

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN FÍSICA

ESPECTROS DE REFLEXIÓN DE ESTRUCTURAS
CUASIPERIÓDICAS CON GRAFENO

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN FÍSICA

PRESENTA
LAURA ALEJANDRA TEPANECATL FUENTES

DIRECTORES DE TESIS
DRA. MARTHA ALICIA PALOMINO OVANDO
DR. FELIPE RAMOS MENDIETA

PUEBLA, PUE.

ENERO 2015

Dedicatoria

Como un padre siempre te he visto y como una madre también, gracias a su cariño y consejos he logrado alcanzar este objetivo de mi vida, como agradecimiento, es para ustedes esta tesis.

Gracias amados abuelos (José TepanecatI, Guadalupe Nolasco y Petronilo Fuentes)

Amiga Doris este trabajo también es para ti, siempre estarás en mi corazón.

Agradecimientos

Me gustaría que estas líneas sirvieran para expresar mi más profundo y sincero agradecimiento a todas aquellas personas que con su ayuda han colaborado en la realización del presente trabajo, directa o indirectamente, en especial a la Dra. Martha Alicia Palomino Ovando, directora de esta investigación, por la orientación, el seguimiento y la supervisión continúa de la misma, pero sobre todo por la motivación y el apoyo recibido a lo largo de estos años.

Especial reconocimiento merece el interés mostrado por mi trabajo y las sugerencias recibidas de los profesores miembros del jurado.

También me gustaría agradecer la comprensión, paciencia y la ayuda recibida por mis compañeros y amigos Antonia Contreras, Columba Medel, Ariana Sampayo, Julio Zayas y Karla Gutiérrez.

Quisiera hacer extensiva mi gratitud a mis padre Alejandra Fuentes y Juan Tepanecatl y a mi novio Alejandro Rojas pues ellos han sido las personas que más me impulsaron, animaron y apoyaron para alcanzar este objetivo. Y finalmente a mi tía Carmen Fuentes pues cuando más triste me sentía ella me animaba.

A todos ello muchas gracias.

Índice general

1. Introducción	1
2. Desarrollo teórico	5
2.1. Ecuaciones de Maxwell	5
2.2. MMT	6
2.3. Polarización P	6
2.4. Condiciones de Frontera	11
2.5. Coeficientes de Reflexión y Transmisión	13
2.6. Polarización S	14
2.7. Condiciones de Frontera	17
2.8. Coeficiente de Reflexión y Transmisión	18
3. Grafeno	21
3.1. Orígenes e historia del Grafeno	21
3.1.1. Hibridaciones	21
3.1.2. Formas Alotrópicas	22
3.1.3. Descripción del Grafeno	23
3.2. Propiedades Físicas del Grafeno	24
3.2.1. Deducción de la Conductividad del Grafeno	26
3.3. Posibles Aplicaciones del Grafeno	28
4. Sucesión de Fibonacci	31
4.1. Los Conejos de Fibonacci	32
4.2. Sucesión de Fibonacci	33
4.3. Números de Fibonacci en la Naturaleza y las Artes	35
4.4. Superredes de Fibonacci	38

5. Resultados	41
5.1. Espectros de Reflexión en función de la frecuencia	45
5.2. Espectros de reflexión en función del ángulo de incidencia . . .	48
6. Conclusiones	51
Bibliografía	53

**ESPECTROS DE REFLEXIÓN DE
ESTRUCTURAS CUASIPERIÓDICAS
CONSTRUIDAS CON GRAFENO**

2015

Capítulo 1

Introducción

La ciencia de materiales es la encargada de investigar la estructura, propiedades y la relación que guardan entre ellos, lo cual ha sido de gran importancia desde los inicios de la humanidad, pues veamos que en cualquier época en poca o gran medida, nos hemos servido de todo tipo de materiales para satisfacer nuestras necesidades. [1]

Desde la edad de Piedra (3 000 A.C) hasta la edad de Hierro (1 000 A.C.-1 950 D.C.) se han dado grandes contribuciones al estudio de los materiales. En la prehistoria se crearon herramientas en base a la durabilidad de la piedra y a la dureza del hierro. [2] Posteriormente las necesidades crecieron y al ser los metales puros demasiado suaves para ser empleados como armas, se vieron en la necesidad de desarrollar aleaciones. Con esto inició la mezcla, y alteración de muchos elementos originando así, un gran número de materiales completamente artificiales con una enorme gama de propiedades mecánicas, ya que, estas pueden ser ajustadas a un diseño dado. Posteriormente con los grandes avances científicos que se produjeron en los últimos siglos, se pudieron manipular las propiedades eléctricas de los materiales, lo cual ha revolucionado al mundo y a la tecnología, pues sus aplicaciones son muy vastas y ha abierto nuevas fronteras. En términos del desarrollo de los materiales, lo que ha seguido, es el control de sus propiedades ópticas. [3] Esto es, ha sido posible realizar materiales que impidan la propagación de ondas electromagnéticas, para ciertas longitudes de onda, o que permitan su transmisión pero solamente en unas determinadas direcciones del espacio. También ha sido posible atrapar, localizar y prever el comportamiento de dichas señales, lo que implica un gran avance en el desarrollo tecnológico. [4]

En este contexto los cristales fotónicos han tomado un papel principal

debido a que son estructuras ópticas en las que la variación periódica del índice de refracción, determina la posibilidad o no de la propagación de los fotones. La periodicidad de una estructura fotónica puede ser en una, dos o tres dimensiones. Pueden construirse con diferentes tipos de materiales, como dieléctricos, semiconductores y metales. [5] Un ejemplo de este tipo es el grafeno, que ha sido objeto de muchos estudios en este ámbito, debido a las diversas características físicas que presenta.

El grafeno es un cristal atómico bidimensional de carbono, el cual fue obtenido en 2004 por Andréy Gueim y a Konstantín Novosiólov al exfoliar carboncillo. [6] Inmediatamente después de haberlo podido sintetizar, este material causó un avance en el desarrollo de los materiales por su bidimensionalidad debido a que teóricamente estas estructuras eran inestables, además a esto debe sumarse sus increíbles y extraordinarias propiedades físicas. Este material tiene una alta conductividad térmica y eléctrica, es de gran dureza, y sobre todo el más delgado y liviano, reacciona químicamente con otras sustancias para producir compuestos de diferentes propiedades, presenta gran ligereza, es flexible, tiene un bajo efecto Joule, esto es, se calienta menos al conducir los electrones cuando se compara para esta misma tarea con el silicio, por lo que genera un menos consumo de electricidad, en otras palabras tiene una mayor eficiencia. [7–9] Además de que recientemente se ha demostrado que se autorregenera. [10] Y son todas estas propiedades las que lo hacen muy prometedor para la industria, la ingeniería y la investigación pura, por esto no será difícil creer que rápidamente surgieron nuevas y variadas formas de obtener este milagroso material. Entre ellas se encuentra el crecimiento de grafeno sobre diferentes sustratos, lo cual ha permitido la construcción de superredes que pueden crecerse de manera periódica o cuasiperiódica, siendo la estructura resultante de menor tamaño que los cristales construidos con materiales tales como dieléctricos, semiconductores o metales.

Dando paso al estudio de los cuasicristales, los cuales se definen como una estructura determinista, perfectamente ordenada, y que a diferencia de los cristales no presenta ninguna simetría de traslación debido a la aperiodicidad que presentan, esto es, siguen reglas de conformación complejas pero bien definidas, es decir, son ordenadas pero no son periódicas. Estos cuasicristales se construyen generalmente alternando dieléctricos o metales, a través de una relación de recurrencia [11]. Los casos más ampliamente estudiados en la literatura y llevados a la construcción experimental son los que siguen una relación de recurrencia de Fibonacci, ya que esta estructura nos permite controlar sus propiedades al variar los anchos de las capas dependiendo del

orden de generación de los números. Además de que esta sucesión presenta una estrecha relación con la razón dorada o número aureo (también llamado número de oro o razón de oro; el cual curiosamente aparece en diferentes áreas como: la música, arquitectura, pintura y la naturaleza en sí misma), pues el cociente de dos valores consecutivos pertenecientes a la sucesión tienden a esta razón de oro. [12,13]

Considerando a las diversas aplicaciones de los cuasicristales y las peculiares propiedades del grafeno en este trabajo estudiamos cuasicristales elaborados alternando capas de dieléctricos con grafeno, siguiendo la sucesión de Fibonacci, pretendiendo calcular los espectros de reflexión y transmisión en estructuras cuasiperiódicas donde la celda unitaria es un bloque generado por relación de recurrencia de esta sucesión donde se han combinado capas de grafeno depositadas sobre un dieléctrico. Para ello se construyen dos bloques donde el ancho del dieléctrico es diferente para cada uno de ellos, como se mencionó anteriormente estos se ordenan siguiendo una secuencia de Fibonacci. Ha sido mostrado en la literatura que la separación entre las capas de grafeno es determinante en la forma en la que se propagan los campos.

Para hacer este estudio, esta tesis se desarrolla de la siguiente manera, en el capítulo 2 se presenta el formalismo de la matriz de transferencia considerando la modificación que debe hacerse al método debido a las condiciones de frontera que impone el grafeno, en el capítulo 3, se discute con detalle las propiedades del grafeno, en el siguiente capítulo se hace un recuento de los números de Fibonacci y de la forma en la que esta relación de recurrencia se aplica para en la construcción de las superredes cuasiperiódicas. En el capítulo 5 se presentan los resultados de este trabajo y finalmente en el último capítulo se dan las conclusiones de este.

Capítulo 2

Desarrollo teórico

2.1. Ecuaciones de Maxwell

En 1873 J.C. Maxwell publicó su famoso *Tratado de electricidad y magnetismo* en el cual demostraba que las explicaciones y predicciones de los fenómenos electromagnéticos podían ser descritos por un grupo de cuatro ecuaciones (originalmente veinte), la ley de Gauss para la electricidad y el magnetismo, la ley de Ampere generalizada y la ley de Faraday para la inducción electromagnética. [14]

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.4)$$

Este es un conjunto de ecuaciones diferenciales, en las cuales aparecen las condiciones físicas siguientes: campo eléctrico \vec{E} , campo magnético \vec{B} , densidad de flujo eléctrico \vec{D} , intensidad de campo magnético \vec{H} , densidad de corriente eléctrica \vec{J} y densidad de carga eléctrica $\vec{\rho}$.

Para las ecuaciones de Maxwell en presencia de materia es necesario introducir los vectores siguientes, dado que debemos considerar la intervención de la permitividad y permeabilidad del medio

- $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ Desplazamiento eléctrico
- $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$ Campo magnético

2.2. MMT

Generalmente el obtener la transmisión y reflexión de una onda electromagnética propagándose en medios anisotrópicos compuesto por algunas capas se resuelve fácilmente mediante la aplicación de las ecuaciones de Maxwell, no obstante, cuando el número de capas es muy grande; el análisis de este problema se vuelve muy complicado debido a la cantidad de ecuaciones que hay que resolver. En estos casos es conveniente optar por otro método, como lo haremos en este trabajo. Se desarrollará un sistema compuesto por interfaces, ordenadas mediante la sucesión de Fibonacci, de donde, obtendremos las transmitancias y las reflexiones empleando el Método de Matriz de Transferencia (MMT), ya que, este método nos permite asignar una matriz a cada una de las capas que forman la superred y el producto de éstas nos darán una matriz que contiene la información de todo el sistema; pues el producto de ellas mantiene el orden en el cual las ondas atraviesan las capas al propagarse por el arreglo. En este capítulo desarrollaremos el MMT para dos tipos de polarización, la polarización transversal eléctrica conocida como polarización S y la polarización transversal magnética o polarización P . [15]

2.3. Polarización P

El hecho de que una onda electromagnética esté polarizada indica que el campo eléctrico oscila en un plano determinado, llamado *plano de polarización*. Este plano puede definirse por dos vectores, uno de ellos paralelo a la dirección de propagación de la onda y el otro perpendicular a esa misma dirección, el cual indica la dirección del campo eléctrico. Como las ondas electromagnéticas son ondas transversales, el campo magnético es ortogonal al campo eléctrico y al vector de propagación de la onda, para el caso de polarización P, el plano de polarización de la onda es paralelo a la superficie

de esta hoja tal como me muestra en la imagen (2.1), de esto se tiene, que el campo magnético queda perpendicular al plano de polarización. [16]

En la siguiente imagen mostramos la propagación de una onda electromagnética con las características mencionadas anteriormente que se propaga en un cristal fotónico formado por dos materiales con índices de refracción n_1 y n_2 respectivamente.

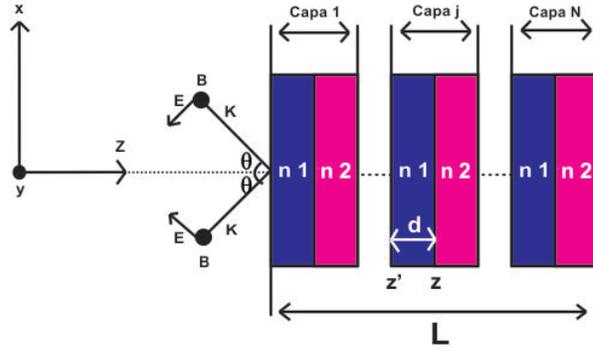


Figura 2.1: Polarización P en un cristal fotónico

De la figura anterior podemos ver que el campo eléctrico, el campo magnético y el vector de propagación se puede representar por los siguientes vectores.

$$\mathbf{E} = (-E_x, 0, -E_z) \quad (2.5)$$

$$\mathbf{B} = (0, B_y, 0) \quad (2.6)$$

$$\mathbf{k} = (k_x, 0, k_z) \quad (2.7)$$

Definimos la magnitud del vector \mathbf{k} como

$$|\mathbf{k}| = k^2 = k_x^2 + k_z^2 \quad (2.8)$$

Donde el vector de onda está dado por:

$$k^2 = \varepsilon_j \mu_j \frac{\omega^2}{c^2} \quad (2.9)$$

En esta ecuación ε_j , μ_j representan la permitividad y la permeabilidad respectivamente de la j -ésima capa. El subíndice j indica el medio al cual

pertenecen estos valores, por lo tanto, puede variar de 1 a m , donde n es el número de capas total y c es la velocidad de la luz, mientras que ω simboliza la frecuencia angular de la onda incidente.

Debido a las condiciones de frontera, la componente tangencial del campo eléctrico se conserva igual que k_x , por lo cual, podemos expresarlo como:

$$k_x^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\omega^2}{c^2} (\sin(\theta))^2 \quad (2.10)$$

Aquí ε_0 y μ_0 son la permitividad eléctrica y permeabilidad magnética del medio incidente que es exterior a nuestra estructura, θ es el ángulo que se forma con la normal y el vector de onda que se ilustra en la Figura (3.1). Ahora veamos que si sustituimos la ecuación(2.10) y la definición del vector de onda en la magnitud de k , y realizando algunas manipulaciones algebraicas conseguimos el siguiente resultado.

$$k_{z_j}^2 = \mu_j \frac{\varepsilon_j \omega^2}{c^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\omega^2}{c^2} (\sin(\theta))^2 \quad (2.11)$$

En este caso el subíndice j indica la capa de la estructura sobre la cual se esta trabajando. Empleando las ecuaciones Maxwell y considerando una densidad de carga nula, además de suponer que la permitividad de los medios es homogénea, usamos $\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$ donde $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, por lo tanto

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.12)$$

También se considera que \mathbf{E} y \mathbf{B} se propagan como ondas de una sola longitud, de esto podemos definir el campo magnético y eléctrico respectivamente, como:

$$\mathbf{B} = B_y \hat{\mathbf{j}} e^{i(k_z z + k_x x - \omega t)} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{E} = (E_x \hat{\mathbf{i}} - E_z \hat{\mathbf{k}}) e^{i(k_z z + k_x x - \omega t)} \quad (2.14)$$

Ahora procedemos a aplicar la Ecuación (2.12) al campo eléctrico definido anteriormente y conseguimos el siguiente resultado.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = E_x i k_x e^{i(k_z z + k_x x - \omega t)} - E_z i k_z e^{i(k_z z + k_x x - \omega t)} = 0 \quad (2.15)$$

El cual podemos escribirlo como se expresa a continuación:

$$E_x k_z = E_z k_x \tag{2.16}$$

Aplicando $\nabla \cdot E = -\frac{1}{C} \frac{\partial B}{\partial t}$ a \mathbf{E} y simplificando, resulta

$$E_x k_z - E_z k_x = \frac{\omega}{c} B_y \tag{2.17}$$

Si de la expresión anterior despejamos E_z y lo sustituimos en la ecuación (2.16), realizamos manipulaciones algebraicas y despejando B_y obtenemos

$$B_y = -\epsilon_j \mu_j \frac{\omega}{c k_z} E_x \tag{2.18}$$

Definimos la *impedancia*.
como:

$$Y_j = -\epsilon_j \frac{\omega}{c k_z} \tag{2.19}$$

Ahora realizando la sustitución de $H_y = \frac{B_j}{\mu_j}$ y la *impedancia* en la Ecuación(2.18) la relacion entre H_y y E_x , queda representada por

$$H_y = Y_j E_x \tag{2.20}$$

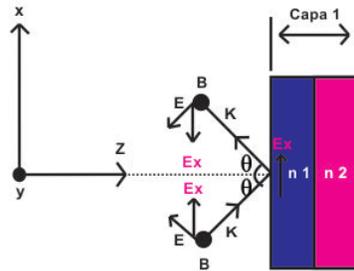


Figura 2.2: Propagación de la componente paralela del campo eléctrico

De acuerdo a la propagación del campo electromagnético, como podemos verlo en la imagen anterior, tenemos las siguientes ondas.

$$E_{x_j} = A_{1j}e^{ik_{z_j}z_j} - A_{2j}e^{-ik_{z_j}z_j} \quad (2.21)$$

$$H_{y_j} = Y_j A_{1j}e^{ik_{z_j}z_j} + Y_j A_{2j}e^{-ik_{z_j}z_j} \quad (2.22)$$

La ecuación del campo eléctrico nos indica que hay dos ondas propagándose: una hacia la derecha y una hacia la izquierda, que corresponde a la onda reflejada y transmitida, respectivamente. El campo magnético tiene una representación análoga.

Veamos que las ecuaciones (2.21) y (2.22) podemos escribirlas en notación matricial de la siguiente manera.

$$\begin{pmatrix} E_{x_j} \\ H_{y_j} \end{pmatrix}_{z_j} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ Y_j & Y_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1j}e^{ik_{z_j}z_j} \\ A_{2j}e^{-ik_{z_j}z_j} \end{pmatrix}_{z_j} \quad (2.23)$$

De donde obtenemos la matriz \mathbb{B}_j , la cual tiene el objetivo de proporcionar los campos electromagnético y magnético a partir de las amplitudes de la onda.

$$\mathbb{B}_j = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ Y_j & Y_j \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Conectando las ondas entre los puntos z a z'_j como se muestra en la Figura (2.1), conseguimos el siguiente resultado.

$$\begin{pmatrix} A_{1j}e^{ik_{z_j}z_j} \\ A_{2j}e^{-ik_{z_j}z_j} \end{pmatrix}_{z_j} = \begin{pmatrix} e^{ik_{z_j}(z_j-z'_j)} & 0 \\ 0 & e^{-ik_{z_j}(z_j-z'_j)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1j}e^{ik_{z_j}z'_j} \\ A_{2j}e^{-ik_{z_j}z'_j} \end{pmatrix}_{z'_j} \quad (2.25)$$

Donde

$$\mathbb{T}(d) = \begin{pmatrix} e^{ik_{z_j}d} & 0 \\ 0 & e^{-ik_{z_j}d} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Con $\mathbb{T}(d)$ la matriz de traslación y $d = z_j - z'_j$. Esta matriz nos describe el comportamiento de la onda dentro del medio.

Ahora si sustituimos la ecuación.(2.24) en la ecuación.(2.23) y evaluamos en el punto z' , obtenemos el siguiente resultado:

$$\begin{pmatrix} E_{x_j} \\ H_{y_j} \end{pmatrix}_{z'_j} = \mathbb{B}_j \begin{pmatrix} A_{1j} e^{ik_{z_j} z'_j} \\ A_{2j} e^{-ik_{z_j} z'_j} \end{pmatrix}_{z'_j} \quad (2.27)$$

Si de esta ecuación despejamos la matriz del lado derecho obtenemos lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} A_{1j} e^{ik_{z_j} z'_j} \\ A_{2j} e^{-ik_{z_j} z'_j} \end{pmatrix}_{z'_j} = \mathbb{B}_j^{-1} \begin{pmatrix} E_{x_j} \\ H_{y_j} \end{pmatrix}_{z'_j} \quad (2.28)$$

Donde \mathbb{B}_j^{-1} es la matriz inversa de \mathbb{B}_j , por lo cual tienen una función similar aunque en sentido opuesto.

$$\mathbb{B}_j^{-1} = \frac{1}{2Y_j} \begin{pmatrix} Y_j & 1 \\ -Y_j & 1 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Veamos que con las ecuaciones obtenidas anteriormente, podemos reescribir la representación matricial de las ondas propagándose en el campo electromagnético, en términos de $\mathbb{B}_j, \mathbb{T}(d)$ y \mathbb{B}_j^{-1} y quedaría expresadas como se describe a continuación.

$$\begin{pmatrix} E_{x_j} \\ H_{y_j} \end{pmatrix}_{z_j} = \mathbb{B}_j \mathbb{T}(d) \mathbb{B}_j^{-1} \begin{pmatrix} E_{x_j} \\ H_{y_j} \end{pmatrix}_{z'_j} \quad (2.30)$$

Renombraremos

$$\mathbb{B}_j \mathbb{T}(d) \mathbb{B}_j^{-1} = m_j \quad (2.31)$$

Realizando la multiplicación matricial anterior se obtiene:

$$m_j = \begin{pmatrix} \cos dk_{z_j} & \frac{i}{Y_j} \sin dk_{z_j} \\ iY_j \sin dk_{z_j} & \cos dk_{z_j} \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Esta es la matriz de transferencia que nos proporciona los campos para la j -ésima capa, la cual describe la propagación de ondas electromagnéticas en la interfase de un medio n_1 a un medio n_2

2.4. Condiciones de Frontera

En vista de que la presencia de grafeno está caracterizado por una conductividad alta, en las interfaces entre los dieléctricos las componentes tangenciales

de los campos magnéticos nos son continuas y la densidad de corriente superficial se relaciona con la conductividad a través de la Ley de Ohm la cual determina que para algunos materiales, la densidad de corriente J y el campo eléctrico E se relacionan a través de una constante σ llamada conductividad, característica de cada sustancia. Aplicamos las condiciones de frontera las cuales son utilizadas para calcular los patrones de reflectancia y transmisión de una onda incidiendo en los medios dieléctrico ó grafeno, por lo cual debemos considerar al aplicarlas que tenemos una densidad de corriente en la lamina de grafeno, como se menciona anteriormente, lo cual se ve reflejado en la ecuación (2.36).

$$D_{2n} - D_{1n} = 0 \quad (2.33)$$

$$E_{x_2} = E_{x_1} \quad (2.34)$$

$$B_{2n} = B_{1n} \quad (2.35)$$

$$H_{y_2} - H_{y_1} = j = \sigma E_{x_{j-1}} \quad (2.36)$$

Si estas condiciones de frontera se evalúan para el j -ésimo medio tenemos

$$E_{x_j}|_{z'_j} = E_{x_{j-1}}|_{z_{j-1}} = A_{1(j-1)}e^{ik_{z_{j-1}}z_{j-1}} - A_{2(j-1)}e^{-ik_{z_{j-1}}z_{j-1}} \quad (2.37)$$

$$H_{y_j}|_{z'_j} - H_{y_{j-1}}|_{z_{j-1}} = \sigma E_{x_{j-1}}|_{z_{j-1}} \quad (2.38)$$

Requerimos H_{y_j} , por lo que despejando de la ecuación (2.38), evaluando y realizando manipulaciones algebraicas obtenemos

$$H_{y_j} = (\sigma + y_{j-1})A_{1(j-1)}e^{ik_{z_{j-1}}z_{j-1}} + (-\sigma + y_{j-1})A_{2(j-1)}e^{-ik_{z_{j-1}}z_{j-1}} \quad (2.39)$$

Escribiendo matricialmente las relaciones anteriores obtenemos

$$\begin{pmatrix} E_{x_j} \\ H_{y_j} \end{pmatrix}_{z'_j} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sigma + y_{j-1} & -\sigma + y_{j-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1(j-1)}e^{ik_{z_{j-1}}z_{j-1}} \\ A_{2(j-1)}e^{-ik_{z_{j-1}}z_{j-1}} \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

De donde surge una nueva matriz, la cual es análoga a la ecuación(2.24), solo que esta nos proporciona los campos de la j -ésima capa a partir de las amplitudes de la $j-1$ capa.

$$\mathbb{S}_{j-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sigma + y_{j-1} & -\sigma + y_{j-1} \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Escribiendo esta matriz en forma de campo eléctrico y magnético, se tiene.

$$\begin{pmatrix} E_{x_j} \\ H_{y_j} \end{pmatrix}_{z'_j} = \mathbb{S}_{j-1} B_{j-1}^{-1} \begin{pmatrix} E_{x_{j-1}} \\ H_{y_{j-1}} \end{pmatrix}_{z_{j-1}} \quad (2.42)$$

Sustituyendo estas expresión en la ecuación.(2.41) resulta

$$\begin{pmatrix} E_{x_j} \\ H_{y_j} \end{pmatrix}_{z_j} = m_j \mathbb{S}_{j-1} \mathbb{B}_{j-1}^{-1} \begin{pmatrix} E_{x_{j-1}} \\ H_{y_{j-1}} \end{pmatrix}_{z_{j-1}} \quad (2.43)$$

Con fin de simplificar la notación llamamos: $c_j = m_j \mathbb{S}_{j-1} \mathbb{B}_{j-1}^{-1}$, y al realizar las operaciones requeridas se concluye el siguiente resultado:

$$c_j = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos dk_{z_j} & \frac{i}{2} \sin dk_{z_j} \\ \frac{-1}{2} i Y_j \sin dk_{z_j} (\sigma + Y_j) & \frac{1}{2} \cos dk_{z_j} Y_j (-\sigma + Y_j) \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

La cual es nuestra matriz de transferencia para la j -ésima capa, reestructurada, entonces para obtener la matriz de transferencia para el arreglo completo debemos realizar la multiplicación de las matrices de cada una de las capas.

$$\mathbb{C} = \prod_{j=1}^n c_j = c_1 c_2 c_3 \dots c_n \quad (2.45)$$

2.5. Coeficientes de Reflexión y Transmisión

Una vez obtenida la matriz de transferencia total evaluemos las ecuaciones (2.21) y (2.22) en $z=0$ y $z=L$.

En $z = 0$, $A_2 = R$ y $A_1 = 1$ pues la amplitud del campo incidente esta normalizada, entonces

$$E_x(z = 0) = 1 - R \quad (2.46)$$

$$H_y(z = 0) = Y_0(1 + R) \quad (2.47)$$

Para el caso de $z = L$, $A_2 = T$ y $A_1 = 0$

$$E_x(z = L) = T e^{ik_{z_{N+1}}L} \quad (2.48)$$

$$H_y(z = L) = Y_{n+1} e^{ik_{z_{N+1}}L} \quad (2.49)$$

Sustituimos las cuatro ecuaciones anteriores en las ecuaciones evaluadas en las fronteras de la estructura y colocamos los elementos de la matriz c , obtenemos:

$$\begin{pmatrix} T e^{ik_{z_{N+1}}L} \\ Y_{n+1} e^{ik_{z_{N+1}}L} \end{pmatrix}_{z=L} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - R \\ Y_0(1 + R) \end{pmatrix}_{z=0} \quad (2.50)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones de 2×2 se obtiene el valor de la amplitud de transmisión(T) y de reflexión(R)

$$T = \frac{(C_{11} - C_{12}Y_0)(C_{21} + C_{22}Y_0) - (C_{11} + C_{12}Y_0)(C_{21} - C_{22}Y_0)}{(C_{11} - C_{12}Y_0)Y_{N+1}e^{iLk_{z_{N+1}}} - (C_{21} - C_{22}Y_0)Y_{N+1}e^{iLk_{z_{N+1}}}} \quad (2.51)$$

$$R = \frac{(C_{11} + C_{12}Y_0)Y_{N+1}e^{iLk_{z_{N+1}}} - (C_{21} + C_{22}Y_0)Y_{N+1}e^{iLk_{z_{N+1}}}}{(C_{11} - C_{12}Y_0)Y_{N+1}e^{iLk_{z_{N+1}}} - (C_{21} - C_{22}Y_0)Y_{N+1}e^{iLk_{z_{N+1}}}} \quad (2.52)$$

2.6. Polarización S

En esta sección se procederá a realizar los cálculos para los coeficientes de reflexión y transmisión, considerando que el campo magnético es paralelo al plano de incidencia y el vector de campo eléctrico es perpendicular al vector de campo magnético.

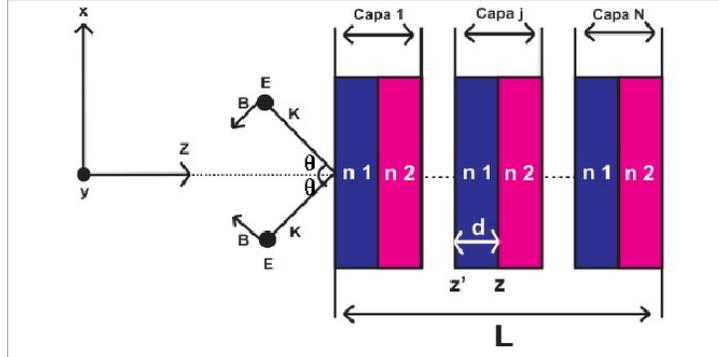


Figura 2.3: Polarización Transversal Eléctrica.

Si observamos las componentes del campo eléctrico, magnético y el vector de propagación de acuerdo a la Figura (2.3) tenemos:

$$\mathbf{k} = (-k_x, 0, k_z) \quad (2.53)$$

$$\mathbf{E} = (0, E_y, 0) \quad (2.54)$$

$$\mathbf{B} = (-B_x, 0, -B_z) \quad (2.55)$$

A continuación deberíamos proceder de igual forma que para la polarización P pero en vista de que se obtienen exactamente los mismos resultados, de la Ecuación (2.8) a la Ecuación(2.11), los omitiremos, procediendo directamente a hacer uso de las ecuaciones de Maxwell.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.56)$$

Supondremos que las ondas se propagan como si fueran monocromáticas, de tal forma que \mathbf{E} y \mathbf{B} quedan definidos como:

$$\mathbf{E} = E_y \hat{\mathbf{j}} e^{i(k_z z + k_x x - \omega t)} \quad (2.57)$$

$$\mathbf{B} = (B_x \hat{\mathbf{i}} - B_z \hat{\mathbf{k}}) e^{i(k_z z + k_x x - \omega t)} \quad (2.58)$$

Si aplicando la Ecuación (2.58) a la (2.58) obtenemos:

$$B_x = E_z \frac{k_z}{k_x} \quad (2.59)$$

Usando el rotacional de \mathbf{B} y suponiendo que no hay densidad de corriente tenemos lo siguiente

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.60)$$

Haciendo uso de la ecuación (2.60) junto con las ecuaciones (2.57) y (2.58) realizando el álgebra necesaria y utilizando la ecuación (2.59) para simplificar términos, análogo a lo que se elaboró para la polarización P.

$$B_x = -\frac{k_z E_y c}{\omega} \quad (2.61)$$

Ahora si se realiza la sustitución de $H_x = \frac{B_x}{\mu_j}$, podemos definir la impedancia, como:

$$Y_j = \frac{k_z c}{\omega \mu} \quad (2.62)$$

Por lo que la relación entre H_y y E_y queda expresada como:

$$H_y = Y_j E_y \quad (2.63)$$

De acuerdo a la propagación del campo electromagnético para la polarización S tenemos lo siguiente:

$$E_{y_j} = -A_{1j} e^{ik_{z_j} z} - A_{2j} e^{-ik_{z_j} z} \quad (2.64)$$

$$H_{x_j} = -Y_j (A_{1j} e^{ik_{z_j} z} - A_{2j} e^{-ik_{z_j} z}) \quad (2.65)$$

Veamos que estas ecuaciones las podemos escribir en forma matricial, y obtenemos el siguiente resultado:

$$\begin{pmatrix} E_{y_j} \\ H_{x_j} \end{pmatrix}_{z_j} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ Y_j & -Y_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1j} e^{ik_{z_j} z_j} \\ A_{2j} e^{-ik_{z_j} z_j} \end{pmatrix}_{z_j} \quad (2.66)$$

De donde se define la matriz \mathbb{B}_j

$$\mathbb{B}_j = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ Y_j & -Y_j \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

Elaborando el álgebra de manera silimilar como se realizó para la polarización P de las ecuaciones. (2.25) a (2.31), obtenemos

$$m_j = \begin{pmatrix} \cos dk_{z_j} & \frac{i}{Y_j} \sin dk_{z_j} \\ -iY_j \sin dk_{z_j} & \cos dk_{z_j} \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

Esta es la matriz de transferencia que nos proporciona los campos para la j -ésima capa.

2.7. Condiciones de Frontera

En este caso las condiciones de frontera corresponden a las indicadas en la sección anterior para la polarización P, por lo cual pasaremos directamente a las implicaciones.

$$E_{y_j}|_{z'_j} = E_{y_{j-1}}|_{z_{j-1}} = A_{1(j-1)}e^{ik_{z_{j-1}}z_{j-1}} - A_{2(j-1)}e^{-ik_{z_{j-1}}z_{j-1}} \quad (2.69)$$

$$H_{x_j}|_{z'_j} - H_{x_{j-1}}|_{z_{j-1}} = \sigma E_{y_{j-1}}|_{z_{j-1}} \quad (2.70)$$

Se requiere de H_{y_j} , por lo cual despejando este término de la ecuación anterior, evaluando y haciendo manipulaciones algebraicas obtenemos:

$$H_{x_j} = (\sigma + y_{j-1})A_{1(j-1)}e^{ik_{z_{j-1}}z_{j-1}} + (-\sigma + y_{j-1})A_{2(j-1)}e^{-ik_{z_{j-1}}z_{j-1}} \quad (2.71)$$

Escribiendo matricialmente las relaciones anteriores conseguimos:

$$\begin{pmatrix} E_{y_j} \\ H_{x_j} \end{pmatrix}_{z'_j} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -\sigma + y_{j-1} & -\sigma - y_{j-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1(j-1)}e^{ik_{z_{j-1}}z_{j-1}} \\ A_{2(j-1)}e^{-ik_{z_{j-1}}z_{j-1}} \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

Hemos obtenido una nueva matriz, la cual esta definida como:

$$\mathbb{S}_{j-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -\sigma + y_{j-1} & -\sigma - y_{j-1} \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

Escribiendo esta matriz en forma de los campo tenemos:

$$\begin{pmatrix} E_{y_j} \\ H_{x_j} \end{pmatrix}_{z'_j} = \mathbb{S}_{j-1} B_{j-1}^{-1} \begin{pmatrix} E_{y_{j-1}} \\ H_{x_{j-1}} \end{pmatrix}_{z_{j-1}} \quad (2.74)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación. (2.73) resulta

$$\begin{pmatrix} E_{y_j} \\ H_{x_j} \end{pmatrix}_{z_j} = m_j \mathbb{S}_{j-1} \mathbb{B}_{j-1}^{-1} \begin{pmatrix} E_{y_{j-1}} \\ H_{x_{j-1}} \end{pmatrix}_{z_{j-1}} \quad (2.75)$$

Con fin de simplificar la notación nombraremos $\mathbb{C}_j = m_j \mathbb{S}_{j-1} \mathbb{B}_{j-1}^{-1}$

$$c_j = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos dk_{z_j} & \frac{i \sin dk_{z_j} Y_{j-1}}{2Y_j} \\ -\frac{1}{2} i Y_j \sin dk_{z_j} (\sigma + Y_j) & -\frac{1}{2} \cos dk_{z_j} Y_{j-1} (-\sigma - Y_j) \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

La cual es nuestra matriz de transferencia para la j -ésima capa pues notemos que sus componentes determinan r y t , entonces para obtener la matriz total de transferencia para el arreglo completo debemos considerar lo siguiente

$$\mathbb{C} = \prod_{j=1}^n c_j = c_1 c_2 c_3 \dots c_n \quad (2.77)$$

2.8. Coeficiente de Reflexión y Transmisión

Una vez obtenida la matriz de transferencia total evaluemos las ecuaciones (2.61) y (2.62) en $z=0$ y $z=L$

En $z = 0$, $A_2 = R$ y $A_1 = 1$ pues la amplitud del campo incidente está normalizada, entonces

$$E_y(z = 0) = -1 - R \quad (2.78)$$

$$H_x(z = 0) = Y_0(1 + R) \quad (2.79)$$

Para el caso de $z = L$, $A_2 = T$ y $A_1 = 0$

$$E_y(z = L) = T e^{ik_{z_{N+1}} L} \quad (2.80)$$

$$H_x(z = L) = Y_{n+1} e^{ik_{z_{N+1}} L} \quad (2.81)$$

Sustituimos las cuatro ecuaciones anteriores en las ecuaciones evaluadas en las condiciones de frontera, y si colocamos los elementos de la matriz c , obtenemos:

$$\begin{pmatrix} -Te^{ik_{z_{N+1}}L} \\ Y_{n+1}e^{ik_{z_{N+1}}L} \end{pmatrix}_{z=L} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 - R \\ Y_0(1 - R) \end{pmatrix}_{z=0} \quad (2.82)$$

Haciendo el desarrollo y resolviendpo el sistema de ecuaciones de 2x2 se obtiene el valor de la amplitud de transmisión(T) y de reflexión(R)

$$T = \frac{(C_{11} + C_{12}Y_0)(-C_{21} + C_{22}Y_0) - (-C_{11} + C_{12}Y_0)(C_{21} + C_{22}Y_0)}{(C_{11} + C_{12}Y_0)Y_{N+1}e^{iLk_{z_{N+1}}} + (C_{21} + C_{22}Y_0)Y_{N+1}e^{iLk_{z_{N+1}}}} \quad (2.83)$$

$$R = \frac{(-C_{11} + C_{12}Y_0)Y_{N+1}e^{iLk_{z_{N+1}}} + (-C_{21} + C_{22}Y_0)Y_{N+1}e^{iLk_{z_{N+1}}}}{(C_{11} + C_{12}Y_0)Y_{N+1}e^{iLk_{z_{N+1}}} + (C_{21} + C_{22}Y_0)Y_{N+1}e^{iLk_{z_{N+1}}}} \quad (2.84)$$

Capítulo 3

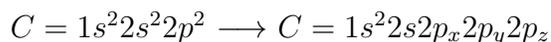
Grafeno

3.1. Orígenes e historia del Grafeno

El carbono (C) es un elemento químico de número atómico 6. Su característica más distintiva y la que le proporciona gran importancia a este elemento, es su capacidad de combinación, siendo el número de interacciones entre átomos de carbono y otros diferentes casi infinito. Es por esto que es un elemento ideal para elaborar los complejos sistemas orgánicos como nuestras células o las hojas de las plantas[8].

3.1.1. Hibridaciones

La configuración electrónica del carbono en su estado base es $C = 1s^2 2s^2 2p^2$. Si excitamos el electrón para preparar su enlazamiento con otro átomo, cada átomo de C mezcla su orbital $2s$ y $2p$ (esto es posible porque ambos se encuentran muy cercanos en energía).



De aquí se pueden formar cuatro enlaces pues vemos que hay cuatro electrones desapareados, estos se pueden mezclar de diferentes formas pero, al mezclarse orbitales puros se da la producción de nuevos orbitales que llamaremos *degenerados*. Dependiendo de la cantidad de orbitales que intervengan en el proceso de mezcla, existirán diferentes tipos de hibridación posibles, en

particular los átomos de C sufren 3 tipos diferentes de geometrías.

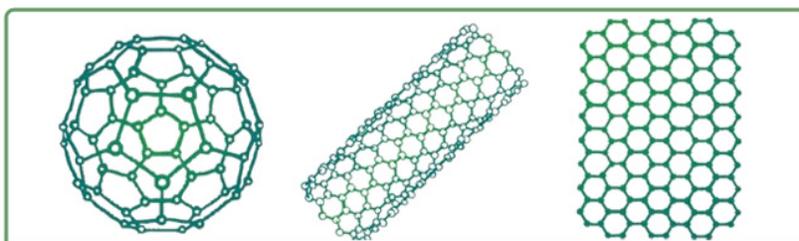
Las diferentes hibridaciones que presenta el carbono					
Hibridación	Formada por	Forma en el espacio	Ángulo	Tipos de enlace C-C	Grupo representativo
sp^3	Un orbital "s" y tres orbitales "p"		109°	Sencillos	Alcanos
sp^2	Un orbital "s" y dos orbitales "p"		120°	Dobles	Alquenos
sp	Un orbital "s" y tres orbitales "p"		180°	Triples	Alquinos

Figura 3.1: hibridaciones

3.1.2. Formas Alotrópicas

Los alótropos son formas distintas de un mismo elemento que difieren en la forma en que los átomos están unidos. En el caso particular del carbono, tenemos una extensa alotropía debido a la capacidad que tienen los átomos de éste para formar redes enormemente complicadas y con diversas estructuras. Algunos alótropos del carbono son:

- Cero dimensionales: Fullerenos
- Monodimensionales: Nanotubos
- Bidimensionales: Grafeno
- Tridimensionales: Grafito y Diamante



3.1.3. Descripción del Grafeno

Como se mencionó anteriormente el grafeno es una manifestación diferente de la estructura atómica del carbono. En este caso, para formar el grafeno se lleva a cabo una hibridación del tipo sp^2 , pues se mezclan los orbitales $2s$, $2p_x$, $2p_y$ formando una estructura triangular en la que cada uno de los nuevos orbitales contiene un electrón que formará enlaces covalentes muy fuertes con otros átomos, creando así, una estructura teselada hexagonal con sólo un átomo de grosor.

Aunque en esta última década el grafeno ha tomado mayor popularidad, este ya se conocía desde 1930, pues fue en esta fecha cuando se describieron sus enlaces químicos y estructura. Posteriormente en el año de 1949 el físico canadiense Russell Philip Wallace fue quien calculó por primera vez la estructura electrónica de bandas, pero no se le prestó mucha atención pues se suponía era una estructura inestable y se pensaba que el orden del material sería destruido por las fluctuaciones térmicas pero a pesar de esto, en 1994, esta estructura recibió oficialmente el nombre de grafeno, que quiere decir monocapa de grafito. Aún así, tuvo que pasar mucho tiempo, para ser precisos hasta el año 2003, para que el físico ruso Andrey Gueim y su compañero Novoselov se encontraran una tarde en la Universidad de Manchester, Inglaterra, para trabajar en sus propios y extravagantes proyectos, por mencionar alguno, ellos habían logrado hacer levitar una rana gracias al uso del electromagnetismo. Pero ese día, estos físicos buscaban una monocapa de carbono pues la idea de nanotubos y buckyballs, les había abierto las puertas de la imaginación y estaban convencidos que esa sustancia estaba allí, esperando a ser descubierta.

Entonces, como primera idea, molieron una simple mina de lápiz en trozos muy pequeños y los esparcieron tratando de formar una capa con el menor espesor posible, limpiaban los bordes del área de experimentación usando una clásica cinta adhesiva, lo intentaron demasiadas veces, pero siempre llegaban a un mismo punto, en el que era imposible hacer más delgada la capa de grafito sobre la mesa. Esto parecía solo generar basura y frustración, pero de pronto, como muchos de los grandes descubrimientos científicos que suceden por casualidad ¡eureka!, ahí en la basura: el residuo sobre la cinta adhesiva que les haría ganadores al premio nobel de física, el grafeno. Después de su descubrimiento, este material ha sido objeto de muchos estudios, pues sus características lo hacen muy prometedor.

3.2. Propiedades Físicas del Grafeno

La dureza de un material se define como la cantidad de energía que es capaz de absorber antes de romperse o deformarse. En el caso del grafeno, su dureza es aproximadamente unas 200 a 300 veces la del acero, gracias a sus enlaces covalentes, ya que, al compartir átomos en el último nivel energético sus uniones son muy fuertes. [7]

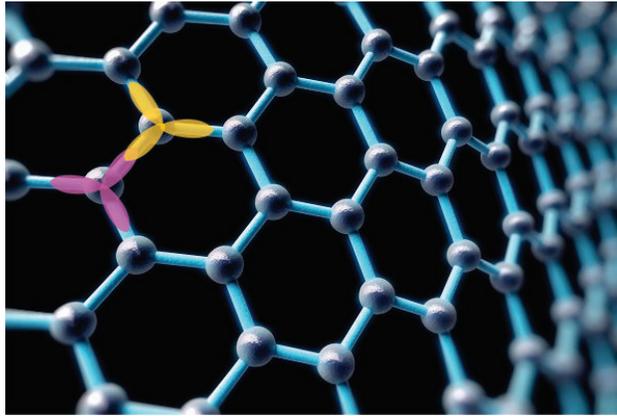


Figura 3.2: Enlaces Covalentes

Al igual que pasa con la dureza, el grafeno presenta una elevada elasticidad, pues soporta estiramientos de hasta el 20 % de su estado original sin sufrir deformidades, tal vez, esta cantidad a primera instancia no parece grande, pero si consideramos que la elasticidad de algunos sólidos es de apenas el 1 % notamos que si es un valor considerable. Para la determinación de estas características se utilizó un microscopio de fuerza atómica que "presionaba" perpendicularmente la hoja de grafeno para doblarla y obtener así su límite elástico, con lo cual se concluyó que la constante elástica es muy grande, el motivo de esto es que el grafeno casi no presenta impurezas o defectos en su red. El hecho de que el grafeno tenga una gran elasticidad permite que pueda moldearse de diversas maneras, lo que aumenta enormemente los campos en los que se puede utilizar.

Resulta curioso que el grafeno sea tan duro y resistente, puesto que este es una monocapa de grafito (el cual se rompe con tanta facilidad). El motivo es sencillo, en el grafito, las capas de grafeno se encuentran unidas por fuerzas de Van der Waals, que son débiles comparadas con las uniones covalentes entre los carbonos del grafeno, además por ser sólo una capa bidimensional

de carbono es ligero ($0,77\text{mg}/\text{m}^2$). Estas características le han dado gran importancia a este material por las diversas aplicaciones para las que califica, pero sus propiedades ópticas también le auguran un futuro prometedor, pues su transmitancia es muy alta, ya que, oscila en un $97\% - 97,77\%$. Pero definitivamente, lo más impresionante de este material son sus propiedades eléctricas que describiremos a continuación.

Como es conocido, una forma de clasificar los materiales es según lo bien que conduzcan la electricidad: aislantes, conductores y semiconductores. Pues bien, resulta que el grafeno no pertenece a ninguna de las tres clasificaciones, sino que comparte características entre los conductores y los semiconductores.

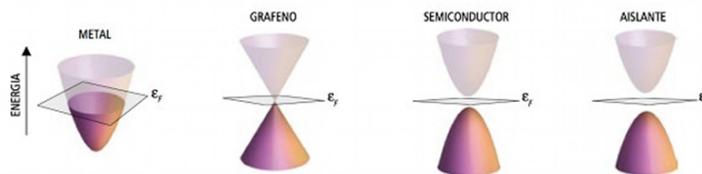


Figura 3.3: Bandas de energía

La energía de Fermi (ϵ_F) es el nivel de energía máximo hasta el que llegan los electrones de un sólido. Las curvas parabólicas que se ven en las imágenes se conocen como bandas de energía. La inferior es la banda de valencia y la superior es la banda de conducción. Si el nivel de Fermi está en la banda de conducción nos encontramos ante un metal ya que los electrones circulan libremente por esta banda. En el caso de los semiconductores y los aislantes el nivel de Fermi está entre ambas bandas de conducción, y únicamente se diferencian en la anchura de la brecha, llamada gap o banda prohibida. En los semiconductores tenemos un gap no demasiado grande, lo que permite que si se les da la suficiente energía puedan conducir la corriente eléctrica; mientras que en los aislantes, donde el gap es mucho mayor, es necesario un aporte energético superior que dificulta la conducción.

En el caso del grafeno tenemos unas bandas con forma de cono, en lugar de paraboloides, y lo que es más importante, el nivel de Fermi está justo en la unión entre ambas capas. Esto implica que no hay gap y los electrones pueden saltar sin problema de la capa de valencia a la capa de conducción y facilitar en gran medida la conducción eléctrica. Se ha podido medir incluso la velocidad a la que se mueven los electrones en el grafeno arrojando unos resultados sorprendentes: se mueven a alrededor de 1000 km/s , tan sólo 300

veces inferior a la velocidad de la luz en el vacío.

3.2.1. Deducción de la Conductividad del Grafeno

En la Figura (3.4)b se muestra lateralmente una lamina de grafeno finita recostada sobre el plano x-z. donde juega el papel de interface entre dos medios caracterizados por μ_1 y ε_1 para $y \geq 0$ y μ_2 y ε_2 para $y < 0$, donde cada uno de los parámetros de los materiales pueden ser valores complejos. El grafeno es considerado como una superficie infinitesimalmente delgada, de dos caras caracterizadas por una conductividad superficial $\sigma(\omega, \mu_c, \Gamma, T)$, donde ω es la frecuencia en radianes, μ el potencial químico, Γ es una tasa de dispersión fenomenológica donde se asume que es independiente de la energía y T es el temperatura.

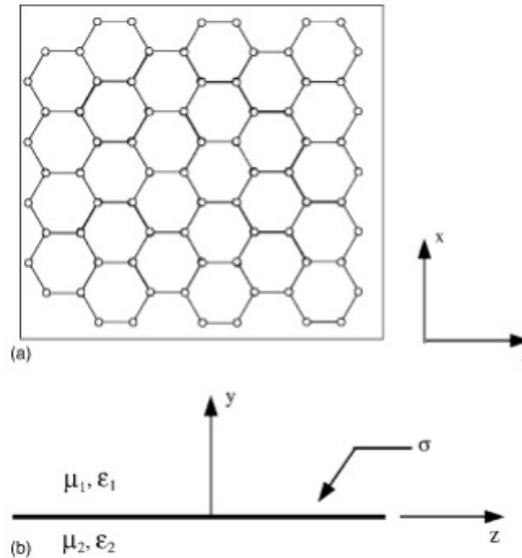


Figura 3.4: Lamina de grafeno en vista frontal y lateral

La conductividad del grafeno se ha considerado en varias obras recientes, y aquí usamos la expresión resultante de la fórmula de Kubo. [17–19]

$$\sigma(\omega, \mu_c, \Gamma, T) = \frac{j e^2 (\omega - j 2\Gamma)}{\pi \hbar^2} \left[\frac{1}{(\omega - j 2\Gamma)^2} \int_0^\infty \varepsilon \left(\frac{\partial f_d(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial f_d(-\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right) d\varepsilon \right. \quad (3.1)$$

$$\left. \int_0^\infty \frac{\partial f_d(-\varepsilon) - \partial f_d(\varepsilon)}{(\omega - j 2\Gamma)^2 - 4(\frac{\varepsilon}{\hbar})^2} d\varepsilon \right]$$

Donde $-e$ es la carga de un electrón, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ es la constante de Planck reducida, $f_d(\varepsilon) = (e^{\frac{\varepsilon - \mu_c}{k_B T}} + 1)^{-1}$ es la distribución de Fermi-Dirac, y k_B es la constante de Boltzman. Asumimos que no hay un campo magnético externo presente, y que la conductividad local es isotrópica. El primer término en la Ecuación se debe a las contribuciones intrabanda, y el segundo término a la contribuciones interbandas. Para una hoja de grafeno aislada el potencial químico μ_c está determinado por la densidad de portadores n_s .

$$n_s = \frac{2}{\pi \hbar^2 v_F^2} \int_0^\infty \varepsilon [f_d(\varepsilon) - f_d(\varepsilon + 2\mu_c)] d\varepsilon \quad (3.2)$$

Donde $v_F \simeq 9,5 \times 10^5 m/s$ es la velocidad de Fermi. La densidad de portadores puede ser controlado por la aplicación de un voltaje y/o un dopaje químico. Para los caso sin dopar $T = 0k$, $n_s = \mu_c = 0$.

El termino intrabandas en la Ecuación puede ser evaluado como

$$\sigma(\omega, \mu_c, \Gamma, T)_{intra} = -j \frac{e^2 k_B T}{\pi \hbar^2 (\omega - j 2\Gamma)} \left(\frac{\mu_c}{k_B T} + 2 \ln(e^{\frac{\mu_c}{k_B T}} + 1) \right) \quad (3.3)$$

Para el caso donde $\mu_c = 0$, ecuación (3.3) la cual fue obtenida en la referencia [20] para grafito (con la adición de un factor que se considera para la capa que separa los planos de grafeno) y corresponde a la conductividad intrabanda de una simple pared de carbono. Con $\sigma = \sigma' + j\sigma''$, esto puede verse como $\sigma'_{intra} \geq 0$ y $\sigma''_{intra} < 0$. Como se discutirá más tarde, la parte imaginaria de conductividad juega un importante papel en la propagación de las ondas de superficie guiada por la hoja de grafeno. La conductividad interbanda se puede aproximar por $k_B T \ll |\mu_c|, \hbar\omega$ como

$$\sigma(\omega, \mu_c, \Gamma, T)_{intra} \simeq j \frac{e^{2k_B T}}{4\pi \hbar} \ln \left(\frac{2 |\mu_c| - (\omega - 2j\Gamma)\hbar}{2 |\mu_c| - (2j\Gamma)\hbar} \right) \quad (3.4)$$

tal que para $\Gamma = 0$ y $2 |\mu_c| > \hbar\omega$, $\sigma_{inter} = j\sigma''_{inter}$ con $\sigma''_{inter} > 0$.

Para $\Gamma > 0$ y $2|\mu_c| < \hbar\omega$, σ_{inter} es un valor complejo, con

$$\sigma'_{inter} = \frac{\pi e^2}{2h} = 6,085 \times 10^{-5}(s) \quad (3.5)$$

y $\sigma''_{inter} > 0$ para $\mu_c \neq 0$

3.3. Posibles Aplicaciones del Grafeno

Con las incomparables características físicas del grafeno es lógico suponer que tenga un sin fin de aplicaciones por lo cual mencionaremos sólo algunas de ellas:

1. *Electrónica:* Podría emplearse en la fabricación de microchips o de transistores, ambos elementos imprescindibles en prácticamente todos los dispositivos electrónicos. Existen diversas empresas que ya están desarrollando tintas conductoras, que es un tipo de tinta que conduce la electricidad y que se emplea para imprimir circuitos a partir de grafeno. Además, por sus especiales características los componentes electrónicos de este material permitirán el desarrollo de dispositivos flexibles que podrán enrollarse o plegarse según las necesidades.
2. *Informática:* El uso del grafeno permitirá el desarrollo de ordenadores mucho más rápidos y con un menor consumo eléctrico que los actuales de silicio. Además, se estima que un disco duro de este compuesto, del mismo tamaño que uno de los empleados actualmente, podría almacenar hasta mil veces más información.
3. *Sector energético:* Es otro de los que cambiarán de manera visible, por sus propiedades energéticas, el grafeno permitirá la creación de baterías de larga duración que apenas tardarán unos segundos en cargarse. Además, las energías renovables pasarán a un plano más relevante, ya que, entre otros, las placas solares recubiertas de este material serán mucho más eficientes y permitirán una forma más ecológica de consumo energético.
4. *Industria del blindaje:* La extrema dureza del grafeno unida a su capacidad de moldearse y a su ligereza, lo hacen un compuesto ideal para ser empleado en esta industria. Chalecos antibalas, cascos y multitud

de elementos de protección que se emplean por diversos profesionales pasarán a ser mucho más ligeros y seguros.

5. *Medicina:* Se está trabajando en condones de grafeno debido a la resistividad y lo delgado del material, lo cual acabaría con las quejas sobre estos métodos anticonceptivos.
6. *Tratamiento de aguas:* Debido a su peculiar estructura de alta densidad permeable al agua, se estudia su posible uso para la desalinización del agua. Algunos datos obtenidos a partir de estos proyectos predicen que se podrá realizar esta tarea en un tiempo muy inferior y con un coste mucho más reducido.
7. *Desarrollo de la ciencia:* La alta reactividad del grafeno con otros elementos químicos distintos del carbono, es una de las características que más atrae la atención en el campo de la investigación, donde ya se han descubierto algunos derivados del grafeno, como es el caso del grafano, que mediante la adición de hidrógeno en su estructura molecular da como resultado un nuevo material aislante.

Capítulo 4

Sucesión de Fibonacci



Figura 4.1: Leonardo de Pisa

Leonardo de Pisa, también llamado Fibonacci, fue un matemático italiano que vivió entre 1170 y 1250. El incursionó en el mundo de las matemáticas a temprana edad pues su padre Bonacci, quién dirigía la oficina de aduanas

de Bugía en Argelia, le hizo tomar los mejores cursos sobre los métodos de cálculos indo-árabes.

Como consecuencia de esto realizó muchos viajes comerciales en los cuales consiguió conocer a reconocidos matemáticos de Egipto, Siria, Provenza, Grecia y Sicilia. Aceptó durante las famosas disputas, desafíos matemáticos, y estudio en profundidad los *Elementos de Euclides*, obra que siempre consideró como un modelo de estilo y de rigor lógico.

Tratando de recopilar todas estas experiencias e información de matemáticas medievales, que Fibonacci adquirió por estos viajes, fue que concibió su obra "*Liber Abaci*" (*Libro del ábaco*). Esta obra renovó por completo la ciencia de la aritmética, pues expone todas las reglas del cálculo basado en las nueve cifras indoárabes: el cero y la numeración de posición. Esto hace que la obra no sea algo fácil y para que el lector no perdiera el interés, Leonardo de Piza motivaba a llevar el contenido del libro a aplicaciones prácticas como: contabilidad comercial, conversión de medidas, cálculo de intereses, cambio de moneda y otras numerosas aplicaciones[16]. Sin embargo, Fibonacci es más conocido entre los matemáticos por una curiosa sucesión de números que colocó en el margen de su libro.

4.1. Los Conejos de Fibonacci

Leonardo de Pisa fue un matemático muy importante, pues introdujo el cero al occidente, pero Fibonacci ha sido quien ha ganado popularidad por su sucesión la cual surgió como resultado de la siguiente problemática que propone en su primer libro "*Liber Abaci*".

Consideremos dos conejos los cuales tardan dos meses en alcanzar su edad madura y poder reproducirse. Al paso de este tiempo, esta pareja procreará otra pareja de conejos que a su vez crecerán y se reproducirán, si estas cantidades no cambian ¿cuántos conejos habrá cada mes?

Notemos que en el primer y segundo mes solo hay una pareja de conejos, para el tercero hay cuatro conejos, ya que la primera pareja se reprodujo, para el cuarto hay 3 parejas de conejos, pues la pareja más longeva ya ha tenido cuatro crías y la segunda aun no ha alcanzado la madurez, pero para el próximo mes que es el quinto, ya lo harán y por lo tanto habra 5 parejas de conejos. Si seguimos realizando el análisis obtendríamos que las parejas de conejos crece de esta forma 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... De lo cual podemos observar que las parejas de conejos que habrá en un determinado mes, serán la

suma de la cantidad de parejas que había en los dos últimos meses precedentes a este.

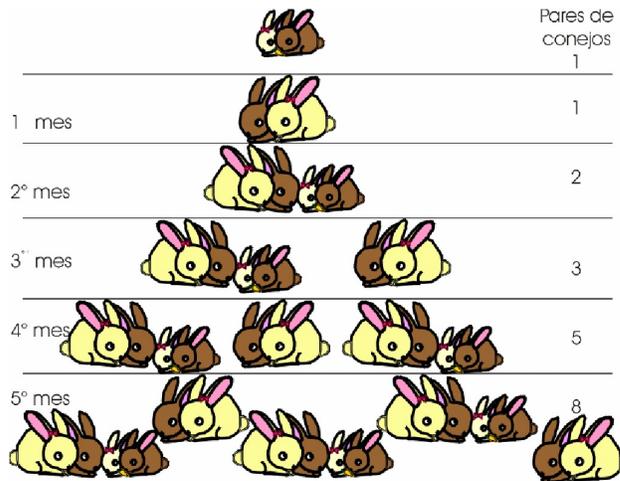


Figura 4.2: crecimiento de las parejas de conejos

4.2. Sucesión de Fibonacci

Esta sucesión numérica, que lleva el nombre de su creador, aparece por primera vez en su libro *Liber Abacci* a lado del problema de los conejos.

Para hallar estos números podríamos recurrir a organigramas y demás elementos, algo demasiado complicado si lo que queremos es encontrar un simple número, por ello, Fibonacci halló la siguiente relación de recurrencia

$$u_{n-1} + u_n = u_{n+1} \quad (4.1)$$

Donde los primeros términos son:

$$u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = 2, \dots \quad (4.2)$$

La fórmula de recurrencia es la fórmula más conocida para hallar los números de Fibonacci; sin embargo, para hallar un número de Fibonacci con un subíndice muy grande usando la fórmula de recurrencia es un procedimiento muy tedioso. Algunos matemáticos buscaron otras formas para hallar estos números en forma directa, uno de ellos fue Binet, quien demostró la siguiente fórmula por primera vez, la cual lleva su nombre



En esta página del *Liber Abaci* comienza el célebre problema de los conejos que lleva a la serie denominada de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55... en la que cada término (exceptuando los dos primeros) es la suma de los dos números anteriores.

Figura 4.3: Página del Liber Abacci

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \quad (4.3)$$

Ahora veamos que cuando hacemos tender n al infinito en la ecuación anterior un término se anula.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right|^n = 0 \quad (4.4)$$

entonces

$$f_n \approx \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \quad (4.5)$$

para n suficientemente grande. Esta aproximación sugiere que si observamos la razón $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ obtendremos

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} \approx \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (4.6)$$

Esta razón $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es conocida de diferentes formas. Los griegos la llamaron *razón áurea* o *razón de oro*, mientras que los artistas del renacimiento le nombraron *proporción divina*.

Esta razón de oro que frecuentemente se representa por φ , y que, de acuerdo con la expresión anterior, es aproximadamente igual a 1,618033988749895..., es un número irracional tal como lo es el número π , y cuenta con características matemáticas inusuales, pues están definidas a través de una construcción geométrica, ya que, φ es la proporción de los segmentos de una línea que resultan cuando ésta se divide de tal manera que, la proporción del segmento de la línea (A) respecto a la longitud del segmento de la línea (B) sea igual que la proporción de la longitud del segmento de la línea (B) a la longitud del segmento de la línea (C), como se indica en la Figura (4.4)

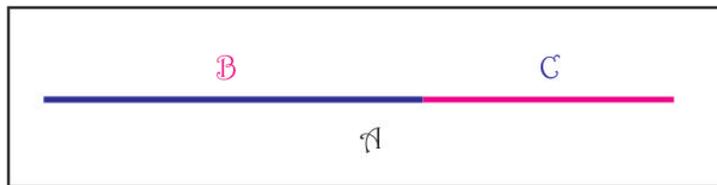


Figura 4.4: Proporción de los segmentos que cumplen con $A/B=B/C$

Esto significa que A es 1.618.... veces B, y B es 1.618 veces C.

4.3. Números de Fibonacci en la Naturaleza y las Artes

Hay muchos elementos relacionados con la sección áurea en la naturaleza y las artes. A continuación damos una lista de ejemplos donde los números de Fibonacci están presentes:

- La relación entre la cantidad de abejas macho y abejas hembra en un panal.
- La relación entre la distancia entre las espiras del interior de cualquier caracol.
- La relación entre los lados de un pentágulo.

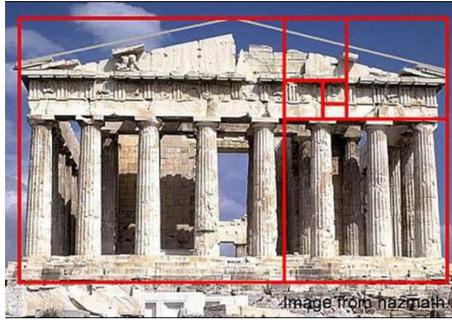


Figura 4.5: Partenon

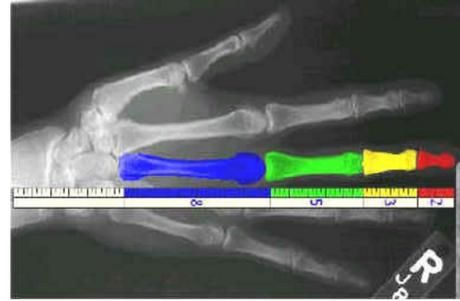


Figura 4.6: Razón de oro en un brazo

- La disposición de los pétalos de las flores (el papel del número áureo en la botánica recibe el nombre de *Ley de Ludwig*).
- La distribución de las hojas en un tallo.
- La relación entre las nervaduras de las hojas de los árboles.
- La relación entre el grosor de las ramas principales y el tronco, o entre las ramas principales y las secundarias.
- La distancia entre las espirales de una piña.
- La anatomía de los humanos se basa en una relación f exacta, esto corresponde a: a) la relación entre la altura del humano y la altura de su ombligo; b) la distancia del hombro a los dedos y la distancia del codo a los dedos; c) la distancia entre la altura de la cadera y la altura de la rodilla; d) la distancia del primer hueso de los dedos (metacarpiano) y la primera falange, o entre la primera y la segunda, o entre la segunda y la tercera, en todos los casos el cociente es f ; e) la relación entre el diámetro de la boca y el de la nariz; f) el diámetro externo de los ojos y la línea interpupilar; g) cuando la tráquea se divide en sus bronquios, si se mide el diámetro de los bronquios por el de la tráquea se obtiene φ . Está comprobado que a mayor cantidad de estas relaciones en el rostro y en el cuerpo hacen que la mayoría de las personas reconozcan a este individuo como lindo, bello y proporcionado.
- La relación entre las partes, el techo y las columnas del Partenón, en Atenas.

- En los violines, la ubicación de las efes (los oídos u orificios en la tapa) se relacionan con el número áureo.
- El compositor mexicano Silvestre Revueltas (1899-1945) utilizó también el número áureo en su obra Alcanías, para organizar las partes.
- En las relaciones entre altura y ancho de los objetos y personas que aparecen en las obras de Miguel Ángel, Alberto Durero y Leonardo Da Vinci, entre otros.
- Las relaciones entre articulaciones en el hombre de Vitruvio y en otras obras de Leonardo da Vinci.
- En las estructuras formales de las sonatas de Wolfgang Amadeus Mozart, en la Quinta Sinfonía de Beethoven, en obras de Franz Schubert y Claude Debussy.
- En el Arte Póvera, movimiento artístico Italiano de los años 1960, muchas de sus obras se basan en esta sucesión.[12]

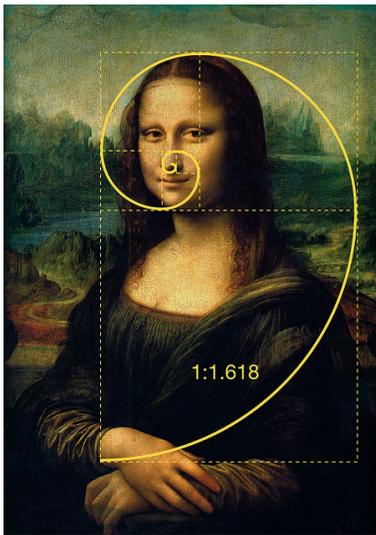


Figura 4.7: Monalisa

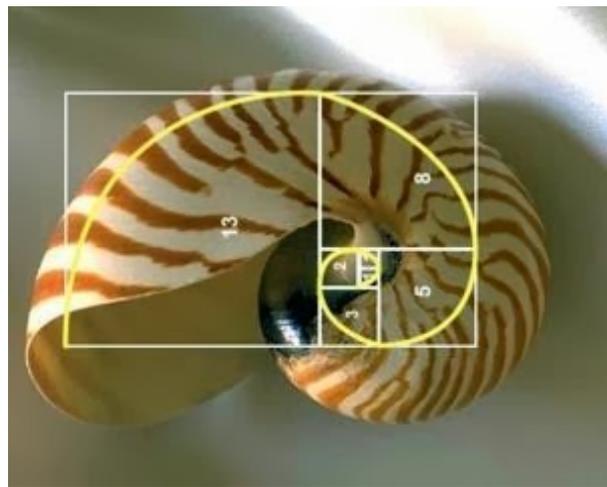


Figura 4.8: Caracol

4.4. Superredes de Fibonacci

La sucesión de Fibonacci, ha resultado muy útil a lo largo de los tiempos para darse cuenta de cosas asombrosas relacionadas con el campo de la naturaleza, el arte, las matemáticas, junto con el número áureo, como se mencionó en la sección anterior. A partir de la fabricación de superredes cuasiperiodicas de Fibonacci y cuasicristales, a surgido con gran interés el estudio de superredes cuasiperiódicas. Este interés radica en el hecho de que carecen de una simetría translacional por un lado, y por otro lado, de una aleatoriedad. Esto se encuentra en un punto intermedio entre sistemas periódicos y los completamente desordenados.

Para elaborar una estructura cristalina tipo Fibonacci debemos alterar la sucesión de la siguiente manera: los elementos de la sucesión no serán números, sino objetos a los que denominamos $u_0 = A$, $u_1 = B$ y la relación de recurrencia se verá modificado gracias a la regla de concatenación:

$$u_n = u_{n-1}u_{n-2} \quad (4.7)$$

Quedando los primeros elementos como se muestran en la siguiente tabla:

	N(A)	N(B)	N(B)/N(A)
$S_0 = [A]$	1		
$S_1 = [B]$		1	
$S_2 = [BA]$	1	1	1/1
$S_3 = [BAB]$	1	2	2/1
$S_4 = [BABBA]$	2	3	3/2
.			
$S_N = [BABBBAB..]$	F_{N-2}	F_{N-1}	F_{N-1}/F_{N-2}

Cuadro 4.1: Elementos de la Sucesión de Fibonacci

De aquí podemos construir la superred para cualquier número de Fibonacci escogiendo dos bloques de distintos espesores los cuales se irán alternando de acuerdo a esta sucesión. Para ejemplificar a continuación se muestra la estructura correspondiente a S_5

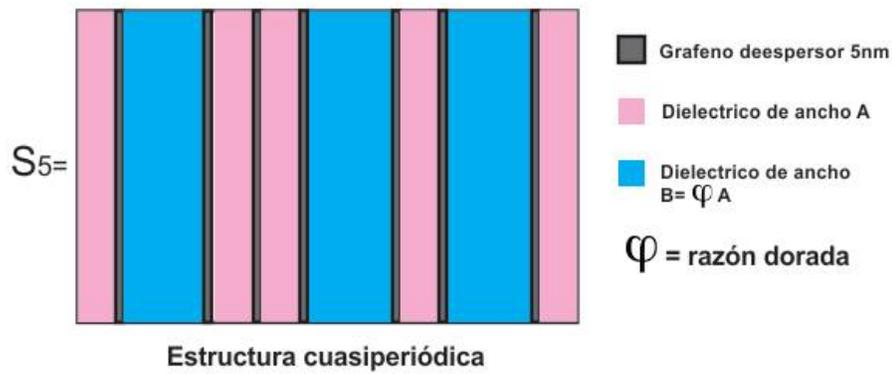


Figura 4.9: Estructura correspondiente a S_5

Capítulo 5

Resultados

En este capítulo presentamos resultados sobre cálculos de reflexión de estructuras construidas con capas alternadas de dieléctricos y grafeno, para ello se han elegido dos celdas formadas por una capa de dieléctrico y una película de grafeno, la diferencia entre estas dos celdas es que las capas de dieléctrico son de diferente ancho. Y la construcción de la estructura cuasiperiódica se realiza siguiendo la sucesión de los números de Fibonacci de acuerdo a como se describió en el capítulo anterior.

Antes de mostrar resultados sobre estructuras cuasiperiódicas, se reproducen resultados publicados en la literatura para comprobar que nuestros cálculos son correctos, para ello se recurrió a los datos expuestos en el trabajo de Choon *et al.* que lleva por título “Analysis of surface plasmon excitation at Terahertz frequencies with highly doped graphene sheets via attenuated total reflection”. [20]

En este trabajo se estudian campos electromagnéticos asociados con superficies plasmónicas (SP) los cuales son guiados por superficies metálicas altamente conductoras en frecuencias infrarrojas y del orden de los terahertz (THz), aunque estos resultan en un pobre confinamiento. Con la finalidad de simplificar el cálculo se ha propuesto un sistema multicapa, puesto que estudios recientes han mostrado que el grafeno puede apoyar a los modos confinados de SP, se pretende investigar la excitación de plasmones de superficie en hojas de grafeno altamente dopadas a frecuencias de TeraHertz con reflexión total atenuada (ATR por sus siglas en inglés) a través de la geometría de Otto (la cual se muestra en la imagen 5.1). Esto se hace depositando grafeno sobre un sustrato de índice de refracción (n_1), que es separado por un espacio (n_2) de longitud d del prisma, como se muestra a continuación:

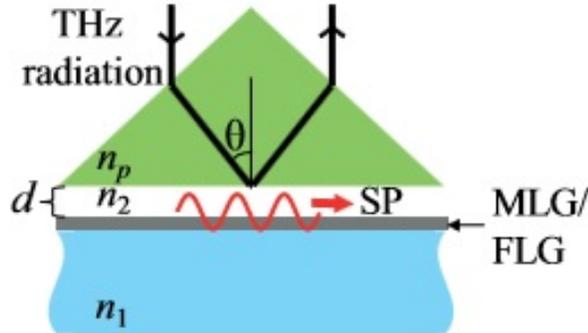


Figura 5.1: Excitación de SP sobre monocapas de grafeno en una geometría de Otto.

La excitación de los PS en monocapas de grafeno o en varias capas de grafeno se puede obtener a través de la geometría de Otto, con esta configuración se calculan los espectros de reflexión mostrados en las figuras 5.2 y 5.3; donde la frecuencia incidente es de 5 THz. La figura 5.2 muestra los resultados reportados por Choon y la figura 5.3 los obtenidos por nosotros. Los cálculos fueron realizados usando el MMT, y suponiendo que cada una de las capas de grafeno tienen un espesor efectivo de $t_g = 0,5nm$ y una constante dieléctrica dada por, $\epsilon_g = 1 + \frac{i\sigma}{\omega\epsilon_0 t_g}$. Vamos a verificar que en el rango de frecuencias de los TeraHertz, esta aproximación reproduce resultados equivalentes a considerar capas de dieléctricos donde la interface tiene una conductividad producida por la película monoatómica del grafeno, cuyo valor fue discutido en el capítulo 4. El objetivo de llevar a cabo esta comprobación es la de usar cualquiera de los dos métodos, y elegir aquel que requiera de cálculos matemáticos más simples.

Inicialmente reproducimos los resultados publicados en la figura 3c por Choon *et al*. Para ello se usa el Método de la Matriz de Transferencia desarrollado en el capítulo 2, y la aproximación usada por Chon en el sentido de considerar una permitividad efectiva a la capa de grafeno. La figuras 5.2 y 5.3 muestran la comparación de los resultados reportados por Choon y los obtenidos con nuestros cálculos, respectivamente en estas gráficas se ha variado el número de capas de grafeno. Los datos usados en los cálculos son: frecuencia incidente $f=5$ Thz, la curva de superior es para $N=1$, y se va incrementando

el número de capas de grafeno hasta a $N=5$ (abajo) y el potencial químico tiene el valor de $\mu = 0,9eV$.

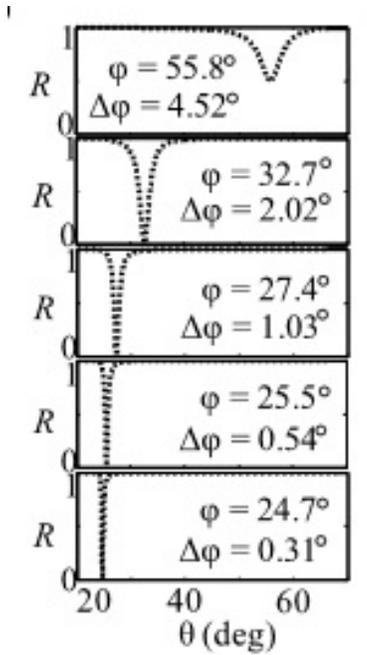


Figura 5.2: Espectro de reflexión para monocapas de grafeno con $f = 5\text{Thz}$ para $N=1$ a $N=5$ y $\mu = 0,9eV$ es la figura publicada por Choon

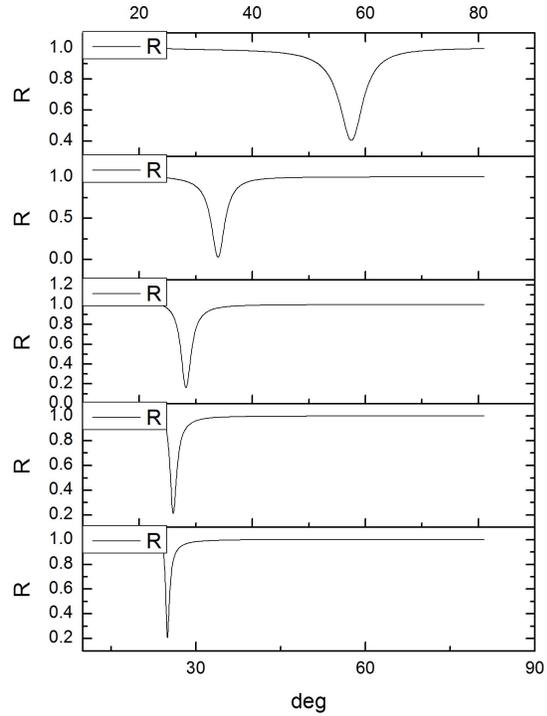


Figura 5.3: Esta gráfica muestra los resultados obtenidos por nosotros y donde se han usado los mismos parámetros de la figura 5.2

Aquí se puede observar el cambio en la posición del mínimo de reflexión desde $\varphi = 55,8^\circ$ para $N = 1$ a $\varphi = 24,7^\circ$ para $N=5$. Tomando el índice de refracción $n_p \sim 4$ para el prisma como medio incidente que corresponde al índice de refracción de germanio. La paulatina reducción de la posición de la resonancia se estabiliza, para $N = 5$ cuando se observa que la diferencia es de $0,8^\circ$ entre $N=4$ a $N=5$. Desde la monocapa de grafeno ($N=1$), hasta $N = 5$ hay una reducción de hasta un 50 % de la posición de la resonancia, en tanto que la anchura de la resonancia va desde $\Delta\varphi = 4,52^\circ$ hasta $\Delta\varphi = 0,31^\circ$. Para $N \geq 2$ la fuerza de los campos de los SP crecen mientras que los gaps

decrecen, se hacen más estrechos y afilados con la reducción de la radiación del modo de SP. Tendencias similares en la fuerza y anchura de los huecos de resonancia se observan en los espectros de reflexión de la figura 5.4, que muestra los espectros de reflexión para monocapas de grafeno para diferentes valores del potencial químico. En esta gráfica se muestran resultados para potenciales que van desde $\mu=0.8\text{eV}$ a 1.6eV , para este caso hemos reproducido los resultados reportados por Choon, y se ha hecho usando dos formas distintas de cálculo, estas se muestran en las figuras 5.5 y 5.6, ambos fueron obtenidos mediante el MMT, sólo que en el primer caso se consideran capas de dieléctrico separadas por una interface con conductividad σ debido a la presencia del grafeno, y en la otra figura se muestran los resultados usando la aproximación propuesta por Choon en el sentido de considerar una permitividad efectiva para el grafeno y darle un ancho específico. Las gráficas muestran una perfecta concordancia lo que significa que considerar la capa de grafeno sin espesor atribuyéndole una conductividad es equivalente a darle un espesor a la capa de grafeno y considerar que tiene una permitividad efectiva, estos resultados son equivalentes al menos para este rango de frecuencias por lo que en los siguientes cálculos reportados en este trabajo se usará la aproximación usada por Chon.

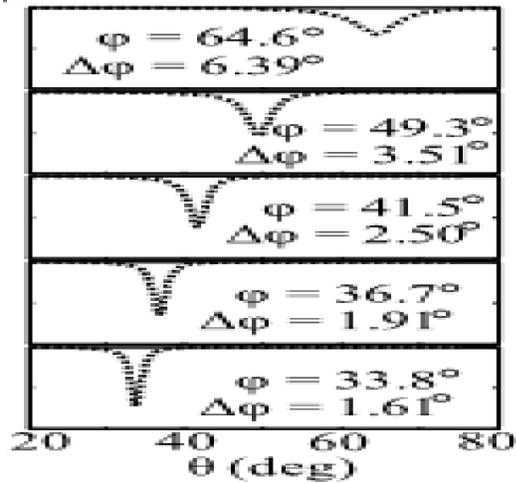


Figura 5.4: Espectro de reflexión para monocapas de grafeno donde el potencial químico toma los valores $\mu = 0,8, 1,0, 1,2, 1,4, 1,6\text{eV}$ [20]

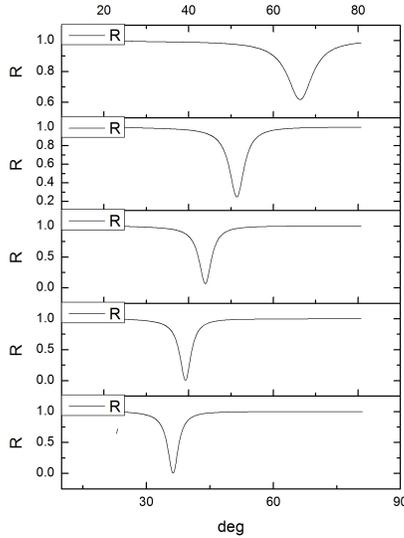


Figura 5.5: Reproducción de los resultados reportados por Choon mostrados en la figura 5.4, considerando la conductividad debida al grafeno en las interfaces

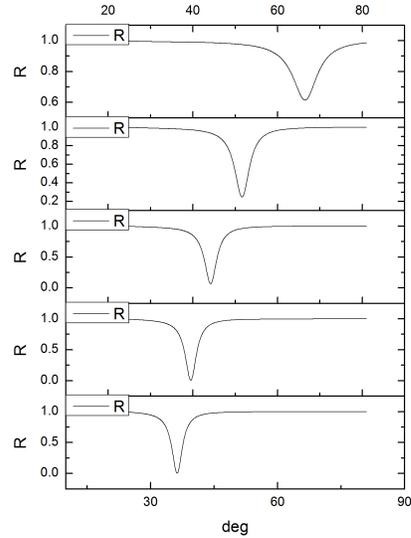


Figura 5.6: Reproducción de los resultados reportados por Choon y mostrados en la figura 5.4, donde se ha supuesto que la capa de grafeno se puede sustituir por una película

5.1. Espectros de Reflexión en función de la frecuencia

En esta sección estudiaremos los espectros de reflexión para estructuras construidas siguiendo la secuencia de Fibonacci de acuerdo a el capítulo 3, para ello se analizarán los efectos que producen al variar ciertos parámetros del cristal fotónico, tales como número de Fibonacci y el potencial químico. En las gráficas siguientes se presentan los espectros de reflexión para estructuras periódicas y cuasiperiódicas siguiendo la secuencia de Fibonacci. Cabe señalar que todas las comparaciones que se harán en lo que resta de este capítulo entre los casos periódico y cuasiperiódico, se consideran el mismo número de capas de dieléctrico, en el caso periódico todas son del mismo ancho y en el caso cuasiperiódico se construye la red con dos capas de diferentes espesores que son d_{AS} y $d_{AL} = \phi d_{AS}$, donde $\phi = 1,618\dots$ es la razón dorada tal como se definió en el capítulo 4.

Iniciamos con el análisis de las gráficas de la Figura(5.7) y (5.8) donde se compara el efecto que produce el potencial químico tanto en el caso periódico como en el caso cuasiperiódico, los parámetros son los siguientes: número de Fibonacci 4 , $\varepsilon_d = 1,4, n_v = 2,2, \mu = 0,4, 0,7, 1eV$, el ancho del dieléctrico se considera de $5\mu m$ y el ancho del grafeno de 5 nm.

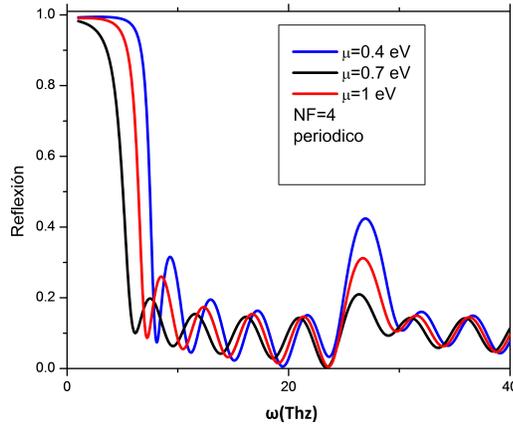


Figura 5.7: Espectros de Reflexión para el caso periódico a incidencia normal

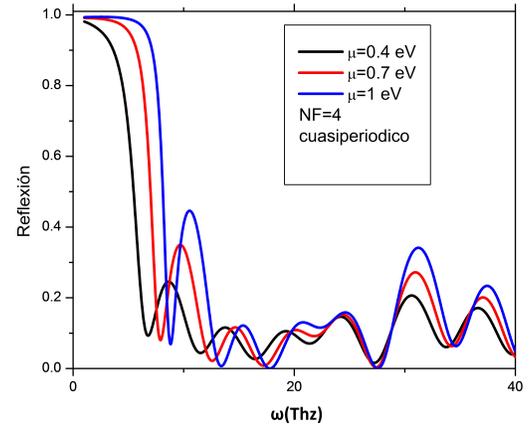


Figura 5.8: Espectros de Reflexión para el caso cuasiperiódico a incidencia normal

Para este caso observamos que la ruptura de la periodicidad genera irregularidad en las resonancias de Fabry Perot, sin embargo el incremento en el potencial químico para ambos casos, produce un corrimiento hacia mayores frecuencias y un incremento en la reflectividad, o sea el efecto es el mismo para los dos casos.

A continuación se muestran en las Figuras (5.9) (5.10) los espectros de reflexión en función de la frecuencia para tres números de generación de Fibonacci, que son: $N_F = 4, 5, 6$, cabe señalar que el número de Fibonacci $N_F = 4$ corresponde a 5 capas de dieléctrico, $N_F = 5$ corresponde a 8 capas de dieléctrico, y $N_F = 6$ corresponde a 13 capas de dieléctrico, para ambos casos tanto el periódico como el cuasiperiódico, con la salvedad que en el caso cuasiperiódico son dos anchos distintos los que se alternan siguiendo la secuencia de Fibonacci. En la gráfica se eligió un rango de frecuencias de $f_0 = 0,1Thz$ a $f_f = 35Thz$ obsérvese que en este rango de frecuencias las tres

gráficas muestran un número de resonancias de Fabry Perot equivalentes al número de capas, a esta regularidad que presentan las redes cuasiperiódicas se les denomina patrones de autosimilaridad. En las gráficas mostradas el ancho del dieléctrico $d_{AS} = 5\mu m$, y el ancho del grafeno es de 5nm, el índice de refracción del dieléctrico es $n_d = 1,4$, el índice de refracción del medio incidente es $n_v = 2,2$, $\mu = 1eV$ y un ángulo de incidencia de 0° .

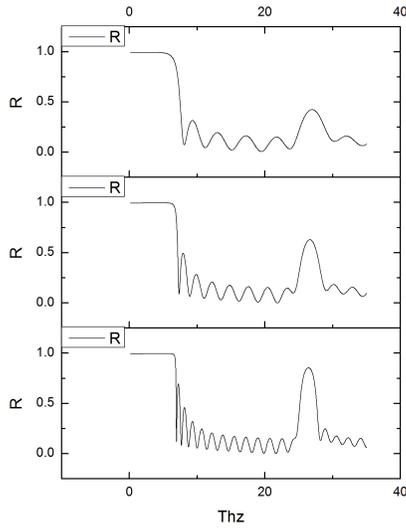


Figura 5.9: Espectro de reflexión en función de la frecuencia para $NF = 4, 5, 6$. Caso periódico

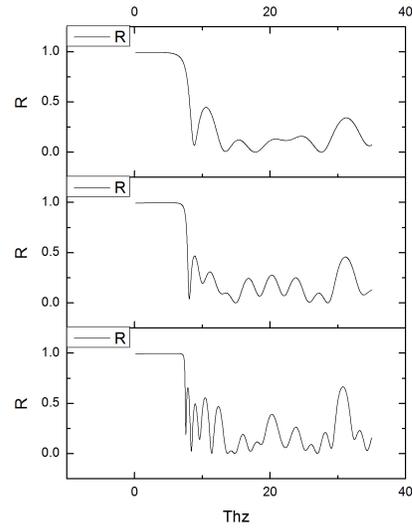


Figura 5.10: Espectro de reflexión en función de la frecuencia para $NF = 4, 5, 6$. Caso cuasiperiódico

5.2. Espectros de reflexión en función del ángulo de incidencia

Posteriormente se muestran espectros de reflexión en función del ángulo de incidencia de la luz, estas gráficas son presentadas en las siguientes figuras, en todos los casos se comparan los casos periódicos y cuasiperiódicos, la figura 5.11 corresponde a una estructura formada para $N_F = 3$, para una frecuencia incidente $f = 5THz$, dado que el índice de refracción del medio incidente es $n_v = 2,2$ y el índice de refracción del dieléctrico es $n_v = 1,4$, el ángulo crítico para la reflexión total interna es de 39^0 a partir de este ángulo se esperaría tener reflexión total, sin embargo el grafeno presenta la posibilidad de acoplar modos de superficie, esta es la razón por la que el espectro de reflexión muestra un mínimo al rededor de los 48^0 , la curva que corresponde al caso periódico tiene una profundidad un poco mayor respecto al caso cuasiperiódico, esto consideramos que se debe a que en el caso periódico es más viable el acoplamiento entre los modos de superficie de las interfaces debido a que todas las capas de grafeno se encuentran separadas la misma distancia.

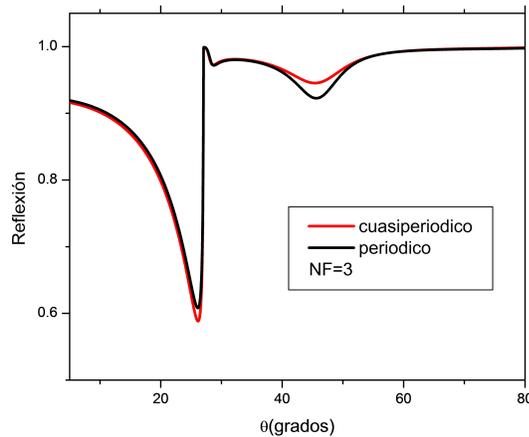


Figura 5.11: Espectros de reflexión en función del ángulo para los casos periódico y cuasiperiódico para $N_F = 3$, el ángulo crítico se presenta en 39^0

5.2 Espectros de reflexión en función del ángulo de incidencia 49

A continuación se muestran espectros de reflexión en función del ángulo de incidencia para dos estructuras $N_F = 4$ y $N_F = 5$, y la frecuencia incidente es de $f = 5THz$, se muestran en las gráficas los espectros obtenidos para el caso periódico así como para el caso cuasiperiódico, los parámetros utilizados son los mismos que en la figura 5.11. En estas gráficas podemos observar que los espectros de reflexión presentan mínimos para ángulos mayores al ángulo crítico, para $N_F = 4$ se tienen 5 capas, y se observa que existe acoplamiento entre los modos de superficie entre las diferentes interfaces, nuevamente se observa que el caso periódico presenta un mínimo más pronunciado que el caso cuasiperiódico, este hecho debido a que el acoplamiento puede darse mejor, por otra parte la figura 5.13 presenta dos mínimos en el espectro de reflexión, esta estructura que corresponde a $N_F = 5$ tienen 8 capas de dieléctrico, y la existencia de estos dos mínimos debe ser ocasionada por acoplamiento entre modos simétricos y modos antisimétricos, lo importante de estos resultados es que los espectros de reflexión para los casos periódico y cuasiperiódico, son similares salvo por contar con un mejor acoplamiento en el caso periódico, y un ligero corrimiento hacia mayores ángulos en el caso periódico.

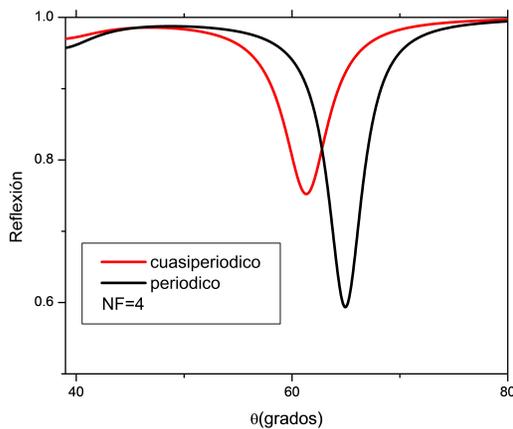


Figura 5.12: Espectros de reflexión en función del ángulo de incidencia para $N_F = 4$

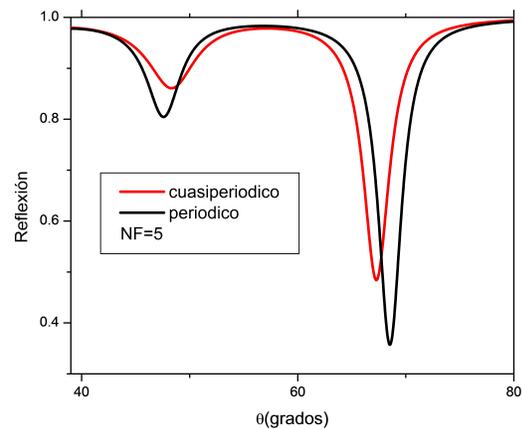


Figura 5.13: Espectros de reflexión en función del ángulo de incidencia para $N_F = 5$

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo hemos hecho un análisis de estructuras cuasiperiódicas construidas de acuerdo a los números de generación de Fibonacci donde se alternan capas de dieléctricos con películas de grafeno, para ello ha sido necesario hacer una revisión de las propiedades del grafeno y describir a detalle los números de Fibonacci, así como la forma en la que esta secuencia se aplica para la construcción de superredes cuasiperiódicas, el objetivo fue estudiar las características de la reflexión y transmisión de la luz en estas estructuras. Como es sabido, el estudio de la propagación de la luz se hace a través de las ecuaciones de Maxwell, y se deben aplicar las condiciones de frontera apropiadas en cada una de las interfaces, el método tradicionalmente usado para describir la propagación de luz en estas estructuras ha sido el Método de la Matriz de Transferencia, en este caso se ha debido tomar en cuenta que la película de grafeno en cada una de las interfaces implica que las componentes del campo magnético no sean continuas en las interfaces debido a la conductividad eléctrica del grafeno por lo que la presencia del campo eléctrico produce corrientes superficiales. Por otro lado se ha encontrado en la literatura que una forma de abordar el problema de las interfaces de grafeno ha sido a través de considerar que el grafeno genera una permitividad efectiva, tomando en cuenta que tiene un espesor que corresponde al ancho de la capa de los átomos de carbono que lo forman, en este trabajo se han usado y comparado las dos formas de abordar el estudio de la propagación de luz en la estructura y se ha llegado a las siguientes conclusiones.

El cálculo de reflexión de superredes donde la celda unitaria se compone de una capa de dieléctrico y un recubrimiento de grafeno se puede hacer y resulta equivalente en el rango de frecuencias de los terahertz: 1) considerar

capas de dieléctricos en donde las componentes tangenciales de los campos no son continuas debido a la conductividad que implica la presencia del grafeno en las interfaces y 2) considerar que el grafeno tiene un espesor del orden de la separación entre sus átomos y tomar en cuenta una permitividad efectiva. Las estructuras cuasiperiódicas construidas con dieléctricos y grafeno muestran estados localizados de la misma forma que ocurre en cualquier otro tipo de cuasicristales.

El efecto del potencial químico en las películas de grafeno afecta similarmente cuando estas se encuentran formando una estructura periódica o cuando forman una estructura cuasiperiódica.

En ambas estructuras periódica y cuasiperiódica el ángulo crítico depende de los índices de refracción del medio incidente y del índice de refracción del dieléctrico que se intercala entre las películas de grafeno. Las resonancias de Fabry Perot presentan una estructura de autosimilaridad en las superredes construidas de acuerdo a los números de generación de Fibonacci.

La profundidad de los picos en las curvas de reflexión en función del ángulo de incidencia es mayor para las estructuras periódicas respecto a las cuasiperiódicas, este hecho es debido a que el acoplamiento en los modos de propagación en las superficies es mejor cuando la separación entre estas se repite periódicamente.

Bibliografía

- [1] W. D. CALLISTER *Ciencia e Ingeniería de los Materiales*. Reverte. 2007.
- [2] D. JOANNOPOULUS, R. D. MEADE y N. JOSHUA *Winn Photonic Crystals: Molding the Flow of Light*. Princeton University Press, 1995.
- [3] P. MARKOS, C. SOUKOULIS *Wave Propagation*. Princeton and Oxford. 2008
- [4] K. SAKADA *Optical Propiedades of Photonic Crystals*. 2da edición, Springer.2005
- [5] A. MONTALBÁN CAÑADAS *Propiedades Electrónicas y Vibracionales de Sistemas Cuasi-Regulares* .Tesis Facultad de Ciencias. UNEC.2008
- [6] I. FELIPE DÍAZ DEL CASTILLO RODRÍGUEZ *Introducción a los Nanomateriales*. Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán. UNAM. 2012
- [7] P. SOLÍS FERNÁNDEZ *Modificación superficial de materiales de carbono: grafito y grafeno* . Tesis Departamento de Ciencia de los Materiales e Ingeniería Metalúrgica. UNIOVI. 2011.
- [8] E. MARTÍNEZ-GUERRA, M. E. CIFUENTES QUINTAL y R. DE COSS, *Grafeno: un paso hacia el futuro*. Interdisciplinaria en Nanociencia y Nanotecnología, vol 1, N° 2, pág 15-23. UNAM. 2009.
- [9] C.BAUTISTA FLORES,J. L. BENÍTEZ BENÍTEZ y D. MENDOZA LÓPEZ *Grafeno: un material con potencial para la tecnología electrónica del futuro*. Materiales Avanzados, vol 10, N° 19, pág 17-24. UNAM. 2012.
- [10] K.S VOVOSELOV *Two-dimensional atomic crystals*. Proc. Natl Acad. Sci. USA, Vol. 102, 2005, p.10451

- [11] D. HERNÁNDEZ GARCÍA *Estudio de cristales y cuasi- cristales fotónicos basados en silicio macroporoso*. Departamento de Ingeniería Electronica. UPC.
- [12] C. GONZÁLES ZACARÍAS, G. H. COCOLETZI y M. PALOMINO OVANDO, *Los Números de Fibonacci en la Naturaleza y los Sistemas Nanoestructurados Artificiales*. Interdisciplinaria en Nanociencia y Nanotecnología, vol 3, N° 1, pág 15-28. UNAM. 2010.
- [13] M. OUAKNIN ALAIN *El Misterio de las Cifras*. 1ra edición, ROBINBOOK, 2006
- [14] J. DAVID JACKSON *Classical Electrodynamics*. Addison Wesley, 3er edición, 1999.
- [15] M. CÁRDENAS HERNÁNDEZ *Estudio de las Funciones de Reflectancia y Transmitancia en la Generación de Plasmones Superficiales (SPR) Bajo la Configuración de Kretschmann, Utilizando el Método de Matriz de Transferencia (MMT)*. Tesis, UNC, 2012.
- [16] J. E. PEREZ ROGRIGUEZ *Estudio de defectos en cristales fotónicos con gap omnidireccional*. Tesis Facultad de Ciencias Físico Matemáticas. BUAP. 2011.
- [17] L. A. FALKOVSKY S. S. PERSHOGUBA, *Phys. Rev. B* 76, 153410(2007).
- [18] S. A. MIKHAILOV y K. ZIEGLER, *Phys. Rev. Lett.* 99, 016803(2007).
- [19] V. P. GUSYNIN y S. G. SHARAPOV, *Phys. Rev. B* 73, 245411(2006).
- [20] CHOON HOW GAN, *Analysis of surface plasmon excitation at terahertz frequencies with highly doped graphene sheets via attenuated total reflection.*, *Appl. Phys. Lett.* 101, 111609(2012).
- [21] R. RAMOS MENDIETA, J. A. HERNÁNDEZ LÓPEZ y M. PALOMINO OVANDO *Transverse Magnetic Surface Plasmons and Complete Absorption Supported by Doped Graphene in Otto Configuration*. *AIP Advances*, 4/6, jun 1, 067125,(2014).

-
- [22] K. RAMÍREZ, M. PALOMINO OVANDO, F. RAMOS MENDIETA *Photonic Modes In Dispersive And Lossy Superlattices Containing Negative-Index Materials*. Progress In Electromagnetics Research B, Vol. 35, pág 133-149.2011
- [23] CHOON HOW GAN, HONG SON CHU y ER PING LI, *Synthesis of highly confined surface plasmon modes with doped graphene sheets in the midinfrared and terahertz frequencies*, Electronics and Photonics Department, ASTAR Institute of High Performance Computing, 138632, Singapore.(2012)
- [24] J. GARCÍA VIDAL y L. MARÍN MORENO *Plasmones Superficiales*. Investigación y Ciencia. pág 66-76.2008
- [25] C. KITTEL, *Introduction to Solid State Physics*. 6ta edición, John Wiley,1986.
- [26] C. CALOZ y T. ITOH *Electromagnetic Materials, Transmission line theory and Microwave Application*. Wiley Interscience,2006.
- [27] C. COHEN TANNOUJJI, B. DIU y F. LALOE *Quantum Mechanics*.Vol 1, John Wiley. 1991.