



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

---

Cálculo y análisis estadístico de los ángulos de mezcla de  
neutrinos en el THDM-III

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**LICENCIADO EN FÍSICA**

por

Moisés Zeleny Mora

asesorado por

Dr. José Enrique Barradas Guevara (FCFM-BUAP, México)

Dr. Félix Francisco González Canales (IFIC CSIC-UV, España)

Puebla Pue.  
Diciembre 2015



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>IX</b>
<b>Dedicatoria</b>	<b>XI</b>
<b>Resumen</b>	<b>XIII</b>
<b>Introducción</b>	<b>XV</b>
<b>1. Sobre neutrinos</b>	<b>1</b>
1.1. Una nueva partícula . . . . .	1
1.1.1. Modelo Estándar y el neutrino . . . . .	2
1.1.2. Otros procesos donde surgen los neutrinos . . . . .	3
1.2. Clasificación de neutrinos . . . . .	4
1.3. Neutrinos Solares . . . . .	5
1.3.1. Espectro de los neutrinos solares . . . . .	5
1.3.2. El problema de los neutrinos solares . . . . .	6
1.4. Oscilaciones de neutrinos . . . . .	7
1.5. Detección de neutrinos . . . . .	10
1.6. El experimento Super-K . . . . .	12
<b>2. Los neutrinos y THDM-III</b>	<b>17</b>
2.1. Términos de masa para el neutrino . . . . .	17
2.1.1. Término de masa de Dirac . . . . .	18
2.1.2. Término de Masa de Majorana . . . . .	19
2.1.3. Término de masa Dirac-Majorana . . . . .	21
2.2. Mecanismo See-Saw . . . . .	22
2.3. El Modelo de Dos Dobletes de Higgs . . . . .	23
2.3.1. El potencial del THDM-III . . . . .	24
2.4. El sector de Yukawa de THDM-III . . . . .	26
2.5. La conexión entre los neutrinos y THDM-III . . . . .	26
<b>3. Matrices de Masa y Mezcla de Neutrinos</b>	<b>29</b>
3.1. Factorización de fases y reparametrización de las matrices de masa . . . . .	29
3.2. Jerarquía de masa . . . . .	32
3.2.1. Jerarquía normal . . . . .	32
3.2.2. Jerarquía invertida . . . . .	35
3.3. Diagonalización de matrices de masa . . . . .	37
3.4. La matriz $\mathbf{V}_{PMNS}$ . . . . .	38
3.4.1. Matriz $\mathbf{V}_{PMNS}$ jerarquía normal . . . . .	39
3.4.2. Matriz $\mathbf{V}_{PMNS}$ jerarquía invertida . . . . .	40

<b>4. Implicaciones fenomenológicas</b>	<b>43</b>
4.1. Cotas sobre las masas de los neutrinos . . . . .	43
4.2. Matriz y ángulos de mezcla del sabor leptónico . . . . .	45
4.3. Análisis de verosimilitud $\chi^2$ . . . . .	46
4.3.1. Resultados . . . . .	47
<b>5. Conclusiones</b>	<b>51</b>
<b>A. EL operador de conjugación de carga <math>C</math></b>	<b>53</b>
<b>B. Minimizando una función con Mathematica</b>	<b>55</b>
B.1. La función NMinimize . . . . .	55
B.2. El método Nelder-Mead . . . . .	55
<b>C. Análisis de verosimilitud <math>\chi^2</math></b>	<b>57</b>
C.1. Distribución de $\chi^2$ inversa . . . . .	58
C.2. Ajuste de $\chi^2$ . . . . .	59
<b>Bibliografía</b>	<b>61</b>

# Índice de figuras

1.1. Modelo Estándar de partículas elementales. . . . .	2
1.2. Diagramas de Feynman para las desintegraciones $\beta^+$ y $\beta^-$ . . . . .	4
1.3. Diagramas de Feynman para las desintegraciones $\beta$ inversa y captura electrónica. . . . .	4
1.4. Espectro de los neutrinos solares. . . . .	6
1.5. Esta imagen muestra la probabilidad de encontrar cada tipo de neutrino con $\nu_e$ en el estado inicial. . . . .	11
1.6. Esquema del método para la detección del neutrino en que se basaron Reines, Cowan y colaboradores. . . . .	12
1.7. Interior del detector Super-Kamiokande en Japon. . . . .	13
4.1. Masas de los neutrinos en función de $m_{\nu_3}$ para una jerarquía normal. Para los parámetros de oscilación $\Delta m_{ij}^2$ , la línea roja discontinua representa el BFP, la línea verde continua representa el rango de $\text{BFP} \pm 1\sigma$ , la línea café discontinua representa el rango de $2\sigma$ y la línea azul continua representa el rango de $3\sigma$ . . . . .	44
4.2. Masas de los neutrinos en función de $m_{\nu_2}$ para una jerarquía normal. Para los parámetros de oscilación $\Delta m_{ij}^2$ , la línea roja discontinua representa el BFP, la línea verde continua representa el rango de $\text{BFP} \pm 1\sigma$ , la línea café discontinua representa el rango de $2\sigma$ y la línea azul continua representa el rango de $3\sigma$ . . . . .	45
4.3. Para la jerarquía normal. En el panel de la izquierda mostramos las regiones de aceptación de los parámetros $\delta_l$ y $\delta_\nu$ a 95 % de N. C. La zona verde representa la región a $1\sigma$ , la zona naranja representa la región a $2\sigma$ 's y finalmente el punto amarillo representa el mejor punto de ajuste en el espacio bidimensional $\delta_l$ y $\delta_\nu$ , tomado de la Tabla 4.4. En el panel de la derecha, mostramos las regiones de aceptación de los parámetros $\delta_l$ y $\delta_\nu$ a $1\sigma$ con un 95 % de N.C. mostrada como un mapa de calor. . . . .	48
4.4. En los paneles de la izquierda se muestra la curva descrita por $\sin^2 \theta_{ij}^{\text{th}}$ cuando solo depende de $\delta_l$ . En los paneles de la derecha se muestra la curva descrita por $\sin^2 \theta_{ij}^{\text{th}}$ cuando solo depende de $\delta_\nu$ . Las líneas son las cotas experimentales de $\sin^2 \theta_{ij}^{\text{exp}}$ a $1\sigma$ . . . . .	49
B.1. Esta imagen muestra un ejemplo del funcionamiento del comando NMinimize, usando la función $x^2 - (y-1)^2$ y la restricción $x^2 + y^2 \leq 4$ . En el <i>output</i> , el primer número representa el mínimo valor que alcanza la función y los siguientes números son los valores de $x$ y $y$ que permiten alcanzar el valor mínimo . . . . .	56
C.1. Gráfica de la función de densidad correspondiente a $\chi_k^2$ para distintos grados de libertad $k = 1, 2, 3$ . . . . .	57
C.2. Gráfica de la distribución de probabilidad acumulativa correspondiente a $\chi_k^2$ para distintos grados de libertad $k = 1, 2, 3$ . . . . .	58



# Índice de tablas

1.1. Experimentos de neutrinos. . . . .	5
1.2. Se muestran los experimentos en búsqueda de neutrinos, experimentos en funcionamiento y proyectos futuros. . . . .	15
4.1. Cotas teóricas para las masas de los neutrinos pesados, los parámetros de oscilación están dados en los rangos numéricos $\text{BFP} \pm 1\sigma$ , $2\sigma$ y $3\sigma$ . . . . .	44
4.2. Resultados experimentales de los ángulos de mezcla en el rango a 1, 2 y $3\sigma$ . . . . .	47
4.3. Masas de los leptones cargados. . . . .	47
4.4. Tabla que muestra el BFP que minimiza a la función estimadora $\chi^2$ . En la última fila se muestra el valor mínimo que alcanza la función. . . . .	48
C.1. Valores numéricos de la distribución de probabilidad acumulativa correspondiente a la distribución $\chi^2$ . En esta tabla se presentan los grados de libertad en la primera fila y los valores de $x$ en la primera columna. . . . .	58
C.2. Tabla con los valores $x$ para los correspondientes a $k$ y $p$ que cumplen con la condición (C.4), donde los grados de libertad $k$ se encuentran en la primera columna y los valores de $p$ en la primera fila . . . . .	58



# Agradecimientos

A la Dra. Olga Félix Beltrán por compartir su conocimiento, tiempo y esfuerzo, también por la confianza que impregna en cada uno de sus estudiantes.

A al Dr. José Enrique Barradas Guevara y al Dr. Felix Gonzalez Canalez por sus atinados consejos y enseñanzas.

A los doctores Alfonso Rosado Sánchez, Luz Adriana Cordero Cid, y Mercedes Paulina Velázquez Quesada por su amabilidad, accesibilidad y acertadas preguntas.

A la VIEP-BUAP por brindarme su apoyo económico a través de la beca otorgada FEBO-ING15-I.

A la FCFM-BUAP por acogerme durante estos años.



# Dedicatoria

A mi madre Rogelia Mora, quien  
ha depositado en mi su confianza y amor.

A mi novia Karina Gonzalez,  
por su apoyo incondicional, comprensión y paciencia.

A mi tía Laura Patricia Zeleny y abuela Matilde Guarneros,  
por permitirme entrar a su hogar.

A todos mis amigos con quienes he compartido esplendidos días.



# Resumen

En este trabajo presentamos el análisis numérico de la matriz y ángulos de mezcla de los neutrinos en el modelo de Dos Dobleces de Higgs tipo III (THDM-III), considerando una textura de Yukawa de dos ceros. La matriz de masa de los neutrinos se construye considerando el modelo híbrido y el mecanismo see-saw tipo I. Además, se calcula la matriz  $V_{PMNS}$  y las expresiones de los ángulos de mezcla en función de las masas de los neutrinos y leptones cargados. Finalmente, se presenta la exploración del espacio de parámetros con base en los datos experimentales actuales realizando un ajuste de  $\chi^2$ .



# Introducción

La teoría de las interacciones fuerte, débil y electromagnética, conocida como el Modelo Estándar (SM, por sus siglas en inglés), es una teoría cuántica del campo basada en el grupo de norma  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ . Este provee una estructura teórica elegante y ha pasado exitosamente pruebas experimentales muy precisas [1, 2, 3]. El contenido de partículas de materia en el modelo puede dividirse en los sectores *fermiónico* y *bosónico*.

El sector fermiónico incluye a los quarks y leptones, los cuales se organizan en tres generaciones o familias con propiedades idénticas, excepto en la masa. En esta teoría las interacciones fuertes son descritas por el grupo de norma  $SU(3)_C$ , mientras que  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  representa a las interacciones electrodébiles, recibiendo por ello el nombre de grupo electrodébil. Dicho grupo es roto espontáneamente a la escala de Fermi ( $v = 246$  GeV) al grupo electromagnético  $U_{em}(1)$ , conocido como el rompimiento espontáneo de la simetría (SSB, por sus siglas en inglés). Cuando el SSB se realiza, tres de los cuatro bosones de norma asociados con este grupo adquieren masa, en tanto que el restante, que permanece sin masa, se identifica con el campo electromagnético.

Por otra parte, el sector bosónico incluye a los *bosones de norma*, identificados como  $W^\pm$  y  $Z^0$  asociados a la simetría electrodébil;  $g$ , los gluones asociados a la simetría fuerte; y  $\gamma$  asociado a la simetría electromagnética. El hecho de que los bosones de norma débiles son partículas masivas indica que  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  no es una buena simetría del vacío; en contraste, el que el fotón no tenga masa indica que  $U(1)_{em}$  sí es una buena simetría del vacío. Entonces, el patrón de Rompimiento Espontáneo de Simetría (SSB, por sus siglas en inglés) en el SM debe ser:  $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow SU(3)_C \otimes U(1)_{em}$ .

En este contexto, el sabor y la generación de masas son dos conceptos que se encuentran fuertemente entrelazados. Para conocer una dinámica del sabor en modelos más allá del SM necesitamos entender muy bien cómo surgen las masas de las partículas fermiónicas y la matriz de mezcla de sabor en la teoría estándar. En esta teoría, las matrices de Yukawa son de gran interés, ya que sus valores propios definen las masas de los fermiones. Por otra parte, las corrientes que cambian sabor surgen de la no diagonalización simultánea de las matrices de Yukawa y los acoplamientos del bosón de Higgs. En particular, nosotros estudiaremos la dinámica del sabor a través de las matrices de Yukawa en el Modelo de Dos Dobletes de Higgs tipo III (THDM-III, por sus siglas en inglés). En THDM-III surgen procesos con violación de sabor mediados por los bosones de Higgs, esto es, se permite la aparición de Corrientes Neutras que Cambian Sabor (FCNC, por sus siglas en inglés) mediadas por los bosones de Higgs. Los procesos resultantes son de gran interés para la comunidad científica porque ofrecen la posibilidad de buscar nueva física en futuros aceleradores.

Este patrón se implementa en el SM en términos del llamado Mecanismo de Higgs, el cual provee las masas propias a los bosones de norma  $W^\pm$  y  $Z^0$ , así como a los fermiones, dejando como consecuencia la predicción de una nueva partícula: el bosón de Higgs. Este bosón debe ser un escalar, eléctricamente neutro y su masa debe ser del orden de la escala electrodébil [4, 5]. El 04 de julio de 2012 los experimentos ATLAS y CMS del CERN anunciaron el descubrimiento de una partícula escalar en la región de masa alrededor de 125 GeV que muy posiblemente sea el bosón de Higgs del SM [6]. Para lograr una prueba convincente de la existencia de los modelos más allá del SM se necesita encontrar el espectro completo de escalares, incluyendo a los bosones más pesados  $H^0$  o  $A^0$  (en el caso del modelo con dos dobletes), ya que el bosón ligero  $h^0$  sería parecido al bosón de Higgs del SM [7]. La posible detección del decaimiento

del bosón de Higgs a fermiones ya se ha considerado en colisionadores hadrónicos [8], colisionadores de muones [9] y colisionadores lineales  $e^+e^-$  [10]. Como el sector de Higgs del SM permanece desconocido, no hay razón fundamental para suponer que dicho sector sea mínimo (un solo doblete). Además, el SM presenta el problema de jerarquías, es decir, el SM está caracterizado por una escala de energías de 100 GeV, mucho menor que la escala de Planck ( $M_{Pl} = 10^{14}$  GeV), por lo que deberíamos tener una teoría más general en la que el SM esté incluido. En general, es posible extender el SM de dos maneras: añadiendo campos de Higgs o añadiendo otra simetría. La extensión más sencilla compatible con la invariancia de norma del SM es el THDM, que consiste en agregar un segundo doblete de Higgs con los mismos números cuánticos que el primero [11]. La versión del THDM tipo III es particularmente atractiva porque:

- Es una extensión del modelo mínimo con una fenomenología interesante; de las extensiones mínimas es la que añade la menor cantidad de nuevos parámetros arbitrarios.
- Satisface las restricciones teóricas.
- Se requiere una estructura de Higgs de este tipo para los modelos supersimétricos de “bajas energías”.

Otra motivación para introducir un segundo doblete viene de la jerarquía de los acoplamientos en la tercera generación de quarks. El cociente de las masas del quark *top* y el quark *bottom* es del orden de  $m_t/m_b \approx 174/5 \sim 40$ . En el SM las masas de estos quarks vienen del mismo doblete, lo que implica una jerarquía no natural entre sus correspondientes acoplamientos. Sin embargo, si el quark *bottom* recibe su masa de un doblete y el quark *top* de otro, la jerarquía de los acoplamientos de Yukawa parece más natural. Se han estudiado varias versiones del THDM en la literatura. Algunos modelos, conocidos como THDM-I (solo un doblete se acopla a los fermiones) y THDM-II (un doblete se acopla a los quarks de tipo *u* y neutrinos, y el otro a los de tipo *d*), incluyen la conservación natural del sabor; y otros modelos como el THDM-III (los dos dobletes se acoplan a todos los fermiones) permiten la presencia FCNC [12, 13]. La diferencia entre estos modelos está en la estructura de Yukawa y las simetrías del sector de Higgs, así como en la posible aparición de nuevas fuentes de violación de CP. Esta violación de CP puede surgir de la misma fase que aparece en la matriz de Cabibbo-Kobayashi, al igual que en el ME, o de alguna fase extra que surge en el sector de Yukawa o del potencial de Higgs, ya sea en forma explícita (algunos parámetros del potencial de Higgs son complejos) o espontánea (en donde el valor de expectación de vacío es complejo). En esta tesis el potencial de Higgs conserva la simetría CP y la violación de CP se incluye mediante los acoplamientos de Yukawa suponiendo que las matrices de Yukawa no son hermiticas. El THDM predice tres estados neutros y un par de estados cargados. Cuando hay conservación de CP los estados neutros son  $h^0$ ,  $H^0$  y  $A^0$ ; si hay violación de CP los estados neutros son  $H_1^0$ ,  $H_2^0$  y  $H_3^0$ . Los estados cargados, en general, se denotan como  $H^\pm$  [14]. En el marco del THDM, los acoplamientos de los bosones de Higgs con fermiones están dados como [12]:

$$\mathcal{L}_Y = \bar{f}_j(S_{aij} + \gamma^5 P_{aij})f_j H_a^0.$$

En el THDM-III, las FCNC se mantienen bajo control imponiendo una cierta forma de las matrices de Yukawa que reproducen las masas observadas de los fermiones y los ángulos de mezcla [15]. Este modelo más general permite una fenomenología más rica con términos extra que surgen de los acoplamientos de Yukawa, y que están presentes a nivel árbol. El uso de las formas de textura permite establecer una relación directa de los elementos de la matriz de Yukawa con los parámetros de mezcla que se usan al calcular los anchos de decaimiento y la sección eficaz sin perder los términos proporcionales a las masas de los fermiones ligeros. Específicamente, considerando una matriz de Yukawa con textura de cuatro ceros se obtiene el ansatz de Cheng-Sher para los acoplamientos de mezcla de sabor que se usa ampliamente en la literatura, en donde los acoplamientos de cambio de sabor se consideran proporcionales a la masa [16].

Desde la hipótesis de la existencia del neutrino para explicar el espectro energético de los electrones en el decaimiento  $\beta$ , aunado a su descubrimiento experimental realizado por F. Reines y C. Cowan, la

física de partículas ha estado en constante actualización. En fechas recientes el premio nobel de física ha galardonado al japonés T. Kajita y el canadiense A. B. McDonald por su descubrimiento del fenómeno denominado “oscilación de neutrinos”, lo que a groso modo significa que los neutrinos pueden cambiar de sabor<sup>1</sup>. Este hallazgo genera nueva física, porque de acuerdo a lo que se conoce en la física de partículas los neutrinos son partículas sin masa; sin embargo, para que los neutrinos puedan oscilar ellos deben ser masivos.

Así, la masa de los neutrinos tienen un papel fundamental en la física de partículas. Por ejemplo, el neutrino por ser la partícula más abundante en nuestro Universo y ya que sólo interactúan débilmente con la materia, podrían dar una “imagen” del Universo temprano, ya que en la actualidad podrían existir neutrinos remanentes del Big Bang, es decir, generados en la gran explosión y que aún permanecen viajando en el espacio.

En este trabajo de tesis utilizaremos el THDM-III que inserta un doblete de Higgs adicional al SM, además de considera todos los posibles acoplamientos entre los dobletes de Higgs y los fermiones en el sector de Yukawa, por lo que existe FCNF. Consideraremos un tratamiento híbrido para la masa de los neutrinos, lo que posteriormente nos permite utilizar el mecanismo see-saw tipo I de generación de masas, donde además consideramos un ansatz para la matriz de masa de Dirac, dándole una textura de dos ceros y la matriz de masa de Majorana simétrica con dos ceros de textura. Finalmente realizamos un análisis estadístico para los ángulos de mezcla de los neutrinos por medio de un ajuste de  $\chi^2$ .

El presente trabajo se construye de la siguiente manera: en el capítulo 1 se da un resumen sobre la física de los neutrinos, la física de neutrinos en el marco del THDM-III se presenta en el capítulo 2 y en el capítulo 3 se muestra la parametrización de las matrices de masa y mezcla de los neutrinos en el THDM-III. En el capítulo 4 se presentan los resultados obtenidos del análisis del ajuste de  $\chi^2$  para los ángulos de mezcla del sector leptónico. En el capítulo 5 se dan las conclusiones. Finalmente, se incluyen tres apéndices: el apéndice A contiene la información correspondiente al operador de conjugación de carga; en el apéndice B se dan los detalles del comando “NMinimize” usado en el software Mathematica para calcular el punto de mejor ajuste (BFP) usado en el análisis de  $\chi^2$  y en el apéndice C se muestra el funcionamiento del análisis de verosimilitud  $\chi^2$ .

---

<sup>1</sup>Sabor en física de partículas se refiere a la familia que pertenece cada partícula.



# Capítulo 1

## Sobre neutrinos

El neutrino es el bit más pequeño de materia concebida por el hombre; el más grande es el Universo. Intentar comprender algo de uno u otro es intentar medir la dimensión en la cual se tienen todas las manifestaciones de la naturaleza.

Cowan y Reines 1956.

En el estudio de la física de partículas se han presentado diversos problemas e interrogantes, uno de los descubrimientos principales es el neutrino por lo cual debemos entender su comportamiento. En el presente capítulo introduciremos las principales propiedades de los neutrinos y las implicaciones de su comportamiento.

### 1.1. Una nueva partícula

En el año de 1896 H. Becquerel descubrió la radiactividad procedente de sales de Uranio, y así ha principios del siglo XX se habían descubierto tres tipos de radiación denominadas convencionalmente de la siguiente manera:

1. **Radiactividad  $\alpha$** : constituida por núcleos de  ${}^4\text{He}$  (dos protones y dos neutrones).
2. **Radiactividad  $\beta$** : constituida por electrones.
3. **Radiactividad  $\gamma$** : constituida por fotones de alta energía (unos cuantos MeV).

Los elementos que experimentan desintegración  $\beta$  (decaen en otro elemento) son los que tienen un número atómico inmediatamente superior y el mismo número másico, además de emitir radiación  $\beta$ . El espectro energético en la desintegración  $\beta$  es continuo, al contrario que en los otros dos tipos de radiación antes mencionados. Básicamente, esto quiere decir que los electrones emitidos en la desintegración  $\beta$  tienen una energía que puede tomar cualquier valor entre 0 y una energía máxima  $E_{max}$ , la cual es distinta para cada sustancia. Así pues, en esta época se observaba que en el decaimiento  $\beta$  se producían electrones con una energía menor que  $E_{max}$ . Los experimentos de J. Chadwick (1914) mostraban que  $E_{max}$  era siempre igual a la diferencia de niveles energéticos en que los átomos emiten radiación ( $E_{max} = E_n - E_m$ ). Por lo que se esperaba que el espectro del decaimiento  $\beta$  no fuera continuo, como se tenía para las otras radiaciones ( $\alpha$  y  $\gamma$ ). Este hecho dejaba muchas dudas, el problema consistía en explicar por qué se emiten electrones con energía menor que  $E_{max}$  (aparente violación de la conservación de la energía) y por qué su espectro era continuo. La respuesta desesperada fue dada por W. Pauli, quien propuso el neutrino para explicar el espectro de energía continuo de los electrones emitidos por el decaimiento Beta del núcleo. Pauli propuso al neutrino como una partícula con espín 1/2, neutra y sin masa (o demasiado

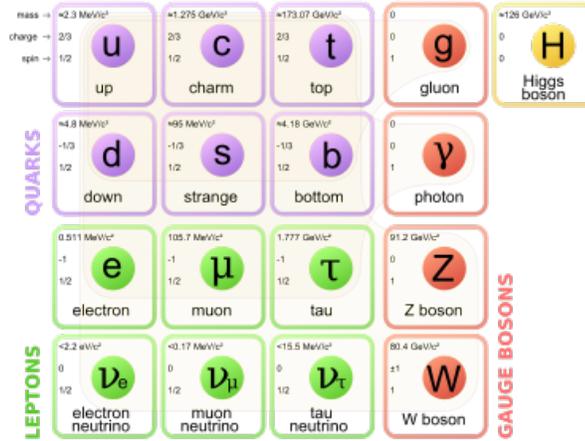


Figura 1.1: Modelo Estándar de partículas elementales.

pequeña), y así se verificaba que la acción de la ley de la conservación de la energía era totalmente válida para procesos microscópicos.

Ahora sabemos que en el decaimiento  $\beta$ , además del electrón, surgen los neutrinos, lo que simbólicamente se puede escribir como:

$$N_1(z) \rightarrow N_2(z + 1) + e^- + \bar{\nu}_e, \quad (1.1)$$

donde  $N_1, N_2$  son nucleones (agrupación de protones o neutrones),  $z$  es el número total de protones en el átomo y  $\bar{\nu}_e$  es un antineutrino del electrón. En 1956 Reines y Cowan descubren el neutrino, junto con otras partículas que interactúan débilmente; con la invención de nuevos aceleradores y detectores más sofisticados se sabe que la partícula del neutrino viene en tres sabores, esto es:

$$\nu_e, \nu_\mu \text{ y } \nu_\tau$$

. Estos son denominados neutrino electrónico, neutrino muónico, neutrino tauónico, respectivamente. El hecho que se asocie un neutrino por cada familia leptónica no corresponde a partículas predichas por el Modelo Estándar, ya que en dicho modelo el neutrino se propone como una partícula sin masa [17].

### 1.1.1. Modelo Estándar y el neutrino

El Modelo Estándar es el más exitoso de la Física de Partículas hasta ahora, numerosos experimentos han confirmado su validez, gracias a él se pueden explicar la mayor parte de los procesos fundamentales que ocurren en la materia, ya que este explica la relación entre las partículas elementales y las interacciones fundamentales. Según este modelo, toda la materia está constituida por fermiones (espín 1/2 o más generalmente semientero) y que en total son 12 partículas distintas, estas mismas se dividen en dos grupos fundamentales los leptones y *quarks*. Las partículas conocidas como leptones son 6 y son las siguientes: el electrón  $e$ , muón  $\mu$ , tau  $\tau$  y sus respectivos neutrinos;  $\nu_e, \nu_\mu$  y  $\nu_\tau$ . Los *quarks* también son seis y son denominados: *up*  $u$ , *down*  $d$ , *charm*  $c$ , *strange*  $s$ , *top*  $t$  y *bottom*  $b$ . Además de los fermiones existen los bosones de norma que son los mediadores de las fuerzas fundamentales, estamos hablando de: el fotón  $\gamma$  mediador de la fuerza electromagnética, el gluón  $g$  mediador de la fuerza fuerte, y de los bosones de norma  $Z^0$  y  $W^\pm$  mediadores de la fuerza débil. Más recientemente ha sido hallado el bosón Higgs  $H$  que explica cómo adquieren masa todas las partículas anteriores véase por ejemplo [1, 18, 19]. Las propiedades de todas estas partículas están resumidas en la figura 1.1. Para ser un poco más formales,

diremos: el modelo teórico que unifica tres de las cuatro interacciones fundamentales: la electromagnética, débil y la interacción fuerte es conocido como Modelo Estándar. Este modelo nace de una teoría de norma (*gauge*) basada en el grupo de simetría

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y,$$

donde la simetría  $SU(3)_C$  describe las interacciones fuertes, mientras que la simetría  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  describe las interacciones electrodébiles [1, 18].

Ahora hablaremos un poco sobre el neutrino y su relación con el SM. Hemos dicho que este modelo es quizás el más exitoso, pero hasta ahora, existen varios problemas que no se pueden resolver en el marco del SM y uno de ellos es la masa del neutrino. Antes de profundizar en este último, primero conozcamos como describe el SM al neutrino [20]:

1. **La masa del neutrino es igual a cero:** Un método para la medición de la masa de los neutrinos fue propuesto por Fermi y Perrin en 1934, donde se encontró experimentalmente una cota superior para la masa del neutrino  $m \lesssim 200 \text{ eV}$ , dado que es una masa menor que la del electrón, se puede asumir que la masa es cero  $m_{\nu_i} = 0$  con  $i = e, \mu, \tau$  [7].
2. **Existe el  $\nu_L$  pero no existe  $\nu_R$ :** Cualquier campo fermiónico puede ser representado por la suma de sus componentes izquierda y derecha (*left* y *right-handed*)  $\nu = \nu_L + \nu_R$ ,  $\nu_{L_i}$  solo son posibles,  $\nu_{R_i}$  no existen<sup>1</sup>.

A partir del 2002 se comprobó que los neutrinos sufren un fenómeno conocido como oscilación de neutrinos, que consiste principalmente en que los neutrinos pueden cambiar de familia mientras atraviesan el espacio-tiempo, lo que solo puede suceder si los neutrinos son partículas masivas, esta fue la prueba final e irrefutable de que el SM está incompleto (quizá existe  $\nu_R$ ) o en el peor de los casos inutilizable para la nueva física, que nació con la oscilación de neutrinos y otros fenómenos inexplicables.

### 1.1.2. Otros procesos donde surgen los neutrinos

El proceso que Pauli analizó es actualmente conocido como desintegración  $\beta^-$ , el cual consiste en el decaimiento de un neutrón en un protón, electrón y un antineutrino electrónico (en principio dicho decaimiento se analizó para neutrinos, pues se desconocía la existencia de los antineutrinos), es decir:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e. \quad (1.2)$$

Recordando que el neutrón está formado por un *quark*  $u$  y dos  $d$  (quarks de valencia), mientras que el neutrón está formado por un *quark*  $d$  y dos  $u$ , lo que en realidad ocurre en el proceso de desintegración  $\beta^-$  es que un *quark*  $d$  del neutrón se transforma en un *quark*  $u$  por medio de la interacción de un bosón  $W$  de interacción débil. Pero además de este proceso se han encontrado muchos otros donde surgen los  $\nu_e$ , como los que mencionamos a continuación [21]:

1. **Desintegración  $\beta^+$ .**-Este proceso es muy parecido al anterior y en cierta forma parece ser el proceso inverso de este. La reacción tiene la siguiente forma:

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu_e. \quad (1.3)$$

Lo cual significa que un protón decae en un neutrón, positrón y un neutrino electrónico. Por medio de la interacción de un bosón  $W$ , un *quark*  $u$  del protón se transforma en un *quark*  $d$  del neutrón. Este proceso solo puede ocurrir para un protón dentro de un núcleo, pues de lo contrario no se conservaría la energía. Los diagramas de Feynman correspondientes se muestran en la Figura 1.2.

---

<sup>1</sup>Recordemos que el operador de quiralidad cumple con:  $\psi_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5)\psi$ .

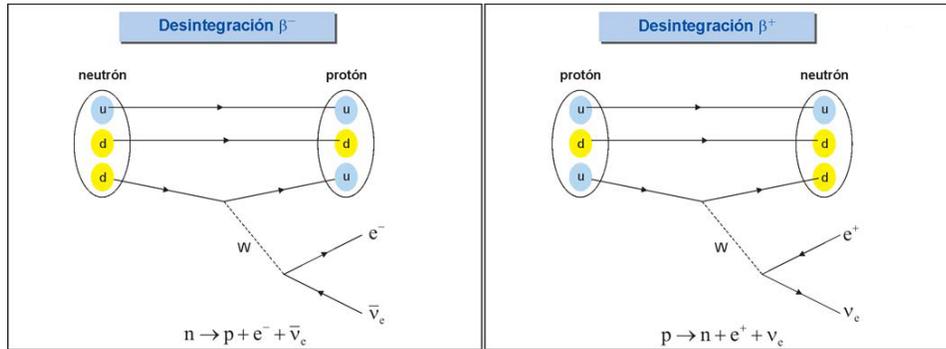


Figura 1.2: Diagramas de Feynman para las desintegraciones  $\beta^+$  y  $\beta^-$ .

1. **Captura electrónica.**-Este proceso consiste en que un electrón del átomo puede interactuar con un protón del núcleo produciéndose un neutrino y un neutrón. El cual fue descubierto por Alvarez en 1938. Simbólicamente tiene la forma:

$$e^- + p \rightarrow n + \nu_e. \tag{1.4}$$

2. **Desintegración  $\beta$  inversa.**-Ahora un antineutrino puede chocar contra un protón produciendo un positrón y un neutrón.

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+. \tag{1.5}$$

Los correspondientes diagramas de Feynman se muestran en la Figura 1.3:

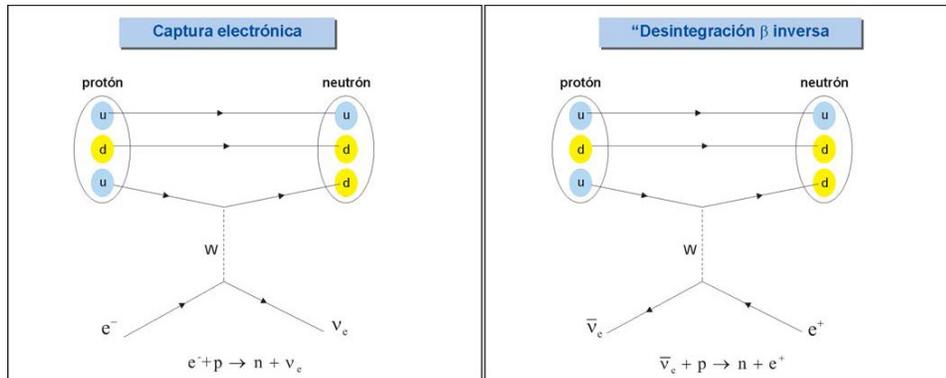


Figura 1.3: Diagramas de Feynman para las desintegraciones  $\beta$  inversa y captura electrónica.

## 1.2. Clasificación de neutrinos

Los neutrinos son partículas creadas a partir del decaimiento  $\beta$  y los demás procesos antes mencionados, pero estos procesos se manifiestan en diferentes lugares, así señalaremos una clasificación de los neutrinos tomando en cuenta el lugar donde se crean:

1. **Geoneutrinos.** Se denominan geoneutrinos a todos aquellos neutrinos que surgen de la desintegración  $\beta$  en los isotopos radiactivos que encontramos en el interior de la tierra. En particular,

Geoneutrinos	Solares	Atmosféricos
EXO- 200	BOREXINO	ARIANNA
OPERA	Súper-K	ANTARES
	IceCube	Súper-K

Tabla 1.1: Experimentos de neutrinos.

la desintegración del  $^{238}\text{U}$ ,  $^{232}\text{Th}$  y  $^{40}\text{K}$ . Dada su procedencia, la detección de estas partículas nos proporciona información del interior de nuestro planeta. La primera señal de geoneutrinos fue detectada en el experimento KamLAND, y se espera en un futuro, construir detectores que eficazmente den señal de este tipo de neutrinos.

2. **Neutrinos solares.** La mayor fuente de neutrinos es la estrella más cercana a nosotros, el Sol, que en sus procesos emite neutrinos a estos los conocemos como neutrinos solares. Del interior del Sol surge uno de los problemas más importantes de la física de neutrinos el denominado déficit solar de neutrinos.
3. **Neutrinos atmosféricos.** Estos neutrinos surgen de la interacción de los rayos cósmicos con los átomos que forman la atmósfera.

Esta clasificación engloba a los principales neutrinos que podemos detectar. En la tabla 1.1 se muestran los principales experimentos que detectan todos estos neutrinos.

## 1.3. Neutrinos Solares

Desde el principio siempre hemos visto al Sol como nuestra fuente de luz, pero, ¿cómo se produce esta luz?, ¿qué ocurren en el Sol? Para responder a este tipo de preguntas, se comenzó a estudiar el funcionamiento de las estrellas desde su interior y las reacciones que se presentaban para la creación de tan enormes cantidades de energía, todo a partir de la misma luz que nos llega de las estrellas. En estos esfuerzos de comprender nuestra estrella, el comportamiento cuántico de la materia tomó cabida y al estudio del Sol se le dio un enfoque microscópico entonces surgían preguntas como ¿qué procesos fundamentales ocurren en el Sol?.

### 1.3.1. Espectro de los neutrinos solares

Los neutrinos solares son el resultado de una cadena de reacciones nucleares en el núcleo del Sol. El flujo de los neutrinos solares depende de la temperatura del núcleo del Sol, su composición química, la sección transversal de las reacciones nucleares, la opacidad del Sol, etc. La fracción más grande de neutrinos solares es producida por la cadena- $pp$  (protón-protón); una pequeña fracción (1.6%) se cree que es producida por el ciclo CNO (Carbono-Nitrógeno-Oxígeno). En la cadena- $pp$ , las siguientes cinco reacciones producen neutrinos:

$$p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e (E_\nu < 0.42 \text{ MeV}). \quad (1.6)$$

$$p + e + p \rightarrow d + \nu_e (E_\nu = 1.44 \text{ MeV}). \quad (1.7)$$

$$e + {}^7\text{Be} \rightarrow {}^7\text{Li} + \nu_e \quad (E_\nu = 0.86 \text{ MeV}(90\%), 0.38 \text{ MeV}(10\%)). \quad (1.8)$$

$${}^8\text{B} \rightarrow {}^8\text{Be}^* + e^+ + \nu_e (E_\nu < 15 \text{ MeV}). \quad (1.9)$$

$${}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + e^+ + \nu_e (E_\nu < 18.8 \text{ MeV}). \quad (1.10)$$

Los correspondientes neutrinos producidos en estas reacciones son conocidos como neutrinos-  $pp$ ,  $pep$ ,  ${}^7\text{Be}$ ,  ${}^8\text{B}$  y  $hep$  [22]. La mayoría de los neutrinos solares (91%) son producidos por las reacciones de

fusión  $pp$  (neutrinos- $pp$ ). Los neutrinos- ${}^7\text{Be}$  son monocromáticos y dan alrededor del 10% del flujo de los neutrinos- $pp$ . Los neutrinos- ${}^8\text{B}$  de alta energía contribuyen en una pequeña fracción (0.008%) al flujo total. Los neutrinos de más alta energía son los neutrinos  $hep$  con una cota superior de energía de 18.8 MeV. Sin embargo, su flujo es alrededor de tres ordenes de magnitud más pequeño que el flujo de los neutrinos- ${}^8\text{B}$ , ver Figura 1.4 [22].

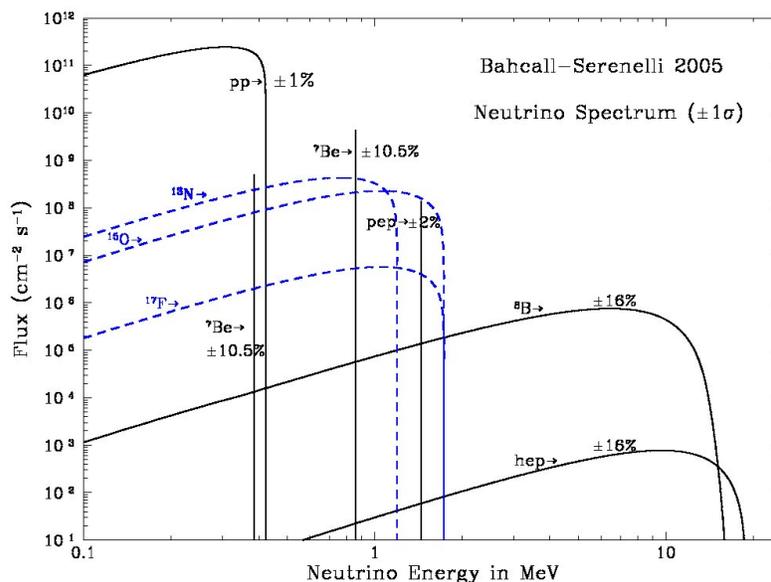


Figura 1.4: Espectro de los neutrinos solares.

### 1.3.2. El problema de los neutrinos solares

A finales de los años 60, los experimentos para la detección de neutrinos encontraron que el número de neutrinos del electrón ( $\nu_e$ ) procedentes del Sol estaba entre la mitad y un tercio de estos, lo que estaba en desacuerdo con el Modelo Estándar Solar (SSM, por sus siglas en inglés), creado por John Bahcall y colaboradores. En el Sol se producen

$$N_{\nu_e}/s = 2 \times 3.8 \times 10^{26} \text{W} / (26.1 \text{ MeV}) = 1.8 \times 10^{38} \nu_e/s.$$

Estos neutrinos salen en todas las direcciones. Si construimos una esfera imaginaria alrededor del Sol con un radio de 150 millones de km (la distancia entre el sol y la tierra) y calculamos cuantos salen por unidad de superficie y por segundo, tendremos los que llegan a la tierra por unidad de superficie y por segundo. Dicho número es [21]:

$$6.4 \times 10^{10} \nu_e / (\text{cm}^2 \text{s}).$$

Con tantos neutrinos quizás no sea descabellado tratar de observar en un detector apropiado si alguno de ellos interacciona. Su estudio es importante por muchos motivos, uno de ellos es que, a diferencia de los fotones, que se absorben y remiten durante miles de años, los neutrinos se producen en el interior del Sol, salen a la superficie en 2 s y en 8 min llegan a nuestro detector donde una pequeñísima parte de los mismos interacciona. Los neutrinos nos permiten estudiar lo que ocurre en el interior del Sol en tiempo real.

Dada la impresionante cantidad de neutrinos generados por el Sol y las predicciones de SSM a finales del siglo pasado, se inició una disputa entre teoría y experimento, ¿quién estaba en lo correcto? Este déficit de neutrinos fue conocido como el problema de los neutrinos solares y quedó sin explicación por treinta años, fue resuelto con el descubrimiento de la oscilación de los neutrinos. B. Pontecorvo fue el que predijo la oscilación de los neutrinos.

## 1.4. Oscilaciones de neutrinos

La consecuencia inmediata de la existencia de neutrinos masivos es su oscilación de neutrinos, correspondiente a un fenómeno cuántico que se refiere al cambio de sabor de los neutrinos presentes en el SM, en cuyo caso los estados de interacción presentes no son iguales a los eigenestados de energía, sino a una combinación lineal de estos últimos. Inicialmente, la oscilación de neutrinos fue introducida por Pontecorvo hacia finales de los años cincuenta [23]; para esa época se consideró posible una transición en el vacío de la forma *neutrino*  $\rightarrow$  *antineutrino*, similar a lo que sucede en el sistema  $K^0 - \bar{K}^0$  [24, 25]. Sin embargo, ya que estos dos estados poseen helicidades opuestas, este tipo de transiciones están prohibidas, puesto que no conservaría el momento angular. Posteriormente, a principios de los años sesenta, Naki, Nakagawa y Sakata [26] propusieron que el neutrino electrónico podría eventualmente convertirse en neutrino muónico, introduciendo la mezcla de neutrinos. Las sucesivas propuestas que surgieron alrededor del neutrino y sus posibles cambios de sabor fueron de inmediato aplicadas al problema de los neutrinos solares, en especial, enfocados a reproducir, mediante este mecanismo, los datos obtenidos por R. Davies en Homestake, el cual fue uno de los pocos experimentos que funcionara antes de la entrada en acción de SK (SuperKamiokande), SNO (Sudbury Neutrino Observatory), y los experimentos de galio. Actualmente, las oscilaciones de neutrinos se hallan en el mejor lugar a la hora de buscar explicaciones para el déficit de neutrinos solares; en el proceso, los resultados arrojados por los distintos experimentos son usados para determinar nuevas características del neutrino, como su masa y la existencia de un neutrino estéril, entre otras.

De acuerdo con el SM, los leptones se encuentran agrupados en tres familias o sabores:

$$\begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

las correspondientes familias de antileptones. Las familias se caracterizan por los números leptónicos individuales  $L_\alpha$  (número del electrón  $L_e$ , número del muón  $L_\mu$ , número del tauón  $L_\tau$ ) de tal modo que:

$$\begin{aligned} L_\alpha(\nu_\beta) &= \delta_{\alpha\beta} \quad \text{para neutrinos,} \\ L_\alpha(\bar{\nu}_\beta) &= -\delta_{\alpha\beta} \quad \text{para antineutrinos.} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Las oscilaciones de neutrinos, es decir, las transiciones periódicas  $\nu_\alpha \rightleftharpoons \nu_\beta$  entre los diferentes tipos de sabores de neutrinos dependen del tiempo y las condiciones necesarias para que ocurran tales oscilaciones son:

1. Las diferencias de masas  $\Delta m_{\alpha\beta}^2 = m_{\nu_\alpha}^2 - m_{\nu_\beta}^2 \neq 0$  (ver sección 4.1), lo que implica que todos los neutrinos son masivos.
2. Los números leptónicos individuales  $L_\alpha$ , no son estrictamente conservados.

En este último caso los autoestados  $L_\alpha|\nu_\alpha\rangle$ , llamados *autoestados de sabor*, en general, no son autoestados del operador de masa  $M$ , es decir,  $\langle \nu_\alpha | M | \nu_\beta \rangle \neq 0$  para  $\alpha \neq \beta$ . Más bien son superposiciones lineales de autoestados de masa no degenerados  $|\nu_i\rangle$  con  $\langle \nu_i | M | \nu_j \rangle = m_i \delta_{ij}$  y  $\Delta m_{ij}^2 \neq 0$  para  $i \neq j$ . Entonces las oscilaciones de neutrinos o *mezcla* de sabores de neutrinos  $\nu_\alpha \rightleftharpoons \nu_\beta$  pueden ocurrir debido a que  $\langle \nu_\alpha | M | \nu_\beta \rangle$  es diferente de cero para  $\alpha \neq \beta$ . Las dos condiciones listadas arriba son las mínimas extensiones al SM.

Por otro lado, los  $n$  autoestados de sabor  $|\nu_\alpha\rangle$  (es decir,  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, \dots$ ) y los  $n$  autoestados de masa, también llamados autoestados físicos  $|\nu_i\rangle$  (es decir,  $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$ ) están relacionados por una transformación unitaria  $U$  llamada *matriz de mezcla*, la cual es análoga a la matriz de Cabbibo-Kobayashi-Maskawa para el sector de quarks. En el SM, todos los neutrinos son no masivos, en cuyo caso la matriz  $U$  no tiene significado físico. Por lo tanto, al introducir la matriz de mezcla, estamos suponiendo implícitamente que al menos uno de los neutrinos tiene *masa no nula*:

$$\begin{aligned} |\nu_\alpha\rangle &= \sum_i U_{\alpha i} |\nu_i\rangle \leftrightarrow |\nu_i\rangle \\ &= \sum_\alpha U_{i\alpha}^\dagger |\nu_\alpha\rangle \\ &= \sum_\alpha U_{\alpha i}^* |\nu_\alpha\rangle, \end{aligned} \tag{1.13}$$

con

$$U^\dagger U = U U^\dagger = 1. \tag{1.14}$$

Es decir, una relación de unitariedad, esto es :

$$\sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* = \delta_{\alpha\beta}, \quad \sum_\alpha U_{\alpha i} U_{\alpha j}^* = \delta_{ij}, \tag{1.15}$$

Para antineutrinos tenemos que reemplazar  $U_{\alpha i}$  por  $U_{\alpha i}^*$ , es decir,

$$|\bar{\nu}_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* |\bar{\nu}_i\rangle. \tag{1.16}$$

El número de parámetros de una matriz unitaria  $n \times n$  es de  $n^2$  y las  $2n - 1$  fases relativas de los  $2n$  estados de neutrinos pueden redefinirse de tal modo que se dejen  $(n - 1)^2$  parámetros independientes izquierdos. Por esto es conveniente tomar los  $\frac{1}{2n}(n - 1)$  “*ángulos de mezcla débiles*” de una rotación  $n$ -dimensional y las  $\frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$  las “*fases que violan CP*”. Al ser autoestados de la matriz de masa, los estados  $|\nu_i\rangle$  no son estacionarios, es decir, tienen dependencia temporal:

$$|\nu_i(t)\rangle = e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle, \tag{1.17}$$

con

$$E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} \approx p + \frac{1}{2} \frac{m_i^2}{p} \approx E + \frac{1}{2} \frac{m_i^2}{E} \tag{1.18}$$

y

$$m_i \ll E_i,$$

donde  $E \approx p$  es la energía total del neutrino y supondremos que los neutrinos son estables. Así, un estado de sabor puro  $|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i} |\nu_i\rangle$  al tiempo  $t = 0$  evolucionará con el tiempo como:

$$\begin{aligned} |\nu\rangle &= \sum_i U_{\alpha i} e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle \\ &= \sum_{i,\beta} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-iE_i t} |\nu_\beta\rangle. \end{aligned} \tag{1.19}$$

La dependencia temporal en la *amplitud de transición* para el cambio del sabor  $\nu_\alpha$  al sabor es  $\nu_\beta$  es

$$\begin{aligned} A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) \equiv \langle \nu_\beta | \nu(t) \rangle &= \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-iE_i t} \\ &= \sum_{i,j} U_{\alpha i} \delta_{i,j} e^{-iE_i t} \cdot (U^\dagger)_{j,\beta} \\ &= (U D U^\dagger)_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{1.20}$$

con

$$D_{i,j} = \delta_{i,j} e^{-iE_i t} \quad (\text{matriz diagonal}). \quad (1.21)$$

Se obtiene una expresión equivalente de la amplitud de transición, insertando la ec. (1.18) en la ec.(1.20) y extrayendo un factor de fase global  $e^{-iE_i t}$ :

$$\begin{aligned} A'(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) &= \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-i \frac{m_i^2}{2E} t} \\ &= \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-i \frac{m_i^2}{2} \frac{L}{E}} \\ &= A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t), \end{aligned} \quad (1.22)$$

donde  $L = ct$  ( $c = 1$ ) es la distancia del detector, en el cual se observa  $\nu_\beta$  desde la fuente  $\nu_\alpha$ . Para una  $j$  fija, seleccionada arbitrariamente, obtenemos una tercera expresión de la amplitud de transición:

$$\begin{aligned} A''(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) &= e^{-iE_j t} \cdot A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) \\ &= \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-i(E_i - E_j)t} \\ &= \delta_{\alpha\beta} + \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* [e^{-i(E_i - E_j)t} - 1] \\ &= \delta_{\alpha\beta} + \sum_{i \neq j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* [e^{-i\Delta_{ij}} - 1], \end{aligned} \quad (1.23)$$

con

$$\Delta_{ij} = (E_i - E_j) t = \frac{\Delta m_{ij}^2}{2} \cdot \frac{L}{E}. \quad (1.24)$$

En la ec. (1.23) se utilizó la relación de unitariedad de la ec. (1.15). De esta forma las amplitudes de transición son dadas por los  $(n-1)^2$  parámetros independientes de la matriz unitaria (la cual determina las amplitudes de las oscilaciones) y las  $n-1$  diferencias de las masas elevadas al cuadrado (lo cual determina la frecuencia de las oscilaciones), es decir, por los  $n(n-1)$  parámetros reales. Si  $CP$  se conserva en las oscilaciones de neutrinos, desaparecen todas las fases que violan  $CP$  y las  $U_{\alpha i}$  son reales, es decir  $U$  es una matriz ortogonal ( $U^{-1} = U^T$ ) con  $\frac{1}{2}n(n-1)$  parámetros. Entonces, el número de parámetros para las amplitudes de transición son  $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$ .

La *probabilidad de transición* se obtiene elevando al cuadrado el módulo de las amplitudes de la ec. (1.20):

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) &= \left| \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-iE_i t} \right|^2 \\ &= \sum_i |U_{\alpha i} U_{\beta i}^*|^2 + 2\Re \sum_{i>j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} e^{-i\Delta_{ij}}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Aquí, el segundo término describe la dependencia temporal (o espacial) de las oscilaciones de los neutrinos y el primer término es la probabilidad de transición promedio, promediada sobre el tiempo (distancia) o energía:

$$\begin{aligned} \langle P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) \rangle &= \sum_i |U_{\alpha i} U_{\beta i}^*|^2 \\ &= \sum_i |U_{\alpha i}^* U_{\beta i}|^2 \\ &= \langle P(\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha) \rangle. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Midiendo las probabilidades promedio obtenemos únicamente información sobre los parámetros de la matriz de mezcla, pero no sobre las diferencias de las masas elevadas al cuadrado. Se puede mostrar de la relación de unitariedad  $\sum_i |U_{\alpha i}|^2 = 1$  que  $\langle P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha) \rangle = \sum_i |U_{\alpha i}|^4$  es mínima si todas las  $|U_{\alpha i}| = |U_\alpha|$  son iguales. Usando la relación de unitariedad (1.15) la probabilidad puede escribirse también como:

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) = \delta_{\alpha\beta} + 2\Re \sum_{i>j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} [e^{-i\Delta_{ij}} - 1]. \quad (1.27)$$

Para  $t = 0$ , es decir,  $\Delta_{ij} = 0$  tenemos por supuesto  $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; 0) = \delta_{\alpha\beta}$ . Además,  $\sum_\beta P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) = 1$  debido a (1.15). Si se conserva  $CP$  ( $U_{\alpha i}$  es real), las ecs. (1.25) y (1.27) se reducen a:

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) &= \sum_i U_{\alpha i}^2 U_{\beta i}^2 + 2 \sum_{i>j} U_{\alpha i} U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j} \cos \Delta_{ij} \\ &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i>j} U_{\alpha i} U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j} \sin^2 \left( \frac{\Delta_{ij}}{2} \right). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Para el caso  $n > 2$  las fórmulas de las probabilidades de transición son más bien complicadas. Sin embargo el formalismo se simplifica fuertemente en el caso de que todas las masas de los neutrinos estén bien separadas una de otra (*hipótesis de jerarquía de masas*), es decir,  $|m_i^2 - m_j^2| \ll |m_i^2 - m_k^2|$  para  $i, j \neq k$ . En este caso  $\frac{L}{E}$  en la ec. (1.24) se incrementa desde cero de tal modo que  $\Delta_{ij} \ll \Delta_{ik} = \Delta$  para  $i, j \neq k$ , únicamente ocurren oscilaciones debido a que  $\Delta \neq 0$  (*oscilaciones principales*); todas las otras  $\Delta_{ij} \approx 0$  y los paréntesis cuadrados en las ecs. (1.23) y (1.27) desaparecen. De esta manera, para las oscilaciones principales tenemos:

$$\begin{aligned} A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) &= \delta_{\alpha\beta} + (e^{-i\Delta} - 1) \sum_{i \neq j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* \\ &= \delta_{\alpha\beta} + (e^{-i\Delta} - 1) [\delta_{\alpha\beta} - U_{\alpha k} U_{\beta k}^*] \\ &= e^{-i\Delta} [\delta_{\alpha\beta} - U_{\alpha k} U_{\beta k}^*] + U_{\alpha k} U_{\beta k}^*. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Elevando al cuadrado el módulo de  $A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t)$  se obtiene:

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) &= \delta_{\alpha\beta} + 2\Re [(e^{-i\Delta} - 1) \cdot U_{\alpha k}^* U_{\beta k} \cdot (\delta_{\alpha\beta} - U_{\alpha k} U_{\beta k}^*)] \\ &= P(\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha; t). \end{aligned} \quad (1.30)$$

De esta forma

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha) = 1 - 4 \left( |U_{\alpha k}|^2 - |U_{\alpha k}|^4 \right) \sin^2 \left( \frac{\Delta}{2} \right), \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta \neq \nu_\alpha) &= 4 |U_{\alpha k}|^2 |U_{\beta k}|^2 \cdot \sin^2 \left( \frac{\Delta}{2} \right) \\ &= P(\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha \neq \nu_\beta). \end{aligned} \quad (1.32)$$

En la siguiente figura mostramos el comportamiento de la oscilación de neutrinos, cuando en el estado inicial el neutrino es  $\nu_e$ , ver figura 1.5.

## 1.5. Detección de neutrinos

Sabemos que la interacción débil esta mediada por los bosones de norma  $W^\pm$  y  $Z^0$ , los cuales dan lugar a las corrientes cargadas y a la corriente neutra respectivamente. Además, los neutrinos solo

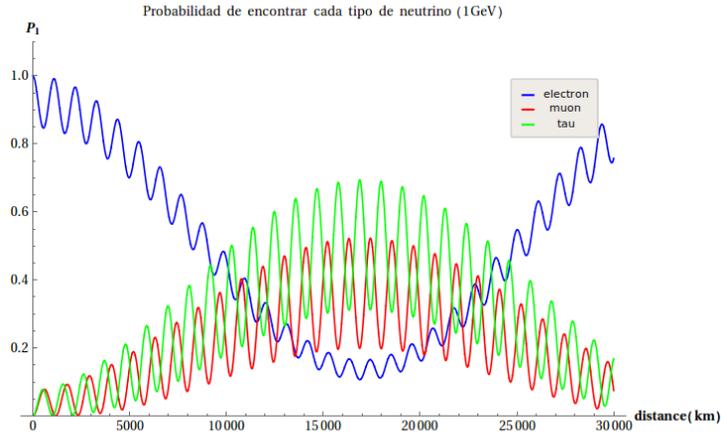


Figura 1.5: Esta imagen muestra la probabilidad de encontrar cada tipo de neutrino con  $\nu_e$  en el estado inicial.

pueden interactuar débilmente con la materia, por tanto esta interacción es mediada por los bosones de norma antes mencionados, pero debido a su ínfima magnitud (interacción débil), la probabilidad de que un neutrino interactúe con la materia también es muy pequeña (excepto neutrinos de alta energía). Si tuviéramos una pared de plomo de un año luz de grosor, la probabilidad de que un neutrino interactúe dentro es del orden del 2%, el 98% atraviesa sin ninguna interacción. Dado este desmotivante ejemplo, uno podría pensar que es imposible detectar los neutrinos, bueno si es difícil pero no imposible.

Debido a la llegada de la era nuclear nacieron dos fuentes intensas de neutrinos, las bombas nucleares y las plantas nucleares, pero, ¿cómo distinguir los neutrinos de otras partículas que surgen de estas fuentes? La respuesta fue dada por Reines y Cowan, quienes encontraron como aislar una señal distintiva del neutrino. Esta se basó en la desintegración  $\beta$  inversa. Cuando el antineutrino interactúa genera un positrón, que casi inmediatamente se aniquila con un electrón del medio, lo que produce dos rayos gamma que se mueven dentro de un tanque lleno de líquido centellador. Estos líquidos son materiales orgánicos cuyas moléculas se excitan al paso de partículas cargadas o rayos gamma, emitiendo luz que puede detectarse en fotomultiplicadores. El neutrón se mueve en el líquido y colisiona con las moléculas del mismo hasta que es capturado con un protón, este proceso se hace muy eficiente cuando se añade cadmio al líquido. La absorción del neutrón en el núcleo de cadmio libera 9 MeV de energía en forma de rayos gamma que producen de nuevo luz. Lo que es distintivo de la reacción inversa es que los destellos de luz, de la aniquilación del positrón y el de la captura del neutrón, están separados por un tiempo característico, entre 10 y 30  $\mu$ s. La discriminación entre la señal del neutrino y otras señales es precisamente la “coincidencia retardada” entre los pulsos de luz. Se muestra un diagrama esquemático del proceso, Figura 1.6 [21].

Hasta ahora, solo hemos hablado del neutrino electrónico, es decir, aquel que acompaña al electrón  $e^-$  en el decaimiento  $\beta^+$ . Más sin embargo conocemos otras partículas que sólo se diferencian del electrón en la magnitud de sus masas (mayores a las del electrón  $e^-$ ), estamos hablando del muón  $\mu^-$  y del tau  $\tau^-$ , el primero de ellos descubierto por C. D. Anderson en 1936 y el segundo descubierto por M. Lewis Perl en 1975. Más sin embargo  $\mu^-$  y  $\tau^-$  son inestables, es decir, tienden a desintegrarse rápidamente. Pues debido a estas similitudes entre el electrón y estas dos partículas ( $\mu^-$  y  $\tau^-$ ) se espera que también existan los neutrinos que acompañen a cada una de ellas, hablamos del neutrino del muón  $\nu_\mu$  y del neutrino del tau  $\nu_\tau$ . Cuando decimos que “acompañan”, nos referimos a que cuando alguno de estos neutrinos

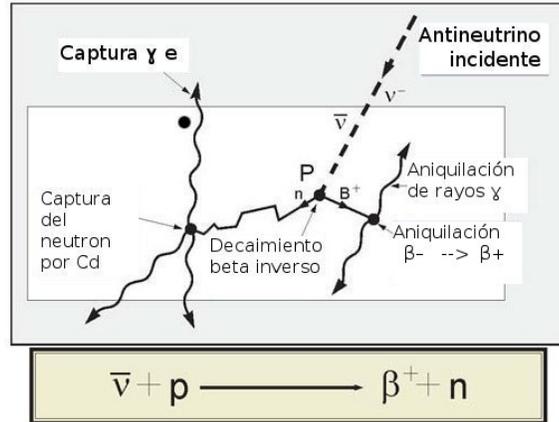


Figura 1.6: Esquema del método para la detección del neutrino en que se basaron Reines, Cowan y colaboradores.

participan en algún proceso, el estado final o inicial estará compuesto por su partícula correspondiente y otras partículas. Como ejemplos, podemos observar en la desintegración  $\beta^-$

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e. \quad (1.33)$$

el  $e^-$  va acompañado de  $\bar{\nu}_e$ , por contar el muón con una masa mayor a la del electrón, al desintegrarse el estado final estará compuesto por el electrón y otras partículas:

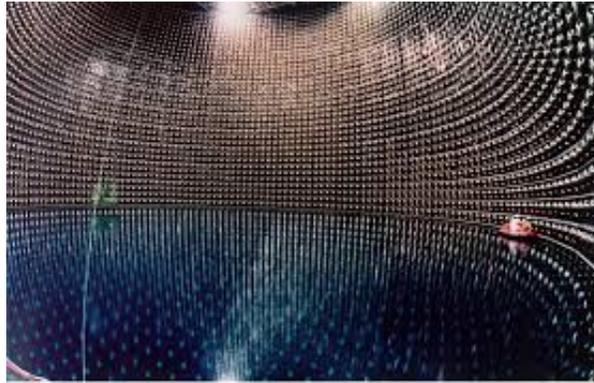
$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu, \quad (1.34)$$

y en este caso el  $\mu^-$  va acompañado de  $\nu_\mu$ .

## 1.6. El experimento Super-K

SuperKamiokande es el gran detector de efecto Cherenkov de agua. La construcción se inició en 1991 y la observación se inició el 1 de abril de 1996. El Super-Kamiokande es operado por una colaboración internacional de cerca de 110 personas y 30 institutos de Japón, Estados Unidos, Corea, China, Polonia y España.

El detector Super-Kamiokande consiste en un tanque de acero inoxidable, diámetro de 40m y 40m de altura, lleno de 50,000 toneladas de agua ultra pura. Cerca de 13,000 fotomultiplicadores se instalan en la pared del tanque. El detector se encuentra a 1,000 metros bajo tierra en la mina Kamioka, Hida-ciudad, Gifu, Japón, ver Figura 1.7. Uno de los efectos del experimento Super-Kamiokande es revelar las propiedades de los neutrinos a través de la observación de neutrinos solares y neutrinos atmosféricos. En 1998, a partir de la observación de neutrinos atmosféricos se descubren las oscilaciones de neutrinos, los neutrinos están cambiando sus tipos en vuelo. En 2001, las oscilaciones de neutrinos solares fueron descubiertos por la observación de neutrinos solares. La investigación de las propiedades de los neutrinos nos permitirá entender cómo la materia fue creada en el universo temprano. Mediante la observación de neutrinos solares, podemos conocer las actividades en el interior del sol. Mediante la detección de neutrinos de explosión supernova, podemos investigar los detalles del mecanismo de explosión de la estrella. Por otro lado, las grandes teorías unificadas (GUT's por sus siglas en inglés), que puede unificar las fuerzas fundamentales de la naturaleza, predicen que el protón puede desintegrarse en partículas energéticas cargadas más ligeras. Super-Kamiokande busca este fenómeno desconocido. Si se observa la desintegración de protones, puede ser posible probar las GUT's.



*Figura 1.7: Interior del detector Super-Kamiokande en Japon.*

En la Tabla 1.2 se muestran los experimentos en búsqueda de neutrinos en funcionamiento y proyectos futuros.

# CAPÍTULO 1. SOBRE NEUTRINOS

## 1.6. EL EXPERIMENTO SUPER-K

Experimentos	Propósito	Resultados	Localización	Periodo
ANTARES	Telescopio direccional de neutrinos diseñado para localizar y observar el flujo de neutrino de origen cósmico en dirección del hemisferio sur	El primer neutrino detectado fue reportado en febrero de 2007	Mar Mediterráneo	2006 -
ARIANNA	Detector de Neutrinos astrofísicos a ultra altas energías		Antártica	Futuro
BOREXINO	Estudio de Neutrinos solares de bajas energías	2010- Descubrimiento de geo-neutrinos de el interior de la Tierra. 2011- Se publica con precisión el flujo de neutrinos del Berilio-7. 2012- Ellos publicaron las mediciones de la luz de los neutrinos en el CERN.	Gran Sasso, Italia	2007-
Daya Bay	El experimento estudia oscilaciones de neutrinos y esta diseñado para medir a ángulo de mezcla Theta 13. Además de estar interesado en si los neutrinos violan CP		Daya Bay, China	2011-
Double Chooz	Su objetivo es medir o establecer un limite para medir el ángulo de mezcla $\theta_{13}$ .	2011-Sugieren un valor distinto de cero para $\theta_{13}$ .	Chooz, France	2011-
EXO- 200	Es un experimento que busca a neutrinos en el decaimiento doble beta del Xenon-136	2011- primer experimento en observar el decaimiento doble beta del Xenon-136	WIPP, New México	2009-
HALO	Es un detector de neutrinos creados en supernovas en nuestra galaxia (En construcción)		Creighton Mine, Ontario Canadá	2012-
IceCube	Telescopio de Neutrinos IceCube había detectado 28 neutrinos probablemente generados fuera del sistema solar	2013- se anuncio que se encontraron un par de neutrinos de alta energía	Polo sur, Antártica	2006-
KamLAND	Detección de antineutrinos electrónicos	Determinación del mejor parámetro de oscilación de neutrinos $\tan(\theta)^2 = 0.4 \pm 0.1$	Kamioka, Japan	2002-

## CAPÍTULO 1. SOBRE NEUTRINOS

### 1.6. EL EXPERIMENTO SUPER-K

MINERvA	Busca medir las interacciones de neutrinos de baja energia tanto en apoyo de los experimentos de oscilación de neutrinos y estudiar la dinámica fuerte nucleon - nucleo		Illinois, USA	2009-
MiniBooNE	Observar oscilaciones de neutrinos.	2007- los primeros resultados, no mostraron evidencia de la oscilación neutrino muonico a neutrino electrónico en la región de baja energia	Illinois, USA	2002-
MINOS+	Búsqueda de neutrinos de alta energia Búsqueda del tau neutrino Búsqueda de dimensiones extra Neutrinos Atmosféricos Medición del tiempo de vuelo del neutrino		Illinois y Minnessota, USA	2013-
NEVOD	Es un detector de neutrinos y experimento de rayos cósmicos que intenta detectar radiación de Cherenkov surgiendo de interacciones entre agua y partículas cargadas (mayormente muones)	nvestigación primaria y propósitos educacionales	Moscow, Rusia	1993-
OPERA	Instrumento utilizado para la detección de tau neutrinos de oscilaciones de neutrinos muonicos	Neutrinos mas rápidos que la luz (resultado erróneo)	LNGS (Italia) y CERN	2008-
RENO	Experimento de oscilación de neutrinos diseñado para medir o establecer un limite a $\Theta_{13}$	2012- se anuncia una observación de $4.9 \sigma$ $\sin(\Theta_{13})^2 = 0.113 \pm 0.031$	Sur Corea	2011-
Súper-K	Observatorio de neutrinos diseñado para lanvertigacion del decaimiento del proton, estudio de neutrinos solares y atmosfericos, y observar supernovas en la galaxia.	1998- se anuncia la evidencia de oscilacion de neutrinos.	Kamioka, Japon	1996-

Tabla 1.2: Se muestran los experimentos en búsqueda de neutrinos, experimentos en funcionamiento y proyectos futuros.



## Capítulo 2

# Los neutrinos y THDM-III

En esta sección hablaremos acerca de como implementar la masa del neutrino en el marco de del THDM-III, para lograrlo explicaremos primero, los diferentes comportamientos posibles del neutrino, si ellos se comportan de manera análoga a todos los demás fermiones entonces los llamaremos neutrino de Dirac. Por otro lado por ser neutros existe también la posibilidad de que ellos se comporten como partículas de Majorana, entonces los llamaremos neutrinos de Majorana. Enseguida trataremos la construcción del término de masa para los dos tipos de neutrinos y aun mas consideraremos el caso híbrido (mezcla de neutrinos de Dirac y neutrinos Majorana) [7, 20, 27]. Acto seguido explicaremos el mecanismo de generación de masa para los neutrinos; debido a la amplia diferencia entre las magnitudes de las masas de los neutrinos el mecanismo de Higgs no es suficiente, por lo que se introduce el mecanismo See-Saw tipo I para este fin. En la parte final analizaremos de forma breve la principales características del THDM-III y como nos permitirá introducir los términos de masa del neutrino que en el SM están ausentes.

### 2.1. Términos de masa para el neutrino

En el Modelo Estándar los neutrinos se proponen sin masa, sin embargo, experimentos han demostrado lo contrario [28], es decir, los neutrinos son masivos, las implicaciones teóricas para neutrinos masivos son [9, 20]:

- Existe el término de masa en el lagrangiano de Dirac.
- Se da el cambio de sabor entre neutrinos (oscilación de neutrinos).
- Puede existir el decaimiento de un neutrino pesado en otros más ligeros por ejemplo  $\nu_\tau \rightarrow \nu_\mu + \nu_e$ .

Todos los fermiones conocidos son descritos por la ecuación de Dirac, así pues los llamamos partículas de Dirac y en la Teoría Cuántica de Campos, son representados por espinores complejos de Dirac de 4 componentes, sin embargo el neutrino en el ME obedece esta misma ecuación pero en el caso especial en el que su masa es igual a cero, por este motivo son representados por los espinores de Weyl complejos de dos componentes. Como hemos dicho antes los neutrinos son masivos y por tanto no pueden seguir siendo representados por espinores de Weyl, bueno entonces ¿serán también partículas de Dirac como los demás fermiones? La masa del neutrino, nos hace pensar que ya no hay muchas diferencias con los demás fermiones, pero recordemos que el neutrino no tiene carga eléctrica y que además las partículas solo se diferencian de sus antipartículas por el signo de su carga eléctrica, así pues, el neutrino al ser una partícula neutra podría ser indistinguible de su antipartícula y si este fuera el caso el neutrino sería llamado partícula de Majorana.

Ahora supongamos que tenemos un electrón en nuestro sistema de referencia que viaja a una velocidad  $\vec{v}$  en dirección  $z$ . La componente  $z$  de su espín es  $-\frac{1}{2}$ , por lo que tenemos un electrón con helicidad izquierda o electrón izquierdo  $e_L$ . Ahora imaginemos un observador que se mueve en dirección  $z$  pero a una mayor velocidad que el electrón, así pues para él, el electrón se mueve en la dirección opuesta y observa una partícula con helicidad derecha. Pero tenemos dos posibilidades, es decir, que se trate del electrón derecho  $e_R$  o del antielectrón derecho  $\bar{e}_R$ . Como podemos elegir pues debido a que sólo cambiamos de sistema de referencia, la carga eléctrica debe permanecer idéntica, así descartamos a  $\bar{e}_R$  debido a que su carga eléctrica es opuesta a la del electrón y la partícula que este nuevo observador debe ver es  $e_R$ .

Si ahora tenemos un neutrino izquierdo  $\nu_L$  en el lugar de  $e_L$  ¿que sucederá? como los neutrinos son masivos, su velocidad debe ser menor a la velocidad de la luz y por tanto podemos imaginar un observador más rápido que  $\nu_L$  entonces ¿que partícula observará nuestro observador? para estar en las mismas condiciones que en el caso del electrón, debemos añadir a  $\nu_R$  y  $\bar{\nu}_L$ . Si se da el caso en que el observador vea un  $\nu_R$ , entonces podemos asegurar que el neutrino es una partícula de Dirac. Pero si no existieran  $\nu_R$  y  $\bar{\nu}_L$ , ¿cómo enfrentaríamos este problema? pues el neutrino que observaría sería una partícula de Majorana.

Hablaremos enseguida del objeto más importante en la teoría de neutrinos masivos, el término de masa. Teóricamente la ecuación de Dirac, puede ser derivada a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange del lagrangiano de Dirac dado por:

$$L = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x), \quad (2.1)$$

donde el último término es conocido como término de masa. Puede verse que este término es un invariante de Lorentz (invariante ante transformaciones de Lorentz). Así pues construiremos términos de masa para partículas con espín 1/2 de tal forma que cumplan el requisito de ser invariantes de Lorentz. En términos de  $\psi_R$  y  $\psi_L$ , el lagrangiano anterior tiene la forma:

$$L = i\bar{\psi}(x)_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)_L + i\bar{\psi}(x)_R\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)_R - m(\bar{\psi}_L\psi_R + \psi_L\bar{\psi}_R). \quad (2.2)$$

donde podemos observar que se necesitan ambas componentes de quiralidad para formar el término de masa.

### 2.1.1. Término de masa de Dirac

Para el caso de los neutrinos específicamente, asumiendo que existen tres singletes derechos  $\nu_{lR}(x)$  y debido a los tres sabores de neutrinos obtendríamos al término de masa más general, como sigue:

$$L^D(x) = - \sum_{l,l'} \bar{\nu}_{lL}(x) M_{l'l}^D \nu_{l'R}(x) + h.c., \quad (2.3)$$

donde  $l$  y  $l'$  corren sobre  $e, \mu$  y  $\tau$ ;  $M_{l'l}^D$  es una matriz compleja de  $3 \times 3$ . El término anterior es invariante ante la siguiente transformación global,

$$\nu'_{lL}(x) = e^{i\Lambda} \nu_{lL}(x), \quad \nu'_{lR}(x) = e^{i\Lambda} \nu_{lR}(x), \quad l'(x) = e^{i\Lambda} l(x), \quad q'(x) = q(x). \quad (2.4)$$

Aquí  $\Lambda$  es una fase arbitraria constante. De la invariancia bajo la transformación (2.4), se sigue que el número leptónico total  $L$ , el cual es el mismo para todos los leptones cargados y todos los sabores de neutrinos, se conserva.

La matriz compleja  $M^D$  puede ser diagonalizada por una transformación biunitaria [7]:

$$M^D = U^\dagger m V, \quad (2.5)$$

donde  $U$  y  $V$  son matrices unitarias, y  $m_{ik} = m_i \delta_{ik}$ ,  $m_i > 0$ . De las dos últimas ecuaciones se tiene que:

$$\nu_{iL}(x) = \sum_{i=1}^3 U_{li} \nu_{iL}(x), (L = e, \mu, \tau), \quad (2.6)$$

y

$$\nu_{iR}(x) = \sum_{i=1}^3 U_{li} \nu_{iR}(x), (L = e, \mu, \tau). \quad (2.7)$$

Finalmente, el término de masa toma la forma:

$$L^D(x) = - \sum_{i=1}^3 m_i \bar{\nu}_i(x) \nu_i(x). \quad (2.8)$$

De (2.6) y (2.8) concluimos que

1.  $\nu_i$  es el campo del neutrino con masa  $m_i$  ( $i=1,2,3$ ).
2. Los campos de sabor izquierdos  $\nu_{iL}(x)$  son campos mezclados.

La matriz de mezcla  $U$  es conocida como matriz de mezcla Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS). Ahora observemos que el lagrangiano (2.8), es invariante bajo las transformaciones

$$\nu'_i(x) = e^{i\Lambda} \nu_i(x), \quad l'(x) = e^{i\Lambda} l(x), \quad q'(x) = q(x). \quad (2.9)$$

Esta invariancia quiere decir que  $\nu_i(x)$  es el campo de Dirac de neutrinos y antineutrinos, partículas con la misma masa  $m_i$ . Los números leptónicos de neutrinos y antineutrinos son opuestos  $L(\nu_i) = 1$  y  $L(\bar{\nu}_i) = -1$ . La ecuación (2.3) es conocida como término de masa de Dirac.

### 2.1.2. Término de Masa de Majorana

Tomando en cuenta que podemos construir un neutrino derecho (izquierdo) a partir de un neutrino izquierdo (derecho), utilizando el operador de carga  $C^1$ , es decir,  $(\nu_{iL})^c = C \bar{\nu}_{iR}^T$  ( $(\nu_{iR})^c = C \bar{\nu}_{iL}^T$ ) es la componente derecha (izquierda) del campo, nosotros podemos fácilmente construir un término de masa en el cual solo los campos izquierdos (derechos) participen. El término más general de este tipo tiene la forma:

$$L^M = -\frac{1}{2} \sum_{l', l=e, \mu, \tau} \bar{\nu}_{l'L} M_{l'l}^M (\nu_{lL})^c + h.c. = -\frac{1}{2} \sum_{l', l=e, \mu, \tau} \bar{\nu}_{l'L} M_{l'l}^M C \bar{\nu}_{lL}^T + h.c., \quad (2.10)$$

donde  $M^M$  es una matriz compleja no diagonal.

El término de masa (2.10) puede ser escrita en la siguiente forma

$$L^M = -\frac{1}{2} \bar{\nu}_L M^M (\nu_L)^c + h.c., \quad (2.11)$$

donde  $M^M$  es una matriz de  $3 \times 3$  y

$$\nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Ahora mostremos que  $M^M$  es una matriz simétrica. En efecto, tomando en cuenta (A.1) y (A.2), encontramos

$$\bar{\nu}_L M^M (\nu_L)^c = \bar{\nu}_L M^M C \nu_L^T = -\bar{\nu}_L (M^M)^T C^T \nu_L^T = \bar{\nu}_L (M^M)^T (\nu_L^T)^c \quad (2.13)$$

---

<sup>1</sup>Ver apéndice A

De aquí que la matriz  $M$  es simétrica:

$$M^M = (M^M)^T. \quad (2.14)$$

Ahora necesitamos tener al término de masa en forma diagonal. Así, la matriz simétrica compleja  $M^M$  puede ser presentada en la forma:

$$M^M = UmU^T, \quad (2.15)$$

donde  $U$  es una matriz unitaria, y  $m_{ik} = m_i\delta_{ik}$ ,  $m_i > 0$ . De (2.11) y (2.15), se tiene que:

$$-\frac{1}{2}L^M = -\frac{1}{2}\bar{\nu}_L UmU^T C\nu_L^T = -\frac{1}{2}\overline{U^\dagger\nu_L} m (U^\dagger\nu_L)^c - \frac{1}{2}\overline{U^\dagger\nu_L} m U^\dagger\nu_L. \quad (2.16)$$

Así finalmente el término de masa tiene la forma

$$L^M = -\frac{1}{2}\bar{\nu}^M m\nu^M \quad (2.17)$$

donde

$$\nu^M = U^\dagger\nu_L + (U^\dagger\nu_L)^c = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad m = \text{diag}\{m_1, m_2, m_3\}. \quad (2.18)$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (2.17) y (2.18)

$$L^M = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^3 m_i \bar{\nu}_i \nu_i. \quad (2.19)$$

Así,  $\nu_i(x)$  es el campo del neutrino con masa  $m_i$ . Además, de (2.18)

$$\nu^M = (\nu^M)^c, \quad (2.20)$$

Y el campo del neutrino con masa definida cumple con

$$\nu_i = (\nu_i)^c. \quad (2.21)$$

Así pues, esta última ecuación es conocida como condición de Majorana.

El campo  $\nu^M$  puede ser reescrito tomando en cuenta las componentes derecha e izquierda:

$$\nu^M = \nu_L^M + \nu_R^M, \quad (2.22)$$

de aquí que comparando con la ecuación (2.18), se tiene:

$$\nu_L^M = U^\dagger\nu_L \quad \nu_R^M = (U^\dagger\nu_L)^c. \quad (2.23)$$

Observamos que para neutrinos de Majorana las componentes izquierda y derecha están conectadas de la siguiente manera:

$$\nu_R^M = (\nu_L^M)^c. \quad (2.24)$$

Lo que es equivalente a

$$\nu_{iR} = (\nu_{iL})^c. \quad (2.25)$$

Comparando con los neutrinos de Dirac, se tiene la diferencia principal entre ambos tipos de neutrinos, Dirac y Majorana. En el primer caso, las componentes derecha e izquierda son independientes y en el segundo caso, las componentes derecha e izquierda están conectadas por la relación (2.25).

Finalmente consideremos una transformación local *gauge* sobre la componente izquierda del neutrino:

$$\nu'_L(x) = e^{i\alpha}\nu_L(x),$$

donde  $\alpha$  es una constante. Entonces para la componente derecha se tienen

$$(\nu'_L(x))^c = e^{-i\alpha}(\nu_L(x))^c. \quad (2.26)$$

Con esta transformación se deduce que el lagrangiano dado por (2.11) no es invariante. Por lo tanto en el caso de términos de Majorana no existe una simetría global *gauge*, y por tanto el número leptónico no se conserva.

### 2.1.3. Término de masa Dirac-Majorana

Como hemos dicho antes, para construir un término de masa para el neutrino sólo nos hemos fijado en que los productos involucrados sean invariantes de Lorentz. Así podemos construir un término de masa más general, utilizando los dos anteriores y tomando en cuenta a los neutrinos activos (izquierdos) y los neutrinos estériles (derechos) como sigue:

$$L^{D+M} = -\frac{1}{2}\bar{\nu}_L M_L^M (\nu_L)^c - \bar{\nu}_L M^D \nu_R - \frac{1}{2}\overline{(\nu_R)^c} M^M \nu_R + h.c. \quad (2.27)$$

EL lagrangiano (2.27) es la suma del término de masa de Majorana izquierdo, el término de masa de Dirac y el término de masa de Majorana izquierdo, donde  $M_L^M$  y  $M_R^M$  son matrices simétricas de  $3 \times 3$  no diagonales y  $M^D$  es una matriz compleja no diagonal de  $3 \times 3$ , la columna  $\nu_L$  está dada por (2.12) y

$$\nu_R = \begin{pmatrix} \nu_{eR} \\ \nu_{\mu R} \\ \nu_{\tau R} \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

De la misma manera que para neutrinos de Majorana, en este caso tampoco se conserva el número leptónico  $L$ .

Para diagonalizar el lagrangiano (2.27) podemos comenzar por re escribirlo de la siguiente manera:

$$L^{D+M} = -\frac{1}{2}\bar{n}_L M^{D+M} (n_L)^c + h.c.. \quad (2.29)$$

Aquí  $n_L$  está dado por

$$n_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ (\nu_R)^c \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

y

$$M^{D+M} = \begin{pmatrix} M_L^M & M^D \\ M^D & M_R^M \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

es una matriz simétrica de  $6 \times 6$ . En (2.29) se tomó en cuenta que:

$$\nu_L M^D \nu_R = -(\nu_R)^T (M^D)^T (\bar{\nu}_L)^T = \overline{(\nu_R)^c} (M^D)^T (\nu_L)^c. \quad (2.32)$$

La matriz  $M^{D+M}$  se puede presentar en su forma diagonal como:

$$M^{D+M} = U m U^T, \quad (2.33)$$

donde  $U$  es una matriz unitaria de  $6 \times 6$  y  $m_{ik} = m_i \delta_{ik}$  ( $i = 1, \dots, 6$ ). Sustituyendo (2.33) en (2.29), obtenemos:

$$L^{D+M} = -\frac{1}{2}\overline{U^\dagger \nu_L} m (U^\dagger \nu_L)^c + h.c. = -\frac{1}{2}\bar{\nu}^M m \nu^M = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 m_i \bar{\nu}_i \nu_i \quad (2.34)$$

Aquí,

$$\nu^M = \nu_L^M + (\nu_L^M)^c = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \nu_6 \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

donde

$$\nu_L^M = U^\dagger n_L. \quad (2.36)$$

De (2.35) tenemos

$$(\nu^M)^c = \nu^M \quad (\nu_i)^c = \nu_i (i = 1, \dots, 6). \quad (2.37)$$

Así,  $\nu_i$  es el campo de partículas de Majorana con masa  $m_i$ . De (2.36) se sigue que las  $\nu_{iL}$  y  $(\nu_{iR})^c$  están conectadas con las componentes de los campos de Majorana  $\nu_{iL}$  por una transformación unitaria. En efecto, tenemos

$$n_L = U\nu_L^M. \quad (2.38)$$

Finalmente,

$$\nu_{iL}(x) = \sum_{i=1}^6 U_{ii}\nu_{iL}, \quad (\nu_{iR}(x))^c = \sum_{i=1}^6 U_{\bar{i}i}\nu_{iL}. \quad (2.39)$$

En el caso del término de masa Dirac-Majorana, los campos de sabor  $\nu_{iL}$  son una mezcla de los seis campos izquierdos de partículas de Majorana con masa  $m_i$ . Los campos estériles  $(\nu_{iR})^c$  son una mezcla de las mismas componentes.

## 2.2. Mecanismo See-Saw

El mecanismo a partir del cual todas las partículas obtienen su masa en el marco del ME, es conocido como mecanismo de Higgs. Pero, qué pasa cuando se comparan las magnitudes de la masa de los leptones y quarks con la de los neutrinos?, la diferencia es muy notoria. Por este motivo el mecanismo de Higgs no funciona para los neutrinos, lo que provoca la creación de nuevos mecanismos de generación de masa para ellos. El mecanismo más conocido de este tipo es el mecanismo See-Saw, que se basa en el término de masa híbrido Dirac-Majorana [29].

El mecanismo See-Saw fue propuesto a finales de los setenta. Es aparentemente el mecanismo de generación de masa para el neutrino más viable.

La matriz  $M^{D+M}$  (2.31) es una matriz simétrica compleja, por lo que para ser diagonalizada se necesita de:

$$m = U^T M^{D+M} U = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}, \quad (2.40)$$

donde  $U$  es una matriz unitaria de  $6 \times 6$  y  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$  son matrices de  $3 \times 3$  correspondientes a los eigenvalores de la matriz  $M^{D+M}$ . La diagonalización nos permite desacoplar los grados de libertad correspondientes a los neutrinos activos, de los grados de libertad correspondientes a los neutrinos estériles.

Así, los eigenvalores de  $M^{D+M}$  son:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(M_R^M + M_L^M) \mp M_R^M \sqrt{(I - (M_R^M)^{-1}M_L^M)^2 + 4(M_R^M)^{-1}M^D M_R^M (M^D)^T} \quad (2.41)$$

La matriz compleja  $U$  está dada por:

$$U = \begin{pmatrix} N_1^{-1} & -N_2^{-1}(\lambda_1 - M_L^M)^\dagger((M^D)^{-1})^\dagger \\ N_1^{-1}(M^D)^{-1}(\lambda_1 - M_L^M) & N_2^{-1} \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

donde

$$N_1^2 = I + (\lambda_1 - M_L^M)^\dagger((M^D)^{-1})^\dagger(M^D)^{-1}(\lambda_1 - M_L^M) \quad (2.43)$$

$$N_2^2 = I + (M^D)^{-1}(\lambda_1 - M_L^M)(\lambda_1 - M_L^M)^\dagger((M^D)^{-1})^\dagger \quad (2.44)$$

Así pues, el mecanismo See-Saw consiste en tomar la siguiente jerarquía:

$$M_R^M \gg M^D \gg M_L^M. \quad (2.45)$$

Esto permite hacer aproximaciones confiables de las matrices de masas efectivas para los neutrinos activos ( $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ ), además de dar una explicación de la pequeña magnitud de estas masas. Con esta jerarquía se pueden aproximar los eigenvalores  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ , de la siguiente forma:

$$\lambda_1 = M_L^M - M^D(M_R^M)^{-1}(M^D)^T \equiv \widetilde{M}_L^M \quad (2.46)$$

$$\lambda_2 = M_R^M + M^D (M_R^M)^{-1} (M^D)^T \equiv M_R^M \quad (2.47)$$

y la matriz  $U$  queda de la siguiente manera:

$$U = \begin{pmatrix} I - \frac{1}{2} (M^D)^* (M_R^M)^{-1} (M^D)^T & (M^D)^* ((M_R^M)^*)^{-1} \\ -(M_R^M)^{-1} (M^D)^T & I - \frac{1}{2} (M_R^M)^{-1} (M^D)^T (M^D)^* ((M_R^M)^*)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Finalmente, la ecuación (2.40) se escribe como:

$$U^T M^{D+M} U = \text{diag}\{\widetilde{M}_L^M, M_R^M\} \quad (2.49)$$

La diagonalización de la matriz de masas efectiva  $\widetilde{M}_L^M$  da como resultado  $n$  neutrinos de Majorana ligeros, los cuales son predominantemente compuestos de los neutrinos usuales  $\nu_L$  (activos) y de la pequeña mezcla de los neutrinos derechos y los neutrinos de Dirac; al diagonalizar la matriz  $M_R^M$  se producen  $n$  neutrinos de Majorana pesados, los cuales son compuestos principalmente de los neutrinos derechos  $\nu_R$ .

En resumen, el resultado de la (2.46) es conocido como el mecanismo See-Saw tipo (I+II) que es la matriz de masas efectiva de los neutrinos activos. La pequeña escala de la masa de  $\widetilde{M}_L^M$  se atribuye a la escala pequeña de la masa  $M_L^M$  y la escala de masas grandes a  $M_R^M$ . Existen dos límites:

1. Si  $M_L^M \rightarrow 0$  de la ec. (2.46), uno se queda con el mecanismo See-Saw canónico o tipo-I:

$$\widetilde{M}_L^M \approx -M^D (M_R^M)^{-1} (M^D)^T. \quad (2.50)$$

2. Si  $M_L^M$  esta presente en la ec. (2.46), uno se queda con el mecanismo See-Saw tipo-II:

$$\widetilde{M}_L^M \approx M_L^M - M^D (M_R^M)^{-1} (M^D)^T. \quad (2.51)$$

El mecanismo See-Saw tipo-II requiere que el bosón de Higgs sea representado por tripletes.

Aunque el Modelo Estándar (SM) ha sido muy exitoso en la descripción de la fenomenología de partículas elementales, el sector de Higgs de Modelo estándar es mínimo ¿Es esta la única forma del sector de Higgs? Esta es una buena pregunta y de hecho no existe restricción alguna que nos impida extender el sector de Higgs. La mínima extensión posible nos la proporciona el Modelo de Dos Dobletes de Higgs (THDM), al insertar un doblete adicional al sector de Higgs con los mismos números cuánticos que tenía el original, lo que se muestra en seguida.

## 2.3. El Modelo de Dos Dobletes de Higgs

Al insertar un segundo doblete de Higgs idéntico al original (del SM), el sector de Higgs para el 2HMD contiene dos dobletes de Higgs con los mismos números cuánticos [11, 30, 31]

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \phi_1^0 \end{pmatrix}; \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} \phi_2^+ \\ \phi_2^0 \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

y con hipercargas  $Y_1 = Y_2 = 1$ , en general ambos dobletes pueden adquirir VEV (Valor de Expectación en el Vacío):

$$\langle \Phi_1 \rangle = \frac{v_1}{\sqrt{2}} \quad \langle \Phi_2 \rangle = \frac{v_2}{\sqrt{2}} e^{i\theta}.$$

Es conveniente parametrizar los dobletes en la siguiente forma:

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \frac{h_1 + v_1 + ig_1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} \phi_2^+ \\ \frac{h_2 + v_2 + ig_2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

donde se desprenden 8 grados de libertad correspondientes a los campos reales incluidos en estos dobletes.

El lagrangiano más general del THDM esta dado de la siguiente manera:

$$L_{THDM} = L_B + L_H + L_f. \quad (2.54)$$

donde  $L_B$ ,  $L_H$  y  $L_f$  son los correspondientes lagrangianos bosónico, escalar y fermiónico respectivamente. Del lagrangiano bosónico surgen 8 bosones de norma, 3 Goldstone (asociados a  $Z^0$  y  $W^\pm$ ) y 5 bosones de Higgs, dos de ellos cargados ( $H^\pm$ ), dos neutros CP-par (escalares  $h^0$  y  $H^0$ ) y uno neutro CP-impar (pseudoescalar  $A^0$ ). En el sector bósónico, se encuentran las interacciones bósónicas asociadas a los bosones de norma y las masas de los mismos. Finalmente en el sector fermiónico están las interacciones de materia del tipo fermión-fermión, las masas de los mismos y las interacciones de los bosones de norma con los fermiones.

### 2.3.1. El potencial del THDM-III

El potencial de Higgs renormalizable para el modelo de dos dobletes complejos compatible con invarianza de norma, es escrito introduciendo una base de operadores invariantes de norma hermitianos dados por:

$$\hat{A} = \phi_1^\dagger \phi_1, \quad (2.55)$$

$$\hat{B} = \phi_2^\dagger \phi_2, \quad (2.56)$$

$$\hat{C} = \frac{1}{2} (\phi_1^\dagger \phi_2 + \phi_2^\dagger \phi_1) = Re(\phi_1^\dagger \phi_2), \quad (2.57)$$

$$\hat{D} = -\frac{i}{2} (\phi_1^\dagger \phi_2 - \phi_2^\dagger \phi_1) = Im(\phi_1^\dagger \phi_2). \quad (2.58)$$

El potencial de Higgs más general renormalizable, *i.e.* cuártico, se puede escribir como

$$\begin{aligned} V(\phi_1, \phi_2) = & m_{11}^2 (\phi_1^\dagger \phi_1) + m_{22}^2 (\phi_2^\dagger \phi_2) - [m_{12}^2 (\phi_1^\dagger \phi_2) + h.c.] \\ & + \frac{\lambda_1}{2} (\phi_1^\dagger \phi_1)^2 + \frac{\lambda_2}{2} (\phi_2^\dagger \phi_2)^2 + \lambda_3 (\phi_1^\dagger \phi_1) (\phi_2^\dagger \phi_2) + \lambda_4 (\phi_1^\dagger \phi_2) (\phi_2^\dagger \phi_1) \\ & + \left\{ \frac{\lambda_5}{2} (\phi_1^\dagger \phi_2)^2 + [\lambda_6 (\phi_1^\dagger \phi_1) + \lambda_7 (\phi_2^\dagger \phi_2)] (\phi_1^\dagger \phi_2) + h.c. \right\}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

donde *h.c.* significa el hermítico conjugado. Los parámetros  $m_{11}^2$ ,  $m_{22}^2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  son reales. En general  $m_{12}^2$ ,  $(m_{12}^2)^*$ ,  $\lambda_5$ ,  $\lambda_5^*$ ,  $\lambda_6$ ,  $\lambda_6^*$ ,  $\lambda_7$ ,  $\lambda_7^*$  son complejos. Entonces el potencial de Higgs en la ec. (2.59) depende de 6 parámetros reales y 4 parámetros complejos, es decir, un total de 14 grados de libertad. Sin embargo, la libertad para redefinir la base significa que en realidad solo once grados de libertad son físicos.

Este potencial de Higgs tiene las siguientes propiedades:

1. Es renormalizable.
2. Es hermítico  $V^\dagger = V$ .
3. Permite violación explícita de *CP* y sólo conserva *CP* explícitamente, cuando  $m_{12}$ ,  $\lambda_5$ ,  $\lambda_6$ ,  $\lambda_7$  son reales, esto es  $\mu_4, \lambda_8, \lambda_9, \lambda_{10} = 0$ .

4. Si  $\lambda_6 = \lambda_7 = m_{12}^2 = 0$ , entonces  $V$  es invariante ante transformaciones  $\phi_1 \rightarrow \phi_1, \phi_2 \rightarrow -\phi_2$  o  $\phi_2 \rightarrow \phi_2, \phi_1 \rightarrow -\phi_1$ , esto es  $V$  es simétrico bajo el grupo  $Z_2$ . Entonces el potencial de Higgs resultante es:

$$V(\phi_1, \phi_2) = m_{11}^2 (\phi_1^\dagger \phi_1) + m_{22}^2 (\phi_2^\dagger \phi_2) + \frac{\lambda_1}{2} (\phi_1^\dagger \phi_1)^2 + \frac{\lambda_2}{2} (\phi_2^\dagger \phi_2)^2 + \lambda_3 (\phi_1^\dagger \phi_1) (\phi_2^\dagger \phi_2) + \lambda_4 (\phi_1^\dagger \phi_2) (\phi_2^\dagger \phi_1) + \left[ \frac{\lambda_5}{2} (\phi_1^\dagger \phi_2)^2 + h.c. \right]. \quad (2.60)$$

Para el potencial, las masas y eigenestados de Higgs están definidos en términos de los parámetros  $\mu_i$  y  $\lambda_i$ , consecuentemente dependen de la elección del potencial. Ahora, consideremos el caso de conservación de  $CP$  para el VEV, en el caso del sector de Higgs obtendremos dos escalares de  $CP$  par ( $H^0, h^0$ ), un escalar de  $CP$  impar ( $A^0$ ), dos bosones de Higgs cargados ( $H^+, H^-$  y los bosones de Goldstone ( $G^+, G^-, G^0$ ) correspondiente a ( $W^+, W^-, Z^0$ ), respectivamente. Los eigenestados de masa son obtenidos de la definición de los eigenestados de norma en (2.53), de las siguientes transformaciones:

$$\begin{pmatrix} G^+ \\ H^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \phi_2^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad (2.61)$$

$$\begin{pmatrix} H^0 \\ h^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1^+ \\ h_2^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad (2.62)$$

$$\begin{pmatrix} G^0 \\ A^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1^+ \\ g_2^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad (2.63)$$

donde

$$\begin{aligned} (\phi_{1R}, \phi_{1I})^T &\rightarrow \phi_{1R} + i\phi_{1I} \equiv \phi_1^+, & (\phi_{2R}, \phi_{2I})^T &\equiv \phi_2^+, & \sin \beta &= \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, \\ (G_1, G_2)^T &\rightarrow G_1 + iG_2 \equiv G^+, & (H_1, H_2)^T &\equiv H^+, & \cos \beta &= \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}. \end{aligned}$$

Las masas de Higgs y el ángulo de mezcla  $\alpha$  son:

$$M_{H^+}^2 = \mu_{22}^2 + \frac{1}{2}\lambda_3 v_1^2, \quad (2.64)$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\lambda_6 v_1^2}{(2\lambda_1 - \lambda_+) v_1^2 + \mu_2^2}, \quad \lambda_+ \equiv \frac{1}{2}(\lambda_3 + \lambda_5), \quad (2.65)$$

$$m_{H^0, h^0}^2 = \left( \lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_+ \right) v_1^2 - \frac{1}{2}\mu_2^2 \pm \sqrt{\left[ \left( \lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_+ \right) v_1^2 + \frac{1}{2}\mu_2^2 \right]^2 + \left( \frac{1}{2}\lambda_6 v_1^2 \right)^2}. \quad (2.66)$$

El primer valor corresponde a un bosón tipo Goldstone neutro y el segundo está asociado con el bosón de Higgs neutro pseudoescalar,

$$M_{G^0} = 0, \quad m_{A^0} = -\mu_{22}^2 + \frac{1}{2}(\lambda_4 + \lambda_4) v_1^2. \quad (2.67)$$

Los diferentes modelos de dos dobletes de Higgs difieren uno de otro por el método utilizado para la supresión de los cambios de sabor por corrientes neutras FCNC. Por ejemplo el THDM-I impone la simetría  $Z_2$  sobre los dobletes de Higgs lo que permite que solo un Higgs se acople con los fermiones y garantiza la supresión de FCNC. En el THDM-III, se utiliza una textura particular de las matrices de Yukawa ([32, 33]) y por ende de las matrices de masa que garantiza la inexistencia de FCNC.

Los diferentes THDM's pueden ser distinguidos por la estructura del sector de Yukawa correspondiente a cada uno de ellos, ya que este sector controla la aparición de FCNC, por lo nos enfocaremos en el sector de Yukawa concerniente a THDM-III.

## 2.4. El sector de Yukawa de THDM-III

El lagrangiano de Yukawa de THDM-III permite el acoplamiento de ambos dobletes del Higgs con los fermiones, y en el caso leptónico, esta dado por [34] :

$$L_Y = \sum_{k=1}^2 (\mathbf{Y}_k^{\nu_l} \bar{L}_l \tilde{\Phi}_k \nu_{lR} + \mathbf{Y}_k^l \bar{L}_l \Phi_j l_R) + h.c. \quad (2.68)$$

donde  $\Phi_j = (\phi_j^+, \phi_j^0)^T$  con  $j = 1, 2$ , denota los dobletes de Higgs con  $\tilde{\Phi}_j = i\sigma_2 \Phi_j^*$  ( $\sigma_2$  representa la matriz de Dirac),  $\mathbf{Y}_j^f$  con  $f = l, \nu_l$  son las matrices de Yukawa complejas de  $3 \times 3$ , el contenido de materia esta representado por:

$$L_l = \begin{pmatrix} \nu_{lL} \\ l \end{pmatrix}. \quad (2.69)$$

y los neutrinos derechos representados por  $\nu_{lR}$  con  $l = e, \mu, \tau$ . Ahora analizaremos la matriz de masa asociada a este sector. En el espacio de sabor, la matriz de masa, en general puede ser escrita como:

$$\mathbf{M}_f = \frac{1}{\sqrt{2}} (v_1 \mathbf{Y}_1^f + v_2 \mathbf{Y}_2^f), \quad f = l, \nu_l \quad (2.70)$$

donde  $v_{1,2}$  son los valores de expectación asociados a cada uno de los dobletes de Higgs. Además, estas matrices pueden ser diagonalizadas a partir de una transformación biunitaria [35],

$$\mathbf{U}_{fL} \mathbf{M}_f \mathbf{U}_{fR}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (v_1 \tilde{\mathbf{Y}}_1^f + v_2 \tilde{\mathbf{Y}}_2^f) = \Delta_f \quad (2.71)$$

donde  $\Delta_f = \text{diag}(m_{f1}, m_{f2}, m_{f3})$  y  $\tilde{\mathbf{Y}}_k^f = \mathbf{U}_{fL} \mathbf{Y}_k^f \mathbf{U}_{fR}^\dagger$  ( $k = 1, 2$ ). Esta transformación conecta el espacio de sabor y el espacio de masa. Tomando  $v^2 = v_1^2 + v_2^2 = (246\text{GeV})^2$  y  $\tan \beta = \frac{v_2}{v_1}$  [11], tenemos que:

$$(\Delta_f)_{ij} = \frac{v \cos \beta}{\sqrt{2}} [(\tilde{\mathbf{Y}}_1^f)_{ij} + \tan \beta (\tilde{\mathbf{Y}}_2^f)_{ij}] \quad (2.72)$$

donde  $i, j = 1, 2, 3$ . De esta relación se deduce que los elementos fuera de la diagonal de las matrices de Yukawa en el espacio de masa  $\tilde{\mathbf{Y}}_k^f$ , obedecen la siguiente relación:

$$(\tilde{\mathbf{Y}}_1^f)_{ij} = -\tan \beta (\tilde{\mathbf{Y}}_2^f)_{ij}, \quad i \neq j. \quad (2.73)$$

Esta ultima condición puede ser satisfecha de distintas maneras, por ejemplo en los casos de THDM-I,II, al imponer una simetría discreta  $Z_2$  uno de las matrices de Yukawa es cero y por lo tanto la matriz de masa y de Yukawa tienen la misma forma. En el caso del THDM-III, con una textura particular de las matrices de Yukawa [33], la ecuación (2.73) se satisface por construcción.

## 2.5. La conexión entre los neutrinos y THDM-III

Hasta ahora hemos hablado del sector de Yukawa del THDM-III para el caso leptónico de manera general. Sin embargo no utilizaremos todo este sector en nuestro análisis final, lo único que nos interesa es la masa del neutrino. También ya describimos cada una de las posibilidades de la naturaleza del neutrino, por lo que finalmente se adopto por incluir un tratamiento híbrido de la masa del neutrino. Así utilizando el mecanismo See-Saw Tipo I (2.50), asumiremos que la matriz de Dirac  $M^D$  de neutrinos izquierdos, se relaciona con la ecuación (2.70) de la siguiente manera con las matrices de Yukawa provenientes de THDM-III:

$$M^D = \frac{1}{\sqrt{2}} (v_1 \mathbf{Y}_1^{\nu_l} + v_2 \mathbf{Y}_2^{\nu_l}). \quad (2.74)$$

---

<sup>2</sup>El neutrino derecho depende de la naturaleza del neutrino elegida.

Como mencionamos al final de la sección 2.4, en el THDM-III se satisface la ecuación (2.73), al imponer una textura de cuatro ceros [36, 37, 38, 39] para las matrices de Yukawa. En nuestro caso asumiremos un ansatz jerárquico, el cual considera que la matriz de masa de los neutrinos izquierdos  $M^D$  y ambas matrices de Yukawa  $\mathbf{Y}_k^{\nu_l}$  tienen la misma forma.

$$M^D = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{C}_{\nu_l} & 0 \\ C_{\nu_l}^* & \widetilde{B}_{\nu_l} & B_{\nu_l} \\ 0 & B_{\nu_l}^* & A_{\nu_l} \end{pmatrix} = \frac{v \cos \beta}{\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{C}_1^{\nu_l} & 0 \\ C_1^{\nu_l*} & \widetilde{B}_1^{\nu_l} & B_1^{\nu_l} \\ 0 & B_1^{\nu_l*} & A_1^{\nu_l} \end{pmatrix} + \tan \beta \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{C}_2^{\nu_l} & 0 \\ C_2^{\nu_l*} & \widetilde{B}_2^{\nu_l} & B_2^{\nu_l} \\ 0 & B_2^{\nu_l*} & A_2^{\nu_l} \end{pmatrix} \right] \quad (2.75)$$

Obsérvese la similitud con la ecuación (2.72). Para la aplicación de el mecanismo See-Saw Tipo I , también asumimos que la matriz  $M_R^M$  de los neutrinos de Majorana derechos tienen la misma estructura. Como veremos en el siguiente capítulo podemos parametrizar estas matrices en términos de las masas de los neutrinos “pesados”.



## Capítulo 3

# Matrices de Masa y Mezcla de Neutrinos

En la capítulo anterior hemos relacionado el sector de Yukawa del 2HDM-III con la matriz de masa de los neutrinos de Dirac, la cual nos ayudará construir la matriz de masa de los neutrinos izquierdos de Majorana a partir del mecanismo See-Saw I. Sin embargo la matriz de masa así generada se encuentra en la base de sabor para hallar las masas de los eigenestados de masa de los neutrinos  $(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ , debemos diagonalizarla por medio de una transformación unitaria lo que nos permitirá pasar a la base física y asociar sus eigenvalores con las masas de los neutrinos  $(m_{\nu_1}, m_{\nu_2}, m_{\nu_3})$ . Finalmente construiremos la matriz mezcla de los neutrinos  $V_{PMNS}$  lo que nos generará una conexión entre los datos experimentales conocidos de los ángulos de mezcla y nuestro modelo teórico.

### 3.1. Factorización de fases y reparametrización de las matrices de masa

En este trabajo se considera que los neutrinos izquierdos ( $M_{\nu_l}$ ) son partículas de Majorana y adquieren su masa pequeña a través del mecanismo see-saw tipo I. Consideremos  $M^D$  la matriz de masa de los neutrinos de Dirac hermitiana con dos ceros de textura. Además, se considera  $M_{\nu_R}$  como la matriz de los neutrinos derechos de Majorana simétrica con dos ceros de textura:

$$M^D = \begin{pmatrix} 0 & C & 0 \\ C^* & \tilde{B} & B \\ 0 & B^* & A \end{pmatrix}, \quad M_{\nu_R} = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ c & \tilde{b} & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

donde  $C, B, a, b, \tilde{b}, c \in \mathbb{C}$  y  $A, \tilde{B} \in \mathbb{R}$ . Estas texturas podrían ser una consecuencia de simetrías del sabor ocultas [40]. Recordemos que el mecanismo See-Saw I viene dado por:

$$M_{\nu_l} \approx -M^D(M_{\nu_R})^{-1}(M^D)^T. \quad (3.2)$$

Obsérvese que, por construcción, esta matriz es simétrica, lo cual restringe la forma de la matriz  $M_{\nu_R}$  que debe ser no singular y evidentemente simétrica. La matriz inversa de  $M_{\nu_R}$  está dada por:

$$(M_{\nu_R})^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{a\tilde{b}-b^2}{ac^2} & \frac{1}{c} & -\frac{b}{ac} \\ \frac{1}{c} & 0 & 0 \\ -\frac{c}{ac} & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

### CAPÍTULO 3. MATRICES DE MASA Y MEZCLA DE NEUTRINOS

#### 3.1. FACTORIZACIÓN DE FASES Y REPARAMETRIZACIÓN DE LAS MATRICES DE MASA

Así, todo está listo para utilizar el mecanismo See-Saw I. Tenemos que para  $M^D$  la matriz de masa de los neutrinos de Dirac hermitiana con dos ceros de textura, y  $M_{\nu_R}$ , la matriz de los neutrinos derechos de Majorana simétrica, se tiene que la matriz de neutrinos izquierdos de Majorana es de la forma:

$$M_{\nu_l} = \begin{pmatrix} 0 & & \frac{CC^*}{c} & 0 \\ \frac{CC^*}{c} & C^* \left( -\frac{C^*(a\tilde{b}-b^2)}{ac^2} + \frac{\tilde{B}}{c} - \frac{bB^*}{ac} \right) + \frac{\tilde{B}C^*}{c} + B^* \left( \frac{B^*}{a} - \frac{bC^*}{ac} \right) & A \left( \frac{B^*}{a} - \frac{bC^*}{ac} \right) + \frac{BC^*}{c} & 0 \\ 0 & C^* \left( \frac{B}{c} - \frac{Ab}{ac} \right) + \frac{AB^*}{a} & \frac{A^2}{a} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Podemos observar que después de utilizar el mecanismos See-Saw I, la matriz de masa de los neutrinos izquierdos conserva la misma textura de dos ceros<sup>1</sup>. También asumiremos la misma textura para la matriz de masa correspondiente a los leptones cargados, lo que puede podría justificar una similitud entre quarks y leptones:

$$M_l = \begin{pmatrix} 0 & C_l & 0 \\ C_l^* & \tilde{B}_l & B_l \\ 0 & B_l^* & A_l \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

donde  $C_l, B_l \in C$  y  $A_l, \tilde{B}_l \in R$ . Es útil reescribir la matriz  $M^D$  de tal manera que las fases permanezcan separadas. Así tenemos que:

$$M^D = P^\dagger \bar{M}^D P, \quad (3.6)$$

donde  $\bar{M}^D$  está dada en forma polar:

$$M^D = \begin{pmatrix} 0 & |C|e^{i\theta_C} & 0 \\ |C|e^{-i\theta_C} & \tilde{B} & |B|e^{i\theta_B} \\ 0 & |B|e^{-i\theta_B} & A \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

y  $P$  es una matriz diagonal de fases

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\eta_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\eta_2} \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Así, utilizando (3.6)-(3.8) se obtiene:

$$M^D = \begin{pmatrix} 0 & |C|e^{i(\theta_C+\eta_1)} & 0 \\ |C|e^{-i(\theta_C+\eta_1)} & \tilde{B} & |B|e^{i(\theta_B+\eta_2-\eta_1)} \\ 0 & |B|e^{-i(\theta_B+\eta_2-\eta_1)} & A \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

De 3.9 se derivan las siguientes relaciones:

$$\theta_C + \eta_1 = 0 \Leftrightarrow \eta_1 = -\theta_C \Rightarrow e^{i\theta_C+\eta_1} = 1, \quad (3.10)$$

$$\theta_B + \eta_2 - \eta_1 = 0 \Leftrightarrow \eta_2 = -(\theta_C + \theta_B) \Rightarrow e^{i(\theta_B+\eta_2-\eta_1)} = 1. \quad (3.11)$$

Por tanto se tiene  $\bar{M}^D$  es de la siguiente forma:

$$\bar{M}^D = \begin{pmatrix} 0 & |C| & 0 \\ |C| & \tilde{B} & |B| \\ 0 & |B| & A \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

---

<sup>1</sup> $M_{\nu_R}$  puede ser definida con mayor número de ceros de textura y la matriz resultante  $M_{\nu_l}$  aún permanece con una textura de dos ceros [29, 41], todas estas matrices que permiten que la estructura de los neutrinos izquierdos de Majorana no cambie son conocidos como see-saw invariantes [40]. Sin embargo, la matriz  $M_{\nu_R}$  definida antes, es la más general (con una textura de dos ceros)

### CAPÍTULO 3. MATRICES DE MASA Y MEZCLA DE NEUTRINOS

#### 3.1. FACTORIZACIÓN DE FASES Y REPARAMETRIZACIÓN DE LAS MATRICES DE MASA

Una manera de reescribir las matrices  $\bar{M}^D$  y  $M_{\nu_R}$  es a través de sus invariantes, a continuación, describimos brevemente los invariantes de una matriz.

Sean las matrices  $M, M' \in R^3 \times R^3$ . Decimos que  $M$  es semejante  $M'$  si existe una matriz invertible  $T \in R^3 \times R^3$  de tal forma que se cumple que:

$$M' = TMT^{-1}. \quad (3.13)$$

Las clases de equivalencia asociadas a semejanza se llaman *clase de similitud*. Otra particularidad de las clases de similitud es que las matrices que cumplen con la transformación de semejanza, ecuación (3.13), tienen los mismos invariantes: traza, determinante y  $\chi$ . Es decir:

$$Tr(M) = Tr(M') \quad Det(M) = Det(M') \quad \chi = \chi', \quad (3.14)$$

donde  $\chi$  se define como:

$$\chi \equiv \frac{1}{2}(Tr(M^2) - Tr(M)^2). \quad (3.15)$$

Usando lo anterior, obtenemos los invariantes para  $\bar{M}^D$  dada en (3.9):

$$Tr(\bar{M}^D) = A + \tilde{B}, \quad Det(\bar{M}^D) = -A|C|^2, \quad \chi(\bar{M}^D) = -A\tilde{B} + |B|^2 + |B|^2. \quad (3.16)$$

La matriz  $\bar{M}^D$  puede ser diagonalizada por una matriz ortogonal real  $U$  a través de la transformación

$$UM^DU^T = M_{diag}, \quad (3.17)$$

donde  $M_{diag} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ . Los invariantes para la matriz  $M_{diag}$  son:

$$Tr(M_{diag}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad Det(M_{diag}) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3, \quad \chi(M_{diag}) = -\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \quad (3.18)$$

Pero  $M^D$  es semejante a  $M_{diag}$ , por tanto deben compartir los mismos invariantes, así igualando las ecuaciones (3.16) y (3.18), obtenemos:

$$\tilde{B} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - A, \quad |C| = \sqrt{\frac{-\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{A}}, \quad |B| = \sqrt{\frac{(\lambda_3 - A)(A - \lambda_1)(A - \lambda_2)}{A}}. \quad (3.19)$$

Análogamente podemos realizar el mismo procedimiento para la matriz de masa ( $M_{\nu_R}$ ) dada en (3.1)<sup>2</sup>:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ c & \tilde{b} & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

la cual podemos reescribir factorizando las fases de la siguiente manera:

$$M_{\nu_R} = Q^T \bar{M}_{\nu_R} Q, \quad (3.21)$$

donde  $Q$  es una matriz diagonal de fases,

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\eta_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\eta_2} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

y la matriz  $\bar{M}_{\nu_R}$  está dada por:

$$\bar{M}_{\nu_R} = \begin{pmatrix} 0 & |c|e^{i\theta_c} & 0 \\ |c|e^{i\theta_c} & |\tilde{b}|e^{i\theta_b} & |b|e^{i\theta_b} \\ 0 & |b|e^{i\theta_b} & |a|e^{i\theta_a} \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

---

<sup>2</sup>Recordemos que  $M_{\nu_i}$  es simétrica

Uniendo estas ecuaciones (3.22) y (3.23), la matriz  $M$  queda de la siguiente forma:

$$M_{\nu_R} = \begin{pmatrix} 0 & |c|e^{i(\theta_c - \eta_1)} & 0 \\ |c|e^{i(\theta_c - \eta_1)} & \tilde{|b|}e^{i(\theta_b - 2\eta_1)} & |b|e^{i(\theta_b - \eta_1 - \eta_2)} \\ 0 & |b|e^{i(\theta_b - \eta_1 - \eta_2)} & |a|e^{i(\theta_a - 2\eta_2)} \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

De esta última podemos obtener las ecuaciones análogas a las ecuaciones dadas en (3.10) y (3.11), lo único que tenemos que hacer es elegir los ángulos  $\theta_a$ ,  $\theta_b$  y  $\theta_c$  de tal forma que las fases sean iguales a cero. Por medio de esta elección obtenemos que la matriz  $M_{\nu_R}$  tiene la forma:

$$\bar{M}_{\nu_R} = \begin{pmatrix} 0 & |c| & 0 \\ |c| & \tilde{|b|} & |b| \\ 0 & |b| & |a| \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Además, existe una matriz ortogonal real  $U$  que diagonaliza a la matriz  $\bar{M}_{\nu_R}$  de tal manera que:

$$U\bar{M}_{\nu_R}U^T = M'_{diag}, \quad (3.26)$$

donde  $M'_{diag} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ . Otra vez, como  $\bar{M}_{\nu_R}$  es semejante a  $M'_{diag}$  se tiene que comparten los mismos invariantes es decir:

$$Tr(\bar{M}_{\nu_R}) = Tr(M'_{diag}) \quad Det(\bar{M}_{\nu_R}) = Det(M'_{diag}) \quad \chi(\bar{M}_{\nu_R}) = \chi(M'_{diag}), \quad (3.27)$$

Fácilmente se pueden calcular los invariantes de  $\bar{M}_{\nu_R}$ , dados como sigue:

$$Tr(\bar{M}_{\nu_R}) = |a| + \tilde{|b|}, \quad Det(\bar{M}_{\nu_R}) = -|a||c|^2, \quad \chi(\bar{M}_{\nu_R}) = -|a|\tilde{|b|} + |b|^2 + |b|^2. \quad (3.28)$$

de donde despejando a  $\tilde{|b|}$ ,  $|c|$ ,  $|b|$  se obtienen las siguientes relaciones.:

$$\tilde{|b|} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - |a|, \quad |c| = \sqrt{\frac{-\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{|a|}}, \quad |b| = \sqrt{\frac{(\lambda_3 - |a|)(|a| - \lambda_1)(|a| - \lambda_2)}{|a|}} \quad (3.29)$$

Esto ultimo nos permitirá reescribir las matrices de masa  $M^D$  y  $M_{\nu_R}$  en términos de sus eigenvalores. Sin embargo, no conocemos la jerarquía entre las masas de los neutrinos ( $m_{\nu_1}$ ,  $m_{\nu_2}$ ,  $m_{\nu_3}$ ), por lo que en lo que sigue trataremos los dos posibles casos si ellos cumplen una jerarquía normal ( $m_{\nu_1} < m_{\nu_2} < m_{\nu_3}$ ) o una jerarquía invertida ( $m_{\nu_3} < m_{\nu_1} < m_{\nu_2}$ ).

## 3.2. Jerarquía de masa

Obsérvese la similitud de las matrices dadas en las ecuaciones (3.19) y (3.29), esto es debido a que estamos tomando la misma estructura para las matrices  $M^D$  y  $M_{\nu_R}$ , es decir, dos ceros de textura.

En general para una matriz hermitiana con dos ceros de textura, se tienen las siguientes relaciones:

$$\tilde{B}_i = \lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \lambda_{i3} - A_i, \quad |C_i|^2 = \frac{-\lambda_{i1}\lambda_{i2}\lambda_{i3}}{A_i}, \quad |B_i|^2 = \frac{(\lambda_{i3} - A_i)(A_i - \lambda_{i1})(A_i - \lambda_{i2})}{A_i}. \quad (3.30)$$

### 3.2.1. Jerarquía normal

Ahora veamos que sucede con estas ecuaciones en los siguientes tres casos:

**Caso 1:**,  $\lambda_{i1} = -|\lambda_{i1}|$  se tiene que las ecuaciones dadas en (3.30), quedan de la siguiente forma:

$$\widetilde{B}_i = -|\lambda_{i1}| + \lambda_{i2} + \lambda_{i3} - A_i, \quad |C_i| = \sqrt{\frac{|\lambda_{i1}|\lambda_{i2}\lambda_{i3}}{A_i}}, \quad |B_i| = \sqrt{\frac{(\lambda_{i3} - A_i)(A_i + |\lambda_{i1}|)(A_i - \lambda_{i2})}{A_i}}. \quad (3.31)$$

De la ecuación (3.31), para que  $|B_i| > 0$ , se necesita que  $\lambda_{i3} > A_i$  y  $A_i > \lambda_{i2}$ , entonces  $\lambda_{i3} > A_i > \lambda_{i2}$ .

**Caso 2:**,  $\lambda_{i2} = -|\lambda_{i2}|$  se tiene que las ecuaciones dadas en (3.30), quedan de la siguiente forma:

$$\widetilde{B}_i = \lambda_{i1} - |\lambda_{i2}| + \lambda_{i3} - A_i, \quad |C_i| = \sqrt{\frac{\lambda_{i1}|\lambda_{i2}|\lambda_{i3}}{A_i}}, \quad |B_i| = \sqrt{\frac{(\lambda_{i3} - A_i)(A_i - \lambda_{i1})(A_i + |\lambda_{i2}|)}{A_i}}. \quad (3.32)$$

De la ecuación (3.32), para que  $|B_i| > 0$ , se necesita que  $\lambda_{i3} > A_i$  y  $A_i > \lambda_{i1}$ , entonces  $\lambda_{i3} > A_i > \lambda_{i1}$ .

**Caso 3:**,  $\lambda_{i3} = -|\lambda_{i3}|$  se tiene que las ecuaciones dadas en (3.30), quedan de la siguiente forma:

$$\widetilde{B}_i = \lambda_{i1} + \lambda_{i2} - |\lambda_{i3}| - A_i, \quad |C_i| = \sqrt{\frac{\lambda_{i1}\lambda_{i2}|\lambda_{i3}|}{|A_i|}}, \quad |B_i| = \sqrt{\frac{(|\lambda_{i3}| + A_i)(A_i - \lambda_{i1})(\lambda_{i2} - A_i)}{A_i}}. \quad (3.33)$$

De la ecuación (3.33), para que  $|B_i| > 0$ , se necesita que  $A_i > \lambda_{i1}$  y  $\lambda_{i2} > A_i$  entonces  $\lambda_{i2} > A_i > \lambda_{i1}$ .

Así pues podemos conseguir una jerarquía normal ( $\lambda_{i3} > \lambda_{i2} > \lambda_{i1}$ ) uniendo las tres casos anteriores, es decir,

- $\lambda_{i1} = -|\lambda_{i1}| \Rightarrow \lambda_{i3} > A_i > \lambda_{i2}$
- $\lambda_{i2} = -|\lambda_{i2}| \Rightarrow \lambda_{i3} > A_i > \lambda_{i1}$
- $\lambda_{i3} = -|\lambda_{i3}| \Rightarrow \lambda_{i2} > A_i > \lambda_{i1}$

En esta jerarquía, evidentemente  $\lambda_{i3}$  es el más “pesado”. Así, si dividimos a  $\lambda_{i1}$ ,  $\lambda_{i2}$  y  $A_i$  entre  $\lambda_{i3}$  y normalizando con respecto a  $\lambda_{i3} = -|\lambda_{i3}|$  podemos reescribir las ecuaciones dadas en (3.33) como:

$$|C_i| = \lambda_{i3} \sqrt{\frac{\widetilde{\lambda}_{i1}\widetilde{\lambda}_{i2}}{a_i}}. \quad (3.34)$$

donde  $\widetilde{\lambda}_{i1} = \frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{i3}}$ ,  $\widetilde{\lambda}_{i2} = \frac{\lambda_{i2}}{\lambda_{i3}}$  y  $\widetilde{a}_i = \frac{A_i}{\lambda_{i3}}$ . Definiendo

$$c_i = \frac{|C_i|}{\lambda_{i3}} \Rightarrow c_i = \sqrt{\frac{\widetilde{\lambda}_{i1}\widetilde{\lambda}_{i2}}{a_i}}. \quad (3.35)$$

Además,

$$\widetilde{B}_i = (\widetilde{\lambda}_{i1} - \widetilde{\lambda}_{i2} + 1 - a_i)\lambda_{i3}, \quad (3.36)$$

definiendo

$$\widetilde{b}_i = \frac{\widetilde{B}_i}{\lambda_{i3}} \Rightarrow \widetilde{b}_i = (\widetilde{\lambda}_{i1} - \widetilde{\lambda}_{i2} + 1 - a_i), \quad (3.37)$$

y finalmente

$$|B_i| = \lambda_{i3} \sqrt{\frac{(1 - a_i)(a_i - \widetilde{\lambda}_{i1})(a_i + \widetilde{\lambda}_{i2})}{a_i}}. \quad (3.38)$$

Siendo

$$b_i = \frac{|B_i|}{\lambda_{i3}} \Rightarrow b_i = \sqrt{\frac{(1-a_i)(a_i-\tilde{\lambda}_{i1})(a_i+\tilde{\lambda}_{i2})}{a_i}}. \quad (3.39)$$

Tomando la matriz hermitiana  $\bar{M}_i^D$  en su forma polar:

$$\bar{M}_i^D = \begin{pmatrix} 0 & |C_i| & 0 \\ |C_i| & \tilde{B}_i & |B_i| \\ 0 & |B_i| & A_i \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

y sustituyendo las ecuaciones (3.35), (3.37) y (3.39) obtenemos lo siguiente:

$$\bar{M}_i^D = \begin{pmatrix} 0 & c_i \lambda_{i3} & 0 \\ c_i \lambda_{i3} & \tilde{b}_i \lambda_{i3} & b_i \lambda_{i3} \\ 0 & b_i \lambda_{i3} & a_i \lambda_{i3} \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Definiendo  $\tilde{M}_i^D = \frac{\bar{M}_i^D}{\lambda_{i3}}$  obtenemos que:

$$\tilde{M}_i^D = \begin{pmatrix} 0 & c_i & 0 \\ c_i & \tilde{b}_i & b_i \\ 0 & b_i & a_i \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Recordando que para la jerarquía normal  $\lambda_{i2} = -|\lambda_{i2}|$ , para el parámetro  $a_i$  se tiene lo siguiente:

$$\lambda_{i3} > A_i > \lambda_{i1} \Rightarrow 1 > \frac{A_i}{\lambda_{i3}} > \frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{i3}} \Rightarrow 1 > a_i > \tilde{\lambda}_{i1},$$

de donde podemos concluir que el parámetro  $a_i$  es muy cercano a 1, por lo tanto podemos definir que:

$$a_i = 1 - \delta_i, \quad \text{con} \quad 1 - \tilde{\lambda}_{i1} > \delta_i > 0.$$

Utilizando esto y las ecuaciones (3.35), (3.37) y (3.39) podemos reescribir la ecuación (3.42):

$$M_i^D = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_{i1}\tilde{\lambda}_{i2}}{1-\delta_i}} & 0 \\ \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_{i1}\tilde{\lambda}_{i1}}{1-\delta_i}} & \tilde{\lambda}_{i1} - \tilde{\lambda}_{i2} + \delta_i & \sqrt{\frac{(\delta_i)(1-\delta_i-\tilde{\lambda}_{i1})(1-\delta_i+\tilde{\lambda}_{i2})}{1-\delta_i}} \\ 0 & \sqrt{\frac{(\delta_i)(1-\delta_i-\tilde{\lambda}_{i1})(1-\delta_i+\tilde{\lambda}_{i2})}{1-\delta_i}} & 1 - \delta_i \end{pmatrix}.$$

Definiendo

$$f_{i1} = 1 - \delta_i - \tilde{\lambda}_{i1} \quad f_{i2} = 1 - \delta_i - \tilde{\lambda}_{i2}, \quad (3.43)$$

finalmente obtenemos

$$\tilde{M}_i^D = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_{i1}\tilde{\lambda}_{i2}}{1-\delta_i}} & 0 \\ \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_{i1}\tilde{\lambda}_{i1}}{1-\delta_i}} & \tilde{\lambda}_{i1} - \tilde{\lambda}_{i2} + \delta_i & \sqrt{\frac{\delta_i f_{i1} f_{i2}}{1-\delta_i}} \\ 0 & \sqrt{\frac{\delta_i f_{i1} f_{i2}}{1-\delta_i}} & 1 - \delta_i \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

### 3.2.2. Jerarquía invertida

Análogamente<sup>3</sup> en el caso de la jerarquía invertida ( $\lambda_{i2} > \lambda_{i1} > \lambda_{i3}$ ), tomando en cuenta (3.19), tenemos que las ecuaciones (3.30) tienen la forma:

$$\tilde{B}_i = \lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \lambda_{i3} - A_i, \quad (3.45)$$

$$|C_i|^2 = -\frac{\lambda_{i1}\lambda_{i2}\lambda_{i3}}{A_i}, \quad (3.46)$$

$$|B_i|^2 = \frac{(A_i - \lambda_{i3})(A_i - \lambda_{i1})(\lambda_{i2} - A_i)}{A_i}. \quad (3.47)$$

: De donde se desprenden los siguientes casos:

**Caso 1:**,  $\lambda_{i1} = -|\lambda_{i1}|$  se tiene que las ecuaciones dadas en (3.47), quedan de la siguiente forma:

$$\tilde{B}_i = -|\lambda_{i1}| + \lambda_{i2} + \lambda_{i3} - A_i, |C_i| = \sqrt{\frac{|\lambda_{i1}|\lambda_{i2}\lambda_{i3}}{A_i}}, |B_i| = \sqrt{\frac{(A_i - \lambda_{i3})(A_i + |\lambda_{i1}|)(\lambda_{i2} - A_i)}{A_i}}. \quad (3.48)$$

para que  $|B_i| > 0$  vemos que  $A_i > \lambda_{i3}$  y  $\lambda_{i2} > A_i$ , entonces  $\lambda_{i2} > A_i > \lambda_{i3}$ .

**Caso 2:**,  $\lambda_{i2} = -|\lambda_{i2}|$  se tiene que las ecuaciones dadas en (3.47), quedan de la siguiente forma:

$$\tilde{B}_i = \lambda_{i1} - |\lambda_{i2}| + \lambda_{i3} - A_i, \quad (3.49)$$

$$|C_i| = \sqrt{\frac{\lambda_{i1}|\lambda_{i2}|\lambda_{i3}}{A_i}}, \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} |B_i| &= \sqrt{\frac{(A_i - \lambda_{i3})(A_i - \lambda_{i1})(-|\lambda_{i2}| - A_i)}{A_i}} \\ &= \sqrt{-\frac{(A_i - \lambda_{i3})(A_i - \lambda_{i1})(|\lambda_{i2}| + A_i)}{A_i}} \\ &= \sqrt{\frac{(A_i - \lambda_{i3})(\lambda_{i1} - A_i)(|\lambda_{i2}| + A_i)}{A_i}}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

De la ecuación (3.51), para que  $|B_i| > 0$ , vemos que  $A_i > \lambda_{i3}$  y  $\lambda_{i1} > A_i$ , entonces  $\lambda_{i1} > A_i > \lambda_{i3}$ .

**Caso 3:**,  $\lambda_{i3} = -|\lambda_{i3}|$  se tiene que las ecuaciones dadas en (3.47), quedan de la siguiente forma:  $\lambda_{i3} > A_i > \lambda_{i1}$ .

$$\tilde{B}_i = \lambda_{i1} + \lambda_{i2} - |\lambda_{i3}| - A_i, |C_i| = \sqrt{\frac{\lambda_{i1}\lambda_{i2}|\lambda_{i3}|}{A_i}}, |B_i| = \sqrt{\frac{(A_i + |\lambda_{i3}|)(A_i - \lambda_{i1})(\lambda_{i2} - A_i)}{A_i}}. \quad (3.52)$$

De la ecuación (3.52), para que  $|B_i| > 0$ , vemos que  $A_i > \lambda_{i1}$  y  $\lambda_{i2} > A_i$ , entonces  $\lambda_{i2} > A_i > \lambda_{i1}$ .

Entonces para una jerarquía invertida  $\lambda_{i2} > \lambda_{i1} > \lambda_{i3}$ , tenemos:

$$\lambda_{i1} = -|\lambda_{i1}|, \quad \lambda_{i2} > A_i > \lambda_{i3} \quad (3.53)$$

$$\lambda_{i2} = -|\lambda_{i2}|, \quad \lambda_{i1} > A_i > \lambda_{i3} \quad (3.54)$$

$$\lambda_{i3} = -|\lambda_{i3}|, \quad \lambda_{i2} > A_i > \lambda_{i1} \quad (3.55)$$

$$(3.56)$$

---

<sup>3</sup>Para nuestro cálculo final solo utilizaremos la jerarquía normal.

En esta jerarquía,  $\lambda_{i2}$  es el más “pesado”. Así, si dividimos a  $\lambda_{i1}$ ,  $\lambda_{i2}$  y  $A_i$  entre  $\lambda_{i2}$  y normalizando con respecto a  $\lambda_{i2} = -|\lambda_{i2}|$  podemos reescribir las ecuaciones dadas en (3.52) como:

$$|C_i| = \lambda_{i2} \sqrt{\frac{\widehat{\lambda}_{i1} \widehat{\lambda}_{i3}}{a_i}} \quad (3.57)$$

donde  $\widetilde{\lambda}_{i1} = \frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{i3}}$ ,  $\widetilde{\lambda}_{i2} = \frac{\lambda_{i2}}{\lambda_{i3}}$  y  $\widetilde{a}_i = \frac{A_i}{\lambda_{i3}}$ . Definiendo

$$c_i = \frac{|C_i|}{\lambda_{i2}} \Rightarrow c_i = \sqrt{\frac{\widehat{\lambda}_{i1} \widehat{\lambda}_{i3}}{a_i}}. \quad (3.58)$$

Además,

$$\widetilde{B}_i = (-\widehat{\lambda}_{i1} - \widehat{\lambda}_{i3} + 1 - a_i) \lambda_{i2}, \quad (3.59)$$

definiendo

$$\widetilde{b}_i = \frac{\widetilde{B}_i}{\lambda_{i2}} \Rightarrow \widetilde{b}_i = (-\widehat{\lambda}_{i1} + \widehat{\lambda}_{i3} + 1 - a_i), \quad (3.60)$$

y finalmente

$$|B_i| = \lambda_{i2} \sqrt{\frac{(a_i - \widehat{\lambda}_{i3})(a_i + \widehat{\lambda}_{i1})(1 - a_i)}{a_i}}. \quad (3.61)$$

,

Siendo

$$b_i = \frac{|B_i|}{\lambda_{i2}} \Rightarrow b_i = \sqrt{\frac{(a_i - \widehat{\lambda}_{i3})(a_i + \widehat{\lambda}_{i1})(1 - a_i)}{a_i}}. \quad (3.62)$$

Tomando la matriz hermitiana  $\widetilde{M}_i^D$  en su forma polar:

$$\widetilde{M}_i^D = \begin{pmatrix} 0 & |C_i| & 0 \\ |C_i| & \widetilde{B}_i & |B_i| \\ 0 & |B_i| & A_i \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

y sustituyendo las ecuaciones (3.58), (3.60) y (3.62) obtenemos lo siguiente:

$$\widetilde{M}_i^D = \begin{pmatrix} 0 & c_i \lambda_{i2} & 0 \\ c_i \lambda_{i2} & \widetilde{b}_i \lambda_{i2} & b_i \lambda_{i3} \\ 0 & b_i \lambda_{i3} & a_i \lambda_{i3} \end{pmatrix}. \quad (3.64)$$

Definiendo  $\widehat{M}_i^D = \frac{\widetilde{M}_i^D}{\lambda_{i2}}$  obtenemos que:

$$\widehat{M}_i^D = \begin{pmatrix} 0 & c_i & 0 \\ c_i & \widetilde{b}_i & b_i \\ 0 & b_i & a_i \end{pmatrix}. \quad (3.65)$$

Recordando que para la jerarquía invertida  $\lambda_{i1} = -|\lambda_{i1}|$ , para el parámetro  $a_i$  se tiene lo siguiente:

$$\lambda_{i2} > A_i > \lambda_{i3} \Rightarrow 1 > \frac{A_i}{\lambda_{i2}} > \frac{\lambda_{i3}}{\lambda_{i2}} \Rightarrow 1 > a_i > \widehat{\lambda}_{i3},$$

de donde podemos concluir que el parámetro  $a_i$  es muy cercano a 1, por lo tanto podemos definir que:

$$a_i = 1 - \widehat{\delta}_i, \quad \text{con} \quad 1 - \widehat{\lambda}_{i1} > \widehat{\delta}_i > 0.$$

Utilizando esto y las ecuaciones (3.58), (3.60) y (3.62) podemos reescribir la ecuación (3.65):

$$\widehat{M}_i^D = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\widehat{\lambda}_{i1}\widehat{\lambda}_{i3}}{1-\widehat{\delta}_i}} & 0 \\ \sqrt{\frac{\widehat{\lambda}_{i1}\widehat{\lambda}_{i3}}{1-\widehat{\delta}_i}} & -\widehat{\lambda}_{i1} + \widehat{\lambda}_{i3} + \widehat{\delta}_i & \sqrt{\frac{\widehat{\delta}_i}{1-\widehat{\delta}_i}\widehat{f}_{i1}\widehat{f}_{i3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{\widehat{\delta}_i}{1-\widehat{\delta}_i}\widehat{f}_{i1}\widehat{f}_{i3}} & 1 - \widehat{\delta}_i \end{pmatrix}, \quad (3.66)$$

donde

$$\widehat{f}_{i1} = 1 - \widehat{\delta}_i - \widehat{\lambda}_{i1} \quad \widehat{f}_{i3} = 1 - \widehat{\delta}_i - \widehat{\lambda}_{i3}, \quad (3.67)$$

### 3.3. Diagonalización de matrices de masa

Los eigenvectores de la matriz  $M$  simétrica tienen la forma<sup>4</sup>:

$$|M_i\rangle = \begin{pmatrix} (\varepsilon_i - M_{22})M_{13} + M_{12}M_{23} \\ (\varepsilon_i - M_{11})M_{23} + M_{21}M_{13} \\ (\varepsilon_i - M_{22})(\varepsilon_i - M_{11}) - M_{12}M_{21} \end{pmatrix}. \quad (3.68)$$

donde  $M_{ij}$  con  $i, j = 1, 2, 3$  representan las entradas de la matriz  $M$  y  $\varepsilon_i$  representan sus eigenvalores. Sin embargo, estos eigenvectores no están normalizados, por lo que para ello insertamos la constante de normalización  $N_i^2 = \langle M_i | M_i \rangle$ :

$$|M_i\rangle = \frac{1}{N_i} \begin{pmatrix} (\varepsilon_i - M_{22})M_{13} + M_{12}M_{23} \\ (\varepsilon_i - M_{11})M_{23} + M_{21}M_{13} \\ (\varepsilon_i - M_{22})(\varepsilon_i - M_{11}) - M_{12}M_{21} \end{pmatrix}. \quad (3.69)$$

Así, para la jerarquía normal ( $\lambda_{i3} > \lambda_{i2} > \lambda_{i1}$ ), la matriz real ortogonal que permite la diagonalización de la matriz  $\widetilde{M}_i^D$  dada en (3.44) sea expresada como:

$$O_i = \left( |\widetilde{M}_{i1}\rangle, -|\widetilde{M}_{i2}\rangle, |\widetilde{M}_{i3}\rangle \right) \quad (3.70)$$

donde  $|\widetilde{M}_{ij}\rangle$  son los eigenvectores de la matriz  $\widetilde{M}_i$ . Por lo que se tiene lo siguiente:

$$O_i = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\widetilde{\lambda}_{i2}f_{i1}}{D_{i1}}} & -\sqrt{\frac{\widetilde{\lambda}_{i1}f_{i2}}{D_{i2}}} & \sqrt{\frac{\delta_i\widetilde{\lambda}_{i1}\widetilde{\lambda}_{i2}}{D_{i3}}} \\ \sqrt{\frac{(1-\delta_i)\widetilde{\lambda}_{i1}f_{i1}}{D_{i1}}} & \sqrt{\frac{(1-\delta_i)\widetilde{\lambda}_{i2}f_{i2}}{D_{i2}}} & \sqrt{\frac{(1-\delta_i)\delta_i}{D_{i3}}} \\ -\sqrt{\frac{\delta_i\widetilde{\lambda}_{i1}f_{i2}}{D_{i1}}} & -\sqrt{\frac{\delta_i\widetilde{\lambda}_{i2}f_{i1}}{D_{i2}}} & \sqrt{\frac{f_{i1}f_{i2}}{D_{i3}}} \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} f_{i1} &= 1 - \delta_i - \widetilde{\lambda}_{i1} \\ f_{i3} &= 1 - \delta_i + \widetilde{\lambda}_{i2} \\ \text{V } D_{i1} &= (1 - \delta_i)(1 - \widetilde{\lambda}_{i1})(\widetilde{\lambda}_{i1} + \widetilde{\lambda}_{i2}), \\ D_{i2} &= (1 - \delta_i)(1 + \widetilde{\lambda}_{i2})(\widetilde{\lambda}_{i1} + \widetilde{\lambda}_{i2}), \\ D_{i3} &= (1 - \delta_i)(1 - \widetilde{\lambda}_{i1})(1 + \widetilde{\lambda}_{i2}). \end{aligned}$$

---

<sup>4</sup>Para un tratamiento más detallado ver [29, 41]

En el caso de una jerarquía invertida ( $\lambda_{i2} > \lambda_{i1} > \lambda_{i3}$ ), la matriz real ortogonal que permite la diagonalización de la matriz  $\widehat{M}_i^D$  dada en (3.66) sea expresada como:

$$\widehat{\mathbf{O}}_i = \left( -|\widehat{M}_{i1}\rangle, |\widehat{M}_{i2}\rangle, |\widehat{M}_{i3}\rangle \right) \quad (3.71)$$

donde  $|\widehat{M}_{ij}\rangle$  son los eigenvectores de la matriz  $\widehat{M}_i^D$ . Por lo que se tiene lo siguiente:

$$\widehat{\mathbf{O}}_k = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\widehat{\lambda}_{k3}\widehat{f}_{k1}}{\widehat{D}_{k1}}} & \sqrt{\frac{\widehat{\lambda}_{k1}\widehat{\lambda}_{k3}\widehat{\delta}_k}{\widehat{D}_{k2}}} & \sqrt{\frac{\widehat{\lambda}_{k1}\widehat{\lambda}_{k3}}{\widehat{D}_{k3}}} \\ \sqrt{\frac{(1-\widehat{\delta}_k)\widehat{\lambda}_{k1}\widehat{f}_{k1}}{\widehat{D}_{k1}}} & \sqrt{\frac{(1-\widehat{\delta}_k)\widehat{\delta}_k}{\widehat{D}_{k2}}} & \sqrt{\frac{(1-\widehat{\delta}_k)\widehat{\lambda}_{k3}\widehat{f}_{k3}}{\widehat{D}_{k3}}} \\ -\sqrt{\frac{\widehat{\delta}_k\widehat{\lambda}_{k1}\widehat{f}_{k3}}{\widehat{D}_{k1}}} & \sqrt{\frac{\widehat{f}_{k1}\widehat{f}_{k3}}{\widehat{D}_{k2}}} & -\sqrt{\frac{\widehat{\delta}_k\widehat{\lambda}_{k3}\widehat{f}_{k1}}{\widehat{D}_{k3}}} \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} \widehat{f}_{k1} &= 1 - \widehat{\delta}_k + \widehat{\lambda}_{k1} \\ \widehat{f}_{k3} &= 1 - \widehat{\delta}_k - \widehat{\lambda}_{k3} \\ \widehat{D}_{k1} &= (1 - \widehat{\delta}_k)(1 + \widehat{\lambda}_{k1})(\widehat{\lambda}_{k1} + \widehat{\lambda}_{k3}), \\ \widehat{D}_{k2} &= (1 - \widehat{\delta}_k)(1 + \widehat{\lambda}_{k1})(1 - \widehat{\lambda}_{k3}), \\ \widehat{D}_{k3} &= (1 - \widehat{\delta}_k)(1 - \widehat{\lambda}_{k3})(\widehat{\lambda}_{k1} + \widehat{\lambda}_{k3}). \end{aligned}$$

### 3.4. La matriz $\mathbf{V}_{PMNS}$

Determinamos la matriz de mezcla del sabor  $\mathbf{V}_{PMNS}$  en términos de las razones de las masas de los fermiones.

La matriz de mezcla del sabor de los leptones,  $\mathbf{V}_{PMNS}$ , surge de la falta de correspondencia entre la diagonalización de las matrices de masa de los leptones cargados y los neutrinos izquierdos, y está definida como:

$$\mathbf{V}_{PMNS} = \mathbf{U}_l^\dagger \mathbf{U}_\nu, \quad (3.72)$$

donde

$$\mathbf{U}_{\nu,l} = \mathbf{P}_{\nu,l} \mathbf{O}_{\nu,l}, \quad (3.73)$$

La matriz de mezcla de los leptones puede ser escrita como:

$$\mathbf{V}_{PMNS} = \mathbf{O}_l^T \mathbf{P}^{\nu-l} \mathbf{O}_\nu K \quad (3.74)$$

Donde  $\mathbf{O}_{l,\nu}$  son las matrices ortogonales y  $\mathbf{P}^{\nu-l}$  es la matriz diagonal de fases,

$$\mathbf{P}^{\nu-l} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\eta_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\eta_2} \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

Ahora recordemos que las matrices de masa leptónica  $M_l$ , la matriz de neutrinos de Dirac  $M^D$ , la matriz de neutrinos derecho de Majorana  $M_{\nu R}$  y la matriz generada por el mecanismo See-Saw tipo-I  $M_{\nu L}$  tienen la misma estructura, dos ceros de textura. Por otro lado, hemos visto que las matrices hermitianas  $M^D$  y  $M_l$  pueden ser representadas en su forma polar, lo que permite factorizar las fases dejando toda la información física en las matrices  $\widehat{M}^D$  y  $\widehat{M}_l$ , las cuales son simétricas reales. Del mismo modo, podemos factorizar las fases de las matrices  $M_{\nu R,L}$  tal que la información física queda almacenada en  $\widehat{M}_{\nu R,L}$ , que también son matrices simétricas reales. Así, las matrices ortogonales que diagonalizan a cada una de estas matrices pueden ser construidas a partir de las ecuaciones (3.71) y 3.72, según sea el caso, lo cual mostraremos brevemente en la siguiente sección.

### 3.4.1. Matriz $V_{PMNS}$ jerarquía normal

Ahora para el caso de una jerarquía normal ( $m_{\nu_3} > m_{\nu_2} > m_{\nu_1}$ ) construiremos las matrices ortogonales usando la ecuación (3.71), considerando las siguientes sustituciones:

$$\mathbf{O}_\nu \Rightarrow \begin{cases} \tilde{\lambda}_{i1} \Rightarrow \tilde{m}_{\nu_1} \\ \tilde{\lambda}_{i2} \Rightarrow \tilde{m}_{\nu_2} \end{cases} \quad (3.76)$$

y

$$\mathbf{O}_l \Rightarrow \begin{cases} \tilde{\lambda}_{i1} \Rightarrow \tilde{m}_e \\ \tilde{\lambda}_{i2} \Rightarrow \tilde{m}_\mu \end{cases} \quad (3.77)$$

Así obtenemos la matriz ortogonal de los neutrinos:

$$\mathbf{O}_\nu = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_2} f_{\nu 1}}{D_{\nu 1}}} & -\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1} f_{\nu 2}}{D_{\nu 2}}} & \sqrt{\frac{\delta_\nu \tilde{m}_{\nu 1} \tilde{m}_{\nu 2}}{D_{\nu 3}}} \\ \sqrt{\frac{(1-\delta_\nu) \tilde{m}_{\nu 1} f_{\nu 1}}{D_{\nu 1}}} & \sqrt{\frac{(1-\delta_\nu) \tilde{m}_{\nu 2} f_{\nu 2}}{D_{\nu 2}}} & \sqrt{\frac{(1-\delta_\nu) \delta_\nu}{D_{\nu 3}}} \\ -\sqrt{\frac{\delta_\nu \tilde{m}_{\nu 1} f_{\nu 2}}{D_{\nu 1}}} & -\sqrt{\frac{\delta_\nu \tilde{m}_{\nu 2} f_{\nu 1}}{D_{\nu 2}}} & \sqrt{\frac{f_{\nu 1} f_{\nu 2}}{D_{\nu 3}}} \end{pmatrix}$$

y la matriz ortogonal leptónica

$$\mathbf{O}_l = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\tilde{m}_\mu f_{m_e}}{D_{m_e}}} & -\sqrt{\frac{\tilde{m}_e f_{m_\mu}}{D_{m_\mu}}} & \sqrt{\frac{\delta_l \tilde{m}_e \tilde{m}_\mu}{D_{e3}}} \\ \sqrt{\frac{(1-\delta_l) \tilde{m}_e f_{m_e}}{D_{m_e}}} & \sqrt{\frac{(1-\delta_l) \tilde{m}_\mu f_{m_\mu}}{D_{m_\mu}}} & \sqrt{\frac{(1-\delta_l) \delta_l}{D_{e3}}} \\ -\sqrt{\frac{\delta_l \tilde{m}_e f_{m_\mu}}{D_{m_e}}} & -\sqrt{\frac{\delta_l \tilde{m}_\mu f_{m_e}}{D_{m_\mu}}} & \sqrt{\frac{f_{m_e} f_{m_\mu}}{D_{e3}}} \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} f_{\nu 1} &= 1 - \delta_\nu - \tilde{m}_{\nu 1} \\ f_{\nu 3} &= 1 - \delta_\nu + \tilde{m}_{\nu 2} \\ D_{\nu 1} &= (1 - \delta_\nu)(1 - \tilde{m}_{\nu 1})(\tilde{m}_{\nu 1} + \tilde{m}_{\nu 2}), \\ D_{\nu 2} &= (1 - \delta_\nu)(1 + \tilde{m}_{\nu 2})(\tilde{m}_{\nu 1} + \tilde{m}_{\nu 2}), \\ D_{\nu 3} &= (1 - \delta_\nu)(1 - \tilde{m}_{\nu 1})(1 + \tilde{m}_{\nu 2}). \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f_{m_e} &= 1 - \delta_l - \tilde{m}_e \\ f_{e3} &= 1 - \delta_l + \tilde{m}_\mu \\ D_e &= (1 - \delta_l)(1 - \tilde{m}_e)(\tilde{m}_e + \tilde{m}_\mu), \\ D_\mu &= (1 - \delta_l)(1 + \tilde{m}_\mu)(\tilde{m}_e + \tilde{m}_\mu), \\ D_{e3} &= (1 - \delta_l)(1 - \tilde{m}_e)(1 + \tilde{m}_\mu). \end{aligned}$$

Finalmente sustituyendo  $\mathbf{O}_\nu$ ,  $\mathbf{O}_l$  y la matriz de fases (3.75) en la ecuación (3.74) obtenemos que las entradas de la matriz  $V_{PMNS}$  son de la forma:

$$\begin{aligned}
 V_{e1}^{th} &= \sqrt{\frac{\tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu 2} f_e f_{\nu 1}}{D_e D_{\nu 1}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e \tilde{m}_{\nu 1}}{D_e D_{\nu 1}}} \left( \sqrt{(1-\delta_l)(1-\delta_\nu)} f_e f_{\nu 1} e^{i\eta_1} + \sqrt{\delta_l \delta_\nu} f_\mu f_{\nu 2} e^{i\eta_2} \right), \\
 V_{e2}^{th} &= -\sqrt{\frac{\tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu 1} f_e f_{\nu 2}}{D_e D_{\nu 2}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e \tilde{m}_{\nu 2}}{D_e D_{\nu 2}}} \left( \sqrt{(1-\delta_l)(1-\delta_\nu)} f_e f_{\nu 2} e^{i\eta_1} + \sqrt{\delta_l \delta_\nu} f_\mu f_{\nu 1} e^{i\eta_2} \right), \\
 V_{e3}^{th} &= \sqrt{\frac{\delta_\nu \tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu 1} \tilde{m}_{\nu 2} f_e}{D_e D_{\nu 3}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{D_e D_{\nu 3}}} \left( \sqrt{(1-\delta_l)(1-\delta_\nu)} \delta_\nu f_e e^{i\eta_1} + \sqrt{\delta_l} f_\mu f_{\nu 1} f_{\nu 2} e^{i\eta_2} \right), \\
 V_{\mu 1}^{th} &= -\sqrt{\frac{\tilde{m}_e \tilde{m}_{\nu 2} f_\mu f_{\nu 1}}{D_\mu D_{\nu 1}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu 1}}{D_\mu D_{\nu 1}}} \left( \sqrt{(1-\delta_l)(1-\delta_\nu)} f_\mu f_{\nu 1} e^{i\eta_1} + \sqrt{\delta_l \delta_\nu} f_e f_{\nu 2} e^{i\eta_2} \right), \\
 V_{\mu 2}^{th} &= \sqrt{\frac{\tilde{m}_e \tilde{m}_{\nu 1} f_\mu f_{\nu 2}}{D_\mu D_{\nu 2}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu 2}}{D_\mu D_{\nu 2}}} \left( \sqrt{(1-\delta_l)(1-\delta_\nu)} f_\mu f_{\nu 2} e^{i\eta_1} + \sqrt{\delta_l \delta_\nu} f_e f_{\nu 1} e^{i\eta_2} \right), \\
 V_{\mu 3}^{th} &= -\sqrt{\frac{\delta_\nu \tilde{m}_e \tilde{m}_{\nu 1} \tilde{m}_{\nu 2} f_\mu}{D_\mu D_{\nu 3}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_\mu}{D_\mu D_{\nu 3}}} \left( \sqrt{(1-\delta_l)(1-\delta_\nu)} \delta_\nu f_\mu e^{i\eta_1} - \sqrt{\delta_l} f_e f_{\nu 1} f_{\nu 2} e^{i\eta_2} \right), \\
 V_{\tau 1}^{th} &= \sqrt{\frac{\delta_l \tilde{m}_e \tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu 2} f_{\nu 1}}{D_{e3} D_{\nu 1}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{D_{e3} D_{\nu 1}}} \left( \sqrt{\delta_l (1-\delta_l)(1-\delta_\nu)} f_{\nu 1} e^{i\eta_1} + \sqrt{\delta_\nu} f_e f_\mu f_{\nu 2} e^{i\eta_2} \right), \\
 V_{\tau 2}^{th} &= -\sqrt{\frac{\delta_l \tilde{m}_e \tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu 1} f_{\nu 2}}{D_{e3} D_{\nu 2}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 2}}{D_{e3} D_{\nu 2}}} \left( \sqrt{\delta_l (1-\delta_l)(1-\delta_\nu)} f_{\nu 2} e^{i\eta_1} - \sqrt{\delta_\nu} f_e f_\mu f_{\nu 1} e^{i\eta_2} \right), \\
 V_{\tau 3}^{th} &= \sqrt{\frac{\delta_l \delta_\nu \tilde{m}_e \tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu 1} \tilde{m}_{\nu 2}}{D_{e3} D_{\nu 3}}} + \sqrt{\frac{1}{D_{e3} D_{\nu 3}}} \left( \sqrt{\delta_l \delta_\nu (1-\delta_l)(1-\delta_\nu)} e^{i\eta_1} + \sqrt{f_e f_\mu f_{\nu 1} f_{\nu 2}} e^{i\eta_2} \right).
 \end{aligned} \tag{3.78}$$

### 3.4.2. Matriz $V_{PMNS}$ jerarquía invertida

La otra posibilidad que puede ocurrir entre las masas de los neutrinos se conoce como jerarquía invertida en la cual se propone que  $m_{\nu 2} > m_{\nu 1} > m_{\nu 3}$ , es decir el neutrino más pesado es  $\nu_2$ . Para construir las matrices ortogonales en este caso utilizaremos la ecuación (3.72), considerando las siguientes sustituciones:

$$\hat{\mathbf{O}}_\nu \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{\lambda}_{k3} \Rightarrow \tilde{m}_{\nu 3} \\ \hat{\lambda}_{k1} \Rightarrow \tilde{m}_{\nu 1}. \end{array} \right\} \tag{3.79}$$

Observéese que el cambio en la jerarquía de la masa de los neutrinos, no tiene efecto alguno sobre la matriz ortogonal leptónica. Solo falta calcular  $\hat{\mathbf{O}}_\nu$ , usando (3.79), tenemos que:

$$\hat{\mathbf{O}}_\nu = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 3} \hat{f}_{\nu 1}}{\hat{D}_{\nu 1}}} & \sqrt{\frac{\hat{\delta}_\nu \hat{m}_{\nu 1} \tilde{m}_{\nu 3}}{\hat{D}_{\nu 2}}} & \sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 1} \tilde{m}_{\nu 3}}{\hat{D}_{\nu 3}}} \\ \sqrt{\frac{(1-\hat{\delta}_\nu) \hat{m}_{\nu 1} \hat{f}_{\nu 1}}{\hat{D}_{\nu 1}}} & \sqrt{\frac{\hat{\delta}_\nu (1-\hat{\delta}_\nu)}{\hat{D}_{\nu 2}}} & \sqrt{\frac{(1-\hat{\delta}_\nu) \tilde{m}_{\nu 3} \hat{f}_{\nu 3}}{\hat{D}_{\nu 3}}} \\ -\sqrt{\frac{\hat{\delta}_\nu \hat{m}_{\nu 1} \hat{f}_{\nu 3}}{\hat{D}_{\nu 1}}} & \sqrt{\frac{\hat{f}_{\nu 1} \hat{f}_{\nu 3}}{\hat{D}_{\nu 2}}} & -\sqrt{\frac{\hat{\delta}_\nu \tilde{m}_{\nu 3} \hat{f}_{\nu 1}}{\hat{D}_{\nu 3}}} \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_{\nu 1} &= 1 - \hat{\delta}_\nu + \hat{m}_{\nu 1} \\
 \hat{f}_{\nu 3} &= 1 - \hat{\delta}_\nu - \hat{m}_{\nu 3} \\
 \hat{D}_{\nu 1} &= (1 - \hat{\delta}_\nu)(1 + \hat{m}_{\nu 1})(\hat{m}_{\nu 1} + \hat{m}_{\nu 3}), \\
 \hat{D}_{\nu 2} &= (1 - \hat{\delta}_\nu)(1 + \hat{m}_{\nu 1})(1 - \hat{m}_{\nu 3}), \\
 \hat{D}_{\nu 3} &= (1 - \hat{\delta}_\nu)(1 - \hat{m}_{\nu 3})(\hat{m}_{\nu 1} + \hat{m}_{\nu 3}).
 \end{aligned}$$

Sustituyendo  $\widehat{\mathbf{O}}_\nu$ ,  $\mathbf{O}_l$  y la matriz de fases (3.75) en la ecuación (3.74) obtenemos que las entradas de la matriz  $V_{PMNS}$  en el caso de una jerarquía invertida son de la forma<sup>5</sup>:

$$\begin{aligned}
 \widehat{V}_{e1}^{th} &= -\sqrt{\frac{\widehat{m}_\mu \widehat{m}_{\nu 3} f_e \widehat{f}_{\nu 1}}{D_e \widehat{D}_{\nu 1}}} + \sqrt{\frac{\widehat{m}_e \widehat{m}_{\nu 1}}{D_e \widehat{D}_{\nu 1}}} \left( \sqrt{(1-\delta_l)(1-\widehat{\delta}_\nu) f_e \widehat{f}_{\nu 1}} e^{i\eta_1} + \sqrt{\delta_l \widehat{\delta}_\nu f_\mu \widehat{f}_{\nu 3}} e^{i\eta_2} \right), \\
 \widehat{V}_{e2}^{th} &= \sqrt{\frac{\widehat{\delta}_\nu \widehat{m}_\mu \widehat{m}_{\nu 1} \widehat{m}_{\nu 3} f_m e}{D_e \widehat{D}_{\nu 2}}} + \sqrt{\frac{\widehat{m}_e}{D_e \widehat{D}_{\nu 2}}} \left( \sqrt{(1-\delta_l)(1-\widehat{\delta}_\nu) \widehat{\delta}_\nu f_e} e^{i\eta_1} - \sqrt{\delta_l f_\mu \widehat{f}_{\nu 1} \widehat{f}_{\nu 3}} e^{i\eta_2} \right), \\
 \widehat{V}_{e3}^{th} &= \sqrt{\frac{\widehat{m}_\mu \widehat{m}_{\nu 1} \widehat{m}_{\nu 3} f_m e}{D_e \widehat{D}_{\nu 3}}} + \sqrt{\frac{\widehat{m}_e \widehat{m}_{\nu 3}}{D_e \widehat{D}_{\nu 3}}} \left( \sqrt{(1-\delta_l)(1-\widehat{\delta}_\nu) f_e \widehat{f}_{\nu 3}} e^{i\eta_1} + \sqrt{\delta_l \widehat{\delta}_\nu f_\mu \widehat{f}_{\nu 1} \widehat{f}_{\nu 2}} e^{i\eta_2} \right), \\
 \widehat{V}_{\mu 1}^{th} &= \sqrt{\frac{\widehat{m}_e \widehat{m}_{\nu 3} f_\mu \widehat{f}_{\nu 1}}{D_\mu \widehat{D}_{\nu 1}}} + \sqrt{\frac{\widehat{m}_\mu \widehat{m}_{\nu 1}}{D_\mu \widehat{D}_{\nu 1}}} \left( \sqrt{(1-\delta_l)(1-\widehat{\delta}_\nu) f_m \widehat{f}_{\nu 1}} e^{i\eta_1} + \sqrt{\delta_l \widehat{\delta}_\nu f_e \widehat{f}_{\nu 3}} e^{i\eta_2} \right), \\
 \widehat{V}_{\mu 2}^{th} &= -\sqrt{\frac{\widehat{\delta}_\nu \widehat{m}_e \widehat{m}_{\nu 1} \widehat{m}_{\nu 3} f_m \mu}{D_\mu \widehat{D}_{\nu 2}}} + \sqrt{\frac{\widehat{m}_\mu}{D_\mu \widehat{D}_{\nu 2}}} \left( \sqrt{(1-\delta_l)(1-\widehat{\delta}_\nu) \widehat{\delta}_\nu f_\mu} e^{i\eta_1} + \sqrt{\delta_l f_e \widehat{f}_{\nu 1} \widehat{f}_{\nu 3}} e^{i\eta_2} \right), \\
 \widehat{V}_{\mu 3}^{th} &= -\sqrt{\frac{\widehat{m}_e \widehat{m}_{\nu 1} \widehat{m}_{\nu 3} f_m \mu}{D_\mu \widehat{D}_{\nu 3}}} + \sqrt{\frac{\widehat{m}_\mu \widehat{m}_{\nu 3}}{D_\mu \widehat{D}_{\nu 3}}} \left( \sqrt{(1-\delta_l)(1-\widehat{\delta}_\nu) f_\mu \widehat{f}_{\nu 3}} e^{i\eta_1} + \sqrt{\delta_l \widehat{\delta}_\nu f_e \widehat{f}_{\nu 1}} e^{i\eta_2} \right), \\
 \widehat{V}_{\tau 1}^{th} &= -\sqrt{\frac{\delta_l \widehat{m}_e \widehat{m}_\mu \widehat{m}_{\nu 3} \widehat{f}_{m \nu 1}}{D_{e3} \widehat{D}_{\nu 1}}} + \sqrt{\frac{\widehat{m}_{\nu 1}}{D_{e3} \widehat{D}_{\nu 1}}} \left( \sqrt{\delta_l (1-\delta_l)(1-\widehat{\delta}_\nu) \widehat{f}_{\nu 1}} e^{i\eta_1} - \sqrt{\widehat{\delta}_\nu f_e f_\mu \widehat{f}_{\nu 3}} e^{i\eta_2} \right), \\
 \widehat{V}_{\tau 2}^{th} &= \sqrt{\frac{\delta_l \widehat{\delta}_\nu \widehat{m}_e \widehat{m}_\mu \widehat{m}_{\nu 1} \widehat{m}_{\nu 3}}{D_{e3} \widehat{D}_{\nu 2}}} + \sqrt{\frac{1}{D_{e3} \widehat{D}_{\nu 2}}} \left( \sqrt{\delta_l (1-\delta_l)(1-\widehat{\delta}_\nu) \widehat{\delta}_\nu} e^{i\eta_1} + \sqrt{f_e f_\mu \widehat{f}_{\nu 1} \widehat{f}_{\nu 3}} e^{i\eta_2} \right), \\
 \widehat{V}_{\tau 3}^{th} &= \sqrt{\frac{\delta_l \widehat{m}_e \widehat{m}_\mu \widehat{m}_{\nu 1} \widehat{m}_{\nu 3}}{D_{e3} \widehat{D}_{\nu 3}}} + \sqrt{\frac{\widehat{m}_{\nu 3}}{D_{e3} \widehat{D}_{\nu 3}}} \left( \sqrt{\delta_l (1-\delta_l)(1-\widehat{\delta}_\nu) \widehat{f}_{\nu 3}} e^{i\eta_1} - \sqrt{\widehat{\delta}_\nu f_e f_\mu \widehat{f}_{\nu 1}} e^{i\eta_2} \right).
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

En este capítulo se presenta la parametrización de la matriz de mezcla de neutrinos  $V_{PMNS}$ , en términos de sus masas ( $m_{\nu_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ), utilizando una jerarquía normal (invertida), los parámetros  $\delta_l$ ,  $\delta_\nu$  ( $\widehat{\delta}_l$ ,  $\widehat{\delta}_\nu$ ) surgidos en la parametrización de las matrices de masa, también de las masas de los leptones cargados y finalmente depende de las fases introducidas por la matriz de fases  $\mathbf{P}^{\nu-l}$ . Por este motivo estamos ahora capacitados para realizar nuestra exploración del espacio de estos parámetros, con el propósito de probar nuestro modelo, descartando las regiones que estén en desacuerdo con los datos experimentales conocidos, lo cual explicamos en el siguiente capítulo.

<sup>5</sup>para un análisis más detallado véase [41]



# Capítulo 4

## Implicaciones fenomenológicas

En este capítulo se estudian las implicaciones fenomenológicas de representar a las matrices de masa fermiónicas a través de una matriz con dos ceros de textura. Primero hablaremos sobre cómo acotar a las masas de los neutrinos, aprovechando los resultados experimentales actuales sobre oscilación de neutrinos y del satélite Planck. Esto nos permitirá tener un panorama general de lo que esperamos obtener en nuestro ajuste  $\chi^2$ .

### 4.1. Cotas sobre las masas de los neutrinos

En la actualidad no existe ningún experimento que nos permita conocer el valor absoluto o escala de las masas de los neutrinos. De hecho, los experimentos de oscilaciones únicamente nos permiten determinar la diferencia de los cuadrados de las masas. En otras palabras, el único parámetro de oscilación que involucra a las masas de los neutrinos se define como;  $\Delta m_{ij}^2 \equiv m_{\nu_i}^2 - m_{\nu_j}^2$ . A partir de esta definición y considerando las dos posible jerarquías en el espectro de masas de los neutrinos, dos de las masas se pueden expresar en términos del parámetro  $\Delta m_{ij}^2$  y de la masa del neutrino más pesado, como:

$$\begin{aligned} m_{\nu_1} &= \sqrt{m_{\nu_3}^2 - \Delta m_{31}^2}, & m_{\nu_2} &= \sqrt{m_{\nu_3}^2 - \Delta m_{32}^2}, \\ m_{\nu_3} &= \sqrt{m_{\nu_2}^2 - \Delta m_{23}^2}, & m_{\nu_1} &= \sqrt{m_{\nu_2}^2 - \Delta m_{21}^2}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Las expresiones en el primer (segundo) renglón de la ec. (4.1) corresponde al caso de la jerarquía normal (invertida). Además, de las expresiones en ec. (4.1) podemos observar que la masa del neutrino más pesado debe satisfacer la relación:

$$\begin{aligned} m_{\nu_3} &> \sqrt{\Delta m_{31}^2} \quad \text{para la Jerarquía Normal [JN]}, \\ m_{\nu_2} &> \sqrt{\Delta m_{23}^2} \quad \text{para la Jerarquía Invertida [JI]}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

El rango de valores para los parámetros  $\Delta m_{ij}^2$  reportados en Ref. [42] son:

Parámetro	BFP $\pm 1\sigma$	Rango a $2\sigma$	Rango a $3\sigma$
$\Delta m_{21}^2$ ( $10^{-5}\text{eV}^2$ )	$7.60_{-0.18}^{+0.19}$	7.26 – 7.99	7.11 – 8.18
$ \Delta m_{31}^2 $ ( $10^{-3}\text{eV}^2$ ) [JN]	$2.48_{-0.07}^{+0.05}$	2.35 – 2.59	2.30 – 2.65
$ \Delta m_{13}^2 $ ( $10^{-3}\text{eV}^2$ ) [JI]	$2.38_{-0.06}^{+0.05}$	2.26 – 2.48	2.20 – 2.54

## CAPÍTULO 4. IMPLICACIONES FENOMENOLÓGICAS

### 4.1. COTAS SOBRE LAS MASAS DE LOS NEUTRINOS

Por otro lado, de los resultados reportados por la Colaboración Planck [43] conocemos que el número efectivo de neutrinos activos es  $N_{eff} = 3.15 \pm 0.23$ , y suma de sus masas cumple con la desigualdad:

$$\sum_{i=1}^3 m_{\nu_i} < 0.23. \quad (4.3)$$

Estos resultados son independientes de la jerarquía que satisfagan las masas de los neutrinos. La expresión en ec. (4.3) es equivalente a:

$$\left. \begin{aligned} &\sqrt{m_{\nu_3}^2 - \Delta m_{31}^2} + \sqrt{m_{\nu_3}^2 - \Delta m_{32}^2} + m_{\nu_3} \\ &\sqrt{m_{\nu_2}^2 - \Delta m_{23}^2} + \sqrt{m_{\nu_2}^2 - \Delta m_{21}^2} + m_{\nu_3}. \end{aligned} \right\} < 0.23 \text{ eV}. \quad (4.4)$$

En la Tabla 4.1 están dados los valores para las masas de los neutrinos, los cuales se obtienen a partir de las expresiones dadas en ec. (4.4) y ec. (4.2). Además de considerar que los parámetros de oscilación están dados en los rangos numéricos de BFP, BFP $\pm 1\sigma$ ,  $2\sigma$  y  $3\sigma$ .

Jerarquía	$m_{\nu_1}$ (eV $\times 10^{-2}$ )	$m_{\nu_2}$ (eV $\times 10^{-2}$ )	$m_{\nu_3}$ (eV $\times 10^{-2}$ )	Rango
Normal	0. – 7.107	$8.718 \times 10^{-1}$ – 7.161	4.98 – 8.678	BFP
	0. – 7.180	$8.614 \times 10^{-1}$ – 7.232	4.909 – 8.698	BFP $\pm 1\sigma$
	0. – 7.252	$8.509 \times 10^{-1}$ – 7.302	4.837 – 8.718	$2\sigma$
	0. – 7.324	$8.402 \times 10^{-1}$ – 7.372	4.764 – 8.737	$3\sigma$
Invertida	4.879 – 8.189	4.956 – 8.235	0. – 6.577	BFP
	4.817 – 8.202	4.893 – 8.247	0. – 6.639	BFP $1\sigma$
	4.754 – 8.216	4.829 – 8.260	0. – 6.701	$2\sigma$
	4.69 – 8.230	4.765 – 8.272	0. – 6.762	$3\sigma$

Tabla 4.1: Cotas teóricas para las masas de los neutrinos pesados, los parámetros de oscilación están dados en los rangos numéricos BFP $\pm 1\sigma$ ,  $2\sigma$  y  $3\sigma$ .

En la figura 4.3 se muestran las gráficas para las masas de los neutrinos en función de la masa del neutrino más pesado para la jerarquía normal, considerando los rangos a BFP, BFP $\pm 1\sigma$ ,  $2\sigma$  y  $3\sigma$  para los parámetros de oscilación  $\Delta m_{ij}^2$ .

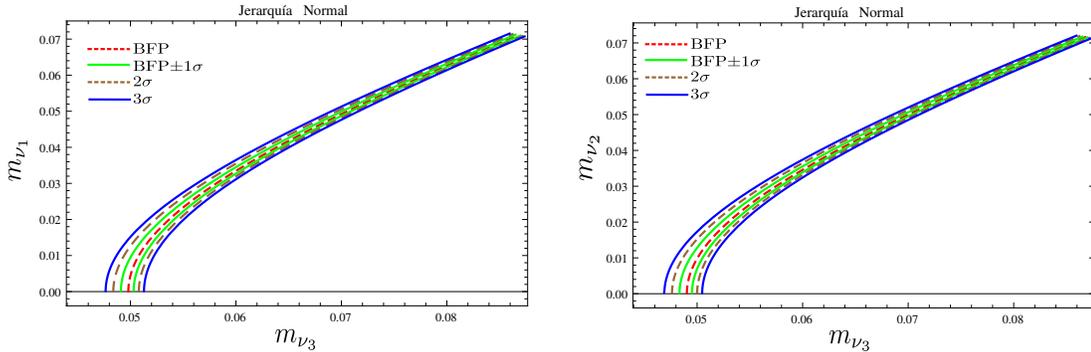


Figura 4.1: Masas de los neutrinos en función de  $m_{\nu_3}$  para una jerarquía normal. Para los parámetros de oscilación  $\Delta m_{ij}^2$ , la línea roja discontinua representa el BFP, la línea verde continua representa el rango de BFP $\pm 1\sigma$ , la línea café discontinua representa el rango de  $2\sigma$  y la línea azul continua representa el rango de  $3\sigma$ .

En la figura 4.2 se muestran las gráficas para las masas de los neutrinos en función de la mass del neutrino más pesado para la jerarquía invertida, considerando los rangos a BFP,  $BFP \pm 1\sigma$ ,  $2\sigma$  y  $3\sigma$  para los parámetros de oscilación  $\Delta m_{ij}^2$ .

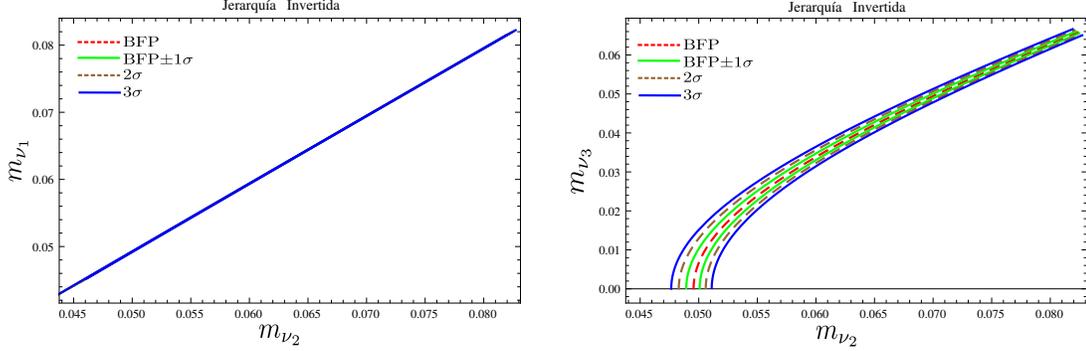


Figura 4.2: Masas de los neutrinos en función de  $m_{\nu_2}$  para una jerarquía normal. Para los parámetros de oscilación  $\Delta m_{ij}^2$ , la línea roja discontinua representa el BFP, la línea verde continua representa el rango de  $BFP \pm 1\sigma$ , la línea café discontinua representa el rango de  $2\sigma$  y la línea azul continua representa el rango de  $3\sigma$ .

En base a las cotas sobre los valores permitidos para las masas de los neutrinos, dadas en la tabla 4.1, podemos concluir que para ambas jerarquías en el espectro de masas, existe la posibilidad que el neutrino más ligero sea un partícula sin masa. Pero si el neutrino más ligero, o cualquiera de los dos restantes, tiene masa nula, nos indicaría que solo es necesario un ángulo para describir las mezclas del sabor de los neutrinos. Tener un solo ángulo de mezcla no esta en acuerdo con los datos experimentales sobre oscilaciones, ya que actualmente se conoce que existen tres ángulos de mezcla diferentes de cero. Por consiguiente, las masas de los neutrinos pueden ser muy pequeñas pero estrictamente diferentes de cero. Por otro lado, en el siguiente análisis de verosimilitud  $\chi^2$  en lugar de considerar a las tres masas de los neutrinos como tres parámetros libres, debemos considerarlas como uno sólo, ya que, como hemos observado anteriormente, dos de ellas pueden ser escritas en términos de la masa del neutrino más pesado. De hecho, en el análisis de verosimilitud podemos considerar que las masas de los neutrinos son entradas y no como parámetros libres, ya que las cotas sobre las mismas fueron determinadas a partir de los datos experimentales actuales.

## 4.2. Matriz y ángulos de mezcla del sabor leptónico

Ahora, antes de realizar el análisis de verosimilitud  $\chi^2$  necesitamos establecer la forma como vamos a conectar nuestras expresiones teóricas con las observables física. En específico, como se relaciona nuestra parametrización con los ángulos de mezcla determinados en los experimentos de oscilación de neutrinos.

En el caso de tener tres familias de neutrinos activos, la Matriz de Mezclas del sabor leptónico  $V_{PMNS}$ , puede ser representada en términos de tres ángulos y de tres fases. Pero la forma explícita de la matriz de mezclas depende de la base que se elija. Al considera la convención propuesta en el PDG-book se usará la llamada parametrización estándar, así la matriz de mezclas toma la forma:

$$V_{PMNS} = \begin{pmatrix} \nu_e & \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ \nu_\mu & c_{13}c_{12} & c_{13}s_{12} & s_{13}e^{-i\delta} \\ \nu_\tau & -c_{23}s_{12} - s_{23}c_{12}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{12} - s_{23}s_{12}s_{13}e^{i\delta} & c_{13}s_{23} \\ & s_{23}s_{12} - c_{23}c_{12}s_{13}e^{i\delta} & -s_{23}c_{12} - c_{23}s_{12}s_{13}e^{i\delta} & c_{13}c_{23} \end{pmatrix} \mathbf{K}. \quad (4.5)$$

Por simplicidad en esta matriz se ha definido la notación  $c_{ij} = \cos\theta_{ij}$  y  $s_{ij} = \sin\theta_{ij}$ , donde los

tres ángulos  $\theta_{ij}$  son los ángulos de mezcla. La matriz  $\mathbf{K}$  tiene la forma  $\mathbf{K} = \text{diag}\left(1, e^{i\frac{\alpha_1}{2}}, e^{i\frac{\alpha_2}{2}}\right)$ . Los parámetros  $\delta$ ,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son fases asociadas a la violación de CP. Las fases  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son conocidas como fases de Majorana, y sólo tienen consecuencias físicas si los neutrinos son partículas de Majorana. Entonces, estas la fases de Majorana tienen influencia en la desintegración doble beta sin neutrinos y otros procesos con violación de número leptónico. En la expresión de la matriz PMNS los  $\nu_i$  (con  $i = 1, 2, 3$ ) corresponde a los eigenestados de masa del neutrino, mientras que los  $\nu_j$  ( $j = e, \mu, \tau$ ) corresponden a los eigenestados de sabor. En otras palabras, los renglones de la matriz corresponden a los eigenestados de sabor, mientras que las columnas de la misma corresponden a los eigenestados de masa. En base a lo anterior la matriz de mezclas toma la forma compacta:

$$\mathbf{V}_{\text{PMNS}} = \begin{pmatrix} V_{e1} & V_{e2} & V_{e3} \\ V_{\mu 1} & V_{\mu 2} & V_{\mu 3} \\ V_{\tau 1} & V_{\tau 2} & V_{\tau 3} \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Al calcular la magnitud de cada entrada de la matrices en las ecs. (4.5) y (4.6), y compararlas entre sí, se obtiene que los ángulos de mezcla se escriben como:

$$\sin^2 \theta_{13} \equiv |V_{e3}|^2, \quad \sin^2 \theta_{12} \equiv \frac{|V_{e2}|^2}{1 - |V_{e3}|^2}, \quad \sin^2 \theta_{23} \equiv \frac{|V_{\mu 3}|^2}{1 - |V_{e3}|^2}. \quad (4.7)$$

Esta expresiones constituyen una forma simple de establecer un puente entre los ángulos de mezclas y distintas parametrizaciones de la matriz de mezclas  $\mathbf{V}_{\text{PMNS}}$ . Ahora, es natural preguntarnos si para los factores de fases asociados a la violación de CP existe una expresión como las dadas en ec. (4.7). La respuesta es afirmativa, pero no es suficiente con construir las magnitudes  $|V_{ij}|$ , sino que necesitamos construir ciertas cantidades que sean invariantes bajo los refasamientos. Estas cantidades son el invariante de Jarlskog, en su version leptónica, y los llamados invariantes CP-Majorana, que respectivamente se definen como:

$$\mathcal{J}_{\text{CP}} = \mathcal{I}m \{V_{e1}^* V_{\mu 3}^* U_{e3} U_{\mu 1}\}, \quad \mathcal{I}_1 = \mathcal{I}m \{V_{e2}^2 V_{e1}^2\}, \quad \text{y} \quad \mathcal{I}_2 = \mathcal{I}m \{V_{e3}^2 V_{e1}^{*2}\}. \quad (4.8)$$

A partir de los invariantes en eq. (4.8), los factores de fase asociados a la violación de CP se puede expresar como:

$$\sin \delta = \frac{\mathcal{J}_{\text{CP}} (1 - |V_{e3}|^2)}{|V_{e1}| |V_{e2}| |V_{e3}| |V_{\mu 3}| |V_{\tau 3}|}, \quad \sin \alpha_1 = \frac{\mathcal{I}_1}{|V_{e1}|^2 |V_{e2}|^2}, \quad \sin \alpha_2 = \frac{\mathcal{I}_2}{|V_{e1}|^2 |V_{e3}|^2}. \quad (4.9)$$

Con esto ya encontramos nuestra versión de la tabla roseta, con la cual podemos interpretar cualquier parametrización de la matriz de mezclas en términos de los parámetros libres de la parametrización estándar. Esta última es la que normalmente se utiliza para realizar los análisis de datos en los experimentos de oscilación de neutrinos.

### 4.3. Análisis de verosimilitud $\chi^2$

Para probar la viabilidad de nuestra hipótesis de representar a todas las matrices de masa de los fermiones a través de una matriz con dos ceros de textura, realizaremos un análisis de verosimilitud, en el cual la función estimadora  $\chi^2$  se define como:

$$\chi^2 = \frac{\left(\sin^2 \theta_{12}^{\text{exp}} - \sin^2 \theta_{12}^{\text{th}}\right)^2}{\sigma_{\theta_{12}}^2} + \frac{\left(\sin^2 \theta_{13}^{\text{exp}} - \sin^2 \theta_{13}^{\text{th}}\right)^2}{\sigma_{\theta_{13}}^2} + \frac{\left(\sin^2 \theta_{23}^{\text{exp}} - \sin^2 \theta_{23}^{\text{th}}\right)^2}{\sigma_{\theta_{23}}^2}, \quad (4.10)$$

donde las expresiones con superíndice *th* son las expresiones teóricas obtenidas a partir de las ecs. (3.78) y (4.7), mientras que los términos con superíndice *exp* son los datos experimentales con

incertidumbre  $\sigma_{\theta_{ij}}$ . Los valores de los datos experimentales que usaremos en este análisis son los reportados por Forero *et al.* [42], que son dados en la tabla 4.2

Parametro	BFP $\pm 1\sigma$	rango a $2\sigma$	rango a $3\sigma$
$\text{sen}^2 \theta_{12}(10^{-1})$	$3.26 \pm 0.16$	2.92 – 3.57	2.78 – 3.75
$\text{sen}^2 \theta_{23}(10^{-1})$ [JN]	$5.67^{+0.32}_{-1.24}$	4.14 – 6.23	3.93 – 6.43
$\text{sen}^2 \theta_{23}(10^{-1})$ [JI]	$5.73^{+0.25}_{-0.39}$	4.35 – 6.21	4.03 – 6.40
$\text{sen}^2(\theta_{13})(10^{-2})$ [JN]	$2.26 \pm 0.12$	2.02 – 5.20	1.90 – 2.60
$\text{sen}^2(\theta_{13})(10^{-2})$ [JI]	$2.29 \pm 0.12$	2.05 – 2.52	1.93 – 2.65

*Tabla 4.2: Resultados experimentales de los ángulos de mezcla en el rango a 1, 2 y 3 $\sigma$ .*

Una vez dada la definición de la función estimadora  $\chi^2$ , lo siguiente es determinar el número de parámetros libres en la misma. Así, para la jerarquía normal [invertida] en el espectro de masas de los neutrinos, y a partir de las expresiones en las ecs. (4.1), (3.78) y (4.7), podemos deducir que la función estimadora depende de cinco parámetros libre,  $\chi^2 = \chi^2(\Phi_1, \Phi_2, \delta_l, \delta_\nu, m_{\nu_{3[2]}})$ . Pero en esta definición de la función  $\chi^2$  únicamente tenemos tres observables físicas. Por lo cual, el número de grados de libertad ( $n_l = n_o - n_p$ , con  $n_o$  y  $n_p$  el número de observables y el número de parámetros libres, respectivamente) es un numero negativo. Tener  $n_l \leq 0$  implica que no podemos hacer uso de la distribución de probabilidad  $\chi^2$  para encontrar las regiones de parámetros a cierto nivel de confianza (C L, por sus siglas en inglés). En otras palabras, para cuando  $n_o < n_p$  lo único que podemos obtener de la función estimadora  $\chi^2$ , es el punto de mejor ajuste (BFP, por sus siglas en inglés). El BFP es el punto en el espacio de parámetros que minimiza el valor de la función  $\chi^2$ .

### 4.3.1. Resultados

La estrategia que seguiremos para poder obtener las regiones de parámetros con cierto nivel de confianza es la siguiente; *i)* Se minimiza la función estimadora  $\chi^2$  con el objetivo de obtener el BFP. *ii)* Con los valores del BFP se fijan tres parámetros libres de la función  $\chi^2$ . Así nuestro análisis de verosimilitud tendrá un grado de libertad.

Entonces, la función  $\chi^2$  se minimiza usando el paquete NMinimize que es parte del software de calculo simbólico Mathematica <sup>1</sup>. En el proceso de minimización las masas de los neutrinos se dejan variar en rango de  $3\sigma$  dado en la tabla 4.1. Para las masas de los leptones cargados se consideran los valores dados en la tabla 4.3. Para el cuadrado del seno de los ángulos de mezcla se consideran los valores a BFP $\pm 1\sigma$ , dados en la tabla 4.2.

Partícula	Masa (MeV)
$e$	$0.5109998928 \pm 0.000000011$
$\mu$	$105.6583715 \pm 0.00000035$
$\tau$	$1776.82 \pm 0.16$

*Tabla 4.3: Masas de los leptones cargados.*

Los valores de los parámetros libres en el BFP están dados en la tabla 4.4.

<sup>1</sup>ver apendice B

	JN
$\Phi_1$	$-6.789 \times 10^{-1}$ rad
$\Phi_2$	2.815 rad
$\delta_l$	$8.355 \times 10^{-2}$
$\delta_\nu$	$3.90 \times 10^{-1}$
$m_{\nu_3}$	$5.00 \times 10^{-2}$ eV
$\chi_{\min}^2$	$1.643 \times 10^{-9}$

Tabla 4.4: Tabla que muestra el BFP que minimiza a la función estimadora  $\chi^2$ . En la última fila se muestra el valor mínimo que alcanza la función.

Ahora que ya se conoce el valor numérico de los parámetros libres en el BFP, es tiempo de decidir que parámetros se van a fijar para obtener las regiones de parámetros. La fase de violación de CP es el parámetro de oscilación que menos información experimental tiene. De hecho, actualmente hay varios experimentos de oscilación de neutrinos tratando de medirla. Por ello, en nuestro análisis de verosimilitud fijamos las fases  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$ . El otro parámetro que podemos fijar es la masa del neutrino más pesado, ya que anteriormente se encontró su rango de valores usando los datos experimentales actuales. Entonces, para la jerarquía normal [invertida], los parámetros  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  y  $m_{\nu_{3[2]}}$  se fijan usando los valores de la tabla 4.4. Así, los únicos parámetros libre en función estimadora son  $\delta_l$  y  $\delta_\nu$ . Lo cual implica que nuestro análisis de verosimilitud tiene un grado de libertad. Esto ultimo nos permitirá obtener la región de parámetros en la cual  $\chi^2$  es lo suficientemente pequeña para que nuestro modelo sea fenomenológicamente viable a los diferentes niveles de confianza (ver Apéndice C). Enseguida mostramos las región de aceptación para los parámetros  $\delta_l$  y  $\delta_\nu$ , a un 70% y 95% de C L.

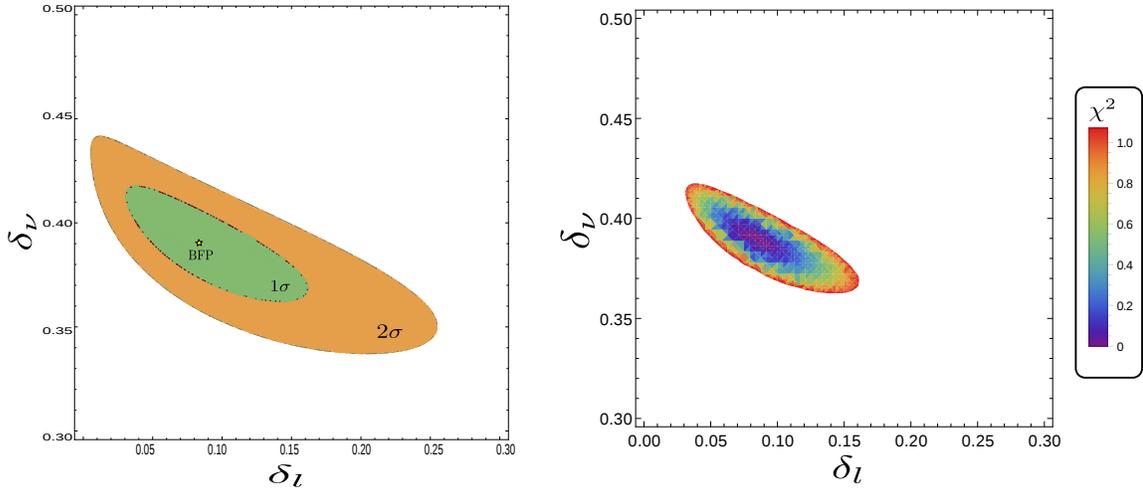


Figura 4.3: Para la jerarquía normal. En el panel de la izquierda mostramos las regiones de aceptación de los parámetros  $\delta_l$  y  $\delta_\nu$  a 95% de N. C. La zona verde representa la región a  $1\sigma$ , la zona naranja representa la región a  $2\sigma$ 's y finalmente el punto amarillo representa el mejor punto de ajuste en el espacio bidimensional  $\delta_l$  y  $\delta_\nu$ , tomado de la Tabla 4.4. En el panel de la derecha, mostramos las regiones de aceptación de los parámetros  $\delta_l$  y  $\delta_\nu$  a  $1\sigma$  con un 95% de N.C. mostrada como un mapa de calor.

Un resultado inmediato del análisis de verosimilitud es que podemos predecir todos los valores numéricos de las magnitudes de las entradas de la matriz de mezclas PMNS. Así, a  $1\sigma$  C L, la magnitud

de los elementos de la matriz de mezclas toma la forma:

$$\begin{pmatrix} 8.13 \times 10^{-1} \pm 6.06 \times 10^{-3} & 5.62 \times 10^{-1} \pm 6.38 \times 10^{-3} & 1.50 \times 10^{-1} \pm 9.16 \times 10^{-3} \\ 2.40 \times 10^{-1} \pm 3.91 \times 10^{-2} & 5.25 \times 10^{-1} \pm 4.23 \times 10^{-2} & 7.44 \times 10^{-1} \pm 4.21 \times 10^{-2} \\ 4.94 \times 10^{-1} \pm 2.68 \times 10^{-2} & 5.75 \times 10^{-1} \pm 3.36 \times 10^{-2} & 5.60 \times 10^{-1} \pm 5.81 \times 10^{-2} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Finalmente podemos comparar las cotas experimentales de los ángulos de mezcla con el modelo, y esto se muestra en la figura 4.4.

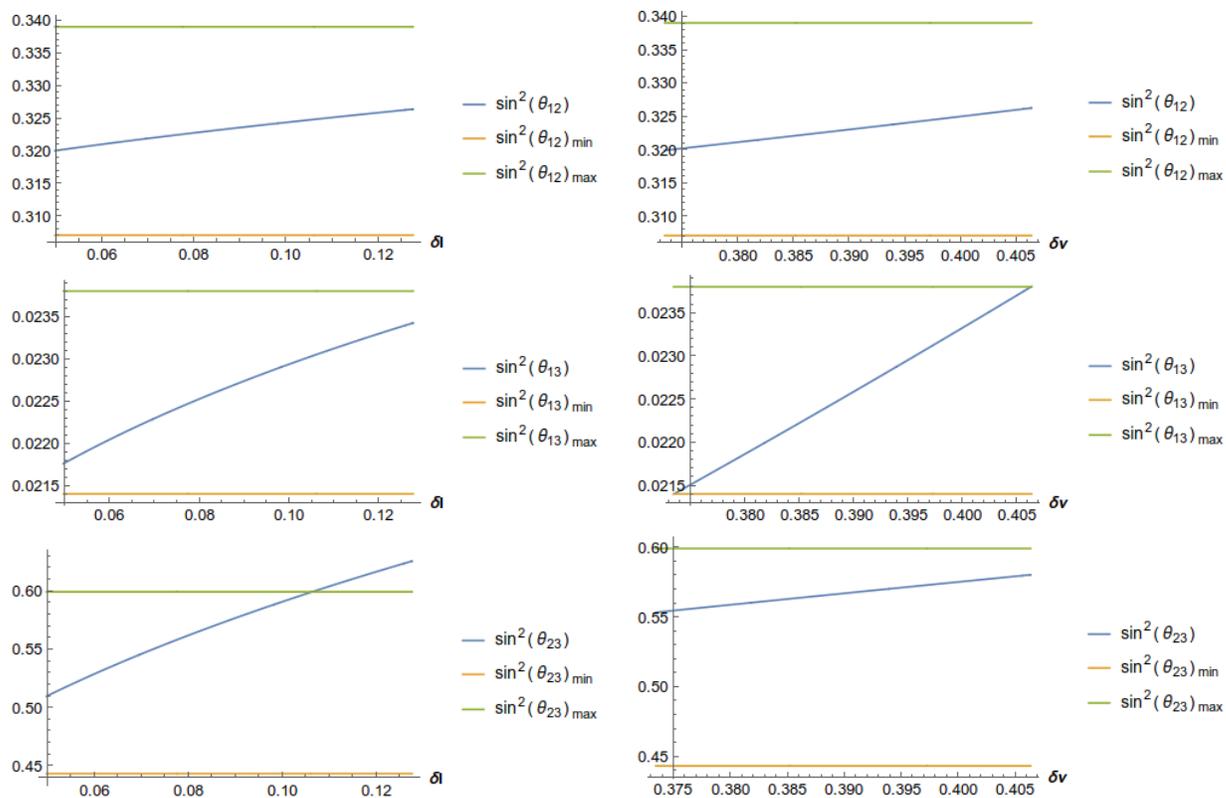


Figura 4.4: En los paneles de la izquierda se muestra la curva descrita por  $\sin^2 \theta_{ij}^{th}$  cuando solo depende de  $\delta_l$ . En los paneles de la derecha se muestra la curva descrita por  $\sin^2 \theta_{ij}^{th}$  cuando solo depende de  $\delta_\nu$ . Las líneas son las cotas experimentales de  $\sin^2 \theta_{ij}^{exp}$  a  $1\sigma$ .



# Capítulo 5

## Conclusiones

Aunque sumamente exitoso en lo que a sus predicciones fenomenológicas se refiere, el Modelo Estándar de las interacciones electrodébiles parece incompleto desde un punto de vista teórico. En su forma actual no es capaz de predecir las masas de los fermiones (leptones y quarks) ni de explicar porqué hay varias familias de tales partículas.

Uno de los fenómenos más interesantes que se presenta es la mezcla de neutrinos, fenómeno conocido como oscilación de neutrinos, es decir, transformaciones periódicas de neutrinos de un sabor en otro. Debido a su interacción con la materia, neutrinos con distintos sabores tienen índices de refracción diferentes. Ello hace que, en general, las oscilaciones se vean afectadas por las propiedades del medio a través del cual los neutrinos se propagan.

El hecho de que el neutrino aparezca con una sola de sus proyecciones de quiralidad se basa solamente en un hecho experimental: la violación de la simetría de paridad en las interacciones débiles, lo cual es consecuencia de que los bosones portadores de dicha interacción sólo se acoplan a las componentes de quiralidad izquierda de los campos fermiónicos; junto a esto, el carácter neutro del neutrino hace que sea posible elaborar una teoría con cualquiera de sus proyecciones de quiralidad, y se escoge la izquierda para reproducir la experiencia. Sin embargo, es posible extender el ME a un modelo más general, en donde ambas proyecciones de quiralidad estén presentes en la teoría, permitiendo, entre otras cosas, que el neutrino adquiera masa.

En el marco teórico del Modelo de Dos Dobleces de Higgs se demostró que se puede realizar un tratamiento unificado para las matrices de masa de todos los fermiones en la teoría, al introducir la parte derecha de los neutrinos como un singlete bajo la acción del grupo de norma del Modelo Estándar, y al considerar que los neutrinos activos  $\nu_i$  ( $i = e; \mu; \tau$ ) son partículas de Majorana. En dicho tratamiento las matrices de masa son representadas con una matriz genérica con dos ceros de textura.

En este trabajo de tesis se demostró que al extender el Modelo Estándar, se obtiene un tratamiento unificado de las matrices de masa de los leptones, en el cual los neutrinos izquierdos adquieren masa a través del mecanismo *seesaw* tipo I. En este escenario, las matrices de masa de los fermiones de Dirac tienen la misma forma genérica (hermitiana) con dos ceros de textura y una jerarquía normal en el espectro de masa. Por consiguiente, la matriz de masa de los neutrinos de Majorana también tiene dos ceros de textura, pero es una matriz simétrica compleja. De este modo, una vez que se determinaron las matrices de masa de los neutrinos, se dedujeron expresiones teóricas para los elementos de la matriz de mezcla  $V_{PMNS}$ .

La matriz de mezclas leptónica  $V_{PMNS}$  se parametrizó en términos de  $\tilde{m}_{\nu_i}$  ( $i = 1, 2$ );  $\delta_l$ ,  $\delta_\nu$  y dos parámetros  $\eta_l$ ,  $\eta_\nu$ :

$$V_{PMNS}(\tilde{m}_{\nu_i}, \eta_1, \eta_2, \delta_l, \delta_\nu) ..$$

A partir de las relaciones teóricas de las diferencias de masa al cuadrado  $\Delta^2 m_{ij}$  se relaciona la masa de los neutrinos ligeros con el más pesado para cada jerarquía de masa. Esto nos permite que la matriz de

mezcla  $V_{PMNS}$  depende solamente del masa del neutrino más pesado. Seguido comparamos las entradas de la matriz  $V_{PMNS}$  hallada, con las correspondientes a la parametrización de la matriz  $V_{PMNS}$  dada en PDG. Esto nos permitió relacionar los senos cuadrados de los ángulos de mezcla de los neutrinos con nuestra modelo teórico.

Se realiza un exploración del espacio de parámetros al definir el estadístico  $\chi^2$  que nos permite medir la diferencia estadística entre teoría y experimento. Esto nos permitió hallar las regiones de aceptación de los parámetros  $\delta_\nu$ ,  $\delta_l$  a 70 % y 95 % de nivel de confianza, para una jerarquía normal. También se halló el punto de mejor ajuste en  $(\delta_l, \delta_\nu)$ . Presentamos la matriz de mezcla  $V_{PMNS}$  numérica generada por el punto de mejor ajuste. Finalmente se observa que los senos cuadrados de los ángulos de mezcla en función de  $\delta_\nu$  y  $\delta_l$  concuerdan en buena medida con los datos experimentales.

## Apéndice A

# EL operador de conjugación de carga $C$

Un término de masa es una suma de productos invariantes de Lorentz de las componentes izquierda y derecha de los campos. Nosotros mostraremos que los campos conjugados

$$\nu_L^c = C\bar{\nu}_L^T \quad \nu_R^c = C\bar{\nu}_R^T \quad (\text{A.1})$$

son campos derechos e izquierdos, respectivamente, donde  $C$  es la matriz unitaria de conjugación de carga, la cual satisface las relaciones <sup>1</sup>

$$C\gamma_\alpha^T C^{-1} = -\gamma_\alpha \quad C = -C^T = -C^{-1} = -C^\dagger \quad C^2 = -I. \quad (\text{A.2})$$

Además,

$$\gamma^5 \nu_L = -\nu_L, \quad \gamma^5 \nu_R = -\nu_R. \quad (\text{A.3})$$

Obsérvese que<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} (\gamma^5 \nu_L)^\dagger &= (-\nu_L)^\dagger, \\ \nu_L^\dagger (\gamma^5)^\dagger &= -\nu_L^\dagger. \end{aligned}$$

Multiplicando por  $\gamma^0$  por la izquierda

$$\nu_L^\dagger \gamma^5 \gamma^0 = -\nu_L^\dagger \gamma^0.$$

Debido a que  $\gamma^5$  y  $\gamma^0$  anticonmutan, obtenemos,

$$\bar{\nu}_L \gamma^5 = \bar{\nu}_L. \quad (\text{A.4})$$

Análogamente podemos deducir que:

$$\bar{\nu}_R \gamma^5 = -\bar{\nu}_R. \quad (\text{A.5})$$

Utilizando (A.4), transponiendo y multiplicando por la izquierda por la matriz  $C$  tenemos:

$$\begin{aligned} (\bar{\nu}_L \gamma^5 C)^T &= (\bar{\nu}_L C)^T, \\ C^T (\gamma^5)^T \bar{\nu}_L^T &= C^T \bar{\nu}_L^T, \\ -C (\gamma^5)^T \bar{\nu}_L^T &= -C \bar{\nu}_L^T, \\ -C (\gamma^5)^T C^{-1} C \bar{\nu}_L^T &= -(\bar{\nu}_L^T)^c, \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Esto es debido a  $\gamma^5 \nu_L = \gamma^5 \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\nu_L = \frac{1}{2}(\gamma^5 - (\gamma^5)^2)\nu_L = \frac{1}{2}(\gamma^5 - 1)\nu_L = -\nu_L$ , análogamente para  $\nu_R$ .

<sup>2</sup>Recordemos que  $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$  y que  $\nu_L^\dagger \gamma^0 = \bar{\nu}_L$ .

$$-\gamma^5 C \bar{\nu}_{iL}^T = -(\bar{\nu}_{iL}^T)^c.$$

Finalmente se obtiene <sup>3</sup>

$$\gamma^5 (\nu_{iL})^c = (\nu_{iL}^c)^c, \quad \gamma^5 (\nu_{iR})^c = -(\nu_{iR}^c)^c, \quad (\text{A.6})$$

donde se tomó en cuenta que

$$C \gamma_5^T C^{-1} = \gamma_5. \quad (\text{A.7})$$

Comparando (A.6) con (A.4) y (A.5) se deduce que  $(\nu_{iL})^c$  es la componente derecha y  $(\nu_{iR})^c$  es la componente izquierda del campo. De las ecuaciones (A.1) y (A.2) encontramos que

$$\overline{(\nu_{iL})^c} = -\nu_{iL}^T C^{-1}, \quad \overline{(\nu_{iR})^c} = -\nu_{iR}^T C^{-1}. \quad (\text{A.8})$$

Demostremos lo anterior, así tomando en cuenta (A.2) tenemos:

$$\begin{aligned} \overline{(\nu_{iL})^c} &= \overline{(C \bar{\nu}_{iL}^T)} = (C \bar{\nu}_{iL}^T)^\dagger \gamma^0 = (\bar{\nu}_{iL}^T)^\dagger C^\dagger \gamma^0 = \\ &= -(\bar{\nu}_{iL}^T)^\dagger C \gamma^0 = -(\bar{\nu}_{iL}^T)^\dagger C (-C (\gamma^0)^T C^{-1}) = (\bar{\nu}_{iL}^T)^\dagger C^2 (\gamma^0)^T C^{-1}. \end{aligned}$$

Fácilmente se puede comprobar que  $(\gamma^0)^T = \gamma^0$ , así tenemos

$$-(\bar{\nu}_{iL}^T)^\dagger \gamma^0 C^{-1} = -\overline{(\bar{\nu}_{iL}^T)} C^{-1} = -\nu_{iL}^T C^{-1}$$

Por tanto, la ecuación (A.8) queda demostrada<sup>4</sup>.

---

<sup>3</sup>El proceso es idéntico para  $(\nu_{iR})^c$ .

<sup>4</sup>La otra ecuación se demuestra de una forma similar

## Apéndice B

# Minimizando una función con Mathematica

Mathematica es un software altamente eficaz que te permite realizar cálculos simbólicos como numéricos. En nuestro caso solo explicaremos de forma muy breve el funcionamiento del algoritmo NMinimize, basado en el método “Nelder-Mead”.

### B.1. La función NMinimize

Esta función permite obtener mínimos globales restringiendo los parámetros de la función objetivo. En general la función objetivo, es multivariable y puede ser no diferenciable ni continua. En el argumento de NMinimize, podemos insertar una lista de combinaciones lógicas de igualdades, desigualdades y dominios especificados.

Además NMinimize tiene muchos métodos de optimización disponibles como son: “DifferentialEvolution”, “NelderMead”, “RandomSearch” y “SimulatedAnnealing”. El método se debe especificar dentro del argumento de NMinimize con la función Method.

Para nuestro análisis hemos utilizado el método “Nelder-Mead”, el cual se explica abajo.

### B.2. El método Nelder-Mead

El método Nelder-Mead es un método de búsqueda directa, es decir, no se basa en el uso de gradientes. Para una función de  $n$  variables el algoritmo mantiene un conjunto de  $n+1$  vértices formando un politopo.

En cada iteración  $n + 1$  puntos  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  forman un politopo. Los puntos son ordenados de tal forma que  $f(x_1) < f(x_2) < \dots < f(x_{n+1})$ . Así el peor punto  $f(x_{n+1})$  es reemplazado por un nuevo punto.

Sea  $c$  el centroide del politopo constituido por los mejores  $n$  puntos,  $c = \sum_{i=1}^n x_i$ . Un punto de prueba  $x_t$  es generado reflejando el peor punto usando del centroide,  $x_t = c + \alpha(c - x_{n+1})$  donde  $\alpha$  es un parámetro positivo.

Si el nuevo punto  $x_t$  no es un nuevo peor punto ni un nuevo mejor punto,  $f(x_1) \leq f(x_t) \leq f(x_n)$ ,  $x_t$  reemplaza a  $x_{n+1}$ .

Si el nuevo punto  $x_t$  es mejor que el mejor punto  $f(x_t) < f(x_1)$ , la reflexión es muy exitosa y puede llevarse acabo además  $x_e = c + \beta(x_t - r)$ , donde  $\beta > 1$  es un parámetro para expandir el politopo. Si la expansión es exitosa,  $f(x_e) < f(x_t)$ ,  $x_e$  reemplaza a  $x_{n+1}$ ; por otro lado, si la expansión falla,  $x_t$  reemplaza a  $x_{n+1}$ .

```
In[1]:= NMinimize[{x^2 - (y - 1)^2, x^2 + y^2 ≤ 4}, {x, y}]  
Out[1]= {-9., {x → 2.05919 × 10-8, y → -2.}}
```

Figura B.1: Esta imagen muestra un ejemplo del funcionamiento del comando `NMinimize`, usando la función  $x^2 - (y - 1)^2$  y la restricción  $x^2 + y^2 \leq 4$ . En el output, el primer número representa el mínimo valor que alcanza la función y los siguientes números son los valores de  $x$  y  $y$  que permiten alcanzar el valor mínimo

Si el nuevo punto  $x_t$  es peor que el segundo peor punto  $f(x_t) \geq f(x_n)$ , el politopo se supone que es demasiado grande y necesita ser contraído. Un nuevo punto se define como:

$$x_e = c + \gamma(x_{n+1} - c), \text{ si } f(x_t) \geq f(x_{n+1}) \text{ ó } x_e = c + \gamma(x_t - c), \text{ si } f(x_t) < f(x_{n+1})$$

donde  $0 < \gamma < 1$  es un parámetro. Si  $f(x_c) < \text{Min}(f(x_{n+1}), f(x_t))$ , la contracción es exitosa, y  $x_c$  reemplaza a  $x_{n+1}$ . De lo contrario una nueva contracción se lleva a cabo.

El proceso se asume que converge si la diferencia entre los mejores valores de la función en el nuevo politopo, tanto como la distancia entre los mejores puntos y los viejos mejores puntos, son menores que la tolerancia aceptada por la función "AccuracyGoal".

Donde "AccuracyGoal" es una opción para diversas operaciones numéricas en Mathematica que especifica cuantos dígitos efectivos de precisión se muestran en el resultado final. En la figura B.1, se muestra la forma en que el comando `NMinimize` se utiliza en Mathematica.

## Apéndice C

# Análisis de verosimilitud $\chi^2$

El estadístico de  $\chi^2$  es una medida estadística de la diferencia entre los datos experimentales y los datos que se pueden inferir de manera teórica, la cual se define como<sup>1</sup>:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i^{exp} - x_i^{teo})^2}{\sigma_i}, \quad (C.1)$$

donde  $x_i^{exp}$  representa el  $i$ -ésimo dato experimental,  $x_i^{teo}$  es el  $i$ -ésimo dato obtenido teóricamente y  $\sigma_i$  es el error asociado a  $x_i^{exp}$ .

La distribución de  $\chi^2$  tiene por función de densidad:

$$\chi_k^2(x) = \frac{x^{\frac{k}{2}-1} \exp -\frac{x}{2}}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma(\frac{k}{2})}, \quad (C.2)$$

donde el parámetro  $k$  denota los grados de libertad del sistema, ver Figura C.1.

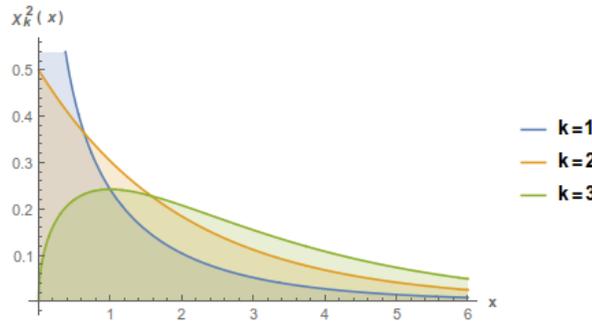


Figura C.1: Gráfica de la función de densidad correspondiente a  $\chi_k^2$  para distintos grados de libertad  $k = 1, 2, 3$ .

La distribución de probabilidad acumulativa de  $\chi_k^2$  para valores menores de un  $x$  dado ( $\chi_k^2 < x$ ) está dado como

$$P(\chi_k^2 < x) = \int_0^x \chi_k^2(u) du. \quad (C.3)$$

<sup>1</sup>véase por ejemplo ([19])

**APÉNDICE C. ANÁLISIS DE VEROSIMILITUD  $\chi^2$**   
**C.1. DISTRIBUCIÓN DE  $\chi^2$  INVERSA**

---

Esta integral no tiene solución conocida, así que solo se conocen métodos numéricos para calcularla. En la Tabla C.1 se muestran algunos valores de  $P(\chi_k^2 < x)$ .

$k/x$	1	2	3	4	5
0.2	0.345279	0.0951626	0.0224107	0.00467884	0.000886139
0.4	0.472911	0.181269	0.0597575	0.0175231	0.00467041
0.6	0.561422	0.259182	0.103568	0.0369363	0.0119968
0.8	0.628907	0.32968	0.150533	0.0615519	0.0229667
1	0.682689	0.393469	0.198748	0.090204	0.0374342

Tabla C.1: Valores numéricos de la distribución de probabilidad acumulativa correspondiente a la distribución  $\chi^2$ . En esta tabla se presentan los grados de libertad en la primera fila y los valores de  $x$  en la primera columna.

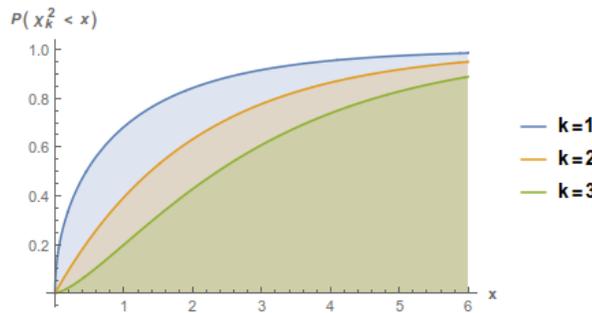


Figura C.2: Gráfica de la distribución de probabilidad acumulativa correspondiente a  $\chi_k^2$  para distintos grados de libertad  $k = 1, 2, 3$ .

## C.1. Distribución de $\chi^2$ inversa

Ahora utilizamos la distribución de probabilidad acumulativa correspondiente a la distribución  $\chi^2$  dada en (C.3) de una forma diferente. Supóngase que conocemos la probabilidad  $p$  y el número de grados de libertad  $k$  pero no conocemos el valor de  $x$  que cumple con:

$$P(\chi_k^2 < x) = p. \tag{C.4}$$

Otra vez, esto solo tiene solución numérica, por lo que en la Tabla C.2 se muestran los valores correspondientes de  $x$  que cumplen con la anterior condición (C.4).

$p/k$	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95
1	1.07419	1.3233	1.64237	2.07225	2.70554	3.84146
2	2.40795	2.77259	3.21888	3.79424	4.60517	5.99146
3	3.66487	4.10834	4.64163	5.31705	6.25139	7.81473
4	4.87843	5.38527	5.98862	6.74488	7.77944	9.48773
5	6.06443	6.62568	7.28928	8.1152	9.23636	11.0705

Tabla C.2: Tabla con los valores  $x$  para los correspondientes a  $k$  y  $p$  que cumplen con la condición (C.4), donde los grados de libertad  $k$  se encuentran en la primera columna y los valores de  $p$  en la primera fila .

## C.2. Ajuste de $\chi^2$

Obsérvese que  $x_i^{teo} = x_i^{teo}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ , es decir,  $x_i^{teo}$  depende de  $n$  parámetros teóricos con  $n$  menor que el número de observables  $n_0$  (número de datos experimentales disponibles). Sea  $\Theta = \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ , entonces tenemos de la ecuación (C.1):

$$\chi^2(\Theta) = \sum_{i=1} \frac{(x_i^{exp} - x_i^{teo}(\Theta))^2}{\sigma_i^2}, \quad (C.5)$$

donde se define el número de grados de libertad  $k$  como:

$$k = n_0 - n, \quad n < n_0. \quad (C.6)$$

De (C.1) se observa que entre más próximo a cero sea el valor del estadístico  $\chi^2$ , habrá mayor acuerdo entre el modelo teórico y los datos experimentales. Por lo que si minimizamos la función (C.5), encontraremos el valor de los parámetros ( $\Theta_{BFP}$ ) que mejor reproducen los datos experimentales. Esto solo garantiza un punto de mejor ajuste. Sin embargo desde el punto de vista de la estadística matemática, un solo punto en el espacio de parámetros tiene un ínfimo nivel de confianza. Sea  $\Theta_0$  el punto en el espacio de parámetros que genera los datos experimentales a partir del modelo teórico. En principio nada asegura que  $\Theta_{BFP} = \Theta_0$ , pero si podemos crear una región alrededor de  $\Theta_{BFP}$  de tal manera que esta región también contenga a  $\Theta_0$  con cierto nivel de confianza (N.C.). Para lograrlo, nos ayudaremos de la Tabla C.2 usando el siguiente procedimiento:

1. Se elige el número de grados  $\nu_i$  de libertad que hay en el sistema.
2. Procedemos a elegir un nivel de confianza (N.C.) o probabilidad con la que deseemos trabajar.
3. Observamos el valor correspondiente de la tabla C.2 correspondiente a  $k_i$  y a N.C. digamos  $x$ .
4. Finalmente a partir de la definición (C.5), tomamos la región en el  $\Theta$ -espacio que cumple con

$$\chi^2(\Theta) < x. \quad (C.7)$$

Esto último nos generará una región con el nivel confianza N.C. de contener a  $\Theta_0$  (obsérvese que esta región por definición contiene a  $\Theta_{BFP}$ ).



# Bibliografía

- [1] M. Herrero. The Standard model. *NATO Sci. Ser. C*, 534:1–59, 1999.
- [2] Paul Langacker. Introduction to the Standard Model and Electroweak Physics. In *Proceedings of Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics on The dawn of the LHC era (TASI 2008)*, pages 3–48, 2010.
- [3] Peter W. Higgs. Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons. *Phys. Rev. Lett.*, 13:508–509, 1964.
- [4] F. Englert and R. Brout. Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons. *Phys. Rev. Lett.*, 13:321–323, 1964.
- [5] S. Dawson. Introduction to the physics of Higgs bosons. In *Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics (TASI 94): CP Violation and the limits of the Standard Model Boulder, Colorado, May 29-June 24, 1994*, 1994.
- [6] Abdelhak Djouadi. The Anatomy of electro-weak symmetry breaking. I: The Higgs boson in the standard model. *Phys. Rept.*, 457:1–216, 2008.
- [7] Samoil Bilenky. Introduction to the physics of massive and mixed neutrinos. *Lect. Notes Phys.*, 817:1–255, 2010.
- [8] Serguei Chatrchyan et al. Observation of a new boson with mass near 125 GeV in pp collisions at  $\sqrt{s} = 7$  and 8 TeV. *JHEP*, 06:081, 2013.
- [9] Chian-Shu Chen, Fei-Fan Lee, Guey-Lin Lin, and Yen-Hsun Lin. Probing Dark Matter Self-Interaction in the Sun with IceCube-PINGU. 2014.
- [10] John F. Gunion, Howard E. Haber, Gordon L. Kane, and Sally Dawson. The Higgs Hunter’s Guide. *Front. Phys.*, 80:1–448, 2000.
- [11] G. C. Branco, P. M. Ferreira, L. Lavoura, M. N. Rebelo, Marc Sher, and Joao P. Silva. Theory and phenomenology of two-Higgs-doublet models. *Phys. Rept.*, 516:1–102, 2012.
- [12] David Atwood, Laura Reina, and Amarjit Soni. Phenomenology of two Higgs doublet models with flavor changing neutral currents. *Phys. Rev.*, D55:3156–3176, 1997.
- [13] Maria Krawczyk and Dorota Sokolowska. The Charged Higgs boson mass in the 2HDM: Decoupling and CP violation. *eConf*, C0705302:HIG09, 2007. [141(2007)].
- [14] Maria Krawczyk. Testing Higgs sector of 2HDM. *PoS*, HEP2005:335, 2006.
- [15] Frank F. Deppisch. Lepton Flavour Violation and Flavour Symmetries. *Fortsch. Phys.*, 61:622–644, 2013.

- [16] Ilja Dorsner and S. M. Barr. Flavor exchange effects in models with Abelian flavor symmetry. *Phys. Rev.*, D65:095004, 2002.
- [17] M.C. Gonzalez-Garcia and Y. Nir. Neutrino masses and mixing: Evidence and implications. *Rev. Mod. Phys.*, 75:345–402, 2003.
- [18] Matthew Robinson. *Symmetry and the Standard Model*. Springer, 2011.
- [19] K. A. Olive et al. Review of Particle Physics. *Chin. Phys.*, C38:090001, 2014.
- [20] Rabindra N Mohapatra and Palash B Pal. *Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics*. World Scientific Lecture Notes in Physics. World Scientific, Singapore, 1991.
- [21] Enrique Fernández Sánchez. Neutrinos del Sol y del Cosmos. *Rev.R.Acad.Cienc.Exact.Fís.Nat. (Esp) Vol. 100, No. 1, pp 113-133*, 2006.
- [22] Y. Suzuki. Solar neutrino results from super-kamiokande. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 77:35–42, 1999.
- [23] B. Pontecorvo. Inverse beta processes and nonconservation of lepton charge. *Sov. Phys. JETP*, 7:172–173, 1958. [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.*34,247(1957)].
- [24] B. M uller W.Greiner. *Gauge Theory of Weak Interactions*. Verlag, 1989.
- [25] D. Griffiths. *Introduction to Elementary Particles*. Sons, 1987.
- [26] Z. Maki, M. Nakagawa, and S. Sakata. Remarks on the unified model of elementary particles. *Prog. Theor. Phys.*, 28:870, 1962.
- [27] Boris Kayser, Françoise Gibrat-Debu, and Frédéric Perrier. *The Physics of the massive neutrinos*.
- [28] T. Kajita. Atmospheric neutrino observation in Super-Kamiokande: Evidence for nu/mu oscillations. pages 107–122, 1998.
- [29] Félix Francisco González Canales. *SIMETRÍA PERMUTACIONAL S3 : SABOR Y CEROS DE TEXTURA*. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2011.
- [30] Rodolfo Alexander Diaz. *Phenomenological analysis of the two Higgs doublet model*. PhD thesis, Colombia, U. Natl., 2002.
- [31] John F. Gunion and Howard E. Haber. The CP conserving two Higgs doublet model: The Approach to the decoupling limit. *Phys. Rev.*, D67:075019, 2003.
- [32] H. Fritzsch. Calculating the Cabibbo Angle. *Phys. Lett.*, B70:436, 1977.
- [33] Harald Fritzsch and Zhi-Zhong Xing. Four-zero texture of hermitian quark mass matrices and current experimental tests. *Physics Letters B*, 555(1–2):63–70, 2003.
- [34] O. Félix-Beltrán, F. González-Canales, J. Hernández-Sánchez, S. Moretti, R. Noriega-Papaqui, and A. Rosado. Analysis of the quark sector in the 2HDM with a four-zero Yukawa texture using the most recent data on the CKM matrix. *Phys. Lett.*, B742:347–352, 2015.
- [35] Kei Takeuchi Yoshio Takane Haruo Yanai. *Projection Matrices, Generalized Inverse Matrices, and Singular Value Decomposition*. Springer New York, optional edition, 2011.
- [36] J. L. Díaz-Cruz, R. Noriega-Papaqui, and A. Rosado. Measuring the fermionic couplings of the higgs boson at future colliders as a probe of a nonminimal flavor structure. *Phys. Rev. D*, 71:015014, Jan 2005.

- [37] J. L. Díaz-Cruz, J. Hernández-Sánchez, S. Moretti, R. Noriega-Papaqui, and A. Rosado. Yukawa textures and charged higgs boson phenomenology in the type-iii two-higgs-doublet model. *Phys. Rev. D*, 79:095025, May 2009.
- [38] J. E. Barradas Guevara, F. C. Cazarez Bush, A. Cordero Cid, O. Felix Beltran, J. Hernandez Sanchez, and R. Noriega Papaqui. Implications of Yukawa Textures in the decay  $H^+ \rightarrow W^+\gamma$  within the 2HDM-III. *J. Phys.*, G37:115008, 2010.
- [39] M. Gomez-Bock and R. Noriega-Papaqui. Flavor violating decays of the Higgs bosons in the THDM-III. *J. Phys.*, G32:761–776, 2006.
- [40] Harald Fritzsch and Zhi zhong Xing. Mass and flavor mixing schemes of quarks and leptons. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 45:1–81, 2000.
- [41] Emma González Hernández. Análisis de las masas y mezclas del sabor de los neutrinos en el mddh tipo iii. Technical report, 2014.
- [42] D.V. Forero, M. Tortola, and J.W.F. Valle. Neutrino oscillations refitted. *Phys.Rev.*, D90(9):093006, 2014.
- [43] P.A.R. Ade et al. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters. *Astron.Astrophys.*, 571:A16, 2014.