi_t(\mathcal{V})$. Se deduce entonces por el teorema 2.4 que

$\varphi_{-t}(\varphi_t(x)) = \varphi_0(x) = x$ para toda $x \in \mathcal{V}$ y que $\varphi_t(\varphi_{-t}(y)) = \varphi_0(y) = y$ para toda $y \in E$. Resta demostrar que $E$ es abierto. Sea $E \subset E^*$ el subconjunto máximo de $\mathcal{U}$ en el que $\varphi_{-t}$ es definida. $E^*$ es abierto porque $\Omega$ es abierto y $\varphi_{-t} : E^* \to \mathcal{U}$ es continua, ya que por el teorema 2.3 $\varphi$ es continua. Por lo tanto, la imagen inversa de un conjunto abierto $\mathcal{V}$ bajo una aplicación continua $\varphi_{-t}$ es un abierto, es decir, $\varphi_t(\mathcal{V})$ es abierto en $\mathcal{U}$. Así, $E$ es abierto en $\mathcal{U}$. $\square$

En el siguiente teorema, el cual es consecuencia del Teorema de existencia y unicidad de soluciones, agrupamos algunas de las propiedades de los campos vectoriales $C^k$ y sus soluciones en puntos regulares.

**Teorema 2.6.** ***(Diferenciabilidad respecto a las condiciones iniciales)*** *Sea $F$ un campo vectorial de clase $C^k$. El conjunto $\Omega = \{(t, x); x \in \mathcal{U}, t \in I_x\}$ es abierto en $\mathbb{R}^{n+1}$ y la aplicación $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ dada por $\varphi(t, x) = \varphi_t(x)$ es de clase $C^k$. Además, $\varphi$ satisface la ecuación*

$$\frac{d}{dt}(D\varphi_t(x_0)) = DF(\varphi_t(x_0)) \cdot D\varphi_t(x_0)$$

*para todo $(t, x_0) \in \Omega$.*

Para una demostración del teorema se puede consultar [4] capítulo 15, sección 2.

También puede recordarse que, dada una única ecuación diferencial, podemos visualizar el movimiento de todos los puntos iniciales posibles si pensamos en un fluido imaginario que corre a lo largo de las trayectorias de la ecuación. Si escogemos un punto de partida, es decir, un conjunto de condiciones iniciales para la ecuación, entonces las coordenadas de su movimiento subsiguiente son las soluciones de la ecuación diferencial para dicha condición inicial.

**Corolario 2.1.** *Sea $F$ un campo vectorial de clase $C^r, r \geq 1$, en $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $x \in \mathcal{U}$ e $I_x = (\delta_-(x), \delta_+(x))$ es tal que $\delta_+(x) < \infty$ (respectivamente $\delta_-(x) > -\infty$) entonces $\varphi_x(t)$ tiende a $\partial\mathcal{U}$ cuando $t \to \delta_+(x)$ (respectivamente $t \to \delta_-(x)$), es decir, para todo compacto $K \subseteq \mathcal{U}$ existe $\varepsilon = \varepsilon(K) > 0$ tal que si $t \in [\delta_+(x) - \varepsilon, \delta_+(x))$ (respectivamente $t \in (\delta_-(x), \delta_-(x) - \varepsilon]$) entonces $\varphi_x(t) \notin K$.*

*Demostración.* Por contradicción, supongamos que existe un compacto $K \subseteq \mathcal{U}$ y una sucesión $t_n \to \delta_+(x) < \infty$ tal que $\varphi_x(t_n) \in K$ para todo $n$. Tomado una subsucesión si es necesario podemos suponer que $\varphi_x(t_n)$ converge a un punto $x_0 \in K$. Sea $b > 0$ y $\alpha > 0$ de tales que $B_b \times I_\alpha \subseteq D$, donde $B_b = \{y \in \mathbb{R}^n, |y - x_0| \leq b\} \subseteq \mathcal{U}$ e $I_\alpha = \{t \in \mathbb{R}, |t| < \alpha\}$. Por el inciso c) del Teorema 2.6, $D$ es abierto. Por b) del Teorema 2.6, $\varphi_x(t_n + s)$ está definido para $s < \alpha$ y coincide con $\varphi_y(s)$ para $n$ suficientemente grande, donde $y = \varphi_x(t_n)$. Notemos que para cualquier $s < \alpha$ y $n$ suficientemente grande $\delta_+(x) - t_n < s$ y en consecuencia $t_n + s > \delta_+(x)$ pero esto contradice que $\delta_+(x)$ es el extremo máximo donde está definida $\varphi_x(t)$. $\square$

**Corolario 2.2.** *Si* $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$ *y* $|F(x)| < c$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$*, entonces* $I_x = \mathbb{R}$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$*.*

*Demostración.* Supongamos que $\delta_+(x) < \infty$ para algún $x \in \mathbb{R}^n$. Como $|x - \varphi_t(x)| = |\int_0^t F(\varphi_t(s))ds| \leq ct \leq c\delta_+(x)$, resulta que para todo $t \in [0, \delta_+(x))$, $\varphi_t(x)$ está en la bola cerrada de centro $x$ y radio $c\delta_+(x)$, lo que contradice el Corolario 2.1, luego $\delta_+(x) = \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Análogamente, se prueba que $\delta_-(x) = -\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ $\square$

**Corolario 2.3.** *Si* $\varphi$ *es una solución de* (2.1) *definida en un intervalo máximo* $I$ *y* $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ *para* $t_1 \neq t_2$*, entonces* $I = \mathbb{R}$ $\varphi(t + c) = \varphi(t)$ *para todo* $t$*, donde* $c = t_2 - t_1$*. Esto es,* $\varphi$ *es periódica.*

*Demostración.* Definimos $\psi : [t_2, t_2 + c] \to \mathbb{R}^n$, por $\psi(t) = \varphi(t - c)$, se tiene que $\psi'(t) = \varphi'(t - c) = F(\varphi(t - c)) = F(\psi(t))$ y $\psi(t_2) = \varphi(t_2 - c) = \varphi(t_2 - t_2 + t_1) = \varphi(t_1)$, por hipótesis $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ para $t_1 \neq t_2$ entonces $\psi(t_2) = \varphi(t_1) = \varphi(t_2)$. En virtud de la unicidad de las soluciones, se tiene $[t_2, t_2 + c] \subseteq I$ y $\varphi(t + c) = \varphi(t)$ si $t \in [t_1, t_2]$, prosiguiendo de esta manera, obtenemos que $I = \mathbb{R}$ y $\varphi(t + c) = \varphi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ $\square$

## 2.3. Retrato de fase de un campo vectorial

**Definición 2.6.** *El conjunto* $\gamma_p = \{\varphi(t, p), t \in I_p\}$ *se llama órbita del campo* $F$ *que pasa por* $p$*.*

**Observación 2.5.** *$q \in \gamma_p \Leftrightarrow \gamma_q = \gamma_p$. En efecto, si $q \in \gamma_p$, $q = \varphi(t_1, p)$ y $\varphi(t, q) = \varphi(t + t_1, p)$ y $I_p - t_1 = I_q$.*

Dos órbitas de la ecuación diferencial $x' = F(x)$ coinciden o son disjuntas, esto tiene como consecuencia que $\mathcal{U}$ se descompone en una unión disjunta de curvas diferenciables, las cuales pueden ser de una de las siguientes formas:

a) la imagen biunívoca de un intervalo de $\mathbb{R}$ (órbita regular)

b) un punto (punto singular), o

c) la imagen difeomorfa de un circulo (órbita periódica o cerrada)

correspondiendo cada caso a una de las alternativas del Teorema 2.7 que se presenta a continuación.

**Teorema 2.7.** *Si $\varphi$ es una solución máxima de (2.1) en $I$, se verifica una de las siguientes alternativas:*

*a) $\varphi$ es uno a uno.*

*b) $I = \mathbb{R}$ y $\varphi$ es constante.*

*c) $I = \mathbb{R}$ y $\varphi$ es periódica, es decir, existe un $\tau > 0$ tal que $\varphi(t + \tau) = \varphi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ si $|t_1 - t_2| < \tau$.*

*Demostración.* Si $\varphi$ no es biunívoca, $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ para algún $t_1 \neq t_2$. Luego, por el Corolario 2.3, $I = \mathbb{R}$ y $\varphi(t + c) = \varphi(t)$ para toda $t \in \mathbb{R}$ y $c = t_2 - t_1 \neq 0$. Probaremos que el conjunto

$$C = \{c \in \mathbb{R}; \varphi(t + c) = \varphi(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}$$

es un subgrupo aditivo cerrado de $\mathbb{R}$. En efecto, si $c, d \in C$, entonces $c+d, -c \in C$, ya que $\varphi(t+c+d) = \varphi(t+c) = \varphi(t)$ y $\varphi(t-c) = \varphi(t-c+c) = \varphi(t)$ y por tanto, $C$ es un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$. Por otro lado, si $c_n \in C$ y $c_n \to c$ tenemos que $c \in C$, ya que

$$\varphi(t+c) = \varphi(t + \text{lím}_{n\to\infty} c_n) = \varphi(\text{lím}_{n\to\infty}(t+c_n)) =$$

$$= \text{lím}_{n\to\infty} \varphi(t+c_n) = \text{lím}_{n\to\infty} \varphi(t) = \varphi(t)$$

Como se muestra en el lema siguiente, todo subgrupo aditivo $C$ de $\mathbb{R}$ es descrito de la forma $\tau\mathbb{Z}$, $\tau \geq 0, \mathbb{Z} = \{enteros\}$, ó $C$ es denso en $\mathbb{R}$. Por ser $C \neq \{0\}$ y cerrado, resulta que $C = \mathbb{R}$ o $C = \tau\mathbb{Z}, \tau > 0$. Si $C = \mathbb{R}$, basta demostrar que $\varphi$ es constante, es decir $\varphi(t_0) = \varphi(t), \forall t_0, t \in \mathbb{R}$, para ello supongamos sin perdida de generalidad que $t_0 < t$, si $c = t - t_0$, entonces $t = c + t_0$, de modo que $\varphi(t) = \varphi(c+t_0) = \varphi(t_0)$, por lo tanto $\varphi$ es constante. Ahora si $C = \tau\mathbb{Z}, \tau > 0$, vamos a demostrar que $\varphi$ es periódica, es decir, existe un $\tau > 0$ tal que $\varphi(t+\tau) = \varphi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ si $|t_1 - t_2| < \tau$. Supongamos que $t_1 \neq t_2$ y $|t_1 - t_2| < \tau$, entonces supongamos sin pérdida de generalidad que $t_1 < \tau + t_2$ y que $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$, ahora, por la manera en que se definió $C$ tenemos que $\varphi(t_1) = \varphi(\tau + t_2)$, luego aplicando el Corolario 2.3 para $t_1$, tenemos que existe un $c_1$ tal que $\varphi(t+c_1) = \varphi(t)\ \ \forall t \in \mathbb{R}$, donde $c_1 = \tau + t_2 - t_1$, como $c_1 \in C = \tau\mathbb{Z}$ entonces $c_1 = \tau n_1$ con $n_1 \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\begin{aligned} \tau n_1 = \tau + t_2 - t_1 &\implies \tau n_1 - \tau = t_2 - t_1 \\ &\implies \tau(n_1 - 1) = t_2 - t_1 \\ &\implies \tau \leq |\tau(n_1-1)| = |t_2 - t_1| < \tau \end{aligned}$$

pero eso no puede pasar, por lo tanto $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ si $|t_1 - t_2| < \tau$, es decir, $\varphi$ es periódica. Cada una de estas alternativas corresponde, respectivamente a los casos b) y c) del enunciado del Teorema. $\square$

**Lema 2.2.** *Todo subgrupo aditivo $C \neq \{0\}$ de $\mathbb{R}$ es de la forma $C = \tau\mathbb{Z}$, donde $\tau > 0$, o $C$ es denso en $\mathbb{R}$.*

*Demostración.* Supongamos que $C \neq \{0\}$, entonces $C \cap \mathbb{R}_+ \neq \emptyset$, donde $\mathbb{R}_+$ denota los reales positivos, de modo que existe $c \in C$, $c \neq 0$, esto implica que $c$ ó $-c$ está en $C \cap \mathbb{R}_+$. Sea $\tau = inf[C \cap \mathbb{R}_+]$. Si $\tau > 0, C = \tau\mathbb{Z}$, ya que si $c \in C - \tau C$, existe un único $K \in \mathbb{Z}$ tal que $K\tau < c < (K+1)\tau$ y por tanto, $0 < c - K\tau < \tau$ y $c - K\tau \in C \cap \mathbb{R}_+$, lo que contradice que $\tau = inf[C \cap \mathbb{R}_+]$. Si $\tau = 0$, se verifica que $C$ es denso en $\mathbb{R}$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ y $t \in \mathbb{R}$, existe $c \in C$ tal que $|c - t| < \varepsilon$.

Para ver esto, es suficiente tomar $c_0 \in C \cap \mathbb{R}_+$ tal que $0 < c_0 < \varepsilon$. Todo número real $t$ dista menos que $\varepsilon$ de un punto $c_0\mathbb{Z} \subseteq C$, ya que este conjunto divide a $\mathbb{R}$ en intervalos de longitud $c_0 < \varepsilon$ con extremos en el. $\square$

**Definición 2.7.** *Un conjunto abierto $\mathcal{U}$, junto con su descomposición como unión disjunta generada por las órbitas del campo $F$, se llama **retrato de fase de** $F$. Las órbitas son orientadas en sentido de las curvas integrales del campo $F$; los puntos singulares tienen la orientación trivial.*

## 2.4. Equivalencia y conjugación de campos vectoriales

**Definición 2.8.** *Sean $F_1, F_2$ campos vectoriales definidos en abiertos de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ respectivamente. Se dice que $F_1$ es **topológicamente equivalente** (respectivamente $C^r$-equivalente) a $F_2$ cuando existe un homeomorfismo (resp. un difeomorfismo de clase $C^r$) $h : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ que lleva a cada órbita de $F_1$ en una órbita de $F_2$ preservando la orientación. Más precisamente, sean $p \in \mathcal{U}_1$ y $\gamma^1(p)$ la órbita orientada de $F_1$ pasando por $p$; entonces $h(\gamma^1(p))$ es una órbita orientada $\gamma^2(h(p))$ de $F_2$ pasando por $h(p)$.*

Observe que esta definición establece una relación de equivalencia entre campos definidos en abiertos de $\mathbb{R}^n$. Un homeomorfismo $h$ se llama **equivalencia topológica** (respectivamente diferenciable) entre $F_1$ y $F_2$.

**Definición 2.9.** *Sean $\varphi_1 : \Omega_1 \to \mathbb{R}^n$ y $\varphi_2 : \Omega_2 \to \mathbb{R}^n$ los flujos generados por los campos $F_1 : \mathcal{U}_1 \to \mathbb{R}^n$ y $F_2 : \mathcal{U}_2 \to \mathbb{R}^n$ respectivamente. Se dice que $F_1$ es **topológicamente conjugado** (respectivamente $C^r$-conjugado) a $F_2$ cuando existe un homeomorfismo (respectivamente un difeomorfismo de clase $C^r$) $h : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ tal que $h(\varphi_1(t,x)) = \varphi_2(t, h(x))$ para todo $(t,x) \in \Omega_1$.*

En este caso, se tiene necesariamente $I_1(x) = I_2(h(x))$. Un homeomorfismo $h$ se llama **conjugación topológica** (respectivamente $C^r$-conjugación) entre $F_1$ y $F_2$.

**Observaciones:**
Una relación de conjugación es también una relación de equivalencia entre campos definidos en abiertos de $\mathbb{R}^n$. Es claro que toda conjugación es una equivalencia. Una equivalencia $h$ entre $F_1$ y $F_2$ manda puntos singulares en puntos singulares y órbitas periódicas en órbitas periódicas. Si $h$ es una conjugación, el período de las órbitas periódicas también se preserva.

**Lema 2.3.** *Sean $F_1 : \mathcal{U}_1 \to \mathbb{R}^n$ y $F_2 : \mathcal{U}_2 \to \mathbb{R}^n$ campos de clase $C^r$ y $h : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ un difeomorfismo de clase $C^r$. Entonces $h$ es una conjugación entre $F_1$ y $F_2$ si y sólo si*

$$Dh_p F_1(p) = F_2(h(p)), \quad \forall p \in \mathcal{U}_1 \tag{2.10}$$

*Demostración.* Sean $\varphi_1 : \Omega_1 \to \mathbb{R}^n$ y $\varphi_2 : \Omega_2 \to \mathbb{R}^n$ los flujos generados por los campos $F_1$ y $F_2$ respectivamente. Supongamos que $h$ satisface (2.10). Dado $p \in \mathcal{U}_1$, sea $\psi(t) = h(\varphi_1(t,p)), t \in I_1(p)$. Entonces $\psi$ es una solución de $x' = F_2(x)$, $x(0) = h(p)$, porque

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= Dh(\varphi_1(t,p)) \cdot \frac{d}{dt}(\varphi_1(t,p)) = Dh(\varphi_1(t,p))F_1(\varphi_1(t,p)) = \\ &= F_2(h(\varphi_1(t,p))) = F_2(\psi(t)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $h(\varphi_1(t,p)) = \varphi_2(t, h(p))$. Recíprocamente, supongamos que $h$ es una conjugación. Dado $p \in \mathcal{U}_1$, se tiene $h(\varphi_1(t,p)) = \varphi_2(t, h(p))$, $t \in I_1(p)$. Derivando esta relación con respecto $t$ y evaluando en $t = 0$, obtenemos lo deseado. $\square$

**Definición 2.10.** *Sean $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ un campo de clase $C^r, r \geq 1, \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ un abierto. Una aplicación diferenciable $f : \mathcal{A} \to \mathcal{U}$ de clase $C^r$ se llama **sección transversal local** de $F$ (de clase $C^r$) cuando, para todo $a \in \mathcal{A}$, $Df(a)(\mathbb{R}^{n-1})$ y $F(f(a))$ generen a $\mathbb{R}^n$. Sea $\mathcal{S} = f(\mathcal{A})$ dotada con la topología inducida. Si $f : \mathcal{A} \to \mathcal{S}$ es un homeomorfismo, se dice que $\mathcal{S}$ es una **sección transversal** de $F$.*

**Observación 2.6.** *Sean $p \in \mathcal{U}$ un punto no singular y $\{v_1, \ldots v_{n-1}, F(p)\}$ una base de $\mathbb{R}^n$. Sea $B_\delta(0)$ una bola de $\mathbb{R}^{n-1}$ con centro en el origen y radio $\delta > 0$. Para $\delta$ suficientemente pequeño, $f : B_\delta(0) \to \mathcal{U}$ dada por $f(x_1, \ldots, x_{n-1}) = p + \sum_{i=1}^{n-1} x_i v_i$ es una sección transversal local de $F$ en $p$.*

**Teorema 2.8.** ***(Teorema de rectificación local)***: *Sea $p$ un punto no singular (regular) de $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ de clase $C^k$ y $f : \mathcal{A} \to \mathcal{S}$ una sección transversal local de $F$ de clase $C^k$ con $f(0) = p$, entonces existen una vecindad $\mathcal{V}$ de $p$ en $\mathcal{U}$ y un difeomorfismo $h : \mathcal{V} \to (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$ es de clase $C^k$, donde $\varepsilon > 0$ y $B$ una bola abierta en $\mathbb{R}^{n-1}$ de centro $0 = f^{-1}(p)$ tal que:*

*a)* $h(\mathcal{S} \cap \mathcal{V}) = \{0\} \times B$

*b)* $h$ *es una* $C^r$*-conjugación en* $F|_{\mathcal{V}}$ *y el campo constante* $Y : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \to \mathbb{R}^n, Y = (1, 0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$

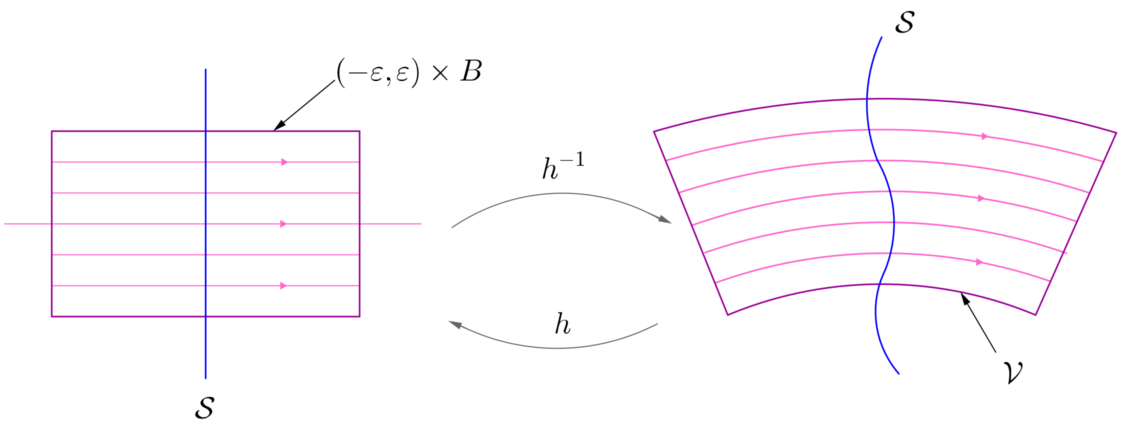



Figura 2.6: Caja de rectificación en el plano

*Demostración.* Sea $\varphi : \Omega \to \mathcal{U}$ el flujo generado por $F$. Sea $G : \Omega_{\mathcal{A}} = ((t, u); (t, f(u)) \in \Omega \to \mathcal{U}$ definida por $G(t, u) = \varphi(t, f(u))$. $G$ manda rectas paralelas en curvas integrales de $F$. Vamos a demostrar que $G$ es un difeomorfismo local en $0 = (0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Por el Teorema de la Función Inversa, es suficiente probar que $DG(0)$ es un isomorfismo.

Ahora
$$\frac{\partial G(0)}{\partial t} = \frac{d}{dt}\varphi(t, f(\overline{0}))\Big|_{t_0} = F(\varphi(0, p)) = F(p)$$

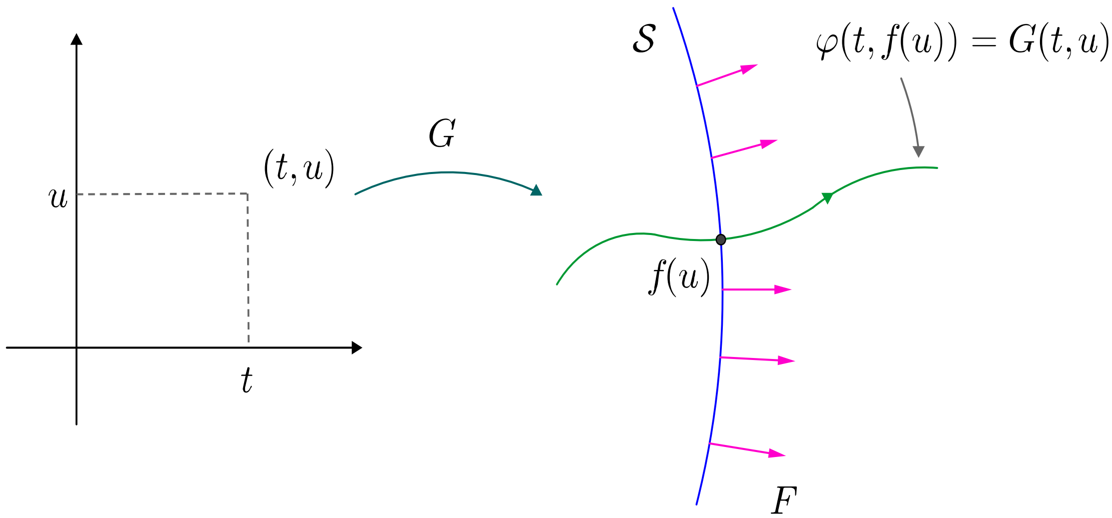



Figura 2.7:

y $\dfrac{\partial G(0)}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f(\overline{0})}{\partial x_{j-1}}$ para todo $j = 2, \ldots, n$, porque $\varphi(0, f(u)) = f(u), \forall u \in \mathcal{A}$. Por lo tanto, los vectores $\dfrac{\partial G(0)}{\partial x_j}$, $j = 1, \ldots, n$, generan $\mathbb{R}^n$ y $DG(0)$ es un isomorfismo.

Por el Teorema de la Función Inversa, existen $\varepsilon > 0$ y una bola $B$ en $\mathbb{R}^n$ con centro en el origen tales que $G|_{(-\varepsilon,\varepsilon)\times B}$ es un difeomorfismo sobre un abierto $\mathcal{V} = G((-\varepsilon, \varepsilon) \times B)$. Sea $h = (G|_{(-\varepsilon,\varepsilon)\times B})^{-1}$. Entonces $h(\mathcal{S} \cap \mathcal{V}) = \{0\} \times B$, porque $G(0, u) = f(u) \in \mathcal{S}, \forall u \in B$, esto prueba el inciso a). Por otro lado, $h^{-1}$ conjuga $Y$ y $F$:

$$\begin{aligned} Dh^{-1}(t,u) \cdot Y(t,u) = DG(t,u) \cdot (1, 0, \ldots, 0) = \frac{\partial G(t,u)}{\partial t} = \\ = F(\varphi(t, f(u))) = F(G(t,u)) = F(h^{-1}(t,u)), \end{aligned}$$

para todo $(t, u) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$. Esto termina la demostración.

$\square$

**Corolario 2.4.** *Sea $\mathcal{S}$ una sección transversal al campo $F$. Para todo punto $p \in \mathcal{S}$ existen $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$, una vecindad $\mathcal{V}$ de $p$ en $\mathbb{R}^n$ y una función $\tau : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ de* *clase* $C^k$ *tales que* $\tau(\mathcal{V} \cap \mathcal{S}) = 0$ *y*

*a) Para todo* $q \in \mathcal{V}$*, la curva integral* $\varphi(t, q) \in F|_{\mathcal{V}}$ *está definida y es biunívoca en* $J_q = (-\varepsilon + \tau(q), \varepsilon + \tau(q))$.

*b)* $\xi(q) := \varphi(\tau(q), q) \in \mathcal{S}$ *es el único punto de* $\varphi(\cdot, q)|_{J_q}$ *intersecta a* $\mathcal{S}$*. En particular,* $q \in \mathcal{S} \cap \mathcal{V}$ *si y sólo si* $\tau(q) = 0$.

*c)* $\xi : \mathcal{V} \to \mathcal{S}$ *es de clase* $C^k$ *y* $D\xi(q)$ *es sobreyectiva para todo* $q \in \mathcal{V}$.

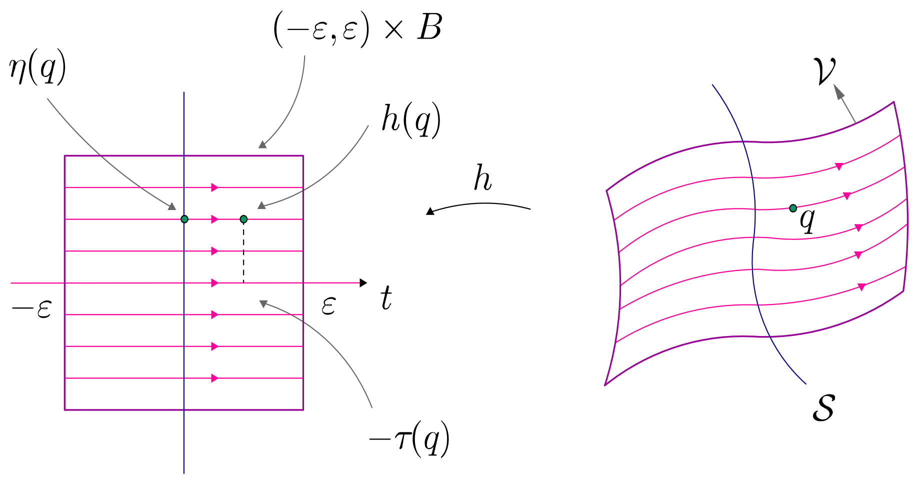



Figura 2.8:

*Demostración.* Sean $h, \mathcal{V}$ y $\varepsilon$ como en el teorema 2.8 (**Teorema de rectificación local**). Pongamos $h = (-\tau, \eta)$, donde $\tau : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ es la función $\tau = -\Pi_1(-\tau, \eta)$ tal que para $q \in \mathcal{V}$, $\tau(q) = -\Pi_1(-\tau(q), \eta(q))$ (recordemos que $\Pi_1$ es la proyección sobre la primera coordenada), de modo que la curva solución $\varphi(t, q)$ está definida y es biunívoca en el intervalo $J_q = (-\varepsilon + \tau(q), \varepsilon + \tau(q))$. Luego sea $q \in \mathcal{S} \cap \mathcal{V}$ entonces $\xi(q) = \varphi(\tau(q), q) = \varphi(0, q)$ por tanto $\tau(q) = 0$; por otro lado si $\tau(q) = 0$ entonces $\varphi(0, q) = \varphi(\tau, q) = \xi(q)$. Notemos además que la función $\xi : \mathcal{V} \to \mathcal{S}$ es de clase $C^k$ ya que $\varphi$ es de clase $C^k$ y como $\tau$ es una proyección sobre la primera coordenada entonces es de clase $C^k$. Por último como $h(q) = (-\tau(q), \eta(q))$ para $q \in \mathcal{V}$ entonces $h$ es sobreyectiva y como $\xi$ es la $h$ proyectada con la segunda coordenada entonces $D\xi(q)$ es sobreyectiva. $\square$

# 2.5. Conjuntos $\alpha$-límite y $\omega$-límite de una órbita

Sea $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ abierto, $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase $C^k$ $(k \geq 1)$ y $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ la curva integral de $F$ que pasa por el punto $p$ $(\varphi(0) = \varphi(0, p) = p)$, definida en su intervalo máximo $I_p = (\delta_-(p), \delta_+(p))$.

Si $\delta_+(p) = \infty$, se define el conjunto $\omega(p) =\{q \in \mathcal{U};\ \exists (t_n)_{n\geq 1}$ con $t_n \to \infty$ y $\varphi(t_n) \to q$, cuando $n \to \infty\}$, el conjunto $\omega-$límite de $p$.

Análogamente, si $\delta_-(p) = -\infty$, se define $\alpha(p) =\{q \in \mathcal{U};\ \exists (t_n)_{n\geq 1}$ con $t_n \to -\infty$ y $\varphi(t_n) \to q$, cuando $n \to \infty\}$, el conjunto $\alpha-$límite de $p$.

### 2.5.1. Ejemplos de conjuntos $\omega-$límite y $\alpha$-límite

**Ejemplo 2.1.**

*a)* *Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo $C^\infty$ dado por:*

$$F(x, y) = (x, -y)$$

*Las curvas integrales de $F$ son representadas por la silla de montar de la figura 2.9, en $\mathbb{R}^2$, entonces:*

1. *Si $p = 0$, $\alpha(p) = \omega(p) = \{0\}$*
2. *Si $p \in E_1 - \{0\}, \omega(p) = \emptyset$ y $\alpha(p) = \{0\}$*
3. *Si $p \in E_2 - \{0\}, \omega(p) = \{0\}$ y $\alpha(p) = \emptyset$*
4. *Si $p \notin E_1 \cup E_2, \omega(p) = \alpha(p) = \emptyset$*

*b)* *Si $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ es periódica de período $\tau$, entonces*

$$\omega(p) = \gamma_p = \{\varphi(t, p) \ \ tal\ que\ \ 0 \leq t \leq \tau\} = \alpha(p)$$

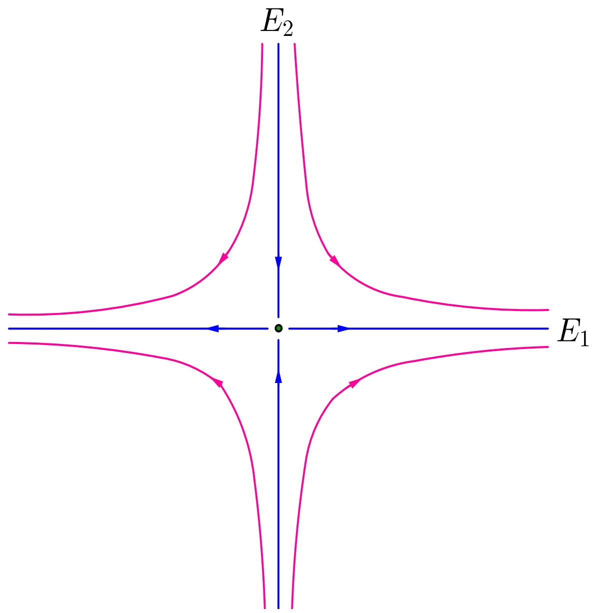



Figura 2.9: Curvas integrales de $F(x, y) = (x, -y)$

*En efecto, si* $q \in \gamma_p$ *existe* $t' \in [o, \tau]$ *tal que* $\varphi(t', p) = q$. *Definimos una sucesión* $t_n = t' + n\tau$. *Se tiene que* $t_n \to \infty$ *y* $\varphi(t_n) = \varphi(t' + n\tau) = \varphi(t') = q$. *Para probar que* $\alpha(p) = \gamma_p$ *basta tomar una sucesión* $t_n = t' - n\tau$, *pues si* $q \in \gamma_p$ *existe* $t' \in [o, \tau]$ *tal que* $\varphi(t', p) = q$. *Definimos una sucesión* $t_n = t' - n\tau$. *Se tiene que* $t_n \to -\infty$ *y* $\varphi(t_n) = \varphi(t' - n\tau) = \varphi(t') = q$.

*c) Sea* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida como* $F(x, y) = (X_1(x, y), X_2(x, y))$ *un campo de clase* $C^k$ *cuyas órbitas son espirales exteriores e interiores del circulo* $C$ *de centro en el origen y de radio 1, como se muestra en la figura 2.1.*

*Por ejemplo, si*

$$X_1(x, y) = y + x(1 - x^2 - y^2)$$

$$X_2(x, y) = -x + y(1 - x^2 - y^2)$$

*entonces* $F$ *satisface la condición de arriba.*

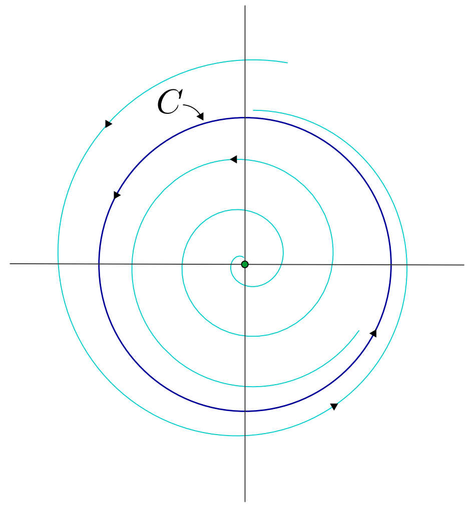



Figura 2.10: Curvas integrales de $F(x,y) = (y+x(1-x^2-y^2), -x+y(1-x^2-y^2))$

*Entonces*

1. $\alpha(p) = \{0\}$ *si* $p$ *está en el interior de* $C$
2. $\alpha(p) = \emptyset$ *si* $p$ *está en el exterior de* $C$
3. $\omega(p) = C$ *si* $p \in C$
4. $\omega(p) = C$ *cualquiera que sea el punto* $p$ *diferente del origen.*

*d)* *Considere el sistema*

$$x' = \operatorname{sen} x(-0.1\cos x - \cos y)$$

$$y' = \operatorname{sen} y(\cos x - 0.1\cos y)$$

*Hay equilibrio en los puntos silla de las esquinas del cuadrado* $(0,0), (0,\pi), (\pi,\pi)$ *y* $(\pi, 0)$*, así como en muchos otros puntos. Hay soluciones heteroclínicas conectando este equilibrio en el orden listado. Hay también una fuente de espiral en* $(\pi/2, \pi/2)$*. Todas las soluciones que manan de esta fuente se acumulan en las 4 soluciones heteroclínicas que conectan los puntos de equilibrio. De este modo el conjunto* $\omega$*-límite de cualquier punto con esta solución es el cuadrado cuyos vértices son los puntos de equilibrio antes mencionados.*

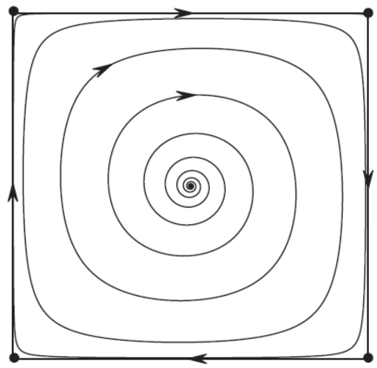



Figura 2.11: El conjunto $\omega$-límite es el cuadrado cuyos vértices son los puntos de equilibrio $(0,0),(0,\pi),(\pi,\pi)$ y $(\pi,0)$ y sus lados son segmentos de recta que conectan esos vértices.

**Observaciones**

a) Si $p$ es cualquier punto singular del campo $F$, entonces $\alpha(p) = \omega(p) = p$, ya que $\varphi(t) = p$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

b) Si $\gamma_p$ es una órbita de $F$ en el punto $p$ y $q \in \gamma_p$, entonces $\omega(p) = \omega(q)$. En efecto, si $q \in \gamma_p$ existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t,p) = \varphi(t+c,q)$. Análogamente, $\alpha(p) = \alpha(q)$. Como consecuencia de la observación b), podemos definir:

**Definición 2.11.** *El conjunto $\omega-$**límite** de una órbita $\gamma$ es el conjunto $\omega(p)$, para cualquier $p \in \gamma$. El conjunto $\alpha$-* ***límite*** *de una órbita $\alpha$ es el conjunto $\alpha(p)$, para cualquier $p \in \gamma$*

**Observación 2.7.** *Sea $\varphi(t) = \varphi(t,p)$ la curva integral del campo $F$ en el punto $p$ y $\psi(t,p)$ la curva integral del campo $-F$ en el punto $p$, entonces $\psi(t,p) = \varphi(-t,p)$.*

*De modo que el $\omega$-límite de $\varphi(t)$ es igual a $\alpha$-límite de $\psi(t)$ y recíprocamente el $\omega$-límite de $\psi(t)$ es igual a $\alpha$-límite de $\varphi(t)$. Por esta razón, para estudiar las propiedades generales de los conjuntos $\alpha$-límite y $\omega$-límite de las órbitas sera suficiente restringirnos al estudio del conjunto $\omega$-límite.*

**Teorema 2.9.** *Sean $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ un campo de clase $C^k, (k \geq 1)$, definido en un abierto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ y $\gamma^+(p) =\{\varphi(t,p);\, t \geq 0\}$ (respectivamente $\gamma^-(p) =\{\varphi(t,p);\, t \leq$*

$0\}$) *la semi-órbita positiva (respectivamente, la semi-órbita negativa) del campo* $F$ *en el punto* $p$. *Si* $\gamma^+(p)$ *(respectivamente),* $\gamma^-(p)$) *está contenida en un subconjunto compacto* $K \subset \mathcal{U}$*, entonces:*

a) $\omega(p) \neq \emptyset$ *(respectivamente,* $\alpha(p)$*)*

b) $\omega(p)$ *es compacto (respectivamente,* $\alpha(p)$*)*

c) $\omega(p)$ *es invariante por* $F$ *(respectivamente,* $\alpha(p)$*), esto es, si* $q \in \omega(p)$*, entonces la curva integral de* $F$ *que pasa por* $q$ *está contenida en* $\omega(p)$

d) $\omega(p)$ *es conexo (respectivamente,* $\alpha(p)$*)*

*Demostración.* Por la observación anterior es suficiente demostrar el teorema para un conjunto $\omega(p)$.

a) Por demostrar que $\omega(p) \neq \emptyset$.

   Sea $t_n = n \in \mathbb{N}$. Tenemos por hipótesis que $\{\varphi(t_n)\} \subset K$ es compacto, entonces existe una subsucesión $\{\varphi(t_{n_k})\}$ que converge a un punto $q \in K$.

   Tenemos entonces que:

   $t_{n_k} \to \infty$, cuando $n_k \to \infty$ y $\varphi(t_{n_k}) \to q$, luego, por definición $q \in \omega(p)$.

b) Por demostrar $\omega(p)$ es compacto.

   Sabemos que $\omega(p) \subset \overline{\gamma^+(p)} \subset K$, por tanto bastará demostrar que $\omega(p)$ es cerrado.

   Sea $q_n \to q$, $q_n \in \omega(p)$. Vamos a demostrar que $q \in \omega(p)$. Como $q_n \in \omega(p)$, entonces existe para cada $q_n$, una sucesión $(t_m^{(n)})$ tal que $t_m^{(n)} \to \infty$ y $\varphi(t_m^{(n)}, p) \to q_n$, cuando $m \to \infty$.

Elegimos para cada sucesión $(t_m^{(n)})$ un punto $t_n = t_{m(n)}^{(n)} > n$ y tal que $d(\varphi(t_n, p), q_n) < \frac{1}{n}$.

Tenemos entonces que:

$$d(\varphi(t_n, p), q) \leq d(\varphi(t_n, p), q_n) + d(q_n, q) < \frac{1}{n} + d(q_n, q)$$

Resulta entonces que $d(\varphi(t_n, p), q) \to \infty$, cuando $n \to \infty$, es decir $\varphi(t_n, p) \to q$. Como $t_n \to \infty$, cuando $n \to \infty$, se sigue que $q \in \omega(p)$.

c) Por demostrar que $\omega(p)$ es invariante por $F$.

Sea $q \in \omega(p)$ y $\Psi : I(q) \to \mathcal{U}$ la curva integral de $F$ que pasa por el punto $q$. Sea $q_1 = \varphi(t_0, q) = \Psi(t_0)$ y vamos a demostrar que $q_1 \in \omega(p)$. Como $q \in \omega(p)$, existe una sucesión $(t_n)$ tal que $t_n \to \infty$ y $\varphi(t_n, p) \to q$, cuando $n \to \infty$. Además $\varphi$ es continua, de modo que :

$$q_1 = \varphi(t_0, q) = \varphi(t_0, \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n, p)) = \varphi(t_0, \lim_{n\to\infty} \varphi(t_0, p)) = \varphi(t_0 + t_n, p)$$

Tenemos entonces que la sucesión $(s_n) = (t_0 + t_n)$ tal que $s_n \to \infty$ y $\varphi(s_n, p) \to q_1$, cuando $n \to \infty$, es decir $q_1 \in \omega(p)$. Para una ilustración geométrica, véase la figura 2.5.1

d) Por demostrar que $\omega(p)$ es conexo.

Supongamos que $\omega(p)$ no es conexo, entonces $\omega(p) = A \cup B$, donde $A$ y $B$ son cerrados, no vacíos y $A \cap B = \emptyset$. Siendo $A \neq \emptyset$, existe una sucesión $(t'_n)$ tal que $t'_n \to \infty$ y $\varphi(t'_n) \to a \in A$, cuando $n \to \infty$. Análogamente, existe una sucesión $(t''_n)$ tal que $t''_n \to \infty$ y $\varphi(t''_n) \to b \in B$, cuando $n \to \infty$. Luego podemos construir una sucesión $(t_n)$, $t_n \to \infty$, cuando $n \to \infty$, tal que $d(\varphi(t_n), A) < d/2$ y $d(\varphi(t_{n+1}), A) > d/2$, (donde $d = d(A, B) > 0$) para todo $n$ impar.

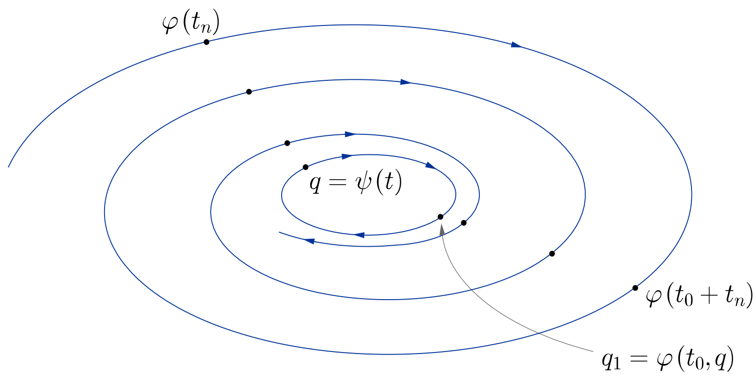



Figura 2.12:

Como la función $g(t) = d(\varphi(t), A), t_n \leq t \leq t_{n+1}$ para todo $n$ impar es continua y $g(t_n) < d/2$ y $g(t_{n+1}) > d/2$, sigue por el teorema del valor intermedio que existe $t_n^*$, $t_n < t_n^* < t_{n+1}$, tal que

$$g(t_n^*) = d(\varphi(t_n^*), A) = d/2$$

Dado que la sucesión $(\varphi(t_n^*))$ está contenida en un conjunto compacto $Q = \{x \in \mathcal{U}; d(x, A) = d/2\}$, $(\varphi(t_n^*))$ tiene un subsucesión convergente, que denotaremos también por $(\varphi(t_n^*))$. Sea $p^* = \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n^*)$.

Entonces $p^* \in \omega(p)$. Pero $p^* \notin A$, porque $d(p^*, A) = d/2 > 0$; también $p^* \notin B$, porque $d(p^*, B) \geq d(A, B) - d(p^*, A) = d/2 > 0$. Llegamos por tanto a una contradicción.

$\square$

**Corolario 2.5.** *Bajo las condiciones del teorema anterior, si $q \in \omega(p)$, entonces la curva integral de $F$, en el punto $q$, está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.*

*Demostración.* Como $\omega(p)$ es compacto e invariante, resulta que la órbita de $F$ que pasa por $q$ está contenida en un compacto $\omega(p)$. El resultado sigue del corolario 2.1. $\square$

Los ejemplos a) y b) de abajo, muestran que la hipótesis de existencia de un compacto $K \subset \mathcal{U}$ que contiene a $\gamma^+(p)$ no puede ser retirada del Teorema 2.9.

a) Notemos que la órbita se va indefinidamente hacia la izquierda y derecha acumulándose en las rectas $\ell_1, \ell_2$, y observamos que en este caso el $\omega(p)$ es disconexo pues $\omega(p) = \ell_1 \cup \ell_2$.

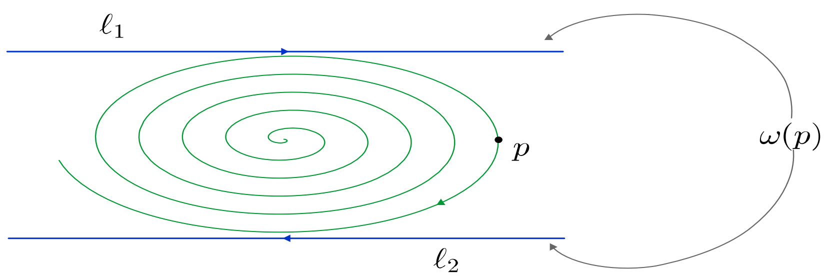



Figura 2.13:

b) Consideremos $F$ el campo del ejemplo 2.1c) restringido al abierto $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2 - \{p_1, p_2\}$, donde $p_1$ y $p_2$ son puntos distintos sobre el círculo unitario. Si $p \neq 0$ y $p \notin C - \{p_1, p_2\}$, $\omega(p)$ es el círculo unitario menos los puntos $p_1$ y $p_2$, mostrando que $\omega(p)$ es disconexo.

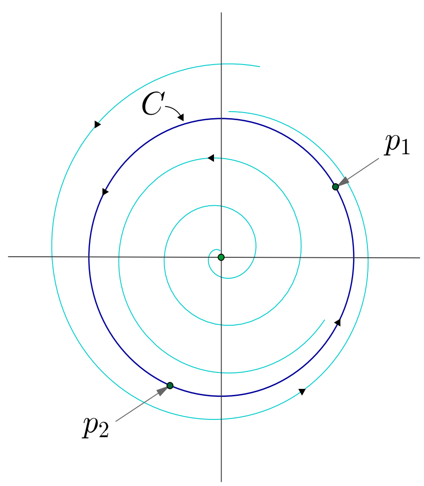



Figura 2.14: Curvas integrales de $F(x, y) = (y + x(1 - x^2 - y^2), -x + y(1 - x^2 - y^2))$

# Capítulo 3

# El Teorema de Poincaré-Bendixson

Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y $F$ un campo vectorial de clase $C^k, k \geq 1$ de $\mathcal{U}$. Supongamos que $\varphi(t,p)$ es una órbita del campo $F$ que está definida para todo $t \geq 0$ , denotamos como $\gamma_p^+$ a la semi-órbita positiva de $p$ definida como:

$$\gamma_p^+ = \{\varphi(t,p); t \geq 0\}$$

Antes de enunciar y demostrar el Teorema de Poincaré-Bendixson, probaremos algunos lemas en los que se basa la demostración. En este capítulo seguimos la presentación de este tema de la referencia [8].

## 3.1. Resultados previos

**Lema 3.1.** *Si $p \in \mathcal{S} \cap \omega(\gamma)$, siendo $\mathcal{S}$ una sección transversal al campo $F$ y $\gamma = \{\varphi(t)\}$ una órbita de $F$, entonces $p$ puede expresarse como límite de una sucesión de puntos $\varphi(t_n) \in \mathcal{S}$, donde $t_n \to \infty$.*

*Demostración.* Supongamos que $\gamma = \{\varphi(t)\} = \{\varphi(t,q)\}$ y $p \in \mathcal{S} \cap \omega(\gamma)$, como se muestra en la figura 3.1. Consideremos una vecindad $\mathcal{V}$ y una función $\tau : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ dadas por el Corolario 2.4.

Como $p \in \omega(\gamma)$ existe una sucesión $(\tilde{t_n})$ tal que $\tilde{t_n} \to \infty$ y $\varphi(\tilde{t_n}) \to p$ cuando $n \to \infty$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(\tilde{t_n}) \in \mathcal{V}, \forall n \geq n_0$. Si $t_n := \tilde{t_n} + \tau(\varphi(\tilde{t_n}))$, para $n \geq n_0$. Tenemos

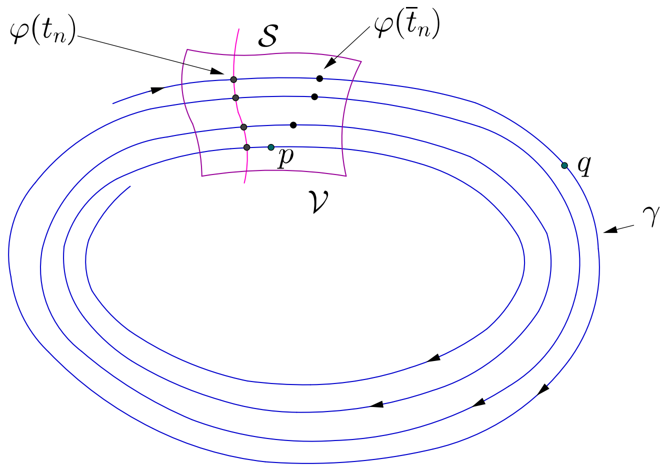



Figura 3.1:

$$\varphi(t_n) = \varphi(\tilde{t_n} + \tau(\varphi(\tilde{t_n})), q)$$

$$= \varphi(\tau(\varphi(\tilde{t_n})), \varphi(\tilde{t_n}))$$

y por definición de $\tau$ resulta que $\varphi(t_n) \in \mathcal{S}$.

Como $\tau$ es continua sigue que

$$\text{lím}_{n\to\infty} \varphi(t_n) = \text{lím}_{n\to\infty} \varphi(\tau(\varphi(\tilde{t_n})))$$

$$= \varphi(0, p) = p$$

pues $\varphi(\tilde{t_n}) \to p$ y $\tau(\varphi(\tilde{t_n})) \to \tau(p) = 0$ cuando $n \to \infty$. Esto prueba el lema.

$\square$

**Observación 3.1.** *Una sección transversal $\mathcal{S}$ del campo $F$, tiene dimensión uno, ya que estamos considerando el campo $F$ en $\mathbb{R}^2$, de modo que localmente $\mathcal{S}$ es la imagen difeomorfa de un intervalo de $\mathbb{R}$. Consideremos de aquí en adelante que toda sección transversal $\mathcal{S}$ tiene una ordenación total ($\leq$) inducida por la ordenación total del intervalo, podemos por tanto hablar de sucesiones monótonas en $\mathcal{S}$.*

**Lema 3.2.** *Sea $\mathcal{S}$ una sección transversal a $F$ contenida en $\mathcal{U}$. Si $\gamma$ es una órbita de $F$ y $p \in \mathcal{S} \cap \gamma$, entonces, ${\gamma_p}^+ = \{\varphi(t,p);\, t \geq 0\}$ intersecta a $\mathcal{S}$ en una sucesión monótona $p_1$, $p_2$,..., $p_n$,...*

*Demostración.* Sea $D = \{t \in \mathbb{R}^+; \varphi(t,p) \in \mathcal{S}\}$. Veamos que $D$ es un conjunto discreto; para ello necesitamos probar que para todo $t^* \in D$ existe un intervalo alrededor de $t^*$ tal que para ningún $t$ en ese intervalo $\varphi(t,p) \in \mathcal{S}$. Sea $t^*$ en $D$, esto es $\varphi(t^*,p) \in \mathcal{S}$, luego por el corolario 2.4, existe un $\varepsilon > 0$, una vecindad $\mathcal{V}$ de $\varphi(t^*,p)$ en $\mathbb{R}^2$ y una función $\tau : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ de clase $C^k$ tal que $\tau(\mathcal{V} \cap \mathcal{S}) = 0$ y para $\varphi(t^*,p) \in \mathcal{V}$, la curva integral $\varphi(t^*,p)$ de $F|_{\mathcal{V}}$ está definida en $J_{\varphi(t^*,p)} = (-\varepsilon + \tau(\varphi(t^*,p)), \varepsilon + \tau(\varphi(t^*,p))$ y $\xi(\varphi(t^*,p)) = \varphi(\tau(\varphi(t^*,p)), \varphi(t^*,p)) \in \mathcal{S}$ es el único punto donde $\varphi(\cdot, \varphi(t^*,p))|_{J_{\varphi(t^*,p)}}$ intersecta a $\mathcal{S}$ por lo tanto se tiene que $D$ es discreto. Podemos por tanto ordenar a $D = \{0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots\}$.

Sea $p_1 = p$. Definamos, en caso de que exista, $p_2 = \varphi(t_1,p)$. Por inducción, definiremos $p_n = \varphi(t_{n-1},p)$.

Si $p_1 = p_2$, entonces $\gamma$ es una trayectoria cerrada de período $\tau = t_1$, y $p = p_n$ para todo $n$.

Si $p_1 \neq p_2$, digamos $p_1 < p_2$ y si existiera $p_3$ vamos a demostrar que $p_3 > p_2$.

Orientemos la sección $\mathcal{S}$, de acuerdo a la figura 3.2(a) y observamos que debido al hecho de que $\mathcal{S}$ es conexo y la continuidad de $F$, las órbitas de $F$ cruzan la sección siempre en el mismo sentido, digamos, de izquierda a derecha, como se muestra en la figura 3.2(b).

Recordemos también que en $\mathbb{R}^2$ se vale el Teorema de la Curva de Jordan, el cual se enuncia como sigue:

**Teorema 3.1.** ***(Teorema de la Curva de Jordan)*** *Si $J$ es una curva cerrada, continua y simple ($J$ es la imagen homeomorfa de una circunferencia) entonces $\mathbb{R}^2 - J$ tiene dos componentes conexas: $S_i$ acotada y $S_e$ no acotada las cuales tienen a $J$ como frontera común.*

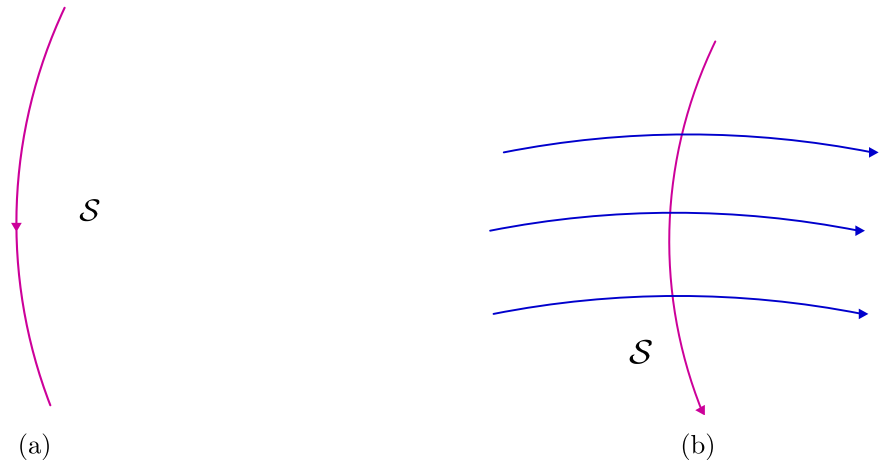



Figura 3.2:

En nuestro caso no demostraremos este teorema, pero se puede consultar la demostración en [3] y [5].

Por el Teorema 3.1(**Teorema de la Curva de Jordan**), consideramos entonces la curva de Jordan formada por la unión del segmento $\overline{p_1p_2} \subset \mathcal{S}$ junto con el arco $\widehat{p_1p_2}$ de la órbita $\widehat{p_1p_2} = \{\varphi(t,p) : 0 \leq t \leq t_1\}$, como se muestra en la figura 3.3.

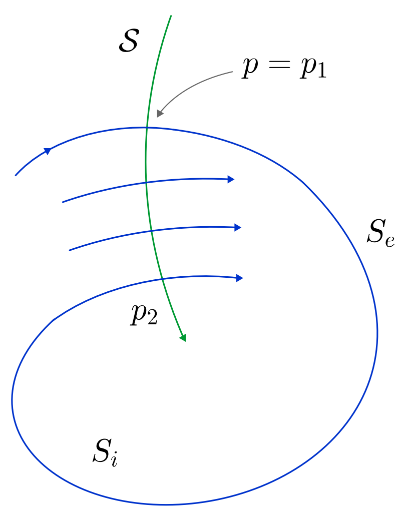
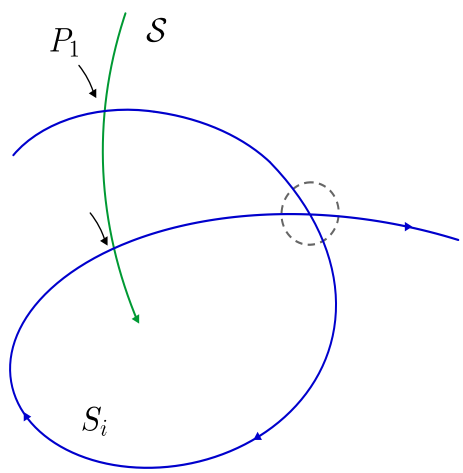
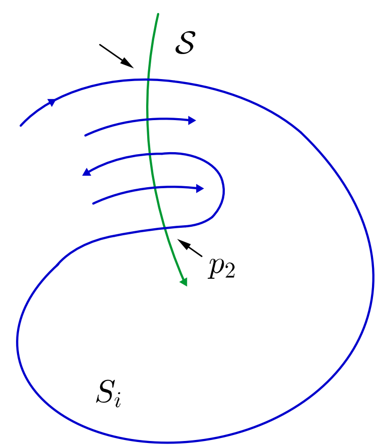



Figura 3.3:

En particular, la órbita $\gamma$, a partir de $p_2$, esto es, para valores $t > t_1$, queda contenida en $S_i$. De hecho, ella no puede intersectar al arco $\widehat{p_1 p_2}$ debido a la unicidad de las órbitas (ver figura 3.4(a)) y además no puede intersectar al segmento $\overline{p_1 p_2}$ porque sería contraria al sentido del flujo (véase figura 3.4(b)).




(a)




(b)

Figura 3.4:

Por lo dicho antes, en caso de que $p_3$ exista, debemos tener $p_1 < p_2 < p_3$, continuando de esta manera obtendremos una sucesión monótona $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_n < \ldots$. Por tanto $\{p_n\}$ es una sucesión monótona. Si $p_2 < p_1$ la demostración es análoga.

$\square$

**Lema 3.3.** *Si $\mathcal{S}$ es una sección transversal al campo $F$ y $p \in \mathcal{U}$, entonces $\mathcal{S}$ intersecta a $\omega(p)$ como máximo en un punto.*

*Demostración.* En virtud del lema anterior, el conjunto de puntos de $\gamma_p^+$ en $\mathcal{S}$ tiene como máximo un punto límite pues, el mismo forma una sucesión monótona, de esto y del lema 3.1 el cual nos dice que cualquier punto en $\mathcal{S} \cap \omega(\gamma_p^+)$ debe ser límite de esta sucesión monótona, sigue que puede haber a lo más un punto. $\square$

**Lema 3.4.** *Sea $p \in \mathcal{U}$, con ${\gamma_p}^+$ contenida en un compacto, y $\gamma$ una órbita del campo $F$ con $\gamma \subset \omega(p)$. Si $\omega(\gamma)$ contiene puntos regulares, entonces $\gamma$ es una órbita cerrada y $\omega(p) = \gamma$.*

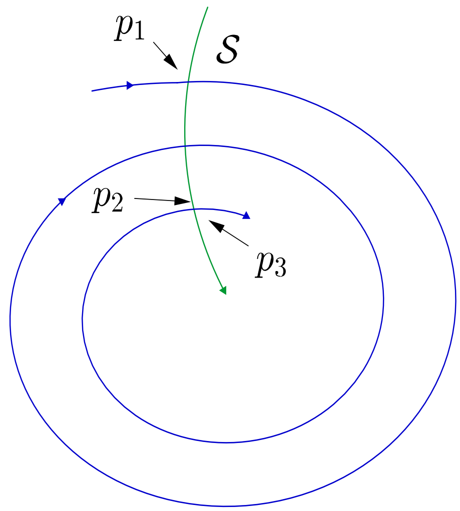



Figura 3.5:

*Demostración.* Sea $q \in \omega(\gamma)$ un punto regular y sea $\mathcal{V}$ una vecindad de $q$ dada por el Corolario 2.4 y $\mathcal{S}_q$ una sección transversal correspondiente. Por el Lema 3.1, existe una sucesión $t_n \to \infty$ tal que $\gamma(t_n) \in \mathcal{S}_q$. Como $\gamma(t_n) \in \omega(p)$ la sucesión $\{\gamma(t_n)\}$ se reduce a un punto, esto por el Lema 3.3, esto prueba que $\gamma$ es periódica.

Probemos ahora que $\gamma = \omega(p)$. Como $\omega(p)$ es conexo y $\gamma$ es cerrado y no vacío, basta probar que $\gamma$ es abierto en $\omega(p)$.

Sea $\overline{p} \in \gamma$, $\mathcal{V}_{\overline{p}}$ una vecindad de $\overline{p}$ dada por Corolario 2.4 y $\mathcal{S}_{\overline{p}}$ la sección transversal correspondiente. Mostraremos que $\mathcal{V}_{\overline{p}} \cap \gamma = \mathcal{V}_{\overline{p}} \cap \omega(p)$.

Sabemos que $\mathcal{V}_{\overline{p}} \cap \gamma \subset \mathcal{V}_{\overline{p}} \cap \omega(p)$. Luego probaremos por contradicción la otra contención. Supongamos que existe $\overline{q} \in \mathcal{V}_{\overline{p}} \cap \omega(p)$ tal que $\overline{q} \notin \gamma$, por el Teorema 2.8 (**Teorema de rectificación local**) y por la invariancia de $\omega(p)$, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t, \overline{q}) \in \omega(p) \cap \mathcal{S}_{\overline{p}}$ y $\varphi(t, \overline{q}) \neq \overline{p}$. De esto existen dos puntos distintos de $\omega(p)$ en $\mathcal{S}_{\overline{p}}$ lo cual es imposible por el lema 3.3, luego $\mathcal{V}_{\overline{p}} \cap \gamma = \mathcal{V}_{\overline{p}} \cap \omega(p)$.

Sea $U = \bigcup_{\overline{p} \in \gamma} \mathcal{V}_{\overline{p}}$ un abierto en $\mathcal{U}$, $\gamma \subset U$ y $U \cap \omega(p) = U \cap \gamma = \gamma$, es decir, $\gamma$ es una intersección de un abierto de $\mathbb{R}^2$ con $\omega(p)$, entonces $\gamma$ es abierto en $\omega(p)$.

$\square$

## 3.2. Enunciado y demostración del teorema de Poincaré - Bendixson

**Teorema 3.2.** ***(Teorema de Poincaré-Bendixson)*** *Sea $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ una curva integral de $F$, definida para todo $t \geq 0$, tal que ${\gamma_p}^+$ está contenida en un compacto $K \subset \mathcal{U}$. Suponga que el campo $F$ posee a lo más un número finito de singularidades en el conjunto $\omega-$límite de $p$, $\omega(p)$.*
*Se tienen las siguientes alternativas:*

*a) Si $\omega(p)$ contiene solamente puntos regulares, entonces $\omega(p)$ es una órbita periódica.*

*b) Si $\omega(p)$ contiene puntos regulares y singulares, entonces $\omega(p)$ consiste de un conjunto de órbitas cada una de las cuales tiende a uno de esos puntos singulares cuando $t \to \pm\infty$.*

*c) Si $\omega(p)$ no contiene puntos regulares, entonces $\omega(p)$ es un punto singular.*

*Demostración.*

i) Supongamos que $\omega(p)$ contiene solamente puntos regulares y $q \in \omega(p)$, entonces la órbita $\gamma_q \subset \omega(p)$. Siendo $\omega(p)$ compacto resulta que $\omega(\gamma_q) \neq \emptyset$. Se sigue del lema 3.4 que $\omega(p) = \gamma_q$ y es una órbita cerrada (véase figura 3.6).

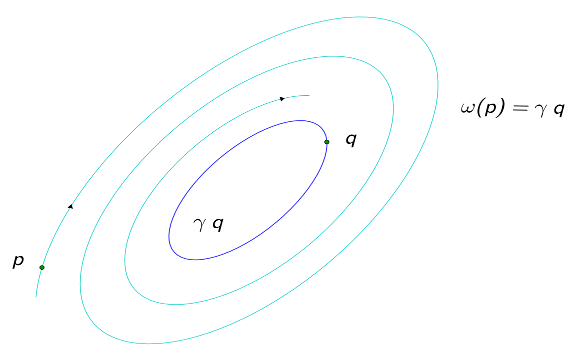



Figura 3.6: El conjunto $\omega(p)$ es una órbita periódica

ii) Supongamos que $\omega(p)$ contiene puntos regulares y singulares y $\gamma$ es una órbita contenida en $\omega(p)$, $\gamma$ no reducida a un punto singular, entonces por el lema 3.4 si el $\omega(\gamma)$ contiene puntos regulares entonces $\gamma$ sería una órbita cerrada y $\omega(p) = \gamma$ lo cual contradiría nuestra hipótesis de que $\omega(p)$ contiene tanto puntos regulares como singulares, por tanto $\omega(\gamma)$ contiene sólo puntos singulares, además $F$ tiene solamente un número finito de singularidades y $\omega(\gamma)$ es conexo entonces $\omega(\gamma)$ se reduce a un punto singular del campo $F$, similarmente $\alpha(\gamma)$ se reduce a un punto singular de $F$. Ver figuras 3.7, 3.8, 3.9.

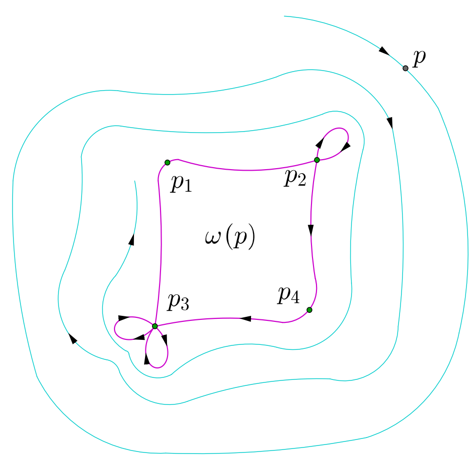



Figura 3.7: El conjunto $\omega(p)$ consiste de órbitas cada una de las cuales tiende a uno de esos puntos singulares cuando $t \to \pm\infty$

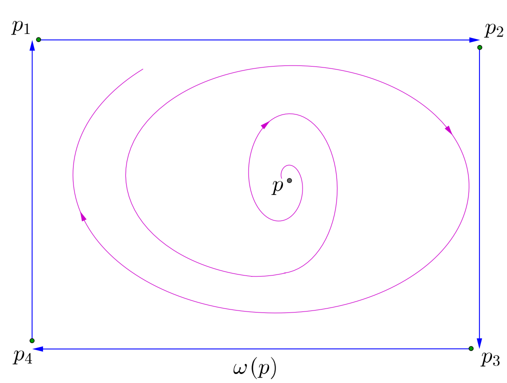



Figura 3.8: El conjunto $\omega(p)$ consiste de órbitas cada una de las cuales tiende a uno de esos puntos singulares cuando $t \to \pm\infty$

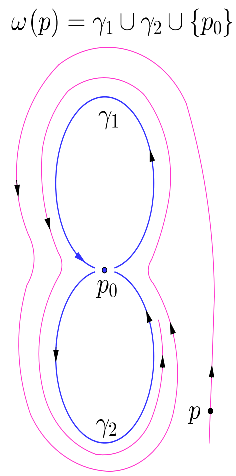



Figura 3.9: El conjunto $\omega(p)$ consiste de órbitas cada una de las cuales tiende a uno de esos puntos singulares cuando $t \to \pm\infty$

iii) El caso c) sigue directamente del hecho de ser $\omega(p)$ conexo y del hecho de tener $F$ solamente un número finito de singularidades en $\omega(p)$. Ver figura 3.10.

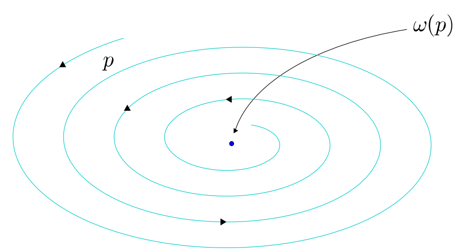



Figura 3.10: El conjunto $\omega(p)$ es un punto singular

$\square$

## 3.3. Una aplicación del teorema de Poincaré - Bendixson

Una consecuencia importante del teorema de Poincaré-Bendixson es el siguiente resultado sobre la existencia de singularidades.

**Teorema 3.3.** *Sea $F$ un campo vectorial de clase $C^1$, un conjunto abierto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$. Si $\gamma$ es una órbita cerrada de $F$ tal que $Int\gamma \subset \mathcal{U}$, entonces existe un punto singular de $F$ contenido en $Int\gamma$.*

*Demostración.* Supongamos que no existen puntos singulares en $Int\gamma$. Consideremos el conjunto $\Gamma$ de órbitas cerradas de $F$ contenidas en $\overline{Int\gamma}$, ordenadas de acuerdo al siguiente orden parcial

$$\gamma_1 \leq \gamma_2 \Leftrightarrow \overline{Int\gamma_1} \supseteq \overline{Int\gamma_2}$$

Mostraremos que todo subconjunto $S$ totalmente ordenado de $\Gamma$ (es decir, $\gamma_1 \neq \gamma_2$ en $S$ implica que $\gamma_1 < \gamma_2$ ó $\gamma_2 < \gamma_1$), admite una cota superior; esto es un elemento mayor o igual que cualquier elemento de $S$. Un conjunto ordenado con estas condiciones se llama *inductivo.*

En efecto, sea $\sigma = \{\cap\overline{Int\gamma_i}, \gamma_i \in S\}$. Notemos que $\sigma \neq \emptyset$, ya que para cada $\overline{Int\gamma_i}$ es compacto y la familia $\{\overline{Int\gamma_i}, \gamma_i \in S\}$ tiene la Propiedad de Intersección Finita. Esto es, cualquier intersección finita de elementos de la familia es no vacía. Sea $q \in \sigma$. Por el teorema 3.2 (**Teorema de Poincaré-Bendixson**) $\omega(q)$ es una órbita cerrada contenida en $\sigma$, ya que este conjunto es invariante por $F$ y no contiene puntos singulares. Esta órbita es una cota superior de $S$.

Por el **Lema de Zorn** (véase Apéndice B), $\Gamma$ tiene un elemento maximal, $\mu$, porque $\Gamma$ es inductivo. Por lo tanto no existe ninguna órbita cerrada de $\Gamma$ contenida en $Int\mu$. Pero si $p \in Int\mu$, $\alpha(p)$ y $\omega(p)$ son órbitas cerradas por el teorema 3.2 (**Teorema de Poincaré-Bendixson**) (pues no existen puntos singulares). Como $\alpha(p)$ y $\omega(p)$ no pueden ser ambas iguales a $\mu$ para verificar esto supongamos que

$\omega(p) = \mu$ y sea $p' \in \mu$ entonces $p' \in \omega(p)$. Construimos una sección transversal $\mathcal{S}$ al campo $F$ que pasa por $p'$, de modo que $p' \in \mathcal{S} \cap \omega(p)$, aplicando el lema 3.1 a $\omega(p)$, $p'$ puede ser expresado como límite de una sucesión de puntos, $\varphi(t_n)$ de $\mathcal{S}$, donde $t_n \to \infty$.

Notemos que el lema 3.2 se puede extender para toda la órbita $\gamma_p = \{\varphi(t,p) : t \in \mathbb{R}\}$, por lo tanto si $p' \in \mathcal{S} \cap \gamma_p$ entonces $\gamma_p$ intersecta a $\mathcal{S}$ en una sucesión monótona $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$, por lo cual no podemos construir otra sucesión de puntos $\varphi(t_n)$ pertenecientes a $\mathcal{S} \cap \alpha(p)$ tal que $t_n \to -\infty$ y $\varphi(t_n) \to p'$ (contradiciendo el lema 3.1 aplicado a $\alpha(p)$), por tanto $p' \notin \alpha(p)$. En consecuencia alguna de ellas $\alpha(p)$ u $\omega(p)$ es una órbita cerrada contenida en $Int\mu$, contradiciendo la maximalidad de $\mu$. Esta contradicción prueba que deben existir puntos singulares en $Int\gamma$. $\square$

# Apéndice A

# Teoremas de las funciones inversa e implícita

El teorema de la función implícita es un resultado fundamental que establece condiciones suficientes bajo las cuales una función o funciones de varias variables permite definir a una de ellas o varias de ellas como función de las demás.

Una función $y(x)$ está dada de forma implícita cuando está definida de la forma $F(x,y)=0$ en lugar de la habitual. Dada la ecuación $F(x,y)=0$ (lo que se conoce como función implícita), bajo ciertas exigencias sobre la derivada de $F$ podríamos, al menos localmente, despejar $y=f(x)$.

El enunciado siguiente es la generalización del teorema de la función implícita para funciones de dos o más variables:

**Teorema A.1.** ***(Teorema de la función implícita)****: Sea $F(x_1,x_n,y)$ una función con derivadas parciales continuas en un conjunto abierto $D\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ y sea $(x_0,y_0)\equiv(x_1^0,\ldots,x_n^0,y_0)\in D$ tal que $F(x_1^0,\ldots,x_n^0,y_0)=0$ y $F_y'(x_1^0,\ldots,x_n^0,y_0)\neq 0$. Entonces existen $\delta>0,\varepsilon>0$ y una función $f:B_\delta(x_0)\to(y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon)$ tales que:*

*i)* $f((x_1^0,\ldots,x_n^0)=y_0$

*ii)* $F(x_1,\ldots,x_n,f(x_1,x_n))=0$ *para todo* $x=(x_1,\ldots,x_n)\in B_\delta(x_0)$

*iii)* *Para cada* $x\in B_\delta(x_0), y=f(x_1,x_n)$ *es la única solución de la ecuación* $F(x_1,\ldots,x_n,y)=0$ *que pertenece a* $(y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon)$

*iv) La función* $y = f(x_1, x_n)$ *tiene derivadas parciales continuas en* $B_\delta(x_0)$ *que están dadas por*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = -\frac{F'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n, y)}{F'_y(x_1, \ldots, x_n, y)}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{A.1}$$

*(En otras palabras, la ecuación* $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ *define implícitamente a* $y$ *como función de las variables* $x_1, \ldots, x_n$ *en un entorno* $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *y ello de modo único.)*

El Teorema de la función inversa se deriva inmediatamente del de la función implícita aplicando la ecuación $f(x) - y = 0$

**Teorema A.2.** ***(Teorema de la función inversa)*** *Sea* $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ *una función de clase* $C^1(\mathcal{U})$*,* $\mathcal{U}$ *un abierto de* $\mathbb{R}^n$*. Supongamos que* $Df(x_0)$ *es invertible, o sea, que el jacobiano*

$$det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j(x_0)}\right), \quad i, j = 1, \ldots, n$$

*es distinto de cero. Entonces existe un* $\delta > 0$ *tal que la función inversa* $f^{-1}$ *está definida y es de clase* $C^1$ *en* $B_\delta(f(x_0))$*. La diferencial de* $g(y) = f^{-1}(f(x))$ *en* $y = f(x) \in B_\delta(f(x_0))$ *es* $Dg(y) = [Df(x)]^{-1}$

# Apéndice B

# Lema de Zorn

**Definición B.1.** *Sea $P$ un conjunto y $R$ una relación de $P$ en $P$. Decimos que $(P, R)$ es un orden parcial si se cumplen las siguientes condiciones:*

*i)* $xRx, \forall x \in P$ *(reflexividad).*

*ii)* $xRy$ *y* $yRx \Rightarrow x = y$ *(simetría).*

*iii)* $xRy$ *y* $yRz \Rightarrow xRz$ *(transitividad).*

*Se denota "$\leq$" en vez de $R$ y también se dice que $P$ es un* ***conjunto parcialmente ordenado*** *con el orden $\leq$.*

**Definición B.2.** *Si $(P, \leq)$ es un orden parcial, entonces decimos que éste es un orden total si se cumple la siguiente condición:*

$$\forall x, y \in P, \quad \textit{se tiene que} \quad x \leq y \quad \textit{ó} \quad y \leq x$$

*También se dice que $(P, \leq)$ es una cadena.*

En palabras, un conjunto parcialmente ordenado es totalmente ordenado, si sus elementos son todos comparables entre sí.

**Definición B.3.** *Sea $P$ un conjunto parcialmente ordenado y sea $m \in P$. Decimos que $m$ es un* ***elemento maximal*** *en $P$ si se cumple que:*

$$\forall x \in P (x \geq m \Rightarrow x = m)$$

En palabras, un elemento $m \in P$ es maximal, si “arriba de el no hay nadie”, aún cuando haya elementos en $P$ que no sean comparables con $m$. De hecho, esto último es lo que hace la diferencia entre un elemento maximal y un elemento máximo. Claramente si $m \in P$ es un elemento máximo entonces $m$ es el único elemento maximal de $P$.

**Definición B.4.** *Un conjunto parcialmente ordenado se llama* ***inductivo****, si cada cadena en $P$, tiene una cota superior en $P$, es decir, $\forall \mathcal{C} \subset P$, si $\mathcal{C}$ es totalmente ordenado, entonces $\exists y \in P$ tal que $y \geq x, \forall x \in \mathcal{C}$.*

Estamos en condiciones de enunciar el Lema de Zorn.

**Lema B.1.** *(**Lema de Zorn**) Todo conjunto no vacío, parcialmente ordenado e inductivo, tiene elementos maximales.*

En Teoría de Conjuntos se prueba que el Axioma de Elección y el Lema de Zorn son equivalentes.

# Bibliografía

[1] Apostol Tom, *Análisis Matemático*, 2da. edición, Addison-Wesley,1971. 1

[2] Fernández Pérez C., Vázquez Hernández F.J., Vegas Montaner J.M., *Ecuaciones diferenciales y en diferencias. Sistemas dinámicos*, Thomson, 2003.

[3] García Arenas Francisco, Puertas María Luz *El Teorema de la Curva de Jordan*, Divulgaciones Matemáticas v. 6, No. 1 (1998), 43-60. 3.1

[4] Hirsch Morris W., Smale Stephen, Devaney Robert L., *Differential Equations Dynamical Systems and An Introduction to Chaos*, Second Edition, Elsevier Academic Press, 2004. 1, 2, 2.2.2

[5] Munkres, James R., *Topology*, Second Edition, Prentice Hall, Inc, 2000. 3.1

[6] Perko Lawrence, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Third Edition, Springer, 2001. 1, 2

[7] Rudin Walter, *Principles of Mathematical Analysis*, Third Edition, McGraw-Hill, 1976. 2.2.1

[8] Sotomayor Tello, Jorge M., *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil, 1979.

2, 3

# Índice alfabético