BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA ABORDAR LA ILUSIÓN DE LA LINEALIDAD EN ESTUDIANTES DE PREPARATORIA

TESIS PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA

ALEXIS CEBALLOS SÁNCHEZ

DIRECTOR DE TESIS

MTRA. MARGARITA HERNÁNDEZ GONZÁLEZ

CO-DIRECTOR DE TESIS

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR

PUEBLA, PUE. OCTUBRE, 2024

Resumen

La aplicación de un examen diagnóstico para detectar si alumnos de primer grado, en una escuela preparatoria caían en la Ilusión de la Linealidad (IL), evidenció que la mayoría de los estudiantes quedaron atrapados en ella. En esta investigación se muestra evidencia empírica que valida la efectividad de una secuencia didáctica diseñada para superar la IL. Después de la implementación, los resultados de una evaluación final muestran el grado de efectividad de esta secuencia didáctica.

Dedicatoria

Hoy escribiendo estas líneas me invaden tantos y tantos momentos y recuerdos, unos muy buenos, otros buenos y algunos no tan buenos.

Este trabajo se lo dedico…

… a mis papás, que amo y respeto con todo mi ser, y que gracias a su educación han forjado el hombre que soy hoy, gracias por el apoyo incondicional.

… a mis hermanos: Sol, Yuli, Cielo, Luz, Ángel y mi angelito de toda mi vida, Joba, que son lo más grandioso que puedo tener aquí, gracias por ser mis mayores confidentes.

… a mis sobrinos: Gia y Emi, quienes apenas empiezan a trazar su camino, y quiero ser un buen tío para ellos.

… también a mis primos: César, Chin, Kiko, Omar y Chipi, que han sido los mejores primos que he podido tener, estoy tan agradecido de que formen parte de mi camino.

… a mis abuelitos, que admiro tanto; ellos que siempre que tenemos la posibilidad de vernos me reconfortan con sabiduría, y cada abrazo me estremece de tanto cariño.

… a Tilla, que la amo con todo mi corazón, y que ha sido una gran compañera en esta carrera universitaria. Ojalá que me dure toda la vida.

… a mi prima, Pulguita, que, aunque hoy ya no está aquí, me guio en mi pasión por enseñar.

… a mis alumnos de Prepa Siglo XXI y de casa, quienes me enseñan tanto de cómo aprender de las matemáticas.

… a la educación y las matemáticas, que son piezas maravillosas para la humanidad y la vida.

… a mis amigos y ahora colegas que conocí en la Facu: Erick Michelle, Jorge Carrasco, Oscar Hernández, Zaira Evelyn y Cesar Antonio, gracias por las convivencias, por haber estado en este proceso tan importante de mi vida.

… a todas las personas que han confiado en mí, a quienes me han dado un fuerte abrazo en momentos difíciles, a quienes me brindaron su apoyo incondicional, gracias, por tanto.

Agradecimientos

A la Mtra. Margarita Hernández González por confiar en mi potencial, por darme el acompañamiento en este trayecto de investigación y tenerme tanta paciencia para la elaboración de esta tesis. Además, estoy muy agradecido porque ha sido una gran influencia en mi formación académica y por brindarme su apoyo incondicional en esta última década, ha sido una maestra excepcional.

A la Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar, por su apoyo en la revisión y contribución de esta investigación. También, por ser parte de mi formación académica en la licenciatura e inspirarme a conocer más acerca de la educación matemática, que es un universo de conocimientos; y por reconocer mis habilidades en la investigación.

A la Dra. Estela de Lourdes Juárez Ruiz, por ser una maestra con grandes habilidades para incentivar el aprendizaje de las matemáticas, por confiar en mí, y darme la oportunidad de trabajar en mi primer proyecto de investigación en la universidad. Gracias por su gentileza y apoyo en todo momento.

A la Mtra. Mónica Macías Pérez, quien ha sido una guía importante en mi carrera universitaria, gracias por su compromiso determinante en los cursos a los que tuve el privilegio de pertenecer, y también, por su invaluable calidad humana.

A la comunidad de la FCFM y de la BUAP, que han sido cruciales para mi formación académica y crecimiento personal.

Índice

Introducción

Las investigaciones de De Bock et al. (2007) sobre la Ilusión de la Linealidad, o la trampa de la linealidad, u obstáculo lineal, muestran la tendencia excesiva de los estudiantes, a resolver problemas no proporcionales como si lo fueran, es decir, en situaciones que no lo son. Varios investigadores reportan que este hecho se ha indagado en alumnos de 12 a 16 años, y dependiendo de la formulación de las preguntas, hay poca diferencia en las respuestas correctas, (Van Dooren et al., 2003; Sánchez Sánchez, 2018). De Bock et al. (1998), en su trabajo con estudiantes de secundaria, afirman que el estudio de los modelos proporcionales desde primaria ha ocasionado que lo usen de manera excesiva en cualquier situación, aunque no sea lo correcto. Como lo menciona Freudenthal (1983), "La linealidad es una propiedad tan sugerente de las relaciones que uno cede fácilmente a la seducción de tratar cada relación numérica como si fuera lineal" (p. 267).

Aunque las investigaciones anteriores reportan diversos casos al respecto, en los que exploran si los estudiantes caen o no en la Ilusión de la linealidad, incluso utilizando diferentes formas de preguntas, con elementos que suponen les ayudará a contestar de manera correcta, sólo se quedan en eso, en contestar diferentes evaluaciones, no hay estudios que reporten el diseño e implementación de una secuencia didáctica remedial que haya sido efectiva.

Este trabajo se encuentra dividido en cuatro capítulos: en el primero se mencionan los antecedentes sobre la incidencia de la ilusión de la linealidad en alumnos entre 13 y 17 años, para posteriormente hacer el planteamiento del problema, y la pregunta de investigación, así como el objetivo. En el segundo capítulo se abordan los conceptos esenciales para el desarrollo de la investigación y los que se involucran en el aprendizaje de las matemáticas en cuestión. En el tercero se presenta la metodología; la forma en cómo se dirigió la investigación, características de los informantes y de la secuencia didáctica implementada. En el cuarto, se exhiben los resultados obtenidos de las evaluaciones diagnóstica y final, posteriormente, se contrastaron las producciones de los alumnos para notar su progreso una vez implementada la secuencia didáctica. Y para finalizar, las conclusiones obtenidas de la investigación.

Capítulo 1

Planteamiento del Problema

En un primer cuestionario, de De Book et al. (2007) que se aplicó a niños de 12 y 13 años, con un total de 120 informantes con las siguientes características: todos asistieron a la misma secundaria, tenían conocimiento de problemas verbales relacionados con la proporcionalidad directa, conocimientos de figuras geométricas elementales y las fórmulas para determinar perímetro, área y volumen de las mismas así como experiencia en relación con la medición; contempla procedimientos de las reglas del sistema métrico para medidas de una, dos y tres dimensiones. Los informantes se encontraban divididos en tres grupos, y para efectuar el estudio, se llevó a cabo en dos fases que contaban con 12 enunciados, 6 proporcionales y 6 no proporcionales, de los cuales dos eran sobre cuadrados, dos sobre círculos y dos sobre figuras irregulares. En la primera fase, los estudiantes no recibieron pistas, ni instrucciones para su solución. En cuanto a la segunda fase, se realizó con diferentes características, pues la prueba para todos era la misma, solo que como bien se especificó, estaban divididos por grupos, el primer grupo no recibió instrucciones, el segundo se les solicitó a los alumnos realizar un dibujo del problema antes de responderlo y, al tercer grupo, el enunciado del problema ya contaba un dibujo establecido. Las hipótesis que se plantearon fueron las siguientes:

- El predominio del modelo lineal sería un serio obstáculo para la gran mayoría de los estudiantes.
- Un boceto o dibujo tendría un efecto beneficioso en el rendimiento de los estudiantes, especialmente para los reactivos no proporcionales.
- Las actuaciones de los estudiantes serían diferentes para los distintos tipos de figuras planas involucradas en el estudio.

En cuanto al análisis de las pruebas se consideró que:

- Todas las respuestas se catalogaron como correctas e incorrectas.
- Una respuesta se consideró correcta cuando fue el resultado de un razonamiento matemáticamente apropiado.
- Las hipótesis se probaron mediante un análisis de varianza.

Los resultados con respecto a la hipótesis:

- Se probó la hipótesis uno, pues para los tres grupos y las dos pruebas, los porcentajes de respuestas correctas para los reactivos proporcionales y no proporcionales fueron del 92% y 2%, respectivamente.
- Los resultados no respaldaron la segunda hipótesis sobre el efecto beneficioso de los dibujos sobre el rendimiento de los estudiantes.
- Con la tercera hipótesis se confirmó que el tipo de figura tuvo un efecto significativo en el porcentaje de respuestas correctas.

Algunos hallazgos cualitativos que se presentaron con este estudio fue que:

- El análisis de las hojas de respuesta de la prueba 1 reveló que solo el 2% de los estudiantes construyeron espontáneamente un boceto o dibujo de los problemas no proporcionales.
- La inspección de las notas en la prueba 2 del grupo II reveló que solo en el 46% de los casos los alumnos produjeron los dibujos solicitados para los problemas no proporcionales.
- Las notas de los estudiantes del grupo III en la prueba 2 no proporcionaron información directa sobre el grado en que los estudiantes usaron efectivamente los dibujos establecidos en su solución. Pues solo en el 6% de los casos estos habían sido editados.

Los investigadores concluyeron que este cuestionario demostró convincentemente la fuerte presencia del modelo lineal en problemas relacionados con la ampliación de figuras geométricas. Sin embargo, se consideró realizar un segundo cuestionario en alumnos de mayor edad por cuestiones que surgieron de este primero. Y, además, plantean las siguientes preguntas, en busca de respuestas con base en futuros resultados: ¿qué tan fuerte es el predominio del modelo lineal en estudiantes de mayor edad, que se suponen matemáticamente mejor preparados?, ¿cuál es el posible impacto del tipo de figura utilizada en el problema y de dibujos hechos por los estudiantes o dibujos proporcionados sobre la ocurrencia de errores basados en un razonamiento proporcional equivocado?

En un segundo cuestionario, los informantes entre 15 y 16 años, con un total de 222 estudiantes, tenían como características las siguientes: todos asistieron a la misma escuela secundaria, contaban con estudios sistemáticos de geometría plana y conocimiento sobre diversidad de relaciones funcionales no lineales. Los grupos se formaron tomando en cuenta: número de horas dedicadas a las matemáticas por semana, el área de estudio a la que pertenecían y el resultado promedio del último examen de matemáticas. Para este caso solo fue una prueba y se usaron los mismos enunciados del primero. El procedimiento de la prueba y del análisis de los datos fue el mismo que para el primero. Las condiciones de prueba para los tres grupos fueron las mismas que en la prueba 2 del primero. Estas fueron las hipótesis que se plantearon:

- El predominio del modelo lineal sería un obstáculo moderado para la gran mayoría de los estudiantes.
- Un boceto o dibujo tendría un efecto beneficioso en el rendimiento de los estudiantes, especialmente para los enunciados no proporcionales.
- Las actuaciones de los estudiantes serían diferentes para los distintos tipos de figuras planas involucradas en el estudio.

Una vez aplicada la prueba se obtuvieron los resultados con respecto a las hipótesis:

- Se corroboró la hipótesis uno, ya que para los 3 grupos juntos los porcentajes de respuestas correctas para los reactivos proporcionales y no proporcionales fueron del 93% y 17%, respectivamente.
- No se respaldó la segunda hipótesis sobre el efecto beneficioso de los dibujos sobre el rendimiento de los estudiantes.
- La tercera hipótesis se confirmó, pero el efecto no fue muy significativo en el porcentaje de respuestas correctas.

Algunos hallazgos que se obtuvieron con este segundo estudio fue que:

- La base de conocimientos previos de los alumnos motiva a la tendencia de abuso de modelos lineales.
- Algunos de los estudiantes que resolvieron de manera exitosa los reactivos no proporcionales, comenzaron a cuestionar la corrección de un modelo lineal para situaciones problemáticas en las que ese modelo fue el apropiado.

Con esta información, se demostró que la tendencia a aplicar el razonamiento lineal en la solución de problemas no proporcionales es extremadamente fuerte en el grupo de edad de 12-13 años y se mantiene de manera muy influyente en el grupo de edad de 15-16 años, el tipo de figura jugó un papel importante y brindó mejores desempeños cuando se involucran figuras regulares, se encontró un efecto poco beneficioso en el uso de dibujos como apoyo para la correcta solución de los reactivos de la prueba y si bien estos estudios documentaron la fuerte tendencia a usar modelos lineales en situaciones donde no es aplicable, no dieron una explicación para esta tendencia.

En un primer cuestionario de seguimiento, con la misma prueba del el primero, con informantes de entre 12 y 13 años, con 260 estudiantes, divididos en cuatro grupos; y también con 125 informantes de entre 15 y 16 años, divididos en cuatro grupos. La finalidad de analizar qué ocurre con los resultados a partir de los efectos de la introducción de andamios metacognitivos (al brindar una opción de respuesta elaborada) y visuales (al brindar un dibujo apropiado a escala), por ello, como estaban divididos en cuatro grupos: al primer grupo no se le brindó ayuda, al segundo se le presentan dos respuestas ya elaboradas, al tercero un dibujo apropiado de la situación en papel cuadriculado y al cuarto, se combinan ambos tipos de ayuda. Como hipótesis de este estudio se plantean:

- Los grupos que reciben el apoyo metacognitivo obtendrán mejores resultados en los reactivos no proporcionales.
- El andamio metacognitivo sería más efectivo para reactivos no proporcionales sobre cuadrados que para aquellos que tratan con círculos o figuras irregulares.
- El andamio metacognitivo sería más efectivo en el grupo de mayor edad porque estos estudiantes tienen un mayor dominio del conocimiento matemático y las habilidades necesarias para resolver problemas no proporcionales.

Algunos hallazgos notorios de los resultados del cuestionario anterior:

- Reveló efectos significativos, pero notablemente pequeños en el apoyo metacognitivo y visual en el rendimiento de los estudiantes en los reactivos no proporcionales de la prueba.
- El estudio no distinguió entre los estudiantes que realmente aprovecharon estos soportes y aquellos que no lo hicieron.

- Un análisis de la varianza (ANOVA), que es una técnica estadística que se utiliza para comparar la media de tres o más grupos y determinar si existen diferencias significativas entre ellas, realizado para aclarar el punto anterior reveló que los alumnos que resolvieron correctamente la tarea introductoria tuvieron mayor éxito en los reactivos no proporcionales de la prueba y, además, que el uso real de un dibujo en papel cuadriculado aumenta las posibilidades del estudiante de descubrir un comportamiento no lineal.

Dado lo anterior, se plantean las siguientes conclusiones:

- La principal pregunta de investigación fue en qué medida las dos manipulaciones (andamios metacognitivos y visuales) a la configuración experimental conducirían a una disminución en el número de respuestas incorrectas basadas en el modelo lineal inadecuado.
- Los andamios solo tuvieron un impacto marginal en los puntajes de los estudiantes y, además, permitieron advertir la naturaleza no proporcional de los problemas, pero como resultado los estudiantes comenzaron a cuestionar la corrección del modelo lineal para situaciones donde sí era apropiado.

En un segundo cuestionario de seguimiento, se plantea sobre los efectos de la formulación de problemas, pues la mayoría de las tareas de razonamiento proporcional que los alumnos encuentran en la primaria y secundaria se presentan en un formato de valor indeterminado, esta práctica puede contribuir a establecer y reforzar en las mentes de los estudiantes una fuerte asociación entre el formato del problema y la proporcionalidad como modelo matemático, por ello es importante realizar modificaciones experimentales en la prueba, para que los problemas originalmente planteados con formato de valor indeterminado se aborden como problemas de comparación y a su vez esta condición en cada problema se da con un único número para que los estudiantes no puedan refugiarse en la ejecución de todo tipo de operaciones aritméticas. Para este caso se tuvieron 164 informantes entre 12 y 13 años y 151 entre 15 y 16 años, con una prueba con problemas en formato comparativo que presenten reactivos proporcionales, no proporcionales y de figuras regulares e irregulares. Las pruebas con problemas en formato comparativo consisten en comparar dos problemas, estos dos se plantean en el enunciado, y para su solución no se requiere una respuesta de un valor numérico si no una respuesta de comparación que se deduce del primer problema planteado. Un ejemplo de reactivo en formato comparativo de proporcionalidad en figura regular es el siguiente: “Una tejedora le colocó orilla a una servilleta cuadrada. En otra ocasión, tiene que colocarle orilla a una servilleta cuadrada de lado equivalente a dos veces la primera. ¿Cuánto tiempo más necesitara para colocarle la orilla a esta servilleta?”.

Las hipótesis fueron las siguientes:

- Reformular los problemas en formato comparativo tendría un efecto beneficioso sobre el rendimiento de los estudiantes en los reactivos no proporcionales de la prueba.
- Las puntuaciones en ambos grupos de edad serían mayores en los grupos donde se aplicó formato comparativo que en aquellos donde no.

Una vez efectuada y analizada la prueba se obtuvieron las siguientes conclusiones:

- Este cuestionario demostró la tendencia de los estudiantes a aplicar el razonamiento proporcional en situaciones donde no es aplicable, al menos en parte, causado por las particularidades de la formulación del problema que los estudiantes aprendieron a asociar con el razonamiento proporcional.
- Reformular los problemas en un formato comparativo resultó ser de una ayuda sustancial para que muchos estudiantes superaran la ilusión de la linealidad, sin embargo, los estudiantes aún resolvieron erróneamente más de la mitad de los reactivos.

En un tercer caso de seguimiento, se implementaron los efectos de contextos auténticos y de actividades de dibujo. Por varias décadas, distintos investigadores han enfatizado en los beneficios de la construcción y organización de implementar actividades matemáticas con contextos valiosos, interesantes y realistas (Cooper & Harris, 2002, 2003; de Lange, 1987; Freudenthal, 1983; Palm, 2002; Treffers, 1987). Estos contextos tienen algunas funciones:

- Actúan sobre la motivación participación y la probabilidad de un mayor esfuerzo por parte de los estudiantes.
- Les ayudan a generar una representación y una respuesta correcta del problema, esto a través del uso de conocimiento contextualizado.

- Los contextos realistas pueden referirse no sólo a aspectos del mundo social o físico real, también pueden referirse a mundos imaginarios, siempre que sean significativos, familiares y atractivos para los estudiantes.

De hecho, se puede argumentar que el rendimiento débil de los estudiantes en los reactivos no proporcionales en los estudios anteriores es causado, al menos parcialmente, por la falta de autenticidad del contexto o configuración del problema.

En este cuestionario se abordaron problemas en formato comparativo, con reactivos proporcionales y no proporcionales. La población de estudiantes fue de 152, entre 12 y 13 años y 161 entre 15 y 16 años. Además, se dividió la prueba en cuatro versiones, la primera, en problemas no auténticos solicitando que elaboraran dibujos, la segunda, problemas no auténticos sin dibujos, la tercera, con problemas auténticos y un vídeo, y la cuarta, con problemas auténticos, un vídeo y además solicitarles elaborar un dibujo.

Como hipótesis del cuestionario se planteó que:

- En ambos grupos de edad se obtendrían mejores puntajes en auténticos que en los no, en los problemas no proporcionales debido al factor de autenticidad de los problemas planteados.
- Se anticipó un mejor rendimiento en los grupos con apoyo de vídeo que en los que no debido al efecto positivo de hacer un dibujo antes de su proceso de solución.

Para finalizar este caso se presentan las siguientes conclusiones:

- Se demostró que la autenticidad de los problemas de la prueba y el uso integral de dibujos son de poca ayuda para la resolución de problemas no proporcionales.
- Si bien la forma en que el factor de autenticidad fue puesto en práctica puede explicar la ausencia de un efecto positivo, no se puede explicar el efecto negativo observado.

Por último, en un cuarto cuestionario de seguimiento se valoraron las medidas directas e indirectas. En todos los casos los problemas se construyeron típicamente de forma que no se indicó que estaban relacionados con el perímetro, área o el volumen de las figuras involucradas, sino que se trató con medidas indirectas de estas magnitudes. De Book et al. (2007) mencionan que en los problemas con medidas indirectas se proporciona la magnitud de algo que involucre al perímetro, área o volumen, sin hacer referencia explícita a estos conceptos, lo que permitió identificar el uso excesivo de la linealidad por parte de los estudiantes. Un ejemplo de problema con medida indirecta es: "Un albañil necesita 10 cajas de piso para cubrir un cuarto cuadrangular de lados de 5 m. ¿Cuántas cajas de piso necesitaría para un cuarto cuadrangular de 10 m?", en este problema la cantidad de cajas de piso para cubrir el área del cuarto se considera como medida indirecta de su área. Para este cuarto caso se realizaron problemas en formato comparativo con una muestra de 145 alumnos, su edad oscilaba entre 15 y 16 años, además se contaron con reactivos proporcionales y no proporcionales y eran de 2 escuelas diferentes.

Las hipótesis que se plantearon fueron las siguientes:

- Las actuaciones de los estudiantes en problemas de geometría lineales y no lineales son diferentes dependiendo de si estos problemas se formulan en términos de medidas directas o indirectas.
- Se espera que el uso de estrategias de resolución en los problemas de medidas indirectas tienda más a un razonamiento proporcional.

Y para concluir el cuestionario, el análisis de los datos no mostró diferencia alguna entre las condiciones de los problemas, ya sea que fueran con medidas directas e indirectas, y además se revelaron algunas diferencias con respecto a las estrategias de resolución.

Como conclusión de los cuatro casos de seguimiento, se evidenció que los alumnos de 12 a 16 años fallaron en la resolución de problemas verbales no proporcionales en contextos de ampliación o reducción de figuras debido a la ilusión de la linealidad, aunque algunas manipulaciones experimentales produjeron efectos positivos, estos fueron marginales. Y en algunos casos, el razonamiento no proporcional comenzaba a formarse como consecuencia de estas manipulaciones experimentales, sin embargo, todavía era débil e inestable.

De Book et al. (2003) afirman que, en la comunidad de investigación, las pruebas que involucran problemas verbales tradicionales tienden a propiciar en los estudiantes un conjunto de reglas implícitas y expectativas establecidas en el entorno del aprendizaje de las matemáticas que se da dentro del aula.

No dejar de lado las consideraciones de verificar la solución de un problema y, además, que este tenga un sentido lógico en una situación del mundo real (Palm, 2002).

El concepto de autenticidad se emplea para tareas que se desarrollan de una situación real o de situaciones veraces que emergen del contexto escolar. En oposición, las tareas no auténticas son aquellas que tienden a tener baja fidelidad de situarlas en entornos reales (Palm, 2002).

Algunas características que definen la autenticidad en las tareas matemáticas son las siguientes:

- Fuente del problema: Ocurre o es probable que ocurra en la realidad. Planteado o encontrado por solucionados de problemas.
- Formación del problema: Oral y/ o no verbal. Contextualmente rico. Brinda datos reales y adicionales.
- Propósito y criterios: Hallar una solución adecuada a un problema práctico. El contexto de la tarea da una aclaración adicional y especificación de los criterios.
- Social/condiciones materiales: Otras personas pueden participar. Usar materiales concretos y otras herramientas. Gama de estrategias aceptables. Las respuestas pueden ser orales y/o prácticas.
- Consecuencias: Retroalimentación sobre el grado de adecuación de la solución por parte de entorno social.

Por todo lo anteriormente expuesto planteamos la siguiente pregunta de investigación, así como el objetivo.

Pregunta de investigación

¿Qué estrategias didácticas se pueden implementar para ayudar a los estudiantes a reconocer y superar la ilusión de la linealidad en problemas matemáticos geométricos, de falta de sentido y exceso de linealidad?

Objetivo

Diseñar y evaluar el efecto de una secuencia didáctica que permita abordar el problema de la ilusión de la linealidad en problemas matemáticos geométricos, de falta de sentido y exceso de linealidad.

Capítulo 2

Marco conceptual

La tendencia de los estudiantes a emplear las propiedades de las relaciones lineales en cualquier situación se le denomina ***ilusión de la linealidad***, y en diversos informes de investigación se ha reportado que se presenta en estudiantes de diversas edades y áreas de matemáticas (De Book et al., 2007).

Es importante atender el uso excesivo de la linealidad que emplean los estudiantes de entre 12 a 16 años con problemas geométricos en donde interviene la ampliación o reducción de figuras, los resultados que arrojan los estudios realizados indican el alto índice de la ilusión de la linealidad (De Book et al., 2007).

La relación estrecha entre la proporcionalidad directa o linealidad y los conceptos de razón y proporción es evidente (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, 2002). Una razón es una relación entre dos medidas, es decir, si tenemos la medida a la medida b ($b \neq 0$), la razón entre a y b se denota como $\frac{a}{b}$, por ejemplo, "Un automóvil recorre *60* kilómetros por cada hora" o "En esta clase hay *5* niñas por cada *4* niños". Ahora, una proporción es la igualdad entre dos razones, se cumple que el cociente entre de las dos razones es igual, es decir, una proporción es la razón entre a y b, y a la razón entre c y d si se satisface que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ($b \neq 0$ y $d \neq 0$), por ejemplo, "Una persona recorrió *5* kilómetros en *10* minutos y en otra ocasión recorrió *15* kilómetros en *30* minutos. Esta persona llevó la misma velocidad en ambas ocasiones ya que $\frac{5\,km}{10\,min} = \frac{15\,km}{30\,min}$".

En diversas situaciones, se establecen relaciones entre dos magnitudes, de modo que las cantidades de una de ellas se obtienen multiplicando por un mismo número las cantidades de la otra. Por ejemplo, el pago que realizamos por cierto número de piezas de pan, supongamos que cada pieza de pan cuesta *8* pesos, si se compran *12* piezas entonces se tendría que pagar *96* pesos (*8×12=96)* (Godino y Batanero, 2003).

Maurin y Joshua (como se citó en Godino y Batanero,2003):

> En general, decimos que dos series de números, con el mismo número de elementos, son proporcionales entre sí, si existe un número real fijo *k*, llamado razón de proporcionalidad, que permite escribir cada valor de la segunda serie como producto por *k* de los valores correspondiente de la primera serie. (p. 421)

Una relación proporcional directa es una función de la forma: $f(x) = ax, a \neq 0$. Además, una función lineal f es aquella que satisface las siguientes propiedades:

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$
- $f(kx) = kf(x), k \in \mathbb{R}$

De Book et al. (2007) mencionan que en la literatura publicada han hallado varios casos de aplicaciones injustificadas sobre las propiedades lineales y representaciones en diversos dominios matemáticos, que son:

- Problemas aritméticos verbales.
- Dependencia de la linealidad en entornos gráficos.
- Razonamiento incorrecto en situaciones probabilísticas.
- En patrones numéricos, algebraicos y cálculo.
- El caso de la geometría.

De acuerdo con De Book et al. (2007) varios estudios han indicado que los estudiantes frecuentemente utilizan la proporcionalidad para ***resolver problemas de aritmética***, incluso cuando no se pueden resolver aplicando proporcionalidad. Este fenómeno ha sido observado en tres tipos de investigaciones: *i)* Estudios sobre la falta de sentido por parte de los estudiantes para resolver problemas matemáticos; *ii)* investigaciones sobre el razonamiento de los estudiantes en actividades relacionadas con razones y proporciones; y *iii)* estudios que específicamente examinan la tendencia de los estudiantes a depender excesivamente de la linealidad.

También, la excesiva ***dependencia de la linealidad en entornos gráficos*** ha sido observada por Leinhardt et al. (1990), ellos mencionan que los estudios han mostrado que los estudiantes de diferentes edades tienen una fuerte tendencia a producir patrones lineales que pasan por el origen, cuando se les solicita que dibujen gráficos correspondientes a relaciones no lineales.

De Book et al. (2007) mencionan que la gran mayoría de los ***errores*** que aparecen en los ***razonamientos de situaciones probabilísticas*** radican en las aplicaciones impropias de la proporcionalidad.

Acerca de los ***patrones numéricos, algebraicos y cálculo*** se abordó un estudio por Stacey (1989) acerca de la modelización de patrones de la forma $f(n) = an + b, b \neq 0$, en estudiantes de 9 a 13 años, en el cual se obtenían respuestas erróneas debido a que la mayoría asumía que era proporcional en lugar de determinar la relación afín correcta en el problema planteado, aplicando propiedades de las funciones lineales (De Book et al., 2007).

Y en cuanto al ***caso de la geometría***, De Book et al. (2007) indican que hay varios casos de razonamiento lineal injustificado, un caso conocido del uso indebido por parte de los estudiantes es el relacionado con los problemas sobre el efecto que tiene el agrandamiento o reducción de una figura sobre su área o volumen, tienden a ver las relaciones entre longitud y área o entre longitud y volumen como lineales en lugar de, respectivamente, como cuadráticas o cúbicas. Además, los estudiantes se sorprenden en el caso de una ampliación, cómo el área o el volumen sin duda se agranda mucho y viceversa cuando se realiza alguna reducción.

Trabajar la IL en estudiantes de bachillerato es fundamental para desarrollar una comprensión matemática en diversos contextos, en este caso, la investigación se llevará a cabo en el área de ***aritmética y geometría***, pues una de las razones clave es desarrollar el pensamiento crítico, dado que la ilusión de la linealidad puede llevar a mal interpretar situaciones reales. Erradicarla permite a los estudiantes desarrollar un pensamiento crítico más robusto, aunado a que, a través de la exploración de diferentes planteamientos en dichas áreas, ayuda a entender relaciones que son lineales y no lineales, permitiéndoles plantear modelos matemáticos y cómo aplicarlas en diversos contextos.

De Book et. al (2007) definen a un ***andamio metacognitivo***, como aquel en donde se presenta un problema con una opción de respuesta elaborada (ver actividad 6 sesión 1 anexo A), y ***andamio visual***, aquel en donde se brinda un dibujo apropiado a escala referente al problema (ver problema 8 de la evaluación final en el Anexo C).

Capítulo 3

Metodología

La investigación es de naturaleza mixta, teórico-práctica, y con una orientación interpretativa, dado que se pretende proveer descripciones detalladas y su análisis de acuerdo con el tema IL (Buendía et al, 1998).

Después de analizar las producciones del pretest, se diseñó una secuencia didáctica para abordar el tema de razones y proporciones, encaminada a remediar la IL, desde la perspectiva de De Bock et al. (2007), misma que se implementó a estudiantes de una preparatoria privada incorporada a la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP).

Sobre los informantes: Se aplicó a un grupo de 31 estudiantes de primer semestre, cuyas edades oscilan entre 15 y 16 años, mismos que han completado el nivel de educación básica, y que, de acuerdo a la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2017) en su libro "Aprendizajes Clave para la Educación Integral" en la materia de matemáticas, han abordado un eje temático llamado "Número, álgebra y variación" en el cual el tema de proporcionalidad tiene aprendizajes esperados específicos que se desarrollan desde quinto de primaria hasta segundo de secundaria, mismos que se observan en la Tabla 1.

Tabla 1

Aprendizajes esperados sobre proporcionalidad en los grados escolares de educación básica.

Grado escolar	Aprendizaje esperado
Quinto de Primaria	Compara razones expresadas mediante dos números naturales (n por cada m); calcula valores faltantes en problemas de proporcionalidad directa con números naturales (incluyendo tablas de variación).
Sexto de Primaria	Compara razones expresadas mediante dos números naturales (n por cada m) y con una fracción (n/m). Calcula valores faltantes en problemas de proporcionalidad directa, con un número natural como constante. Resuelve problemas de cálculo de porcentajes y de tanto por ciento.

	Calcula mentalmente porcentajes (50%, 25%, 10% y 1%) que sirvan de base para cálculos más complejos.
Primero de Secundaria	Calcula valores faltantes en problemas de proporcionalidad directa, con constante natural, fracción o decimal (incluyendo tablas de variación). Resuelve problemas de cálculo de porcentajes, de tanto por ciento y de la cantidad base.
Segundo de Secundaria	Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.

El tiempo de implementación fue de aproximadamente mes y medio; durante el cual se aplicó la secuencia didáctica remedial, conformada por cinco sesiones de aprendizaje, y una evaluación final. Durante la implementación se permitió la colaboración y discusión en grupos pequeños, y en sesiones plenarias, mismas que permitieron que los estudiantes expusieran sus dudas o preguntas que iban surgiendo.

Por último, se analizaron las producciones de los alumnos, así como la evaluación final para deducir la efectividad de dicha secuencia didáctica.

Características de la secuencia didáctica

La secuencia didáctica para superar la IL, se enfoca en que los estudiantes resuelvan problemas matemáticos del tipo aritmético y geométrico, para el caso de la aritmético se abordaron problemas donde se identifica la falta de sentido y sobre el exceso de linealidad, en cuanto a geometría, problemas que están relacionados con identificar el cambio del perímetro, área o volúmenes a partir de modificaciones. En estudiantes de preparatoria se debe tomar en cuenta el dominio de la aritmética y la geometría es de vital importancia, y por ello, superar la IL permitirá a estos estudiantes plantear soluciones adecuadas.

Para realizar la secuencia didáctica se consideraron algunas propuestas mencionadas por De Book et al. (2007), como lo son: andamios metacognitivos y visuales, formulación de los enunciados, problemas de comparación, contextos auténticos y el uso de dibujos y problemas donde se involucran medidas directas e indirectas, para esto, la secuencia didáctica se dividió en cinco sesiones (ver Anexo A).

En la sesión uno se manejan operaciones básicas con fracciones, hallar la constante por la cual se multiplica para hallar una fracción equivalente y comparar segmentos proporcionales y no proporcionales. También se desarrollan los conceptos como razones y proporciones con andamios visuales, además de plantear problemas sobre proporcionalidad.

En la sesión dos se abordan problemas que consisten en identificar la falta de autenticidad en relaciones de proporcionalidad que parten de situaciones reales y se obtienen resultados absurdos, mismos que son mencionados para erradicar la IL, en dichos problemas se usaron tablas para organizar la información proporcionada.

En la sesión tres el propósito fue identificar la relación de proporcionalidad entre la longitud de los lados correspondientes de figuras geométricas en diferentes escalas, para esto se emplearon andamios visuales y cognitivos, aunado a que se les solicita a los estudiantes crear apoyos visuales que satisfagan características específicas.

En la sesión cuatro se trataron problemas sobre cómo identificar la variación del área de una figura cuando sus dimensiones crecen o disminuyen proporcionalmente, esta sesión se apoyó con andamios visuales y cognitivos para propiciar que ellos generaran sus propios apoyos visuales para la identificación de dicha variación.

En la sesión cinco se trabajó con problemas para identificar cómo varía el volumen de un cuerpo geométrico cuando las dimensiones crecen o disminuyen, en dicha sesión se proporcionaron andamios cognitivos y visuales, y también se les solicitó que realizaran sus propios apoyos.

Capítulo 4

Resultados

Análisis de Producciones

Se llevó a cabo la clasificación de resultados de dos evaluaciones; una evaluación diagnóstica y una evaluación final, a un total de 31 informantes.

Análisis de producciones de la evaluación diagnóstica.

A dicha evaluación solo se presentaron 27 estudiantes en total, la cual contaba con 8 ítems, divididos de la siguiente manera: dos ítems de exceso de linealidad, uno de falta de sentido y cinco geométricos (ver Anexo B).

- Exceso de Linealidad

  Del ítem dos se obtuvieron los siguientes resultados, el 33.3% contestó de forma correcta, mientras que el 66.7% respondieron de forma incorrecta. Asimismo, el 7.4% realizó un apoyo gráfico, mientras que el 92.6% no.

  En el ítem cuatro, se obtuvieron los siguientes resultados, el 37% respondió de forma acertada, mientras que el 63% no. El 11.1% realizó algún apoyo gráfico y el 88.9% no lo hizo.

- Falta de Sentido

  Para el ítem tres, el 63% respondió correctamente y el 37% no logró hacerlo. Cabe mencionar que ningún estudiante hizo algún comentario u observación sobre la falta de sentido de dicho planteamiento.

- Geométricos

  Del ítem uno, solamente el 7.4% logró responder adecuadamente, y el 92.6% no logró dar una respuesta adecuada. En cuanto a realizar un apoyo gráfico, el 11.1% lo hizo, y el 88.9% no.

  Para el ítem 5, solo el 3.7% logró responderlo adecuadamente, mientras que el 96.3% respondió de forma errónea. Ahora, el 29.6% realizó apoyos gráficos para su solución, mientras que el 70.4% no empleo alguno.

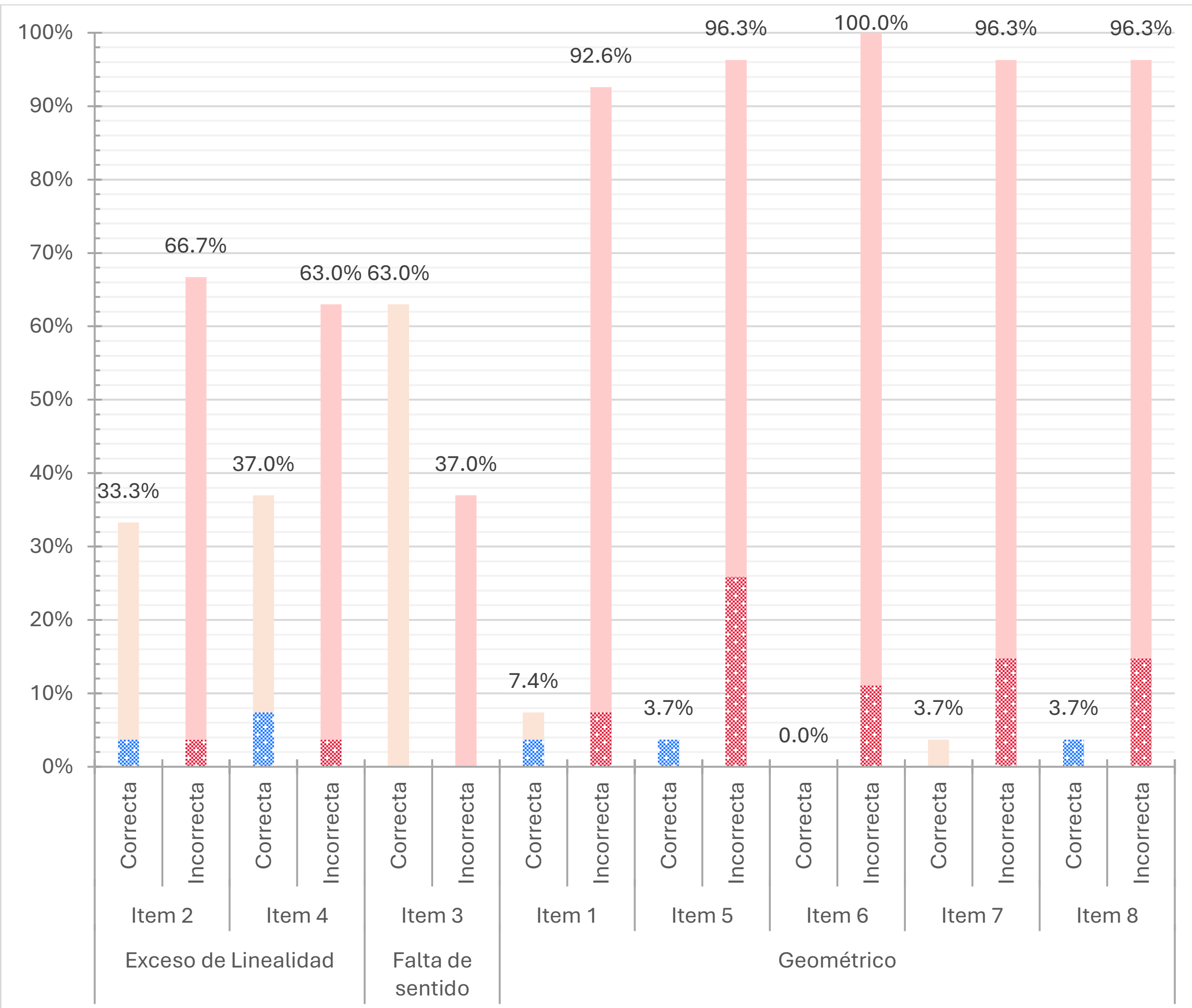
En el ítem 6, el 100% tuvo una respuesta incorrecta, el 11.1% realizó un apoyo gráfico y el 88.9% no logró hacer alguno.

En el caso de ítem 7, el 3.7% respondió correctamente y el 96.3% no, el 14.8% empleó apoyo gráfico, mientras que el 85.2% no lo hizo.

Finalmente, en el ítem 8, el 3.7% respondió acertadamente, mientras que el 96.3% no. Asimismo, el 18.5% de los estudiantes empleó un apoyo gráfico y el 81.5% no hizo alguno. Esto se muestra en la Figura 1.

Figura 1

Resultados de la evaluación diagnóstica.



Nota: En la figura se muestra el porcentaje de respuestas correctas e incorrectas de los ítems.

Análisis de producciones de la evaluación final

A dicha evaluación se presentaron 28 estudiantes en total, y está conformada por 8 ítems: dos de exceso de linealidad, uno de falta de sentido y cinco de geometría (ver Anexo C).

- Exceso de Linealidad

Del ítem dos se obtuvieron los siguientes resultados, el 67.9% contestó de forma correcta, mientras que el 32.1% respondieron de forma incorrecta. Asimismo, el 17.9% realizó un apoyo gráfico, mientras que el 82.1% no hizo alguno.

En el ítem cuatro, se obtuvieron los siguientes resultados: el 82.1% respondió de forma acertada, mientras que el 17.9% de forma incorrecta. Con respecto a realizar un apoyo gráfico el 100% no hizo alguno.

- Falta de Sentido

Del ítem tres, el 96.4% respondió correctamente y el 3.6% no lo logró. Cabe mencionar que el 57.1% de estudiantes realizo algún comentario u observación sobre la falta de sentido de dicho planteamiento.

- Geométricos

Del ítem uno, solamente el 53.6% logró responder bien, y el 46.4% no; el 46.4% realizó un apoyo gráfico y el 53.6% no lo hizo.

Del ítem 5, solo el 39.3% logró responderlo adecuadamente, mientras que el 60.7% respondió de forma errónea. Ahora, con realizar apoyos gráficos, el 39.3% hizo un apoyo gráfico para su solución, mientras que el 60.7% no empleo alguno.

Del ítem 6, el 50% tuvo una respuesta correcta, mientras que el otro 50% no logro responder bien, y el 39.3% realizo un apoyo gráfico, mientras que el 60.7% no logro hacer alguno.

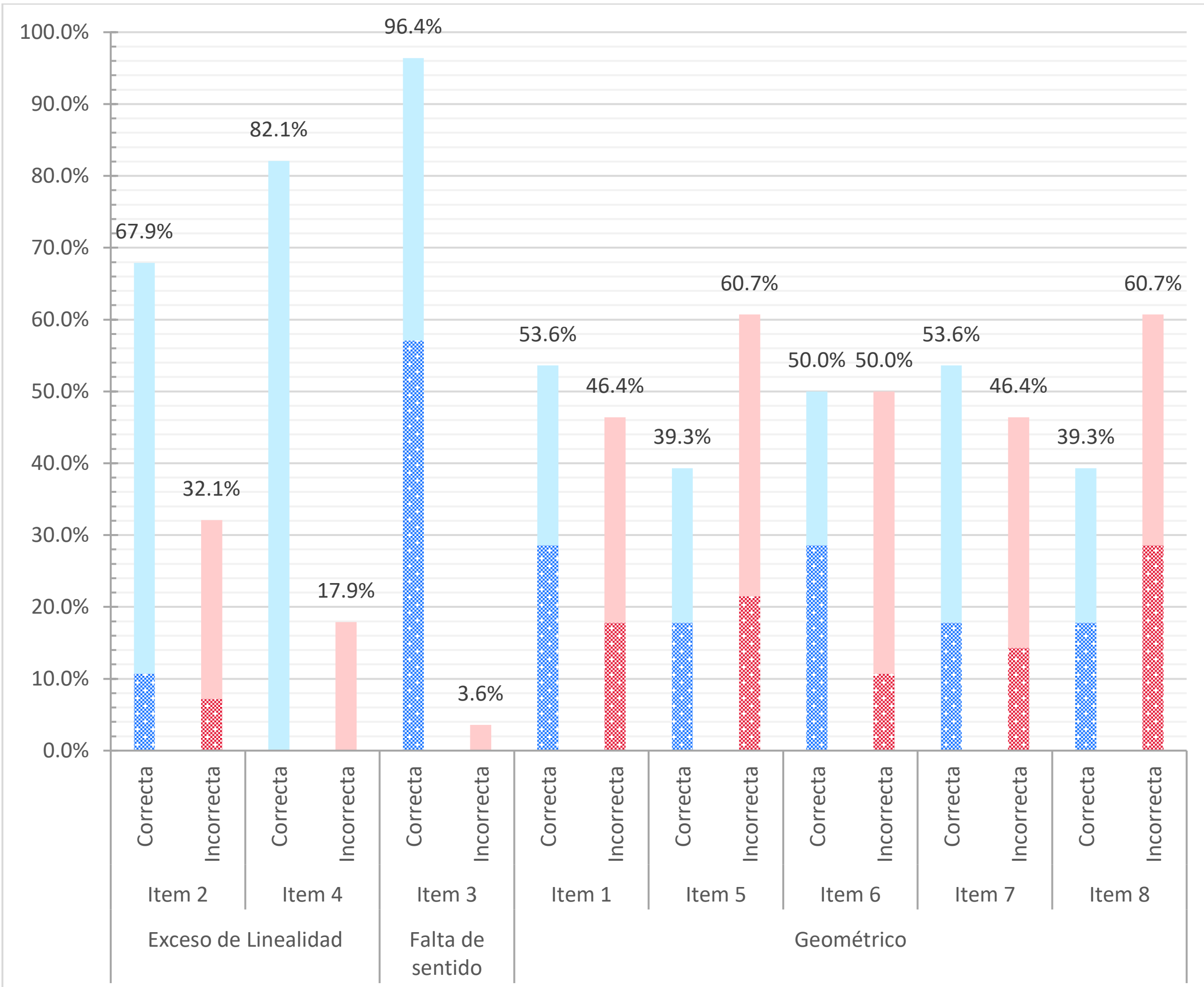
Del ítem 7, el 53.6% respondió correctamente, y el 46.4% no respondió adecuadamente. Con respecto al apoyo gráfico, el 32.1% empleo alguno, mientras que el 67.9% no lo hizo.

Del ítem 8, el 39.3% respondió acertadamente, mientras que el 60.7% no logro responder correctamente. Asimismo, el 46.4% de los estudiantes empleo un apoyo gráfico, mientras que el 53.6% no hizo ningún apoyo gráfico.

Esto se muestra en la Figura 2.

Figura 2

Resultados de la evaluación final.



Nota: En la figura se muestra el porcentaje de respuestas correctas e incorrectas de los ítems.

Discusión

Considerando los porcentajes anteriores de la evaluación diagnóstica y la evaluación final, observamos lo siguiente:

- Exceso de linealidad

La media de los informantes que contestaron correctamente los ítems de exceso de linealidad de la evaluación diagnóstica representa 35.2%, y fue superado en la evaluación final, ya que después de la implementación de la secuencia remedial el 65.4% lo contestó de manera correcta, es decir, un 30.2% de los informantes mejoró en su resultado. Cabe mencionar, que el promedio de los que usaron apoyos gráficos en la evaluación diagnóstica fueron un 5.5% y después de la implementación de la secuencia, un 9% hizo usó de dibujos como apoyo.

- Falta de sentido

Con respecto a este ítem, un 63% de los informantes lograron contestar de manera correcta, y una vez que se implementó la secuencia remedial, el 96.4% lo hizo de manera acertada, a pesar de que en la evaluación diagnóstica se esperaba que la mayoría contestara de forma correcta, no fue así, y con base en los resultados, se obtuvo una mejora del 33.4%. Pero en este ítem se tenía especial interés en que los alumnos notaran la falta de sentido en el planteamiento, algo que evidentemente se logró, pues en la evaluación diagnóstica no se reportó ninguna observación o comentario acerca de ello y después de haberse implementado la secuencia remedial, un 57.1% de informantes notaron la falta de sentido.

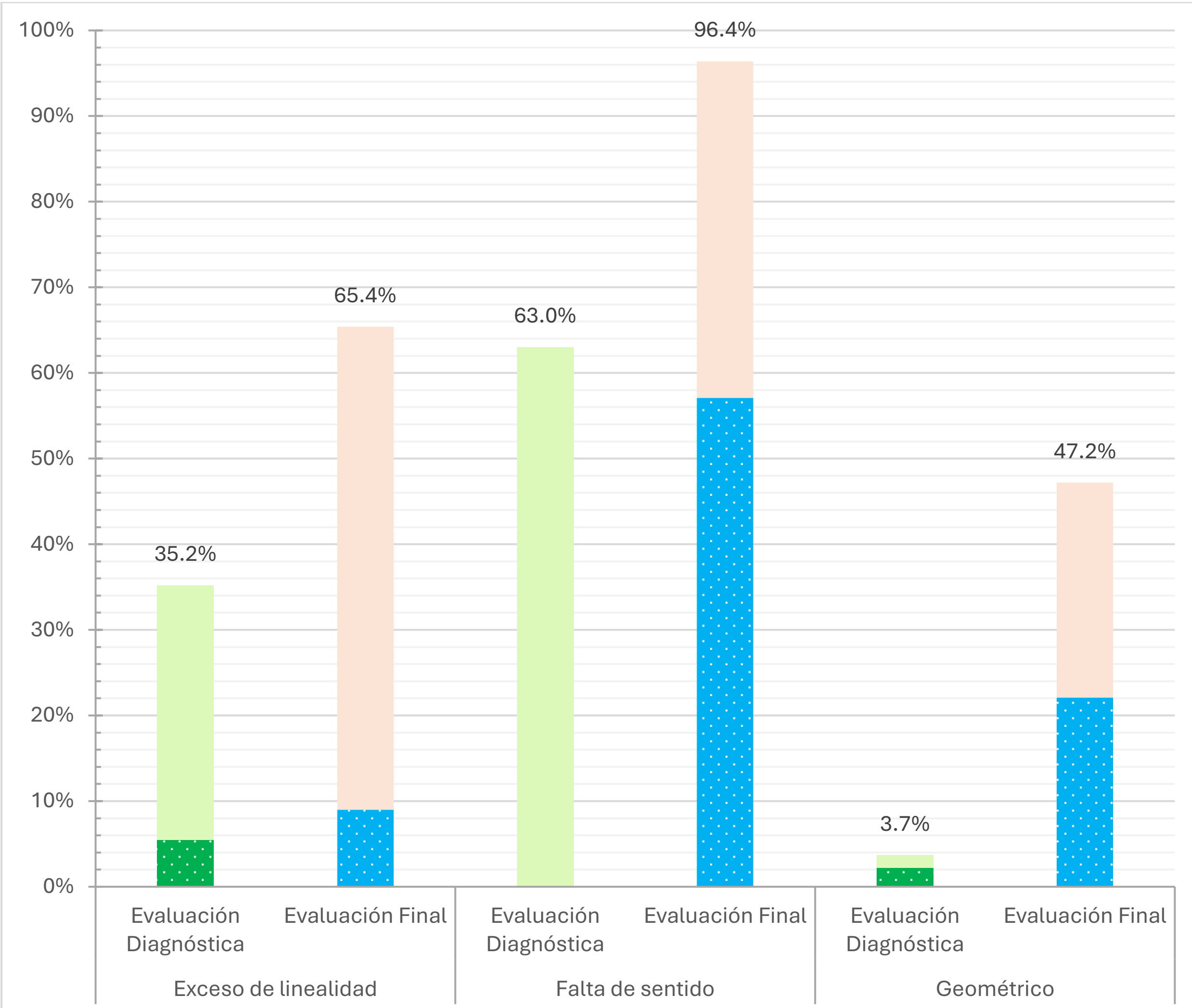
- Geométricos

Por último, el promedio de los que contestaron bien los ítems de la evaluación diagnóstica representa un 3.7% de los informantes, mismo porcentaje que se vio superado en la evaluación final, pues se obtuvo un 47.2% que contestaron de manera correcta, es decir, las respuestas mejoraron en un 43.5%. Asimismo, el promedio de los que usaron apoyos gráficos en la evaluación diagnóstica fueron un 2.2% y después de la implementación de la secuencia remedial un 22.1% hizo uso de dibujos como apoyo.

Esto se muestra en la Figura 3.

Figura 3

Comparativa de porcentajes de la evaluación diagnóstica y final.



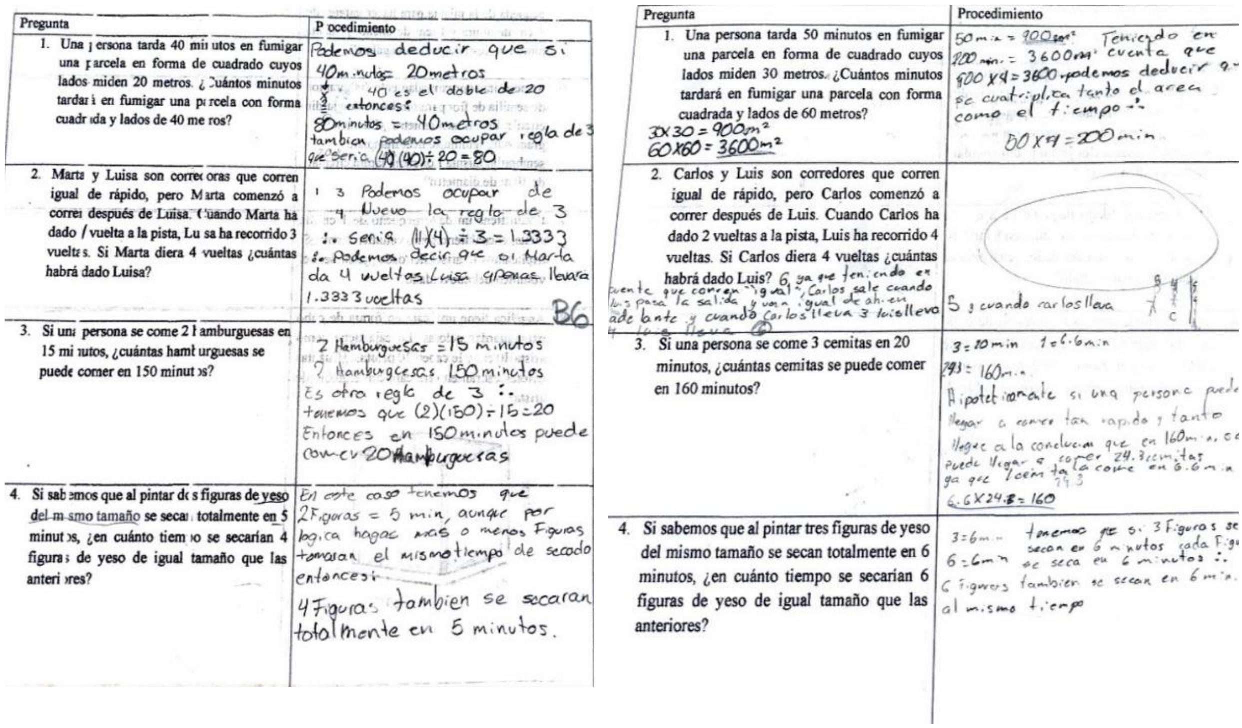
Nota: En la figura se muestra el porcentaje de respuestas correctas entre las evaluaciones.

Producciones de algunos estudiantes

Se muestran algunas producciones de los estudiantes y su análisis.

Figura 4

Producción (parte I) del estudiante A23.



Pregunta	Procedimiento
1. Una persona tarda 40 minutos en fumigar una parcela en forma de cuadrado cuyos lados miden 20 metros. ¿Cuántos minutos tardará en fumigar una parcela con forma cuadrada y lados de 40 metros?	Podemos deducir que si 40 minutos 20 metros; 40 es el doble de 20 entonces: 80 minutos = 40 metros; tambien podemos ocupar regla de 3 que sería (40)(40)÷20 = 80
2. Marta y Luisa son corredoras que corren igual de rápido, pero Marta comenzó a correr después de Luisa. Cuando Marta ha dado 1 vuelta a la pista, Luisa ha recorrido 3 vueltas. Si Marta diera 4 vueltas ¿cuántas habrá dado Luisa?	1 3 Podemos ocupar de 4 Nuevo la regla de 3 ∴ sería (1)(4)÷3 = 1.3333 ∴ Podemos decir que si Marta da 4 vueltas Luisa apenas llevara 1.3333 vueltas
3. Si una persona se come 2 hamburguesas en 15 minutos, ¿cuántas hamburguesas se puede comer en 150 minutos?	2 Hamburguesas = 15 minutos; ? hamburguesas 150 minutos; Es otra regla de 3 ∴ tenemos que (2)(150)÷15 = 20; Entonces en 150 minutos puede comer 20 Hamburguesas
4. Si sabemos que al pintar dos figuras de yeso del mismo tamaño se secan totalmente en 5 minutos, ¿en cuánto tiempo se secarían 4 figuras de yeso de igual tamaño que las anteriores?	En este caso tenemos que 2 Figuras = 5 min, aunque por lógica hagas más o menos Figuras tomaran el mismo tiempo de secado entonces: 4 Figuras tambien se secaran totalmente en 5 minutos.

Pregunta	Procedimiento
1. Una persona tarda 50 minutos en fumigar una parcela en forma de cuadrado cuyos lados miden 30 metros. ¿Cuántos minutos tardará en fumigar una parcela con forma cuadrada y lados de 60 metros? $30 \times 30 = 900m^2$; $60 \times 60 = 3600m^2$	50 min = 900m²; ? min = 3600m²; 900 x 4 = 3600 Teniendo en cuenta que podemos deducir que se cuatriplica tanto el area como el tiempo ∴ 50 x 4 = 200 min
2. Carlos y Luis son corredores que corren igual de rápido, pero Carlos comenzó a correr después de Luis. Cuando Carlos ha dado 2 vueltas a la pista, Luis ha recorrido 4 vueltas. Si Carlos diera 4 vueltas ¿cuántas habrá dado Luis? 6, ya que teniendo en cuenta que corren igual, Carlos sale cuando Luis pasa la salida y van igual de ahí en adelante y cuando Carlos lleva 3 Luis lleva 6	5 y cuando Carlos lleva
3. Si una persona se come 3 cemitas en 20 minutos, ¿cuántas cemitas se puede comer en 160 minutos?	3 = 10 min 1 = 6.6 min; ? = 160 min; Hipotéticamente si una persona puede llegar a comer tan rapido y tanto llegue a la conclusion que en 160 min se puede llegar a comer 24.3 cemitas ya que 1 cemita la come en 6.6 min; 6.6 x 24.3 = 160
4. Si sabemos que al pintar tres figuras de yeso del mismo tamaño se secan totalmente en 6 minutos, ¿en cuánto tiempo se secarían 6 figuras de yeso de igual tamaño que las anteriores?	3 = 6 min; 6 = 6 min; tenemos que si 3 Figuras se secan en 6 minutos cada Figura se seca en 6 minutos ∴ 6 Figuras tambien se secan en 6 min al mismo tiempo

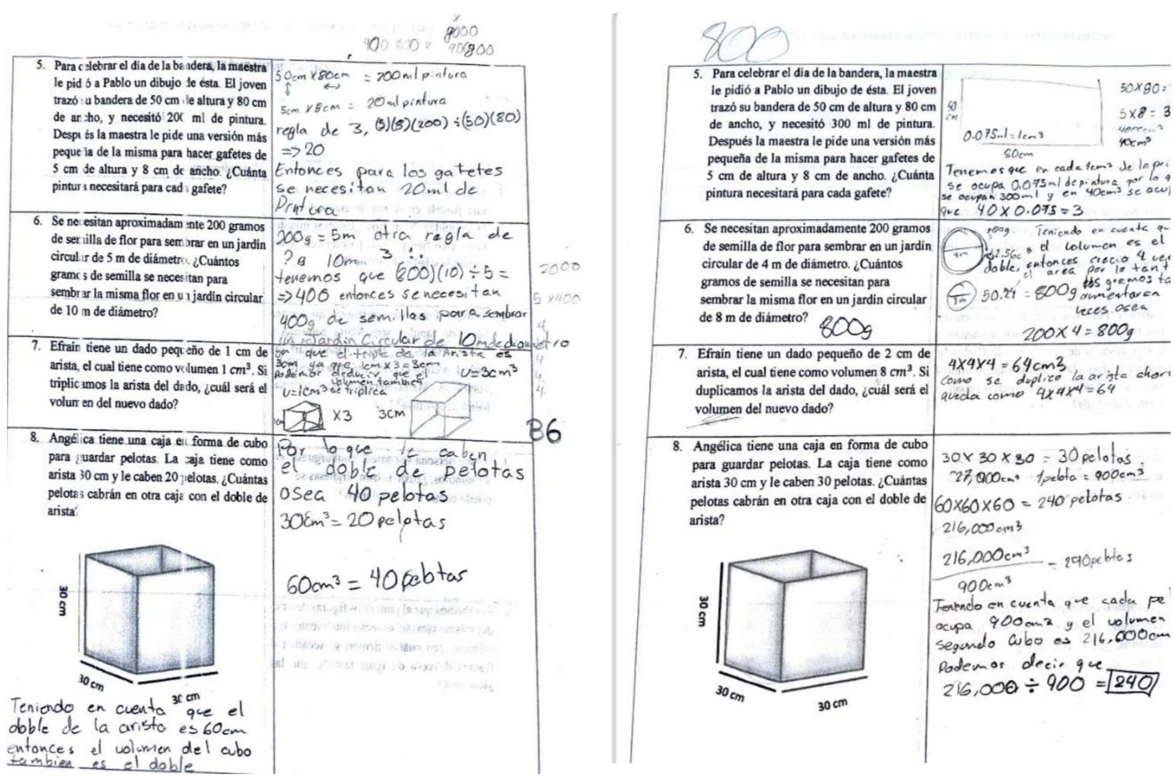
Nota: La parte izquierda corresponde a la evaluación diagnóstica, y la derecha a la final.

En la Figura 4, se muestran las producciones del estudiante A23, con las respuestas de los primeros cuatro ítems. En esta parte se observan dos problemas de exceso de linealidad, uno de falta de sentido y uno de geometría. En el ítem uno, geométrico, cuando lo respondió en la evaluación diagnóstica, A23 cayó en la ilusión de la linealidad, ya que empleó una regla de tres, pero este no se resolvía de esa manera. Después de la implementación, ya en la evaluación final, el estudiante logró contestar adecuadamente el ítem, pues ahora responde comparando áreas, ya no cayó en la IL. Con respecto a los dos problemas de falta de sentido, en el ítem 2, el estudiante usó una regla de tres para resolverlo, sin embargo, en la respuesta del 4 muestra un razonamiento adecuado y contesta correctamente; después de la implementación de la secuencia didáctica, se observa que en las respuestas de estos dos ítems son correctas, además de que el estudiante empleó apoyos visuales para resolverlo.

Ahora, como se puede observar en la Figura 5, los ítems del 5 al 8 son de tipo geométrico. El mismo A23, cayó en la IL en todos los ítems de la evaluación diagnóstica, debido a que en gran parte de ellos emplea equivocadamente regla de 3 para resolverlos, incluso, a pesar de que en uno de ellos elabora un apoyo visual, este no contribuye a una respuesta correcta. Ya en la evaluación final, vemos que el estudiante A23, logró responder adecuadamente los ítems de geometría, deja una evidencia contundente de su razonamiento, aunado a que emplea apoyos visuales para su resolución. En el ítem 7, contrastando la respuesta, en la evaluación diagnóstica, el estudiante observa que el enunciado plantea que el volumen de un dado va a ser modificado al experimentar un cambio en la medida de su arista, para lo cual, en una primera respuesta, el estudiante lleva a cabo el producto del volumen inicial por la razón que crece la arista, atrapado en la IL, no ha efectuado un razonamiento correcto. Después, en la evaluación final, se presenta un problema con modificaciones de datos, en el que la tarea en esencia es la misma, solo que ahora, calcula el volumen final considerando como arista la medida obtenida después de la razón en la que se modificó la arista inicial, escapando así de la IL.

Figura 5

Producción (parte II) del estudiante A23.



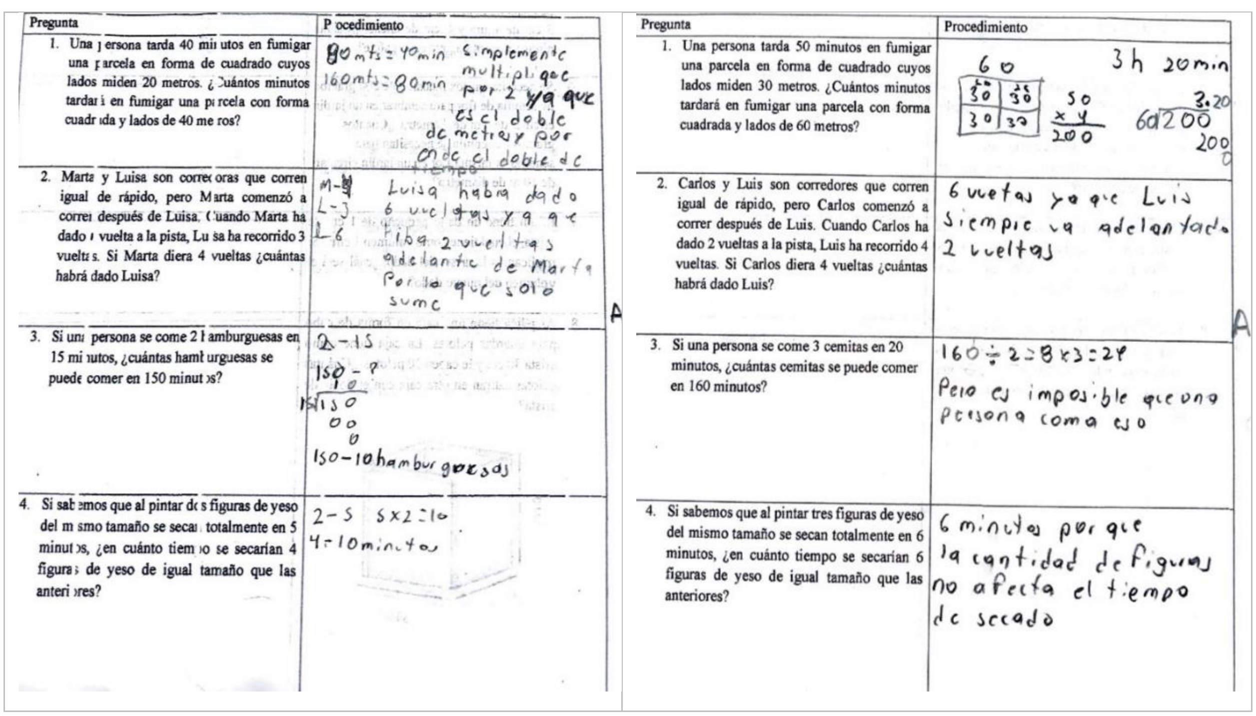
Nota: La parte izquierda corresponde a la evaluación diagnóstica, y la derecha a la final.

En la Figura 6 se observan las producciones del estudiante A6. En el primer ítem que resolvió en la evaluación diagnóstica, cayó en la IL, este es un enunciado de tipo geométrico, en particular de área, al resolverlo, asume que si se duplican los lados del terreno cuadrangular, el área se va a duplicar, sin siquiera elaborar operaciones aritméticas para la justificación de su respuesta, una vez que se lleva a cabo la secuencia didáctica, y se aplica la evaluación final, ocurre algo interesante para la elaboración de la respuesta, pues el estudiante A6 en este caso empleó un apoyo visual, del cual pudo inferir una respuesta acertada e incluso haciendo notar que su razonamiento a dicho planteamiento fue el indicado. Con el ítem 3, que es un problema de tipo de falta de sentido, en el pretest lo respondió bien sin cuestionar el enunciado que se le presentó, y en la evaluación final, notamos que también lo responde bien, pero menciona lo siguiente "pero es imposible que una persona coma eso", con esto, el estudiante muestra que el enunciado carece de sentido para una situación real.

Ahora, con respecto al ítem dos y cuatro, del tipo exceso de linealidad; el estudiante en el ítem 2, en ambas pruebas, la respondió de forma correcta, en cambio, en el ítem cuatro, en la evaluación final logró tener un razonamiento correcto, superando la IL.

Figura 6

Producción (parte I) del estudiante A6.



Pregunta	Procedimiento
1. Una persona tarda 40 minutos en fumigar una parcela en forma de cuadrado cuyos lados miden 20 metros. ¿Cuántos minutos tardará en fumigar una parcela con forma cuadrada y lados de 40 metros?	80 mts = 40 min 160 mts = 80 min simplemente multipliqué por 2 ya que es el doble de metros por ende el doble de tiempo
2. Marta y Luisa son corredoras que corren igual de rápido, pero Marta comenzó a correr después de Luisa. Cuando Marta ha dado 1 vuelta a la pista, Luisa ha recorrido 3 vueltas. Si Marta diera 4 vueltas ¿cuántas habrá dado Luisa?	M-1 L-3 L 6 Luisa habrá dado 6 vueltas ya que Luisa lleva 2 vueltas adelante de Marta por lo que sólo sume
3. Si una persona se come 2 hamburguesas en 15 minutos, ¿cuántas hamburguesas se puede comer en 150 minutos?	2-15 150 ÷ 15 150-10 hamburguesas
4. Si sabemos que al pintar dos figuras de yeso del mismo tamaño se secan totalmente en 5 minutos, ¿en cuánto tiempo se secarían 4 figuras de yeso de igual tamaño que las anteriores?	2-5 5x2=10 4-10 minutos

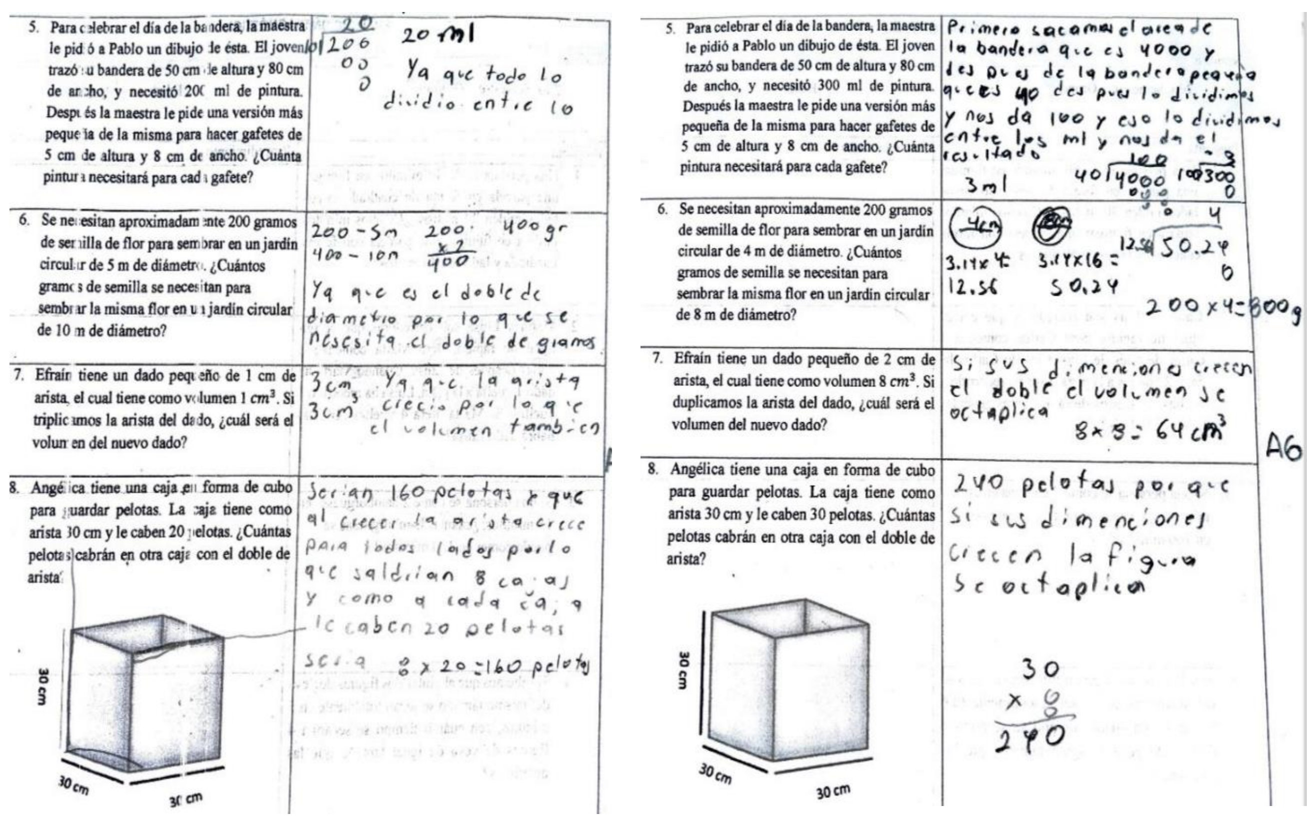
Pregunta	Procedimiento
1. Una persona tarda 50 minutos en fumigar una parcela en forma de cuadrado cuyos lados miden 30 metros. ¿Cuántos minutos tardará en fumigar una parcela con forma cuadrada y lados de 60 metros?	60 30 30 30 30 50 x 4 200 3h 20min 3.20 60)200 200 0
2. Carlos y Luis son corredores que corren igual de rápido, pero Carlos comenzó a correr después de Luis. Cuando Carlos ha dado 2 vueltas a la pista, Luis ha recorrido 4 vueltas. Si Carlos diera 4 vueltas ¿cuántas habrá dado Luis?	6 vueltas ya que Luis siempre va adelantado 2 vueltas
3. Si una persona se come 3 cemitas en 20 minutos, ¿cuántas cemitas se puede comer en 160 minutos?	160 ÷ 20 = 8 x 3 = 24 Pero es imposible que una persona coma eso
4. Si sabemos que al pintar tres figuras de yeso del mismo tamaño se secan totalmente en 6 minutos, ¿en cuánto tiempo se secarían 6 figuras de yeso de igual tamaño que las anteriores?	6 minutos porque la cantidad de figuras no afecta el tiempo de secado

Nota: La parte izquierda corresponde a la evaluación diagnóstica, y la derecha a la final.

Como podemos observar en la Figura 7, se muestran las producciones de A6, de tipo geométrico. Se aprecia que, en las respuestas de la evaluación diagnóstica, una de las cuatro es correcta, en las incorrectas hay evidencia clara de IL. Una vez implementada la secuencia didáctica, en la evaluación final logra responder adecuadamente todos los ítems, incluso, ocupando apoyos visuales para su elaboración. En los cálculos que realizó, buscó áreas y las comparó para así hallar lo solicitado. En el ítem 7 y 8, que fueron planteamientos con respecto al volumen, en los cuales se veía modificada la arista, usó inferencias que se produjeron durante la secuencia didáctica, “si se duplicaban las dimensiones de un cuerpo se octuplicaba el volumen”. Para el 7, su respuesta es: “Si sus dimensiones crecen el doble el volumen se octuplica, $8 \times 8 = 64$", y un razonamiento similar emplea en el 8, este ítem trata acerca de un cubo en donde se guardan 30 pelotas y como sus dimensiones se duplican, se plantea saber cuantas cabrán en otra caja con el doble de sus dimensiones, a lo que A6 responde: “240 pelotas porque si sus dimensiones crecen la figura se octuplica”.

Figura 7

Producción (parte II) del estudiante A6.

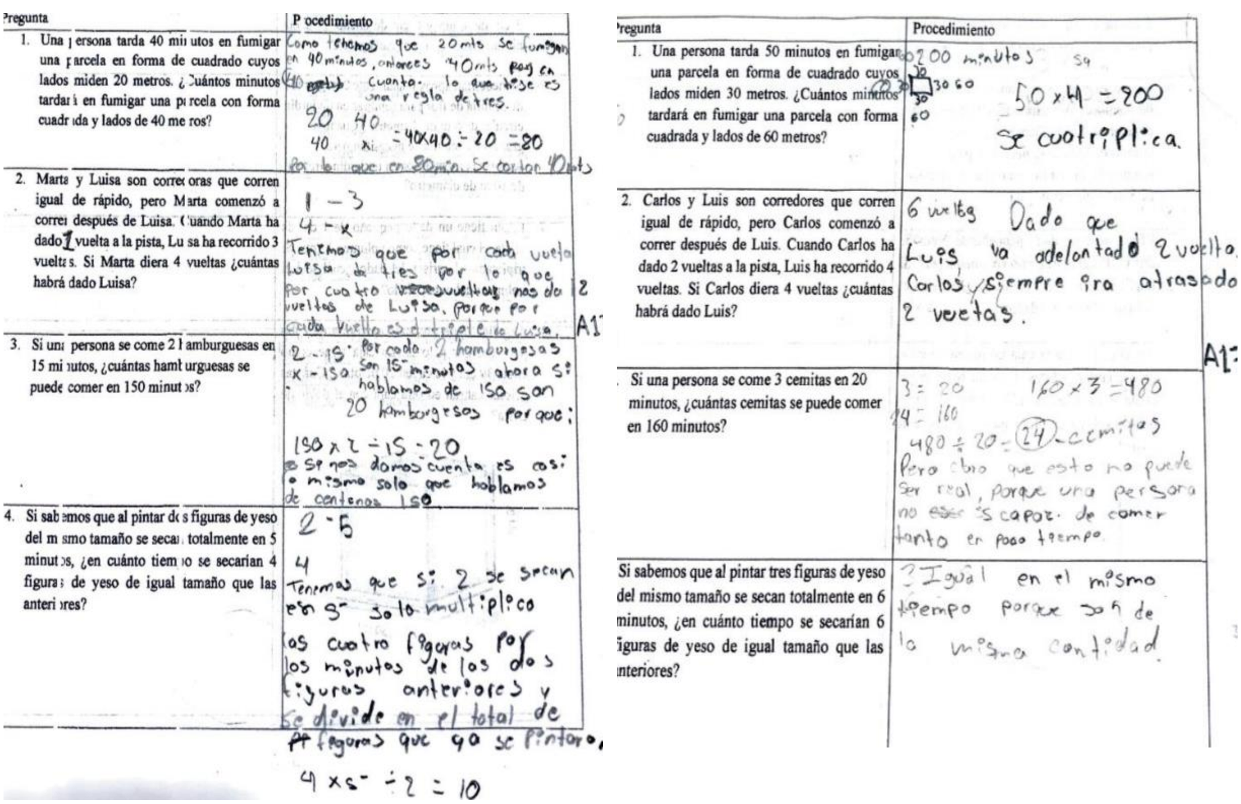


Nota: La parte izquierda corresponde a la evaluación diagnóstica, y la derecha a la final.

En la Figura 8, se observan las producciones del estudiante A17 del ítem 1 al 4. Para sus respuestas de la evaluación diagnóstica, se nota que tiene una fuerte tendencia a resolver los problemas matemáticos aplicando una regla de 3, cayendo así en la IL, y en el único ítem en donde no cae, que es el 2, un problema de exceso de linealidad realiza una proporcionalidad que no se cumple para el planteamiento de dicho problema. Posteriormente, al concluir la implementación de la secuencia didáctica, en la evaluación final, las respuestas de los ítems muestran que ha erradicado la IL. El ítem 1, que es del tipo geométrico, identifica que el área creció 4 veces al duplicarse sus dimensiones, y puede obtener una respuesta correcta. También en aquellos en ítems, 2 y 4, del tipo de exceso de linealidad, logró observar e identificar que dichos planteamientos no se resolvían aplicando regla de 3. Y respecto al 3, que es del tipo de falta de sentido lo contesta tomando los datos brindados y agrega: "Pero claro que esto no puede ser real, porque una persona no es capaz de comer tanto en poco tiempo".

Figura 8

Producción (parte I) del estudiante A17.

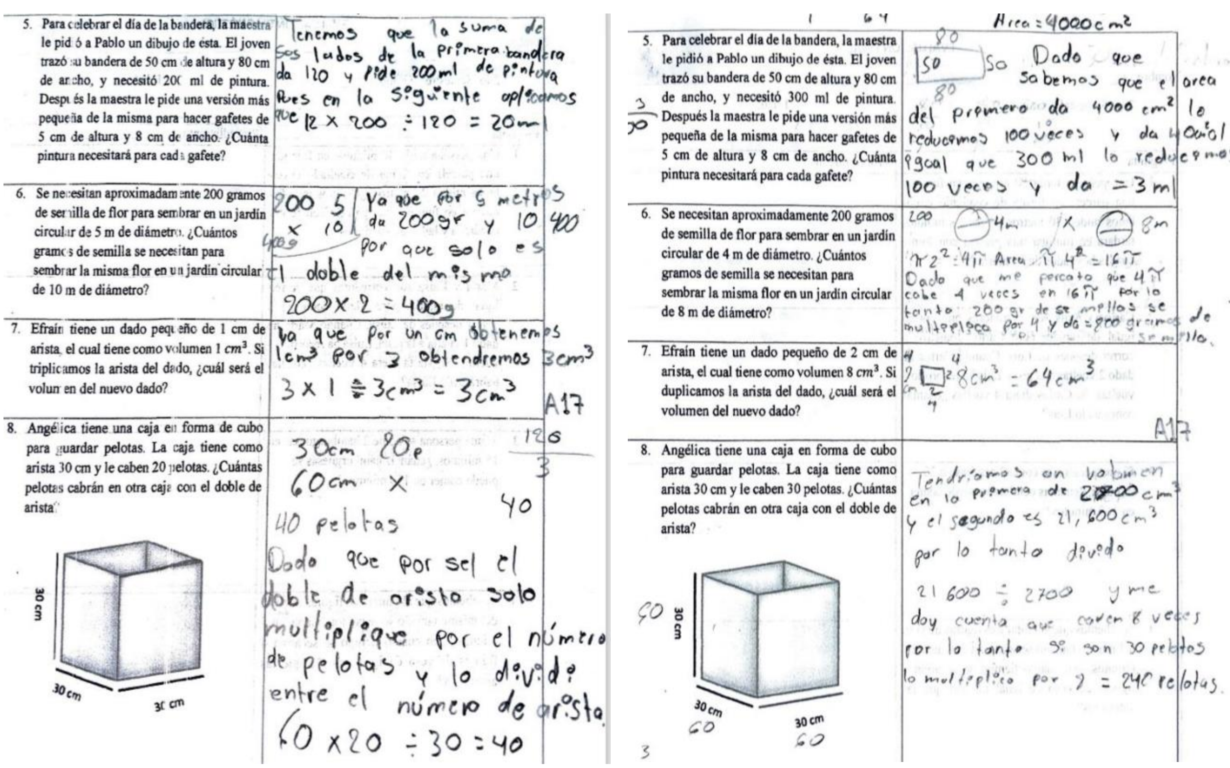


Nota: La parte izquierda corresponde a la evaluación diagnóstica, y la derecha a la final.

Como se puede observar en la Figura 9, las producciones de A17, que contienen del ítem 5 al 8, todos geométricos, en la evaluación diagnostica, muestran que aplica una regla de 3 para su resolución en casi todos, y solamente no la aplica en el 6. Después, de concluir con la implementación, en la evaluación final, logra responder adecuadamente todos los ítems, en tres de ellos produce un andamio visual para su elaboración y en la mayoría de ellos calcula áreas o volúmenes, y los compara para poder deducir su respuesta. En el ítem 5, se presenta un problema en donde una figura reduce sus dimensiones 10 veces, y se ocupa cierto material para la figura original, la tarea es hallar la cantidad de material que se ocupara para la figura obtenida, una vez aplicada la reducción, y presenta la siguiente respuesta una vez elaboradas sus cuentas. "Dado que sabemos que el área del primero de $4000\ cm^2$ lo reducimos 100 veces y da $40\ cm^2$ al igual que $300\ ml$ lo reducimos 100 veces y da $3\ ml$". De una forma similar resuelve el 6 y el 8. Para el ítem 7, lo que hace es obtener el volumen del dado, tomando en cuenta la nueva medida de la arista y no usando regla de 3, como lo había hecho en la evaluación diagnóstica.

Figura 9.

Producción (parte II) del estudiante A17.

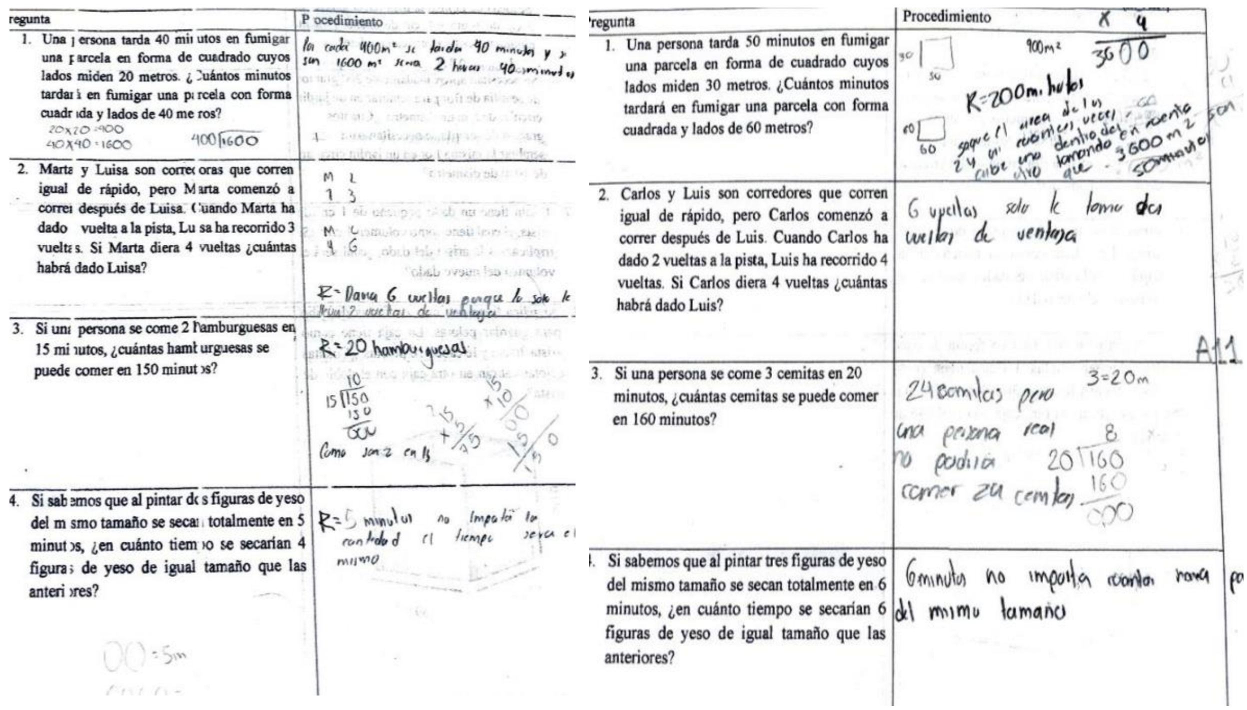


Nota: La parte izquierda corresponde a la evaluación diagnóstica, y la derecha a la final.

En la Figura 10, se muestran las producciones del estudiante A11; quien en la diagnóstica, logró responder adecuadamente los primeros cuatro ítems, menos el 3, pues es un problema del tipo de falta de sentido, y A11 no se percató de ello, solo lo responde con los valores proporcionados, una vez concluida la implementación de la secuencia didáctica, sigue respondiendo adecuadamente todos, además, en el ítem 3, hace mención sobre la falta de sentido que tiene dicho planteamiento.

Figura 10

Producción (parte I) del estudiante A11.



Pregunta	Procedimiento
1. Una persona tarda 40 minutos en fumigar una parcela en forma de cuadrado cuyos lados miden 20 metros. ¿Cuántos minutos tardará en fumigar una parcela con forma cuadrada y lados de 40 metros?	
2. Marta y Luisa son corredoras que corren igual de rápido, pero Marta comenzó a correr después de Luisa. Cuando Marta ha dado vuelta a la pista, Luisa ha recorrido 3 vueltas. Si Marta diera 4 vueltas ¿cuántas habrá dado Luisa?	
3. Si una persona se come 2 hamburguesas en 15 minutos, ¿cuántas hamburguesas se puede comer en 150 minutos?	R= 20 hamburguesas
4. Si sabemos que al pintar dos figuras de yeso del mismo tamaño se secan totalmente en 5 minutos, ¿en cuánto tiempo se secarían 4 figuras de yeso de igual tamaño que las anteriores?	

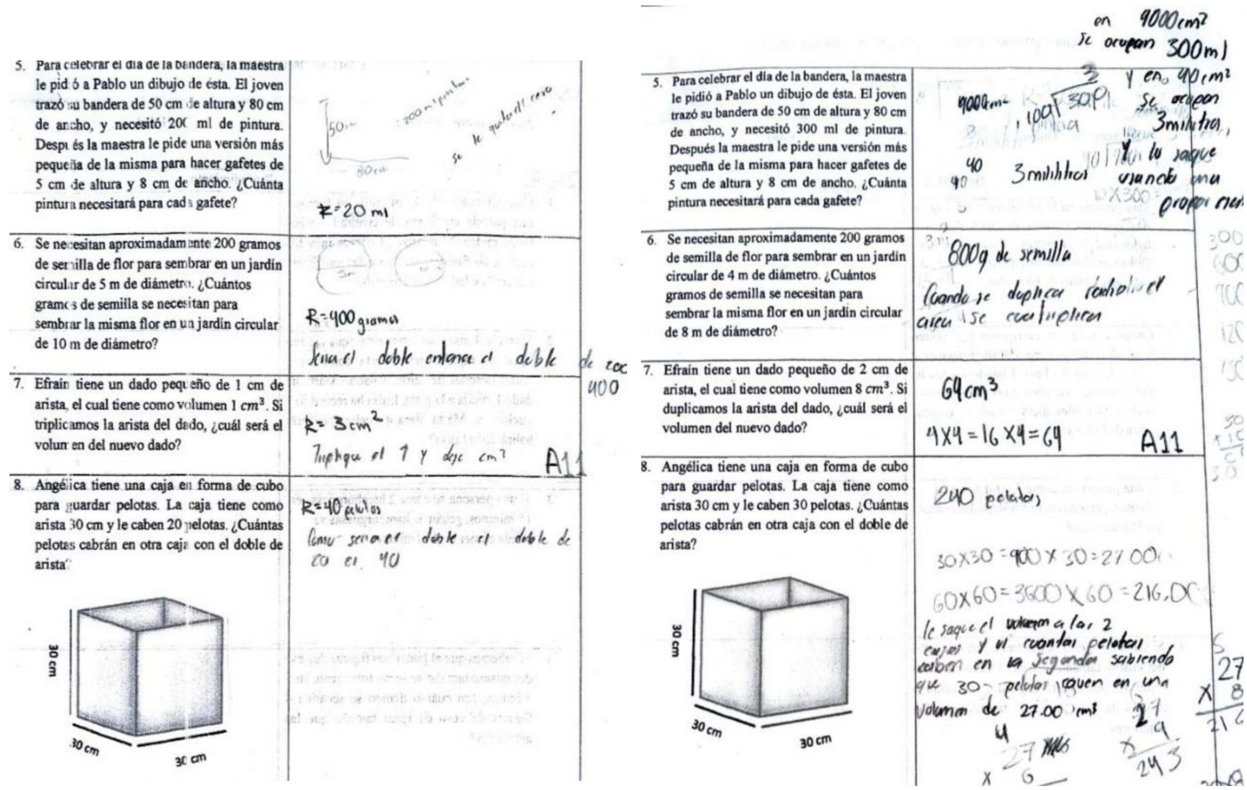
Pregunta	Procedimiento
1. Una persona tarda 50 minutos en fumigar una parcela en forma de cuadrado cuyos lados miden 30 metros. ¿Cuántos minutos tardará en fumigar una parcela con forma cuadrada y lados de 60 metros?	
2. Carlos y Luis son corredores que corren igual de rápido, pero Carlos comenzó a correr después de Luis. Cuando Carlos ha dado 2 vueltas a la pista, Luis ha recorrido 4 vueltas. Si Carlos diera 4 vueltas ¿cuántas habrá dado Luis?	
3. Si una persona se come 3 cemitas en 20 minutos, ¿cuántas cemitas se puede comer en 160 minutos?	
4. Si sabemos que al pintar tres figuras de yeso del mismo tamaño se secan totalmente en 6 minutos, ¿en cuánto tiempo se secarían 6 figuras de yeso de igual tamaño que las anteriores?	

Nota: La parte izquierda corresponde a la evaluación diagnóstica, y la derecha a la final.

En la Figura 11, se observan las producciones del estudiante A11, que corresponden a los ítems del 5 al 8, todos de tipo geométrico. En la evaluación diagnóstica en todos los ejercicios cae en la IL. Terminada la implementación de la secuencia didáctica, en la evaluación final, logra responder adecuadamente todos los ítems, en donde observamos que encuentra áreas y las compara, además de ocupar inferencias que se desarrollaron en la secuencia didáctica.

Figura 11

Producción (parte II) del estudiante A11.



Nota: La parte izquierda corresponde a la evaluación diagnóstica, y la derecha a la final.

Conclusiones

Retomando la pregunta y el objetivo de esta investigación, que era diseñar con determinadas estrategias una secuencia didáctica y evaluar su efectividad, para que los estudiantes superaran la IL, podemos afirmar:

i) Las estrategias consideradas fueron básicamente utilizar andamios visuales y metacognitivos como lo sugieren De Book et. al (2007), así como problemas con formato comparativo, donde se tomaban en cuenta medidas directas e indirectas. Nos aseguramos también de utilizar problemas de contextos auténticos, para que se dieran cuenta de la falta o no de sentido. Así mismo, era de suma importancia que tuvieran claros los conceptos de razones y proporciones para centrarnos en la aplicación de estos a los diferentes tipos de problemas verbales considerados. Cabe mencionar que, al ser estudiantes de preparatoria, ya sabían calcular áreas y volúmenes de figuras geométricas y cuerpos en el espacio. También se consideró que los alumnos trabajaran en grupos pequeños y con discusiones plenarias en el aula, para unificar la información.

ii) La secuencia implementada, como lo muestran los resultados, constata que el 65.4% contestaron acertadamente los problemas de exceso de linealidad; un 96.4% los de falta de sentido lo responde bien, aunque solo un 57.1% hace referencia a la falta de sentido; y un 47.2% en los problemas geométricos. Lo que hace un promedio de casi un 70% que contestaron de manera correcta. Recordemos que en la evaluación diagnóstica el 35.2 % contestaron bien en problemas de exceso de linealidad, 63% en falta de sentido, sin que ningún estudiante haya notado la falta de sentido; y un 3.7% en problemas geométricos. La diferencia entre el porcentaje de aciertos correctos entre la evaluación diagnostica y final es importante.

iii) Se está pensando en un rediseño de actividades en la secuencia didáctica, quizás con la utilización de algún software geométrico para esta parte, considerando que pueden mejorar mucho los andamios visuales, e incluso que este sea interactivo, para que ellos mismos tengan oportunidad de crear sus propios andamios visuales. También se ha considerado hacer una selección de más problemas verbales contextualizados, para que el alumno trabaje de manera independiente, y después lo socialice en sesiones plenarias.

Referencias

Buendía, L., Colás, P. y Hernández, F. (1998). *Métodos de investigación en psicopedagogía*. Madrid: McGraw-Hill.

Cooper, B., & Harries, T. (2002). Children's responses to contrasting 'realistic' mathematics problems: Just how realistic are children ready to be? *Educational Studies in Mathematics*, 49, 1–23.

Cooper, B., & Harries, T. (2003). Children's use of realistic considerations in problem solving: some English evidence. *Journal of Mathematical Behaviour*, 22, 451–465.

De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics*, 35(1), 65-83.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement* (Vol. 41). Springer Science & Business Media.

de Lange, J. (1987). *Mathematics, insight and meaning. Teaching, learning and testing of mathematics for the life and social sciences*. Utrecht: Vakgroep Onderzoek Wiskundeonderwijs en Onderwijscomputercentrum.

Freudenthal H. (1986). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Springer Science & Business Media.

Godino, J. D. y Batanero, C. (2003). *Proporcionalidad y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. https://hdl.handle.net/10481/95719

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, 60, 1–64.

Maurin, C. & Johsua, A. (1993). *Les outils numériques à l'école primaire et au collègue*, Vol 2. París: Editions Marketing (Ellipses).

Palm, T. (2002). *The realism of mathematical school tasks. Features and consequences*. Doctoral dissertation, Department of Mathematics, Umeå University, Umeå, Sweden.

Sánchez Sánchez, R. (2018). *La ilusión de la linealidad: el análisis de una propuesta didáctica en estudiantes de Bachillerato*. [Tesis de maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla] Repositorio Institucional de Acceso Abierto de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. https://hdl.handle.net/20.500.12371/8417

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 147–164.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction. The Wiskobas project*. Dordrecht: Reidel.

Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2003). The illusion of linearity: Expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational studies in mathematics*, 53, 113-138.

Anexos

Anexo A

Secuencia didáctica

Sesión 1

Fracciones y más fracciones

Propósitos: Realizar operaciones básicas con fracciones y hallar la constante por la cual se multiplica para hallar una fracción equivalente. Comparar segmentos proporcionales y no proporcionales.

Actividad 1

Responde lo siguiente.

¿Qué es el doble de un número? ____

____

Recordemos que el doble de un número es resultado de multiplicar al número en cuestión por dos.

De la siguiente tabla, obtén el doble de las cantidades.

• 100 • 46 • $\frac{1}{2}$	• 18 • 99 • $\frac{2}{3}$	• 120 • $\frac{1}{4}$ • $\frac{2}{5}$

¿Qué es el triple de un número? ____

____

De la tabla anterior, calcula el triple de las cantidades.

Responde a las siguientes preguntas.

¿A cuánto equivale $\frac{1}{2}$ de 80? _____________ ¿Y de 180? ____________ ¿Y de 181? ______________

¿A cuánto equivale $\frac{1}{3}$ de 90? _____________ ¿Y de 180? ____________ ¿Y de 10? _____________

¿A cuánto equivale $\frac{1}{4}$ de 80? _____________ ¿Y de 180? ____________ ¿Y de 191? ______________

¿A cuánto equivale $\frac{3}{2}$ de 40? _____________ ¿Y de 180? ____________ ¿Y de 191? ______________

Las preguntas anteriores se pueden responder realizando el producto de dichas cantidades. Si nos piden a cuanto equivale $\frac{3}{2}$ de 40, entonces multiplicamos $\frac{3}{2} \times \frac{40}{1} = \frac{120}{2}$, dicho resultado, se simplifica a 60.

Actividad 2

Ahora, resuelve lo siguiente.

Calcula el doble de las siguientes fracciones:

- $\frac{2}{5}$
- $\frac{7}{9}$
- $\frac{3}{10}$
- $\frac{4}{7}$

Las mismas fracciones que se enlistaron anteriormente, multiplicarlas por $\frac{1}{3}$.

- $\frac{2}{5}$
- $\frac{7}{9}$
- $\frac{3}{10}$
- $\frac{4}{7}$

Multiplícalas ahora por $\frac{3}{7}$.

- $\frac{2}{5}$
- $\frac{7}{9}$
- $\frac{3}{10}$
- $\frac{4}{7}$

Halla el valor por el cual se multiplicó la fracción $\frac{4}{9}$ para obtener las siguientes fracciones:

- $\frac{8}{27}$
- $\frac{4}{45}$

- $\frac{32}{63}$
- $\frac{24}{45}$

Actividad 3

Considera lo siguiente.

En una región hay cuatro terrenos con las mismas dimensiones. Dichos terrenos van a ser repartidos entre cierto número de personas.

Si los terrenos son repartidos entre dos personas. ¿Cuánto le corresponde a cada persona? ______________________________

Si los terrenos son repartidos entre cuatro personas. ¿Cuánto le corresponde a cada persona? ______________________________

Si los terrenos son repartidos entre cinco personas. ¿Qué fracción de terreno le corresponde a cada persona? ___________________

Si los terrenos son repartidos entre seis personas. ¿Qué fracción de terreno le corresponde a cada persona? _____________________

Si los terrenos son repartidos entre ocho personas. ¿Qué fracción de terreno corresponde a cada persona? ____________________

De lo anterior, como planteamos el reparto equitativo, lo podemos representar de la siguiente forma, si los terrenos son repartidos entre cinco personas. ¿Cuánto le corresponde a cada persona? Dado que si son cuatro terrenos que serán repartidos entre cinco personas, entonces les corresponde $\frac{4}{5}$ de terreno a cada uno, o también, hacer la división $5\overline{)4}$, al efectuarla obtenemos 0.8 de terreno a cada persona, entonces la representación $\frac{4}{5}$ es equivalente a 0.8 de terreno, es decir, $\frac{4}{5} = 0.8$

Actividad 4

Considera algunos de los ingredientes para realizar una tarta de limón.

- $\frac{3}{10}kg$ de limón
- Un paquete de galletas.
- $\frac{1}{2}$ de barra de mantequilla
- $\frac{3}{4}$ de una lata de leche condensada azucarada.

Si se pretende hacer dos tartas de limón. Halla cuáles serán las porciones de ingredientes que se requieren.

Si se quisieran hacer media tarta de limón. Halla cuáles serán las porciones de ingredientes que se requieren.

Si se quisieran hacer dos tartas y media de limón. Halla cuáles serán las porciones de ingredientes que se requieren.

Si se quisieran hacer tres tartas y media de limón. Halla cuáles serán las porciones de ingredientes que se requieren.

Si se quisieran hacer diez tartas de limón. Halla cuáles serán las porciones de ingredientes que se requieren.

Y si se quisieran hacer n tartas de limón. Halla cuáles serán las porciones de ingredientes que se requieren.

Actividad 5

Un ciclista se está preparando para una competencia. Recorre 10 kilómetros por hora.

Determina cuántos kilómetros va a recorrer en media hora.

Determina cuántos kilómetros va a recorrer en $\frac{3}{4}$ de hora.

Determina cuántos kilómetros va a recorrer en $\frac{1}{5}$ de hora.

Determina cuántos kilómetros va a recorrer en 2 horas y media.

Determina cuántos kilómetros va a recorrer en 3 horas con un cuarto de hora.

¿Podrías determinar cuántos kilómetros va a recorrer el ciclista si se nos proporciona un determinado tiempo? Explica.

¿En cuánto tiempo recorrió 2.5 kilómetros? Expresa tu respuesta en términos de horas.

Si recorrió 9 kilómetros. ¿En cuánto tiempo lo hizo?

Si recorrió 15 kilómetros. ¿En cuánto tiempo lo hizo?

Si recorrió 30 kilómetros. ¿En cuánto tiempo lo hizo?

Si recorrió 18 kilómetros. ¿En cuánto tiempo lo hizo?

Si recorrió n kilómetros. ¿En cuánto tiempo lo hizo?

Actividad 6

Un estudiante que realizó una prueba sobre plantas descubrió que de las 15 que se sembraron, 3 no florecieron. La maestra les mencionó que podrían representar dicha información como:" $\frac{3}{15}$ de las plantas no florecieron". Una de sus compañeras afirmó que de cada 5 plantas solamente una no floreció. ¿Su compañera está en lo correcto? Explica tu respuesta.

Como expresarías la información que ha dado la compañera en forma de fracción. ___________

Alguien también mencionó que si hubiera 60 plantas entonces 12 no hubieran florecido. ¿Su compañera está en lo correcto? Explica tu respuesta.

Como expresarías la información que ha dado la compañera en forma de fracción. ______

Las afirmaciones que hicieron los compañeros en clase son correctas. Se dice que $\frac{12}{60} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$, son fracciones equivalentes.

En el primer caso, $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ tanto el numerador como denominador fueron divididos por el mismo número, en este caso, 3. Y en el segundo, $\frac{3}{15} = \frac{12}{60}$ tanto el numerador como denominador fueron multiplicados por el mismo número, por 4.

Actividad 7

Realiza la siguiente actividad.

Halla el valor por el cual se multiplicó o dividió tanto el numerador como el denominador para que sean equivalentes a $\frac{4}{7}$.

- $\frac{8}{14}$
- $\frac{20}{35}$
- $\frac{\frac{4}{7}}{1}$
- $\frac{28}{49}$
- $\frac{6}{\frac{21}{2}}$
- $\frac{\frac{2}{7}}{\frac{1}{2}}$

Actividad 8

Consideremos lo siguiente

En la figura 1 hay tres segmentos de rectas. El A mide 4 cm, el B 6 cm y el C es de 8 cm. En la figura 2 hay tres segmentos: el A’, que mide 2 cm, el B’ que es de 3 cm y el C’, de 4 cm.

A ______________________ 4 cm

B ____________________________ 6 cm

C ______________________________________ 8 cm

Figura 1

A’ _____________ 2 cm

B’ _________________ 3 cm

C’ ______________________ 4 cm

Figura 2

Recordemos lo siguiente. Una razón es el resultado de una comparación entre dos cantidades. Cuando la comparación se hace mediante una división, decimos que la razón es por cociente. Por ejemplo, al comparar los números 1 y 5 también podríamos decir que 1 es la quinta parte de 5, es decir que 1 es 1/5 de 5. También, al comparar los números 4 y 3 podríamos decir que 4 es cuatro tercias partes de 3, es decir que 4 es 4/3 de 3.

Responde lo siguiente.

¿Cuál es la razón entre la longitud del segmento A y el segmento A’? ________________

¿Cuál es la razón entre la longitud del segmento B y el segmento B’? ________________

¿Y entre los segmentos C y C’? _____________

¿Cómo son entre sí estas razones? __________________________

A’’ _________________________________ 6 cm

B’’ ____ 9 cm

C’’ ____ 12 cm

Figura 3

$$\frac{\text{Longitud del segmento A}}{\text{Longitud del segmento A}''} =$$

$$\frac{\text{Longitud del segmento } B}{\text{Longitud del segmento B}''} =$$

$$\frac{\text{Longitud del segmento } C}{\text{Longitud del segmento C}''} =$$

Utiliza algún método para escribir estas razones de modo que todas tengan el mismo denominador, por ejemplo, que todas tengan denominador 10.

¿Cómo son entre sí estas razones? ____________________________

Si estas razones son iguales decimos que los segmentos de la figura 1 ***son proporcionales*** a los segmentos de la figura 3.

Ahora observa los siguientes segmentos.

D ______________________ 6 cm

E _____________________________ 9 cm

F _______________________________________ 12 cm

Figura 4

D' ______________ 4 cm

E' ____________________ 6 cm

F' ____________________________ 9 cm

Figura 5

$$\frac{\text{Longitud del segmento D}}{\text{Longitud del segmento D}'} =$$

$$\frac{\text{Longitud del segmento } E}{\text{Longitud del segmento E}'} =$$

$$\frac{\text{Longitud del segmento } F}{\text{Longitud del segmento F}'} =$$

¿Cómo son entre sí estas razones? ____________________________

Ahora observa los siguientes segmentos. Compáralos con los segmentos azules, y obtén las razones correspondientes.

D'' ____ 10 cm

E'' ____ 10 cm

F'' ____ 8 cm

Figura 6

$$\frac{\text{Longitud del segmento D}}{\text{Longitud del segmento D´´}} =$$

$$\frac{\text{Longitud del segmento } E}{\text{Longitud del segmento E´´}} =$$

$$\frac{\text{Longitud del segmento } F}{\text{Longitud del segmento F´´}} =$$

¿Cómo son entre sí estas razones? ___________________________

Si en este caso las tres razones no son el mismo número, entonces decimos que los segmentos verdes ***no son proporcionales*** a los azules.

Consideremos lo siguiente

En la figura 7 hay tres segmentos. El G mide 3 cm, el H 4.5 cm y el I es de 6 cm. En la figura 8 hay tres segmentos: el G´, que mide 5 cm, el H´ que es de 7.5 cm y el I´, de 10 cm.

G ________________ 3 cm

H _______________________ 4.5 cm

I ______________________________ 6 cm

Figura 7

G’ _________________________ 5 cm

H’ ______________________________________7.5 cm

I’ ____10 cm

Figura 8

Responde lo siguiente.

¿Cuál es la razón entre la longitud del segmento G y el segmento G’? _________________

¿Cuál es la razón entre la longitud del segmento H y el segmento H’? _________________

¿Y entre los segmentos I y I’? ______________

Utiliza algún método para escribir estas razones de modo que todas tengan el mismo denominador, por ejemplo, que todas tengan denominador 10.

¿Cómo son entre sí estas razones? ___________________________

Ahora observa los siguientes segmentos. Compáralos con los segmentos de la figura 7, y obtén las razones correspondientes.

G" ___________ 2 cm

H" __________________________ 5 cm

I" _______________________________ 6 cm

Figura 9

$$\frac{\text{Longitud del segmento G}}{\text{Longitud del segmento G´´}} =$$

$$\frac{\text{Longitud del segmento } H}{\text{Longitud del segmento H´´}} =$$

$$\frac{\text{Longitud del segmento I}}{\text{Longitud del segmento I´´}} =$$

¿Cómo son entre sí estas razones? ____________________________

Sesión 2

¡Del dicho al hecho hay mucho trecho!

Propósitos: Identificar la falta de autenticidad en relaciones de proporcionalidad que parten de situaciones reales y se obtienen resultados absurdos.

Actividad 1

Un niño de 2 años pesa 13 kg, ¿cuánto pesará cuando tenga 10 años?

¿Cuánto pesará cuando tenga 20 años?

En la siguiente tabla se muestra el peso ideal en niños según su edad (lo usual es que durante los primeros 12 meses haya cambios rápidos en el peso):

EDAD	PESO (EN KG)
Recién nacido	3.47
3 meses	6.26
6 meses	8.02
9 meses	9.24
1 año	10
2 años	13
3 años	15
4 años	17
5 años	19
6 años	21
7años	23
8 años	26
9 años	29

10 años	32
11 años	37
12 años	41
13 años	47
14 años	52
15 años	57

Según el peso ideal, ¿cuántos kilogramos más pesa un niño de 3 años que otro niño de 2 años?

Según el peso ideal, ¿cuántos kilogramos más pesa un niño de 4 años que otro niño de 3 años?

Según el peso ideal, ¿cuántos kilogramos aumenta el peso de un niño de los 10 a los 11 años?

Con base en lo anterior responde, ¿cómo se comporta el peso ideal con respecto a la edad?

Entonces, ¿son proporcionales la edad y el peso de una persona? _____ ¿por qué?

Entonces, ¿mantienes tu respuesta de la pregunta 1, o la modificarías?
___________________________. Argumenta:

Actividad 2

Cuando Juanito cumple 14 años la medida de cada uno de sus pies es de 25 cm, ¿Cuánto medirá cada uno de sus pies al cumplir 28 años?

¿Conoces alguna persona que la medida de cada uno de sus pies se mayor a 50 cm?

¿Será probable que una persona presente un crecimiento de sus pies de manera que aumente 24 cm cada 14 años? Argumenta:

La tabla siguiente muestra la edad y la talla de zapatos ideal de una persona dependiendo de su edad. Analice los datos proporcionados en dicha tabla y responda

EDAD	MEDIDA (en cm)
1 año	11.5 cm
2 a 3 años	15 cm
3 a 4 años	17 cm
4 a 5 años	19 cm
6 a 7 años	20 cm
7 a 8 años	21 cm
8 a 10 años	22 cm
10 a 12 años	23 cm
12 a 13 años	23.5
13 a 14 años	25 cm
14 a 15 años	26 cm

¿Aumenta la misma cantidad de centímetros la medida de zapatos de un año a otro? Argumenta.

Entonces, ¿Son proporcionales la edad de una persona y la medida de zapatos? ______. Argumenta

Entonces, ¿podrían ser proporcionales la edad de Juanito y la medida de sus pies? Argumenta

¿Se puede resolver con una regla de tres este tipo de situaciones? ____, ¿por qué?

Actividad 3

Si un árbol que da aguacates crece cada día un metro. ¿A los cuántos días medirá 40 metros?

¿Crees que en realidad pueda suceder lo anterior? ______. Argumente su respuesta:

¿Es proporcional el crecimiento con respecto al tiempo (en días en la vida real)? ____. Argumenta:

Actividad 4

Un automóvil pequeño (Vocho) con el tanque en cero litros comienza a cargar gasolina, siendo esta bombeada a razón de 5 litros por minuto, ¿cuántos litros tendrá en el tanque el auto al transcurrir 25 minutos?

¿Cuántos litros de capacidad aproximadamente, crees que podrá tener el tanque de combustible de un auto pequeño?

La siguiente tabla muestra la capacidad (en litros) del tanque de combustible de diferentes autos Volkswagen, todos con mayor capacidad que un Vocho.

Tipo de auto	Capacidad del tanque
Golf	40 litros
Polo	45 litros
Vento	55 litros
Virtus	55 litros

¿Entonces, crees que el resultado que encontraste para saber cuántos litros tendrá en el tanque el auto al transcurrir 25 minutos, podría ser correcto?

Si___ No___. Argumenta:

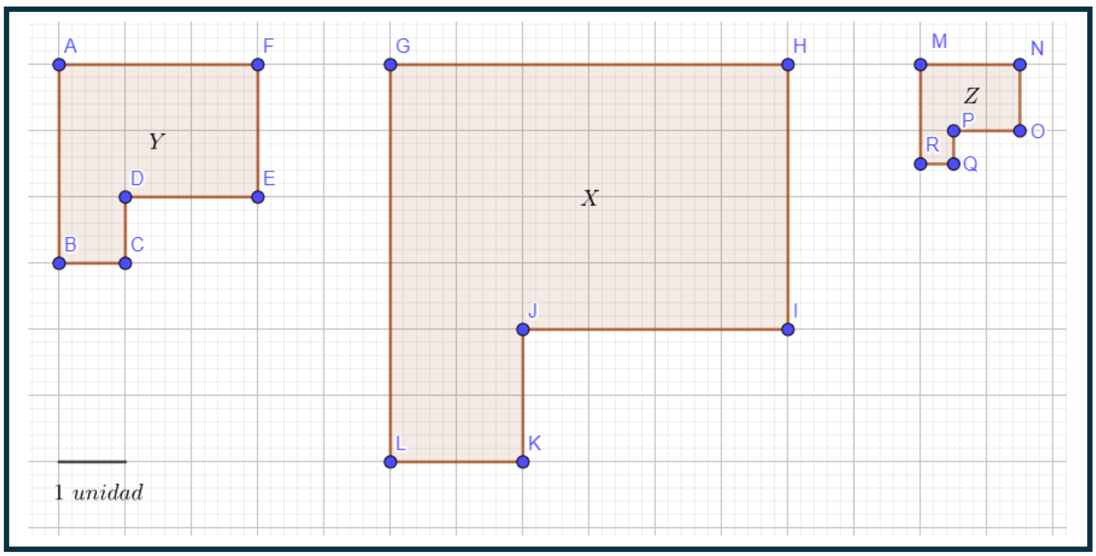
Sesión 3

Cambiando de escala

Propósitos: Identificar la relación de proporcionalidad entre la longitud de los lados correspondientes de figuras geométricas en diferentes escalas.

Actividad 1

Cierto fraccionamiento ofrece tres tipos de predios a la venta: gama alta (**X**), gama intermedia (**Y**) y gama baja (**Z**). Todos los predios tienen la misma forma, pero diferente tamaño como se muestra a continuación.



Usando los cuadrados como unidad de medida (ver imagen), determina la longitud de los lados que delimitan cada predio y anótalos en los espacios correspondientes.

X	**Y**	**Z**
$\overline{GH} =$	$\overline{AF} =$	$\overline{MN} =$
$\overline{GL} =$	$\overline{AB} =$	$\overline{MR} =$
$\overline{HI} =$	$\overline{FE} =$	$\overline{NO} =$
$\overline{JI} =$	$\overline{DE} =$	$\overline{PO} =$
$\overline{JK} =$	$\overline{DC} =$	$\overline{PQ} =$
$\overline{LK} =$	$\overline{BC} =$	$\overline{RQ} =$

Utiliza la información recabada para responder lo que se te pide.

1. Si se compara la longitud del lado $\overline{AF}$ con la del lado $\overline{GH}$, esta ¿aumenta?, ¿disminuye?, de ser así en ¿qué cantidad lo hace?

   ____

   ____

2. ¿Cómo describirías la relación entre la longitud del lado $\overline{FE}$ y el lado $\overline{HI}$?

   ____

   ____

3. Si continúas comparando las longitudes de los lados correspondientes entre el predio **Y** y **X** ¿qué se podría concluir en términos de las longitudes de estos predios?

   ____

   ____

Establece la siguiente relación: si se divide la longitud del lado $\overline{GH}$ entre la longitud del lado $\overline{AF}$ ¿qué cantidad se obtiene como resultado?, realiza este procedimiento para todos los lados respectivos de los predios **X** e **Y** para completar la tabla

$\frac{\text{Lados de Y}}{\text{Lados de X}}$

$\frac{\text{Lados de } X}{\text{Lados de } Y}$
$\frac{\overline{GH}}{\overline{AF}} =$
$\frac{\overline{}}{\overline{FE}} = \frac{4}{2} = 2$
$\frac{\overline{IJ}}{} = \frac{}{2} =$
$\frac{\overline{JK}}{} = \frac{2}{} =$
$\frac{AD}{AD} =$
$\frac{AD}{AD} = \frac{6}{3} =$

$\frac{\text{Lados de Z}}{\text{Lados de X}}$

De acuerdo con lo anterior, responde si ¿tu respuesta a la pregunta 3, puede confirmarse con los datos que obtuviste en la tabla? En cualquier caso, justifica tu respuesta.

Ahora determina la relación existente entre las longitudes de los lados de los predios **X** con **Z**, asimismo para los predios **X** con **Y,** para responder las siguientes preguntas.

4. ¿Qué relación observas entre las longitudes del predio **X** con el predio **Z**?, ¿aumentan?, ¿disminuyen?, ¿en qué cantidad lo hacen?

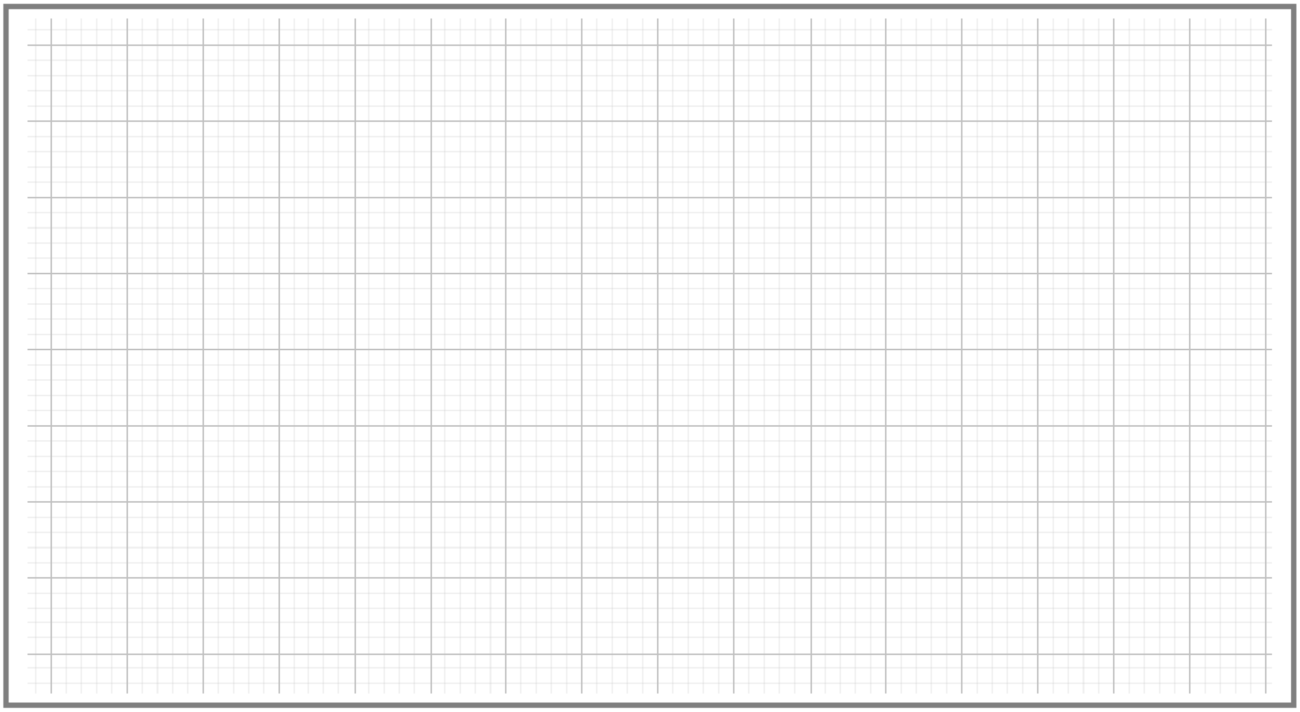
5. ¿Cuál es la cantidad que permite obtener las medidas del predio **Y** a partir de las del predio **X**? ______________________

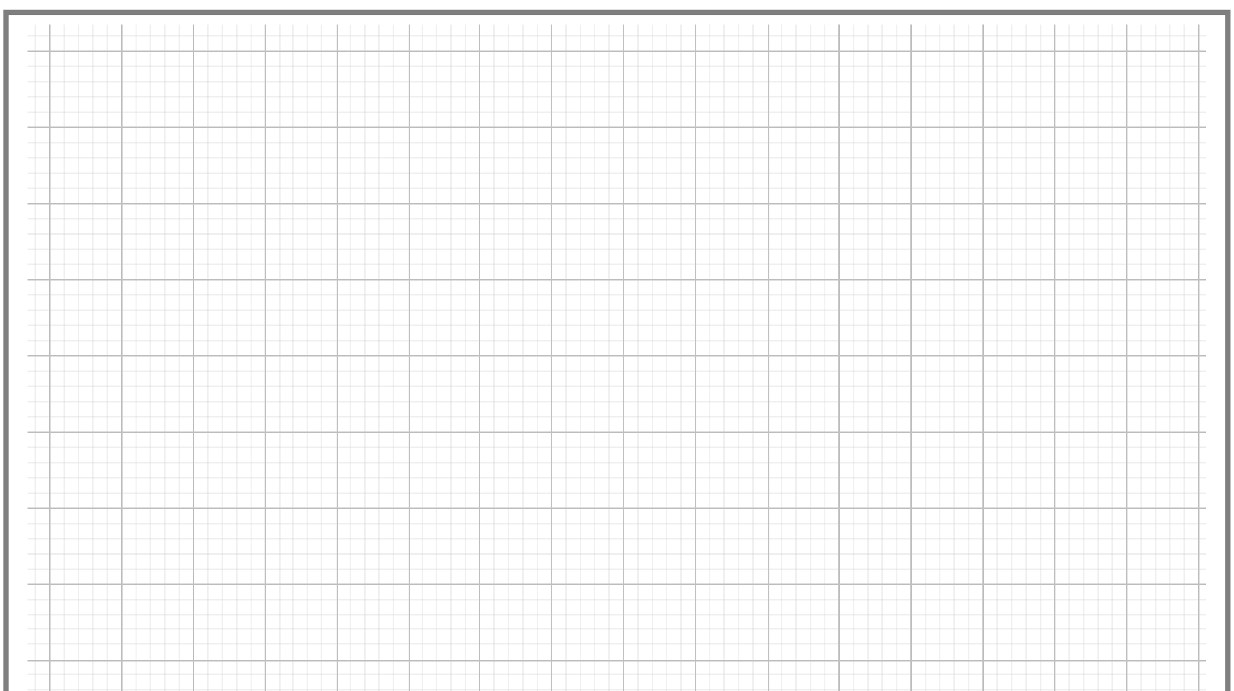
Actividad 2

El dueño del fraccionamiento recibe la información de que los compradores descartan inmediatamente el predio de gama alta (**X**), por considerarlo muy caro, y al de gama baja (**Z**) por ser muy pequeño. Los consumidores han manifestado que si el predio **Y** fuera un poco mayor podrían considerar su compra. De acuerdo con la política del ayuntamiento el fraccionamiento solo puede realizar cambios en el tamaño de los predios siempre y cuando se mantengan las relaciones entre los lados.

En parejas realicen **una propuesta** para modificar la escala del predio **Y** de modo que la longitud de sus lados se aumente lo “suficiente” para que los consumidores opten por su compra. Señala las cantidades que te permiten asegurar que la forma del predio se conserva.

Pueden apoyarse del espacio cuadriculado de trabajo para realizar su propuesta.





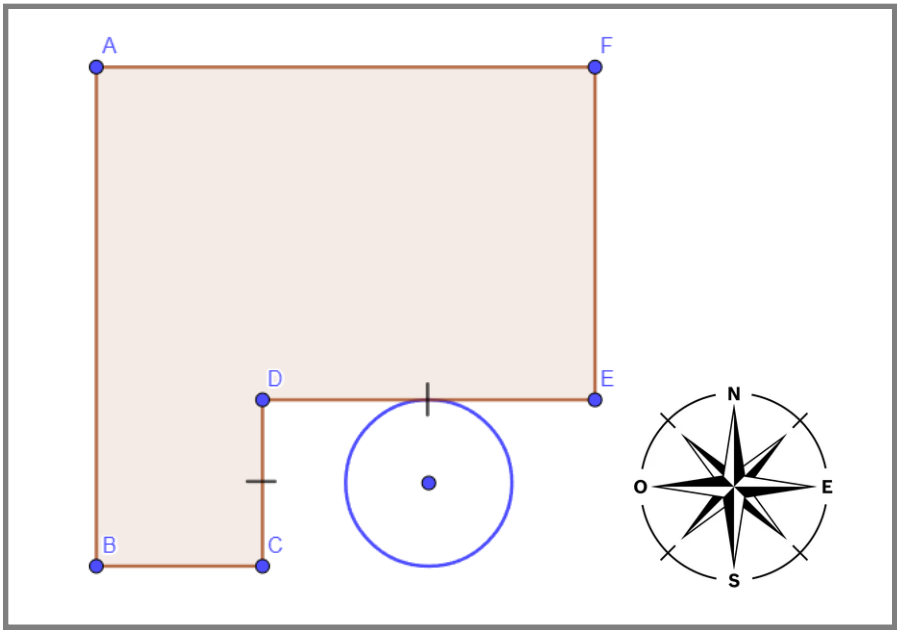
Anoten en la siguiente tabla las relaciones entre el predio original **Y** y las que propusieron para constatar si se mantiene la relación de sus lados y en ¿cuánto lo hacen?

Propuesta 1	Espacio de trabajo
$\dfrac{\textbf{Lados del lote propuesto}}{\textbf{Lados del lote Y}}$	

En grupo presenten sus propuestas y realicen la elección de una de ellas. Una vez seleccionada continúen con la actividad 3.

Actividad 3

Supongan que el dueño del fraccionamiento consigue que la propuesta presentada por el grupo sea aceptada por las autoridades del ayuntamiento con la condición de incluir un área verde en cada predio. El dueño piensa colocar una jardinera con forma de circunferencia en el lado *Sur* ya que considera que elegir formas llamativas pueden incrementar el interés de los compradores (ver imagen).



En parejas realicen lo siguiente:

1. Calculen el perímetro de la jardinera circular usando las medidas del predio seleccionado por el grupo. Consideren que los segmentos en color negro representan los puntos medios de los lados señalados.

Si el dueño planea evaluar la viabilidad de un predio residencial aumentando en un factor de 2 las longitudes del predio propuesto ¿cuánto aumentará el perímetro de la jardinera? Expliquen su respuesta.

Actividad 4

Ahora, calcula los perímetros de los tres predios (X, Y e Z) y el predio propuesto por el grupo.

1. ¿Qué pasa con el perímetro de un predio cualquiera cuando se modifica la relación entre la longitud de sus lados por una cantidad específica?

2. ¿Qué sucederá con el perímetro de la jardinera circular cuando se modifica a escala del predio?

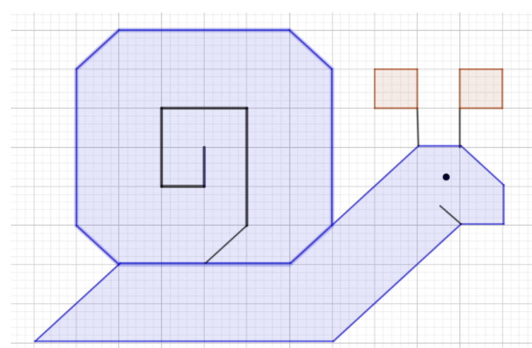
3. ¿El perímetro de las figuras geométricas es una relación de proporcionalidad?

Sesión 4

¡No todo es lo que parece!

Propósito: Identificar como varía el área de una figura cuando sus dimensiones crecen o disminuyen proporcionalmente.

En la sesión anterior comparaste los lados correspondientes de dos figuras geométricas. Recordaste que el perímetro de una figura se comporta de manera proporcional, es decir, el perímetro de una figura que aumenta o disminuye sus dimensiones, también aumenta o disminuye su perímetro respectivamente.



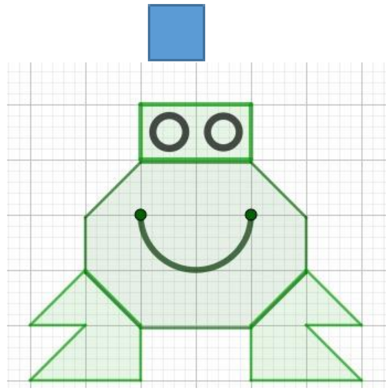
En las sesiones anteriores viste el problema de la casa constructora. Tiene tres modelos de terreno para construir una casa. Si un cliente pide el doble de las dimensiones del lote, ¿el área aumenta al doble? Y si pide el triple de sus dimensiones, ¿el área aumenta al triple?

Las siguientes actividades te ayudarán a contestar estas preguntas.

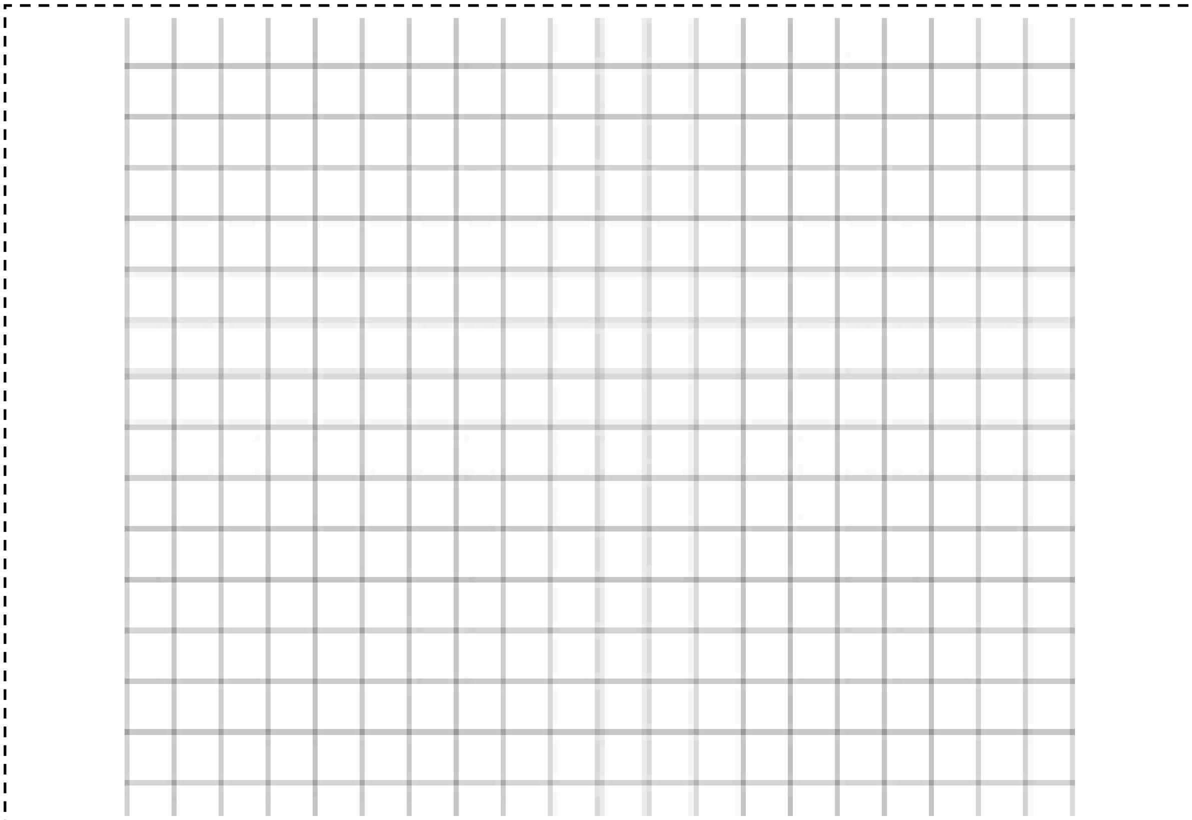
Actividad 1

Observa con mucha atención la siguiente imagen. Considera cada uno de los cuadros marcados como una unidad cuadrada, es decir, el área de cada cuadrito es una unidad cuadrada.

$1\ U^2$



1. ¿Cuántas unidades cuadradas ocupa la imagen de la rana? ___________ U^2
2. Ahora en la siguiente cuadrícula construye la misma imagen duplicando las dimensiones y después triplicando las dimensiones originales.



Con base en las imágenes construidas contesta lo siguiente contando los cuadritos correspondientes:

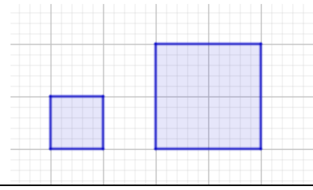
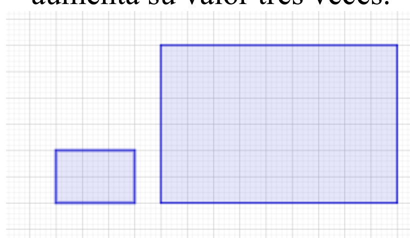
3.- ¿Cuántas unidades cuadradas contiene la imagen cuando duplicas las dimensiones? ____________U^2

4.- Al duplicar las dimensiones, ¿cuántas veces aumenta el número de unidades cuadradas? ___________ veces.

5.- ¿Cuántas unidades cuadradas contiene la imagen cuando triplicas las dimensiones? ________________ U^2

6.- Al triplicar las dimensiones, ¿cuántas veces aumenta el número de unidades cuadradas? ___________ veces.

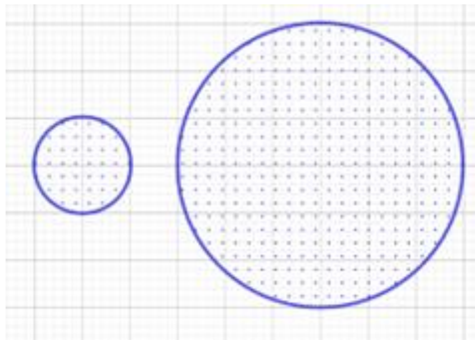
7.- Contesta verdadero o falso en cada una de las siguientes afirmaciones. Justifica tu respuesta.

AFIRMACIONES	F	V
Si una figura aumenta sus dimensiones al doble, entonces el área aumenta su valor al doble. 		
Porque		
Si una figura aumenta sus dimensiones al doble, entonces el área aumenta su valor cuatro veces.		
Porque		
Si una figura aumenta sus dimensiones al triple, entonces el área aumenta su valor tres veces. 		
Porque		
Si una figura aumenta sus dimensiones al triple, entonces el área aumenta su valor cuatro veces.		
Porque		
Si una figura aumenta al triple sus dimensiones, entonces el área aumenta nueve veces su valor.		
Porque		
Al doble de dimensiones le corresponde el doble de área y al triple de dimensiones le corresponde el triple de área.		
Porque		

Actividad 2

Resuelve el siguiente problema:

Se necesitan aproximadamente 300 gramos de semilla de flor para sembrar en un jardín circular de 2 metros de diámetro, ¿Cuántos gramos de semilla se necesitan para sembrar la misma flor en un jardín circular de un parque que mide 6 metros de diámetro?



Diámetro = 2 m Diámetro = 6 m

1.- En el siguiente espacio calcula el área del jardín circular de 2 m de diámetro, toma el valor de $\pi = 3.14$. Recuerda que el área se calcula con la fórmula $A = \pi r^2$

2.- En el siguiente espacio calcula el área del jardín circular de 6 m de diámetro.

3.- ¿Cuántas veces cabe el área del círculo pequeño en el círculo grande? _______________

4.- Para saber cuántos gramos de semilla se ocupan en el círculo mayor, ¿por cuánto debo multiplicar la cantidad a sembrar del círculo menor? _______________

5.- ¿Cuántos gramos de semilla se ocuparán para sembrar en el círculo mayor? _______________________________

Recuerda que este problema lo resolviste con anterioridad. ¿Tus respuestas coinciden? Compáralas y redacta una reflexión sobre lo que aprendiste en esta sesión, toma en cuenta las dimensiones de la figura y el área correspondiente para escribir tu texto.
____

____

____

Ahora sí estás listo para contestar las preguntas iniciales.

6.- Si una constructora tiene tres modelos de terreno para construir una casa, y un cliente pide el doble de las dimensiones del lote. ¿Tendrá el doble de área? (argumenta tu respuesta).

____

____

Y si pide el triple de sus dimensiones, ¿tendrá el triple de su área?

____

____

Sesión 5

¿Qué sucede con el volumen?

Propósito: Identificar cómo varía el volumen de un cuerpo geométrico cuando las dimensiones crecen o disminuyen.

En la sesión anterior observaste lo que sucede cuando duplicas y triplicas la figura de la rana, con base en eso identificaste las unidades cuadradas que componen a la figura más grande y la comparaste con la más pequeña. Después calculaste los gramos de semilla de flor que se van a utilizar en el jardín más grande, lo comparaste con el jardín pequeño para poder terminar esa actividad. Al final de la sesión anterior concluiste que el área no aumenta de manera proporcional para todas las figuras geométricas.

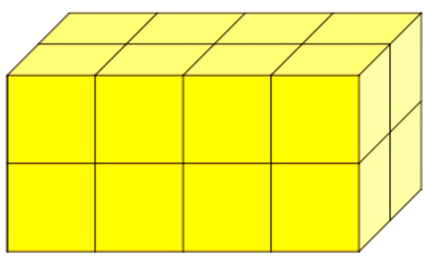
Ahora vamos a trabajar actividades para conocer cómo se comporta el volumen cuando aumentamos o disminuimos las dimensiones.

Actividad 1

Recordatorio. Una unidad cúbica es una unidad multiplicada por sí misma 3 veces.

Recordatorio. El centímetro cúbico es una unidad que se usa para medir el volumen de los cuerpos geométricos, se simboliza como cm^3.

1. Observa la figura. Considera que cada cubito es una unidad cúbica, es decir, el volumen de cada cubito es una unidad cúbica.



   a) ¿Cuánto mide el largo del cuerpo geométrico? ___________cm
   b) ¿Cuánto mide a lo ancho? ______________cm
   c) ¿Cuánto mide a lo alto? ________________cm
   d) ¿Cuántas unidades cúbicas son en total? ________________U^3

2. Si duplicas el largo del cuerpo geométrico. ¿Cuántas unidades cúbicas son en total? _________________ U^3
3. Si duplicas el ancho, ¿cuántas unidades cúbicas son en total? ______________ U^3

4. Cuando duplicas el ancho, largo y altura, ¿el volumen se duplica? _______.
   Explica tu respuesta. ____
   ____
   ____

5. Al duplicar las dimensiones del ancho, largo y altura, ¿cuántas veces aumenta el número de unidades cúbicas? _______________ veces.

6. ¿El volumen aumenta al doble cuando duplicas las dimensiones? _______.
   Explica tu respuesta.
   ____
   ____

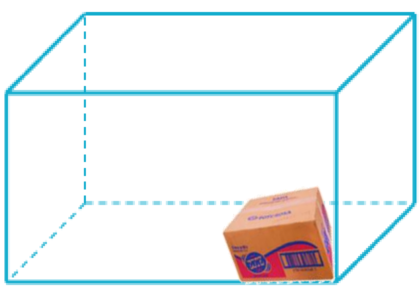
7. Al triplicar las dimensiones del cuerpo geométrico, ¿cuántas unidades cúbicas son en total?
   _________________ U^3

8. Al triplicar las dimensiones del ancho, largo y altura, ¿cuántas veces aumenta el número de unidades cúbicas? ____________ veces.

9. ¿El volumen aumenta al triple cuando triplicas todas las dimensiones? _______.
   Explica tu respuesta.
   ____
   ____

Actividad 2

En una bodega de dimensiones 4 metros de largo, 3 metros de ancho y 2 metros de alto se quieren almacenar cajas de jabón. Se sabe que se pueden almacenar 1200 cajas.



Recordatorio: para calcular volúmenes de prismas rectangulares se multiplica largo por ancho por altura.

1. En el siguiente espacio calcula el volumen de la bodega y calcula el volumen de la bodega si duplicas las dimensiones.

2. El volumen de la bodega pequeña es: ____________m^3
3. El volumen de la bodega grande es: _____________m^3
4. ¿Cuántas veces es más grande el volumen de la bodega grande respecto a la bodega pequeña? ___________________________.

5. ¿El volumen de la bodega grande es el doble de la pequeña? Justifica tu respuesta. ____
____

6. Cuando duplicas el volumen de la bodega, ¿se duplica la cantidad de cajas de jabón? ______. Utiliza el espacio para realizar cálculos y justificar tu respuesta.

7. ¿Cuántas cajas se pueden almacenar en la bodega más grande? _______ cajas.

Actividad 3

Contesta las preguntas y realiza los cálculos para justificar tus respuestas.

1. Eduardo tiene un dado cuya arista (lado) mide 2 cm. ¿Cuál es el volumen del dado? ______ cm^3
2. Si disminuyes a la mitad el lado del dado, ¿cuál es el volumen del nuevo dado? _______ cm^3

3. Si duplicas el lado del dado pequeño, ¿cuál es el volumen? __________ cm^3

4. Compara tus respuestas de los volúmenes que obtuviste de la pregunta 2 y 3. ¿Cómo fueron esos resultados? ________________
5. Si duplicas la arista del dado de 2 cm, ¿Cuál es su volumen?

6. Cuando duplicaste la arista, ¿el volumen fue el doble? _____ ¿Por qué?

7. Cuando disminuiste a la mitad la arista, ¿el volumen fue la mitad? _____. Explica tu respuesta. ______________________________

8. Si triplicas la arista, ¿el volumen es el triple? Explica tu respuesta.

9. Coloca una reflexión de lo que aprendiste del volumen cuando disminuyes o aumentas las dimensiones de un cuerpo.

Anexo B

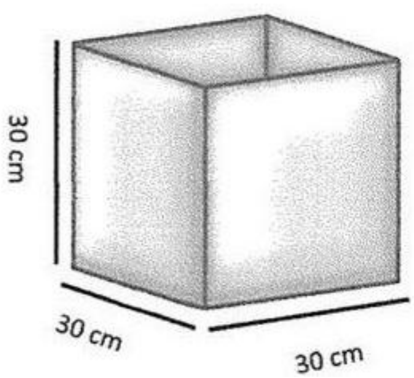
Evaluación diagnóstica

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

Nombre: ____

2do. Semestre Grupo: _______ Edad: _____________

Pregunta	Procedimiento
1. Una persona tarda 40 minutos en fumigar una parcela en forma de cuadrado cuyos lados miden 20 metros. ¿Cuántos minutos tardará en fumigar una parcela con forma cuadrada y lados de 40 metros?	
2. Marta y Luisa son corredoras que corren igual de rápido, pero Marta comenzó a correr después de Luisa. Cuando Marta ha dado 1 vuelta a la pista, Luisa ha recorrido 3 vueltas. Si Marta diera 4 vueltas ¿cuántas habrá dado Luisa?	
3. Si una persona se come 2 hamburguesas en 15 minutos, ¿cuántas hamburguesas se puede comer en 150 minutos?	
4. Si sabemos que al pintar dos figuras de yeso del mismo tamaño se secan totalmente en 5 minutos, ¿en cuánto tiempo se secarían 4 figuras de yeso de igual tamaño que las anteriores?	

5. Para celebrar el día de la bandera, la maestra le pidió a Pablo un dibujo de ésta. El joven trazó su bandera de 50 cm de altura y 80 cm de ancho, y necesitó 200 ml de pintura. Después la maestra le pide una versión más pequeña de la misma para hacer gafetes de 5 cm de altura y 8 cm de ancho. ¿Cuánta pintura necesitará para cada gafete?	
6. Se necesitan aproximadamente 200 gramos de semilla de flor para sembrar en un jardín circular de 5 m de diámetro. ¿Cuántos gramos de semilla se necesitan para sembrar la misma flor en un jardín circular de 10 m de diámetro?	
7. Efraín tiene un dado pequeño de 1 cm de arista, el cual tiene como volumen 1 cm^3. Si triplicamos la arista del dado, ¿cuál será el volumen del nuevo dado?	
8. Angélica tiene una caja en forma de cubo para guardar pelotas. La caja tiene como arista 30 cm y le caben 20 pelotas. ¿Cuántas pelotas cabrán en otra caja con el doble de arista? 	

Anexo C

Evaluación final

EVALUACIÓN FINAL

Nombre: ____

2do. Semestre   Grupo: _______   Edad: _____________

Pregunta	Procedimiento
1. Una persona tarda 50 minutos en fumigar una parcela en forma de cuadrado cuyos lados miden 30 metros. ¿Cuántos minutos tardará en fumigar una parcela con forma cuadrada y lados de 60 metros?	
2. Carlos y Luis son corredores que corren igual de rápido, pero Carlos comenzó a correr después de Luis. Cuando Carlos ha dado 2 vueltas a la pista, Luis ha recorrido 4 vueltas. Si Carlos diera 4 vueltas ¿cuántas habrá dado Luis?	
3. Si una persona se come 3 cemitas en 20 minutos, ¿cuántas cemitas se puede comer en 160 minutos?	
4. Si sabemos que al pintar tres figuras de yeso del mismo tamaño se secan totalmente en 6 minutos, ¿en cuánto tiempo se secarían 6 figuras de yeso de igual tamaño que las anteriores?	

5. Para celebrar el día de la bandera, la maestra le pidió a Pablo un dibujo de ésta. El joven trazó su bandera de 50 cm de altura y 80 cm de ancho, y necesitó 300 ml de pintura. Después la maestra le pide una versión más pequeña de la misma para hacer gafetes de 5 cm de altura y 8 cm de ancho. ¿Cuánta pintura necesitará para cada gafete?	
6. Se necesitan aproximadamente 200 gramos de semilla de flor para sembrar en un jardín circular de 4 m de diámetro. ¿Cuántos gramos de semilla se necesitan para sembrar la misma flor en un jardín circular de 8 m de diámetro?	
7. Efraín tiene un dado pequeño de 2 cm de arista, el cual tiene como volumen 8 cm^3. Si duplicamos la arista del dado, ¿cuál será el volumen del nuevo dado?	
8. Angélica tiene una caja en forma de cubo para guardar pelotas. La caja tiene como arista 30 cm y le caben 30 pelotas. ¿Cuántas pelotas cabrán en otra caja con el doble de arista?