



# Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

## Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

---

Aberturas arbitrarias mediante difracción de Fresnel

Tesis presentada al

**Departamento de Física**

como requisito para la obtención del grado de

**Licenciado en Física Aplicada**

por

Yadira Ortega Barrera

asesorada por

Dr. Cruz Meneses Fabián

Puebla Pue.  
Agosto 2015





# Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

## Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

---

Aberturas arbitrarias mediante difracción de Fresnel

Tesis presentada al

**Departamento de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**Licenciado en Física Aplicada**

por

Yadira Ortega Barrera

asesorada por

Dr. Cruz Meneses Fabián

Puebla Pue.  
Agosto 2015



**Título:** Aberturas arbitrarias mediante difracción de Fresnel  
**Estudiante:** YADIRA ORTEGA BARRERA

COMITÉ

---

Dr. Carlos I. Robledo Sánchez  
Presidente

---

Dra. Areli Montes Pérez  
Secretario

---

Dra. Maribel Mendez Otero  
Vocal

---

Dr. Cruz Meneses Fabián  
Asesor



# Índice general

<b>1. Resumen</b>	<b>1</b>
<b>2. Introducción</b>	<b>3</b>
2.1. Planteamiento del problema . . . . .	5
2.2. Objetivos . . . . .	7
<b>3. Teoría de Difracción</b>	<b>9</b>
3.1. Breve historia acerca de la difracción . . . . .	9
3.2. Base Matemática . . . . .	12
3.3. Formulación de la difracción de Kirchhoff . . . . .	16
3.4. Formulación de la difracción de Rayleigh Sommerfeld . . . . .	20
3.5. Comparación de las teorías de difracción de Kirchhoff y Rayleigh-Sommerfeld . . . . .	25
<b>4. Difraccion de Fresnel y Fraunhofer</b>	<b>27</b>
4.1. Difraccion de Fresnel . . . . .	27
4.2. Patrones de difracción de Fraunhofer . . . . .	33
4.3. Patrones de difracción de Fresnel . . . . .	37
<b>5. Propagación de campos</b>	<b>41</b>
5.1. Transformada de Fourier . . . . .	41
5.2. Algoritmos Iterativos . . . . .	44
<b>6. Método de Simulación</b>	<b>53</b>
6.1. Simulación numérica . . . . .	53
6.2. Simulación numérica de recuperación de fase y amplitud . . . . .	68
<b>7. Resultados experimentales</b>	<b>89</b>
<b>8. Conclusiones</b>	<b>97</b>



# Resumen

En esta tesis se propone un algoritmo para la recuperación de aberturas arbitrarias por medio de difracción de Fresnel. Se parte de una imagen de difracción capturada, de la cual solo podemos conocer su amplitud, por medio de un algoritmo iterativo de reducción de error así como un par de restricciones impuestas en el plano de difracción y en el plano objeto es posible conocer la fase de la imagen difractada así como la amplitud de la apertura que originó el patrón de difracción. Las restricciones impuestas en ambos planos se basan en la suposición de ondas planas iluminando la apertura de difracción y en el conocimiento de la amplitud medida en el plano de difracción.

Para realizar estas simulaciones se hace uso del software *Mathematica9* así como la teoría de difracción de Fresnel. En primera instancia, se corrobora la difracción de un par de aberturas con patrones de difracción conocidos para asegurar la correcta implementación de la transformada de Fourier, posteriormente se realizó la simulación de recuperación de fase y amplitud a distancias consideradas de laboratorio.

Se implementó este algoritmo experimentalmente en el mismo tipo de aberturas simuladas anteriormente.



# Capítulo 1

## Introducción

Para estudiar algunos fenómenos de la luz como la difracción e interferencia, se utiliza el modelo de ondas electromagnéticas. Dentro de este modelo dos de las principales características de un haz de luz son la amplitud y la fase. La amplitud esta relacionada con la energía contenida en el haz. La fase nos indica el estado de vibración de un punto respecto a otros puntos en el mismo frente de onda ó a otros planos del haz.

Cuando la luz interactúa con un objeto, la amplitud y la fase se ven afectadas. Así, al estudiar la amplitud y fase de un haz en un plano dado, podemos obtener información de los objetos con los que ha interactuado dicho haz en su camino, siempre que se conozca la forma original del frente de onda. Cuando un objeto absorbe parte de la energía del haz de luz, la amplitud del haz se modifica y se dice que el objeto es de amplitud.

En cambio, cuando la energía del haz se conserva, pero la fase de diversos puntos del frente de onda se modifica introduciendo distintos retrasos en la vibración de cada punto, se dice que el objeto es de fase. Al cambiar la fase de un frente de onda podemos convertir un haz divergente en uno convergente o viceversa. El cambio de la fase puede ser similar en todo el frente de onda o variar de forma distinta para cada punto. Esto depende de las características intrínsecas del objeto. La mayoría de objetos afectan a la amplitud y a la fase al mismo tiempo. Sin embargo, si una de las características se afecta sustancialmente mas que la otra es cuando se considera al objeto mayormente de amplitud o de fase.

Para poder recuperar la amplitud de las aberturas que nos interesan en el plano objeto, hacemos uso de la recuperación de fase, ya que se encuentran ligadas intrínsecamente y al conocer la fase del patrón de difracción es posible conocer también su amplitud. En física, el problema de fase es el nombre dado al problema de la pérdida de la información relativa a la fase, que puede ocurrir al hacer una medición física. Los detectores de luz, como las placas fotográficas o CCD, sólo miden la intensidad de la luz que les llega. Esta medición es incompleta (incluso cuando descuidan otros grados de libertad, tales como la polarización), porque una onda de luz no sólo tiene una amplitud (relacionada con la intensidad), sino también una fase, que se pierde sistemáticamente en una medición. En difracción o microscopía de experimentos, la parte de fase de la onda a menudo contiene información valiosa sobre la muestra estudiada.

La recuperación de fase es un tema que ya ha sido estudiado desde mediados del siglo pasado [1,2], debido a que es un problema que se plantea en la cristalografía de rayos X, difracción de imágenes, imágenes astronómicas, y muchas otras aplicaciones.[13,14] Existen diversos métodos de recuperación, via Matrix Completion, Gerchberg-Saxton, de entrada-salida, entre otros. [3,4] que ofrecen diferentes ventajas de acuerdo al problema propuesto.

En este trabajo se realiza el estudio de la recuperación de amplitud en el plano objeto de un patrón de difracción capturado en el plano de difracción, para ello se utiliza un algoritmo iterativo de reducción de error, basado en el algoritmo de Gerchberg-Saxton.

Con el algoritmo propuesto se pretende conocer la fase y amplitud del patrón difractado así como en el plano objeto donde se originó la difracción, para lograr esta meta se aplican restricciones impuestas en ambos dominios así como la transformada de Fourier y la transformada inversa de Fourier. Las simulaciones se realizan con ayuda del software Mathematica 9, para poder recuperar la fase y amplitud se realiza primero la simulación de difracción de una apertura cuadrada y una circular en el rango de Fresnel como en el de Fraunhofer, con las dimensiones aproximadas de un

---

experimento real en laboratorio.

Se comienza con una imagen capturada de difracción, de la cual se obtiene su amplitud  $A_0$  y se propone una fase cuadrática que se agrega a la amplitud obtenida, se aplica la transformada inversa de Fourier y en el plano objeto se toma solo la amplitud suponiendo fase cero, es decir la apertura es iluminada por una onda plana. Con la amplitud recuperada se propaga hasta el plano de difracción donde solo se toma la fase y se le agrega la amplitud recuperada inicialmente  $A_0$ . Este ciclo se repite hasta que el algoritmo converge a una amplitud y una fase.

En el capítulo uno se presenta la teoría y principios básicos para el desarrollo del método propuesto, así como las distintas formulaciones de difracción y una comparación entre ellas.

En el capítulo dos se hace un enfoque en la difracción de Fresnel y Fraunhofer y se presentan los distintos patrones de difracción que se presentan con un par de aperturas específicas.

En el capítulo tres se hace una revisión de la propagación de campos y las herramientas necesarias para ello, como la transformada de Fourier así como una introducción a los algoritmos iterativos, en especial el algoritmo de Gerchberg-Saxton y reducción de error.

En el capítulo cuatro se presentan las simulaciones realizadas, difracción de Fresnel y Fraunhofer, recuperación de fase y amplitud. También se presentan resultados experimentales aplicando el algoritmo propuesto.

## 1.1. Planteamiento del problema

El problema de la recuperación de amplitud y por lo tanto de fase, es decir, la recuperación de una función dada, la magnitud de su transformada de Fourier, surge en diversos campos de la ciencia y la ingeniería, incluyendo la microscopía electrónica, cristalografía, la astronomía y la imagen óptica.

Para recuperar la amplitud, se hace uso de la exploración de la recuperación de fase en la configuración óptica, específicamente cuando la fuente de luz es un láser, ya que los dispositivos de detección óptica (por ejemplo, cámaras CCD, películas fotosensibles, el ojo humano) no pueden medir la fase de una onda de luz. Esto es porque en general, dispositivos de medición ópticos que se basan en la conversión de fotones a los electrones (corriente) no permiten la grabación directa de la fase, ya que el campo electromagnético oscila a tasas de  $10^{15} Hz$ , y no hay dispositivos de medición electrónicos que lo pueden medir. De hecho, los sistemas de detección de medición ópticos miden el flujo de fotones, que es proporcional a la magnitud del cuadrado del campo.

Curiosamente, los campos electromagnéticos tienen algunas otras características que los hacen susceptibles para la recuperación de fase algorítmica: su campo lejano corresponde a la transformada de Fourier de su campo cercano. Dada una “máscara” que se superpone a una estructura en un campo coherente cuasi monocromático en algún plano en el espacio, la estructura del campo electromagnético a una gran distancia de ese plano está dada por la transformada de Fourier de la imagen multiplicada por un factor de fase cuadrática conocido. Por lo tanto, midiendo el campo lejano, la magnitud y fase, facilitaría la recuperación de la imagen óptica (el campo de onda). Sin embargo, como se señaló anteriormente, la fase óptica no puede medirse directamente por un detector electrónico. Aquí es donde la recuperación de fase algorítmica entra en juego, ofreciendo un medio para recuperar la fase dada la medición de la magnitud de la óptica de campo lejano y algún conocimiento previo.

Los retos actuales pueden definirse en: mayor resolución, capacidad de recuperar los objetos más complejos, mayor robustez al ruido, y el funcionamiento en tiempo real. La razón por la cual la recuperación de fase en la imagen óptica se ha vuelto tan importante, es debido a la visión de poder algún día ver imágenes de complejas moléculas biológicas directamente, realizar un seguimiento de su evolución estructural a medida que evoluciona en el tiempo, e incluso ver la dinámica de la función de onda electrónica. El razonamiento es evidente: para entender la biología a nivel

---

molecular, para descifrar los secretos de cómo sus constituyentes atómicos se unen y cómo interactúan con otras moléculas.

El estado actual de la técnica está lejos de esos objetivos: la resolución de imagen todavía no está en el nivel atómico, y con resolución nanométrica, en términos de ser capaz de realizar experimentos en tiempo real, el estado de las mediciones de la técnica han demostrado impulsos ópticos extremadamente cortos: decenas de atosegundos (10-18 segundos) en el orden del paso de un fotón a través de una distancia comparable con el tamaño de un átomo.

Usando las propiedades antes mencionadas de los campos electromagnéticos y la transformada de Fourier, en este trabajo se propone una forma de recuperar la amplitud de una imagen de difracción capturada por una cámara CCD a una distancia conocida, así como conocer la fase en el plano de difracción. Es decir, seremos capaces de poder conocer cualitativamente la abertura que origina un patrón de difracción cualquiera y su fase en el momento que fue capturada. Para ello se cuenta con ayuda de un algoritmo iterativo y un par de restricciones en el plano objeto y de difracción, así como la distancia del plano objeto al plano difractado y el tipo de iluminación que incide en la abertura. Este método, puede ser aplicado para conocer cualquier tipo de pequeñas aperturas que no pueden ser conocidas perfectamente a simple vista.

La aplicación práctica de este método de recuperación, puede darse en la industria, para medir la calidad de pequeñas piezas, o en recuperación de imágenes. Se espera de este algoritmo que en un futuro cercano sea capaz no sólo de medir aberturas, sino también obstrucciones u objetos de fase.

## 1.2. Objetivos

### Objetivo General

Recuperación de amplitud en el plano objeto de aberturas arbitrarias, por medio de una imagen capturada de difracción mediante un algoritmo iterativo para la recuperación de fase.

### Objetivos particulares

Estudiar la teoría de difracción

Implementación de la transformada de Fresnel  
Simulación numérica de la difracción de Fresnel para diferentes aperturas  
Análisis de algoritmos iterativos

# Capítulo 2

## Teoría de Difracción

### 2.1. Breve historia acerca de la difracción

El primer informe preciso y la descripción de un fenómeno como la difracción, fue hecho por Grimaldi y se publicó en el año 1665, poco después de su muerte. Las mediciones reportadas fueron hechas con un aparato experimental, una abertura en una pantalla opaca estaba iluminada por una fuente de luz, elegida suficientemente pequeña para introducir un efecto insignificante de penumbra; la intensidad de la luz se observó a través de un plano a cierta distancia detrás de la pantalla. La teoría corpuscular de la propagación de la luz, que era la teoría aceptada para explicar los fenómenos ópticos en ese momento, predijo que la sombra detrás de la pantalla debería estar bien definida, con bordes afilados. Las observaciones de Grimaldi indicaron, sin embargo, que la transición de la luz a la sombra fue gradual y no abrupta. Si la pureza espectral de la fuente de luz hubiese sido mejor, podría haber observado incluso más sorprendente resultados, tales como la presencia de franjas claras y oscuras que se extienden lejos en la sombra geométrica de la pantalla. Tales efectos no se pueden explicar por una teoría corpuscular de la luz, lo que requiere propagación rectilínea de los rayos de luz en ausencia de la reflexión y de la refracción.

El paso inicial en la evolución de una teoría que explicará tales efectos, fue hecha por el primer defensor de la teoría ondulatoria de la luz, Christian Huygens, en el año 1678. Huygens expuso la convicción intuitiva de que

## CAPÍTULO 2. TEORÍA DE DIFRACCIÓN

### 2.1. BREVE HISTORIA ACERCA DE LA DIFRACCIÓN

---

si cada punto en el frente de onda de un disturbio fuese considerado una nueva fuente de una perturbación esférica “secundaria”, entonces el frente de onda en un instante más tarde se podría encontrar mediante la construcción de la “envolvente” de las ondas secundarias.

Mayores avances en el entendimiento de la difracción fueron impedidos en todo el Siglo XVIII por el hecho de que Isaac Newton, un científico con una gran reputación por sus muchas contribuciones a la física en general y a la óptica en particular, por estar a favor de la teoría corpuscular de la luz, sus seguidores apoyaron esta opinión rotundamente.

No fue sino hasta 1804 que más se produjo un avance significativo. En ese año, Thomas Young, un médico Inglés, reforzó la teoría ondulatoria de la luz mediante la introducción del concepto crítico de interferencia. La idea era muy radical para la época, ya que afirmó que en las condiciones adecuadas, la luz podría sumarse o restarse y producir oscuridad.

Las ideas de Huygens y Young se reunieron en 1818 en las famosas memorias de Augustin Jean Fresnel. Al hacer algunos supuestos bastante arbitrarios sobre las amplitudes y fases de las fuentes secundarias de Huygens, y al permitir que las diversas ondas interfirieran mutuamente, Fresnel fue capaz de calcular la distribución de la luz en los patrones de difracción con una excelente precisión. En la presentación del trabajo de Fresnel al comité del premio de la Academia Francesa de Ciencias, su teoría fue fuertemente cuestionada por el gran matemático francés S. Poisson, un miembro del comité. Él demostró lo absurdo de la teoría demostrando que predijo la existencia de un punto brillante en el centro de la sombra de un disco opaco. F. Arago, que presidió el comité del premio, realizó el experimento y encontró el punto previsto. Fresnel ganó el premio, y desde entonces el efecto ha sido conocido como “punto de Poisson”.

En 1860 Maxwell identificó la luz como una onda electromagnética, un paso de enorme importancia. Pero no fue hasta 1882 que las ideas de Huygens y Fresnel fueron puestas en una base matemática firme por Gustav Kirchhoff, que logro mostrar que las amplitudes y fases adscritos a

## CAPÍTULO 2. TEORÍA DE DIFRACCIÓN

### 2.1. BREVE HISTORIA ACERCA DE LA DIFRACCIÓN

---

las fuentes secundarias de Fresnel eran realmente las consecuencias lógicas de la naturaleza ondulatoria de la luz.

Kirchhoff basó su formulación matemática en dos suposiciones acerca de los valores de límite de la luz incidente sobre la superficie de un obstáculo colocado en el camino de propagación de la luz. Estos supuestos resultaron posteriormente ser incompatibles entre sí, por Poincaré en 1892 y por Sommerfeld en 1894. Como consecuencia de estas críticas, la formulación de Kirchhoff del llamado principio de Huygens-Fresnel debe considerarse como una primera aproximación, aunque bajo la mayoría de condiciones, produce resultados que están de acuerdo sorprendentemente bien con el experimento.

Kottler trató de resolver las contradicciones reinterpretando el problema de contorno de Kirchhoff como un problema Saltus, donde Saltus es una palabra latina que significa una discontinuidad o saltar. La teoría de Kirchhoff también fue modificada por Sommerfeld, que eliminó uno de los supuestos mencionados anteriormente relativos a la amplitud de la luz en el límite, haciendo uso de la teoría de funciones de Green. Esta llamada teoría de la difracción de Rayleigh-Sommerfeld.

Cabe destacar desde el principio que las teorías de Kirchhoff y Rayleigh-Sommerfeld comparten ciertas simplificaciones importantes y aproximaciones. Lo más importante, la luz es tratado como un fenómeno escalar, dejando de lado la naturaleza fundamentalmente vectorial de los campos electromagnéticos. Este enfoque tiene en cuenta el hecho de que, en los límites, los diversos componentes de los campos eléctricos y magnéticos están acoplados a través de las ecuaciones de Maxwell y no pueden ser tratados de manera independiente.

## 2.2. Base Matemática

### Principio de Huygens

El principio de Huygens es un método de análisis aplicado a los problemas de propagación de ondas. Esta visión de la propagación de las ondas ayuda a entender mejor los fenómenos de difracción, reflexión y la refracción de las ondas[11].

El principio de Huygens establece que cada punto alcanzado por un frente de onda, actúa como origen de un nuevo frente de onda que se extiende en todas las direcciones. Si el medio es homogéneo, el frente de onda es esférico en un momento cualquiera  $t$ ; un poco más tarde en el tiempo  $t + \Delta t$ , cada uno de los frentes de onda habrá dado lugar a pequeños frentes de ondas esféricos de radio  $C * \Delta t$  donde  $C$  es la velocidad del medio. El nuevo frente de onda, en el instante  $t + \Delta t$ , será la envolvente de todos los pequeños frentes de onda y por tanto, será una superficie esférica concéntrica con la primitiva, como se puede observar en la figura[2.1]. Si el medio no es homogéneo, cada elemento del frente de onda se traslada paralelamente, a sí mismo durante el lapso  $\Delta t$ , pero con velocidades distintas a lo largo del frente, por lo que el nuevo frente de ondas no será paralelo al primero.

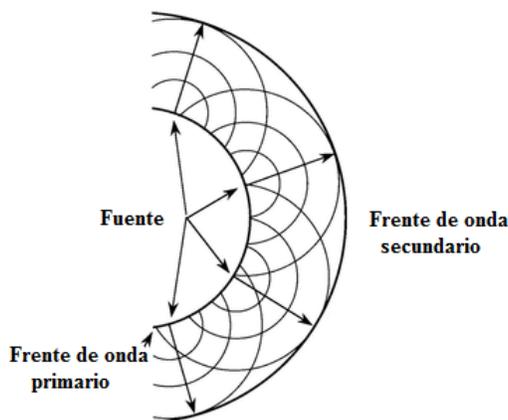


Figura 2.1: Principio de Huygens: cada punto de un frente de onda puede considerarse como una fuente de ondas esféricas secundario, generando otro frente de onda

### El experimento de Young

El dispositivo experimental más antiguo para demostrar la interferencia de la luz y por consiguiente su naturaleza ondulatoria se debe a Young.

La luz de una fuente puntual monocromática  $S$  ilumina dos agujeros  $S_1$  y  $S_2$  que están cerca juntos en una pantalla  $A$  y equidistante de  $S$ . Los agujeros actúan como fuentes puntuales monocromáticas secundarias que se encuentran en fase, y los haces de ellos se superponen en la región más allá de  $A$ . En esta región se forma un patrón de interferencia.

Supongamos que el patrón se observa sobre un plano  $x$  ó  $y$ , normal a un bisector perpendicular  $CO$  de  $S_1 S_2$ , y con el eje  $x$  paralelo a  $S_1 S_2$ . Sea  $d$  la separación de los orificios, y una la distancia entre la línea que une los agujeros y el plano de la observación. Como se observa en la figura[2.2]

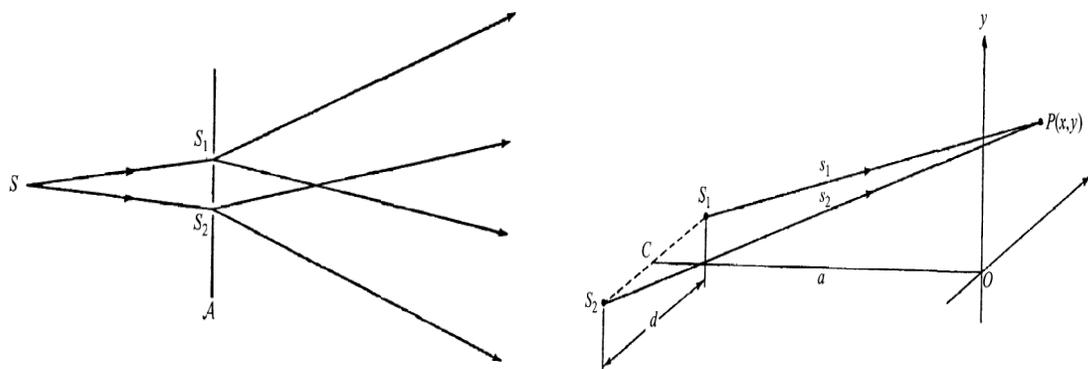


Figura 2.2: Experimento utilizado por Thomas Young con el cual pudo demostrar la naturaleza ondulatoria de la luz, al incidir luz por dos pequeños agujeros y crear un patrón de interferencia como resultado de la superposición de las ondas provenientes de las aperturas.

Para un punto  $P(x, y)$  en el plano de observación el patrón de interferencia en la proximidad inmediata de  $O$ , se compone de bandas claras y oscuras denominadas franjas de interferencia, equidistantes y que aparecen en ángulos rectos a la línea  $S_1 S_2$  que une las dos fuentes. La separación de las franjas brillantes adyacentes es

$$\frac{a\lambda_0}{nd}, \tag{2.1}$$

En cualquier punto del patrón de interferencia el número  $m$  definido por

$$m = \frac{\delta}{2\pi}, \quad (2.2)$$

se llama el orden de interferencia en el punto: así las franjas brillantes corresponden a órdenes integrales.

### Principio de Huygens-Fresnel

De acuerdo con la construcción de Huygens, cada punto de un frente de onda puede considerarse como un centro de una perturbación secundaria que da lugar a ondas esféricas, y el frente de onda en cualquier instante después puede ser considerado como la envolvente de estas ondas. Fresnel fue capaz de darse cuenta de la difracción, completando la construcción de Huygens con el postulado de que las ondas secundarias interfieren mutuamente. Esta combinación de la construcción de Huygens con el principio de interferencia se denomina el *principio de Huygens-Fresnel*.

Sea  $S$ , la posición instantánea de un frente de onda esférico monocromático de radio  $r_0$ , que procede de una fuente puntual  $P_0$ , y sea  $P$  un punto en el que la perturbación luz ha de ser determinada. El factor periódico de tiempo  $e^{-i\omega t}$  se omitirá, la perturbación en un punto  $Q$  en el frente de onda puede ser representado por  $Ae^{ikr_0}/r_0$ , donde  $A$  es la amplitud en unidad de distancia de la fuente. De conformidad con el principio de Fresnel-Huygens, consideramos cada elemento del frente de onda como el centro de una perturbación secundaria que se propaga en forma de ondas esféricas, y obtenemos para la contribución  $dU(P)$  debido a los  $dS$  elementos en  $Q$  la expresión

$$dU(P) = K(\chi) \frac{Ae^{ikr_0}}{r_0} \frac{e^{iks}}{s} dS, \quad (2.3)$$

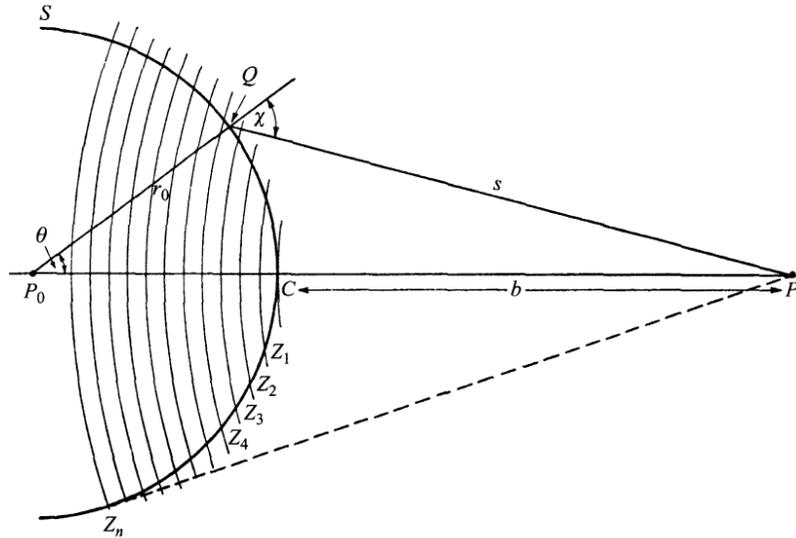


Figura 2.3: Zonas de construcción de Fresnel

donde  $s = QP$  y  $K(\chi)$  es el factor de inclinación que describe la variación con la dirección de la amplitud de las ondas secundarias, siendo el ángulo  $\chi$  (a menudo llamado el ángulo de difracción) entre la normal en  $Q$  y la dirección  $QP$ . Siguiendo a Fresnel asumimos que  $K$  es máxima en la dirección original de propagación, es decir, para  $\chi = 0$ , y que disminuye rápidamente con el aumento de  $\chi$ , siendo cero cuando  $QP$  es tangencial al frente de onda, es decir, cuando  $\chi = \pi/2$ ; y finalmente, que sólo la parte  $S'$  de la onda primaria contribuye al efecto en  $P$ , cuando no existen obstáculos que puedan ser situados entre  $P_0$  y  $P$ . Entonces la perturbación en  $P$  viene dada por

$$U(P) = \frac{Ae^{ikr_0}}{r_0} \int_S \frac{e^{iks}}{s} K(\chi) \, dS. \quad (2.4)$$

Fresnel utiliza un método de construcción de zonas para encontrar valores aproximados de  $K$  para las diferentes zonas, que le permitió hacer predicciones que estaban de acuerdo con los resultados experimentales.

Las diversas suposiciones hechas por Fresnel emergen automáticamente en fórmula de difracción de Kirchhoff, en la cual el principio de Huygens-Fresnel puede ser considerado como una aproximación. Kirchhoff dio la

siguiente expresión para  $K(\chi)$ :

$$K(\chi) = \frac{1}{2}(1 + \cos \chi), \quad (2.5)$$

$K$  tiene un valor máximo en  $\chi = 0$  como en el principio de Huygens-Fresnel; sin embargo,  $K$  no es igual a cero en  $\chi = \pi/2$ .

### 2.3. Formulación de la difracción de Kirchhoff

*El teorema integral de Kirchhoff*

La idea básica de la teoría de Huygens-Fresnel es que la perturbación de luz en un punto  $P$  surge de la superposición de ondas secundarias que proceden de una superficie situada entre este punto y la fuente de luz. Esta idea se puso en una base matemática sólida por Kirchhoff que mostró que el principio de Huygens-Fresnel puede ser considerada como una forma aproximada de un cierto teorema integral que expresa la solución de la ecuación de onda homogénea, en un punto arbitrario en el campo, en términos de los valores de la solución y sus primeras derivadas en todos los puntos en una superficie cerrada arbitraria circundante  $P$ .

Consideramos primero una onda escalar estrictamente monocromática

$$V(x, y, z, t) = U(x, y, z)e^{-i\omega t}, \quad (2.6)$$

que satisface la ecuación de onda independiente tiempo, llamada ecuación de Helmholtz, la cual está descrita matemáticamente como

$$(\nabla^2 + k^2)U = 0. \quad (2.7)$$

Sea  $v$  un volumen delimitado por una superficie cerrada  $S$ , y sea  $P$  cualquier punto dentro de ella; asumimos que  $U$  posee derivadas parciales de primer continuo y de segundo orden dentro y en esta superficie. Si  $U'$  es

CAPÍTULO 2. **TEORÍA DE DIFRACCIÓN**  
 2.3. FORMULACIÓN DE LA DIFRACCIÓN DE KIRCHHOFF

---

cualquier otra función que cumple los mismos requisitos de continuidad como  $U$ , tenemos por el teorema de Green

$$\iiint_v (U \nabla^2 U' - U' \nabla^2 U) dv = - \iint_s \left( U \frac{\partial U'}{\partial n} - U' \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS. \quad (2.8)$$

En particular, si  $U'$  también satisface la ecuación de onda independiente del tiempo, es decir, si

$$(\nabla^2 + k^2)U' = 0, \quad (2.9)$$

entonces se sigue a la vez de la ec.(2.7) que el integrando a la izquierda de (2.8) se anula en cada punto de  $v$ , y por consiguiente

$$\iint_s \left( U \frac{\partial U'}{\partial n} - U' \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS = 0. \quad (2.10)$$

Supongamos que tomamos  $U'(x, y, z) = e^{-iks}/s$ , donde  $s$  denota la distancia de  $P$  al punto  $(x, y, z)$ . Esta función tiene una singularidad para  $s = 0$ , y desde  $U$  se asumió "ser continua y diferenciable,  $P$  debe ser excluido del ámbito de la integración. Por lo tanto, se rodeará  $P$  por una pequeña esfera de radio  $\varepsilon$  y extenderá la integración en todo el volumen entre  $S$  y la superficie  $S'$  de esta esfera

Al realizar la integración y tomar el valor limite de  $\varepsilon$ , tenemos:

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_s \left[ U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{iks}}{s} \right) - \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS, \quad (2.11)$$

esta es una forma del teorema integral de Helmholtz y Kirchhoff.

*Teoria de difraccion de Kirchhoff*

---

CAPÍTULO 2. **TEORÍA DE DIFRACCIÓN**  
2.3. FORMULACIÓN DE LA DIFRACCIÓN DE KIRCHHOFF

---

Mientras que el teorema integral de Kirchhoff encarna la idea básica del principio de Huygens-Fresnel las leyes que rigen las contribuciones de los diferentes elementos de la superficie son más complicados que los que asumió Fresnel. Kirchhoff mostró, sin embargo, que en muchos casos el teorema se puede reducir a una forma aproximada pero mucho más simple, que es esencialmente equivalente a la formulación de Fresnel, pero que además da una fórmula explícita para el factor de inclinación que quedaba indeterminado en la teoría de Fresnel.

Consideremos una onda monocromática, de una fuente puntual  $P_0$ , propagándose a través de una abertura en una pantalla opaca a un plano, y sea  $P$  el punto en el que la perturbación de luz ha de ser determinada. Suponemos que las dimensiones lineales de la abertura, aunque grandes en comparación con la longitud de onda, son pequeñas en comparación con las distancias de ambos  $P_0$  y  $P$  de la pantalla.

Para encontrar la perturbación en  $P$  aplicamos la integral de Kirchhoff sobre una superficie  $S$  formada por a) la abertura  $A$ , b) una parte  $B$  de la cara no iluminada de la pantalla, y c) una porción  $C$  de una gran esfera de radio  $R$ , centrada en  $P$  que, junto  $A$  y  $B$ , forma una superficie cerrada (Fig.2.4).

Podemos expresar el teorema de Kirchhoff

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \left[ \iint_A + \iint_B + \iint_C \right] \left[ U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{iks}}{s} \right) - \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS, \quad (2.12)$$

donde, como antes,  $s$  es la distancia de los elementos  $ds$  al punto  $P$  y  $\frac{\partial}{\partial n}$  denota la diferenciación a lo largo de la superficie de la integración con la normal apuntando hacia el interior.

CAPÍTULO 2. TEORÍA DE DIFRACCIÓN  
2.3. FORMULACIÓN DE LA DIFRACCIÓN DE KIRCHHOFF

---

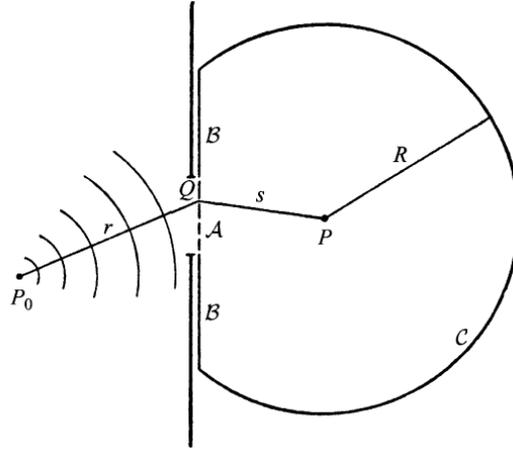


Figura 2.4: Área de integración sobre una superficie  $S$  para derivar la fórmula de difracción de Fresnel-Kirchhoff

Se encontró con la dificultad de que los valores de  $U$  y  $\frac{\partial U}{\partial n}$  sobre  $A$ ,  $B$  y  $C$  que deben ser sustituido en la ec.(2.12) no se conocen con exactitud. Sin embargo, es razonable suponer que en todas partes en  $A$ , excepto en la vecindad inmediata del borde de la abertura,  $U$  y  $\frac{\partial U}{\partial n}$  no difieren grandemente de los valores obtenidos en ausencia de la pantalla, y que en  $B$  estas cantidades serán aproximadamente cero.

En consecuencia Kirchhoff establece:

$$\begin{cases} \text{Para } A: & U = U^{(i)}, & \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial n}, \\ \text{Para } B: & U = 0, & \frac{\partial U}{\partial n} = 0 \end{cases}, \quad (2.13)$$

donde

$$U^{(i)} = \frac{Ae^{ikr}}{r}, \quad \frac{\partial U^{(i)}}{\partial n} = \frac{Ae^{ikr}}{r} \left[ ik - \frac{1}{r} \right] \cos(nr), \quad (2.14)$$

son los valores relacionados con el campo incidente y  $A$  es una constante. Las aproximaciones de la ec.(2.13) se llaman condiciones de frontera de

CAPÍTULO 2. **TEORÍA DE DIFRACCIÓN**  
2.4. FORMULACIÓN DE LA DIFRACCIÓN DE RAYLEIGH  
SOMMERFELD

---

Kirchhoff y son la base de la teoría de la difracción de Kirchhoff.

Queda por considerar la contribución de la parte esférica  $C$ . Ahora es evidente que al tomar el radio  $R$  suficientemente grande, los valores de  $U$  y  $\frac{\partial U}{\partial n}$  en  $C$  se pueden hacer arbitrariamente pequeños, lo que sugiere que la contribución de  $C$  puede despreciarse. Sin embargo, al permitir que  $R$  aumente indefinidamente, el área de  $C$  también aumenta más allá de todos los límites, de modo que la condición  $U \rightarrow 0$  y  $\frac{\partial U}{\partial n} \rightarrow 0$  como  $R \rightarrow \infty$  no es suficiente para hacer desaparecer la integral. Pero si el radio  $R$  se escoge tan grande que en el momento de la perturbación en  $P$  no se considera ninguna contribución de  $C$  porque podría no haber llegado el campo o a estas regiones distantes en un primer instante, la integral sobre  $C$  se desvanecerá. Así, finalmente, en la sustitución en la ec.(2.12)

$$U(P) = -\frac{iA}{2\lambda} \iint_A \frac{e^{ik(r+s)}}{rs} [\cos(n, r) - \cos(n, s)] dS, \quad (2.15)$$

que se conoce como la fórmula de difracción de Fresnel-Kirchhoff.

#### 2.4. Formulación de la difracción de Rayleigh Sommerfeld

De la teoría de Kirchhoff se ha usado experimentalmente para producir resultados muy precisos y es ampliamente utilizado en la práctica. Sin embargo, hay ciertas inconsistencias internas en la teoría que motivó la búsqueda de un desarrollo matemático más satisfactorio. Las dificultades de la teoría de Kirchhoff pueden deberse al hecho de que las condiciones de contorno deben imponerse tanto en la intensidad de campo y su derivada normal.

En particular, es un conocido teorema de la teoría del potencial que si una función potencial de dos dimensiones y su derivada normal se desaparecen juntas a lo largo de cualquier segmento de curva finita, entonces esa función potencial debe desaparecer por todo el plano. Del mismo modo, si una solución de la ecuación de onda tridimensional se desaparece en cualquier

CAPÍTULO 2. **TEORÍA DE DIFRACCIÓN**  
2.4. FORMULACIÓN DE LA DIFRACCIÓN DE RAYLEIGH  
SOMMERFELD

---

elemento de superficie finita, debe desaparecer en todo el espacio. Así, las dos condiciones de contorno de Kirchhoff, implican que el campo es cero en todas partes detrás de la abertura, un resultado que contradice la situación física conocida. Una indicación adicional de estas inconsistencias, es el hecho de que la fórmula de difracción de Fresnel-Kirchhoff se puede demostrar un error al reproducir las condiciones de contorno, asumiendo como el punto de observación se aproxima a la pantalla o la abertura.

Las inconsistencias de la teoría de Kirchhoff se retiraron por Sommerfeld, eliminando la necesidad de imponer valores límite tanto en la perturbación y su derivada normal simultáneamente.

Sea

$$\iint_S \left( U \frac{\partial U'}{\partial n} - U' \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS, \quad (2.16)$$

donde  $U(x, y, z) \exp(-i\omega t)$  y  $U'(x, y, z) \exp(-i\omega t)$  son dos funciones de ondas monocromáticas definidas a lo largo de un dominio  $V$ , limitadas por una superficie cerrada  $S$  y  $\partial/\partial n$  marca la diferenciación a lo largo del interior de la normal a  $S$ .

Proponemos

$$U'(x, y, z) = \frac{e^{iks}}{s}, \quad (2.17)$$

donde  $s$ , denota la distancia desde un punto de observación  $P(x, y, z)$  arbitraria a un punto de integración  $P'(x', y', z')$  en  $S$ . Entonces si el punto  $P$  está dentro del volumen  $V$

CAPÍTULO 2. **TEORÍA DE DIFRACCIÓN**  
 2.4. FORMULACIÓN DE LA DIFRACCIÓN DE RAYLEIGH  
 SOMMERFELD

---

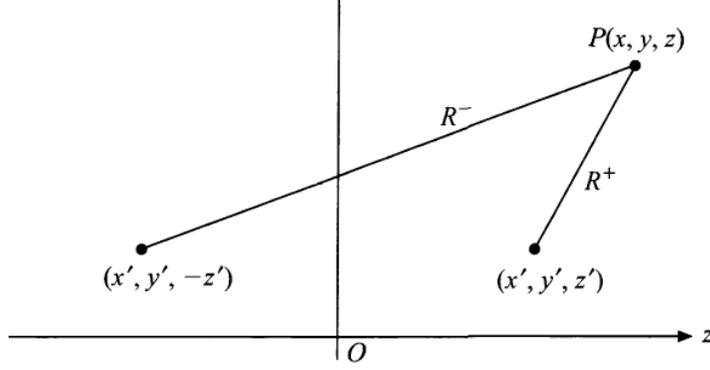


Figura 2.5: Ilustración del significado geométrico de las distancias  $R^+$  y  $R^-$  definidas por (2.22) y (2.24)

$$\iint_s \left[ U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{iks}}{s} \right) - \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS = 4\pi U(P) \quad (2.18)$$

Sin embargo, si el punto  $P$  se encuentra fuera del volumen  $V$ , (2.16) implica que

$$\iint_s \left[ U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{iks}}{s} \right) - \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS = 0 \quad (2.19)$$

Supongamos que el dominio  $V$  es la mitad del espacio  $z \geq 0$ . La superficie  $S$  de la integración consiste entonces en el plano  $z' = 0$  y un hemisferio en ese medio espacio, de infinito radio, centrado en el origen. Suponemos que  $U$  se comporta como una onda esférica saliente en el infinito en  $V$ , es decir, que los puntos suficientemente lejos del origen

$$U(x, y, z) \sim \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (2.20)$$

CAPÍTULO 2. **TEORÍA DE DIFRACCIÓN**  
 2.4. FORMULACIÓN DE LA DIFRACCIÓN DE RAYLEIGH  
 SOMMERFELD

---

con  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Entonces, no hay contribuciones sobre la integral de la (2.19) de la gran esfera  $r \rightarrow \infty$  en el semi espacio  $z > 0$ , centrado en el origen. Si el punto  $P(x, y, z)$  está situado en el semiespacio  $z > 0$ , la ec.(2.18) nos da

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{z'=0} \left[ U \frac{\partial}{\partial z'} \left( \frac{e^{ikR^+}}{R^+} \right) - \frac{e^{ikR^+}}{R^+} \frac{\partial U}{\partial z'} \right] dx' dy' = U(x, y, z), \quad (2.21)$$

donde

$$R^+ = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad z > 0. \quad (2.22)$$

El punto  $P(x, y, z)$  se encuentra a la mitad del espacio,  $z < 0$  entonces tenemos de (2.19)

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{z'=0} \left[ U \frac{\partial}{\partial z'} \left( \frac{e^{ikR^-}}{R^-} \right) - \frac{e^{ikR^-}}{R^-} \frac{\partial U}{\partial z'} \right] dx' dy' = 0. \quad (2.23)$$

donde

$$R^- = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2}. \quad (2.24)$$

Cabe mencionar que

$$\left. \frac{e^{ikR^+}}{R^+} \right|_{z'=0} = \left. \frac{e^{ikR^-}}{R^-} \right|_{z'=0}, \quad (2.25)$$

CAPÍTULO 2. **TEORÍA DE DIFRACCIÓN**  
 2.4. FORMULACIÓN DE LA DIFRACCIÓN DE RAYLEIGH  
 SOMMERFELD

---

donde

$$\left. \frac{\partial}{\partial z'} \left( \frac{e^{ikR^-}}{R^-} \right) \right|_{z'=0} = \left. \frac{\partial}{\partial z'} \left( \frac{e^{ikR^+}}{R^+} \right) \right|_{z'=0}. \quad (2.26)$$

Si usamos las ecuaciones (2.25) y (2.26) en la ec.(2.23), obtenemos:

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{z'=0} \left[ -U \frac{\partial}{\partial z'} \left( \frac{e^{ikR^+}}{R^+} \right) - \frac{e^{ikR^+}}{R^+} \frac{\partial U}{\partial z'} \right] dS = 0. \quad (2.27)$$

Si restamos la ec.(2.27) de la ec.(2.21) y ajustamos  $R^+|_{z'=0} = s$  nos encontramos a la vez que

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{(z'=0)} U(x', y', 0) \frac{\partial}{\partial z'} \left( \frac{e^{iks}}{s} \right) dx' dy'. \quad (2.28)$$

Si añadimos la ec.(2.27) y la ec.(2.21) y ajustamos de nuevo  $R^+|_{z'=0} = s$  nos encontramos con que

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{(z'=0)} \left[ \frac{\partial U(x', y', z')}{\partial z'} \right] \frac{e^{iks}}{s} dx' dy'. \quad (2.29)$$

Las ecuaciones (2.28) y (2.29) se obtuvieron por primera vez por Lord Rayleigh y son conocidas como las Formulas de Difracción de Rayleigh de primera y de segunda clase respectivamente. La primera ecuación da una solución a la ecuación de Helmholtz valida para la mitad del espacio  $z > 0$  que toma valores prescritos en el plano  $z = 0$  y es saliente en el infinito en el espacio que media. La fórmula de difracción de Rayleigh de segunda clase proporciona una solución de la ecuación de Helmholtz valida en todo

CAPÍTULO 2. **TEORÍA DE DIFRACCIÓN**  
2.5. COMPARACIÓN DE LAS TEORÍAS DE DIFRACCIÓN DE  
KIRCHHOFF Y RAYLEIGH-SOMMERFELD

---

el semiespacio  $z > 0$ , cuya normal  $\partial U(x, y, z)/\partial z$  toma valores prescritos en el plano  $z = 0$  y es saliente en el infinito en la mitad del espacio.

### 2.5. Comparación de las teorías de difracción de Kirchhoff y Rayleigh-Sommerfeld

Una comparación de las ecuaciones de Rayleigh-Sommerfeldy Kirchhoff nos lleva a una conclusión interesante y sorprendente: la solución de Kirchhoff es la media aritmética de las dos soluciones de Rayleigh-Sommerfeld

Comparando los resultados de los tres enfoques para el caso de la iluminación de onda esférica, vemos que los resultados derivados de la teoría de Rayleigh-Sommerfeld, difieren de la fórmula de difracción de Fresnel-Kirchhoff, sólo a través de lo que se conoce como el factor de oblicuidad, que es la dependencia angular introducida por los términos de coseno.

Cabe mencionar que, Wolf y Marchand, que examinaron las diferencias entre las dos teorías para aberturas circulares con puntos de observación a una distancia suficientemente grande de la abertura para estar en el “campo lejano”. Ellos encontraron, que la solución de Kirchhoff y las dos soluciones Rayleigh-Sommerfeld son esencialmente la misma, siempre que el diámetro de la abertura sea mucho mayor que una longitud de onda. Heurtley examinó las predicciones de las tres soluciones para puntos de observación sobre el eje de una abertura circular para todas las distancias detrás de la abertura, y encontró diferencias entre las teorías sólo cerca de la abertura.

Cuando sólo pequeños ángulos están involucrados en el problema de difracción, es fácil demostrar que las tres soluciones son idénticas. En los tres casos los factores de oblicuidad se acercan a la unidad cuando los ángulos se vuelven pequeños, y las diferencias entre los resultados desaparecen. Hay que tener en cuenta que sólo los pequeños ángulos

**CAPÍTULO 2. TEORÍA DE DIFRACCIÓN**  
**2.5. COMPARACIÓN DE LAS TEORÍAS DE DIFRACCIÓN DE**  
**KIRCHHOFF Y RAYLEIGH-SOMMERFELD**

---

estarán involucrados si estamos lejos de la abertura de difracción.

Cabe destacar también que, a pesar de sus contradicciones internas la teoría de Kirchhoff es más general que la teoría Rayleigh-Sommerfeld. Esta última requiere que las pantallas de difracción sean planas, mientras que el primero no. Sin embargo, la mayoría de los problemas de interés aquí implicará aberturas de difracción planas, por lo que esta generalidad no será particularmente significativa. De hecho, por lo general, se opta por utilizar la primera solución de Rayleigh-Sommerfeld debido a su simplicidad.

# Capítulo 3

## Difraccion de Fresnel y Fraunhofer

En el capítulo anterior, los resultados de la teoría de difracción se presentaron en su forma más general. Ahora estudiaremos ciertas aproximaciones a la teoría general, las aproximaciones que permitirán los cálculos del modelo de difracción para ser reducidos a manipulaciones matemáticas comparativamente simples. Estas aproximaciones, que son comúnmente hechas en muchos campos que tienen que ver con la propagación de ondas, se hará referencia a estas aproximaciones como de Fresnel y Fraunhofer. De acuerdo con nuestra visión del fenómeno de propagación de ondas como un "sistema", trataremos de encontrar aproximaciones que son válidos para una amplia clase de distribuciones de campo "de entrada" [9-10].

### 3.1. Difraccion de Fresnel

Imaginemos que tenemos una pantalla opaca y en ella una pequeña apertura, ahora iluminamos esta pantalla con ondas planas a una distancia  $S$  de la fuente. El plano de observación es una pantalla paralela y muy cercana a la primera. Bajo estas condiciones, una imagen de la apertura es claramente reconocible en la pantalla de observación a pesar de algunas ligeras franjas alrededor de la periferia.

Si el plano de observación es alejado de la primera pantalla, la imagen de la apertura sigue siendo reconocible, pero aumentan las franjas y se hacen mas visibles. A esto se le conoce como difracción de Fresnel o difracción

CAPÍTULO 3. DIFRACCION DE FRESNEL Y  
FRAUNHOFER  
3.1. DIFRACCION DE FRESNEL

---

de campo cercano.

Ahora, si continuamos alejando el plano de observación de forma paralela a la apertura, podremos ver que nuestra imagen comienza a deformarse, se produce un cambio en el patrón de difracción. A una distancia mayor pero dentro del régimen de difracción de Fresnel de la apertura, la imagen proyectada se habrá extendido considerablemente, teniendo muy poco o nada de parecido con la apertura real. De ahí en adelante si seguimos moviendo el plano de observación lo que cambia es esencialmente el tamaño de la imagen y no su forma. A este fenómeno se le conoce como difracción de Fraunhofer o difracción de campo lejano, que no es otra cosa mas que un caso particular de la difracción de Fresnel.

Para estudiar dicho fenómeno anteriormente descrito, se hace uso de la óptica de Fourier, que es una rama de la teoría óptica ondulatoria, basada concretamente en la Transformada de Fourier. La transformada de Fourier es básicamente el espectro de frecuencias de una función. Es una de las tres principales aproximaciones al estudio de la óptica, siendo las otras la integral de difracción y la óptica geométrica.

La Difracción de Fresnel o también difracción del campo cercano es un patrón de difracción de una onda electromagnética obtenida muy cerca del objeto causante de la difracción, a menudo una fuente o abertura. El patrón de difracción del campo eléctrico en el punto  $(x, y, z)$  está dado por la abertura que se supone en la posición  $(\xi, \eta)$  del plano, y que es iluminada en la dirección positiva de  $z$ . Nosotros podemos calcular el campo a través de el plano  $(x, y)$  que es paralelo al plano de la abertura  $(\xi, \eta)$  y  $z$  es la distancia normal entre los dos planos. El eje  $z$  atraviesa ambos planos en el origen.

$$U(P_o) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \cos\theta ds, \quad (3.1)$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre la normal  $\hat{n}$  y el vector  $r_{01}^{\vec{}}$  apuntando desde

---

CAPÍTULO 3. DIFRACCION DE FRESNEL Y  
FRAUNHOFER  
3.1. DIFRACCION DE FRESNEL

---

$P_0$  y  $P_1$  . El término  $\cos\theta$  esta dado por  $\cos\theta = \frac{z}{r_{01}}$  y por lo tanto el principio de Huygens-Fresnel puede ser escrito como

$$U(P_0) = \frac{z}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}^2} d\xi d\eta, \quad (3.2)$$

donde la distancia  $r_{01}$  es dada por:

$$r_{01} = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}. \quad (3.3)$$

Para llegar a esta expresión hacemos uso de dos aproximaciones, una es la aproximación inherente a la teoría escalar. La segunda, es el supuesto de que la distancia de observación desde la apertura hasta el plano de observación es decir  $r_{01}$ , debe ser mucho mayor que la longitud de onda con la cual es iluminada la abertura, es decir

$$r_{01} \gg \lambda. \quad (3.4)$$

Para reducir el principio de Huygens-Fresnel eq.(3,2) a una expresión mas simple, se introduce una aproximación para la distancia  $r_{01}$ . La aproximación esta basada en la expansión binomial de la raíz cuadrada de la eq(3,3) para obtener

$$r_{01} \approx z \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x - \xi}{z} \right)^2 + \left( \frac{y - \eta}{z} \right)^2 \right]. \quad (3.5)$$

CAPÍTULO 3. DIFRACCION DE FRESNEL Y  
 FRAUNHOFER  
 3.1. DIFRACCION DE FRESNEL

---

La expresión resultante para el campo en el punto  $(x, y)$  es

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) \exp \left\{ i \frac{k}{2z} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \right\} d\xi d\eta, \quad (3.6)$$

donde hemos incorporado los límites finitos de la apertura en la definición de  $U(\xi, \eta)$  de acuerdo a las condiciones de frontera propuestas. La eq(3,6) se puede ver fácilmente como una convolución que se puede expresar de la siguiente manera

$$U(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta, \quad (3.7)$$

donde el kernel de la convolución es

$$h(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp \left[ \frac{ik}{2z} (x^2 + y^2) \right]. \quad (3.8)$$

Otra manera de encontrar el campo eléctrico en el punto  $(x, y)$  es decir llegar a la ec(3,6) es factorizar el término  $\exp \left[ \frac{ik}{2z} (x^2 + y^2) \right]$  fuera de la integral, de tal manera que nos queda la siguiente expresión

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i \frac{k}{2z} (x^2 + y^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ U(\xi, \eta) e^{i \frac{k}{2z} (\xi^2 + \eta^2)} \right\} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda z} (x\xi + y\eta)} d\xi d\eta. \quad (3.9)$$

Podemos reconocer esta ecuación como una transformada de Fourier del producto del campo complejo y la exponencial de fase cuadrática. Nos

## CAPÍTULO 3. DIFRACCIÓN DE FRESNEL Y FRAUNHOFER

### 3.1. DIFRACCIÓN DE FRESNEL

---

referimos a ambas formas de el resultado, (3.6) y (3.9), como la difracción de Fresnel integral. Cuando esta aproximación es válida, se encuentra en la región de la difracción de Fresnel, o equivalentemente en el campo cercano de la abertura.

#### La precisión de la aproximación de Fresnel

Teniendo en cuenta la aproximación exponencial, que es la aproximación más crítica, se puede observar que la onda esférica secundaria que permite el principio de Huygens-Fresnel, puede ser sustituida por la onda con frentes de onda parabólicos. La precisión de esta aproximación, es determinada por los errores inducidos cuando los términos superiores a los de primer orden (lineal) son introducidos en la expansión binomial. Una condición suficiente para la exactitud, sería que el cambio de fase máxima inducida sea mucho menos de 1 radian. Esta condición se cumplirá si

$$z^3 \gg \frac{\pi}{4\lambda} \left[ (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \right]^2 \quad (3.10)$$

Para una abertura circular de diámetro de  $1\text{cm}$ , una región de observación circular de diámetro de  $1\text{cm}$ , y una longitud de onda de  $0,5\mu\text{m}$ , esta condición indicaría que la distancia  $z$  debe ser:  $\gg 25\text{cm}$  con exactitud. Sin embargo, esta condición suficiente es demasiado estricta, y la precisión se puede esperar para distancias mucho más cortas.

Para la aproximación de Fresnel para producir resultados precisos, no es necesario que los términos de orden superior de la expansión sean pequeños, sólo que no cambien el valor de la integral de difracción de Fresnel de manera significativa. Teniendo en cuenta la forma de convolución del resultado de la eq. (3.6), si la mayor contribución a la integral viene de puntos  $(\xi, \eta)$ , para los que  $\xi \sim x$  y  $\eta \sim y$ , los valores particulares de los términos de orden superior de la expansión no son importantes.

CAPÍTULO 3. DIFRACCION DE FRESNEL Y  
FRAUNHOFER  
3.1. DIFRACCION DE FRESNEL

---

**La aproximación de Fraunhofer**

Como ya se observo en la región de la difracción de Fresnel, la intensidad de campo observado  $U(x, y)$  se puede encontrar a partir de una transformada de Fourier del producto de la distribución de abertura  $U(\xi, \eta)$  y una función de fase cuadrática  $\exp[i(k/2z)(\xi^2 + \eta^2)]$ . Si además de la aproximación de Fresnel, se cumple una aproximación mas rigurosa

$$z \gg \frac{k (\xi^2 + \eta^2)_{max}}{2} \quad (3.11)$$

entonces el factor de fase cuadrática bajo el signo integral de la ec(3.12) es aproximadamente la unidad sobre toda la abertura, y la intensidad de campo observado se puede encontrar directamente a partir de una transformada de Fourier de la distribución de la abertura. Así, en la región de la difracción de Fraunhofer (o en el campo lejano)

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) \exp \left[ -i\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi + y\eta) \right] d\xi d\eta. \quad (3.12)$$

Aparte de los factores multiplicativos de fase anteriores a la integral, esta expresión es simplemente la transformada de Fourier de la distribución de abertura, evaluada en las frecuencias

$$\begin{aligned} f_X &= x\lambda z \\ f_Y &= y\lambda z \end{aligned} \quad (3.13)$$

A frecuencias ópticas, las condiciones requeridas para la validez de la aproximación de Fraunhofer pueden ser rigurosas. Una alternativa, en condiciones menos estrictas, conocida como “la fórmula de diseñador de

CAPÍTULO 3. **DIFRACCION DE FRESNEL Y  
FRAUNHOFER**  
3.2. PATRONES DE DIFRACCIÓN DE FRAUNHOFER

---

antenas”, establece que para que una abertura de dimensión lineal  $D$ , la aproximación de Fraunhofer será válida siempre que

$$z > \frac{2D^2}{\lambda} \quad (3.14)$$

donde la desigualdad es ahora mayor en lugar de mucho mayor. Sin embargo, para este ejemplo se sigue exigiendo que la distancia  $z$  sea mayor que 2.000 metros. No obstante, se cumplen las condiciones requeridas en una serie de problemas importantes. Además, los patrones de difracción de Fraunhofer pueden ser observados a distancias mucho más cerca de lo que implica la ec.(3.14) siempre y cuando la abertura está iluminada por una onda esférica convergente hacia el observador, o si una lente positiva está debidamente situada entre el observador y la abertura

Por último, cabe señalar que, a primera vista, no existe ninguna función de transferencia que se pueda asociar con la difracción de Fraunhofer, para la aproximación de la ec.(3.14) se ha destruido la invariancia del espacio de la ecuación de difracción. Sin embargo, no se debe olvidar que, la difracción de Fraunhofer es sólo un caso especial de la difracción de Fresnel, la función de transferencia sigue siendo válida durante todo el proceso de Fresnel y los regímenes de Fraunhofer. Es decir, siempre es posible calcular los campos refractados en la región de Fraunhofer mediante la retención de la exactitud completa de la aproximación de Fresnel.

### 3.2. Patrones de difracción de Fraunhofer

#### *Abertura Rectangular*

Consideremos una abertura rectangular con una transmitancia de amplitud dada por

**CAPÍTULO 3. DIFRACCION DE FRESNEL Y  
FRAUNHOFER**  
3.2. PATRONES DE DIFRACCIÓN DE FRAUNHOFER

---

$$t_A(\xi, \eta) = \text{rect}\frac{\xi}{2a}\text{rect}\frac{\eta}{2b} \quad (3.15)$$

las constantes  $a$  y  $b$  son las medias anchuras de la abertura en las direcciones  $\xi$  y  $\eta$ . Si la abertura está iluminada por una amplitud unitaria, normalmente incidente, una onda plana monocromática, a continuación, la distribución de campo a través de la abertura es igual a la función de transmitancia  $t_A$ . Por lo tanto usando la Ec. (3.12), el patrón de difracción de Fraunhofer

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \frac{e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}}{F\{U(\xi, \eta)\}} \left| \begin{array}{l} f_X = x/\lambda z \\ f_Y = y/\lambda z \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Tomando nota de que  $F\{U(\xi, \eta)\} = A \text{sinc}(2af_x) \text{sinc}(2bf_y)$ , donde  $A$  es el área de la abertura  $A = 4ab$ , encontramos

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \frac{e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}}{A \text{sinc}(\frac{2ax}{\lambda z}) \text{sinc}(\frac{2by}{\lambda z})}, \quad (3.17)$$

entonces

$$I(x, y) = \frac{A^2}{\lambda^2 z^2} A \text{sinc}^2(\frac{2ax}{\lambda z}) \text{sinc}^2(\frac{2by}{\lambda z}). \quad (3.18)$$

CAPÍTULO 3. DIFRACCIÓN DE FRESNEL Y  
 FRAUNHOFER  
 3.2. PATRONES DE DIFRACCIÓN DE FRAUNHOFER

---

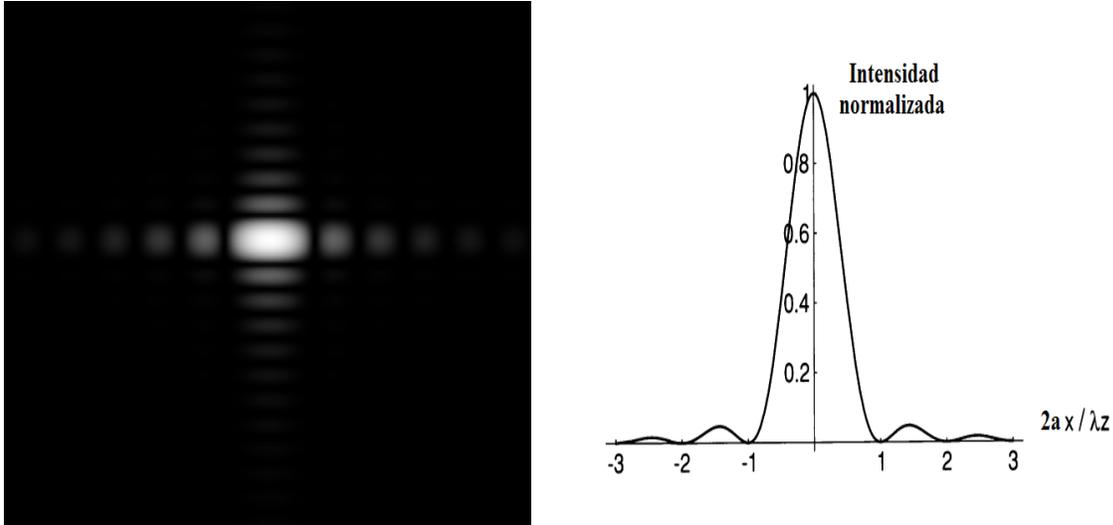


Figura 3.1: Patrón de difracción de Fraunhofer para una apertura rectangular.

La Figura anterior muestra una sección transversal del patrón de intensidad Fraunhofer a lo largo del eje  $x$ . Tengamos en cuenta que la anchura del lóbulo principal (es decir, la distancia entre los dos primeros ceros) es

$$\Delta x = \frac{\lambda z}{a}, \quad (3.19)$$

*Abertura Circular*

Consideremos una abertura de difracción que es circular, en lugar de rectangular y dejando que el radio de la abertura sea  $w$ . Sea  $q$  un radio de coordenadas en el plano de la abertura, la cual se expresa matemáticamente como

$$t_A(q) = \text{circ} \left( \frac{q}{w} \right), \quad (3.20)$$

La simetría circular del problema sugiere que la transformada de Fourier de la ec. (3.12) puede reescribirse como una transformada Fourier-Bessel. Esto si  $r$  es el radio de coordenadas en el plano de observación, tenemos

$$U(r) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp \left( i \frac{kr^2}{2z} \right) \left\{ U(q) \right\} \Big|_{\rho=r/\lambda z}, \quad (3.21)$$

**CAPÍTULO 3. DIFRACCION DE FRESNEL Y  
FRAUNHOFER**  
3.2. PATRONES DE DIFRACCIÓN DE FRAUNHOFER

---

donde  $q = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$  representa el radio en el plano de abertura, y  $\rho = \sqrt{f_X^2 + f_Y^2}$  representa el radio en el dominio de la frecuencia espacial. Para la amplitud unitaria, la iluminación de una onda plana normalmente incidente, el campo transmitido por la abertura es igual a la transmitancia de amplitud; además,

$$B \left\{ circ \left( \frac{w}{q} \right) \right\} = A \frac{J_1(2\pi w \rho)}{\pi w \rho}, \quad (3.22)$$

donde  $A = \pi w^2$ . La distribución de amplitud en el patrón de difracción de Fraunhofer es

$$U(r) = e^{ikz} e^{i\frac{kr^2}{2z}} \frac{A}{i\lambda z} \left[ 2 \frac{J_1(kwr/z)}{kwr/z} \right], \quad (3.23)$$

y la distribución de intensidad puede ser escrita como

$$I(r) = \left( \frac{A}{\lambda z} \right)^2 \left[ 2 \frac{J_1(kwr/z)}{kwr/z} \right]^2. \quad (3.24)$$

Esta distribución de la intensidad se conoce como el patrón de Airy, en honor a G.B. Airy quien fue el primero en formularla. Se puede observar que la anchura del lóbulo central, medido a lo largo del eje  $x$  o  $y$ , está dado por

$$d = 1,22 \frac{\lambda z}{w}, \quad (3.25)$$

# CAPÍTULO 3. DIFRACCIÓN DE FRESNEL Y FRAUNHOFER

## 3.3. PATRONES DE DIFRACCIÓN DE FRESNEL

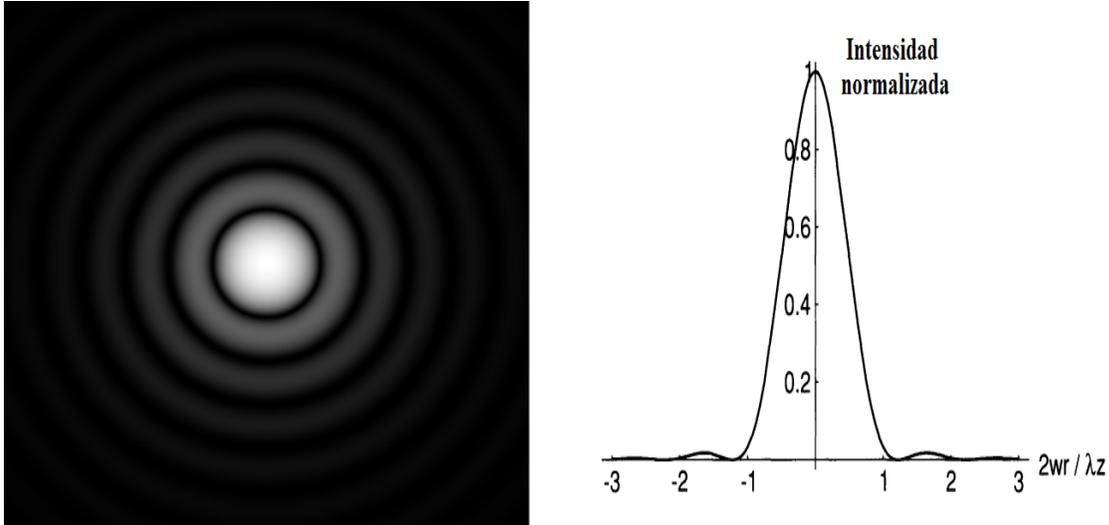


Figura 3.2: Patrón de difracción de Fraunhofer para una apertura circular.

### 3.3. Patrones de difracción de Fresnel

#### *Abertura Cuadrada*

Supongamos una abertura cuadrada de  $2a$  ancho es normalmente iluminada por una onda plana monocromática de amplitud unitaria. La distribución de campo complejo inmediatamente detrás de la abertura es

$$U(\xi, \eta) = \text{rect}\left(\frac{\xi}{2a}\right) \text{rect}\left(\frac{\eta}{2a}\right) \quad (3.26)$$

La convolución de la ecuación de difracción de Fresnel es más conveniente para este problema, dando

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint_{-a}^a \exp\left\{i\frac{\pi}{\lambda z} [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]\right\} d\xi d\eta \quad (3.27)$$

**CAPÍTULO 3. DIFRACCIÓN DE FRESNEL Y  
FRAUNHOFER**  
3.3. PATRONES DE DIFRACCIÓN DE FRESNEL

---

en esta expresión se puede separar en el producto de dos integrales unidimensionales

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i} I(x) I(y), \quad (3.28)$$

donde

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda z}} \int_{-a}^a \exp \frac{i}{\lambda z} [(\xi - x)^2] d\xi$$

$$I(y) = \frac{1}{\sqrt{\lambda z}} \int_{-a}^a \exp \frac{i}{\lambda z} [(\eta - y)^2] d\eta \quad (3.29)$$

Para reducir estas integrales a las expresiones que se relacionan con las integrales de Fresnel, mencionadas en varias ocasiones anteriores, hacemos el siguiente cambio de variables:

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}} (\xi - x) \quad \beta = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}} (\eta - y) \quad (3.30)$$

entonces

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \exp \left( i \frac{\pi}{2} \alpha^2 \right) d\alpha$$

$$I(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \exp \left( i \frac{\pi}{2} \beta^2 \right) d\beta \quad (3.31)$$

donde los límites de integración son:

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}} (w + x) \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}} (w - x)$$

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}} (w + y) \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}} (w - y) \quad (3.32)$$

CAPÍTULO 3. **DIFRACCION DE FRESNEL Y  
FRAUNHOFER**  
3.3. PATRONES DE DIFRACCIÓN DE FRESNEL

---

En este punto se define el número de Fresnel,  $N_F = w^2/\lambda z$  e introducimos variables de distancia normalizadas en la región de observación,  $X = x^2/\lambda z$  y  $Y = y^2/\lambda z$ , obteniéndose expresiones sencillas para los límites de integración,

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -\sqrt{2}(\sqrt{N_F} + X) & \alpha_2 &= \sqrt{2}(\sqrt{N_F} - X) \\ \beta_1 &= -\sqrt{2}(\sqrt{N_F} + Y) & \beta_2 &= \sqrt{2}(\sqrt{N_F} - Y)\end{aligned}\quad (3.33)$$

Las integrales  $I(x)$  y  $I(y)$  están relacionadas con las integrales de Fresnel  $C(z)$  y  $S(z)$

$$C(z) = \int_0^z \text{Cos} \left( \frac{\pi t^2}{2} \right) dt \quad S(z) = \int_0^z \text{Sin} \left( \frac{\pi t^2}{2} \right) dt \quad (3.34)$$

Tomando nota de que

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \exp \left( i \frac{\pi}{2} \alpha^2 \right) d\alpha = \int_0^{\alpha_2} \exp \left( i \frac{\pi}{2} \alpha^2 \right) d\alpha - \int_0^{\alpha_1} \exp \left( i \frac{\pi}{2} \alpha^2 \right) d\alpha \quad (3.35)$$

Podemos escribir

$$\begin{aligned}I(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ [C(\alpha_2) - C(\alpha_1)] + i [S(\alpha_2) - S(\alpha_1)] \} \\ I(y) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ [C(\beta_2) - C(\beta_1)] + i [S(\beta_2) - S(\beta_1)] \}\end{aligned}\quad (3.36)$$

## CAPÍTULO 3. DIFRACCIÓN DE FRESNEL Y FRAUNHOFER

### 3.3. PATRONES DE DIFRACCIÓN DE FRESNEL

Finalmente, la sustitución de la ec.(3.36) en la ec.(3.28) produce una distribución de campo complejo

$$\begin{aligned}
 U(x, y) = & \frac{e^{ikz}}{2i} \{ [C(\alpha_2) - C(\alpha_1)] + i [S(\alpha_2) - S(\alpha_1)] \} \\
 & \times \{ [C(\beta_2) - C(\beta_1)] + i [S(\beta_2) - S(\beta_1)] \}
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Ahora, recordando que la magnitud física medible es la intensidad de la onda de campo,  $I(x, y) = |U(x, y)|^2$ , que en este caso viene dada por

$$\begin{aligned}
 I(x, y) = & \frac{1}{4} \left\{ [C(\alpha_2) - C(\alpha_1)]^2 + [S(\alpha_2) - S(\alpha_1)]^2 \right\} \\
 & \times \left\{ [C(\beta_2) - C(\beta_1)]^2 + [S(\beta_2) - S(\beta_1)]^2 \right\}
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

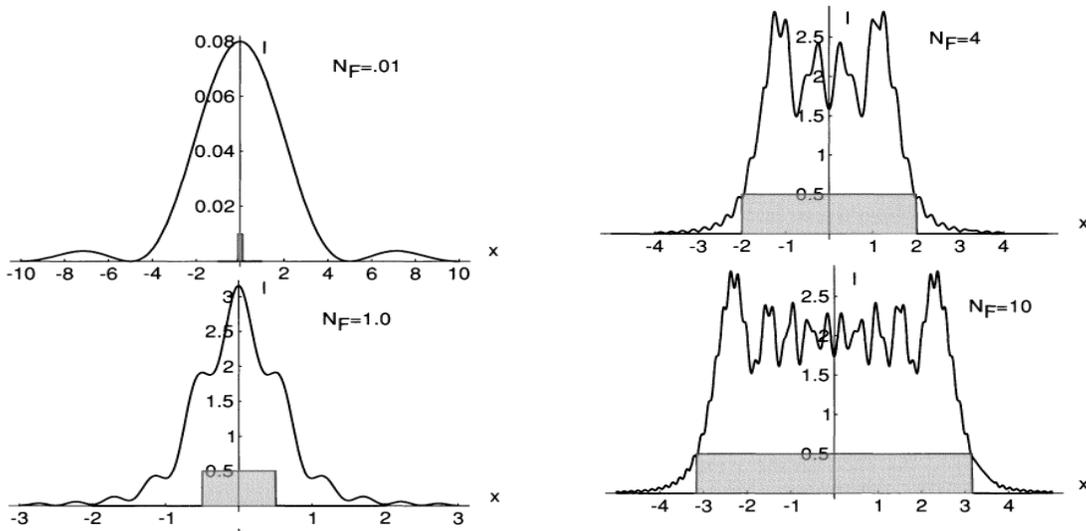


Figura 3.3: Patrón de difracción de Fresnel para una apertura cuadrada.

# Capítulo 4

## Propagación de campos

El análisis y modelo matemático de la propagación de campos utiliza la transformada de Fourier como herramienta básica. Por ello primero se presenta su definición.

### 4.1. Transformada de Fourier

La transformada de Fourier, descompone una función de tiempo en las frecuencias que la componen, denominada así por Joseph Fourier, es una transformación matemática empleada para transformar señales entre el dominio del tiempo (o espacial) y el dominio de la frecuencia, que tiene muchas aplicaciones en la física y la ingeniería. Es reversible, siendo capaz de transformaciones de cualquiera de los dominios al otro. El propio término se refiere tanto a la operación de transformación como a la función que produce.

La transformada de Fourier, se puede simplificar para el cálculo de un conjunto discreto de amplitudes complejas, llamado coeficientes de las series de Fourier. Estos coeficientes representan el espectro de frecuencia de la señal del dominio-tiempo original.

La transformada de Fourier en el espectro de frecuencia o espectro de Fourier se define como [6-7]

$$F(g) = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \exp[-i2\pi (f_X x + f_Y y)] dx dy \quad (4.1)$$

## CAPÍTULO 4. PROPAGACIÓN DE CAMPOS

### 4.1. TRANSFORMADA DE FOURIER

---

La transformada se define a sí misma como una función compleja de dos variables independientes  $f_X$  y  $f_Y$ , y por lo general nos referimos a ellas como frecuencias. Del mismo modo, la transformada inversa de Fourier de una función  $G(f_X, f_Y)$  que está representada por  $F^{-1}\{G\}$  y se define como:

$$F^{-1}\{G\} = \iint_{-\infty}^{\infty} G(f_X, f_Y) \exp[i2\pi(f_X x + f_Y y)] df_X df_Y \quad (4.2)$$

Las siguientes condiciones son suficientes para la existencia de la transformada de Fourier y la transformada inversa:

- a)  $g(x,y)$  debe ser absolutamente integrable en el plano  $x$ - $y$ .
- b)  $g(x,y)$  debe tener solamente un número finito de discontinuidades, y un número de máximos y mínimos en cualquier rectángulo finito.
- c)  $g(x,y)$  no debe tener discontinuidades infinitas.

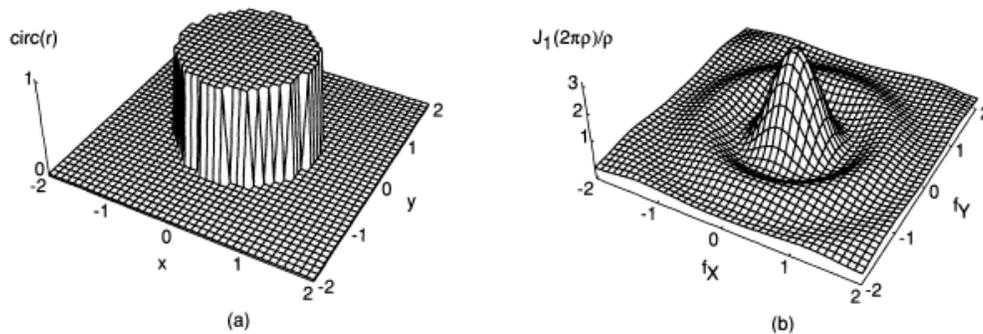


Figura 4.1: Transformada de Fourier de la función círculo

### El teorema de Fourier: Fourier pares de transformación

Un sistema óptico consta de un plano de entrada, un plano de salida y un conjunto de componentes que transforman la imagen formada en la entrada denominada “ $f$ ” en una imagen diferente “ $g$ ” formada en la salida. La imagen de salida está relacionada con la imagen de la entrada

## CAPÍTULO 4. PROPAGACIÓN DE CAMPOS

### 4.1. TRANSFORMADA DE FOURIER

---

mediante la convolución de la imagen de entrada con la respuesta de impulso óptico, “ $h$ ”. La respuesta de impulso define de forma exclusiva el comportamiento de la entrada-salida del sistema óptico. Por convención, el eje óptico del sistema se toma como el eje  $z$ . Como resultado, las dos imágenes y la respuesta de impulso son todas las funciones de las coordenadas transversal,  $x$  e  $y$ .

La respuesta al impulso de un sistema de imagen óptica es el campo plano de salida que se produce cuando se coloca una fuente de punto matemático ideal de luz en el plano de entrada. En la práctica, no es necesario disponer de una fuente de punto de ideales con el fin de determinar una respuesta exacta impulso.

Los sistemas ópticos normalmente caen en una de dos categorías diferentes. El primero es el sistema de imagen óptica enfocada ordinaria, en el que el plano de entrada se denomina el plano del objeto y el plano de salida se denomina el plano de la imagen. El campo en el plano de la imagen es deseable que sea una reproducción de alta calidad del campo en el plano del objeto.

El segundo tipo es el sistema de procesamiento de imagen óptica, en el que una característica importante en el campo plano de entrada se va a situar y aislar. En este caso, se desea la respuesta de impulso del sistema a ser una réplica cerca de esa característica que se está buscando en el campo plano de entrada, de modo que una convolución de la respuesta de impulso contra el campo plano de entrada producirá un punto brillante en la ubicación característica en el plano de salida.

#### *Plano de entrada*

El plano de entrada se define como el lugar geométrico de todos los puntos de manera que  $z = 0$ . La imagen de entrada  $f$  es por lo tanto

#### *Plano de salida*

El plano de salida se define como el lugar geométrico de todos los puntos de manera que  $z = d$ . La imagen de salida  $g$  es por lo tanto

*La convolución 2D de la función de entrada en contra de la función de respuesta de impulso*

es decir, se supone que la respuesta de impulso no es una función de la posición del impulso de la luz en el plano de entrada. Ningún sistema óptico está cambiando perfectamente invariante: como el punto ideal, matemático de la luz se escanea lejos del eje óptico, aberraciones degradarán la respuesta de impulso. Sin embargo, los sistemas ópticos de alta calidad a menudo se desplazan lo suficientemente invariante respecto a ciertas regiones del plano de entrada que podemos considerar la respuesta de impulso como una función de sólo la diferencia entre la entrada y el plano de salida.

## 4.2. Algoritmos Iterativos

Los algoritmos iterativos son algoritmos que se caracterizan por ejecutarse mediante ciclos. Estos algoritmos son muy útiles al momento de realizar tareas repetitivas (como recorrer un arreglo de datos). Casi todos los lenguajes de programación modernos tienen palabras reservadas para la realización de iteraciones.

La opción al uso de algoritmos iterativos es el uso de la recursividad en funciones. Estas implican una escritura más sencilla (corta), tanto para su implementación como para su entendimiento, pero en contraparte, utilizan mucho más recursos de sistema que una iteración

### Algoritmos Iterativos de recuperacion de fase

La fase de la radiación dispersada por un objeto lleva información importante sobre la superficie del objeto ó de su estructura interna. Su medida ha sido un medio clave para la investigación en muchos campos, como en materiales y ciencias biológicas. Debido a que sólo la magnitud de la radiación se puede medir directamente sobre un gran rango espectral, surge el problema de fase. Las soluciones al problema de las fases se dividen en dos categorías: los enfoques interferométricos y enfoques basados en la propagación del haz. Con el rápido progreso en las técnicas de computación, así como en dispositivos de imágenes digitales, los enfoques basados en la recuperación de fase de la propagación de haces han estado recibiendo un interés creciente[12].

El método propuesto por Gerchberg y Saxton en 1972 es el primer método de recuperación de fase basado en la propagación de un haz y es ampliamente aceptado. La idea es que las fases que faltan se pueden recuperar mediante la aplicación iterativa de las restricciones de magnitud en el objeto y en el espacio de la transformada de Fourier.

Fienup modificó el algoritmo Gerchberg-Saxton en 1978 mediante el uso de restricciones de soporte finito y no negatividad en el espacio objeto en lugar de la magnitud del objeto. En los años siguientes, los algoritmos de Fienup y sus variaciones se han demostrado con éxito para diversas aplicaciones, en particular para los objetos reales y no negativos.

En 1998, Miao aclaró el requisito de muestreo para la recuperación de fase única y señaló que sobremuestreo de los patrones de difracción generalmente garantiza la convergencia.

### Algoritmo de Gerchberg-Saxton

El algoritmo de Gerchberg-Saxton (GS) fue propuesto en 1972 por R.W. Gerchberg y W.O. Saxton para resolver el problema de la recuperación de fase de un campo en dos planos diferentes, cuando en ellos, sólo las amplitudes de campo son conocidas y dado que los campos están relacionados por una transformada de Fourier. Esto se utiliza sobre todo para calcular la función de modulación de una máscara de fase de manera que cuando es iluminada por una onda plana, produce una distribución conocida como irradiancia de campo lejano, ó el equivalente, para calcular la máscara de fase para ser utilizado en un sistema óptico de Fourier por lo que el patrón deseado se obtiene en el plano de la imagen. Además de su propósito, también se ha utilizado ampliamente para calcular elementos ópticos difractivos (DOE) de sólo fase para ser utilizados como formadores de haz o en aplicaciones de imagen, donde la propagación del campo óptico de la DOE al plano de imagen y viceversa son conocidos, tales como sistemas que implican la propagación de campo lejano o en un sistema de Fourier.[15-17]

El algoritmo consta de los siguientes cuatro pasos simples:

- (1) Transformar una estimación de Fourier del objeto

- (2) Reemplazar el módulo de la resultante de Fourier computarizada transformar con el módulo de Fourier medido para formar una estimación de la transformada de Fourier
- (3) Transformada inversa de Fourier de la estimación de la transformada de Fourier
- (4) Reemplazar el módulo de la imagen computarizada resultante con el módulo de objeto medido para formar una nueva estimación del objeto.

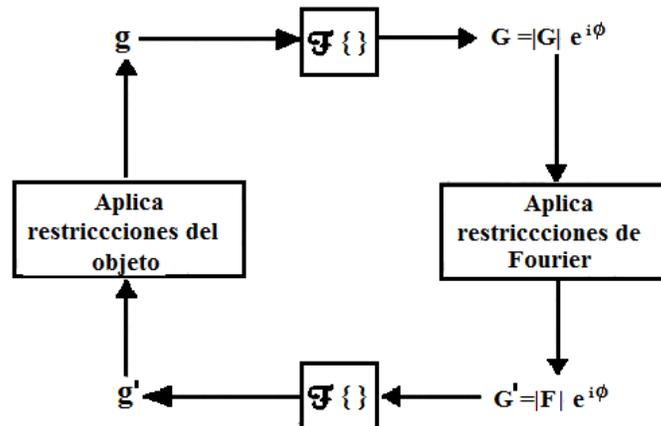


Figura 4.2: Diagrama de bloques del algoritmo Gerchberg-Saxton.

Se representan por letras mayúsculas las transformadas de Fourier de las funciones representadas por las letras minúsculas correspondientes.

En ecuaciones esto es, para la  $k$ -ésima iteración

$$G_k(u) = |G_k(u)| \exp[i\phi_k(u)] = \mathfrak{S}g_k(x), \quad (4.3)$$

$$G'_k(u) = |F(u)| \exp[i\phi_k(u)], \quad (4.4)$$

$$g'_k(x) = |g'_k(x)| \exp[i\theta'_k(x)] = \mathfrak{S}^{-1}G'_k(u), \quad (4.5)$$

$$g_{k+1}(x) = |f(x)| \exp[i\theta_{k+1}(x)] = |f(x)| \exp[i\theta'_k(x)], \quad (4.6)$$

### Algoritmo de Reducción de error

Como se representa en la Fig. 4.2 el algoritmo de Gerchberg-Saxton se generaliza fácilmente a una gran clase de problemas. El algoritmo de Gerchberg-Saxton generalizado puede ser utilizado para cualquier problema en el que las limitaciones parciales (en la forma de datos o información medidos se conocen a priori) son conocidos en cada uno de dos dominios, por lo general el objeto (o imagen) y los dominios de Fourier.

Simplemente se realizan transformaciones hacia atrás y adelante entre los dos dominios, satisfaciendo las limitaciones en uno antes de volver al otro. Esta generalización del algoritmo de Gerchberg-Saxton se conoce como el algoritmo de reducción de error, ya que, como se muestra a continuación, el error disminuye en cada iteración.[18]

El problema general del algoritmo de reducción de error consta de los siguientes cuatro pasos:

- (1) Transformada de Fourier  $g_k(x)$ , una estimación de  $f(x)$
- (2) Hacer los cambios mínimos en  $G_k(u)$ , que es la transformada de Fourier calculada resultante, que permite que se satisfagan las restricciones de Fourier en el dominio para formar  $G'_k(u)$ , una estimación de  $F(u)$
- (3) Transformada inversa de Fourier  $G'_k(u)$
- (4) Hacer los cambios mínimos en  $g'_k(x)$  la imagen computarizada resultante, lo que le permite satisfacer las restricciones de objeto de dominio para formar  $g_{k+1}(x)$ , una nueva estimación del objeto.

En particular, para el problema de una única medición de la intensidad (como en la astronomía) los tres primeros pasos son idénticos a los tres primeros pasos del algoritmo de Gerchberg-Saxton, las Ecs. (4.3)-(4.5) , y el cuarto paso está dado por

$$g_{k+1} = \begin{cases} g'_k(x) & x \notin \gamma \\ 0 & x \in \gamma \end{cases} \quad (4.7)$$

donde  $\gamma$  es el conjunto de puntos en los que  $g'_k(x)$  viola las restricciones del dominio del objeto, es decir, allí donde  $g'_k(x)$  es negativa o en el que supera el diámetro conocido del objeto. El diámetro del objeto puede calcularse

ya que es sólo la mitad del diámetro de la función de autocorrelación, que es la transformada inversa de Fourier del módulo de Fourier al cuadrado.

Las iteraciones continúan hasta que la transformada de Fourier computarizada satisface las restricciones de Fourier en el dominio de la imagen computarizada o satisface las restricciones en el dominio del objeto; a continuación, se ha encontrado una solución, una transformada de Fourier que satisface todas las restricciones en ambos dominios. La convergencia del algoritmo puede ser monitorizada mediante el cálculo del error cuadrado.

En el dominio de Fourier el error cuadrático es la suma de los cuadrados de las cantidades por el cual  $G_k(u)$ , la transformada de Fourier computarizada, viola las restricciones de Fourier en el dominio. Desde  $G'_k(u)$  que se formó a partir  $G_k(u)$  al hacer los cambios mínimos para satisfacer las restricciones de Fourier en el dominio, el error cuadrático se puede expresar como

$$B_k = E_{Fk}^2 = N^{-2} \sum_u |G_k(u) - G'_k(u)|^2 \quad (4.8)$$

que, por tanto los problemas que se consideran, pueden ser expresados como

$$B_k = E_{Fk}^2 = N^{-2} \sum_u [ |G_k(u)| - |F(u)| ]^2 \quad (4.9)$$

En esta sección el símbolo  $E_{Fk}^2$  se usa para distinguir el error del dominio del objeto  $E_{0k}^2$  se describe a continuación. Para la economía de notación en la sección de este documento se trata de los métodos de gradiente, el símbolo  $B_k$  se utiliza en lugar de  $E_{Fk}^2$ . El símbolo B (con el subíndice k suprimido) está dada por la ecuación. (4.8) con  $G$  y  $G'$  sustitución de  $G_k$  y  $G'_k$ , respectivamente.

Del mismo modo, para el algoritmo de reducción de error el error cuadrático en el dominio objeto se puede expresar como

$$E_{0k}^2 \sum_x [g_{k+1}(x) - g'_k(x)]^2 \quad (4.10)$$

que para el problema de dos mediciones de la intensidad se puede expresar como

$$E_{0k}^2 \sum_x [|f(x)| - |g'_k(x)|]^2 \quad (4.11)$$

y para el problema de una única medición de la intensidad se puede expresar como

$$E_{0k}^2 \sum_{x \in \gamma} [g'_k(x)]^2 \quad (4.12)$$

La asimetría en el uso del factor  $N^{-2}$  fue elegido debido a la asimetría similar en la definición de la transformada de Fourier discreta. Cuando el error cuadrático es cero, se ha encontrado una solución.

En el siguiente se muestra el algoritmo de error de reducción a converger, y esta propiedad de convergencia se mantiene para todas las aplicaciones del algoritmo de error de reducción.

Para el problema general, en la  $k$ -ésima iteración el error cuadrático en el dominio de Fourier está dada por la Ec.(4.8) Por el teorema de Parseval

$$E_{Fk}^2 = N^{-2} \sum_u |G_k(u) - G'_k(u)|^2 = \sum_x |g_k(x) - g'_k(x)|^2 \quad (4.13)$$

Ahora compare esto con la Ec.(4.10), el error en el dominio objeto. Tanto  $g_k(x)$  y  $g_{k+1}(x)$  por definición satisfacer las restricciones del dominio del objeto. También en cualquier punto  $x$ , por definición  $g_{k+1}(x)$  es el valor

CAPÍTULO 4. PROPAGACIÓN DE CAMPOS  
4.2. ALGORITMOS ITERATIVOS

---

más cercano a  $g'_k(x)$  que satisface las restricciones del dominio del objeto. Por lo tanto, en todos los puntos  $x$

$$|g_{k+1}(x) - g'_k(x)| \leq |g_k(x) - g'_k(x)| \quad (4.14)$$

y de las ecuaciones 4.13 y 4.16

$$E_0^2 \leq E_{Fk}^2 \quad (4.15)$$

Del mismo modo, por el teorema de Parseval

$$E_{0k}^2 = \sum_x [g_{k+1}(x) - g'_k(x)]^2 = N^{-2} \sum_u [G_{k+1}(x) - G'_k(x)]^2 \quad (4.16)$$

Dado que tanto  $G'_k(u)$  y  $G'_{k+1}(u)$  satisface las restricciones del dominio de Fourier, y en cualquier punto  $u$ , por definición  $G'_{k+1}(u)$ , es el valor más cercano a  $G_{k+1}(u)$  que satisface las restricciones del dominio de Fourier, a continuación,

$$|G_{k+1}(u) - G'_{k+1}(u)| \leq |G_{k+1}(u) - G'_k(u)| \quad (4.17)$$

de las ecuaciones (4.8) y (4.16)

$$E_{F,k+1}^2 \leq E_{0k}^2 \quad (4.18)$$

y combinando esto con la ecuación. (4.15) da el resultado deseado

$$E_{F,k+1}^2 \leq E_{0k}^2 \leq E_{Fk}^2 \quad (4.19)$$

Es decir, el error sólo puede disminuir en cada iteración.

En la práctica, el algoritmo de reducción de error generalmente disminuye el error rápidamente durante las primeras pocas iteraciones, pero mucho más lentamente para las iteraciones posteriores. La velocidad de convergencia también depende del tipo de las restricciones impuestas.

La convergencia parece ser razonablemente rápida para el problema de dos mediciones de la intensidad pero muy lento para el problema de una única medición de la intensidad.

Tanto el error y el número de iteración se muestran en escalas logarítmicas. El error disminuye rápidamente durante los primeros treinta iteraciones pero entonces alcanza una meseta a un nivel de 0,16, disminuyendo muy lentamente. Después de setenta iteraciones el error de nuevo comienza a disminuir hasta que alcanza una segunda meseta en el nivel de 0,02, momento en el que el error disminuye extremadamente lentamente. Después de 2000 iteraciones el error una vez que comienza a disminuir de nuevo hasta que alcanza tercera meseta en el nivel de 0.003, momento en el que la disminución en el error es insignificante.

Las ocurrencias de mesetas en el que la convergencia es muy lenta parecen ocurrir más a menudo y en el pasado se ha observado que, con persistencia, uno puede ir más allá de la región de la meseta y de nuevo hacer un rápido progreso hacia una solución. Sin embargo, para el problema de una única medición de la intensidad, el número de iteraciones necesarias para la convergencia del algoritmo de reducción de error de puede ser extremadamente grande, lo que hace que el algoritmo sea insatisfactorio para esa aplicación.

CAPÍTULO 4. PROPAGACIÓN DE CAMPOS  
4.2. ALGORITMOS ITERATIVOS

---

# Capítulo 5

## Método de Simulación

### 5.1. Simulación numérica

Para realizar la simulación se usa la teoría de difracción de Fresnel en donde se puede calcular el campo a través del plano  $(x, y)$  que es paralelo al plano de la apertura  $(\xi, \eta)$  y  $z$  es la distancia normal entre los dos planos. El eje  $z$  atraviesa ambos planos en el origen.

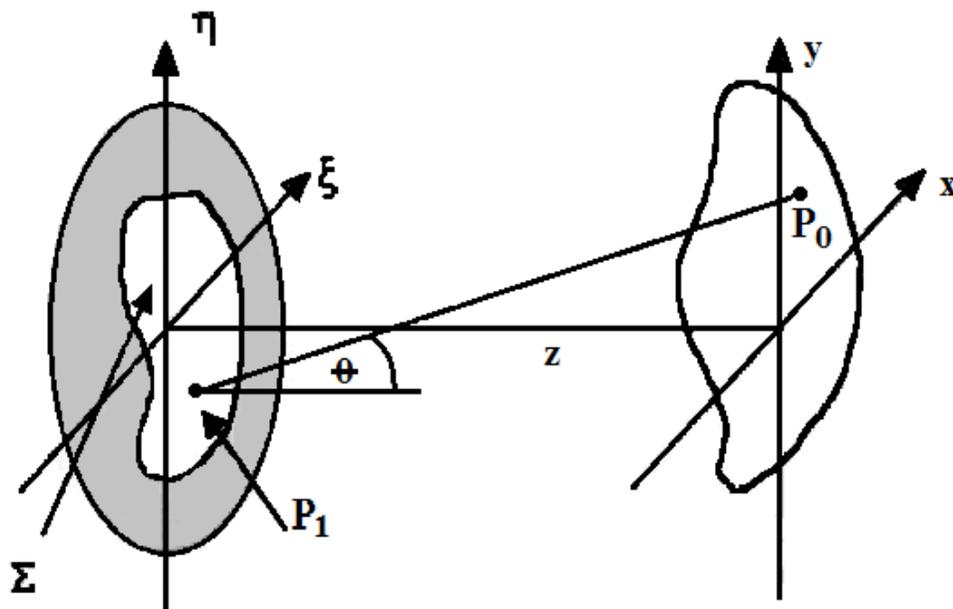


Figura 5.1: Geometría de difracción

Entonces el campo en el punto  $(x, y)$  se describe:

$$U(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \cos\theta ds, \quad (5.1)$$

Es posible utilizar el principio de Huygens Fresnel así como la aproximación paraxial para la expresión anterior. Que da como resultado:

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) \exp \left\{ i \frac{k}{2z} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \right\} d\xi d\eta, \quad (5.2)$$

La ecuación anterior se puede ver fácilmente como una convolución expresada de la siguiente manera

$$U(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta, \quad (5.3)$$

donde el kernel de la convolución es

$$h(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp \left[ \frac{ik}{2z} (x^2 + y^2) \right]. \quad (5.4)$$

Otra manera de encontrar el campo eléctrico en el punto  $(x, y)$  es decir de llegar a la Ec(5,2) es factorizar el termino  $\exp \left[ \frac{ik}{2z} (x^2 + y^2) \right]$  fuera de la integral, de tal manera que se llega a la siguiente expresión

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i \frac{k}{2z} (x^2 + y^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ U(\xi, \eta) e^{i \frac{k}{2z} (\xi^2 + \eta^2)} \right\} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda z} (x\xi + y\eta)} d\xi d\eta. \quad (5.5)$$

Podemos reconocer esta ecuación como una transformada de Fourier del producto dado por el campo complejo y la exponencial de fase cuadrática.

En la simulación se utilizan las aperturas cuadrada y circular. Primero se definen las aperturas con ayuda de la función escalón, definimos la exponencial de fase cuadrática como

$$R(\xi, \eta) = \frac{1}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(\xi^2 + \eta^2)} \quad (5.6)$$

con ayuda de ésta se calcula la convolución y la transformada de Fourier respectivamente para cada una de las aperturas.

Para la apertura cuadrada por el método de Fourier haciendo uso de la ec.(4.5), se muestra la evolución del campo a lo largo de varios planos a diferentes valores de  $z$ .

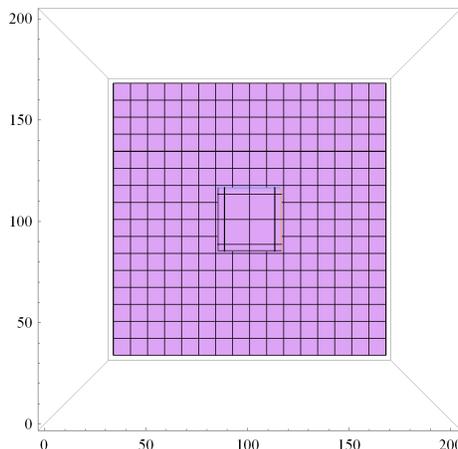
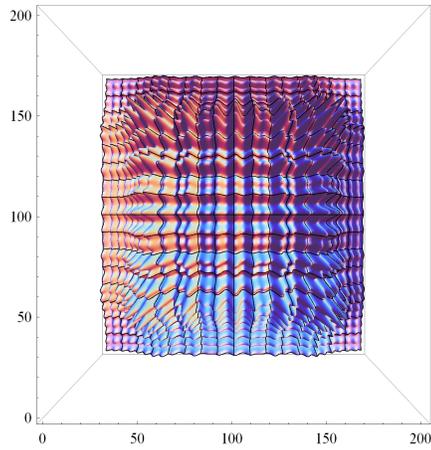


Figura 5.2: apertura inicial

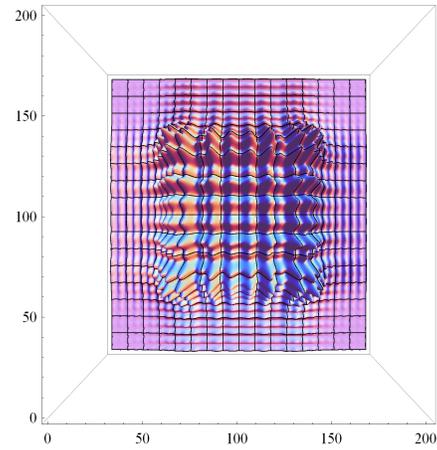
# CAPÍTULO 5. MÉTODO DE SIMULACIÓN

## 5.1. SIMULACIÓN NUMÉRICA

---

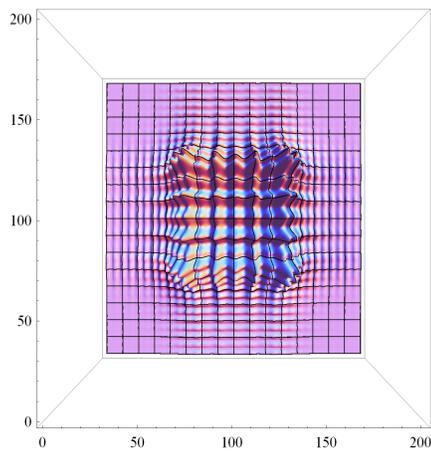


d)  $z=1.2\text{m}$

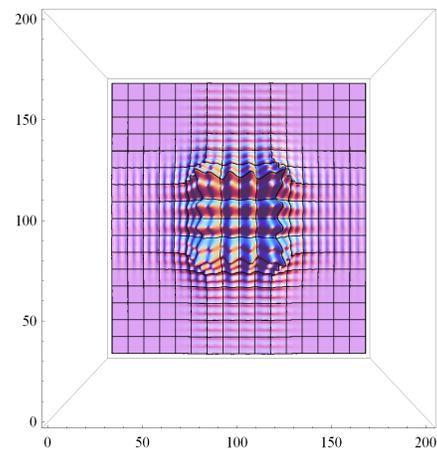


e)  $z=1.4\text{m}$

Figura 5.3: Evolución de la imagen cerca de la apertura



d)  $z=2.2\text{m}$



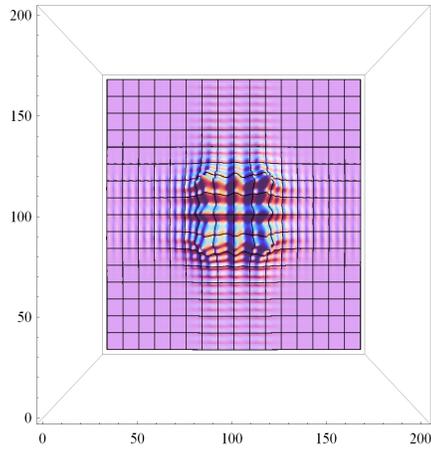
e)  $z=2.8\text{m}$

Figura 5.4: La imagen empieza a reducirse en tamaño y a deformarse

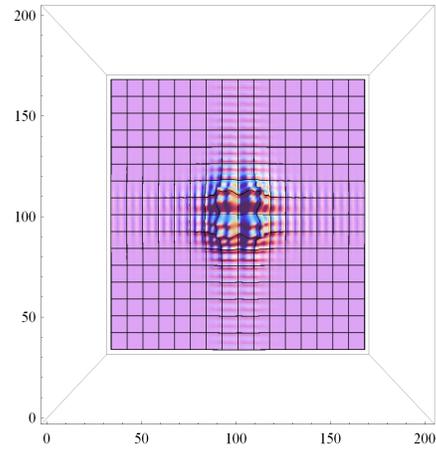
# CAPÍTULO 5. MÉTODO DE SIMULACIÓN

## 5.1. SIMULACIÓN NUMÉRICA

---

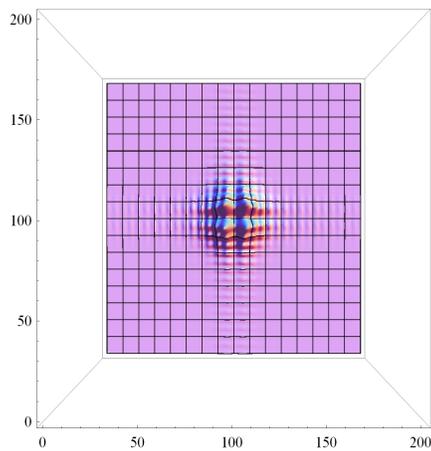


d)  $z=3.4\text{m}$

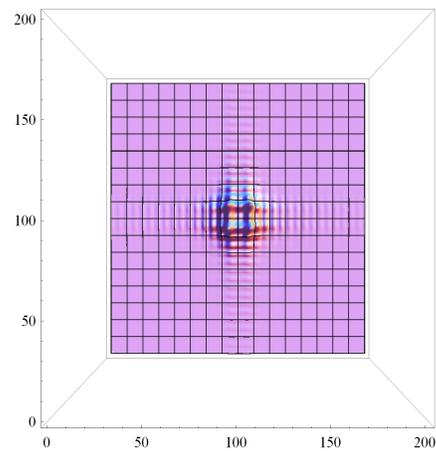


e)  $z=5.0\text{m}$

Figura 5.5: Comienzan a aparecer cuatro lóbulos provenientes de las esquinas de la apertura original



d)  $z=6.0\text{m}$



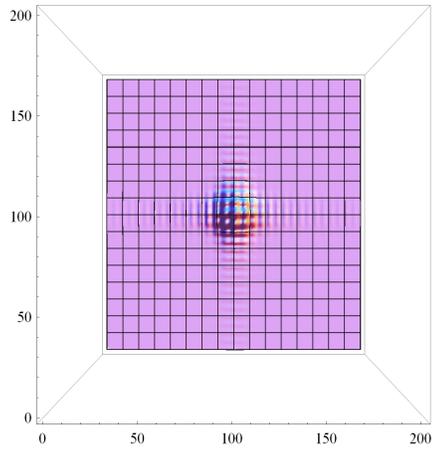
e)  $z=7.6\text{m}$

Figura 5.6: La imagen empieza a tener pliegues en cada lado de la apertura original

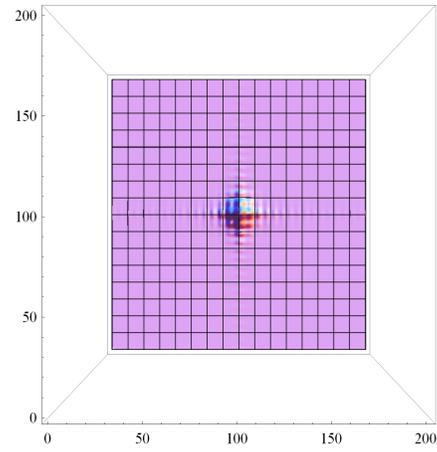
# CAPÍTULO 5. MÉTODO DE SIMULACIÓN

## 5.1. SIMULACIÓN NUMÉRICA

---

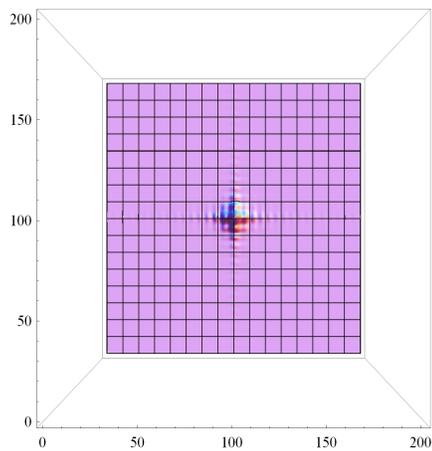


d)  $z=11.0\text{m}$

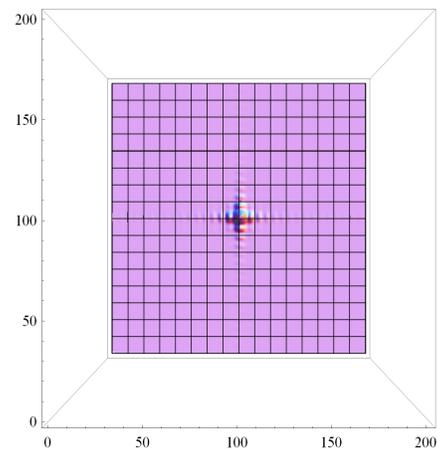


e)  $z=13.0\text{m}$

Figura 5.7: Se divide la imagen y comienza a distinguirse un lóbulo central con cuatro brazos



d)  $z=16.0\text{m}$



e)  $z=24.0\text{m}$

Figura 5.8: Evolución final de la imagen, se reconocen como el patrón de difracción para una apertura cuadrada

# CAPÍTULO 5. MÉTODO DE SIMULACIÓN

## 5.1. SIMULACIÓN NUMÉRICA

---

Por el metodo de Convolución para la misma apertura y las mismas distancias.

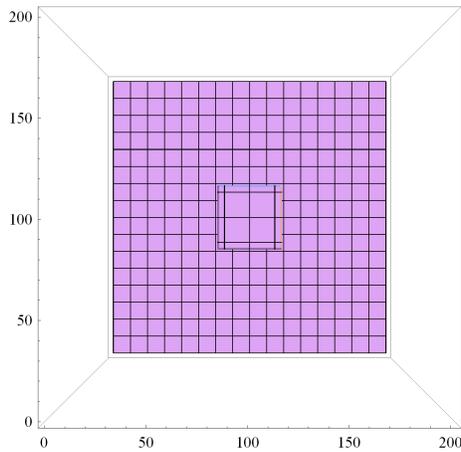


Figura 5.9: apertura inicial

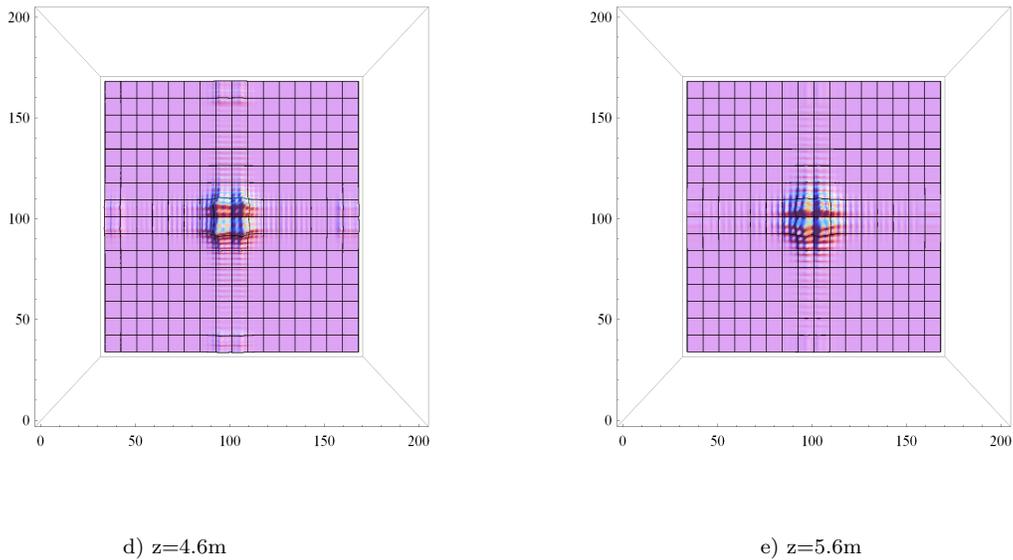


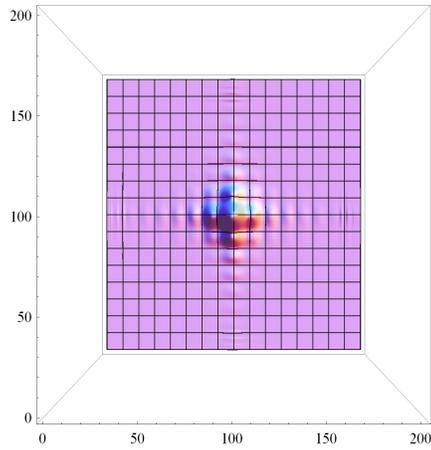
Figura 5.10: La imagen comienza a evolucionar a una distancia mayor de la apertura, dado que existen problemas de submuestreo a distancias pequeñas



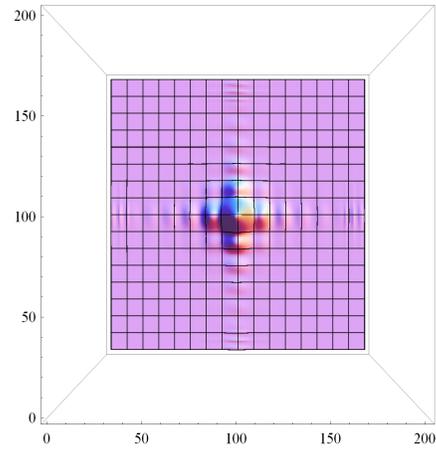
# CAPÍTULO 5. MÉTODO DE SIMULACIÓN

## 5.1. SIMULACIÓN NUMÉRICA

---

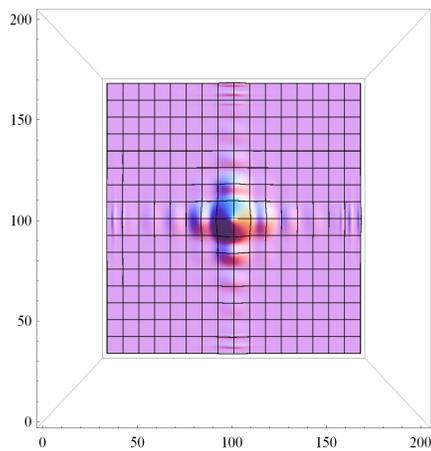


d)  $z=14.6\text{m}$

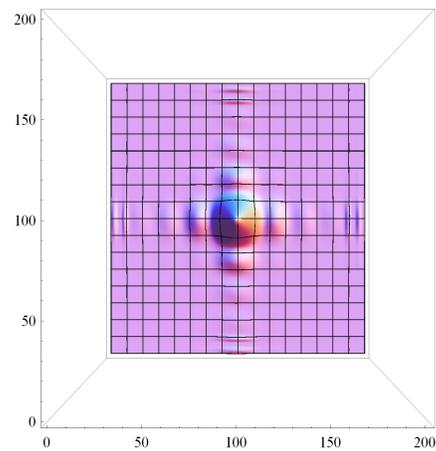


e)  $z=18.0\text{m}$

Figura 5.13: El lóbulo central comienza a aumentar de tamaño y se definen los brazos de la imagen



d)  $z=21.6\text{m}$



e)  $z=25.0\text{m}$

Figura 5.14: Imagen final, a partir de esta distancia ya no se modifica la imagen de difracción en forma

# CAPÍTULO 5. MÉTODO DE SIMULACIÓN

## 5.1. SIMULACIÓN NUMÉRICA

---

Para la apertura circular por el método de Fourier tenemos:

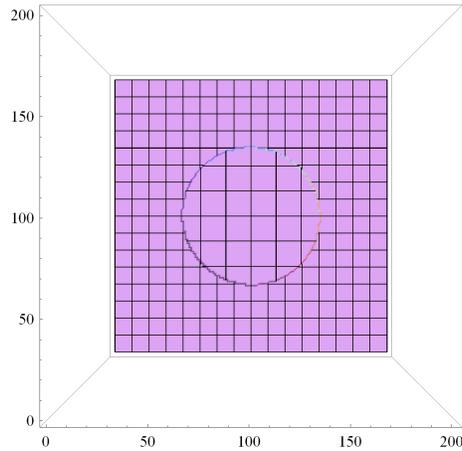
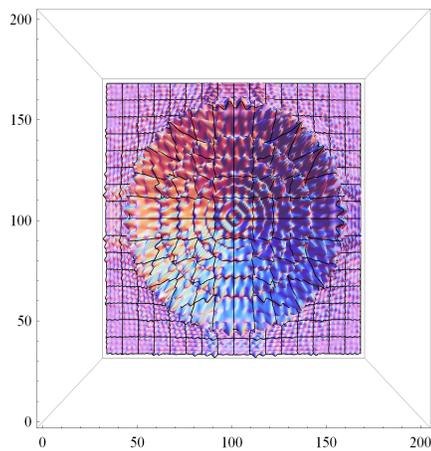
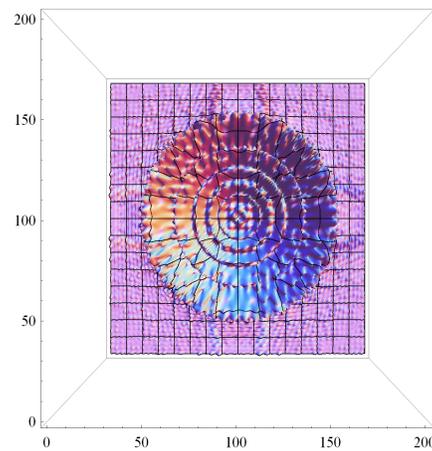


Figura 5.15: apertura inicial



d)  $z=2.8\text{m}$



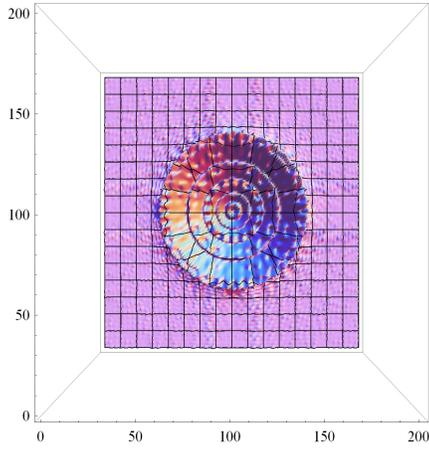
e)  $z=3.2\text{m}$

Figura 5.16: La imagen comienza a evolucionar y se puede apreciar aun la forma de la apertura con pequeñas distorsiones

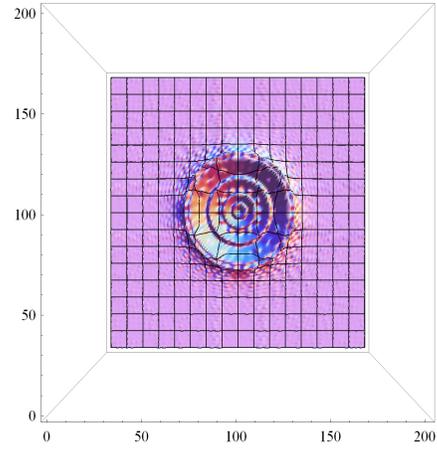
# CAPÍTULO 5. MÉTODO DE SIMULACIÓN

## 5.1. SIMULACIÓN NUMÉRICA

---

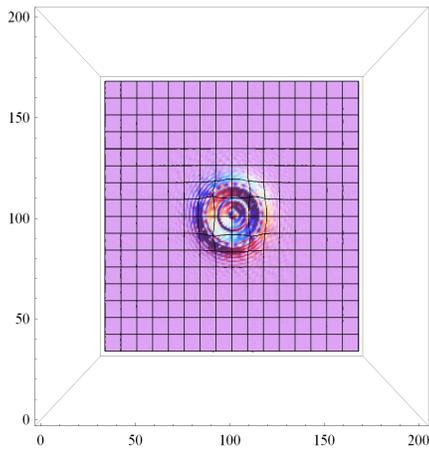


d)  $z=4.1m$

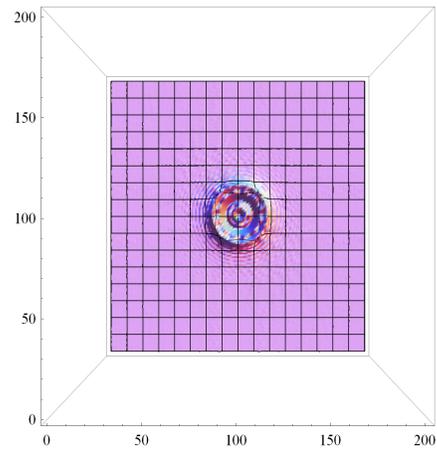


e)  $z=5.1m$

Figura 5.17: Aun se puede apreciar la forma de la apertura, pero comienza a disminuir su tamaño y disminuye el número de círculos internos



d)  $z=7.5m$



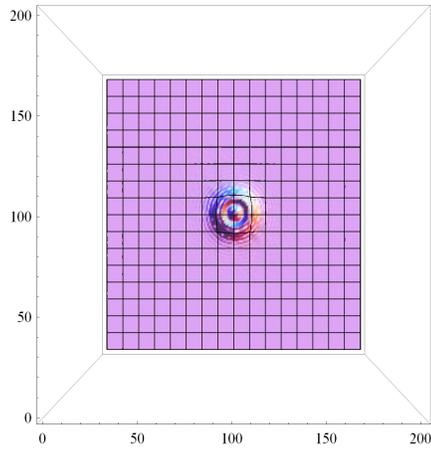
e)  $z=9.3m$

Figura 5.18: Sigue disminuyendo el tamaño de la imagen y empiezan a formarse pliegues concéntricos a la imagen

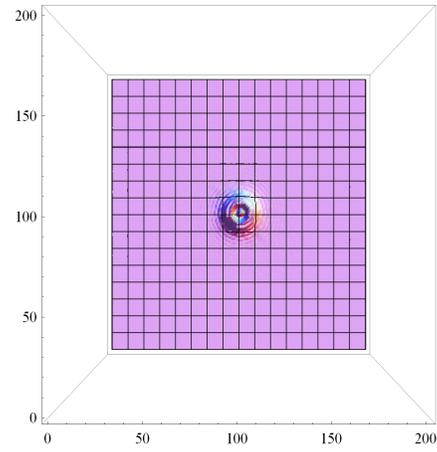
# CAPÍTULO 5. MÉTODO DE SIMULACIÓN

## 5.1. SIMULACIÓN NUMÉRICA

---

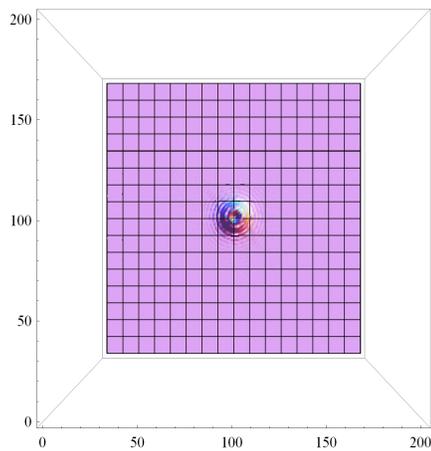


d)  $z=12.1\text{m}$

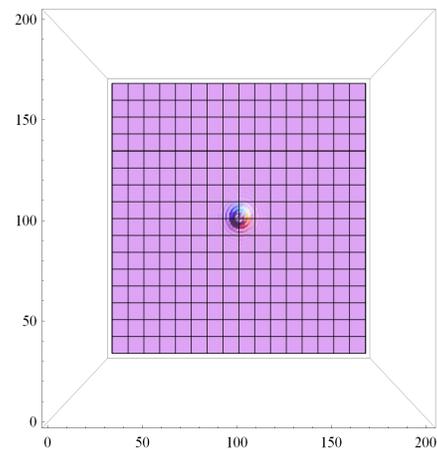


e)  $z=15.0\text{m}$

Figura 5.19: Sigue disminuyendo su tamaño y empieza a elevarse un lóbulo central



d)  $z=20.0\text{m}$



e)  $z=30.0\text{m}$

Figura 5.20: Patron final de difracción para una apertura circular con los conocidos anillos concéntricos

CAPÍTULO 5. MÉTODO DE SIMULACIÓN  
5.1. SIMULACIÓN NUMÉRICA

---

Para la misma apertura por el método de convolución

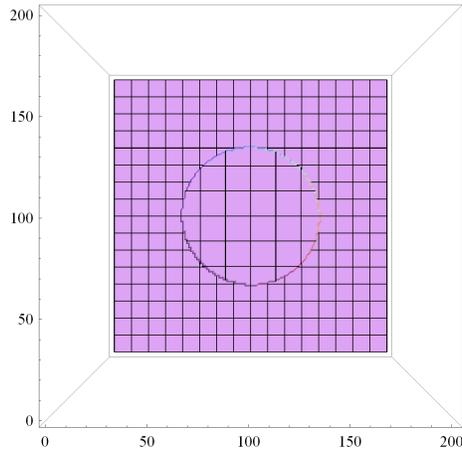
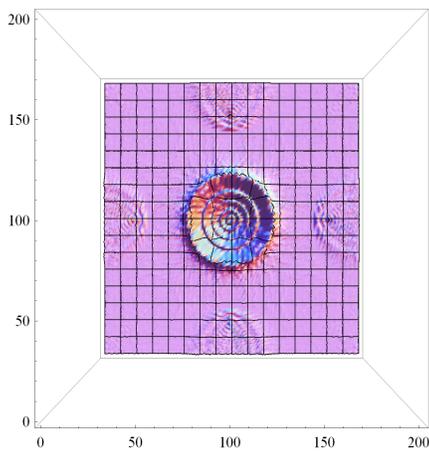
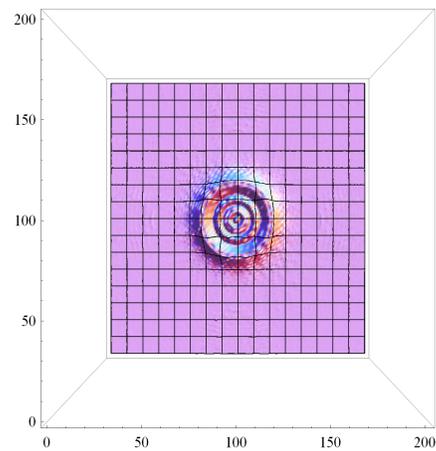


Figura 5.21: apertura inicial



d)  $z=4.0\text{m}$



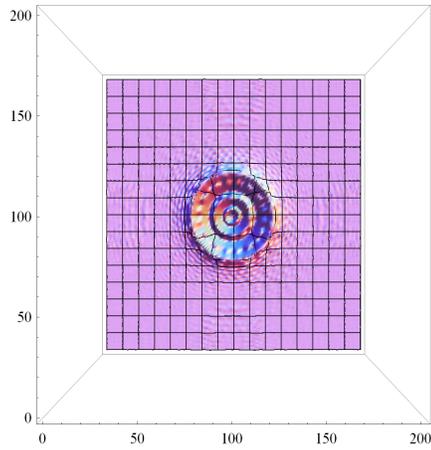
e)  $z=5.5\text{m}$

Figura 5.22: La imagen comienza a evolucionar y es mas pequeña en comparación con el método de Fourier, y por los problemas de escala que se tienen con este método se comienza la evolucion a una distancia alejada de la apertura

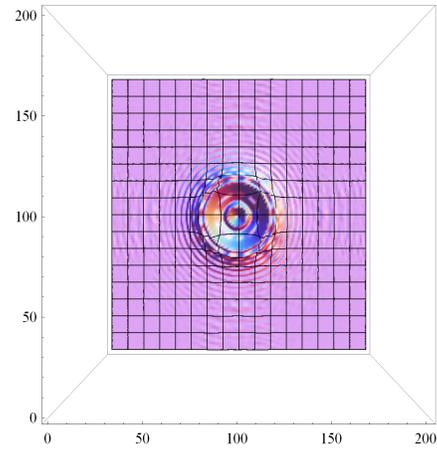
# CAPÍTULO 5. MÉTODO DE SIMULACIÓN

## 5.1. SIMULACIÓN NUMÉRICA

---

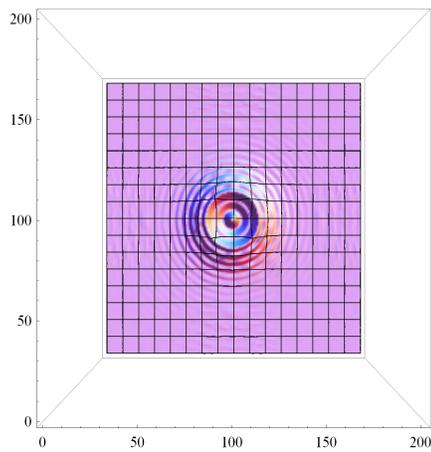


d)  $z=7.2\text{m}$

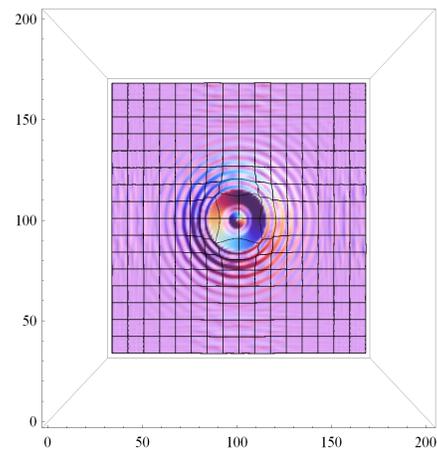


e)  $z=10.0\text{m}$

Figura 5.23: Disminuyen el número de círculos internos y empiezan a formarse círculos alrededor de la imagen central



d)  $z=12.5\text{m}$

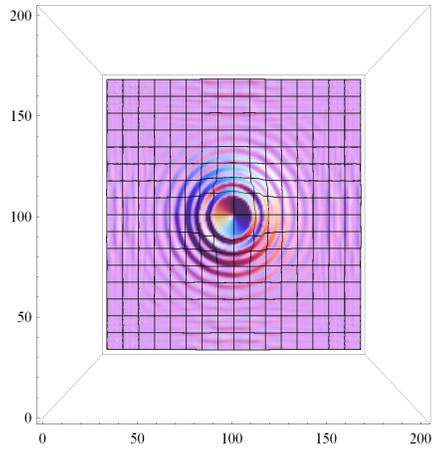


e)  $z=16.0\text{m}$

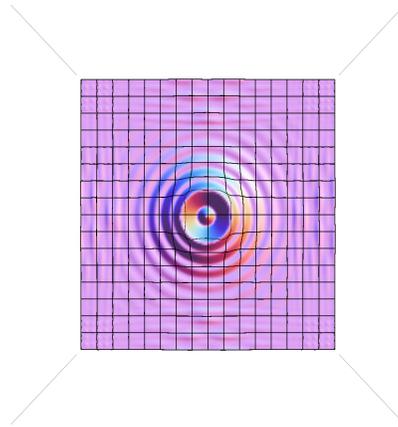
Figura 5.24: Se empieza a elevar un lóbulo central y se definen mejor los círculos concentricos dentro de la imagen

CAPÍTULO 5. MÉTODO DE SIMULACIÓN  
5.1. SIMULACIÓN NUMÉRICA

---

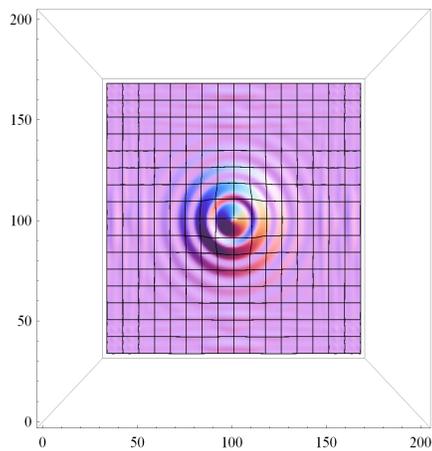


d)  $z=20.0\text{m}$

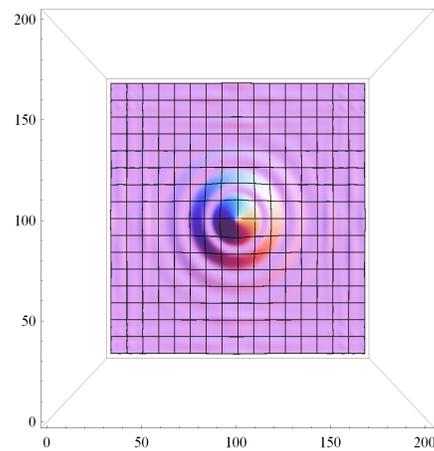


e)  $z=25.0\text{m}$

Figura 5.25: Se reconoce un patrón de difracción circular



d)  $z=30.0\text{m}$



e)  $z=40.0\text{m}$

Figura 5.26: Patrón final de difracción circular

## 5.2. Simulación numérica de recuperación de fase y amplitud

Para el algoritmo iterativo, se utiliza la versión de reducción de error tipo Gerchberg Saxton.

Por medio de este algoritmo se pretende encontrar la fase en el plano de difracción así como la amplitud en el plano objeto de un patrón de difracción, capturado, para ello se contará con ayuda de dos restricciones que harán converger el algoritmo a los resultados deseados.

En este caso, las restricciones serán la amplitud del objeto propagado en el plano de difracción y la fase de la pupila en el plano del objeto. El objeto inicial utilizado en el algoritmo es la intensidad capturada de la pupila difractada a una distancia  $z$ .

### Descripción del Método

Se genera un patrón de difracción a una distancia  $z$  del plano objeto. Para las simulaciones, el campo del objeto es propagado libremente del plano objeto hasta el plano de difracción o pantalla.

De la intensidad capturada del patrón de difracción se toma la amplitud y se normaliza.

Se propone una fase cuadrática de la siguiente manera

$$e^{ik\eta^2+k\xi^2} \tag{5.7}$$

La fase propuesta es agregada a la amplitud normalizada del patrón de difracción

Después se retro-propaga una distancia  $-z$  por medio de la integral de Fresnel para poder encontrar la intensidad en el plano objeto.

Posteriormente en el plano objeto se toma solo la amplitud normalizada y se le asigna una fase cero. Con estas propiedades se propaga de nuevo una distancia  $z$  hasta el plano de difracción.

En el plano de difracción se toma solo la fase de la propagación y se le asigna la fase propuesta así como la amplitud normalizada del primer patrón de difracción capturado.

CAPÍTULO 5, MÉTODO DE SIMULACIÓN  
5.2. SIMULACIÓN NUMÉRICA DE RECUPERACIÓN DE FASE Y AMPLITUD

Este ciclo se repite continuamente hasta que es posible observar en el plano objeto una amplitud correspondiente a una apertura conocida y en el plano de difracción la fase de la misma apertura.

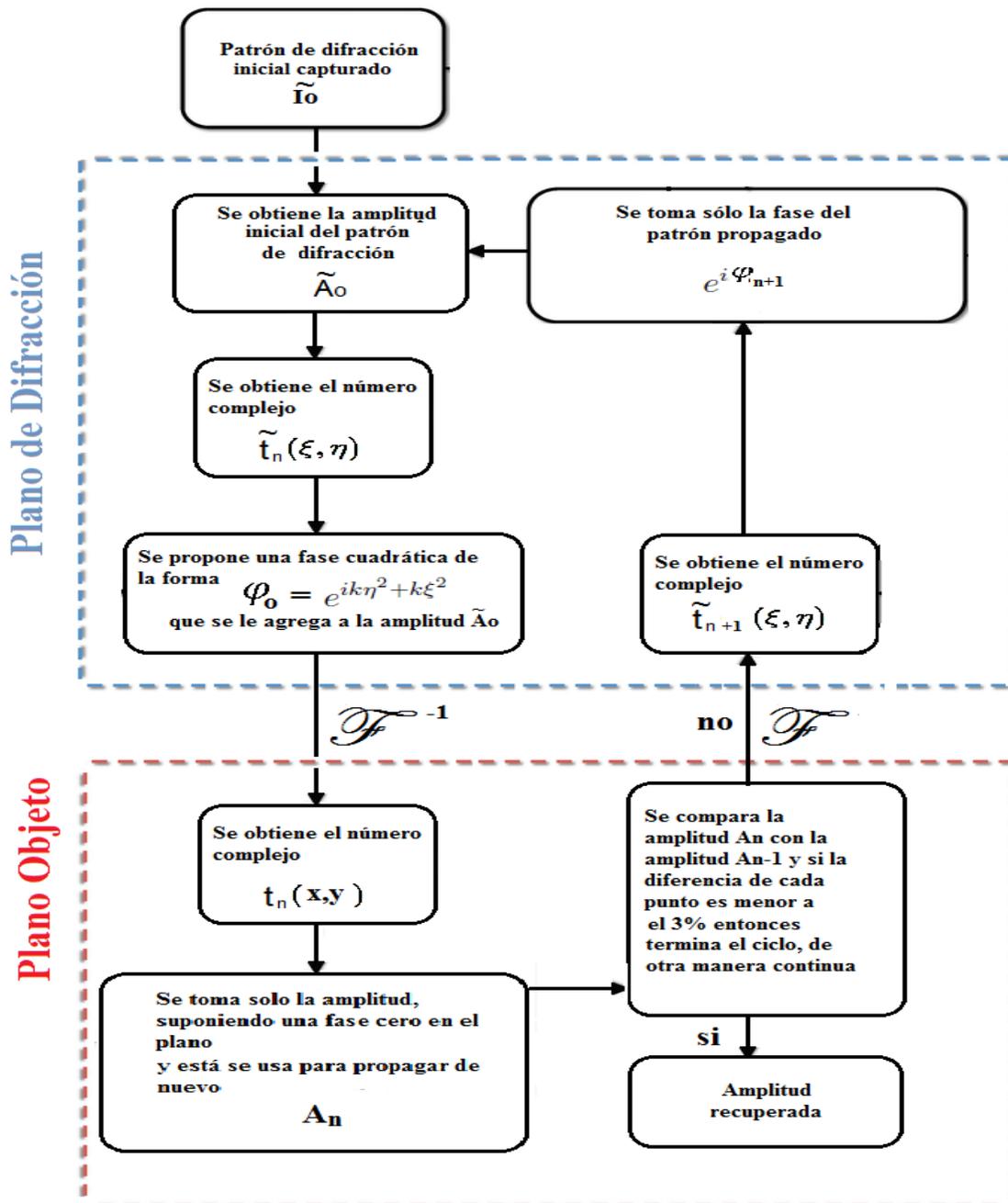


Figura 5.27: Diagrama de bloques del algoritmo propuesto

CAPÍTULO 5, MÉTODO DE SIMULACIÓN  
5.2. SIMULACIÓN NUMÉRICA DE RECUPERACIÓN DE FASE Y AMPLITUD

---

A partir de 200 iteraciones es posible reconocer la forma de la apertura al principio desconocida, después de 900 iteraciones es claramente visible tanto la fase como la amplitud buscada, para mayor numero de ciclos no mejora significativamente la imagen.

Se realizó esta simulación para patrones de difracción y a continuación se muestran los resultados.

### Apertura cuadrada

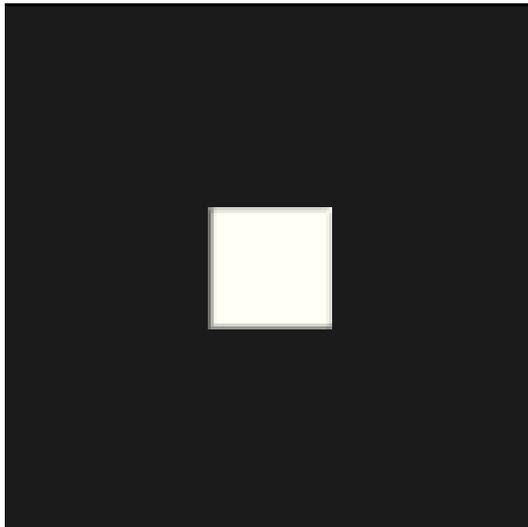
Los parámetros utilizados para esta simulación son los siguientes:

Longitud de onda  $632,8\eta m$

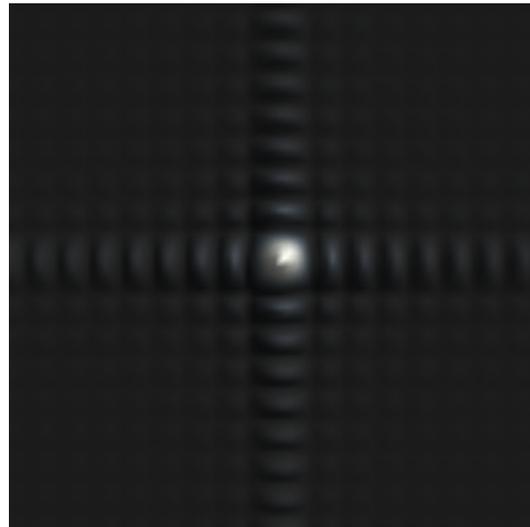
Apertura de  $5mm$  por lado

Distancia  $1,2m$

Se partió de el siguiente patrón de difracción generado por la apertura mostrada



a) Abertura original



b) Patrón de difracción inicial

Figura 5.28:

## CAPÍTULO 5. MÉTODO DE SIMULACIÓN

### 5.2. SIMULACIÓN NUMÉRICA DE RECUPERACIÓN DE FASE Y AMPLITUD

---

Se aplico el algoritmo una sola vez y se obtuvo la siguiente amplitud en el plano del objeto y la fase en el plano de difracción

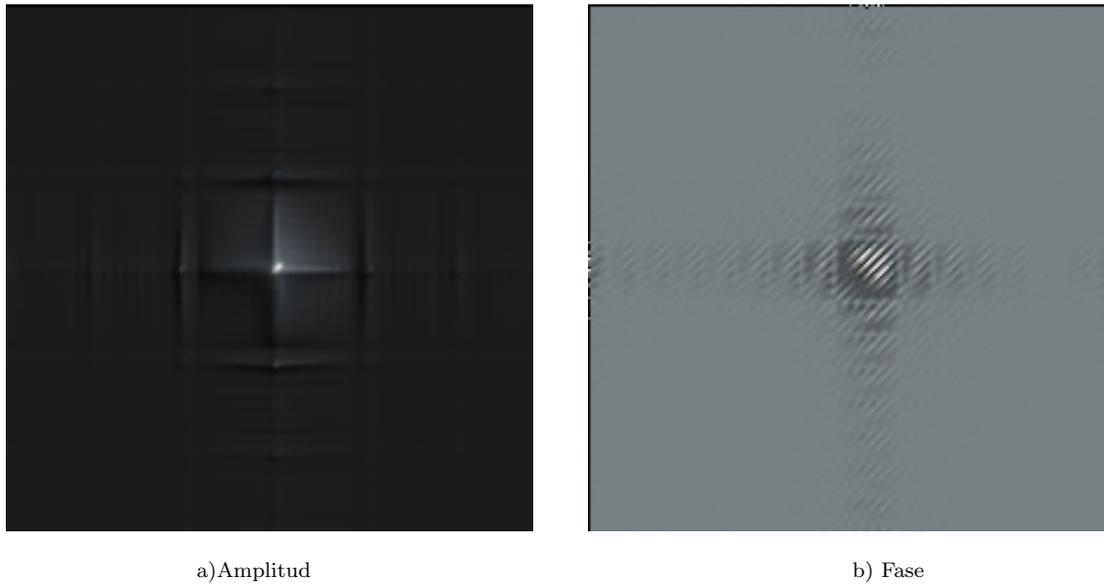


Figura 5.29: Patrones recuperados después de 1 ciclo para la apertura cuadrada

En las primeras iteraciones se distingue como la amplitud se divide y se forman franjas y empieza a disminuir su tamaño, la fase es bastante similar al patrón de difracción inicial.

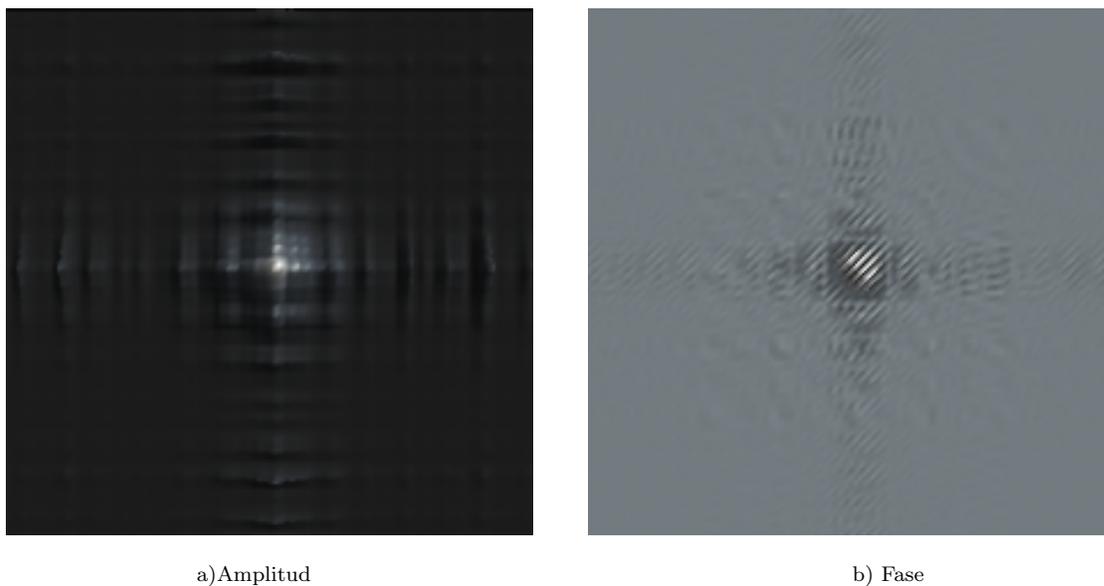


Figura 5.30: Patrones recuperados después de 7 ciclos



**CAPÍTULO 5. MÉTODO DE SIMULACIÓN**  
5.2. SIMULACIÓN NUMÉRICA DE RECUPERACIÓN DE FASE Y AMPLITUD

---

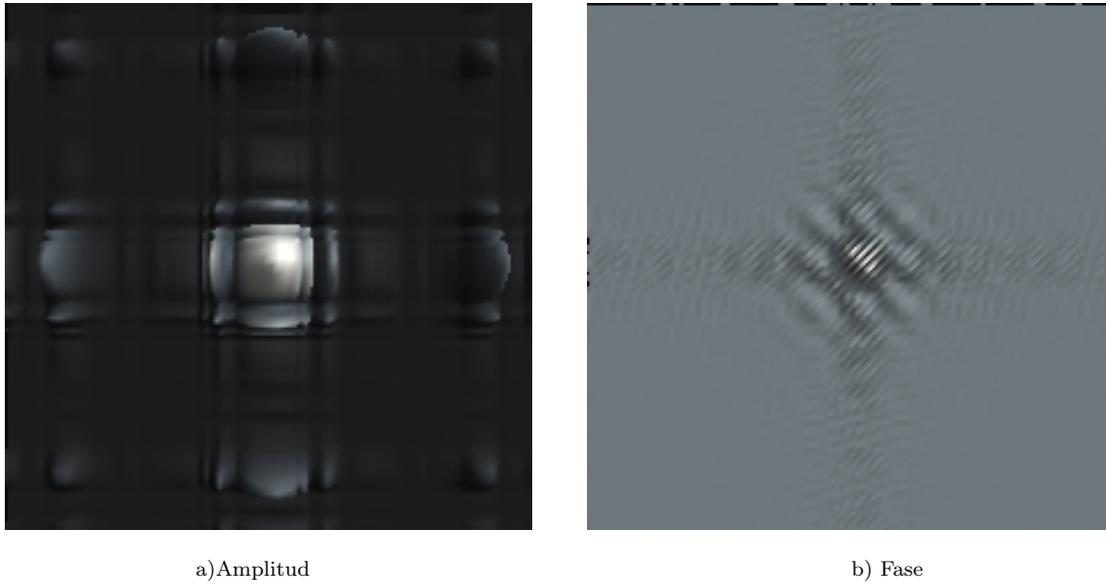


Figura 5.33: Patrones recuperados después de 85 ciclos

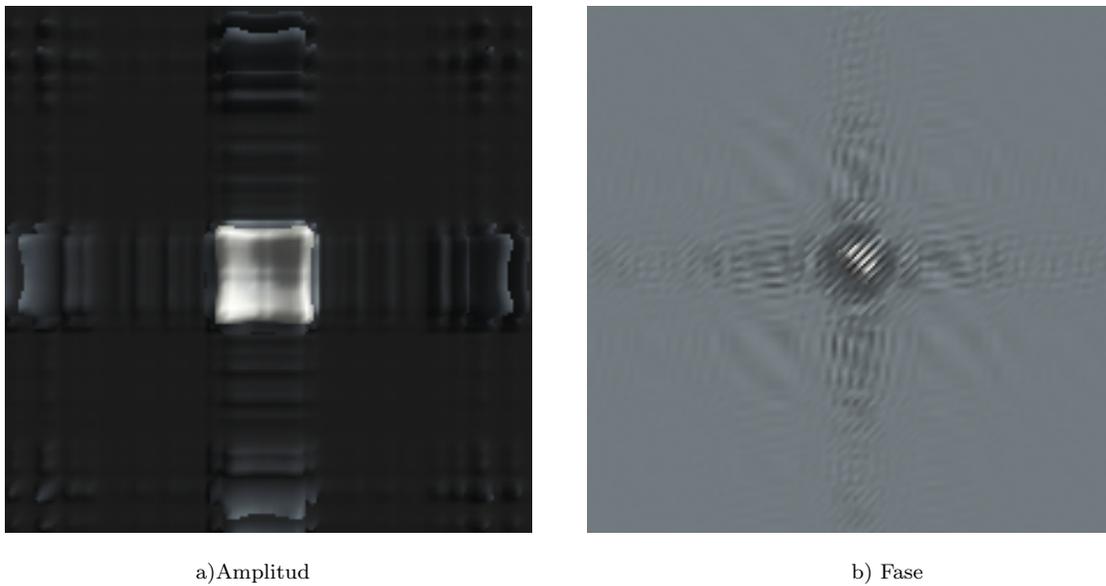


Figura 5.34: Patrones recuperados después de 200 ciclos, Ya se reconce una apertura cuadrada

**CAPÍTULO 5, MÉTODO DE SIMULACIÓN**  
5.2. SIMULACIÓN NUMÉRICA DE RECUPERACIÓN DE FASE Y AMPLITUD

---

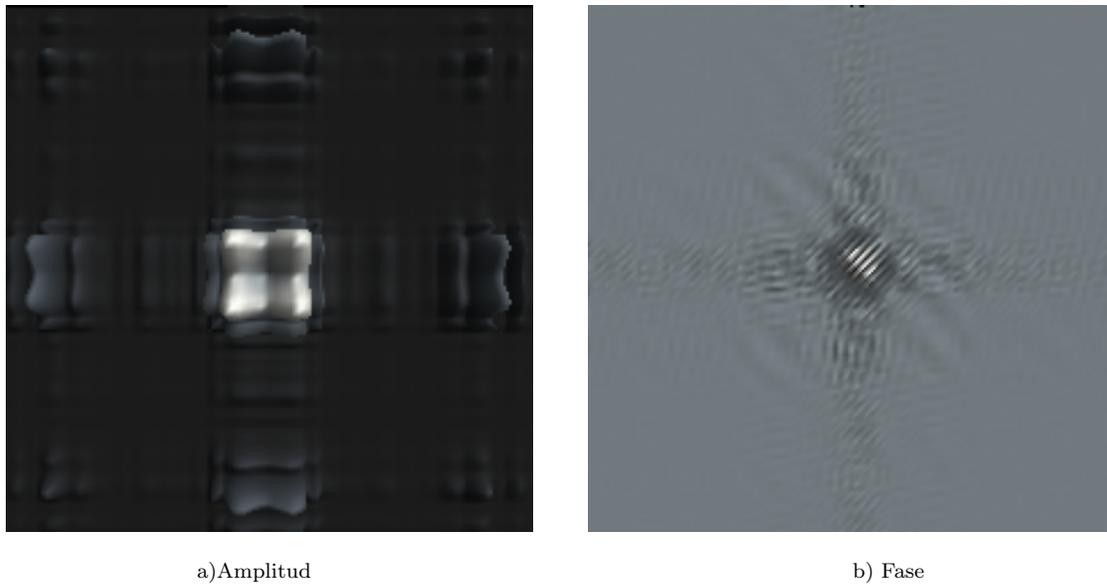


Figura 5.35: Patrones recuperados después de 450 ciclos, se divide el lóbulo central en cuatro

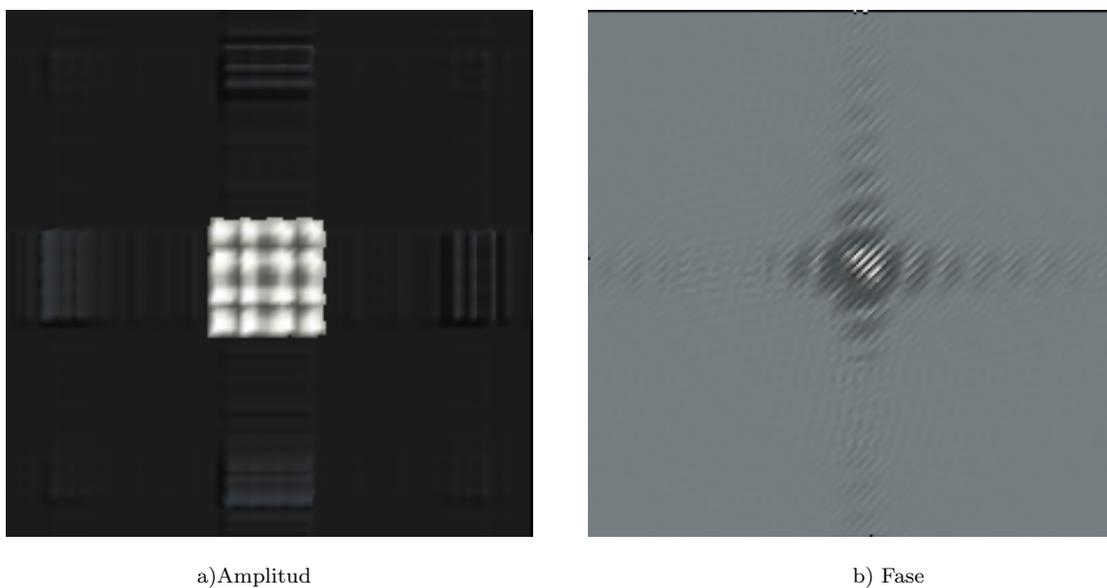


Figura 5.36: Patrones recuperados después de 600 ciclos, reconocible apertura recuperada con pequeñas discrepancias



CAPÍTULO 5, MÉTODO DE SIMULACIÓN  
5.2. SIMULACIÓN NUMÉRICA DE RECUPERACIÓN DE FASE Y AMPLITUD

---

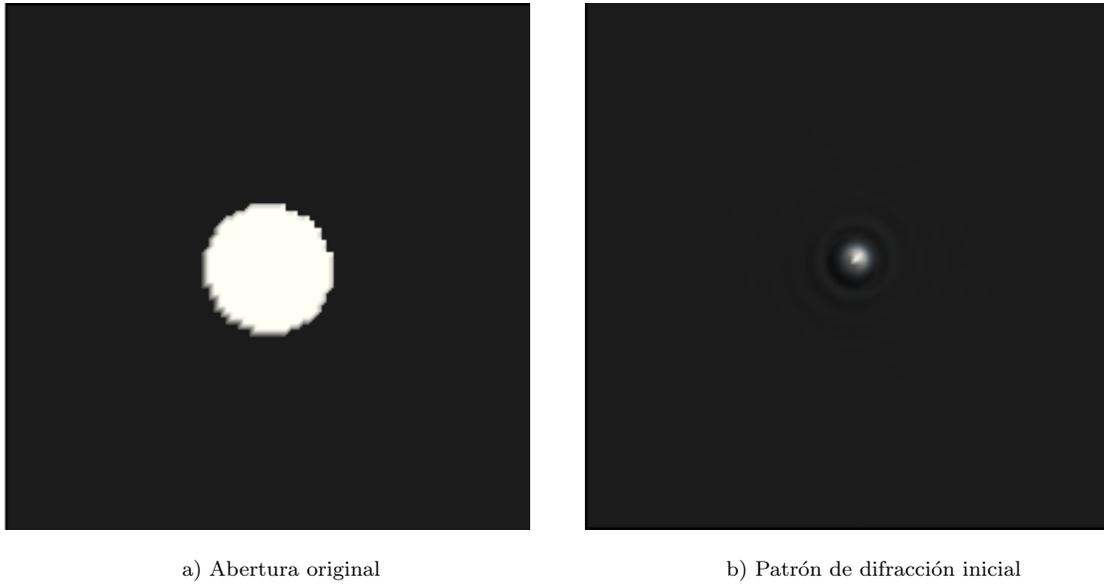


Figura 5.38:

Se aplico el algoritmo una sola vez y se obtuvo la siguiente amplitud en el plano del objeto y la fase en el plano de difracción

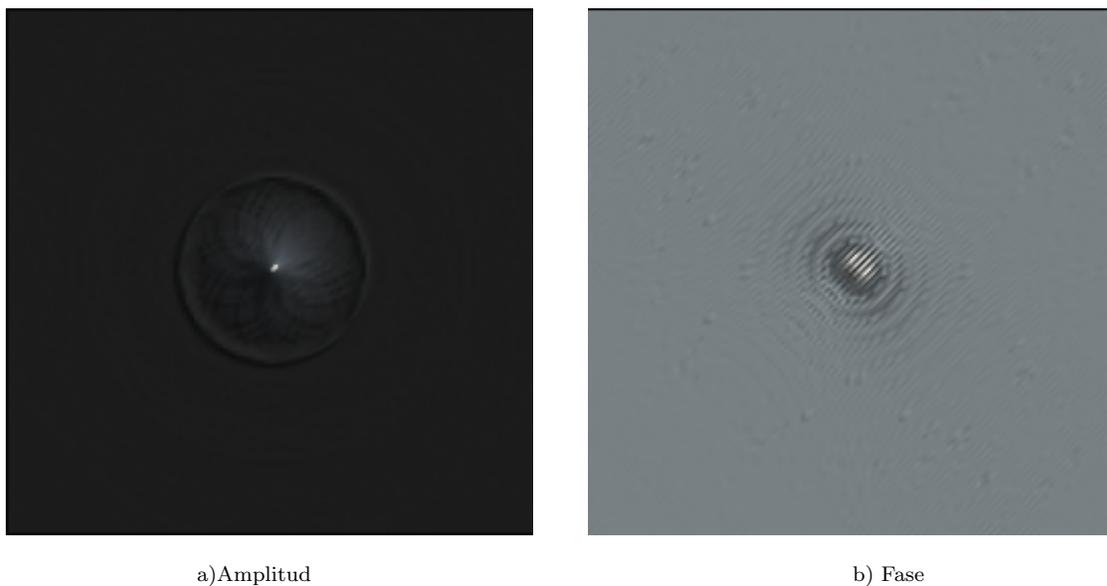
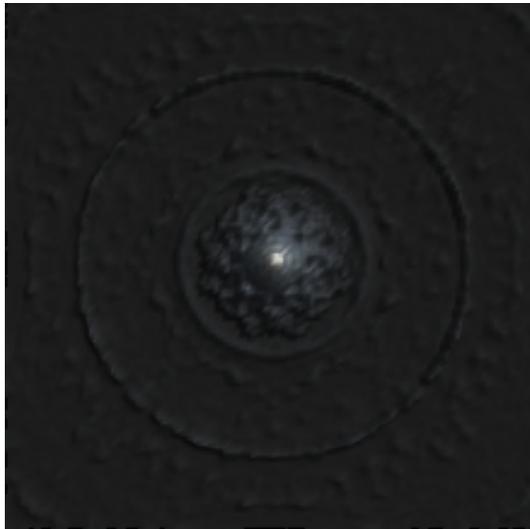


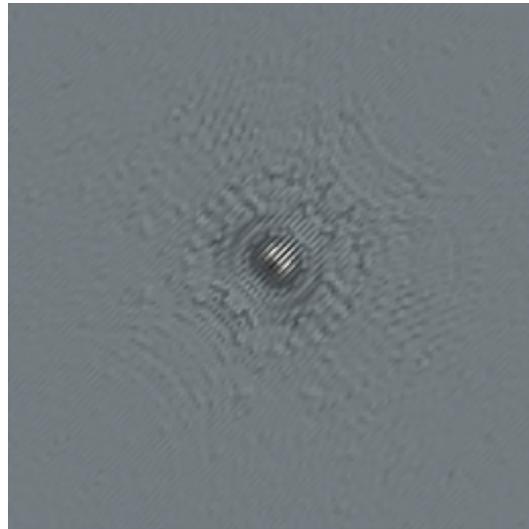
Figura 5.39: Patrones recuperados después de 1 ciclo para la apertura circular

CAPÍTULO 5. MÉTODO DE SIMULACIÓN  
5.2. SIMULACIÓN NUMÉRICA DE RECUPERACIÓN DE FASE Y AMPLITUD

---

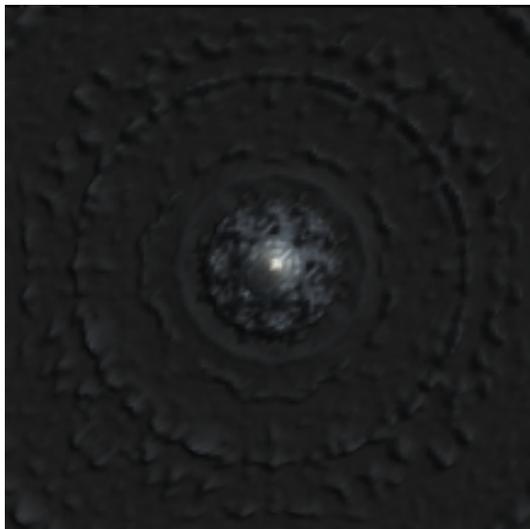


a) Amplitud

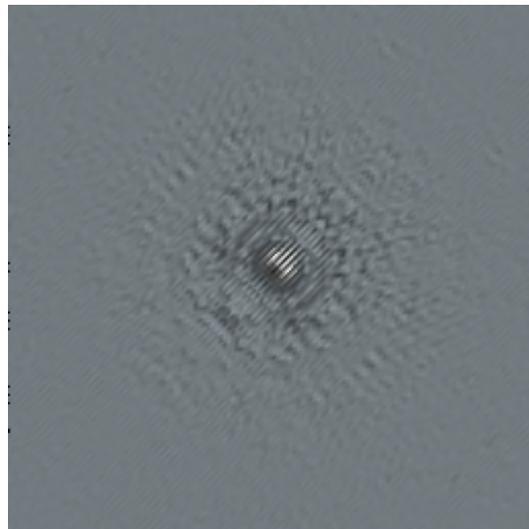


b) Fase

Figura 5.40: Patrones recuperados después de 10 ciclos



a) Amplitud

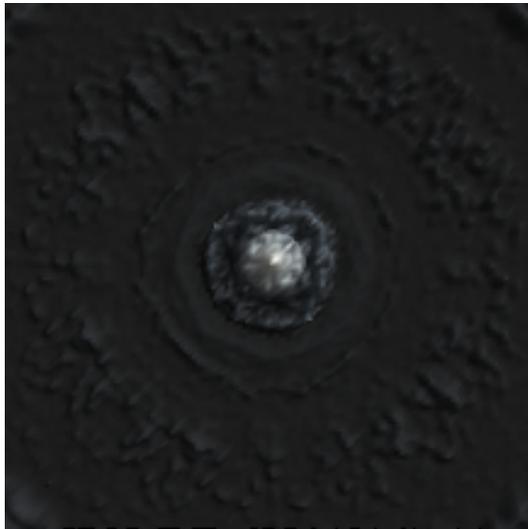


b) Fase

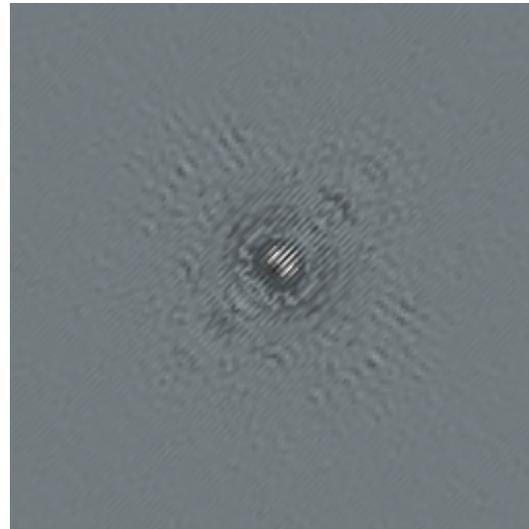
Figura 5.41: Patrones recuperados después de 25 ciclos, se notan deformaciones en la amplitud

**CAPÍTULO 5. MÉTODO DE SIMULACIÓN**  
5.2. SIMULACIÓN NUMÉRICA DE RECUPERACIÓN DE FASE Y AMPLITUD

---

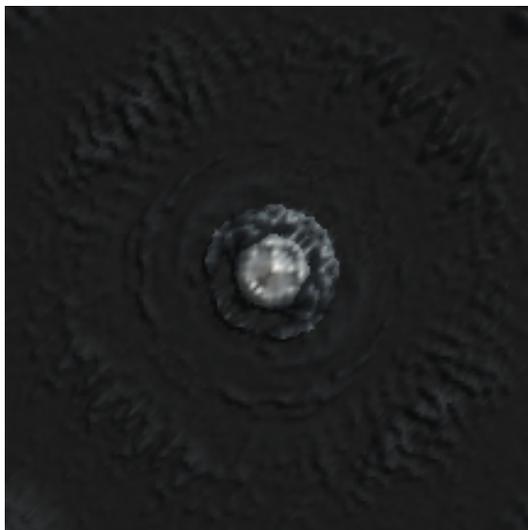


a) Amplitud

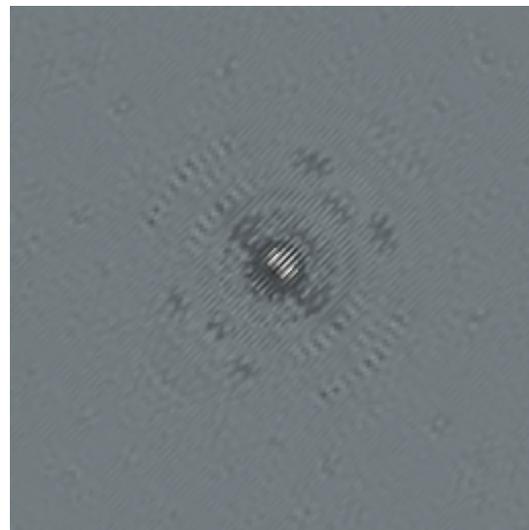


b) Fase

Figura 5.42: Patrones recuperados después de 50 ciclos, se reconoce un lóbulo central circular



a) Amplitud

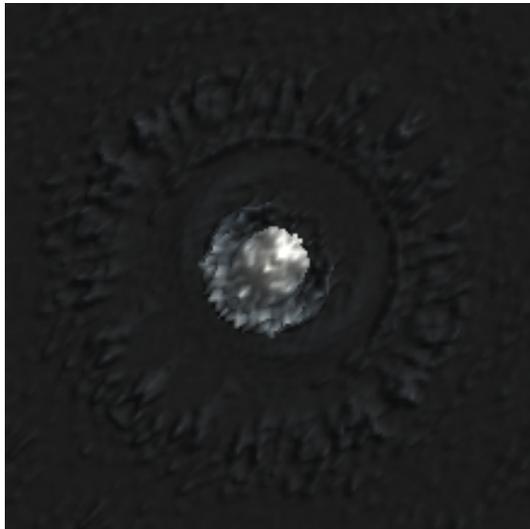


b) Fase

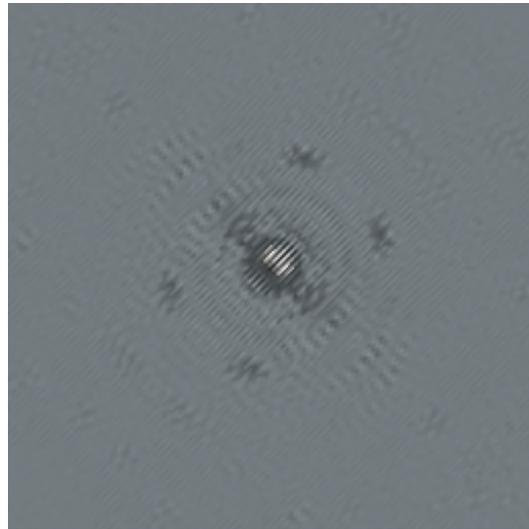
Figura 5.43: Patrones recuperados después de 100 ciclos

**CAPÍTULO 5. MÉTODO DE SIMULACIÓN**  
5.2. SIMULACIÓN NUMÉRICA DE RECUPERACIÓN DE FASE Y AMPLITUD

---

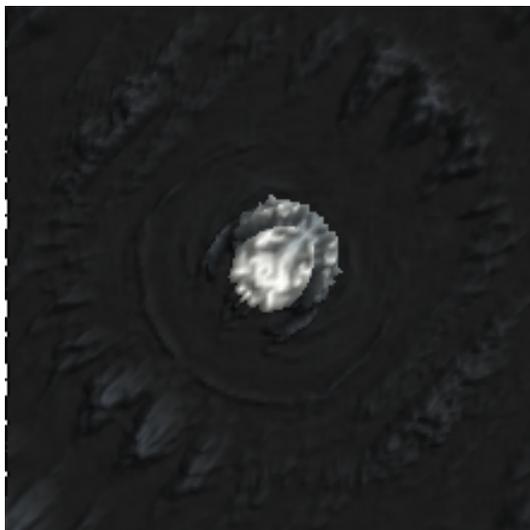


a) Amplitud

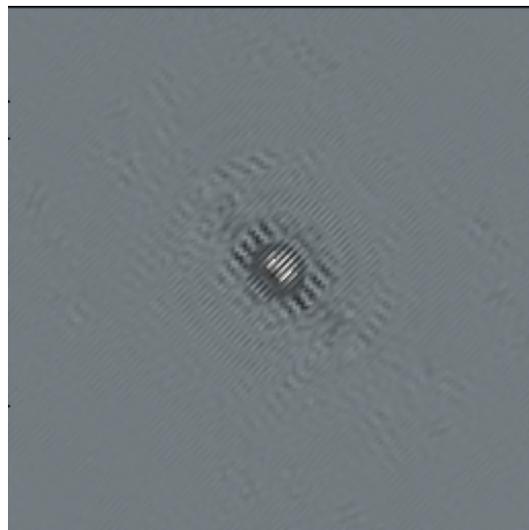


b) Fase

Figura 5.44: Patrones recuperados después de 160 ciclos



a) Amplitud

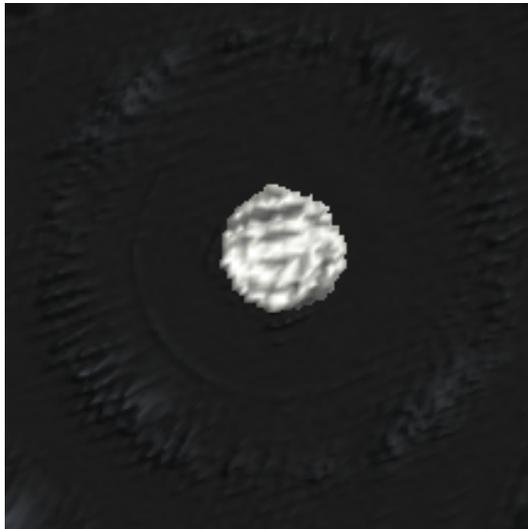


b) Fase

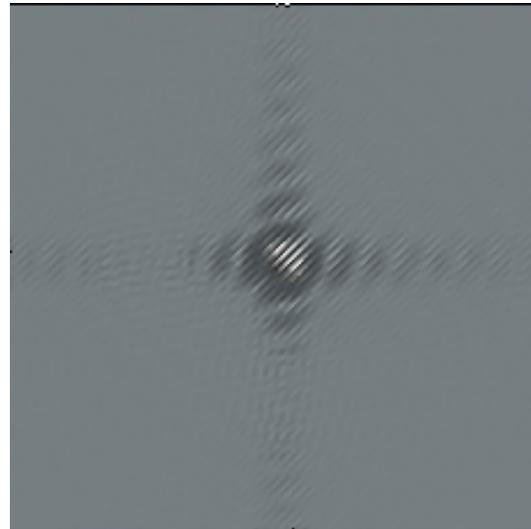
Figura 5.45: Patrones recuperados después de 250 ciclos

**CAPÍTULO 5. MÉTODO DE SIMULACIÓN**  
5.2. SIMULACIÓN NUMÉRICA DE RECUPERACIÓN DE FASE Y AMPLITUD

---



a) Amplitud

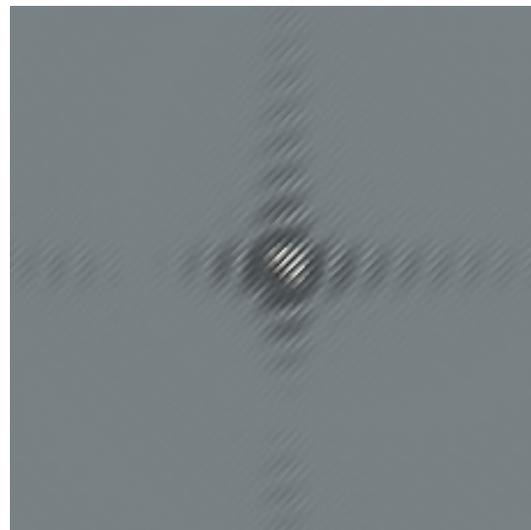


b) Fase

Figura 5.46: Patrones recuperados después de 600 ciclos



a) Amplitud



b) Fase

Figura 5.47: Patrones finales recuperados después de 900 ciclos

CAPÍTULO 5, MÉTODO DE SIMULACIÓN  
5.2. SIMULACIÓN NUMÉRICA DE RECUPERACIÓN DE FASE Y AMPLITUD

---

Para una apertura estrella de cuatro picos

Se partió de el siguiente patrón de difracción

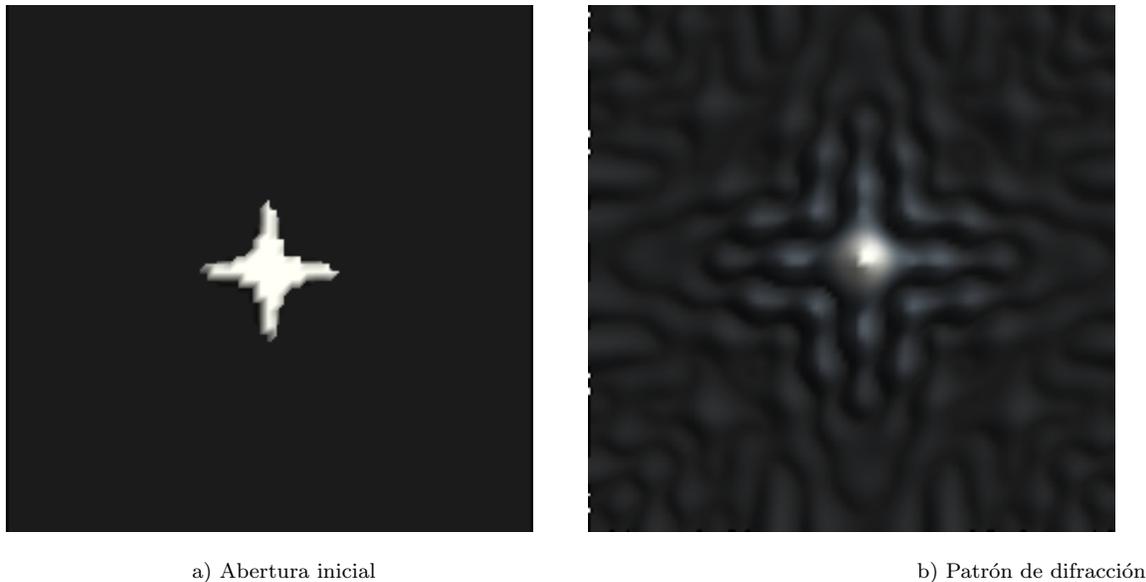


Figura 5.48: Patrón de difracción inicial generado por la apertura mostrada

Se aplico el algoritmo una sola vez y se obtuvo la siguiente amplitud en el plano del objeto y la fase en el plano de difracción

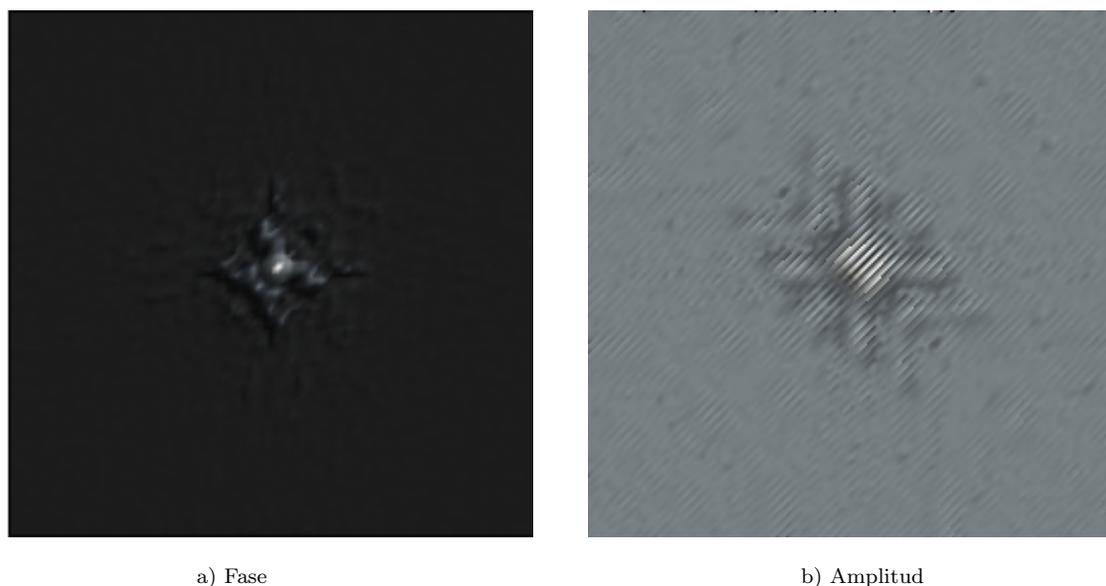


Figura 5.49: Patrones recuperados después de 50 ciclos

CAPÍTULO 5, MÉTODO DE SIMULACIÓN  
5.2. SIMULACIÓN NUMÉRICA DE RECUPERACIÓN DE FASE Y AMPLITUD

---

En las primeras iteraciones se distingue como la amplitud se divide y se forman franjas y empieza a disminuir su tamaño, la fase es bastante similar al patrón de difracción inicial.

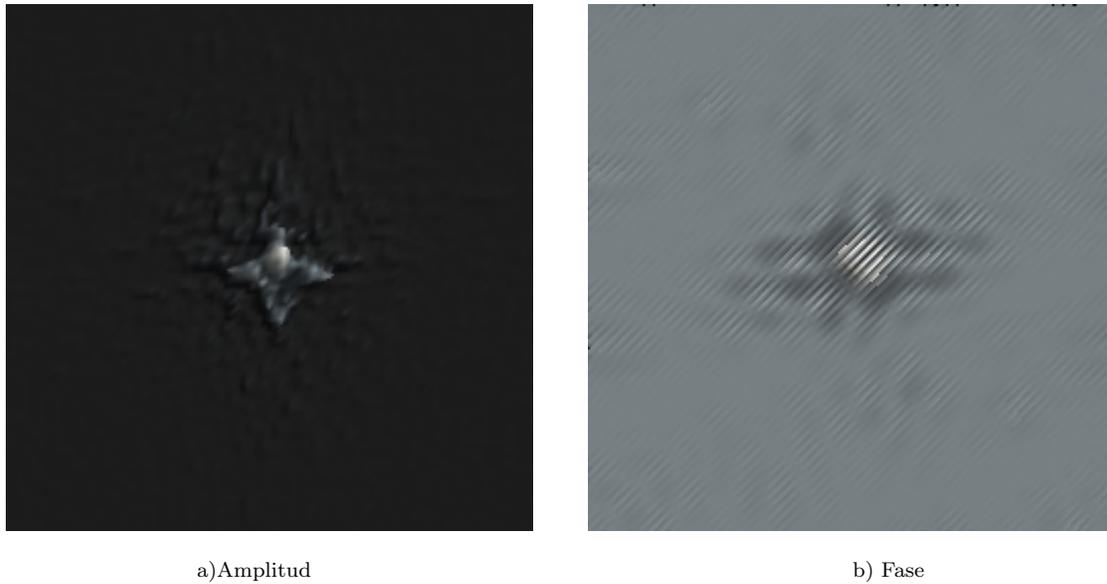


Figura 5.50: Patrones recuperados después de 200 ciclos

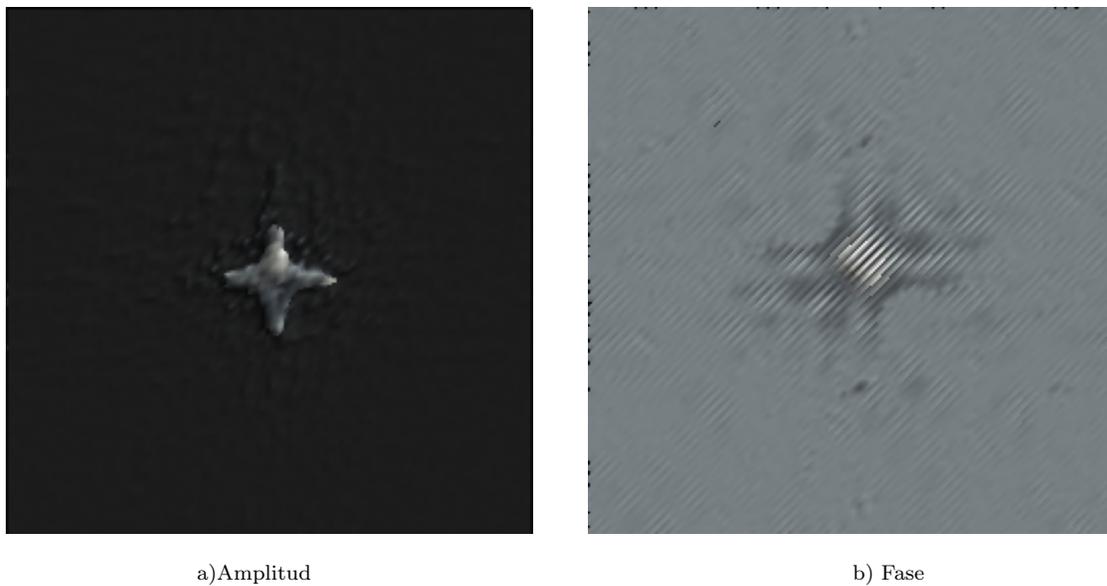


Figura 5.51: Patrones recuperados después de 250 ciclos

**CAPÍTULO 5, MÉTODO DE SIMULACIÓN**  
5.2. SIMULACIÓN NUMÉRICA DE RECUPERACIÓN DE FASE Y AMPLITUD

---

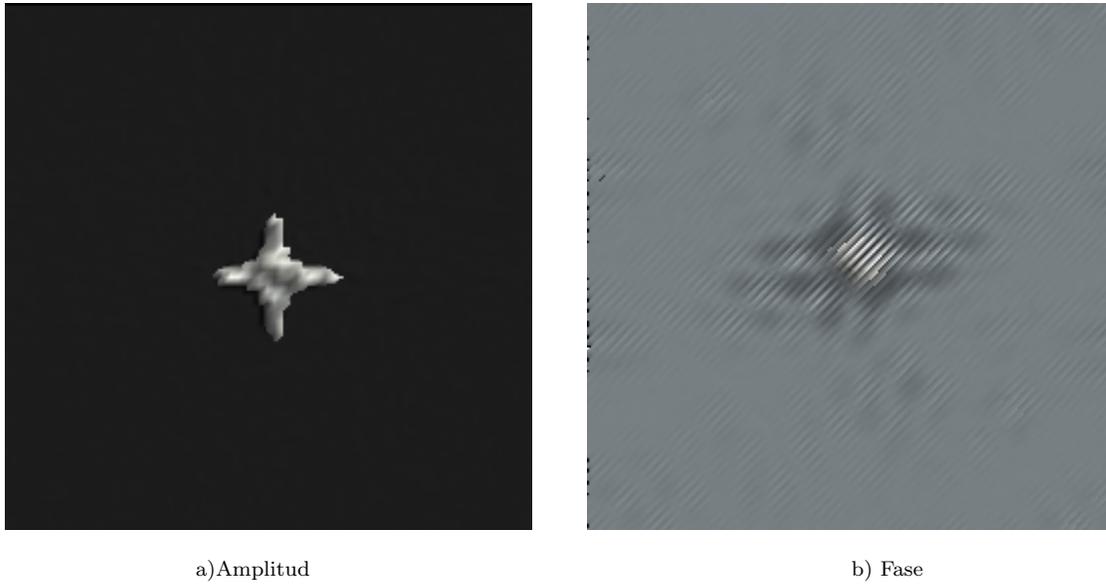


Figura 5.52: Patrones recuperados después de 500 ciclos

Para 200 ciclos empieza a ser reconocible la forma de la apertura

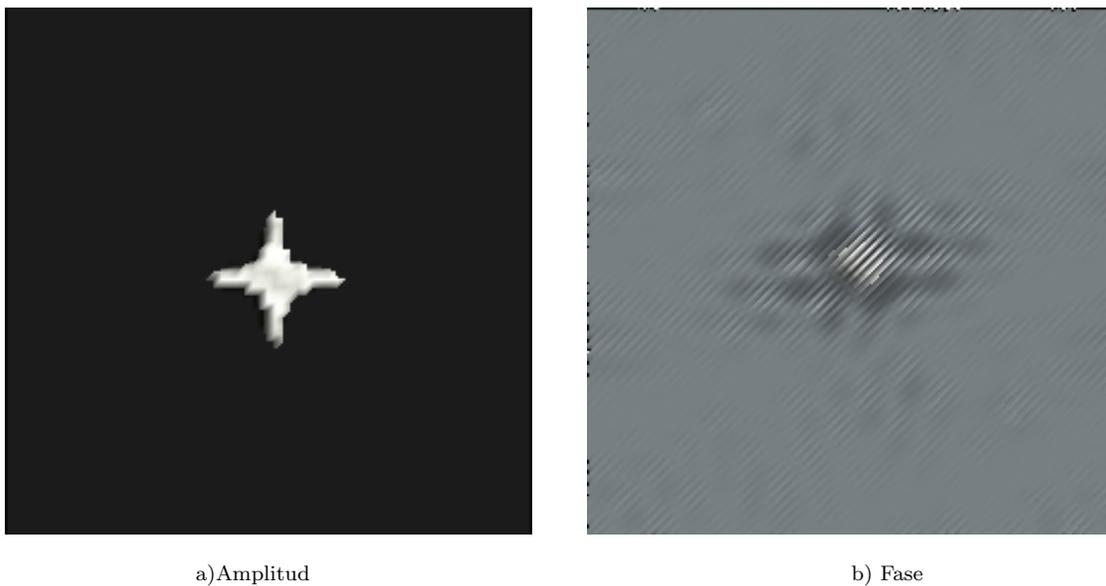


Figura 5.53: Patrones finales recuperados después de 900 ciclos

Apertura en forma de rombo

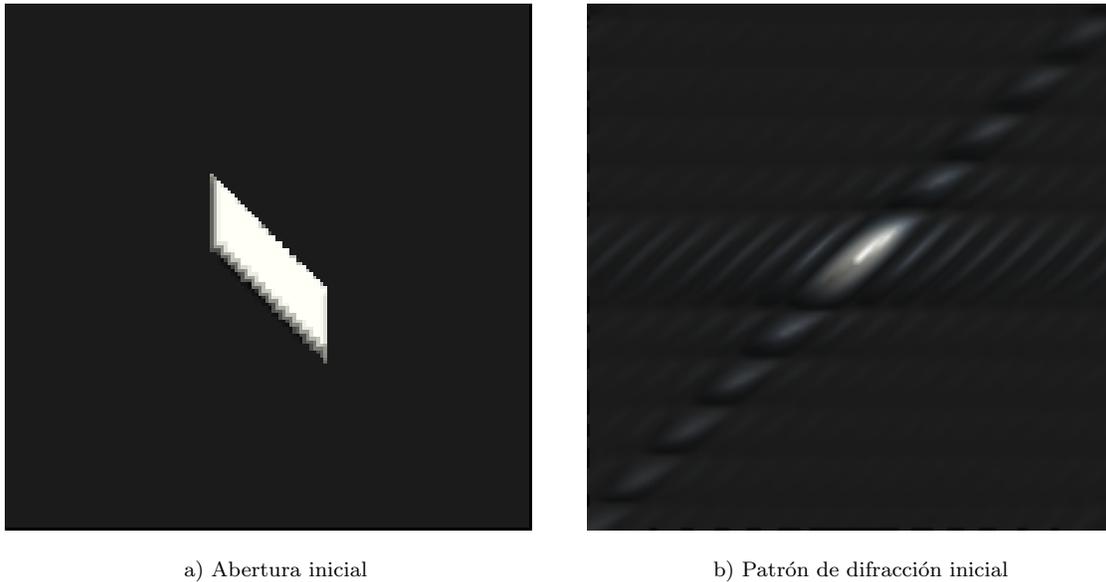


Figura 5.54: Patrones iniciales

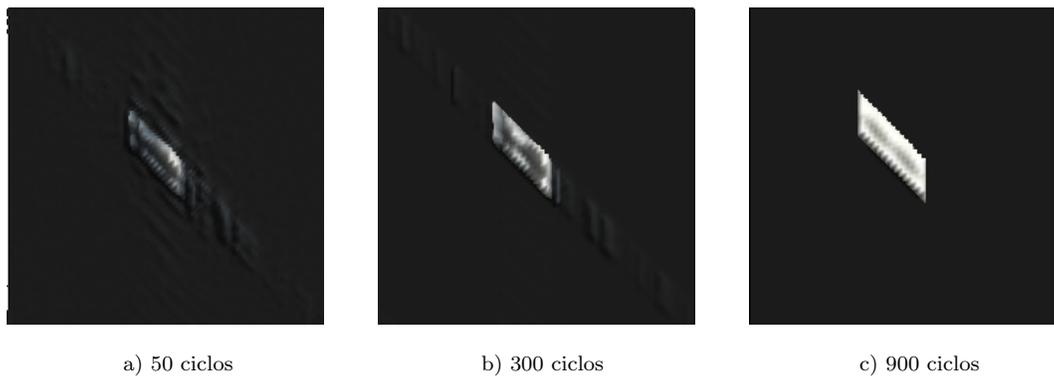


Figura 5.55: Patrones finales recuperados después de 900 ciclos

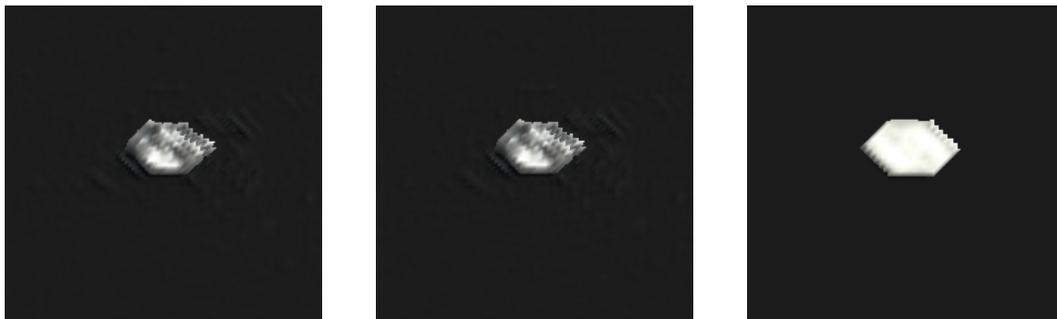
Apertura de hexágono



a) Abertura inicial

b) Patrón de difracción inicial

Figura 5.56: Patrones iniciales



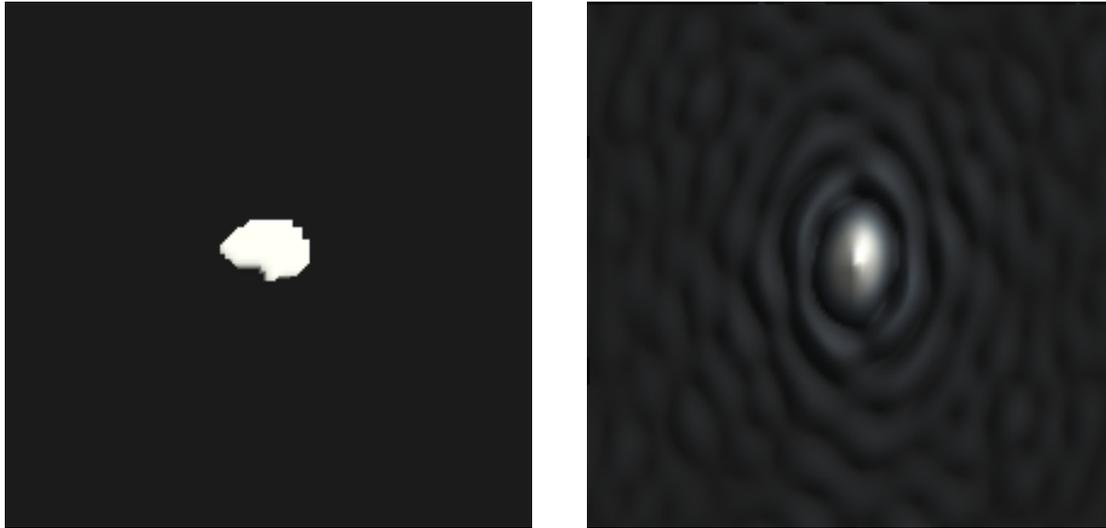
a) 50 ciclos

b) 300 ciclos

c) 900 ciclos

Figura 5.57: Patrones finales recuperados después de 900 ciclos

Apertura arbitraria



a) Abertura inicial

b) Patrón de difracción inicial

Figura 5.58: Patrones iniciales



a) 50 ciclos

b) 600 ciclos

c) 1500 ciclos

Figura 5.59: Patrones finales recuperados

### Comparación en reconstrucciones de amplitud

Para el cuadrado

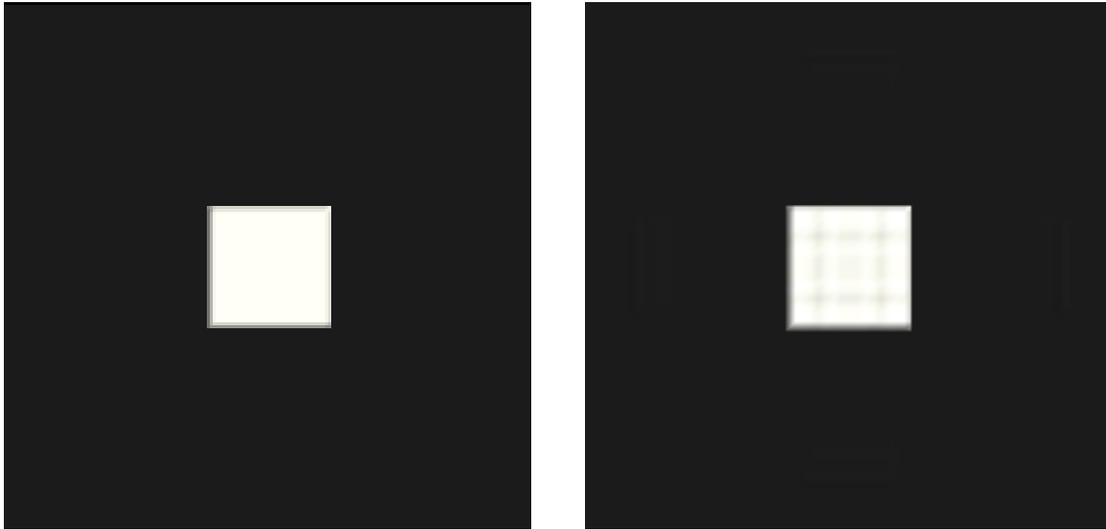


Figura 5.60: Comparación de la amplitud recuperada y la amplitud inicial para una apertura rectangular.

Para el círculo



Figura 5.61: Comparación de la amplitud recuperada y la amplitud inicial para un círculo.

Para la estrella

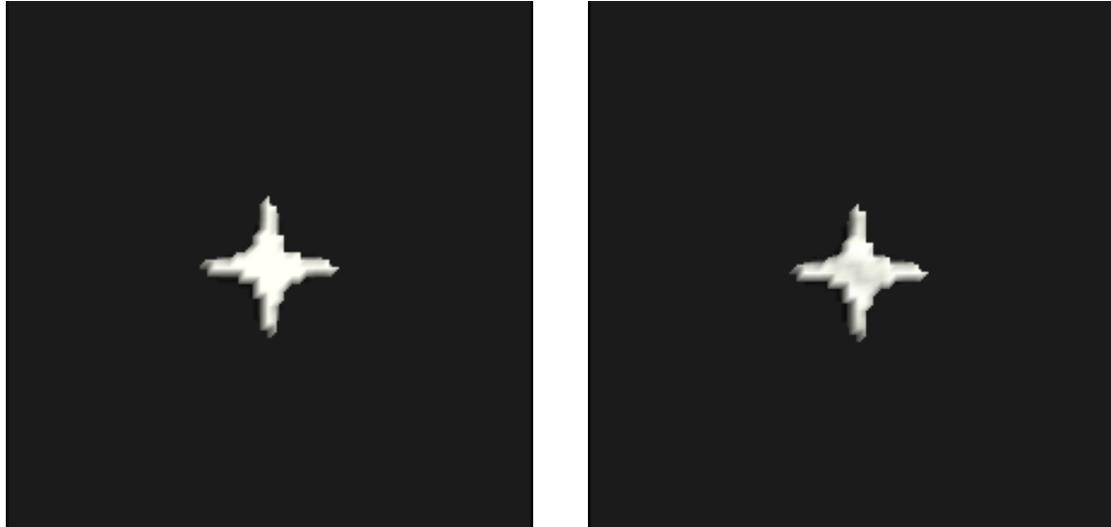


Figura 5.62: Comparación de la amplitud recuperada y la amplitud inicial.

## Capítulo 6

# Resultados experimentales

Usando un láser, que tiene muy pequeña divergencia angular se puede observar el fenómeno de difracción, sólo con insertar una abertura en la trayectoria del rayo y colocando una pantalla a distancia. Para mostrar mejor estos efectos, es conveniente colimar el haz, para lo cual se utiliza una lente convergente. Se coloca en la parte anterior a la abertura en el plano objeto, tal como se muestra en la Fig. (6.1).

Se hace incidir un haz de láser monocromático de  $633nm$  en una lente convergente hasta que el haz tenga el mismo tamaño es decir que no diverja, posteriormente se introduce una pantalla con una abertura simple de anchura  $a$ . Se mide la distancia  $d$  entre el plano de difracción y la rendija con ayuda de un riel *MellesGriot* modelo 07-ORN-007 que está graduado en milímetros, que deben colocarse paralelamente y perpendicular al haz. Además, el haz debe pasar preferiblemente por el centro de la abertura.

El plano de difracción está colocado en la pantalla de la cámara *CCDPixelinkmodeloB741F* de 1024 X 1280 píxeles en resolución, tras la difracción en la rendija, se forma un patrón de interferencia debido a la naturaleza ondulatoria de la luz

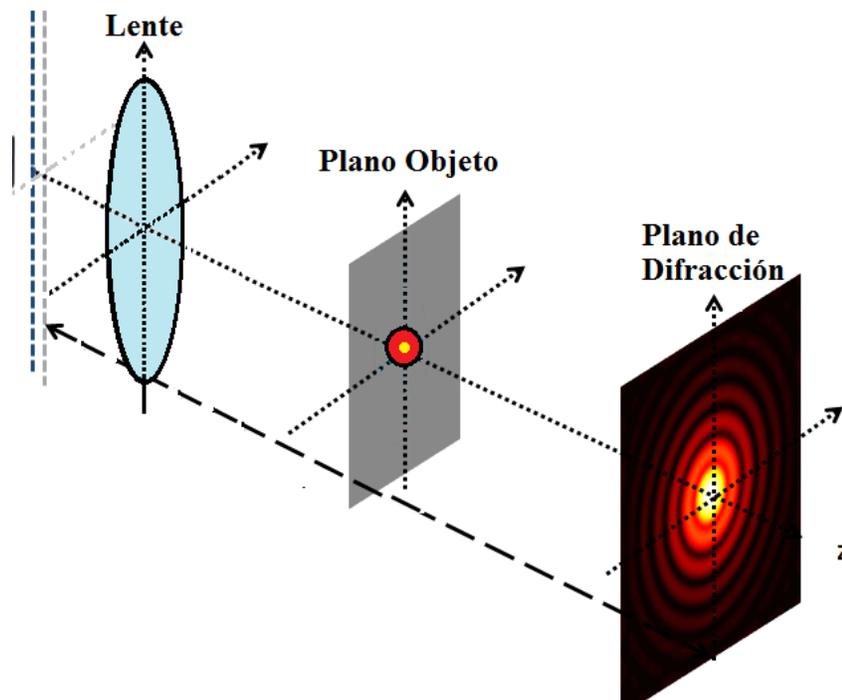


Figura 6.1: Arreglo experimental

### Apertura circular

Los parámetros utilizados para ésta parte experimental son los siguientes:

Longitud de onda  $632,8\eta m$

Apertura aproximada de  $2mm$  de radio

Distancia de difracción  $1,2m$

Se partió del siguiente patrón de difracción

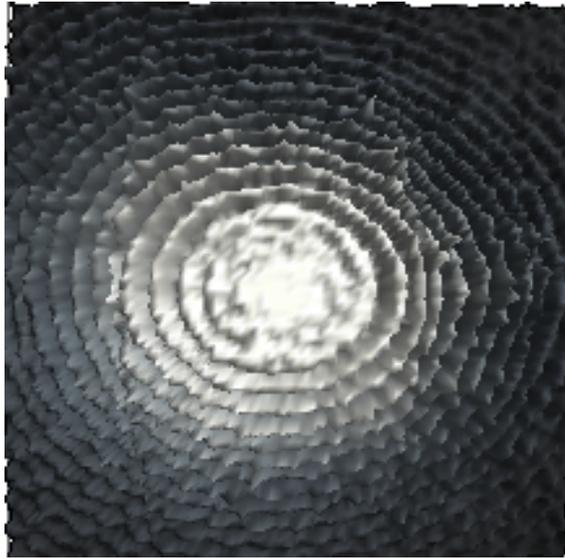


Figura 6.2:  $z=0$ , patrón de difracción de una apertura circular

Después de 1 iteración obtenemos las siguientes imágenes

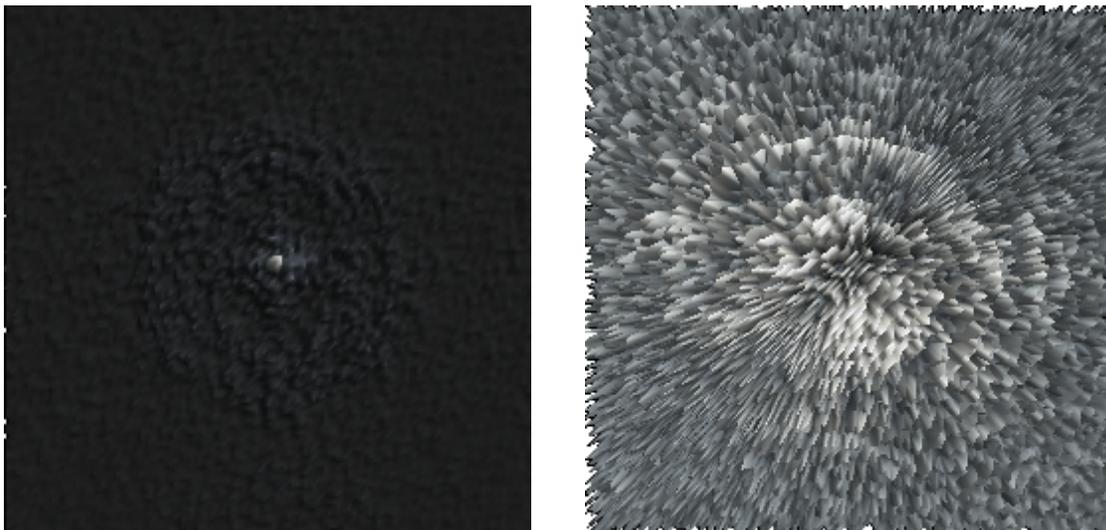


Figura 6.3: Amplitud en el plano objeto con 1 iteracion.

Después de 5 iteraciones

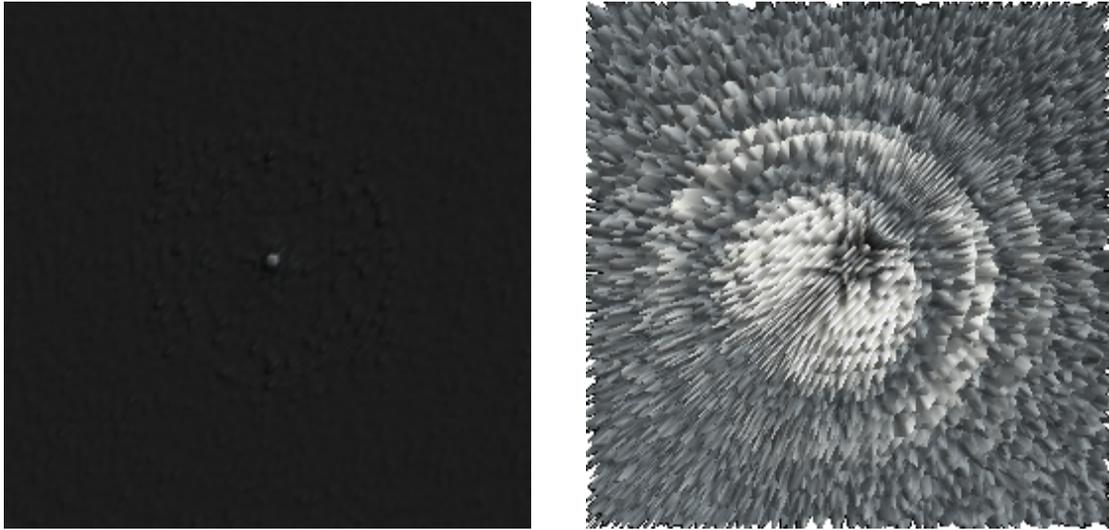


Figura 6.4: Amplitud en el plano objeto con 5 iteraciones y zoom de la misma apertura.

Después de 10 iteraciones

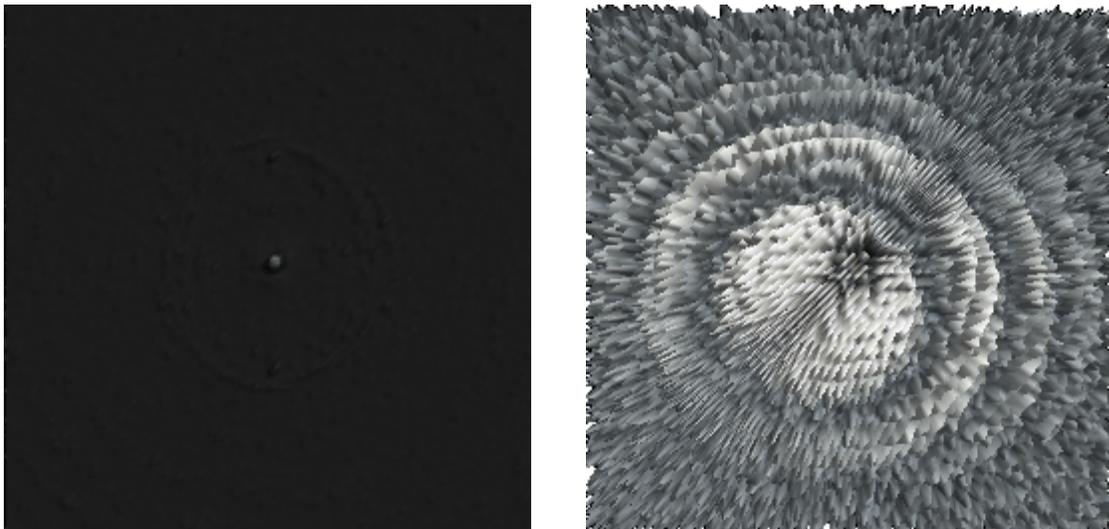


Figura 6.5: Amplitud en el plano objeto con 10 iteraciones y zoom de la misma apertura.

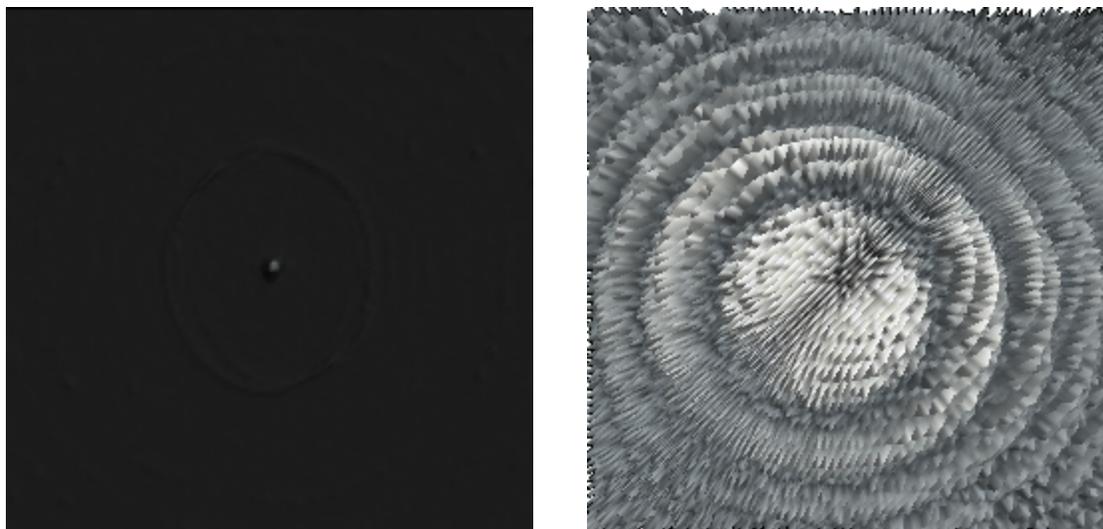


Figura 6.6: Amplitud en el plano objeto con 50 iteraciones y zoom de la misma apertura.

Después de 150 iteraciones

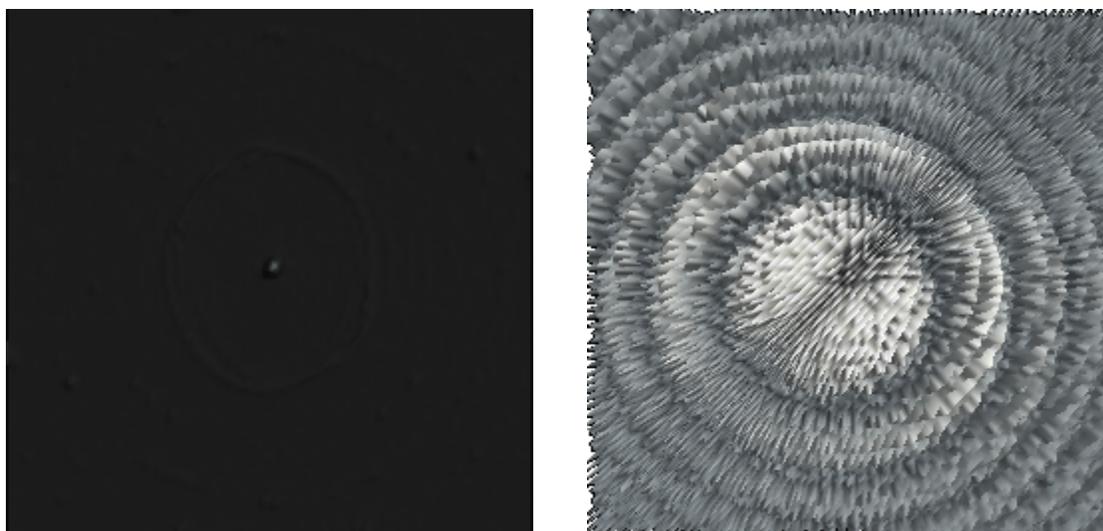


Figura 6.7: Amplitud en el plano objeto con 150 iteraciones y zoom de la misma apertura.

### Apertura cuadrada

Se partió del siguiente patrón de difracción

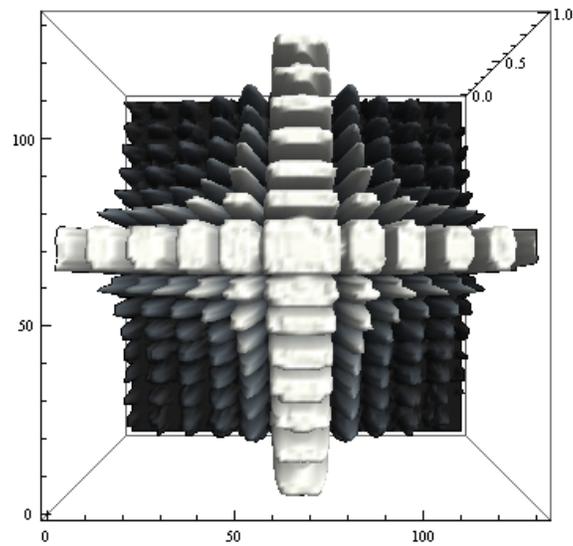


Figura 6.8:  $z=0$ , patrón de difracción de una apertura circular

Después de 1 iteración obtenemos las siguientes imágenes

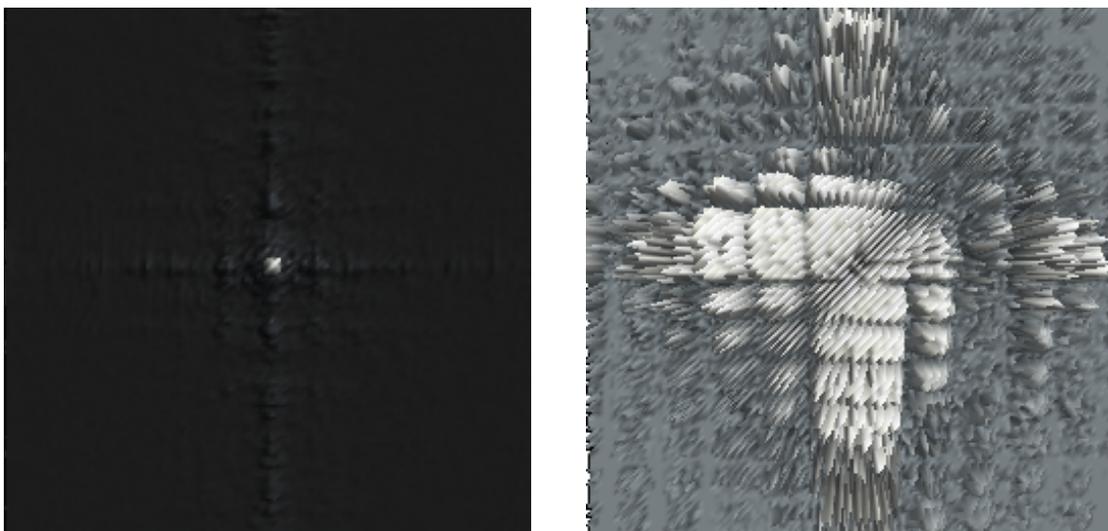


Figura 6.9: Amplitud en el plano objeto con 1 iteracion.

Después de 6 iteraciones

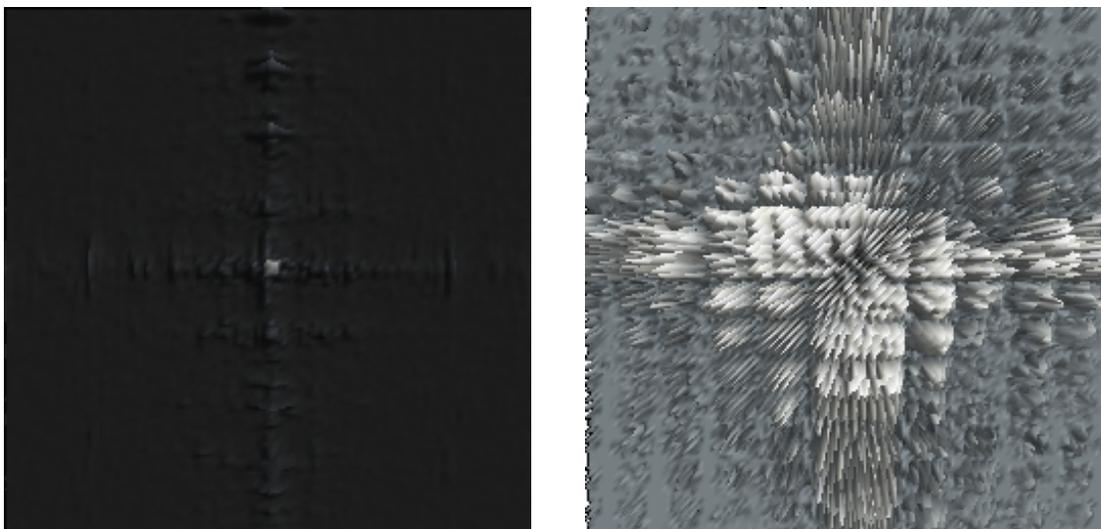


Figura 6.10: Amplitud en el plano objeto con 6 iteraciones y zoom de la misma apertura.

Después de 13 iteraciones

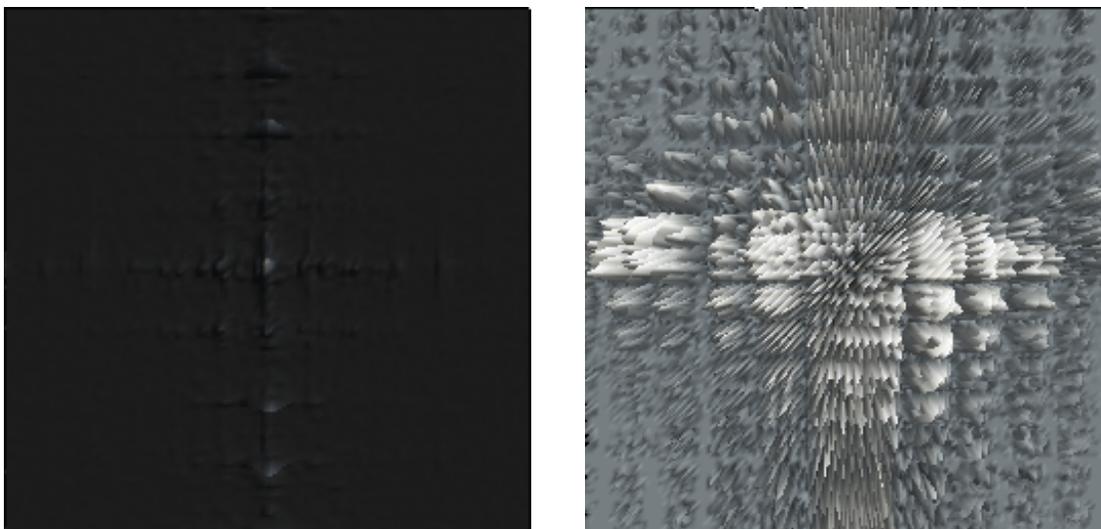


Figura 6.11: Amplitud en el plano objeto con 13 iteraciones y zoom de la misma apertura.

Después de 50 iteraciones

---

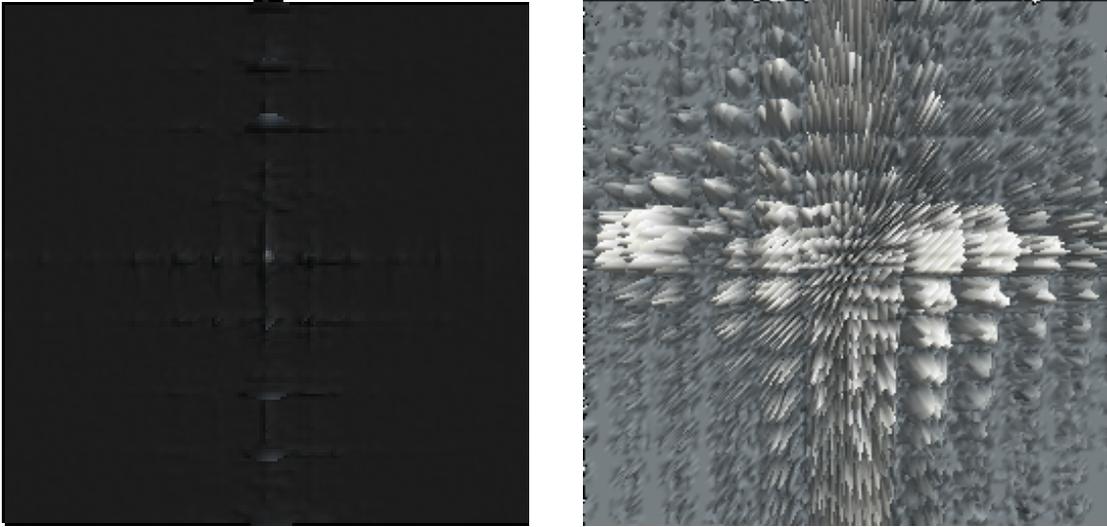


Figura 6.12: Amplitud en el plano objeto con 50 iteraciones y zoom de la misma apertura.

# Capítulo 7

## Conclusiones

Podemos ver que en cuanto a las simulaciones de difracción, el método de Fourier da mejores resultados para distancias cortas es decir para valores de  $z$  menores a cuatro. Ya que por el método de convolución tenemos problemas de submuestreo para distancias cercanas a nuestra apertura.

Conforme evoluciona el patrón de difracción las imágenes tomadas por el método de convolucion varían su tamaño, es decir se hacen mas grandes conforme aumentamos la distancia, aunque no varia su forma. En el caso de la simulación por el método de Fourier el patrón conforme va evolucionando muestra una imagen constante sin una evidente variación en el tamaño o la forma.

En términos generales se puede observar que ambas simulaciones coinciden en el patrón conformado por la difracción conforme este evoluciona con la distancia. Asi que ambos métodos cumplen con su función.

Esta aparente diferencia en cuanto al tamaño del patrón de difracción es debida a que la implementación de la transformada de Fresnel via la transformada de Fourier existe un cambio de espacio, el espacio de frecuencias, donde como es bien conocido hay un cambio de escala dado por el inverso de la distancia, mientras que la implementación vía la operación de convolución siempre se mantiene bajo el mismo espacio de coordenadas.

## CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES

---

Respecto a la recuperación de fase y amplitud en simulación se puede ver que se reconstruye satisfactoriamente la amplitud en el plano de entrada y por lo tanto la fase en el plano de difracción, se notó que para distancias pequeñas de captura del patrón de difracción es necesario un mayor número de iteraciones en comparación con patrones de difracción capturados a una distancia mayor.

# Bibliografía

- [1] Walther Adriaan, International Journal of Optics, Volume 10, Issue 1, 1963
- [2] P. Roman, A. S. Marathay, Il Nuovo Cimento, 16 Dicembre 1963, Volume 30, Issue 6, pp 1452-1464
- [3] Emmanuel J. Candès, Yonina C. Eldar, Thomas Strohmer, and Vladislav Voroninski
- [4] Sudheesh K. Rajput and Naveen K. Nishchal, Applied Optics Vol. 53, Issue 3, pp. 418-425 (2014)
- [5] EG Johnson y JD Brasher, cifrado Fase de la biometría en los elementos de óptica difractiva, .<sup>o</sup>pt. Lett. 21 , 1271-1273 (1996).
- [6] Fowles G.R. Introduction to Modern Optics 2ed, 1989
- [7] Hwei P. Hsu, Análisis de Fourier, Addison Wesley, 1970
- [8] B.E.A. Salech and M.C. Teich, Fundamentals of Photonics, John Wiley and Sons, 1991
- [9] J. Goodman, Introduction to Fourier Optics, 2ed, McGraw Hill, 1996
- [10] Hetch Eugene, Óptica, 3 Ed, Addison Wesley, 2000
- [11] Born M., Wolf E. Principles of optics. Séptima edición, 1999
- [12] J. R. Fienup, Phase retrieval: a comparison, Applied Optics, Agosto 1982
- [13] David Mas, Javier Garcia, Carlos Ferreira, ,Fast algorithms for free space diffraction patterns calculation, Optics Communications, Junio 1992

- [14] Fucai Zhang, Phase retrieval of arbitrary complex-valued fields, *Physical Review* Abril 2007
- [15] Ricardo Amezcua., Gerchberg Saxton algorithm applied to a translational variant optical. *Optics Express*, Vol. 21, Issue 16
- [16] Z Zalevsky, RG Dorsch, D Mendlovic, Gerchberg?Saxton algorithm applied in the fractional Fourier or the Fresnel domain, *Optics letters*, 1996
- [17] G Yang, B Dong, B Gu, J Zhuang, OK Ersoy, Gerchberg Saxton and Yang Gu algorithms for phase retrieval in a nonunitary transform system: a comparison, *Applied optics*, 1994
- [18] HH Bauschke, PL Combettes, DR Luke, Phase retrieval, error reduction algorithm, and Fienup variants: a view from convex optimization, *Applied optics*, 2002
- [19] J Miao, D Sayre, HN Chapman, Phase retrieval from the magnitude of the Fourier transforms of nonperiodic objects, *Journal of the Optical Society of America*, 1998
- [20] V Elser, Phase retrieval by iterated projections, *Journal of the Optical Society of America*, 2003