Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN FÍSICA

ANÁLISIS DE LAS SIMETRÍAS DE TEORÍAS TOPOLÓGICAS EN TÉRMINOS DE NUEVAS VARIABLES: LA SEGUNDA CLASE DE CHERN Y LA CLASE DE EULER

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN FÍSICA

PRESENTA
CARLOS MEDEL PORTUGAL

DIRECTORES DE TESIS
DR. ALBERTO ESCALANTE HERNÁNDEZ
DR. ROBERTO CARTAS FUENTEVILLA

PUEBLA, PUE. 15 DE JUNIO DE 2015

Dedicatoria

Dedico esta tesis a Dios, que gracias a él, tengo dones y habilidades con los que pude llegar hasta aquí.
A mis padres, que por su apoyo incondicional he logrado la meta que ellos consiguieron en su juventud, la cual debo superar.

II

Agradecimientos

A a mi familia, pero en especial a mis padres, que siempre han estado detrás de mi, brindándome palabras de aliento, regañándome cuando fue necesario. Por ser no sólo mis papás, sino mis más grandes aliados y amigos.

A todos los profesores que tuvieron que ver en mi formación como licenciado, durante estos 5 años, compartiendo no solo conocimientos sino experiencias de vida, pero principalmente al Dr. Escalante y al Dr. Roberto Cartas por compartir conmigo su tiempo, su entusiasmo y las ideas que me permitieron acercarme a la Gravedad Cuántica de Lazos.

A los miembros del jurado, por todas sus preguntas, comentarios y observaciones hechas a lo largo de esta tesis.

A mis amigos, que con sus comentarios compañía y apoyo, me permitieron seguir adelante, ante las situaciones adversas

A mi amigo Mario Aldair, que desde primer semestre me acompañó en este caminar académico, con largas jornadas de estudio, apoyándome y aconsejándome cada vez que lo necesité.

A mis tíos Guillermo Verdugo e Ignacia Portugal por su apoyo moral en esta tesis, brindándome palabras de aliento para seguir adelante.

A la VIEP, por su apoyo económico durante esta tesis.

Resumen

En este trabajo se realiza el análisis canónico desarrollado por Dirac aplicado a una teoría BF, al invariante de Euler, la segunda Clase de Chern y a una acción tipo BF generalizada vistas como teorías de campo. Para realizar el análisis hamiltoniano, romperemos la covarianza explícita de Lorentz local definiendo un tipo de variables de Ashtekar, y en términos de estas nuevas variables, se obtendrán las restricciones, la Hamiltoniana extendida y la estructura simpléctica.

Introducción

En el camino para obtener una descripción cuántica del campo gravitacional, se ha encontrado un particular interés entre la relación de relatividad general y las llamadas teorías topológicas [1, 2, 3, 4]. Las teorías topológicas son caracterizadas debido a que son independientes del espacio-tiempo de fondo y no tienen grados de libertad físicos locales, por lo que dichas teorías son susceptibles a grados de libertad globales asociados con topologías no triviales de la variedad en la cual son definidas. Debido a lo anterior, las teorías topológicas se han convertido en modelos atractivos para poder explorar la relación existente entre teorías físicas y la covarianza bajo difeomorfismos que encontramos en la relatividad general [5, 6, 7, 8].
Ejemplos de relaciones entre las teorías topológicas y una teoría física se hacen presentes al estudiar gravedad en tres y cuatro dimensiones, con las llamadas acciones de Chern-Simons, la segunda clase de Chern y el invariante de Euler respectivamente. Respecto a este punto, es bien conocido que la acción de Einstein que describe gravedad en 3 dimensiones sin la presencia de una constante cosmológica y con un grupo de estructura $SO(2,1)$, la podemos escribir como una acción de Chern-Simons pero con un grupo de estructura $ISO(2,1)$ [9, 10]. Por otra parte, en cuatro dimensiones, la segunda clase de Chern es importante pues comparte simetrias similares a la acción que describe gravedad real; simetrías tales como los difeomorfismos y las cargas de Noether asociadas a dicha simetría [4]. De esta manera, el estudio de gravedad en tres dimensiones o en cuatro dimensiones por medio de las teorías topológicas, es un tópico muy interesante pues las teorías topológicas son tratadas como modelos tentativos para poder generalizarlos y de esta manera, contribuir al progreso de la búsqueda de una teoría cuántica de la gravedad consistente, problema que aún no ha sido posible resolver [11, 12, 13].
En vista de lo anterior, en esta tesis vamos a analizar las simetrías de teorías topológicas que tienen una relación muy estrecha con gravedad real tal como la segunda clase de Chern, la clase de Euler, una teoría BF y una teoría tipo BF generalizada. Específicamente, nos vamos a enfocar a estudiar todas esas teorías usando variables tipo de Ashtekar, es decir, las acciones que estudiaremos, sus variables dinámicas están dadas

por una conexión valuada en el grupo $SO(3,1)$, sin embargo, rompiendo la covarianza local de Lorentz vamos a construir las variables del tipo de Ashtekar para reescribir la acción en términos de estas variables y así poder comparar a nivel Hamiltoniano los escenarios de las distintas acciones, para posteriormente trabajar con relatividad general acoplando dichas teorías.

Índice general

ANÁLISIS DE LAS SIMETRÍAS DE TEORÍAS TOPOLÓGICAS EN TÉRMINOS DE NUEVAS VARIABLES: LA SEGUNDA CLASE DE CHERN Y LA CLASE DE EULER

CARLOS MEDEL PORTUGAL

15 DE JUNIO DE 2015

Capítulo 1

Algoritmo de Dirac-Bergmann

1.1. Sistemas clásicos singulares

En este capítulo (reportado en [22]), y con la finalidad de comenzar el estudio de los sistemas singulares en una manera lo más simple posible, se desarrollará la teoría considerando inicialmente sistemas puntuales con un número finito de variables dinámicas. Y como se verá más adelante resulta un mero formalismo pasar a teoría de campo (sin olvidar las sutilezas que existen de pasar de un enfoque a otro).

El punto de partida para estudiar la dinámica de los sistemas singulares será el principio de Hamilton[1], que en su forma lagrangiana establece que: De entre todas las trayectorias en el espacio de configuración, que a los tiempos t_1 y t_2 pasan por dos configuraciones dadas, aquella que realmente sigue el sistema es la que hace que la integral

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q^n(t), \dot{q}^n(t))dt \tag{1.1.1}$$

tenga un valor mínimo (un extremo o un valor estacionario)[2], con q^n las coordenadas, $\dot{q}^n = dq^n/dt$ sus respectivas velocidades y $n = 1, ..., N$. Además aquí t es un parámetro

[1] La idea de partir de un principio de acción tiene la gran ventaja de que se puede tener fácilmente teorías que estén de acuerdo con el principio de relatividad. A diferencia de lo que sucede con la función hamiltoniana, donde no es nada sencillo formular las condiciones para que la teoría sea relativista, o al menos no se conoce una manera sistemática de hacerlo. Por ejemplo, en el caso de la electrodinámica, cuando al proponer la acción

$$S[A] = \int_M \mathcal{L}dt = \int_M F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}d^4x,$$

se tuvo en cuenta que $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ es un invariante de Lorentz, lo cual hace que de inicio sea compatible con la relatividad espacial.

[2] Nótese que el principio de mínima acción es un caso particular del principio de Hamilton cuando la

de evolución, el cual, como es usual en la mecánica elemental, se identifica con el tiempo, pero en los capítulos siguientes se considerará como un parámetro de evolución (que se denotará como x_0), y sólo al final de la evolución dinámica podrá ser identificado con el tiempo. Las condiciones bajo las cuales la integral anterior tiene un valor estacionario son las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^n}=0, \tag{1.1.2}$$

desarrollando,

$$\frac{\partial}{\partial q^{n'}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}\right)\frac{dq^{n'}}{dt}+\frac{\partial}{\partial \dot{q}^{n'}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}\right)\frac{d\dot{q}^{n'}}{dt}-\frac{\partial L}{\partial q^n}=0,$$

lo cual puede reescribirse como

$$\ddot{q}^{n'}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'}\partial \dot{q}^n}=\frac{\partial L}{\partial q^n}+\dot{q}^{n'}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n\partial q^{n'}}. \tag{1.1.3}$$

De la ecuación anterior se ve que, si el determinante de la matriz dada por $\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'}\partial \dot{q}^n}$, es distinto de cero, la matriz es invertibe, lo cual significa que todas las $\ddot{q}^n$'s quedan determinadas de manera única en términos de q^i y $\dot{q}^i$; de otra manera, si el determinante es cero, la matriz no es invertible, sin embargo si tiene rango igual a $R<N$, implica que se van a poder despejar $\ddot{q}^j$'s con $j=1,...,R$, tales que

$$\ddot{q}^j=\ddot{q}^j(q^j,\dot{q}^j,q^a,\dot{q}^a,\ddot{q}^a), \tag{1.1.4}$$

donde $\ddot{q}^a$ son las aceleraciones que no se pudieron despejar de (1.1.3), por lo que en general las $\ddot{q}^j\,'s$ con $j=1,...,N$, quedan determinadas hasta $q^{R+1},...,q^N$ funciones independientes arbitrarias y sus respectivas velocidades y aceleraciones. Por lo que el caso de interés para el estudio de las teorías de norma es cuando $\det\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'}\partial \dot{q}^n}\right)=0$.

hamiltoniana, H, no depende explícitamente del tiempo (i.e. es una constante, aunque no necesariamente la energía total del sistema), que es equivalente a que la lagrangiana, L, no dependa explícitamente del tiempo; lo cual puede verse recordando que la acción

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L(q(t),\dot{q}(t))dt=\int_{t_1}^{t_2}p_i dq^i-Hdt,$$

ya que al ser H constante no tendrá dependencia temporal explícita en la acción.

Por lo tanto, una lagrangiana L se llama singular si el determinante de la matriz hessiana es cero.[3] [4]

1.2. Restricciones primarias

Para pasar del formalismo lagrangiano al hamiltoniano se definen los momentos canónicos[5]

$$p_n := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}. \tag{1.2.1}$$

Por lo visto anteriormente, cuando $\det\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n}\right) = 0$, existen funciones

$$\phi^m(q,p) = 0, \tag{1.2.2}$$

con $m = 1, ..., M$, las cuales se llaman restricciones primarias.[6] Una característica de estas restricciones es que para su obtención no se requirió de las ecuaciones de movimiento y además cuando se sustituyen en las ecs. (1.2.1) en éstas, se obtiene una identidad.

[3] Esta afirmación es independiente de las coordenadas que se elijan, lo cual puede verse de la siguiente manera. Considérese una transformación $q^i \to \hat{q}^i(q)$, cuyo jacobiano $J_i^j = \frac{\partial \hat{q}^j}{\partial q^i}$ no es singular, i.e. la transformación es invertible, lo que implica que $\dot{\hat{q}}^i = J^i_j \dot{q}^j$, y si $\hat{L}(\hat{q}, \dot{\hat{q}}) = L(q(\hat{q}), \dot{q}(\hat{q}, \dot{\hat{q}}))$,

$$\hat{H}_{ij} = \frac{\partial^2 \hat{L}}{\partial \dot{\hat{q}}^i \partial \dot{\hat{q}}^j} = H_{kl} J_i^k J_j^l.$$

Por lo que, como $\det J_i^j \neq 0$, si $\det H_{kl} = 0$, entonces $\det \hat{H}_{ij} = 0$.

[4] Nótese que la afirmación también es cierta para L', si

$$L' = L + \frac{\partial \Lambda(q)}{\partial q^i} \dot{q}^i.$$

De los cursos de Mecánica Clásica [18], se sabe que dos lagrangianas, L y L', llevan a las mismas ecuaciones de movimiento si

$$L' = L + \frac{\partial \Lambda(q^i, t)}{dt} = L + \frac{\partial \Lambda}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial \Lambda}{\partial t},$$

en el caso en que Λ no depende explícitamente del tiempo, el significado de la proposición se ve de manera inmediata.

[5] En mecánica elemental se consideran a las q's y p's como variables independientes, sin embargo una teoría más general pudiera tomar en cuenta que no lo sean, i.e. que exista una relación entre ellas de la forma $\phi^m(q,p) = 0$. Este es el caso del que se ocupa el algoritmo de Dirac-Bergmann para tratar sistemas singulares.

[6] Esta terminología se debe a Bergmann.

Dicho de otra manera, el problema se convierte en encontrar la inversa de las ecs. (1.2.1), i.e. encontrar las $\dot{q}$'s en términos de las p's. Y por el teorema de la función inversa, dicha inversa existe si

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial \dot{q}^1} & \cdots & \frac{\partial p_N}{\partial \dot{q}^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_1}{\partial \dot{q}^N} & \cdots & \frac{\partial p_N}{\partial \dot{q}^N} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^1 \partial \dot{q}^1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^1 \partial \dot{q}^N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^N \partial \dot{q}^1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^N \partial \dot{q}^N} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{1.2.3}$$

En el caso en que el determinante es cero, implica que no todas las $\dot{q}$'s van a poder ser expresadas en términos de las q's y las p's, por lo que existen relaciones de la forma $\phi^m(q,p) = 0$, que de inmediato se ve que satisfacen la condición de que el determinante sea cero.

En particular, si se tienen M' ecuaciones independientes de la forma (1.2.2), implica que M' p's no se pueden escribir en términos de las $\dot{q}$'s, por lo que M' renglones son cero. Así, el rango de la matriz $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n}\right)$ es $(N - M')$.[7] Se considera, por simplicidad, que este rango es constante en el espacio $(q, \dot{q})$, o sea que el número de restricciones primarias independientes no varía, con lo cual la superficie de restricciones primarias es una subvariedad de dimensión $2N - M'$ del espacio fase[8].[9]

No se supone que las restricciones (1.2.2) sean independientes entre sí, por lo que en general $M' \leqslant M$.

Una vez que encontramos las restricciones primarias, ¿qué nos garantiza que hemos encontrado todas?. Una forma consiste en calcular el rango de la matriz hessiana, $N - M'$,

[7] La afirmación recíproca también es cierta.

[8] En el caso del péndulo simple, éste define una superficie unidimensional, una circunferencia, y físicamente se espera que la dimensión de esta superficie no varie. Por lo que suena razonable desde el punto de vista físico y no sólo por simplicidad matemática que la dimensión de la superficie definida por las restricciones sea constante.

[9] Recordando la definición de subvariedad, sea M una variedad C^k de dimensión n. Un subconjunto N $(N \subset M)$ es una subvariedad de M, de dimensión m $(m \leqslant n)$, si existe un n-subatlas C^k de M , (U_i, ϕ^i), tal que, $\phi^i(N \cap U_i) = \{(a^1, a^2, \dots, a^n) \in \mathbb{R}^n \mid a^{m+1} = a^{m+2} = \dots = a^n = 0\}$ y el **Teorema 1.1:** Sean $f^1, f^2, \dots, f^m$ unas funciones diferenciables definidas en M. El conjunto $N \equiv \{p \in M \mid f^1(p) = f^2(p) = \dots = f^m(p) = 0\}$ es una variedad de dimensión $n - m$ de M si para cualquier carta (U, ϕ) del atlas de M tal que U intersecta N, la matriz de elementos $D_i(f^j \circ \phi^i) \mid_{\phi(p)}$ $(1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m)$, es de rango m para $p \in N$. (D_i representa la i-ésima derivada parcial). En lo que aquí se estudia, la variedad M es el espacio fase que tiene dimensión $2N$, y las restricciones primarias toman el papel de las f's, por lo que estas representan una variedad de dimensión $2N - M'$, con M' el número de restricciones primarias independientes. Este hecho también permite ver que las restricciones primarias pueden verse como las primeras M' coordenadas para la subvariedad definida por estas.

donde M' es el número de restricciones primarias independientes que se esperan. Nótese que las $\phi^{m'}$'s, restricciones independientes, no tienen por qué venir dadas directamente de (1.2.1) como las ϕ^{m}'s, sino que pueden ser combinaciones lineales de estas últimas, por lo tanto conviene fijarse en los vectores nulos de la matriz hessiana, los cuales, por definición, forman una base de la nulidad de $H_{\mu\nu}$. Así, si V^{μ} son los vectores nulos (con V^{μ}_{α} sus componentes), y ϕ^{α} son las restricciones primarias que se han encontrado. Las restricciones primarias independientes que se esperan, se pueden obtener mediante la contracción,

$$\Phi^{\mu} = V^{\mu}_{\alpha}\phi^{\alpha}. \tag{1.2.4}$$

Recordando que una condición necesaria y suficiente para que una transformación F tenga inversa, es que no existan dos puntos en el dominio que tengan la misma imagen en el codominio bajo dicha transformación, es fácil notar que la condición de no invertibilidad de las velocidades como función de las coordenadas y los momentos, implica que la inversa que va de las p's a las $\dot{q}$'s es, en general, multivaluada.

Con la finalidad de mantener la transformación univaluada será necesario introducir parámetros extra, los multiplicadores de Lagrange.

1.3. Ecuaciones débiles y fuertes

Aquí conviene introducir el concepto de igualdad débil, el cual será representado por el símbolo, "$\approx$". De manera elemental, dos funciones F y G, se dicen débilmente iguales, si lo son en la subvariedad definida por las restricciones primarias, $\phi^m = 0$, lo cual se escribe como,

$$F \approx G.$$

En particular, $\phi^m \approx 0$, i.e. el valor numérico de las restricciones es cero, aunque no se anulan idénticamente en todo el espacio fase, por lo que su paréntesis de Poisson no tiene por qué ser cero. Así, una regla nemotécnica para utilizar estas expresiones es primero realizar la operación del paréntesis y al final ocupar las restricciones. También puede verse que, en general, una función que es débilmente cero puede ser escrita como combinación lineal de restricciones, i.e. $G \approx 0 \quad \Leftrightarrow \quad G = g_m\phi^m$, con g_m alguna función del espacio fase.

Por otra parte, una ecuación que se satisface en todo el espacio fase y no sólo en la subvariedad $\phi^m \approx 0$ se le llama fuerte, y se utiliza el símbolo usual de igualdad para representarla.

Una manera más formal de definir ecuaciones débiles y fuertes, es la siguiente: **Definición:** Una funcional F del espacio fase, es *débilmente* igual cero si,

$$F\mid_{\Sigma_1}=0, \tag{1.3.1}$$

donde Σ_1 es la subvariedad definida por las restricciones primarias (1.2.2). Por otra parte, se dice *fuertemente* igual a cero si,

$$F\mid_{\Sigma_1}=0 \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{q^i}},\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{p_i}}\right)\mid_{\Sigma_1}=0, \tag{1.3.2}$$

con $\left(\frac{\partial F}{\partial q^i},\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)\mid_{\Sigma_1}=0$, el conjunto formado por todas las derivadas parciales de F con respecto a las variables canónicas, evaluadas en Σ_1.

1.4. Condiciones sobre las funciones de restricción

Existen varias maneras de representar una superficie dada por (1.2.2). Sin embargo, es necesario imponer condiciones en la elección de las funciones ϕ^m, que representan la superficie de restricciones primarias, para que sean consistentes con el formalismo hamiltoniano. En lo que sigue se llamará a éstas, *condiciones de regularidad.*

A manera de motivación, uno esperaría que dada una restricción de la forma $f_m := \phi^m(q,p)\approx 0$, cualquier función de esta, por ejemplo, f^2, $\sqrt{f}$, etc. siga siendo cero en la subvariedad definida por ϕ^m y por lo tanto sigan siendo restricciones. Sin embargo, para que estas funciones definan una subvariedad de dimensión M' constante, como ya se vió (9), es necesario que el rango de la matriz jacobiana, $\left(\frac{\partial \phi^i}{\partial(q^j,p_j)}\right)=\left(\frac{\partial f_i}{\partial(q^j,p_j)}\right)$ sea constante e igual a M'. Por ejemplo, para el caso en que se tenga $(f^i)^2$, estos elementos de matriz serán $\frac{\partial (f^i)^2}{\partial(q^j,p_j)}=2f^i\frac{\partial \phi^i}{\partial(q^j,p_j)}\approx 0$, con lo que el rango de la matriz jacobiana ya no será M'. Por lo que resulta natural imponer la condición de que las restricciones, $\phi^{m'}$, al formar una subvariedad, el rango de $\left(\frac{\partial \phi^i}{\partial(q^j,p_j)}\right)$ sea constante e igual a M', con M' el número de restricciones primarias independientes. Además, también como consecuencia del hecho de que sea una subvariedad se tienen las siguientes condiciones alternativas:

La superficie de restricciones primarias puede ser cubierta por conjuntos abiertos, en cada uno de los cuales, las funciones ϕ^m pueden "partirse" en dos grupos, el primero consistente de las restricciones independientes, $\phi^{m'}=0$ con $(m'=1,...,M')$, tales que

$\left(\dfrac{\partial \phi^{m'}}{\partial (q^n, p_n)}\right)$ tiene rango M', y las dependientes, $\phi^{\bar{m}'} = 0$ con $(\bar{m}' = M' + 1, ..., M)$, que se satisfacen como consecuencia de las primeras.

Dicho de otra manera, en la subvariedad $2N - M'$ dimensional definida por las restricciones primarias, localmente se pueden elegir restricciones de tal manera que haya M' independientes y las demás $(M - M')$ se satisfagan sólo como consecuencia de las primeras, con lo que, localmente, éstas pueden tomarse como las primeras M' coordenadas de un sistema regular de coordenadas. Con lo que además, $d\phi^1 \wedge d\phi^2 \wedge ... \wedge d\phi^{m'} \neq 0$.

1.4.1. Analogía con el método de multiplicadores de Lagrange

Nótese que esto es muy similar a lo que se hace en el método de los multiplicadores de Lagrange tanto en el cálculo en varias variables, como en mecánica elemental, en este último, por ejemplo, a la función lagrangiana se le suma una combinación lineal de restricciones, cuyos coeficientes son los multiplicadores de Lagrange. Una diferencia importante es que en este último caso, las restricciones son funciones de las coordenadas del espacio de configuración (o fase de velocidades $(q, \dot{q})$, como también se le conoce). Mientras que en el caso que ocupa al presente capítulo las restricciones son funciones de las variables del espacio fase, por lo que ya no se puede sumar a la lagrangiana una combinación lineal de éstas, más bien ahora es a la hamiltoniana a la que se le suman, puesto que junto con las restricciones están definidas en el mismo espacio.

1.5. Hamiltoniana Canónica

Como es sabido de la Mecánica Clásica [16], y como ya se mencionó al principio del capítulo, en un sistema regular se pasa de la formulación lagrangiana a la hamiltoniana mediante la transformada de Legendre. Sin embargo, cuando se tiene un sistema singular para realizar dicho paso se requerirán más ingredientes, los cuales son el propósito de este capítulo. A pesar de que ahora, en un sistema singular ya no se podrán despejar todas las velocidades en términos de las coordenadas y los momentos, podemos definir la hamiltoniana canónica en la misma manera en que usualmente se define la hamiltoniana, i.e,

$$H_C := \dot{q}^i p_i - L, \tag{1.5.1}$$

cuya variación es,

$$\begin{aligned}\delta H_C &= \dot{q}^i \delta p_i + \delta \dot{q}^i p_i - \frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i \\ &= \dot{q}^i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i. \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

Aquí, a diferencia de lo que sucede en mecánica elemental, donde H depende de las q's y p's y estas son variables independientes entre sí; en este caso y debido a las relaciones (1.2.2), éstas ya no son coordenadas independientes (en el espacio fase). Por lo que (1.5.1) sólo está bien definida en la subvariedad definida por las restricciones primarias. Debido a lo anterior, si

$$H_C \to H_C + u^m \phi^m, \tag{1.5.3}$$

el formalismo debe mantenerse invariante (puesto que cualquier combinación lineal de restricciones es débilmente cero).

Como ya se mencionó en la sección anterior, esto tiene también sentido si se le ve desde el punto de vista que se está estudiando un problema de extremos con restricciones. Cuando estas son funciones del espacio de configuración

$$\int L\, dt \to \int (L + \lambda_a \phi^a) dt, \tag{1.5.4}$$

pero cuando lo son del espacio fase, es de esperarse que

$$\int (\dot{q}^i\, p_i - H_C) dt \to \int (\dot{q}^i\, p_i - H_C - u_m \phi^m) dt. \tag{1.5.5}$$

Variando esta última acción,

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S = \int \Bigg[\dot{q}^i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}^i - \frac{\partial H_C}{\partial q^i}\delta q^i - \frac{\partial H_C}{\partial p_i}\delta p_i - u_m \left(\frac{\partial \phi^m}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial \phi^m}{\partial p_i}\delta p_i \right) \\ &\quad - \left(\frac{\partial u_m}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial u_m}{\partial p_i}\delta p_i \right) \phi^m \Bigg] dt \\ &= \int \left[\left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H_C}{\partial q^i} - u_m \frac{\partial \phi^m}{\partial q^i} \right) \delta q^i + \left(\dot{q}^i - \frac{\partial H_C}{\partial p_i} - u_m \frac{\partial \phi^m}{\partial p_i} \right) \delta p_i \right] dt \end{aligned} \tag{1.5.6}$$

lo anterior tomando en cuenta que $\delta q^i \mid_{t_1}^{t_2} = 0$ y haciendo uso de las restricciones. Se obtienen las ecuaciones de movimiento,

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H_C}{\partial q^i} - u_m \frac{\partial \phi^m}{\partial q^i} \tag{1.5.7}$$

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H_C}{\partial p_i} + u_m \frac{\partial \phi^m}{\partial p_i}. \tag{1.5.8}$$

Aquí hay que notar dos cosas, la primera es recordar que debido a que las u_m son funciones arbitrarias de las coordenadas del espacio fase, en general las ecuaciones de movimiento (1.5.7) y (1.5.8) no están determinadas de manera única, para esto se necesitará encontrar las u's (multiplicadores de Lagrange). Al final del proceso (después de encontradas todas las restriciones de la teoría e introducido todos los multiplicadores de Lagrange necesarios), si hubo multiplicadores que no se pudieron encontrar, significa que el sistema está indeterminado hasta funciones arbitrarias, pero recordando que la Mecánica Clásica es una teoría determinista se podría pensar que quizá esto tenga alguna relación con la libertad de norma de la teoría, y en efecto, se verá que las restricciones asociadas a estos multiplicadores serán las generadoras de las transformaciones de norma de la teoría.
Si se define la transformada de Legendre del espacio de configuración $(q, \dot{q})$ a la superficie $\phi(q,p) = 0$ del espacio (q, p, u) dada por

$$\begin{aligned} q^n &= q^n, \\ p_n &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}(q, \dot{q}), \\ u_m &= u_m(q, \dot{q}), \end{aligned} \tag{1.5.9}$$

se ve que la transformación entre espacios de la misma dimensión $2N$ es invertible, puesto que se tiene

$$\begin{aligned} q^n &= q^n, \\ \dot{q}^n &= \frac{\partial H_C}{\partial p_n} + u_m \frac{\partial \phi^m}{\partial p_n}, \\ \phi(q,p) &= 0. \end{aligned} \tag{1.5.10}$$

De esta manera, las ecuaciones (1.5.9) implican (1.5.10) y viceversa. Así la invertibilidad de la transformación de Legendre cuando el determinante de la matriz hessiana es cero, se puede recuperar agregando variables extra, los multiplicadores de Lagrange u.

1.6. Hamiltoniana primaria y restricciones secundarias

A una hamiltoniana de la forma (1.5.3), por definición, se le llamará Hamiltoniano primario,

$$H_1 := H_C + u_m \phi^m, \tag{1.6.1}$$

el cual ya contiene, a diferencia de H_C, toda la información con la que hasta este momento se cuenta del sistema.

Nótese que las ecuaciones anteriores (1.5.8) y (1.5.7) se pueden reescribir de manera compacta en la forma[10]

$$\dot{g} = \{g, H_C\} + u_m\{g, \phi^m\}, \tag{1.6.2}$$

Con $g = g(q, p)$ siendo una función arbitraria del espacio fase. En particular puede ser una de las coordenadas o los momentos, con lo que se recuperan las ecuaciones (1.5.8) y (1.5.7). Además, esta expresión puede reescribirse como

$$\dot{g} = \{g, H_C + u_m\phi^m\} := \{g, H_1\}, \tag{1.6.3}$$

cuya veracidad, se ve desarrollando

$$\begin{aligned}
\dot{g} &= \{g, H_C\} + \{g, u_m\phi^m\} && (1.6.4)\\
&= \{g, H_C\} + u_m\{g, \phi^m\} + \{g, u_m\}\phi^m && (1.6.5)\\
&= \{g, H_C\} + u_m\{g, \phi^m\}, && (1.6.6)
\end{aligned}$$

Lo anterior utilizando las propiedades del paréntesis de Poisson y ocupando las restricciones $\phi^m = 0$.

Como ya se mencionó previamente, en forma un tanto heurística, se espera que las restricciones no varíen con el tiempo, i.e. $\dot{\phi}^m \approx 0$. Estas condiciones en lo siguiente se

[10]Donde $\{\ ,\ \}$ representa el Paréntesis de Poisson, el cual nos da la estructura simpléctica de la teoría. Sean f y g dos funciones arbitrarias del espacio fase, el Paréntesis de Poisson entre ellas se define como

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}.$$

Y cumple las siguientes propiedades: (f, g y h funciones arbitrarias del espacio fase)

1. Antisimetría: $\{f, g\} = -\{g, f\}$.
2. Linealidad: $\{c_1 f + c_2 g, h\} = c_1\{f, h\} + c_2\{g, h\}$, con c_1 y c_2 constantes.
3. Existencia de elementos nulos: $\{c, f\} = 0$, $\forall\, c$ constante.
4. Identidad de Jacobi: $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$.
5. Regla del producto: $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$.
6. Paréntesis de Poisson fundamentales

$$\begin{aligned}
\{q^i, q^k\} &= 0 = \{p_i, p_k\}\\
\{q^i, p_k\} &= \delta^i_k.
\end{aligned}$$

llamarán *condiciones de consistencia*, que pueden ser vistas como un caso particular de (1.6.3) cuando $g = \phi^m(q,p)$, las cuales pueden escribirse de la siguiente manera,

$$\dot{\phi}^i = \{\phi^i, H_1\} = \{\phi^i, H_C\} + u_m\{\phi^i, \phi^m\} \approx 0. \tag{1.6.7}$$

La relación anterior se puede considerar como un sistema de ecuaciones lineales no-homogeneo para los multiplicadores de Lagrange u_m, y del comportamiento de este sistema dependerá si se pueden o no despejar todos o algunos multiplicadores. Definiendo, $h^i = \{\phi^i, H_C\}$ y W la matriz cuyas entradas son $W^{im} = \{\phi^i, \phi^m\}$, este comportamiendo se puede resumir en los siguientes casos:
Caso I: $h \neq 0$ (no todas $h^i \approx 0$) y $\det W \neq 0$.
Escribiendo el sistema de ecuaciones (1.6.7) en forma matricial,

$$h + Wu \approx 0, \tag{1.6.8}$$

con h y u los vectores columna cuyas entradas son h^i y u_m respectivamente. Debido a que $\det W \neq 0$, W tiene inversa, por lo que todos los multiplicadores de Lagrange van a poder ser encontrados y estarán dados por

$$u = -W^{-1}h \quad \Rightarrow \quad u_m = -W^{-1}_{mi}\{\phi^i, H_C\}. \tag{1.6.9}$$

Así, para este caso, sutituyendo (1.6.9) en (1.6.7), las ecuaciones de movimiento se podrán escribir como

$$\dot{g} = \{g, H_C\} - \{g, \phi^m\}W^{-1}_{mi}\{\phi^i, H_C\} := \{g, H_C\}_D, \tag{1.6.10}$$

ésta es la definición del *paréntesis de Dirac*, del cual se hablará más en lo sucesivo.
Puesto que todos los multiplicadores de Lagrange pudieron ser encontrados, dadas las condiciones iniciales para un sistema, las ecuaciones (1.6.10) determinan una evolución única, como usualmente se presenta en Mecánica Clásica. Nótese también que esta expresión es análoga a la que aparece en Mecánica Clásica, sólo que aquí se sustituye al paréntesis de Poisson por el de Dirac.[11]
Caso II: $h \neq 0$ y $\det W = 0$.
Retomando (1.6.8), $h + Wu \approx 0$, puesto que $\det W = 0$, sólo K multiplicadores de Lagrange van a poderse despejar, y $M' - K$ (nulidad de W) quedarán indeterminados[12],

[11] En Mecánica Clásica elemental se tiene que la evolución temporal de alguna función, o traslación en el tiempo, está dada por el paréntesis de Poisson de esta función con el hamiltoniano (generador infinitesimal de traslaciones en el tiempo), y en el caso de que la función dependa explícitamente del tiempo se le agrega la derivada parcial con respecto a éste.

[12] Utilizando un razonamiento análogo al de la subsección 1.2.

por lo que la teoría seguirá conteniendo funciones arbitrarias, lo cual es el caso de interés en las teorías de norma.
Sean V^i los vectores nulos de W $(i = 1, ..., M' - K)$ que, por definición, satisfacen

$$WV^i \approx 0, \tag{1.6.11}$$

con esto y (1.6.8) se tiene

$$hV^i \approx 0, \tag{1.6.12}$$

que en general son funciones del espacio fase independientes de los multiplicadores. Estas i relaciones implican que la teoría presenta i restricciones adicionales, las cuales se llamarán *restricciones secundarias.*
Este es quizá, el caso más importante, pues es el que aparece en las teorías de norma, por ejemplo[13], Electrodinámica Clásica, Chern-Simons, Pontrijagin, Teorías tipo BF, Gravedad en 3 dimensiones, etc.
Caso III: $h = 0$ y $\det W \neq 0$.
De la relación de (1.6.8) se tiene ahora el sistema homogéneo,

$$Wu \approx 0, \tag{1.6.13}$$

y, de los teoremas de sistemas de ecuaciones lineales, se tiene que sólo existe la solución trivial, es decir todos los multiplicadores de Lagrange son cero. Por lo que el sistema se reduce a una igualdad, $0 \approx 0$. Esta complicación se puede minorar, imponiendo que $\det W \approx 0$ como restricción secundaria.
Caso IV: $h = 0$ y $\det W = 0$.
En este caso, de la relación (1.6.8) se sigue teniendo, al igual que en III, que

$$Wu \approx 0, \tag{1.6.14}$$

pero ahora, debido a que $\det W = 0$, si el rango de W es igual a K, $M'-K$ multiplicadores van a poder ser débilmente determinados.
Nótese que el hecho de h sea cero puede venir de un hamiltoniano igual a cero, i.e. $H_C = 0$, con lo cual tendríamos problemas para definir la evolución temporal del sistema dado por (1.6.3). Sin embargo todas las teorías que se estudiarán en esta tesis caen en el segundo caso, y éstos últimos se incluyen sólo por completez.

Una vez agotada la información que proviene de las relaciones de consistencia sobre las restricciones primarias, si la teoría presenta restricciones secundarias, se tiene un caso

[13] Algunos de estos ejemplos se estudian en detalle en esta tesis.

similar al que se tenía en un inicio, i.e. un problema de extremos con restricciones sólo que estas restricciones viven en el espacio fase. Ahora se puede construir, de manera análoga a como se hizo con la hamiltoniana primaria, el hamiltoniano secundario,

$$H_2 := H_C + u_i\phi^i, \tag{1.6.15}$$

donde las ϕ^i son todas las restricciones que se han encontrado hasta el momento (primarias y secundarias), ahora es este hamiltoniano el que contiene toda la información con la que hasta este momento se cuenta del sistema. Por lo que las ecuaciones de movimiento toman la forma,

$$\dot{g} = \{g, H_C + u_i\phi^i\} := \{g, H_2\}, \tag{1.6.16}$$

y de aquí se pueden calcular las relaciones de consistencia sobre las restricciones secundarias. Si después de realizado este proceso aparecen nuevas restricciones, que se llamarán terciarias, se repite otra vez todo el proceso, ahora se construye la hamiltoniana terciaria, y se vuelven a calcular las relaciones de consistencia sobre estas restricciones, y así se repite la misma historia hasta que dejen de aparecer restricciones. A todo el conjunto de restricciones secundarias, terciarias, ..., se les llamará simplemente secundarias en lo sucesivo.

1.7. Reductibilidad

Si las restricciones ϕ^k no son todas independientes entre sí, es decir, unas se pueden obtener a partir de las otras mediante una transformación lineal, se dice que la teoría presenta *reductibilidad*, de otro modo se dice que se tiene el caso *irreducible*. Por ejemplo, en las dos teorías tipo BF que son el objeto principal de esta tesis, se presenta reductibilidad, en tal caso, se pueden omitir las restricciones que son dependientes, puesto que siempre se puede considerar que localmente se está trabajando con el caso irreducible. Nótese que la identificación de las restricciones independientes no siempre es una tarea fácil, o incluso podría ser globalmente imposible debido a obstrucciones topológicas.

1.8. Condiciones sobre los multiplicadores y hamiltoniana total

Una vez encontrado el conjunto completo de restricciones, se analizarán las condiciones sobre los multiplicadores de Lagrange. De las condiciones de consistencia para *todas* las restricciones de tiene,

$$\dot{\phi}^\mu = \{\phi^\mu, H_T\} = \{\phi^\mu, H_C\} + u_\nu\{\phi^\mu, \phi^\nu\} \approx 0, \tag{1.8.1}$$

con $\mu, \nu = 1, ..., J$, siendo J el número total de restricciones encontradas, y se define al *hamiltoniano total*, H_T, por la ecuación dada arriba. En unos momentos se regresará a este hamiltoniano.
Como ya se había mencionado antes, las ecuaciones (1.8.1) pueden ser vistas como un sistema de ecuaciones lineales para los multiplicadores, u_ν; y, como se sabe de álgebra lineal elemental, la solución general se puede escribir de la siguiente manera

$$u_\nu = U_\nu + V_\nu, \tag{1.8.2}$$

con U_μ una solución particular a las ecuaciones inhomogéneas y V_μ la solución más general del sistema homogéneo,

$$V_\nu \{\phi^\mu, \phi^\nu\} \approx 0. \tag{1.8.3}$$

Debido a que V_ν es la solución más general, ésta a su vez puede ser escrita como combinación lineal de soluciones independientes al sistema homogéneo, por lo que $V_\nu = v_i V^i_\nu$, con $i = 1, ..., I$, siendo I el número de soluciones independientes del sistema homogéneo. Con lo anterior,

$$u_\nu = U_\nu + v_i V^i_\nu. \tag{1.8.4}$$

Hay que considerar que las v^i son totalmente arbitrarias, así que las u_ν pueden separarse en una parte que se fija mediante las condiciones de consistencia y otra que permanece indeterminada. Lo cual se reflejado en la hamiltoniana total, y a su vez en las ecuaciones de movimiento,

$$\begin{aligned} H_T &:= H_C + u_\nu \phi^\nu \\ &= H_C + (U_\nu + v_i V^i_\nu)\phi^\nu \\ &= H_C + U_\nu \phi^\nu + v_i V^i_\nu \phi^\nu \\ &:= H_C + U_\nu \phi^\nu + v_i \phi^i, \end{aligned} \tag{1.8.5}$$

con $v_i V^i_\nu \phi^\nu := v_i \phi^i$, que sustituído en las ecuaciones de movimiento,

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \{f, H_T\} = \{f, H_C + U_\nu \phi^\nu + v_i \phi^i\} \\ &:= \{f, H' + v_i \phi^i\} = \{f, H'\} + \{f, v_i \phi^i\} \\ &= \{f, H'\} + v_i \{f, \phi^i\} + \{f, v_i\}\phi^i = \{f, H'\} + v_i \{f, \phi^i\}, \end{aligned} \tag{1.8.6}$$

con $H' := H_C + U_\nu \phi^\nu$ y utilizando las restricciones $\phi^i \approx 0$. Nótese que estas ecuaciones contienen I funciones arbitrarias, y por construcción son equivalentes a las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange (1.1.2); y como se verá más adelante H' es de primera clase, así como también las ϕ^i.

El hecho de que aparezcan funciones arbitrarias, marca una diferencia sustancial con lo que se conocía de Mecánica Clásica elemental, donde para unas condiciones iniciales dadas se tiene una evolución única del sistema; aquí por el contrario dadas las condiciones inicales ya no se tiene una evolución única, sino que está indeterminada hasta funciones arbitrarias. Esto se va a relacionar con la libertad de norma de la teoría, como se verá más adelante.

1.9. Restricciones de primera y segunda clase

Como ya se mencionó anteriormente, la diferencia entre las restricciones primarias y secundarias es más bien un tanto irrelevante y se tratan al mismo nivel. Sin embargo, resulta fundamental separar las restricciones entre de primera y segunda clase, puesto que las primeras serán las generadoras de las transformaciones de norma (un elemento fundamental en todo este análisis) y las segundas permitirán construir el Paréntesis de Dirac, que en las teorías que presentan este tipo restricciones vendrá a sustituir al paréntesis de Poisson a la hora de calcular la evolución dinámica del sistema.

Definición: Sea F una funcional del espacio fase, se dice que es de *primera clase* si su paréntesis de Poisson con todas las restricciones es débilmente cero,

$$\{F, \phi^{\mu}\} \approx 0, \tag{1.9.1}$$

en otro caso, se dice que F es de *segunda clase.*[14]

Si F es de primera clase, entonces $\{F, \phi^{\mu}\}$ tiene que ser fuertemente igual a alguna combinación lineal de ϕ's, debido a que cualquier funcional que es débilmente cero en el presente análisis es fuertemente igual a una combinación lineal de las ϕ's puesto que estas son las únicas cantidades independientes que son débilmente cero. Así,

$$\{F, \phi^{\mu}\} = f^{\mu}{}_{\rho}\phi^{\rho}. \tag{1.9.2}$$

Teorema: El paréntesis de Poisson de dos cantidades de primera clase, es también de primera clase.

Prueba: Sean $\{F, \phi^{\mu}\} = f^{\mu}{}_{\rho}\phi^{\rho}$ y $\{S, \phi^{\mu}\} = s^{\mu}{}_{\rho}\phi^{\rho}$, con F y S de primera clase. Con-

[14] Basta que F no sea débilmente cero con una restricción para que sea de segunda clase.

sidérese $\{\{F,S\},\phi^\mu\}$, que utilizando la identidad de Jacobi,

$$\begin{aligned}
\{\{F,S\},\phi^\mu\} &= \{\{F,\phi^\mu\},S\} - \{\{S,\phi^\mu\},F\} \\
&= \{f^\mu{}_\rho\phi^\rho, S\} - \{s^\mu{}_\rho\phi^\rho, F\} \\
&= f^\mu{}_\rho\{\phi^\rho, S\} + \{f^\mu{}_\rho, S\}\phi^\rho - s^\mu{}_\rho\{\phi^\rho, F\} - \{s^\mu{}_\rho, F\}\phi^\rho \\
&= \left(f^\mu{}_\rho s^\rho{}_\alpha - s^\mu{}_\rho f^\rho{}_\alpha\right)\phi^\alpha + \left(\{f^\mu{}_\rho, S\}\phi^\rho - \{s^\mu{}_\rho, F\}\right)\phi^\rho \approx 0. \qquad (1.9.3)
\end{aligned}$$

Como primera aplicación de este concepto, nótese que tanto H' como ϕ^α son de primera clase, cuya veracidad puede verse de la siguiente manera. Para ver que ϕ^i es de primera clase, hay que recordar que $v_i V^i_\nu \phi^\nu := v_i\phi^i$, con lo que el paréntesis es

$$\begin{aligned}
\{\phi^i,\phi^\mu\} &= \{V^i_\nu\phi^\nu,\phi^\mu\} = V^i_\nu\{\phi^\nu,\phi^\mu\} + \{V^i_\nu,\phi^\mu\}\phi^\nu \\
&= V^i_\nu\{\phi^\nu,\phi^\mu\}, \qquad (1.9.4)
\end{aligned}$$

y debido a que V^i_ν es solución al sistema homogéneo de ecuaciones para los multiplicadores, i.e. $V^i_\nu\{\phi^\nu,\phi^\mu\} \approx 0$, se llega a la conclusión,

$$\{\phi^i,\phi^\mu\} \approx 0; \qquad (1.9.5)$$

por lo tanto las ϕ^i son restricciones de primera clase.

Para ver que H' es de primera clase, se considera su paréntesis de Poisson con todas las restricciones,

$$\{H',\phi^\mu\} = \{H_C + U^\nu\phi^\nu,\phi^\mu\} = \{H_C,\phi^\mu\} + U_\nu\{\phi^\nu,\phi^\mu\} + \{U_\nu,\phi^\mu\}\phi^\nu, \qquad (1.9.6)$$

sumándole un cero débil, ecuación (1.9.5),

$$\begin{aligned}
\{H',\phi^\mu\} &= \{H_C,\phi^\mu\} + U_\nu\{\phi^\nu,\phi^\mu\} + v_i\{\phi^i,\phi^\mu\} \\
&= \{H_C + U_\nu\phi^\nu + v_i\phi^i,\phi^\mu\} \\
&= \{H_T,\phi^\mu\} = -\{\phi^\mu, H_T\} \approx 0. \qquad (1.9.7)
\end{aligned}$$

Esta última igualdad se satisface por condiciones de regularidad.

También puede verse que las ϕ^i forman un conjunto completo de restricciones de primera clase, por lo que cualquier restricción de primera clase es una combinación lineal de las ϕ^i (con coeficientes que son funciones del espacio fase), módulo términos cuadráticos en las restricciones de segunda clase. Si cualquier restricción primaria puede escribirse en esta forma, su paréntesis con todas las restricciones debe ser débilmente cero, lo cual se verifica fácilmente,

$$\{v_i\phi^i + w_{\mu\nu}\phi^\mu\phi^\nu, \phi^\rho\} = w_{\mu\nu}\left(\phi^\mu\{\phi^\nu, \phi^\rho\} + \{\phi^\mu, \phi^\rho\}\phi^\nu\right) \approx 0, \tag{1.9.8}$$

donde ϕ^i es de primera clase, ϕ^ν, ϕ^μ de segunda clase, $w_{\mu\nu}$ coeficientes del espacio fase, y utilizando al final las restricciones.
Cabe mencionar que la descomposición de H_T en H' y ϕ^i no es única, puesto que U_μ es cualquier solución del sistema inhomogéneo. Esto significa que si renombramos las v_i, se puede admitir en H' cualquier combinación lineal de las ϕ^i sin alterar la hamiltoniana total.

1.9.1. Separación de las restricciones de primera y segunda clase

En esta sección ya se dió la definición de restricciones de primera y segunda clase. Sin embargo, similarmente a lo que sucedió con las restricciones primarias, las restricciones de primera clase no tienen que ser directamente algunas de las restricciones primarias o secundarias; en general serán combinaciones de éstas; y para encontrarlas será necesario encontrar los vectores nulos de la matriz cuyas entradas son todos los paréntesis de Poisson entre las restricciones, para finalmente contraerlos con las restriciones y así obtener las restricciones de primera clase correctas (i.e. todas las restricciones de primera clase independientes entre sí de la teoría).
Sea W' la matriz $J \times J$ cuyas entradas son,

$$W'^{\alpha\beta} = \{\phi^\alpha, \phi^\beta\}, \tag{1.9.9}$$

donde ϕ^α son todas las restricciones primarias y secundarias encontradas y J es el número total de éstas.
Proposición. Si $\det W' \approx 0$, entonces hay R' restricciones de primera clase (con R' el rango de la matrix W').
Prueba. Si $\det W' = 0$ (en la subvariedad definida por las restricciones), entonces $Rango W' = R' < J$ y la nulidad $(J - R') \neq 0$; con lo que se pueden encontrar $(J - R')$ vectores nulos, ω^i con $(i = 1, ..., J - R')$, tales que

$$\omega^i_\alpha\{\phi^\alpha, \phi^\beta\} \approx 0, \tag{1.9.10}$$

esto por la misma definición de los vectores nulos, con lo que se tiene,

$$\{\omega^i_\alpha\phi^\alpha, \phi^\beta\} \approx 0,\ \forall\phi^\beta \in \Phi, \tag{1.9.11}$$

con $\Phi = \{\phi^\beta \mid \phi^\beta \textit{es una restricción primaria o secundaria}\}$. De esta manera puede verse que las restricciones $\omega^i_\alpha \phi^\alpha$ forman un conjunto de $(J - R')$ restricciones de primera clase (puesto que su paréntesis de Poisson es cero con todas las restricciones). Así, las restricciones de primera clase de la teoría son,

$$\gamma^i := \omega^i_\alpha \phi^\alpha. \tag{1.9.12}$$

Con lo anterior no sólo queda probada la proposición, sino que se muestra una manera sistemática de encontrar las restricciones de primera clase de la teoría, y de paso también se prueba lo que se decía en un principio, i.e. que es necesario calcular los vectores nulos de W'. Un ejemplo sencillo de esto se tiene en Chern-Simons Abeliano.

Debido a que la separación relevante para las restricciones es aquella que las distingue entre de primera y segunda clase, conviene introducir una notación que tome en cuenta este hecho. Así, las restriciones de primera clase se denotarán por la letra griega γ y las de segunda clase por χ.

Cabe mencionar que el número de restricciones de segunda clase esperadas nos la da el rango de la matriz W', la cual una vez hecha la separacion toma la forma,

$$\begin{aligned} W' &= \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \phi^0(y) & \phi^1(y) & \cdots & \phi^J(y) \end{array} \\ \begin{array}{c} \phi^0(x) \\ \phi^1(x) \\ \vdots \\ \phi^J(x) \end{array} & \begin{pmatrix} \{\phi^0, \phi^0\} & \{\phi^0, \phi^1\} & \cdots & \{\phi^0, \phi^J\} \\ \{\phi^1, \phi^0\} & \{\phi^1, \phi^1\} & \cdots & \{\phi^1, \phi^J\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \{\phi^2, \phi^J\} \\ \{\phi^J, \phi^0\} & \{\phi^J, \phi^1\} & \cdots & \{\psi, \phi^J\} \end{pmatrix} \end{array} \\ &\to \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \gamma^i(y) & \chi^\alpha(y) \end{array} \\ \begin{array}{c} \gamma^j(x) \\ \chi^\beta(x) \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C^{\alpha\beta} \end{pmatrix} \end{array}, \end{aligned} \tag{1.9.13}$$

con $C^{\alpha\beta}$ una matriz $R' \times R'$ antisimétrica e invertible sobre la superficie de restricciones.[15] Nótese que el número de restricciones de segunda clase, que coincide con $RangoW' = R'$, debe ser par.[16]

[15]El que $C^{\alpha\beta}$ sea una matriz invertible se ve directamente a partir del hecho de que tiene rango R', puesto que el rango de una matriz da el número de renglones independientes, o dicho de otra manera, la matriz más grande que se puede construir a partir de la primera y cuyo determinante es distinto de cero. Esta últma condición da la invertibilidad de la matriz.

[16]Dado que C es una matriz $R' \times R'$, con R' el número de restricciones de segunda clase, si R' fuese impar implicaría que $\det C = 0$ (que contradice que R' sea el rango de W').

1.10. Transformaciones de norma

Con lo visto hasta el momento cabe hacerse la pregunta: ¿Qué significado físico tiene el hecho de que las ecuaciones de movimiento contengan funciones arbitrarias?[17]

Uno sabe de Mécánica Clásica elemental que dadas las condiciones iniciales para un sistema dado, las ecuaciones de movimiento determinan de manera única el estado del sistema para tiempos posteriores. Sin embargo, aquí se encuentra una situación muy diferente, pues ahora dadas las condiciones inciales del sistema[18] (el estado físico inicial) la evolución de éste, dada por las ecuaciones de movimiento, no está determinada de forma única debido a la presencia de estas funciones arbitrarias (los multiplicadores de Lagrange). Pero la Mecánica Clásica es una teoría determinista, por lo que dos estados que comparten las mismas condiciones iniciales no deben de ser físicamente diferentes, se dirá que estos sistemas son equivalentes de norma.
Siguiendo esta idea, considérense dos estados con las mismas condiciones iniciales al tiempo t_0, y que su evolución dinámica difiere en el valor de los multiplicadores de Lagrange. Utilizando el desarrollo en serie de Taylor a primer orden para la variable canónica F, en cada uno de los dos estados,

$$\begin{aligned} F(t) &= F(t_0) + \dot{F}\delta t \\ &= F(t_0) + \left(\{F, H'\} + v_i\{F, \phi^i\}\right)\delta t \qquad (1.10.1) \\ F'(t) &= F(t_0) + \dot{F}'\delta t \\ &= F(t_0) + \left(\{F, H'\} + v_i'\{F, \phi^i\}\right)\delta t, \qquad (1.10.2) \\ & \qquad (1.10.3) \end{aligned}$$

y restando estas ecuaciones se tiene,

$$\delta F(t) = F(t) - F'(t) = (v_i - v_i')\{F, \phi_i\}\delta t := \delta v_i\{F, \phi^i\}, \qquad (1.10.4)$$

Prueba: Como C es antisimétrica y utilizando las propiedades del determinante,

$$\det C = \det(C^t) = \det(-C) = (-1)^{R'}\det C,$$

en el caso que R' fuese impar,

$$\det C = -\det C \Rightarrow \det C = 0.$$

[17] La definición general de un sistema invariante de norma, y que resulta ser la más útil para entender los sistemas de norma se debe a Dirac.

[18] Sólo se necesita dar los valores iniciales de q's y p's, los valores de v se mantienen indeterminados, una forma de verlo es que el estado físico inicial está determinado por las variables canónicas, no por v.

con $\delta v_i := (v_i - v_i')\,\delta t$. Con esto se puede ver que el estado físico del sistema se mantiene inalterado, por hipótesis, bajo estas transformaciones aplicadas a las variables canónicas. Este cambio en las variables canónicas consiste en aplicar una transformación de contacto infinitesimal con una función generadora $\delta v_i \phi^i$. Con esto se llega a la conclusión de que las restricciones de primera clase son *las funciones generadoras de transformaciones infinitesimales de contacto, que corresponden a cambios en las q's y p's que no afectan al estado físico del sistema.*[19].
Se puede ir más lejos y probar lo siguiente,

1. El paréntesis de Poisson $\{\phi^i, \phi^j\}$ de cualesquiera dos restricciones de primera clase genera una transformación de norma[20].

2. El paréntesis de Poisson $\{\phi^i, H'\}$ de cualquier restricción primaria de primera clase con la hamiltoninana de primera clase H' genera una transformación de norma.[21]

[19]Para abreviar, en lo siguiente se referirá a las restricciones de primara clase como las generadoras de transformaciones de norma.

[20]La veracidad de esta afirmación puede verse aplicando cuatro veces de manera sucesiva una transformación de norma (1.10.4), de la siguiente manera

$$F_1 := F + \epsilon_i\{F, \phi^i\},$$

$$F_2 := F_1 + \eta_j\{F_1, \phi^j\},$$
$$F_3 := F_2 - \epsilon_k\{F_2, \phi^k\},$$
$$F_4 := F_3 - \eta_l\{F_3, \phi^l\},$$

y en efecto, puede verse que (despreciando términos cuadráticos en ϵ y η),

$$F_4 := F + \eta_j\epsilon_i\{F, \{\phi^i, \phi^j\}\},$$

y al ser ϵ y η parámetros arbitrarios, se ve que en efecto se tiene una transformación de norma de la forma 1.10.4.

[21]Prueba:
Sea F una variables canónicas. Si se le aplica una transformación de norma (1.10.4) y posteriormente se evoluciona con H', i.e.,

$$F' := F + \eta_i\{F, \phi^i\} \;\;\rightarrow\;\; (F')_1 := \{F', H'\}.$$

Y a la misma variable F se le aplican las transformaciones en orden contrario,

$$F_1 := \{F, H'\} \;\;\rightarrow\;\; (F_1)' := F_1 + \eta_i\{F_1, \phi^i\}.$$

y se toma la diferencia, despreciendo términos cuadráticos en η y ϵ, se tiene,

$$(F')_1 - (F_1)' = \eta_i\{F, \{\phi^i, H'\}\},$$

Utilizando las dos afirmaciones anteriores se puede ver que, si a una variable canónica F se le aplica una transformación de la forma (1.10.4) y posteriormente se evoluciona en el tiempo con H_T,

$$F' := F + \eta_i\{F, \phi^i\} \;\; \rightarrow \;\; (F')_1 := \{F', H_T\}, \tag{1.10.5}$$

y luego se le aplican las mismas transformaciones en orden inverso,

$$F_1 := \{F, H_T\} \;\; \rightarrow \;\; (F_1)' := F_1 + \eta_i\{F_1, \phi^i\}; \tag{1.10.6}$$

la diferencia

$$(F')_1 - (F_1)' = \eta_i\{F, \{\phi^i, H'\}\} + \eta_i v_j\{F, \{\phi^i, \phi^j\}\}, \tag{1.10.7}$$

es también una transformación de norma que deja inalterado el estado físico del sistema.

1.11. Grados de libertad

Hasta este punto ya tenemos todos los ingredientes necesarios para proceder al conteo de grados de libertad. Antes de proceder al cálculo definamos este concepto.
Definición: Los grados de libertad de un sistema, son el número de variables físicas independientes necesarias para describir al sistema.

Recordando la manera en como se calculan los grados de libertad en Mecánica Elemental, el número de coordenadas generalizadas menos el número de ecuaciones independientes de las restricciones. Aquí se puede hacer una extrapolación de este hecho, y ver que suena razonable que el número de grados de libertad sea

$$\begin{aligned} GL &= \frac{1}{2}\Bigg[\begin{pmatrix} \textit{Número total de} \\ \textit{variables canónicas} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \textit{Número de restricciones de} \\ \textit{segunda clase originales} \end{pmatrix} \\ &\quad -2 \times \begin{pmatrix} \textit{Número de restricciones} \\ \textit{de primera clase} \end{pmatrix}\Bigg] \end{aligned} \tag{1.11.1}$$

Esto significa que el número de grados de libertad está dado por *todas* las variables canónicas independientes, q's y p's, menos todas las restricciones. Hay que considerar dos cosas, una es que el $1/2$ aparece para compensar el hecho de que usualmente los grados de libertad se refieren a las coordeneadas generalizadas, q's, y al considerar todas

la cual es una transformación de la forma (1.10.4) con generador $\{\phi^i, H'\}$, con lo que queda probada la afirmación. Lo anterior significa que la diferencia en el orden en que se aplican las transformaciones nos da una transformación que no altera el estado físico del sistema.

las variables canónicas estamos considerando en realidad el doble. Y el dos que acompaña a las restricciones de primara clase, es debido a su doble caracter, tanto de restricción, como de generadores de transformaciones de norma. Dicho de otra manera la teoría presenta restricciones y transformaciones de norma, que pueden verse como condiciones adicionales que cumple la teoría.

1.12. La acción y la hamiltoniana extendidas

Ahora bien, la hamiltoniana total, tal como se definió anteriormente, ya toma en cuenta todas las restricciones (primarias y secundarias), sin embargo, en ésta todavía no se hace una distinción entre restricciones de primera y segunda clase, que como ya se dijo no necesariamente vienen dadas directamente de las restricciones primarias y secundarias. Se puede pensar en una *hamiltoniana extendida* que ya considere esta separación entre las restriciones y además pueda tomar en cuenta transformaciones de norma, la cual está dada por,

$$H_E = H' + v_a \gamma^a, \tag{1.12.1}$$

donde H' se define de la misma manera que antes, sólo que ahora se hace evidente que,

$$H' = H_C + U_j \chi^j, \tag{1.12.2}$$

lo cual se podía haber intuído por la forma en que se construyó originalmente H'.
Cabe mencionar que es esta H_E la que da la evolución dinámica del sistema, mediante las ecuaciones de movimiento,

$$\dot{F} := \{F, H_E\}; \tag{1.12.3}$$

y para las variables dinámicas invariante de norma (i.e. variables tales que su paréntesis de Poisson con los generadores de norma γ^a es débilmente cero), la evolución dinámica dada por H', H_1 y H_E es la misma. Para cualesquiera otras variables es necesario usar H_E, que considera toda la libertad de norma del sistema.
Además estas ecuaciones, (1.12.3), si bien son matemáticamente distintas a (1.1.2), son por construcción, físicamente equivalentes.
Debe mencionarse que la necesidad de una hamiltoniana extendida no es algo que se deduzca de la formulación lagrangiana, pues es la hamiltoniana primaria la que genera las ecuaciones de movimiento (1.5.7) y (1.5.8) que son equivalentes, por construcción a las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.1.2); además de que H_E contiene más funciones arbitrarias que las que contiene H_1. La introducción de esta H_E es una nueva característica del marco hamiltoniano para poder incluir de manera manifiesta la invarianza de norma.

Nótese que las ecuaciones (1.12.3) se pueden obtener a partir de la acción,

$$S_E[q,p,v] = \int (p_n \dot{q}^n - H' - v_a \gamma^a)\, dt = \int (p_n \dot{q}^n - H_E)\, dt, \tag{1.12.4}$$

la cual se llamará *acción extendida* que, a diferencia de S dada por (1.5.5), ya contiene *toda* la información del sistema, i.e. ya considera la separación de restricciones entre de primera y segunda clase, ya contiene la información de la libertad de norma, y da como ecuaciones de movimiento

$$\dot{F} = \{F, H_E\} \tag{1.12.5}$$

y

$$\phi^a = \gamma^a \approx 0. \tag{1.12.6}$$

1.13. Paréntesis de Dirac

Debido a que la matriz $C^{\alpha\beta}$ es invertible, existe su inversa $C_{\alpha\beta}$ tal que

$$C^{\alpha\beta} C_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma. \tag{1.13.1}$$

Así, el *Paréntesis de Dirac* se define como,

$$\{F, G\}_D = \{F, G\} - \{F, \chi^\alpha\} C_{\alpha\beta} \{\chi^\beta, G\}, \tag{1.13.2}$$

con $\{,\}$ el paréntesis de Poisson. Y satisface las siguientes propiedades:

$$\{F, G\}_D = -\{G, F\}_D \tag{1.13.3}$$
$$\{F, GR\}_D = \{F, G\}_D R + G\{F, R\}_D \tag{1.13.4}$$
$$\{\{F, G\}_D, R\}_D + \{\{R, F\}_D, G\}_D + \{\{G, R\}_D, F\}_D = 0 \tag{1.13.5}$$
$$\{\chi^\alpha, F\}_D = 0, \quad \forall F \tag{1.13.6}$$
$$\{F, G\}_D \approx \{F, G\}, \quad G \textit{ de primera clase y } F \textit{ arbitraria.} \tag{1.13.7}$$
$$\{R\{F, G\}_D\}_D \approx \{R\{F, G\}\}. \tag{1.13.8}$$

La demostración de las propiedades anteriores es directa a partir de la definición del Paréntesis de Dirac, excepto en el caso de la identidad de Jacobi, pero su demostración no se tratará aquí.
Nótese que las ecuaciones de movimiento (1.12.5), debido a que H_E es de primera clase y (1.13.7), se pueden reescribir como,

$$\dot{F} = \{F, H_E\}_D, \tag{1.13.9}$$

y por los mismos argumentos, el efecto de una transformación de norma se puede escribir como,

$$\{F, \gamma^a\} \approx \{F, \gamma^a\}_D, \quad \forall F. \tag{1.13.10}$$

El panorama general hasta este momento es el siguiente. El paréntesis de Poisson, después de realizar la separación de las restricciones entre de primera y segunda clase, se generalizó al paréntesis de Dirac, en términos de la cual se pueden escribir las ecuaciones más relevantes del formalismo (como las ecuaciones (1.13.9) y (1.13.10)). Las restriciones de segunda clase se convierten en identidades para algunas variables canónicas en términos de otras. Además, es esta estructura del paréntesis de Dirac, la que, en analogía con lo que se hace usualmente, se promoverá a conmutador a la hora de intentar cuantizar la teoría.
En general, no es una tarea fácil construir este paréntesis, puesto que se necesita encontrar la inversa de la matriz $C^{\alpha\beta}$.

1.14. Observables

Una *observable* (clásica) es, por definición, una función que es invariante de norma en la superficie de restricciones, o dicho de otra forma, una observable es una función, $\mathcal{O}$, cuyo paréntesis de Dirac es débilmente cero con las restricciones de primera clase

$$\{\mathcal{O}, \gamma^a\}_D \approx 0. \tag{1.14.1}$$

Si bien a estas funciones $\mathcal{O}$ se les llamó observables, el dar un significado experimental de éstas va más allá de los alcances de la presente tesis. Finalmente, cabe mencionar que las observables clásicas no necesariamente lo serán en el caso cuántico.

Capítulo 2

Teoría BF

Una teoría BF, es una teoría topológica en el sentido de que carece de grados de libertad físicos. Las teorías BF tienen una relación estrecha con relatividad general puesto que es covariante bajo difeomorfismos e independiente del espacio-tiempo de fondo. El estudio de una teoría BF, es importante puesto que existen diversas formulaciones como la formulación de Plebański o la de Macdowell-Mansouri donde existe una relación estrecha entre una teoría BF y la relatividad general. A grandes rasgos, la formulación de Plebański consiste en obtener a relatividad general a partir de una teoría BF con restricciones extras, en este caso el grupo de simetría puede ser $SO(3,1)$ para describir gravedad Lorentziana o $SO(4)$ para describir gravedad Riemanniana, por su puesto, el caso Lorentziano es el caso real y $SO(4)$ es un modelo no físico pero interesante.
Por otra parte, en el caso de la formulación de Macdowell-Mansouri uno parte de una acción BF con el grupo de simetría $SO(5)$, uno rompe el grupo de simetría de $SO(5)$ a $SO(4)$ obteniendo así a relatividad general más la suma de invariantes topológicos como la segunda clase de Chern y el invariante de Euler. Debido a que esos invariantes se pueden escribir como una derivada total, su contribución a las ecuaciones de movimiento es nula y así en esencia se obtiene las ecuaciones de movimiento de Einstein.
De esta manera, el estudio de una teoría BF es fundamental como un inicio para entender las simetrías de relatividad general. En este capítulo, analizaremos la formulación Hamiltoniana de una teoría BF en términos de nuevas variables.
La acción está dada de la siguiente manera

$$S[A,B] = \int B^{IJ} \wedge F_{IJ}, \tag{2.0.1}$$

donde F^{IJ} es la 2-forma de curvatura de la conexión A^{IJ} que está dada por

$$F^{IJ} = \frac{1}{2} F^{IJ}_{\alpha\beta} \mathrm{d}x^{\alpha} \wedge \mathrm{d}x^{\beta},$$

donde $F^{IJ}_{\alpha\beta}$ está definida como

$$F^{IJ}_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha} A^{IJ}_{\beta} - \partial_{\beta} A^{IJ}_{\alpha} + A^{I}_{\alpha K} A^{KJ}_{\beta} + A^{J}_{\alpha K} A^{IK}_{\beta},$$

y por consecuencia cumple las siguientes propiedades[1]

$$\begin{aligned} F^{IJ}_{\alpha\beta} &= -F^{JI}_{\alpha\beta}, \\ F^{IJ}_{\alpha\beta} &= -F^{IJ}_{\beta\alpha}, \end{aligned}$$

aquí usamos la notación $\alpha, \beta ... = 0, 1, 2, 3$ y $I, J, K ... = 0, 1, 2, 3$, x^{α} son coordenadas que etiquetan la variedad del espacio tiempo. Por otra parte, B_{IJ} es un campo auxiliar que corresponde a una 2-forma valuada en el grupo $SO(3,1)$ que tiene la siguiente expresión

$$B_{IJ} = \frac{1}{2} B_{IJ\alpha\beta} \mathrm{d}x^{\alpha} \wedge \mathrm{d}x^{\beta}.$$

De esta manera, obtenemos que

$$\begin{aligned} B^{IJ} \wedge F_{IJ} &= \frac{1}{2} B^{IJ}_{\alpha\beta} \mathrm{d}x^{\alpha} \wedge \mathrm{d}x^{\beta} \wedge \frac{1}{2} F_{IJ\mu\nu} \mathrm{d}x^{\mu} \wedge \mathrm{d}x^{\nu} = \frac{1}{4} B^{IJ}_{\alpha\beta} F_{IJ\mu\nu} \mathrm{d}x^{\alpha} \wedge \mathrm{d}x^{\beta} \wedge \mathrm{d}x^{\mu} \wedge \mathrm{d}x^{\nu} \\ &= \frac{1}{4} B^{IJ}_{\alpha\beta} F_{IJ\mu\nu} \mathrm{d}x^{4}. \end{aligned} \tag{2.0.2}$$

De la acción anterior es posible obtener las ecuaciones de movimiento. Debido a que las variables dinámicas de la acción corresponden a A^{IJ} y B^{IJ}, variaremos la acción (2.0.2) con respecto a cada una de ellas para obtener las ecuaciones de movimiento. De esta manera, si variamos con respecto a la variable $B^{IJ}_{\alpha\beta}$ obtendremos la primera ecuación de movimiento

$$\frac{\delta}{\delta B^{IJ}_{\alpha\beta}} \Big[B^{IJ} \wedge F_{IJ} \Big] = \frac{\delta}{\delta B^{IJ}_{\alpha\beta}} \Big[\frac{1}{4} B^{IJ}_{\alpha\beta} F_{IJ\mu\nu} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \Big] = F^{IJ}_{\alpha\beta} = 0,$$

que en forma compacta podemos escribir

[1] B_{IJ} también cumple estas propiedades

$$F_{IJ} = 0. \tag{2.0.3}$$

Ahora si variamos la acción (2.0.1) con respecto a la variable A_σ^{IJ} obtendremos la segunda ecuación de movimiento

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta A_\sigma^{IJ}}\left[B^{IJ} \wedge F_{IJ}\right] = \frac{\delta}{\delta A_\sigma^{IJ}}\left[\frac{1}{4}B_{\alpha\beta}^{IJ} F_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\right] \\
= \;& \frac{1}{4}B_{IJ\alpha\beta}\frac{\delta}{\delta A_\sigma^{IJ}}\left[\partial_\mu A_\nu^{IJ} - \partial_\nu A_\mu^{IJ} + A_{\mu k}^{I} A_\nu^{kJ} + A_{\mu k}^{J} A_\nu^{Ik}\right]\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \\
= \;& \frac{1}{2}D_\nu B_{IJ\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} = 0,
\end{aligned}$$

que en forma compacta podemos escribir como

$$DB_{IJ} = 0, \tag{2.0.5}$$

donde D que tiene la forma $\partial + A$ es la derivada covariante.

2.1. Cambios de Variable

Ahora, romperemos la covarianza de Lorentz local y definimos las siguientes variables: $B^i = -\frac{1}{2}\epsilon^i{}_{jk}B^{jk}$, $\Pi^a{}_i = \Xi\eta^{abc}B_{ibc}$, $P^a_i = \Xi\eta^{abc}B_{0ibc}$, $\tau^i = -\gamma_0^i$, $\Lambda^i = -\omega_0{}^{0i}$, $\chi_{i0a} = -2B_{i0a}$, $\varsigma_{ia} = -2B_{0i0a}$, $B^i{}_{bc} = -\frac{1}{2}\epsilon^i{}_{jk}B^{jk}{}_{bc}$, $\gamma^i = -\frac{1}{2}\epsilon^i{}_{jk}\omega^{jk}$, $\epsilon^{0abc} = \eta^{0abc} = \eta^{abc}$, donde Ξ es una constante [14, 15]. La variable F^{IJ} está dada en términos de las nuevas variables de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
F_{ibc} &= \left[\partial_b\gamma_{ic} - \partial_c\gamma_{ib} - \epsilon_{ijk}\omega_b{}^{j0}\omega_{c0}{}^k + \epsilon_{ijk}\gamma_b^j\gamma_c^k\right], \\
F_{0ibc} &= \left[\partial_b\omega_{c0i} - \partial_c\omega_{b0i} + \epsilon_{ijk}\omega_b{}^k{}_0\gamma_c^j - \epsilon_{ijk}\omega_c{}^k{}_0\gamma_b^j\right],
\end{aligned}$$

donde $i, j, k = 1, 2, 3$ y $\alpha, \beta = 0, a, b, c$, con $a, b, c = 1, 2, 3$.
De esta manera, tenemos que para la acción (2.0.1), si corremos los índices espacio-tiempo y de grupo obtenemos

$$
\begin{aligned}
B^{IJ} \wedge F_{IJ} &= \frac{1}{4} B^{IJ}_{\alpha\beta} F_{IJ\mu\nu} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{4} B^{0J}_{\alpha\beta} F_{0J\mu\nu} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{4} B^{iJ}_{\alpha\beta} F_{iJ\mu\nu} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \\
&= \frac{1}{4} B^{0j}_{\alpha\beta} F_{0j\mu\nu} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{4} B^{i0}_{\alpha\beta} F_{i0\mu\nu} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{4} B^{ij}_{\alpha\beta} F_{ij\mu\nu} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2} B^{0j}_{\alpha\beta} F_{0j\mu\nu} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{4} B^{ij}_{\alpha\beta} F_{ij\mu\nu} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2} B^{0j}_{0a} F_{0jbc} \epsilon^{0abc} + \frac{1}{2} B^{0j}_{a0} F_{0jbc} \epsilon^{a0bc} + \frac{1}{2} B^{0j}_{ab} F_{0j0c} \epsilon^{ab0c} + \frac{1}{2} B^{0j}_{ab} F_{0jc0} \epsilon^{abc0} \\
&\quad + \frac{1}{4} B^{ij}_{0a} F_{ijbc} \epsilon^{0abc} + \frac{1}{4} B^{ij}_{a0} F_{ijbc} \epsilon^{a0bc} + \frac{1}{4} B^{ij}_{ab} F_{ij0c} \epsilon^{ab0c} + \frac{1}{4} B^{ij}_{ab} F_{ijc0} \epsilon^{abc0} \\
&= B^{0j}_{0a} F_{0jbc} \eta^{abc} + B^{0j}_{ab} F_{0j0c} \eta^{abc} + \frac{1}{2} B^{ij}_{0a} F_{ijbc} \eta^{abc} + \frac{1}{2} B^{ij}_{ab} F_{ij0c} \eta^{abc}. \qquad (2.1.1)
\end{aligned}
$$

Ahora introduciendo las variables definidas anteriormente, encontramos que (2.1.1) se puede escribir como

$$
\begin{aligned}
& B^{IJ} \wedge F_{IJ} = -\frac{1}{2} \varsigma_{ja} F^{0j}_{bc} \eta^{abc} + \left[\dot{\omega}_c{}^{0i} - \partial_c \omega_0{}^{0i} + \epsilon^i{}_{jk} \omega^0_0 \gamma^j_c - \epsilon^i{}_{jk} \omega_c{}^{k0} \gamma^j_0 \right] \frac{P^c_i}{\Xi} - \frac{1}{2} \epsilon^{ij}{}_l B^l{}_{0a} F_{ijbc} \eta^{abc} \\
& -\frac{1}{2} \epsilon^{ij}{}_l B^l{}_{ab} F_{ij0c} \eta^{abc} \\
= \; & \frac{1}{2} \varsigma^j_a F_{0jbc} \eta^{abc} - \frac{1}{2} \chi^l{}_{0a} F_{lbc} \eta^{abc} + \dot{\omega}_c{}^{0i} \frac{P^c_i}{\Xi} - \frac{\Lambda^i}{\Xi} \partial_c P^c_i - \frac{\Lambda^k}{\Xi} \epsilon_{kj}{}^i \gamma^j_c P^c_i - \frac{\tau^j}{\Xi} \epsilon_{jk}{}^i \omega^{0k}_c P^c_i \\
& + \left[\dot{\gamma}^i_c - \partial_c \gamma^i_0 - \epsilon^i{}_{jk} \omega_0{}^{j0} \omega_{c0}{}^k + \epsilon^i{}_{jk} \gamma^j_0 \gamma^k_c \right] \frac{\Pi^c_i}{\Xi} \\
= \; & \frac{1}{\Xi} \dot{\omega}_c{}^{0i} P^c_i + \frac{1}{\Xi} \dot{\gamma}^i_c \Pi^c_i - \frac{\Lambda^i}{\Xi} \left[\partial_c P^c_i + \epsilon_{ij}{}^k \gamma^j_c P^c_k - \epsilon_{ij}{}^k \omega_c{}^{0j} \Pi^c_k \right] - \frac{\tau^i}{\Xi} \left[\partial_c \Pi^c_i + \epsilon_{ij}{}^k \omega_c{}^{0j} P^c_k + \epsilon_{ij}{}^k \gamma^j_c \Pi^c_k \right] \\
& + \frac{1}{2} \varsigma^j_a F_{0jbc} \eta^{abc} - \frac{1}{2} \chi^l{}_{0a} F_{lbc} \eta^{abc}.
\end{aligned}
$$

De este modo, se puede observar que la acción BF en términos de las nuevas variables tiene la forma [15]

$$
\begin{aligned}
& S[\gamma^i_a, \pi^a_i, \omega_a{}^{0i}, P^a_i, \tau^i, \Lambda^i, \varsigma^i{}_a, \chi^i{}_{0a}] \\
= \; & \int \frac{1}{\Xi} \dot{\omega}_c{}^{0i} P^c_i + \frac{1}{\Xi} \dot{\gamma}^i_c \Pi^c_i - \frac{\Lambda^i}{\Xi} \left[\partial_c P^c_i + \epsilon_{ij}{}^k \gamma^j_c P^c_k - \epsilon_{ij}{}^k \omega_c{}^{0j} \Pi^c_k \right] - \frac{\tau^i}{\Xi} \left[\partial_c \Pi^c_i + \epsilon_{ij}{}^k \omega_c{}^{0j} P^c_k + \epsilon_{ij}{}^k \gamma^j_c \Pi^c_k \right] \\
& + \frac{1}{2} \varsigma^j_a F_{0jbc} \eta^{abc} - \frac{1}{2} \chi^l{}_{0a} F_{lbc} \eta^{abc}. \qquad (2.1.2)
\end{aligned}
$$

Podemos observar que la acción (2.1.2) se ha llevado a la forma que encontramos en (1.6.1) donde $H_c = 0$. Este resultado es esperado puesto que la covarianza bajo difeomorfismos se mantiene. De (2.1.2) podemos identificar los paréntesis fundamentales de Poisson o estructura simpléctica, dados por

$$\frac{1}{\Xi}\{\gamma^i_a(x), \Pi^b_j(y)\} = \delta^i_j \delta^b_a \delta^3(x-y), \tag{2.1.3}$$
$$\frac{1}{\Xi}\{\omega_a{}^{0i}(x), P^b_j(y)\} = \delta^b_a \delta^i_j \delta^3(x-y), \tag{2.1.4}$$

y si variamos la acción respecto a las variables $\tau^i, \Lambda^i, \varsigma^i{}_a, \chi^i{}_{0a}$ se obtiene que

$$\frac{\delta S}{\delta \tau^i} = \partial_a \Pi^a_i + \epsilon_{ik}{}^j \omega_a{}^{0k} P^a_j + \epsilon_{ik}{}^j \gamma^k_a \Pi^a_j = 0 = \phi_i, \tag{2.1.5}$$
$$\frac{\delta S}{\delta \Lambda^i} = \partial_a P^a_i + \epsilon_{il}{}^k \gamma^l_a P^a_k - \epsilon_{ik}{}^l \omega_a{}^{0k} \Pi^a_l = 0 = \psi_i, \tag{2.1.6}$$
$$\frac{\delta S}{\delta \varsigma^i{}_a} = F_{0ibc}\eta^{abc} = 0 = \Psi^a_i, \tag{2.1.7}$$
$$\frac{\delta S}{\delta \chi^i{}_{0a}} = -F_{ibc}\eta^{abc} = 0 = \Phi^a_i, \tag{2.1.8}$$

donde se pueden identificar las siguientes restricciones

$$\phi_l = \partial_a \Pi^a_l + \epsilon_{lk}{}^j \omega_a{}^{0k} P^a_j + \epsilon_{lk}{}^j \gamma^k_a \Pi^a_j = 0, \tag{2.1.9}$$
$$\psi_j = \partial_a P^a_j + \epsilon_{jl}{}^k \gamma^l_a P^a_k - \epsilon_{jk}{}^l \omega_a{}^{0k} \Pi^a_l = 0, \tag{2.1.10}$$
$$\Psi^a_i = \left(2\partial_b \omega_{c0i} + 2\epsilon_{ijk} \omega_b{}^k{}_0 \gamma^j_c\right) \eta^{abc} = 0, \tag{2.1.11}$$
$$\Phi^a_i = -\left(2\partial_b \gamma_{ic} - \epsilon_{ijk} \omega_b{}^{j0} \omega_{c0}{}^k + \epsilon_{ijk} \gamma^j_b \gamma^k_c\right) \eta^{abc} = 0. \tag{2.1.12}$$

y las variables $\tau^i, \Lambda^i, \varsigma^i{}_0, \chi^i{}_{0a}$ son identificadas como multiplicadores de Lagrange.

2.2. Álgebra de restricciones

En esta parte calcularemos los paréntesis de Poisson entre todas las restricciones encontradas. Primero, a partir de las restricciones (2.1.9)-(2.1.12) tenemos que los paréntesis de Poisson triviales entre las restricciones están dados por

$$\{\Phi_i^a(x), \Phi_j^b(y)\} = 0, \tag{2.2.1}$$

$$\{\Phi_i^a(x), \Psi_j^b(y)\} = 0, \tag{2.2.2}$$

$$\{\Psi_i^a(x), \Psi_j^b(y)\} = 0. \tag{2.2.3}$$

Los paréntesis no triviales los calculamos de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\{\phi_i(x), \phi_l(y)\} &= \{\partial_a \Pi_i^a(x) + \epsilon_{ij}{}^k P_k^a(x)\omega_a{}^{0j}(x) + \epsilon_{ij}{}^k \gamma_a^j(x)\Pi_k^a(x), \partial_b \Pi_l^b(y) \\
&\quad + \epsilon_{lq}{}^p P_p^n(y)\omega_n{}^{0q}(y) + \epsilon_{lq}{}^p \gamma_n^q(y)\Pi_p^n(y)\} \\
&= \{\partial_a \Pi_i^a(x), \partial_b \Pi_l^b(y) + \epsilon_{lq}{}^p P_p^n(y)\omega_n{}^{0q}(y) + \epsilon_{lq}{}^p \gamma_n^q(y)\Pi_p^n(y)\} \\
&\quad + \{\epsilon_{ij}{}^k P_k^a(x)\omega_a{}^{0j}(x), \partial_b \Pi_l^b(y) + \epsilon_{lq}{}^p P_p^n(y)\omega_n{}^{0q}(y) + \epsilon_{lq}{}^p \gamma_n^q(y)\Pi_p^n(y)\} \\
&\quad + \{\epsilon_{ij}{}^k \gamma_a^j(x)\Pi_k^a(x), \partial_b \Pi_l^b(y) + \epsilon_{lq}{}^p P_p^n(y)\omega_n{}^{0q}(y) + \epsilon_{lq}{}^p \gamma_n^q(y)\Pi_p^n(y)\} \\
&= \{\partial_a \Pi_i^a(x), \partial_b \Pi_l^b(y)\} + \{\partial_a \Pi_i^a(x), \epsilon_{lq}{}^p P_p^n(y)\omega_n{}^{0q}(y)\} \\
&\quad + \{\partial_a \Pi_i^a(x), \epsilon_{lq}{}^p \gamma_n^q(y)\Pi_p^n(y)\} + \{\epsilon_{ij}{}^k P_k^a(x)\omega_a{}^{0j}(x), \partial_b \Pi_l^b(y)\} \\
&\quad + \{\epsilon_{ij}{}^k P_k^a(x)\omega_a{}^{0j}(x), \epsilon_{lq}{}^p P_p^n(y)\omega_n{}^{0q}(y)\} + \{\epsilon_{ij}{}^k P_k^a(x)\omega_a{}^{0j}(x), \epsilon_{lq}{}^p \gamma_n^q(y)\Pi_p^n(y)\} \\
&\quad + \{\epsilon_{ij}{}^k \gamma_a^j(x)\Pi_k^a(x), \partial_b \Pi_l^b(y)\} + \{\epsilon_{ij}{}^k \gamma_a^j(x)\Pi_k^a(x), \epsilon_{lq}{}^p P_p^n(y)\omega_n{}^{0q}(y)\} \\
&\quad + \{\epsilon_{ij}{}^k \gamma_a^j(x)\Pi_k^a(x), \epsilon_{lq}{}^p \gamma_n^q(y)\Pi_p^n(y)\} \\
&= \partial_{a_x}\partial_{b_y}\left[\{\Pi_i^a(x), \Pi_l^b(y)\}\right] + \epsilon_{lq}{}^p \partial_{a_x}\left[P_p^n(y)\{\Pi_i^a(x), \omega_n{}^{0q}(y)\}\right] \\
&\quad + \epsilon_{lq}{}^p \partial_{a_x}\left[\{\Pi_i^a(x), P_p^n(y)\}\omega_n{}^{0q}\right] + \epsilon_{lq}{}^p \partial_{a_x}\left[\gamma_n^q(y)\{\Pi_i^a(x), \Pi_n^p(y)\}\right] \\
&\quad + \epsilon_{lq}{}^p \partial_{a_x}\left[\{\Pi_i^a(x), \gamma_q^n(y)\}\Pi_p^n\right] + \epsilon_{ij}{}^k \partial_{b_y}\left[P_k^a(x)\{\omega_a{}^{0j}(x), \Pi_l^b(y)\}\right] \\
&\quad + \epsilon_{ij}{}^k \partial_{b_y}\left[\{P_k^a(x), \Pi_l^b(y)\}\omega_a{}^{0j}(x)\right] + \epsilon_{ij}^k \epsilon_{lq}{}^p P_k^a(x)P_p^n(y)\{\omega_a^{0j}(x), \omega_n^{0q}(y)\} \\
&\quad + \epsilon_{ij}^k \epsilon_{lq}{}^p P_k^a(x)\{\omega_a^{0j}(x), P_p^n(y)\}\omega_n^{0q}(y) + \epsilon_{ij}^k \epsilon_{lq}{}^p P_p^n(y)\{P_k^a(x), \omega_n^{0q}(y)\}\omega_a^{0j}(x) \\
&\quad + \epsilon_{ij}^k \epsilon_{lq}{}^p \{P_k^a(x), P_p^n(y)\}\omega_n^{0q}(y)\omega_a^{0j}(x) + \epsilon_{ij}^k \epsilon_{lq}{}^p \{P_k^a(x), \gamma_n^q(y)\}\omega_a^{0j}(x)\Pi_p^n(y) \\
&\quad + \epsilon_{ij}^k \epsilon_{lq}{}^p P_k^a(x)\gamma_n^q(y)\{\omega_a^{0j}(x)\Pi_p^n(y)\} + \epsilon_{ij}^k \epsilon_{lq}{}^p \gamma_n^q(y)\{P_k^a(x), \Pi_p^n(y)\}\omega_a^{0j}(x) \\
&\quad + \epsilon_{ij}^k \epsilon_{lq}{}^p P_k^a(x)\{\gamma_n^q(y), \omega_a^{0j}(x)\}\Pi_p^n(y) + \epsilon_{ij}{}^k \partial_{b_y}\left[\{\gamma_a^j(x), \Pi_l^b(y)\}\Pi_k^a(x)\right] \\
&\quad + \epsilon_{ij}{}^k \partial_{b_y}\left[\gamma_a^j(x)\{\Pi_k^a(x), \Pi_l^b(y)\}\right] + \epsilon_{ij}{}^k \epsilon_{lq}{}^p \{\gamma_a^j(x), P_p^n(y)\}\Pi_k^a(x)\omega_n^{0q}(y) \\
&\quad + \epsilon_{ij}{}^k \epsilon_{lq}{}^p \gamma_a^j(x)P_p^n(y)\{\Pi_k^a(x), \omega_n^{0q}(y)\} + \epsilon_{ij}{}^k \epsilon_{lq}{}^p P_p^n(y)\{\gamma_a^j(x), \omega_n^{0q}(y)\}\Pi_k^a(x) \\
&\quad + \epsilon_{ij}{}^k \epsilon_{lq}{}^p \gamma_a^j(x)\{\Pi_k^a(x), P_p^n(y)\}\omega_n^{0q}(y) + \epsilon_{ij}{}^k \epsilon_{lq}{}^p \{\gamma_a^j(x), \gamma_n^q(y)\}\Pi_k^a(x)\Pi_p^n(y) \\
&\quad + \epsilon_{ij}{}^k \epsilon_{lq}{}^p \gamma_a^j(x)\gamma_n^q(y)\{\Pi_k^a(x), \Pi_p^n(y)\} + \epsilon_{ij}{}^k \epsilon_{lq}{}^p \gamma_n^q(y)\{\gamma_a^j(x), \Pi_p^n(y)\}\Pi_k^a(x) \\
&\quad + \epsilon_{ij}{}^k \epsilon_{lq}{}^p \gamma_a^j(x)\{\Pi_k^a(x), \gamma_n^q(y)\}\Pi_p^n(y)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \;& \epsilon_{lq}{}^{p}\partial_{a_x}\left[P_p^n(y)\{\Pi_i^a(x),\omega_n{}^{0q}(y)\}\right] + \epsilon_{lq}{}^{p}\partial_{a_x}\left[\{\Pi_i^a(x),\gamma_n^q(y)\}\Pi_p^n(y)\right] \\
&+\epsilon_{ij}{}^{k}\partial_{b_y}\left[P_k^a(x)\{\omega_a{}^{0j}(x),\Pi_l^b(y)\}\right] + \epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lq}{}^{p}P_k^a(x)\{\omega_a{}^{0j}(x),P_p^n(y)\}\omega_n{}^{0q}(y) \\
&+\epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lq}{}^{p}P_p^n(y)\{P_k^a(x),\omega_n{}^{0q}(y)\}\omega_a{}^{0j}(x) + \epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lq}{}^{p}\{P_k^a(x),\gamma_n^q(y)\}\omega_a{}^{0j}(x)\Pi_p^n(y) \\
&+\epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lq}{}^{p}P_k^a(x)\gamma_n^q(y)\{\omega_a{}^{0j}(x),\Pi_p^n(y)\} + \epsilon_{ij}{}^{k}\partial_{b_y}\left[\{\gamma_a^j(x),\Pi_l^b(y)\}\Pi_k^a(x)\right] \\
&+\epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lq}{}^{p}\{\gamma_a^j(x),P_p^n(y)\}\Pi_k^a(x)\omega_n{}^{0q}(y) + \epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lq}{}^{p}\gamma_a^j(x)P_p^n(y)\{\Pi_k^a(x),\omega_n{}^{0q}(y)\} \\
&+\epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lq}{}^{p}\gamma_n^q(y)\{\gamma_a^j(x),\Pi_p^n(y)\}\Pi_k^a(x) + \epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lq}{}^{p}\gamma_a^j(x)\{\Pi_k^a(x),\gamma_n^q(y)\}\Pi_p^n(y), \quad (2.2.4)
\end{aligned}
$$

utilizando los paréntesis fundamentales (2.1.3) y (2.1.4) en (2.2.4) obtenemos

$$
\begin{aligned}
\{\phi_i(x),\phi_l(y)\} \;=\;& \Xi\Big(-\epsilon_{lq}{}^{p}\partial_{a_x}\left[\delta_n^a\delta_n^q\delta^3(x-y)\Pi_p^n(y)\right] + \epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lq}{}^{p}P_k^a(x)\delta_a^n\delta_p^j\delta^3(x-y)\omega_n{}^{0q}(y) \\
&-\epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lq}{}^{p}P_p^n(y)\delta_n^a\delta_k^q\delta^3(x-y)\omega_a{}^{0j}(x) + \epsilon_{ij}{}^{k}\partial_{b_y}\left[\delta_l^j\delta_a^b\delta^3(x-y)\Pi_k^a(x)\right] \\
&+\epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lq}{}^{p}\gamma_n^q(y)\delta_p^j\delta_a^n\delta^3(x-y)\Pi_k^a(x) - \epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lq}{}^{p}\gamma_a^j\delta_n^a\delta_k^q\delta^3(x-y)\Pi_p^n(y)\Big) \\
=\;& \Xi\Big(-\epsilon_{li}{}^{p}\partial_{a_x}\left[\delta^3(x-y)\Pi_p^a(y)\right] + \epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lq}{}^{j}P_k^a(x)\delta^3(x-y)\omega_a{}^{0q}(y) \\
&-\epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lk}{}^{p}P_p^a(y)\delta^3(x-y)\omega_a{}^{0j}(x) + \epsilon_{il}{}^{k}\partial_{a_y}\left[\delta^3(x-y)\Pi_k^a(x)\right] \\
&+\epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lq}{}^{j}\gamma_a^q(y)\delta^3(x-y)\Pi_k^a(x) - \epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lk}{}^{p}\gamma_a^j\delta^3(x-y)\Pi_p^a(y)\Big). \quad (2.2.5)
\end{aligned}
$$

Por otro lado el primer término de la última igualdad de (2.2.5) está dado por

$$
\begin{aligned}
-\epsilon_{li}{}^{p}\partial_{a_x}\left[\delta^3(x-y)\Pi_p^a(y)\right] \;=\;& \epsilon_{il}{}^{p}\partial_{a_x}\delta^3(x-y)\Pi_p^a(y) = -\epsilon_{il}{}^{p}\partial_{a_y}\delta^3(x-y)\Pi_p^a(y) \\
=\;& -\epsilon_{il}{}^{p}\partial_{a_y}\left[\delta^3(x-y)\Pi_p^a(y)\right] \\
&+\epsilon_{il}{}^{p}\delta^3(x-y)\partial_{a_x}\Pi_p^a(y). \quad (2.2.6)
\end{aligned}
$$

Una identidad que usaremos de ahora en adelante es la identidad de Jacobi que está dada de la siguiente forma

$$
C^{i}{}_{[jk}C^{l}{}_{m]n} = 0 \quad (2.2.7)
$$

donde $C^{i}{}_{jk}$ son las contantes de estructura. Sustituyendo la expresión (2.2.7) en (2.2.5) obtenemos

$$
\{\phi_i(x),\phi_j(y)\} = \Xi\epsilon_{ij}{}^{k}\phi_k\delta^3(x-y). \quad (2.2.8)
$$

Utilizando el mismo procedimiento para la obtención del paréntesis (2.2.4), obtenemos lo siguiente

$$
\begin{aligned}
\{\psi_i(x),\psi_l(y)\} &= \{\partial_a P^a_i(x) + \epsilon_{ij}{}^k P^a_k(x)\gamma^j_a(x) - \epsilon_{ij}{}^k \Pi^a_k(x)\omega_a{}^{0j}(x), \partial_b P^b_l(y) + \epsilon_{lq}{}^p P^n_p(y)\gamma^q_n(y) \\
&\quad -\epsilon_{lq}{}^p \Pi^n_p(y)\omega_n{}^{0q}(y)\} \\
&= \epsilon_{lq}{}^p \partial_{a_x}\left([P^n_p(y)\{P^a_i(x),\gamma^q_n(y)\}\right] - \epsilon_{lq}{}^p\partial_{a_x}\left[\Pi^n_p(y)\{P^a_i(x),\omega_n{}^{0q}(y)\}\right] \\
&\quad +\epsilon_{ij}{}^k\partial_{b_y}\left[P^a_k(x)\{\gamma^j_a(x),P^b_l(y)\}\right] + \epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lq}{}^p P^n_p(y)\{P^a_k(x),\gamma^q_n(y)\}\gamma^j_a(x) \\
&\quad +\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lq}{}^p P^a_k(x)\{\gamma^j_a(x),P^n_p(y)\}\gamma^q_n(y) - \epsilon_{ij}{}^k\epsilon^{lq}{}_p P^a_k(x)\{\gamma^j_a(x),\Pi^n_p(y)\}\omega_n{}^{0q}(y) \\
&\quad -\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lq}{}^p\Pi^n_p(y)\{P^a_k(x),\omega_n{}^{0q}(y)\}\gamma^j_a(x) - \epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lq}{}^p\partial_{b_y}\left[\Pi^a_k(x)\{\omega_a{}^{0j}(x),P^b_l(y)\}\right] \\
&\quad -\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lq}{}^p\Pi^a_k(x)\{\omega_a{}^{0j}(x),P^n_p(y)\}\gamma^q_n(y) - \epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lq}{}^p P^n_p(y)\{\Pi^a_k(x),\gamma^q_n(y)\}\omega_a{}^{0j}(x) \\
&\quad +\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lq}{}^p\Pi^a_k(x)\{\omega_a{}^{0j}(x),\Pi^n_p(y)\}\omega_n{}^{0q}(y) \\
&\quad +\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lq}{}^p\Pi^n_p(y)\{\Pi^a_k(x),\omega_n{}^{0q}(y)\}\omega_a{}^{0j}(x), \qquad (2.2.9)
\end{aligned}
$$

tomando en cuenta (2.1.3) y (2.1.4) en (2.2.9) encontramos que

$$
\begin{aligned}
\{\psi_i(x),\psi_l(y)\} &= \Xi\Big(\epsilon_{lq}{}^p\partial_{a_x}\left[\Pi^n_p(y)\delta^a_n\delta^q_i\delta^3(x-y)\right] - \epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lq}{}^p P^a_k(x)\delta^j_p\delta^n_a\delta^3(x-y)\omega_n{}^{0q}(y) \\
&\quad +\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lq}{}^p\Pi^n_p(y)\delta^a_n\delta^q_k\delta^3(x-y)\gamma^j_a(x) - \epsilon_{ij}{}^k\partial_{b_y}\left[\Pi^a_k(x)\delta^b_a\delta^j_l\delta^3(x-y)\right] \\
&\quad -\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lq}{}^p\Pi^a_k(x)\delta^n_a\delta^j_p\delta^3(x-y)\gamma^q_n(y) + \epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lq}{}^p P^n_p(y)\delta^a_n\delta^q_k\delta^3(x-y)\omega_a{}^{0j}(y)\Big) \\
&= \Xi\Big(\epsilon_{li}{}^p\partial_{a_x}\left[\Pi^a_p(y)\delta^3(x-y)\right] - \epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lq}{}^j P^a_k(x)\delta^3(x-y)\omega_a{}^{0q}(y) \\
&\quad +\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lk}{}^p\Pi^a_p(y)\delta^3(x-y)\gamma^j_a(x) - \epsilon_{il}{}^k\partial_{a_y}\left[\Pi^a_k(x)\delta^3(x-y)\right] \\
&\quad -\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lq}{}^j\Pi^a_k(x)\delta^3(x-y)\gamma^q_a(y) + \epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lk}{}^p P^a_p(y)\delta^3(x-y)\omega_a{}^{0j}(y)\Big). \qquad (2.2.10)
\end{aligned}
$$

La ecuación (2.2.10) es el negativo de (2.2.5) por lo que aplicando esto en (2.2.10) podemos ver que

$$
\{\psi_i(x),\psi_j(y)\} = -\Xi\epsilon_{ij}{}^k\phi_k\delta^3(x-y). \qquad (2.2.11)
$$

Por otro lado, el paréntesis entre las restricciones $\phi_i(x)$ y $\psi_l(y)$ tiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
\{\phi_i(x),\psi_l(y)\} &= \{\partial_a\Pi^a_i + \epsilon_{ij}{}^k P^a_k(x)\omega_a{}^{0j}(x) + \epsilon_{ij}{}^k\gamma^j_a(x)\Pi^a_k(x), \partial_b P^p_l(y) \\
&\quad +\epsilon_{lq}{}^p P^n_p(y)\gamma^q_n(y) - \epsilon_{lq}{}^p\Pi^n_p(y)\omega_n{}^{0q}(y)\} \\
&= \epsilon_{lq}{}^p\partial_{a_x}\left[P^n_p(y)\{\Pi^a_i(x),\gamma^q_n(y)\}\right] - \epsilon_{lq}{}^p\partial_{a_x}\left[\Pi^n_p(y)\{\Pi^a_i(x),\omega_n{}^{0q}(y)\}\right] \\
&\quad +\epsilon_{ij}{}^k\partial_{b_y}\left[P^a_k(x)\{\omega_a{}^{0j}(x),P^b_l(y)\}\right] + \epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lq}{}^p P^a_k\{\omega_a{}^{0j}(x),P^n_p(y)\}\gamma^q_n(y) \\
&\quad +\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lq}{}^p P^n_p(y)\{P^a_k(x),\gamma^q_n(y)\}\omega_a{}^{0j}(x) - \epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lq}{}^p P^a_k(x)\{\omega_a{}^{0j}(x),\Pi^n_p(y)\}\omega_n{}^{0q}(y) \\
&\quad -\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lq}{}^p\Pi^n_p(y)\{P^a_k(x),\omega_n{}^{0q}(y)\}\omega_a{}^{0j}(x) + \epsilon_{ij}{}^k\partial_{b_y}\left[\{\gamma^j_a(x),P^b_l(y)\}\Pi^a_k(x)\right] \\
&\quad +\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lq}{}^p\gamma^j_a(x)P^n_p(y)\{\Pi^a_k(x),\gamma^q_n(y)\} + \epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lq}{}^p\{\gamma^j_a(x),P^n_p(y)\}\Pi^a_k(x)\gamma^q_n(y) \\
&\quad -\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lq}{}^p\gamma^j_a(x)\Pi^n_p(y)\{\Pi^a_k(x),\omega_n{}^{0q}(y)\} \\
&\quad -\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lq}{}^p\{\gamma^j_a(x),\Pi^n_p(y)\}\Pi^a_k(x)\omega_n{}^{0q}(y), \qquad (2.2.12)
\end{aligned}$$

nuevamente, sustituyendo (2.1.3) y (2.1.4) en (2.2.12) obtendremos que

$$\begin{aligned}
\{\phi_i(x),\psi_l(y)\} &= -\Xi\Big(\epsilon_{lq}{}^p\partial_{a_x}\left[P^n_p(y)\delta^a_n\delta^q_i\delta^3(x-y)\right] + \epsilon_{ij}{}^k\partial_{b_y}\left[P^a_k(x)\delta^j_l\delta^b_a\delta^3(x-y)\right] \\
&\quad +\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lq}{}^p P^a_k(x)\delta^j_p\delta^n_a\delta^3(x-y)\gamma^q_n(y) + \epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lq}{}^p\Pi^n_p(y)\delta^a_n\delta^q_k\delta^3(x-y)\omega_a{}^{0j}(y) \\
&\quad -\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lq}{}^p\gamma^j_a(x)P^n_p(y)\delta^a_n\delta^q_k\delta^3(x-y) - \epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lq}{}^p\delta^j_p\delta^n_a\delta^3(x-y)\Pi^a_k(x)\omega_n{}^{0q}(y)\Big) \\
&= -\Xi\Big(\epsilon_{li}{}^p\partial_{a_x}\left[P^a_p(y)\delta^3(x-y)\right] + \epsilon_{il}{}^k\partial_{a_y}\left[P^a_k(x)\delta^3(x-y)\right] \\
&\quad +\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lq}{}^j P^a_k(x)\delta^3(x-y)\gamma^q_a(y) + \epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lk}{}^p\Pi^a_p(y)\delta^3(x-y)\omega_a{}^{0j}(y) \\
&\quad -\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lk}{}^p\gamma^j_a(x)P^a_p(y)\delta^3(x-y) - \epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lq}{}^j\delta^3(x-y)\Pi^a_k(x)\omega_a{}^{0q}(y)\Big). \quad (2.2.13)
\end{aligned}$$

El paréntesis (2.2.13) tiene la misma forma que (2.2.5), si usamos ahora la identiedad de Jacobi veremos que el paréntesis se transforma en

$$\{\phi_i(x),\psi_l(y)\} = \Xi\epsilon_{ij}{}^k\psi_k\delta^3(x-y). \qquad (2.2.14)$$

Ahora calculemos el siguiente paréntesis

$$\begin{aligned}
\{\phi_i(x), \Psi^b_l(y)\} &= \{\partial_a \Pi^a_i(x) + \epsilon_{ij}{}^k P^a_k(x) \omega_a{}^{0j}(x) + \epsilon_{ij}{}^k \gamma^j_a(x) \Pi^a_k(x), -2\eta^{bcd}\partial_c \omega_{d0l}(y) \\
&\quad -2\eta^{bcd}\epsilon_{lqp}\omega_c{}^p{}_0(y)\gamma^q_d(y)\} \\
&= -2\eta^{bcd}\partial_{a_x}\partial_{c_y}\{\Pi^a_i(x), \omega_{d0l}(y)\} - 2\eta^{bcd}\epsilon_{lqp}\partial_{a_x}\left[\omega_c{}^p{}_0(y)\{\Pi^a_i(x), \gamma^q_d(y)\}\right] \\
&\quad -2\eta^{bcd}\epsilon_{lqp}\partial_{a_x}\left[\{\Pi^a_i(x), \omega_c{}^p{}_0(y)\}\gamma^q_d(y)\right] \\
&\quad -2\eta^{bcd}\epsilon_{ij}{}^k\partial_{c_y}\left[\{P^a_k(x), \omega_{d0l}(y)\}\omega_a{}^{0j}(x)\right] \\
&\quad -2\eta^{bcd}\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lqp}\{P^a_k(x), \omega_c{}^p{}_0(y)\}\omega_a{}^{0j}(x)\gamma^q_d(y) \\
&\quad -2\eta^{bcd}\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lqp}\omega_c{}^p{}_0(y)\{P^a_k(x), \gamma^q_d(y)\}\omega_a{}^{0j}(x) \\
&\quad -2\eta^{bcd}\epsilon_{ij}{}^k\partial_{c_y}\left[\gamma^j_a(x)\{\Pi^a_k(x), \omega_{d0l}(y)\}\right] \\
&\quad -2\eta^{bcd}\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lqp}\gamma^j_a(x)\omega_c{}^p{}_0(y)\{\Pi^a_k(x), \gamma^q_d(y)\} \\
&\quad -2\eta^{bcd}\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lqp}\gamma^j_a(x)\{\Pi^a_k(x), \omega_c{}^p{}_0(y)\}\gamma^q_d(y),
\end{aligned} \tag{2.2.15}$$

utilizando (2.1.3) y (2.1.4) en (2.2.15) encontraremos la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
\{\phi_i(x), \Psi^b_l(y)\} &= \Xi\Big(2\eta^{bcd}\epsilon_{lqp}\partial_{a_x}\left[\omega_c{}^p{}_0(y)\delta^a_d\delta^q_i\delta^3(x-y)\right] \\
&\quad +2\eta^{bcd}\epsilon_{ij}{}^k\partial_{c_y}\left[\delta^a_d\delta_{kl}\delta^3(x-y)\omega_a{}^{0j}(x)\right] \\
&\quad +2\eta^{bcd}\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lqp}\delta^a_c\delta^p_k\delta^3(x-y)\omega_a{}^{0j}(x)\gamma^q_d(x) \\
&\quad +2\eta^{bcd}\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lqp}\gamma^j_a(x)\omega_c{}^p{}_0(y)\delta^a_d\delta^q_k\delta^3(x-y)\Big) \\
&= \Xi\Big(2\eta^{bca}\epsilon_{lip}\partial_{a_x}\left[\omega_c{}^p{}_0(y)\delta^3(x-y)\right] \\
&\quad +2\eta^{bca}\epsilon_{ij}{}^k\partial_{c_y}\left[\delta^3(x-y)\omega_a{}^{0j}(x)\right] \\
&\quad +2\eta^{bad}\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lqk}\delta^3(x-y)\omega_a{}^{0j}(x)\gamma^q_d(x) \\
&\quad +2\eta^{bca}\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lkp}\gamma^j_a(x)\omega_c{}^p{}_0(y)\delta^3(x-y)\Big) \\
&= \Xi\Big(2\eta^{bca}\epsilon_{lip}\partial_{a_x}\left[\omega_c{}^p{}_0(y)\delta^3(x-y)\right] + \epsilon_{il}{}^k P^a_k(x)\delta^3(x-y) \\
&\quad +2\eta^{bca}\epsilon_{ij}{}^k\partial_{c_y}\left[\delta^3(x-y)\omega_a{}^{0j}(x)\right] \\
&\quad +2\eta^{bad}\delta^3(x-y)\omega_a{}^{0j}(x)\gamma^q_d(y)\left[\epsilon_{ij}{}^k\epsilon^f{}_{qk} + \epsilon_{qi}{}^k\epsilon^f{}_{jk}\right]g_{fl}\Big),
\end{aligned} \tag{2.2.16}$$

utilizando la identidad de Jacobi encontraremos que el paréntesis está dado por

$$\{\phi_i(x), \Psi^a_l(y)\} = \Xi\epsilon_{il}{}^k\Psi^a_k\delta^3(x-y). \tag{2.2.17}$$

Ahora calculemos el siguiente paréntesis entre las restricciones $\psi_i(x)$ y $\Psi^b_l(y)$, es decir

$$
\begin{aligned}
\{\psi_i(x), \Psi^b_l(y)\} &= \{\partial_a P^a_i(x) + \epsilon_{ij}{}^k \gamma^j_a(x) P^a_k(x) - \epsilon_{ij}{}^k \omega_a{}^{0j}(x)\Pi^a_k(x), -2\eta^{bcd}\partial_c \omega_{d0l}(y) \\
&\quad -2\eta^{bcd}\epsilon_{lqp}\omega_c{}^p{}_0(y)\gamma^q_d(y)\} \\
&= -2\eta^{bcd}\partial_{a_x}\partial_{c_y}\left[\{P^a_i(x), \omega_{d0l}(y)\}\right] - 2\eta^{bcd}\epsilon_{lqp}\partial_{a_x}\left[\{P^a_i(x), \omega_c{}^p{}_0(y)\}\gamma^q_d(y)\right] \\
&\quad -2\eta^{bcd}\epsilon_{lqp}\partial_{a_x}\left[\omega_c{}^p{}_0(y)\{P^a_i(x), \gamma^q_d(y)\}\right] \\
&\quad -2\eta^{bcd}\epsilon_{ij}{}^k\partial_{c_y}\left[\gamma^j_a(x)\{P^a_k(x), \omega_{d0l}(y)\}\right] \\
&\quad -2\eta^{bcd}\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lqp}\gamma^j_a(x)\{P^a_k(x), \omega_c{}^p{}_0(y)\}\gamma^q_d(y) \\
&\quad -2\eta^{bcd}\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lqp}\gamma^j_a(x)\omega_c{}^p{}_0(y)\{P^a_k(x), \gamma^q_d(y)\} \\
&\quad +2\eta^{bcd}\epsilon_{ij}{}^k\partial_{c_y}\left[\omega_a{}^{0j}(x)\{\Pi^a_k(x), \omega_{d0l}(y)\}\right] \\
&\quad +2\eta^{bcd}\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lqp}\omega^{0j}_a(x)\{\Pi^a_k(x), \omega_c{}^p{}_0(y)\}\gamma^q_d(y) \\
&\quad +2\eta^{bcd}\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lqp}\omega_a{}^{0j}(x)\omega_c{}^p{}_0(y)\{\Pi^a_k(x), \gamma^q_d(y)\},
\end{aligned}
\tag{2.2.18}
$$

utilizando nuevamente (2.1.3) y (2.1.4) en (2.2.18) obtenemos

$$
\begin{aligned}
\{\psi_i(x), \Psi^b_l(y)\} &= \Xi\Big(2\eta^{bcd}\partial_{a_x}\partial_{c_y}\left[\delta^a_d\delta_{il}\delta^3(x-y)\right] + 2\eta^{bcd}\epsilon_{lqp}\partial_{a_x}\left[\delta^a_c\delta^p_i\delta^3(x-y)\gamma^q_d(y)\right] \\
&\quad +2\eta^{bcd}\epsilon_{ij}{}^k\partial_{c_y}\left[\gamma^j_a(x)\delta^a_d\delta_{kl}\delta^3(x-y)\right] \\
&\quad +2\eta^{bcd}\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lqp}\gamma^j_a(x)\delta^a_c\delta^p_k\delta^3(x-y)\gamma^q_d(y) \\
&\quad -2\eta^{bcd}\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lqp}\omega_a{}^{0j}(x)\omega_c{}^p{}_0(y)\delta^a_d\delta^q_k\delta^3(x-y)\Big) \\
&= \Xi\Big(2\eta^{bca}\partial_{a_x}\partial_{c_y}\left[\delta^3(x-y)\right] + 2\eta^{bad}\epsilon_{lqi}\partial_{a_x}\left[\delta^3(x-y)\gamma^q_d(y)\right] \\
&\quad +2\eta^{bca}\epsilon_{ijl}\partial_{c_y}\left[\gamma^j_a(x)\delta^3(x-y)\right] + 2\eta^{bad}\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lqk}\gamma^j_a(x)\delta^3(x-y)\gamma^q_d(y) \\
&\quad -2\eta^{bca}\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lkp}\omega_a{}^{0j}(x)\omega_c{}^p{}_0(y)\delta^3(x-y)\Big),
\end{aligned}
\tag{2.2.19}
$$

utilizando la identidad de Jacobi en la siguiente expresión, encontraremos lo siguiente

$$
\begin{aligned}
\eta^{bad}\epsilon_{il}{}^k\epsilon_{jqk}\gamma^j_a(x)\gamma^q_d(y)\delta^3(x-y) &= \eta^{bad}\left[-\epsilon_{ji}{}^k\epsilon_{lqk} - \epsilon_{lj}{}^k\epsilon_{iqk}\right]\gamma^j_a(x)\gamma^q_d(y)\delta^3(x-y) \\
&= \eta^{bad}\left[\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lqk} - \epsilon_{lj}{}^k\epsilon_{iqk}\right]\gamma^j_a(x)\gamma^q_d(y)\delta^3(x-y) \\
&= 2\eta^{bad}\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lqk}\gamma^j_a(x)\delta^3(x-y).
\end{aligned}
\tag{2.2.20}
$$

utilizando la ecuación anterior (2.2.20) en (2.2.19) obtenemos finalmente que

$$\{\psi_i(x), \Psi^b_l(y)\} = -\Xi\epsilon_{il}{}^k\Phi^b_k\delta^3(x-y). \tag{2.2.21}$$

De manera similar a lo desarrollado anteriomente, tenemos que los paréntesis de Poisson entre las restricciones son

$$\{\phi_i(x), \Phi^b_l(y)\} = \Xi\epsilon_{il}{}^k\Phi^b_k\delta^3(x-y), \tag{2.2.22}$$
$$\{\psi_i(x), \Phi^b_l(y)\} = \Xi\epsilon_{il}{}^k\Psi^b_k\delta^3(x-y). \tag{2.2.23}$$

Por lo tanto, el álgebra entre las restricciones está dada por

$$\{\phi_i(x), \psi_j(y)\} = \Xi\epsilon_{ij}{}^k\psi_k\delta^3(x-y), \tag{2.2.24}$$
$$\{\phi_i(x), \phi_j(y)\} = \Xi\epsilon_{ij}{}^k\phi_k\delta^3(x-y), \tag{2.2.25}$$
$$\{\phi_i(x), \Phi^a_j(y)\} = \Xi\epsilon_{ij}{}^k\Phi^a_k\delta^3(x-y), \tag{2.2.26}$$
$$\{\phi_i(x), \Psi^a_j(y)\} = \Xi\epsilon_{ij}{}^k\Psi^a_k\delta^3(x-y), \tag{2.2.27}$$
$$\{\psi_i(x), \psi_j(y)\} = -\Xi\epsilon_{ij}{}^k\phi_k\delta^3(x-y), \tag{2.2.28}$$
$$\{\psi_i(x), \Phi^a_j(y)\} = \Xi\epsilon_{ij}{}^k\Psi^a_k\delta^3(x-y), \tag{2.2.29}$$
$$\{\psi_i(x), \Psi^a_j(y)\} = -\Xi\epsilon_{ij}{}^k\Phi^a_k\delta^3(x-y), \tag{2.2.30}$$
$$\{\Phi^a_i, \Phi^b_j(y)\} = 0, \tag{2.2.31}$$
$$\{\Phi^a_i(x), \Psi^b_j(y)\} = 0, \tag{2.2.32}$$
$$\{\Psi^a_i(x), \Psi^b_j(y)\} = 0. \tag{2.2.33}$$

Debido a que el álgebra es cerrada, concluimos que las restricciones encontradas son de primera clase y por lo tanto generan transformaciones de norma. Respecto a este punto, definimos el siguiente generador

$$G = \int \{\alpha^l\phi_l + \beta^j\psi_j + \nu^i_a\Psi^a_i + g^i_a\Phi^a_i\}\mathrm{d}x^3, \tag{2.2.34}$$

donde α, β, ν, g son parámetros arbitrarios. De esta manera, las transformaciones de norma están dadas por

$$\delta\gamma^h_\nu = -\partial_\nu\alpha^h + \epsilon_{lk}{}^h\alpha^l\gamma^k_\nu - \epsilon_{jk}{}^h\beta^j\omega_\nu{}^{0k}, \tag{2.2.35}$$
$$\delta\omega_\nu{}^{0h} = -\partial_\nu\beta^h + \epsilon_{lk}{}^h\alpha^l\omega_\nu{}^{0k} + \epsilon_{jl}{}^h\beta^j\gamma^l_\nu. \tag{2.2.36}$$

Por otra parte, podemos ver que las restricciones son reductibles dado que

$$\partial_a \Phi^a_i = 0, \tag{2.2.37}$$

$$\partial_a \Psi^a_i = 0. \tag{2.2.38}$$

Para hacer el conteo de grados de libertad, tomaremos como variables dinámicas a aquellas que aparecen con una derivada temporal en la acción, que resultan ser $({\omega_c}^{0i}, \gamma^i_c)$. De esta manera, hay 36 variables canónicas y $(24-6)$ restricciones de primera clase independientes, por tanto, el conteo de grados de libertad está dado por

$$GL = (36) - 2(24-6) = 36 - 2(18) = 0. \tag{2.2.39}$$

lo cual nos dice que la teoría no tiene grados de libertad físicos.

2.3. Conclusiones

Hasta aquí hemos encontrado que la teoría BF tiene un hamiltoniano canónico igual a cero y restricciones de primera clase, de tal forma que son generadoras de transformaciones de norma. Por otra parte, las restricciones encontradas presentan reductibilidad, esto afecta directamente al conteo de grados de libertad físicos, el cual obtenemos que es igual a cero, por lo cual es una teoría topológica.

En el siguiente capítulo, aplicaremos el mismo procedimiento que usamos en la acción anterior a la segunda clase de Chern, encontrando así sus ecuaciones de movimiento, el Hamiltoniano canónico, los paréntesis fundamentales de Poisson, el álgebra de restricciones y finalmente las transformaciones de norma asociadas a dicha acción.

Capítulo 3

La Segunda Clase de Chern

La segunda clase de Chern es un invariante topológico y vista como una teoría de campo es una teoría topológica, es decir, también no tiene grados de libertad locales. Sin embargo, cuando este invariante es añadido a otra acción como por ejemplo a una teoría BF, su contribución puede ser relevante debido a que topologías no triviales asociadas al haz de norma pueden ser "detectadas" o "vistas" mediante la segunda clase de Chern. Por otro lado, debido a que dicho invariante se puede escribir como una diferencial total, su contribución a las ecuaciones de movimiento es nula, sin embargo, su contribución puede ser relevante a nivel cuántico debido a que modifica la estructura simpléctica [19], en este trabajo de tesis analizaremos desde el punto de vista Hamiltoniano a la segunda clase de Chern en términos de las variables definidas en el capítulo anterior.

La segunda clase de Chern está definida de la siguiente manera

$$S[A] = \Xi \frac{1}{2} \int \Big[F^{IJ} \wedge F_{IJ} \Big], \tag{3.0.1}$$

donde Ξ es una constante. Para realizar nuestro análisis, introduciremos un campo auxiliar B^{IJ} que como en el capítulo anterior, corresponde a una 2-forma valuada en el grupo $SO(3,1)$. Así, la acción (3.0.1) toma la estructura de una teoría tipo BF dada por

$$S[B, A] = \Xi \int \Big[F^{IJ} \wedge B_{IJ} - \frac{1}{2} B^{IJ} \wedge B_{IJ} \Big]. \tag{3.0.2}$$

De la acción anterior es posible obtener las ecuaciones de movimiento. Debido a que las variables dinámicas de la acción corresponden a A^{IJ} y B_{IJ}, variaremos la acción (3.0.2) con respecto a cada una de ellas para obtener las ecuaciones de movimiento. De esta manera, si variamos con respecto a la variable $B_{IJ\mu\nu}$ obtendremos la primera ecuación de movimiento

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta B_{IJ\mu\nu}}\Big[F^{IJ}\wedge B_{IJ}-\frac{1}{2}B^{IJ}\wedge B_{IJ}\Big] = \frac{\delta}{\delta B_{IJ\mu\nu}}\Big[\frac{1}{4}F^{IJ}_{\alpha\beta}B_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}-\frac{1}{8}B^{IJ}_{\alpha\beta}B_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\Big]\\
= &\ \frac{1}{4}F^{IJ}_{\alpha\beta}\delta B_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}-\frac{1}{8}\delta B^{IJ}_{\alpha\beta}B_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}-\frac{1}{8}B^{IJ}_{\alpha\beta}\delta B_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\\
= &\ \frac{1}{4}F^{IJ}_{\alpha\beta}\delta B_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}-\frac{1}{8}B^{IJ}_{\alpha\beta}\delta B_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}-\frac{1}{8}B^{IJ}_{\mu\nu}\delta B_{IJ\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\\
= &\ \frac{1}{4}F^{IJ}_{\alpha\beta}\delta B_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}-\frac{1}{8}B^{IJ}_{\alpha\beta}\delta B_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}-\frac{1}{8}B^{IJ}_{\mu\nu}\delta B_{IJ\alpha\beta}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\\
= &\ \frac{1}{4}F^{IJ}_{\alpha\beta}\delta B_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}-\frac{1}{4}B^{IJ}_{\alpha\beta}\delta B_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\\
= &\ \frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\Big[F^{IJ}_{\alpha\beta}-B^{IJ}_{\alpha\beta}\Big]=0,
\end{aligned}$$

que en forma compacta la podemos escribir

$$F^{IJ}_{\alpha\beta}=B^{IJ}_{\alpha\beta}. \tag{3.0.3}$$

Ahora si variamos la acción (3.0.2) con respecto a la variable A^{IJ}_{σ} obtendremos la segunda ecuación de movimiento

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta A^{IJ}_{\alpha}}\Big[F^{IJ}\wedge B_{IJ}-\frac{1}{2}B^{IJ}\wedge B_{IJ}\Big] = \frac{\delta}{\delta A^{IJ}_{\alpha}}\Big[\frac{1}{4}F^{IJ}_{\alpha\beta}B_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}-\frac{1}{8}B^{IJ}_{\alpha\beta}B_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\Big]\\
= &\ \frac{1}{4}\frac{\delta}{\delta A^{IJ}_{\alpha}}\Big[\partial_\alpha A^{IJ}_{\beta}-\partial_\beta A^{IJ}_{\alpha}+A^{I}_{\alpha k}A^{kJ}_{\beta}+A^{J}_{\alpha k}A^{Ik}_{\beta}\Big]B_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\\
= &\ \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}D_\alpha B_{IJ\mu\nu}=0,
\end{aligned}$$

que en forma compacta podemos escribir como

$$DB_{IJ}=0. \tag{3.0.4}$$

donde D se ha definido en el capítulo anterior.

Si uno sustituye las ecuaciones (3.0.3) y (3.0.4) en (3.0.2) se obtiene (3.0.1). La intención de haber introducido la dos-forma B^{IJ} se debe a que en las nuevas variables definidas anteriormente se encuentra presente dicho campo, y la forma de la segunda clase de Chern dada en (3.0.1) el campo B no aparece, es por ello que para nuestros fines nos conviene trabajar con la segunda clase de Chern expresada como en (3.0.2).

3.1. Cambios de Variable

De igual manera, romperemos la covarianza de Lorentz local y usaremos las mismas variables que definimos en el capítulo 2. Así, tenemos que para la acción (3.0.2), si corremos los índices de espacio-tiempo y de grupo obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\Xi\Big[F^{IJ}\wedge B_{IJ}-\frac{1}{2}B^{IJ}\wedge B_{IJ}\Big]=\Xi\Big[\frac{1}{4}F^{IJ}_{\alpha\beta}B_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}-\frac{1}{8}B^{IJ}_{\alpha\beta}B_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\Big]\\
=&\ \Xi\Big[\frac{1}{4}F^{0J}_{\alpha\beta}B_{0J\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}+\frac{1}{4}F^{iJ}_{\alpha\beta}B_{iJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}-\frac{1}{8}B^{0J}_{\alpha\beta}B_{0J\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}-\frac{1}{8}B^{iJ}_{\alpha\beta}B_{iJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\Big]\\
=&\ \Xi\Big[\frac{1}{4}F^{0j}_{\alpha\beta}B_{0j\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}+\frac{1}{4}F^{i0}_{\alpha\beta}B_{i0\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}+\frac{1}{4}F^{ij}_{\alpha\beta}B_{ij\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}-\frac{1}{8}B^{0j}_{\alpha\beta}B_{0j\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\\
&-\frac{1}{8}B^{i0}_{\alpha\beta}B_{i0\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}-\frac{1}{8}B^{ij}_{\alpha\beta}B_{ij\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\Big]\\
=&\ \Xi\Big[\frac{1}{2}F^{0j}_{\alpha\beta}B_{0j\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}+\frac{1}{4}F^{ij}_{\alpha\beta}B_{ij\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}-\frac{1}{4}B^{0j}_{\alpha\beta}B_{0j\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}-\frac{1}{8}B^{ij}_{\alpha\beta}B_{ij\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\Big]\\
=&\ \Xi\Big[\frac{1}{2}F^{0j}_{0a}B_{0jbc}\epsilon^{0abc}+\frac{1}{2}F^{0j}_{a0}B_{0jbc}\epsilon^{a0bc}+\frac{1}{2}F^{0j}_{ab}B_{0j0c}\epsilon^{ab0c}+\frac{1}{2}F^{0j}_{ab}B_{0jc0}\epsilon^{abc0}\\
&+\frac{1}{4}F^{ij}_{0a}B_{ijbc}\epsilon^{0abc}+\frac{1}{4}F^{ij}_{a0}B_{ijbc}\epsilon^{a0bc}+\frac{1}{4}F^{ij}_{ab}B_{ij0c}\epsilon^{ab0c}+\frac{1}{4}F^{ij}_{ab}B_{ijc0}\epsilon^{abc0}\\
&-\frac{1}{4}B^{0j}_{0a}B_{0jbc}\epsilon^{0abc}-\frac{1}{4}B^{0j}_{a0}B_{0jbc}\epsilon^{a0bc}-\frac{1}{4}B^{0j}_{ab}B_{0j0c}\epsilon^{ab0c}-\frac{1}{4}B^{0j}_{ab}B_{0jc0}\epsilon^{abc0}\\
&-\frac{1}{8}B^{ij}_{0a}B_{ijbc}\epsilon^{0abc}-\frac{1}{8}B^{ij}_{a0}B_{ijbc}\epsilon^{a0bc}-\frac{1}{8}B^{ij}_{ab}B_{ij0c}\epsilon^{ab0c}-\frac{1}{8}B^{ij}_{ab}B_{ijc0}\epsilon^{abc0}\Big]\\
=&\ \Xi\Big[F^{0j}_{0a}B_{0jbc}\eta^{abc}+F^{0j}_{ab}B_{0j0c}\eta^{abc}+\frac{1}{2}F^{ij}_{0a}B_{ijbc}\eta^{abc}+\frac{1}{2}F^{ij}_{ab}B_{ij0c}\eta^{abc}-\frac{1}{2}B^{0j}_{0a}B_{0jbc}\eta^{abc}\\
&-\frac{1}{2}B^{0j}_{ab}B_{0j0c}\eta^{abc}-\frac{1}{4}B^{ij}_{0a}B_{ijbc}\eta^{abc}-\frac{1}{4}B^{ij}_{ab}B_{ij0c}\eta^{abc}\Big].
\end{aligned}
$$

Ahora introduciendo las variables definidas en el capítulo 2, encontramos que (3.0.2) se puede escribir de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
&\Xi\Big[F^{IJ}\wedge B_{IJ}-\frac{1}{2}B^{IJ}\wedge B_{IJ}\Big]=\Xi\Big[\Big(\dot{\omega}_a{}^{0j}-\partial_a\omega_0{}^{0j}+\epsilon^j{}_{lk}\omega_0{}^{k0}\gamma^l_a-\epsilon^j{}_{lk}\omega_a{}^{k0}\gamma^l_0\Big)B_{0jbc}\eta^{abc}\\
&-\frac{1}{2}F^{0j}_{ab}\varsigma_{jc}\eta^{abc}-\frac{1}{2}\epsilon^{ij}{}_lF^l{}_{0a}B_{ijbc}\eta^{abc}\\
&-\frac{1}{2}\epsilon^{ij}{}_lF^l{}_{ab}B_{ij0c}\eta^{abc}-\frac{1}{2}B^{0j}_{0a}P^a_j+\frac{1}{4}B^{0j}_{ab}\varsigma_{jc}\eta^{abc}+\frac{1}{4}\epsilon^{ij}{}_lB^l{}_{0a}B_{ijbc}\eta^{abc}\\
&+\frac{1}{4}\epsilon^{ij}{}_lB^l{}_{ab}B_{ij0c}\eta^{abc}\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big(\dot{\omega}_a{}^{0j} - \partial_a \omega_0{}^{0j} + \epsilon^j{}_{lk}\omega_0{}^{k0}\gamma^l_a - \epsilon^j{}_{lk}\omega_a{}^{k0}\gamma^l_0\Big)P^a_j + \frac{\Xi\varsigma_{jc}}{2}\Big(\frac{1}{2}B^{0j}_{ab}\eta^{abc} - F^{0j}_{ab}\eta^{abc}\Big) \\
&\quad + \Xi F^l{}_{0a}B_{lbc}\eta^{abc} + \Xi F^l{}_{ab}B_{l0c}\eta^{abc} - \frac{1}{2}B^{0j}_{0a}P^a_j - \frac{\Xi}{2}B^l{}_{0a}B_{lbc}\eta^{abc} - \frac{\Xi}{2}B^l{}_{ab}B_{l0c}\eta^{abc} \\
&= \Big(\dot{\omega}_a{}^{0j} + \partial_a \Lambda^j + \epsilon^j{}_{lk}\Lambda^k\gamma^l_a + \epsilon^j{}_{lk}\omega_a{}^{k0}\tau^l\Big)P^a_j + \frac{\Xi\varsigma_{jc}}{2}\Big(\frac{1}{2}B^{0j}_{ab}\eta^{abc} - F^{0j}_{ab}\eta^{abc}\Big) \\
&\quad + \Big(\dot{\gamma}^l_a - \partial_a\gamma^l_0 - \epsilon^l{}_{jk}\omega_0{}^{j0}\omega_{a0}{}^k + \epsilon^l{}_{jk}\gamma^j_0\gamma^k_a\Big)\Pi^a_l - \frac{\Xi}{2}F^l{}_{ab}\chi_{lc}\eta^{abc} - \frac{1}{2}B^{0j}_{0a}P^a_j - \frac{1}{2}B^l{}_{0a}\Pi^a_l \\
&\quad + \frac{\Xi}{4}B^l{}_{ab}\chi_{lc}\eta^{abc} \\
&= \dot{\omega}_a{}^{0j}P^a_j + \dot{\gamma}^l_a\Pi^a_l - \tau^j\Big[\partial_a\Pi^a_j + \epsilon^l{}_{jk}\gamma^k_a\Pi^a_l - \epsilon^l{}_{jk}\omega_a{}^{k0}P^a_l\Big] - \Lambda^j\Big[\partial_a P^a_j - \epsilon^n{}_{lj}\gamma^l_a P^a_n \\
&\quad + \epsilon^l{}_{jk}\omega_{a0}{}^k\Pi^a_l\Big] + \frac{\varsigma^j_c}{2}\Big[-P^c_j + \Xi F_{0jab}\eta^{abc}\Big] + \frac{\chi^l{}_c}{2}\Big[\Pi^c_l - \Xi F_{lab}\eta^{abc}\Big] \\
&= \dot{\omega}_a{}^{0j}P^a_j + \dot{\gamma}^l_a\Pi^a_l - \tau^j\Big[\partial_a\Pi^a_l + \epsilon_{jk}{}^l\gamma^k_a\Pi^a_l + \epsilon_{lk}{}^j\omega_a{}^{0k}P^a_j\Big] - \Lambda^j\Big[\partial_a P^a_j + \epsilon_{jl}{}^n\gamma^l_a P^a_n \\
&\quad - \epsilon_{jk}{}^l\omega_a{}^{0k}\Pi^a_l\Big] - \frac{\varsigma^i_c}{2}\Big[P^c_i - \Xi F_{0iab}\eta^{abc}\Big] + \frac{\chi^l{}_c}{2}\Big[\Pi^c_l - \Xi F_{lab}\eta^{abc}\Big].
\end{aligned}
$$

De este modo, se puede observar que la acción (3.0.2) en términos de las nuevas variables tiene la forma

$$
\begin{aligned}
& S[\gamma^i_a, \pi^a_i, \omega_a{}^{0i}, P^a_i, \tau^i, \Lambda^i, \varsigma^i{}_a, \chi^i{}_{0a}] = \\
= & \int \dot{\omega}_a{}^{0j}P^a_j + \dot{\gamma}^l_a\Pi^a_l - \tau^j\Big[\partial_a\Pi^a_j + \epsilon_{jk}{}^l\gamma^k_a\Pi^a_l + \epsilon_{jk}{}^l\omega_a{}^{0k}P^a_l\Big] - \Lambda^j\Big[\partial_a P^a_j + \epsilon_{jl}{}^n\gamma^l_a P^a_n \\
& - \epsilon_{jk}{}^l\omega_a{}^{0k}\Pi^a_l\Big] - \frac{\varsigma^i_c}{2}\Big[P^c_i - \Xi F_{0iab}\eta^{abc}\Big] + \frac{\chi^l{}_c}{2}\Big[\Pi^c_l - \Xi F_{lab}\eta^{abc}\Big],
\end{aligned} \tag{3.1.1}
$$

podemos observar que la acción anterior (3.1.1) se ha llevado a la forma que encontramos en (1.6.1), donde $H_c = 0$. Este resultado es esperado puesto que la covarianza bajo difeomorfismos se mantiene. De (3.1.1) podemos identificar los paréntesis fundamentales de Poisson, dados por

$$\{\gamma^i_a(x), \Pi^b_j(y)\} = \delta^i_j\delta^b_a\delta^3(x-y), \tag{3.1.2}$$
$$\{\omega_a{}^{0i}(x), P^b_j(y)\} = \delta^b_a\delta^i_j\delta^3(x-y), \tag{3.1.3}$$

y al variar la acción respecto a las variables $\tau^i, \Lambda^i, \varsigma^i{}_a, \chi^i{}_{0a}$ se obtiene que

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta \tau^i} &= \partial_a \Pi^a_i + \epsilon_{ik}{}^{l}\omega_a{}^{0k}P^a_l + \epsilon_{ik}{}^{l}\gamma^k_a\Pi^a_l = 0 = \phi_i,\\
\frac{\delta S}{\delta \Lambda^i} &= \partial_a P^a_i + \epsilon_{il}{}^{k}\gamma^l_a P^a_k - \epsilon_{ik}{}^{l}\omega_a{}^{0k}\Pi^a_l = 0 = \psi_i,\\
\frac{\delta S}{\delta \varsigma^i{}_a} &= P^a_i - \Xi F_{0ibc}\eta^{abc} = 0 = \Psi^a_i,\\
\frac{\delta S}{\delta \chi^i{}_{0a}} &= \Pi^a_i - \Xi F_{ibc}\eta^{abc} = 0 = \Phi^a_i,
\end{aligned}
$$

donde se pueden identificar las siguientes restricciones

$$
\begin{aligned}
\phi_l &= \partial_a \Pi^a_l + \epsilon_{lk}{}^{j}\omega_a{}^{0k}P^a_j + \epsilon_{lk}{}^{j}\gamma^k_a\Pi^a_j = 0, && (3.1.4)\\
\psi_j &= \partial_a P^a_j + \epsilon_{jl}{}^{k}\gamma^l_a P^a_k - \epsilon_{jk}{}^{l}\omega_a{}^{0k}\Pi^a_l = 0, && (3.1.5)\\
\Psi^a_i &= P^a_i - \Xi\left(2\partial_b\omega_{c0i} + 2\epsilon_{ijk}\omega_b{}^k{}_0\gamma^j_c\right)\eta^{abc} = 0, && (3.1.6)\\
\Phi^a_i &= \Pi^a_i - \Xi\left(2\partial_b\gamma_{ic} - \epsilon_{ijk}\omega_b{}^{j0}\omega_{c0}{}^{k} + \epsilon_{ijk}\gamma^j_b\gamma^k_c\right)\eta^{abc} = 0. && (3.1.7)
\end{aligned}
$$

y las variables $\tau^i, \Lambda^i, \varsigma^i{}_0, \chi^i{}_{0a}$ son identificados como multiplicadores de Lagrange.

3.2. Álgebra de restricciones

En esta parte calcularemos los paréntesis de Poisson entre todas las restricciones encontradas. Como en el capítulo 2, los paréntesis triviales de Poisson estan dados por

$$
\begin{aligned}
\{\Phi^a_i(x), \Phi^b_j(y)\} &= 0, && (3.2.1)\\
\{\Phi^a_i(x), \Psi^b_j(y)\} &= 0, && (3.2.2)\\
\{\Psi^a_i(x), \Psi^b_j(y)\} &= 0. && (3.2.3)
\end{aligned}
$$

Los paréntesis no triviales los calculamos de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
\{\Phi^a_i(x), \Phi^d_l(y)\} &= \{\Pi^a_i(x) - \Xi\eta^{abc}\left[2\partial_b\gamma^i_c(x) - \epsilon_{ijk}\omega_b{}^{j0}(x)\omega_{c0}{}^{k}(x) + \epsilon_{ijk}\gamma^j_b\gamma^k_c(x)\right], \Pi^d_l(x)\\
&\quad -\Xi\eta^{def}\left[2\partial_e\gamma^l_f(x) - \epsilon_{lqp}\omega_e{}^{q0}(x)\omega_{f0}{}^{p}(x) + \epsilon_{lqp}\gamma^q_e\gamma^p_f(x)\right]\}\\
&= -2\Xi\eta^{def}\partial_{e_y}\left[\{\Pi^a_i(x), \gamma_{lf}(y)\}\right] + \Xi\eta^{def}\epsilon_{lqp}\omega^{q0}_e(y)\{\Pi^a_i(x), \omega_{f0}{}^{p}(y)\}\\
&\quad +\Xi\eta^{def}\epsilon_{lqp}\{\Pi^a_i(x), \omega_e{}^{q0}(y)\}\omega_{f0}{}^{p}(y) - \Xi\eta^{def}\epsilon_{lqp}\gamma^q_e(y)\{\Pi^a_i(x), \gamma^p_f(y)\}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&-\Xi\eta^{def}\epsilon_{lqp}\{\Pi_i^a(x),\gamma_e^q(y)\}\gamma_f^p(y)-2\Xi\eta^{abc}\partial_{c_x}\left[\{\gamma_c^i(x),\Pi_l^d(y)\}\right]\\
&+\Xi\eta^{abc}\epsilon_{ijk}{\omega_b}^{j0}(x)\{{\omega_{c0}}^k(x),\Pi_l^d(y)\}+\Xi\eta^{abc}\epsilon_{ijk}\{\omega_b^{j0}(x),\Pi_l^d(y)\}{\omega_{c0}}^k(x)\\
&-\Xi\eta^{abc}\epsilon_{ijk}\gamma_b^j(x)\{\gamma_c^k(x),\Pi_l^d(y)\}-\Xi\eta^{abc}\epsilon_{ijk}\{\gamma_b^j(x),\Pi_l^d(y)\}\gamma_c^k(x), \qquad (3.2.4)
\end{aligned}$$

utilizando los paréntesis fundamentales (3.1.2) y (3.1.3) en (3.2.4) obtenemos

$$\begin{aligned}
\{\Phi_i^a(x),\Phi_l^d(y)\} &= 2\Xi\eta^{def}\partial_{e_y}\left[\delta_l^a\delta_{if}\delta^3(x-y)\right]+\Xi\eta^{def}\epsilon_{lqp}\gamma_e^q(y)\delta_f^a\delta_i^p\delta^3(x-y)\\
&\quad+\Xi\eta^{def}\epsilon_{lqp}\delta_e^a\delta_i^q\delta^3(x-y)\gamma_f^p(y)-2\Xi\eta^{abc}\partial_{c_x}\left[\delta_l^i\delta_c^d\delta^3(x-y)\right]\\
&\quad-\Xi\eta^{abc}\epsilon_{ijk}\gamma_b^j(x)\delta_l^k\delta_c^d\delta^3(x-y)-\Xi\eta^{abc}\epsilon_{ijk}\delta_l^j\delta_b^d\delta^3(x-y)\gamma_c^k(x)\\
&= 2\Xi\eta^{dei}\partial_{e_y}\left[\delta^3(x-y)\right]+\Xi\eta^{dea}\epsilon_{lqi}\gamma_e^q(y)\delta^3(x-y)+\Xi\eta^{daf}\epsilon_{lip}\delta^3(x-y)\gamma_f^p(y)\\
&\quad-2\Xi\eta^{abd}\partial_{d_x}\left[\delta^3(x-y)\right]-\Xi\eta^{abd}\epsilon_{ijl}\gamma_b^j(x)\delta^3(x-y)\\
&\quad-\Xi\eta^{adc}\epsilon_{ilk}\delta^3(x-y)\gamma_c^k(x), \qquad (3.2.5)
\end{aligned}$$

redefiniendo y permutando índices encontraremos que

$$\{\Phi_i^a(x),\Phi_l^d(y)\}=0. \qquad (3.2.6)$$

Ahora calculemos el siguiente paréntesis

$$\begin{aligned}
\{\phi_i(x),\Psi_l^b(y)\} &= \{\partial_a\Pi_i^a(x)+{\epsilon_{ij}}^kP_k^a(x){\omega_a}^{0j}(x)+{\epsilon_{ij}}^k\gamma_a^j(x)\Pi_k^a(x),P_l^b(y)-2\Xi\eta^{bcd}\partial_c\omega_{d0l}(y)\\
&\quad-2\Xi\eta^{bcd}\epsilon_{lqp}{\omega_c}^p{}_0(y)\gamma_d^q(y)\}\\
&= -2\Xi\eta^{bcd}\partial_{a_x}\partial_{c_y}\{\Pi_i^a(x),\omega_{d0l}(y)\}-2\Xi\eta^{bcd}\epsilon_{lqp}\partial_{a_x}\left[{\omega_c}^p{}_0(y)\{\Pi_i^a(x),\gamma_d^q(y)\}\right]\\
&\quad-2\Xi\eta^{bcd}\epsilon_{lqp}\partial_{a_x}\left[\{\Pi_i^a(x),{\omega_c}^p{}_0(y)\}\gamma_d^q(y)\right]+{\epsilon_{ij}}^kP_k^a(x)\{{\omega_a}^{0j}(x),P_l^b(y)\}\\
&\quad-2\Xi\eta^{bcd}{\epsilon_{ij}}^k\partial_{c_y}\left[\{P_k^a(x),\omega_{d0l}(y)\}{\omega_a}^{0j}(x)\right]\\
&\quad-2\Xi\eta^{bcd}{\epsilon_{ij}}^k\epsilon_{lqp}\{P_k^a(x),{\omega_c}^p{}_0(y)\}{\omega_a}^{0j}(x)\gamma_d^q(y)\\
&\quad-2\Xi\eta^{bcd}{\epsilon_{ij}}^k\epsilon_{lqp}{\omega_c}^p{}_0(y)\{P_k^a(x),\gamma_d^q(y)\}{\omega_a}^{0j}(x)\\
&\quad+{\epsilon_{ij}}^k\{\gamma_a^j(x),P_l^b(y)\}\Pi_k^a(x)\\
&\quad-2\Xi\eta^{bcd}{\epsilon_{ij}}^k\partial_{c_y}\left[\gamma_a^j(x)\{\Pi_k^a(x),\omega_{d0l}(y)\}\right]\\
&\quad-2\Xi\eta^{bcd}{\epsilon_{ij}}^k\epsilon_{lqp}\gamma_a^j(x){\omega_c}^p{}_0(y)\{\Pi_k^a(x),\gamma_d^q(y)\}\\
&\quad-2\Xi\eta^{bcd}{\epsilon_{ij}}^k\epsilon_{lqp}\gamma_a^j(x)\{\Pi_k^a(x),{\omega_c}^p{}_0(y)\}\gamma_d^q(y), \qquad (3.2.7)
\end{aligned}$$

utilizando nuevamente los paréntesis fundamentales (3.1.2) y (3.1.3) en (3.2.7) la expresión que se encuentra es la siguiente

$$
\begin{aligned}
\{\phi_i(x), \Psi^b_l(y)\} &= 2\Xi\eta^{bcd}\epsilon_{lqp}\partial_{a_x}\left[\omega_c{}^p{}_0(y)\delta^a_d\delta^q_i\delta^3(x-y)\right] + \epsilon_{ij}{}^k P^a_k(x)\delta^b_a\delta^j_l\delta^3(x-y) \\
&+2\Xi\eta^{bcd}\epsilon_{ij}{}^k\partial_{c_y}\left[\delta^a_d\delta_{kl}\delta^3(x-y)\omega_a{}^{0j}(x)\right] \\
&+2\Xi\eta^{bcd}\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lqp}\delta^a_c\delta^p_k\delta^3(x-y)\omega_a{}^{0j}(x)\gamma^q_d(x) \\
&+2\Xi\eta^{bcd}\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lqp}\gamma^j_a(x)\omega_c{}^p{}_0(y)\delta^a_d\delta^q_k\delta^3(x-y) \\
&= 2\Xi\eta^{bca}\epsilon_{lip}\partial_{a_x}\left[\omega_c{}^p{}_0(y)\delta^3(x-y)\right] + \epsilon_{il}{}^k P^a_k(x)\delta^3(x-y) \\
&+2\Xi\eta^{bca}\epsilon_{ij}{}^k\partial_{c_y}\left[\delta^3(x-y)\omega_a{}^{0j}(x)\right] + 2\Xi\eta^{bad}\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lqk}\delta^3(x-y)\omega_a{}^{0j}(x)\gamma^q_d(x) \\
&+2\Xi\eta^{bca}\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lkp}\gamma^j_a(x)\omega_c{}^p{}_0(y)\delta^3(x-y) \\
&= 2\Xi\eta^{bca}\epsilon_{lip}\partial_{a_x}\left[\omega_c{}^p{}_0(y)\delta^3(x-y)\right] + \epsilon_{il}{}^k P^a_k(x)\delta^3(x-y) \\
&+2\Xi\eta^{bca}\epsilon_{ij}{}^k\partial_{c_y}\left[\delta^3(x-y)\omega_a{}^{0j}(x)\right] \\
&+2\Xi\eta^{bad}\delta^3(x-y)\omega_a{}^{0j}(x)\gamma^q_d(y)\left[\epsilon_{ij}{}^k\epsilon^f{}_{qk} + \epsilon_{qi}{}^k\epsilon^f{}_{jk}\right]g_{fl},
\end{aligned}
\tag{3.2.8}
$$

si usamos ahora (2.2.7) obtendremos

$$
\{\phi_i(x), \Psi^a_l(y)\} = \epsilon_{il}{}^k\Psi^a_k\delta^3(x-y). \tag{3.2.9}
$$

Calculemos el paréntesis entre las restricciones $\Phi^a_i(x)$ y $\Psi^d_l(y)$, es decir

$$
\begin{aligned}
\{\Phi^a_i(x), \Psi^d_l(y)\} &= \{\Pi^a_i(x) - 2\Xi\eta^{abc}\partial_b\gamma_{ic}(x) + \Xi\eta^{abc}\epsilon_{ijk}\omega_b{}^{j0}(x)\omega_{c0}{}^k(x) \\
&-\Xi\eta^{abc}\epsilon_{ijk}\gamma^j_b(x)\gamma^k_c(x), P^d_l(y) - 2\Xi\eta^{def}\partial_e\omega_{f0l}(y) - 2\Xi\eta^{def}\epsilon_{lqp}\omega_e{}^p{}_0(y)\gamma^q_f(y)\} \\
&= -2\Xi\eta^{def}\partial_{e_y}\{\Pi^a_i(x), \omega_{f0l}(y)\} - 2\Xi\eta^{def}\epsilon_{lqp}\omega_e{}^p{}_0(y)\{\Pi^a_i(x), \gamma^q_f(y)\} \\
&-2\Xi\eta^{def}\epsilon_{lqp}\{\Pi^a_i(x), \omega_e{}^p{}_0(y)\}\gamma^q_p(y) - 2\Xi\eta^{abc}\partial_{b_x}\{\gamma_{ic}(x), P^d_l(y)\} \\
&+\Xi\eta^{abc}\epsilon_{ijk}\omega_b{}^{j0}(x)\{\omega_{c0}{}^k(x), P^d_l(y)\} + \Xi\eta^{abc}\epsilon_{ijk}\{\omega_b{}^{j0}(x), P^d_l(y)\}\omega_{c0}{}^k(x) \\
&-\Xi\eta^{abc}\epsilon_{ijk}\gamma^j_b(x)\{\gamma^k_c(x), P^d_l(y)\} - \Xi\eta^{abc}\epsilon_{ijk}\{\gamma^j_b(x), P^d_l(y)\}\gamma^k_c(x),
\end{aligned}
\tag{3.2.10}
$$

de igual manera, utilizando los paréntesis fundamentales (3.1.2) y (3.1.3) en (3.2.10), veremos la siguiente expresión

$$
\begin{aligned}
\{\Phi^a_i(x), \Psi^d_l(y)\} &= 2\Xi\eta^{def}\epsilon_{lqp}\omega_e{}^p{}_0(y)\delta^a_f\delta^q_i\delta^3(x-y) + \Xi\eta^{abc}\epsilon_{ijk}\omega_b{}^{j0}(x)\delta^d_c\delta^k_l\delta^3(x-y) \\
&+\Xi\eta^{abc}\epsilon_{ijk}\delta^d_b\delta^j_l\delta^3(x-y)\omega_{c0}{}^k(x) \\
&= 2\Xi\eta^{dea}\epsilon_{lip}\omega_e{}^p{}_0(y)\delta^3(x-y) + \Xi\eta^{abd}\epsilon_{ijl}\omega_b{}^{j0}(x)\delta^3(x-y) \\
&+\Xi\eta^{adc}\epsilon_{ilk}\delta^3(x-y)\omega_{c0}{}^k(x),
\end{aligned}
\tag{3.2.11}
$$

redefiniendo los índices y permutándolos, encontraremos que el paréntesis está dado por

$$\{\Phi^a_i(x), \Psi^d_l(y)\} = 0. \tag{3.2.12}$$

El paréntesis de Poisson entre las restricciones $\Psi^a_i(x)$ y $\Psi^d_l(y)$ tiene una expresión similar al paréntesis de Poisson (3.2.11), por lo que

$$\{\Psi^a_i(x), \Psi^d_l(y)\} = 0. \tag{3.2.13}$$

Encontremos la expresión para el siguiente paréntesis

$$\begin{aligned}
\{\psi_i(x), \Psi^b_l(y)\} &= \{\partial_a P^a_i(x) + \epsilon_{ij}{}^k \gamma^j_a(x) P^a_k(x) - \epsilon_{ij}{}^k \omega_a{}^{0j}(x)\Pi^a_k(x), P^b_l(y) - 2\Xi\eta^{bcd}\partial_c\omega_{d0l}(y) \\
&\quad -2\Xi\eta^{bcd}\epsilon_{lqp}\omega_c{}^p{}_0(y)\gamma^q_d(y)\} \\
&= -2\Xi\eta^{bcd}\partial_{a_x}\partial_{c_y}\left[\{P^a_i(x), \omega_{d0l}(y)\}\right] - 2\Xi\eta^{bcd}\epsilon_{lqp}\partial_{a_x}\left[\{P^a_i(x), \omega_c{}^p{}_0(y)\}\gamma^q_d(y)\right] \\
&\quad -2\Xi\eta^{bcd}\epsilon_{lqp}\partial_{a_x}\left[\omega_c{}^p{}_0(y)\{P^a_i(x), \gamma^q_d(y)\}\right] + \epsilon_{ij}{}^k\{\gamma^j_a(x), P^b_l(y)\}P^a_k(x) \\
&\quad -2\Xi\eta^{bcd}\epsilon_{ij}{}^k\partial_{c_y}\left[\gamma^j_a(x)\{P^a_k(x), \omega_{d0l}(y)\}\right] \\
&\quad -2\Xi\eta^{bcd}\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lqp}\gamma^j_a(x)\{P^a_k(x), \omega_c{}^p{}_0(y)\}\gamma^q_d(y) \\
&\quad -2\Xi\eta^{bcd}\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lqp}\gamma^j_a(x)\omega_c{}^p{}_0(y)\{P^a_k(x), \gamma^q_d(y)\} - \epsilon_{ij}{}^k\{\omega_a{}^{0j}(x), P^b_l(y)\}\Pi^a_k(x) \\
&\quad +2\Xi\eta^{bcd}\epsilon_{ij}{}^k\partial_{c_y}\left[\omega_a{}^{0j}(x)\{\Pi^a_k(x), \omega_{d0l}(y)\}\right] \\
&\quad +2\Xi\eta^{bcd}\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lqp}\omega^{0j}_a(x)\{\Pi^a_k(x), \omega_c{}^p{}_0(y)\}\gamma^q_d(y) \\
&\quad +2\Xi\eta^{bcd}\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lqp}\omega_a{}^{0j}(x)\omega_c{}^p{}_0(y)\{\Pi^a_k(x), \gamma^q_d(y)\},
\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

utilizando de igual manera los paréntesis fundamentales (3.1.2) y (3.1.3) en (3.2.14) obtendremos que

$$\begin{aligned}
\{\psi_i(x), \Psi^b_l(y)\} &= 2\Xi\eta^{bcd}\partial_{a_x}\partial_{c_y}\left[\delta^a_d\delta_{il}\delta^3(x-y)\right] + 2\Xi\eta^{bcd}\epsilon_{lqp}\partial_{a_x}\left[\delta^a_c\delta^p_i\delta^3(x-y)\gamma^q_d(y)\right] \\
&\quad +2\xi\eta^{bcd}\epsilon_{ij}{}^k\partial_{c_y}\left[\gamma^j_a(x)\delta^a_d\delta_{kl}\delta^3(x-y)\right] + 2\Xi\eta^{bcd}\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lqp}\gamma^j_a(x)\delta^a_c\delta^p_k\delta^3(x-y)\gamma^q_d(y) \\
&\quad -\epsilon_{ij}{}^k\delta^b_a\delta^j_l\delta^3(x-y)\Pi^a_k(x) - 2\Xi\eta^{bcd}\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lqp}\omega_a{}^{0j}(x)\omega_c{}^p{}_0(y)\delta^a_d\delta^q_k\delta^3(x-y) \\
&= 2\Xi\eta^{bca}\partial_{a_x}\partial_{c_y}\left[\delta^3(x-y)\right] + 2\Xi\eta^{bad}\epsilon_{lqi}\partial_{a_x}\left[\delta^3(x-y)\gamma^q_d(y)\right] \\
&\quad +2\xi\eta^{bca}\epsilon_{ijl}\partial_{c_y}\left[\gamma^j_a(x)\delta^3(x-y)\right] + 2\Xi\eta^{bad}\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lqk}\gamma^j_a(x)\delta^3(x-y)\gamma^q_d(y) \\
&\quad -\epsilon_{il}{}^k\delta^3(x-y)\Pi^a_k(x) - 2\Xi\eta^{bca}\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lkp}\omega_a{}^{0j}(x)\omega_c{}^p{}_0(y)\delta^3(x-y),
\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

utilizando (2.2.6) y la identidad de Jacobi (2.2.7) en (3.2.15) encontraremos como en el capítulo 2

$$\{\psi_i(x), \Psi_l^b(y)\} = -\epsilon_{il}{}^k \Phi_k^b \delta^3(x-y). \tag{3.2.16}$$

De manera similar a lo desarrollado anteriormente, tenemos que los paréntesis de Poisson entre las restricciones tiene la siguiente forma

$$\{\phi_i(x), \Phi_l^b(y)\} = \epsilon_{il}{}^k \Phi_k^b \delta^3(x-y), \tag{3.2.17}$$

$$\{\psi_i(x), \Phi_l^b(y)\} = \epsilon_{il}{}^k \Psi_k^b \delta^3(x-y). \tag{3.2.18}$$

Por lo tanto, el álgebra entre las restricciones está dada por

$$\{\phi_i(x), \psi_j(y)\} = \epsilon_{ij}{}^k \psi_k \delta^3(x-y), \tag{3.2.19}$$

$$\{\phi_i(x), \phi_j(y)\} = \epsilon_{ij}{}^k \phi_k \delta^3(x-y), \tag{3.2.20}$$

$$\{\phi_i(x), \Phi_j^a(y)\} = \epsilon_{ij}{}^k \Phi_k^a \delta^3(x-y), \tag{3.2.21}$$

$$\{\phi_i(x), \Psi_j^a(y)\} = \epsilon_{ij}{}^k \Psi_k^a \delta^3(x-y), \tag{3.2.22}$$

$$\{\psi_i(x), \psi_j(y)\} = -\epsilon_{ij}{}^k \phi_k \delta^3(x-y), \tag{3.2.23}$$

$$\{\psi_i(x), \Phi_j^a(y)\} = \epsilon_{ij}{}^k \Psi_k^a \delta^3(x-y), \tag{3.2.24}$$

$$\{\psi_i(x), \Psi_j^a(y)\} = -\epsilon_{ij}{}^k \Phi_k^a \delta^3(x-y), \tag{3.2.25}$$

$$\{\Phi_i^a, \Phi_j^b(y)\} = 0, \tag{3.2.26}$$

$$\{\Phi_i^a(x), \Psi_j^b(y)\} = 0, \tag{3.2.27}$$

$$\{\Psi_i^a(x), \Psi_j^b(y)\} = 0. \tag{3.2.28}$$

Como en el capítulo 2, debido a que el álgebra es cerrada, concluimos que las restricciones encontradas son de primera clase y por lo tanto generan transformaciones de norma. Respecto a este punto definimos el siguiente generador

$$G = \int \{\alpha^l \phi_l + \beta^j \psi_j + \mu_a^i \Psi_i^a + g_a^i \Phi_i^a\} \mathrm{d}x^3, \tag{3.2.29}$$

donde α, β, ν, g son parámetros arbitrarios. De esta manera, las transformaciones de norma están dadas por

$$\delta\gamma_\nu^h = -\partial_\nu \alpha^h + \epsilon_{lk}{}^h \alpha^l \gamma_\nu^k - \epsilon_{jk}{}^h \beta^j \omega_\nu{}^{0k} + g_\nu^h, \tag{3.2.30}$$

$$\delta\omega_\nu{}^{0h} = -\partial_\nu \beta^h + \epsilon_{lk}{}^h \alpha^l \omega_\nu{}^{0k} + \epsilon_{jl}{}^h \beta^j \gamma_\nu^l + \mu_\nu^h. \tag{3.2.31}$$

Por otra parte, las restricciones presentan reductibilidad, dado que

$$\partial_a \Phi_i^a = \phi_i, \tag{3.2.32}$$
$$\partial_a \Psi_i^a = \psi_i. \tag{3.2.33}$$

Se puede notar que, a diferencia de la teoría BF tratada en el capítulo anterior, las restricciones Φ_i^a, Ψ_j^b y la reductibilidad son diferentes, por lo que ambas teorías presentan estructura diferente.
De igual manera, tenemos 36 variables canónicas que describen al sistema y 18 restricciones de primera clase independientes, por lo que el conteo de grados de libertad es

$$GL = 36 - 2(18) = 0, \tag{3.2.34}$$

por tanto la teoría no tiene grados de libertad físicos.

3.3. Conclusiones

En esta parte hemos encontrado que el análisis Hamiltoniano de la segunda clase de Chern tiene similaridad con la de la teoría BF, sin embargo, las restricciones no son las mismas, y tienen diferentes condiciones de reductibilidad, no obstante, cumple con ser una teoría topológica ya que no tiene grados de libertad físicos.

En el siguiente capítulo, aplicaremos el mismo procedimiento que usamos en la acción anterior al invariante de Euler, encontrando así sus ecuaciones de movimiento, el Hamiltoniano canónico, los paréntesis fundamentales de Poisson, el álgebra de restricciones y finalmente las transformaciones de norma asociadas a dicha acción.

Capítulo 4

El Invariante de Euler

Al igual que en los casos anteriores, el invariante de Euler visto como una teoría de campo es una teoría topológica. Sin embargo, a diferencia de la segunda clase de Chern, cuando el invariante de Euler es agregado a una acción ya sea topológica o no, su contribución puede ser relevante cuando uno trabaja con topologías no triviales asociadas a la variedad base, debido a que dicho invariante "ve" o "detecta" la topología de la variedad. Por otro lado, debido a que el invariante de Euler puede escribirse como una diferencial total, su contribución a las ecuaciones de movimiento es nula, sin embargo, su contribución se ve reflejada en la estructura simpléctica de la teoría [14], [20].

El invariante de Euler está definido de la siguiente forma

$$S[A] = \frac{\Omega}{2} \int *F^{IJ} \wedge F_{IJ}, \tag{4.0.1}$$

donde Ω es una constante y F^{IJ} está definida como en los capítulos anteriores. De igual manera, introduciremos un campo auxiliar B_{IJ} que corresponde a una 2-forma valuada en el grupo $SO(3,1)$. Así, la acción (4.0.1) en términos de B y F se obtiene que

$$S[A,B] = \Omega \int *F^{IJ} \wedge B_{IJ} - \frac{1}{2} * B^{IJ} \wedge B_{IJ}. \tag{4.0.2}$$

De la acción anterior es posible obtener las ecuaciones de movimiento. Debido a que las variables dinámicas de la acción corresponden a A^{IJ} y B_{IJ}, variaremos la acción (4.0.2) con respecto a cada una de ellas para obtener las ecuaciones de movimiento. De esta manera si variamos con respecto a la variable $B_{IJ\mu\nu}$ obtendremos la primera ecuación de movimiento

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta B_{IJ\mu\nu}}\Big[\Omega\Big(* F^{IJ}\wedge B_{IJ} - \frac{1}{2} * B^{IJ}\wedge B_{IJ}\Big)\Big] \\
= \ & \Omega\frac{\delta}{\delta B_{IJ\mu\nu}}\Big[\frac{1}{8}\epsilon^{IJ}{}_{KL}F^{KL}_{\alpha\beta}B_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{16}\epsilon^{IJ}{}_{KL}B^{KL}_{\alpha\beta}B_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\Big] \\
= \ & \Omega\Big[\frac{1}{8}\epsilon^{IJ}{}_{KL}F^{KL}_{\alpha\beta}\delta B_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{16}\epsilon^{IJ}{}_{KL}\delta B^{KL}_{\alpha\beta}B_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{16}\epsilon^{IJ}{}_{KL}B^{KL}_{\alpha\beta}\delta B_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\Big] \\
= \ & \Omega\Big[\frac{1}{8}\epsilon^{IJ}{}_{KL}F^{KL}_{\alpha\beta}\delta B_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{16}\epsilon^{KL}{}_{IJ}B^{IJ}_{\mu\nu}\delta B_{KL\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{16}\epsilon^{IJ}{}_{KL}B^{KL}_{\alpha\beta}\delta B_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\Big] \\
= \ & \frac{\Omega}{8}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\Big[\epsilon^{IJ}{}_{KL}F^{KL}_{\alpha\beta} - \epsilon^{IJ}{}_{KL}B^{KL}_{\alpha\beta}\Big] = \frac{\Omega}{8}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\Big[* F^{IJ}_{\alpha\beta} - *B^{IJ}_{\alpha\beta}\Big] = 0,
\end{aligned}
$$

en forma compacta podemos escribir

$$*F^{IJ} = *B^{IJ}. \tag{4.0.3}$$

Ahora si variamos la acción (4.0.2) con respecto a la variable A^{IJ}_{σ} obtendremos la segunda ecuación de movimiento

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta A^{IJ}_{\alpha}}\Big[\Omega\Big(* F^{IJ}\wedge B_{IJ} - \frac{1}{2} * B^{IJ}\wedge B_{IJ}\Big)\Big] \\
= \ & \Omega\frac{\delta}{\delta A^{IJ}_{\alpha}}\Big[\frac{1}{8}\epsilon^{IJ}{}_{KL}F^{KL}_{\alpha\beta}B_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{16}\epsilon^{IJ}{}_{KL}B^{KL}_{\alpha\beta}B_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\Big] \\
= \ & \frac{\Omega}{8}\epsilon^{IJ}{}_{KL}\frac{\delta}{\delta A^{IJ}_{\alpha}}\Big[\partial_\alpha A^{KL}_{\beta} - \partial_\beta A^{KL}_{\alpha} + A^{K}_{\alpha n}A^{nL}_{\beta} + A^{L}_{\alpha n}A^{Kn}_{\beta}\Big]B_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \\
= \ & \epsilon^{IJ}{}_{KL}\partial_\beta B_{IJ\mu\nu} + \epsilon^{IJ}{}_{Kn}A^{n}_{\beta L}B_{IJ\mu\nu} + \epsilon^{IJ}{}_{nL}A^{n}_{\alpha K}B_{IJ\mu\nu} = 0,
\end{aligned}
$$

en forma compacta podemos escribir como

$$D * B^{KL} = 0. \tag{4.0.4}$$

donde D lo hemos definido en el capítulo 3. Si utilizamos (4.0.3) en (4.0.2) obtenemos (4.0.1).

4.1. Cambios de Variable

De manera similar que en los capítulos 2 y 3, romperemos la covarianza de Lorentz local y usaremos los mismos cambios de variable utilizados en el capítulo 3. De esta manera, tenemos que para la acción (4.0.2), si corremos los índices de espacio-tiempo y de grupo obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\Omega\Big[*F^{IJ}\wedge B_{IJ}-\frac{1}{2}*B^{IJ}\wedge B_{IJ}\Big]=\Omega\Big[\frac{1}{2}\epsilon^{IJ}{}_{KL}F^{KL}\wedge B_{IJ}-\frac{1}{4}\epsilon^{IJ}{}_{KL}B^{KL}\wedge B_{IJ}\Big]\\
=\;&\Omega\Big[\frac{1}{2}\epsilon^{IJ}{}_{KL}\Big(\frac{1}{4}F^{KL}_{\alpha\beta}B_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\Big)-\frac{1}{4}\epsilon^{IJ}{}_{KL}\Big(\frac{1}{4}B^{KL}_{\alpha\beta}B_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\Big)\Big]\\
=\;&\Omega\Big[\frac{1}{8}\epsilon^{IJ}{}_{KL}F^{KL}_{\alpha\beta}B_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}-\frac{1}{16}\epsilon^{IJ}{}_{KL}B^{KL}_{\alpha\beta}B_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\Big]\\
=\;&\Omega\Big[\frac{1}{8}\epsilon^{0j}{}_{kl}F^{kl}_{\alpha\beta}B_{0j\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}+\frac{1}{8}\epsilon^{i0}{}_{kl}F^{kl}_{\alpha\beta}B_{i0\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}+\frac{1}{8}\epsilon^{ij}{}_{0l}F^{0l}_{\alpha\beta}B_{ij\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\\
&+\frac{1}{8}\epsilon^{ij}{}_{k0}F^{k0}_{\alpha\beta}B_{ij\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}-\frac{1}{16}\epsilon^{0j}{}_{kl}B^{kl}_{\alpha\beta}B_{0j\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}-\frac{1}{16}\epsilon^{i0}{}_{kl}B^{kl}_{\alpha\beta}B_{i0\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\\
&-\frac{1}{16}\epsilon^{ij}{}_{0l}B^{0l}_{\alpha\beta}B_{ij\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}-\frac{1}{16}\epsilon^{ij}{}_{k0}B^{k0}_{\alpha\beta}B_{ij\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\Big]\\
=\;&\Omega\Big[\frac{1}{4}\epsilon^{0j}{}_{kl}F^{kl}_{\alpha\beta}B_{0j\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}+\frac{1}{4}\epsilon^{ij}{}_{0l}F^{0l}_{\alpha\beta}B_{ij\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}-\frac{1}{8}\epsilon^{0j}{}_{kl}B^{kl}_{\alpha\beta}B_{0j\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\\
&-\frac{1}{8}\epsilon^{ij}{}_{0l}B^{0l}_{\alpha\beta}B_{ij\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\Big]\\
=\;&\Omega\Big[\frac{1}{4}\epsilon^{j}{}_{kl}F^{kl}_{\alpha\beta}B_{0j\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}-\frac{1}{4}\epsilon^{ij}{}_{l}F^{0l}_{\alpha\beta}B_{ij\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}-\frac{1}{8}\epsilon^{j}{}_{kl}B^{kl}_{\alpha\beta}B_{0j\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\\
&+\frac{1}{8}\epsilon^{ij}{}_{l}B^{0l}_{\alpha\beta}B_{ij\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\Big]\\
=\;&\Omega\Big[-\frac{1}{2}F^{j}{}_{\alpha\beta}B_{0j\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}+\frac{1}{2}F^{0l}_{\alpha\beta}B_{l\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}+\frac{1}{4}B^{j}{}_{\alpha\beta}B_{0j\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}-\frac{1}{4}B^{0l}_{\alpha\beta}B_{l\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\Big]\\
=\;&\Omega\Big[-\frac{1}{2}F^{j}_{0a}B_{0jbc}\epsilon^{0abc}-\frac{1}{2}F^{j}_{a0}B_{0jbc}\epsilon^{a0bc}-\frac{1}{2}F^{j}_{ab}B_{0j0c}\epsilon^{ab0c}-\frac{1}{2}F^{j}_{ab}B_{0jc0}\epsilon^{abc0}\\
&+\frac{1}{2}F^{0l}_{0a}B_{lbc}\epsilon^{0abc}+\frac{1}{2}F^{0l}_{a0}B_{lbc}\epsilon^{a0bc}+\frac{1}{2}F^{0l}_{ab}B_{l0c}\epsilon^{ab0c}+\frac{1}{2}F^{0l}_{ab}B_{lc0}\epsilon^{abc0}\\
&+\frac{1}{4}B^{j}_{0a}B_{0jbc}\epsilon^{0abc}+\frac{1}{4}B^{j}_{a0}B_{0jbc}\epsilon^{a0bc}+\frac{1}{4}B^{j}_{ab}B_{0j0c}\epsilon^{ab0c}+\frac{1}{4}B^{j}_{ab}B_{0jc0}\epsilon^{abc0}\\
&-\frac{1}{4}B^{0l}_{0a}B_{lbc}\epsilon^{0abc}-\frac{1}{4}B^{0l}_{a0}B_{lbc}\epsilon^{a0bc}-\frac{1}{4}B^{0l}_{ab}B_{l0c}\epsilon^{ab0c}-\frac{1}{4}B^{0l}_{ab}B_{lc0}\epsilon^{abc0}\Big]\\
=\;&\Omega\Big[-F^{j}_{0a}B_{0jbc}\eta^{abc}-F^{j}_{ab}B_{0j0c}\eta^{abc}+F^{0l}_{0a}B_{lbc}\eta^{abc}+F^{0l}_{ab}B_{l0c}\eta^{abc}+\frac{1}{2}B^{j}_{0a}B_{0jbc}\eta^{abc}
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{2}B^j_{ab}B_{0j0c}\eta^{abc} - \frac{1}{2}B^{0l}_{0a}B_{lbc}\eta^{abc} - \frac{1}{2}B^{0l}_{ab}B_{l0c}\eta^{abc}\Big].$$

Ahora introduciendo las variables ya definidas anteriormente, encontramos que (4.0.2) se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
&\Omega\Big[*F^{IJ}\wedge B_{IJ} - \frac{1}{2}*B^{IJ}\wedge B_{IJ}\Big] = \frac{\Omega}{\Xi}\Big[-\Big(\dot{\gamma}^j_a - \partial_a\gamma^j_0 - \epsilon^j{}_{lk}\omega_0{}^{l0}\omega_{a0}{}^k + \epsilon^j{}_{lk}\gamma^l_0\gamma^k_a\Big)P^a_j\Big] \\
&+\frac{\Omega\varsigma_{jc}}{2}F^j_{ab}\eta^{abc} + \frac{\Omega}{\Xi}\Big[\Big(\dot{\omega}_a{}^{0l} - \partial_a\omega_0{}^{0l} + \epsilon^l{}_{jk}\omega_0{}^{k0}\gamma^j_a - \epsilon^l{}_{jk}\omega_a{}^{k0}\gamma^j_0\Big)\Pi^a_l\Big] - \frac{\Omega\chi_{lc}}{2}F^{0l}_{ab}\eta^{abc} \\
&-\frac{\Omega}{4\Xi}P^a_j\chi^j{}_a - \frac{\Omega}{4\Xi}\Pi^{cj}\varsigma_{jc} - \frac{\Omega}{4\Xi}\varsigma^l_a\Pi^a_l - \frac{\Omega}{4\Xi}\chi_{lc}P^{cl} \\
= \;&\frac{\Omega}{\Xi}\Big[-\dot{\gamma}^j_a + \partial_a\gamma^j_0 + \epsilon^j{}_{lk}\omega_0{}^{l0}\omega_{a0}{}^k - \epsilon^j{}_{lk}\gamma^l_0\gamma^k_a\Big]P^a_j + \\
&+\frac{\Omega}{\Xi}\Big[\dot{\omega}_a{}^{0l} - \partial_a\omega_0{}^{0l} + \epsilon^l{}_{jk}\omega_0{}^{k0}\gamma^j_a - \epsilon^l{}_{jk}\omega_a{}^{k0}\gamma^j_0\Big]\Pi^a_l - \frac{\Omega\varsigma^j{}_c}{2\Xi}\Big[\Pi^c_j - \Xi F_{jab}\eta^{abc}\Big] \\
&-\frac{\Omega\chi^{l0}{}_c}{2\Xi}\Big[P^c_l - \Xi F_{0lab}\eta^{abc}\Big] \\
= \;&\frac{\Omega}{\Xi}\Big[-\dot{\gamma}^j_aP^a_j + \dot{\omega}_a{}^{0l}\Pi^a_l + \tau^j\partial_aP^a_j - \Lambda^l\partial_a\Pi^a_l - \Lambda^l\epsilon_{lk}{}^j\omega_a{}^{0k}P^a_j - \Lambda^k\epsilon_{kj}{}^l\gamma^j_a\Pi^a_l + \tau^l\epsilon_{lk}{}^j\gamma^k_aP^a_j \\
&-\tau^j\epsilon_{jk}{}^l\omega_a{}^{0k}\Pi^a_l\Big] - \frac{\Omega\varsigma^j{}_c}{2\Xi}\Big[\Pi^c_j - \Xi F_{jab}\eta^{abc}\Big] - \frac{\Omega\chi^l{}_c}{2\Xi}\Big[P^c_l - \Xi F_{0lab}\eta^{abc}\Big] \\
= \;&\frac{\Omega}{\Xi}\Big[\Big(-\dot{\gamma}^j_aP^a_j + \dot{\omega}_a{}^{0l}\Pi^a_l\Big) - \Lambda^i\Big(\partial_a\Pi^a_i + \epsilon_{ij}{}^k\omega_a{}^{0j}P^a_k + \epsilon_{ij}{}^k\gamma^j_a\Pi^a_k\Big) \\
&+\tau^i\Big(\partial_aP^a_i + \epsilon_{ij}{}^kP^a_k\gamma^j_a - \epsilon_{ij}{}^k\omega_a{}^{0j}\Pi^a_k\Big) - \frac{\Omega\varsigma^j{}_c}{2\Xi}\Big(\Pi^c_j - \Xi F_{jab}\eta^{abc}\Big) - \frac{\Omega\chi^l{}_c}{2\Xi}\Big(P^c_l - \Xi F_{0lab}\eta^{abc}\Big).
\end{aligned}$$

De este modo, se puede observar que la acción (4.0.2) en términos de las nuevas variables tiene la forma

$$\begin{aligned}
&S[\gamma^i_a, \pi^a_i, \omega_a{}^{0i}, P^a_i, \tau^i, \Lambda^i, \varsigma^i{}_a, \chi^i{}_{0a}] \\
= \;&\int\frac{\Omega}{\Xi}\Big[\Big(-\dot{\gamma}^j_aP^a_j + \dot{\omega}_a{}^{0l}\Pi^a_l\Big) - \Lambda^i\Big(\partial_a\Pi^a_i + \epsilon_{ij}{}^k\omega_a{}^{0j}P^a_k + \epsilon_{ij}{}^k\gamma^j_a\Pi^a_k\Big) \\
&+\tau^i\Big(\partial_aP^a_i + \epsilon_{ij}{}^kP^a_k\gamma^j_a - \epsilon_{ij}{}^k\omega_a{}^{0j}\Pi^a_k\Big) - \frac{\Omega\varsigma^j{}_c}{2\Xi}\Big(\Pi^c_j - \Xi F_{jab}\eta^{abc}\Big) \\
&-\frac{\Omega\chi^l{}_c}{2\Xi}\Big(P^c_l - \Xi F_{0lab}\eta^{abc}\Big).
\end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Podemos observar que la acción anterior (4.1.1) se ha llevado a la forma que encontramos en (1.6.1), donde $H_c = 0$. Este resultado es esperado puesto que la covarianza bajo difeomorfismos se mantiene. De (4.1.1) podemos identificar los paréntesis fundamentales de Poisson, dados por

$$\{\gamma_a^i(x), -\frac{\Omega}{\Xi}P_j^b(y\}) = \delta_a^b\delta_j^i\delta^3(x-y), \tag{4.1.2}$$

$$\{\omega_a{}^{0i}(x), \frac{\Omega}{\Xi}\Pi_j^b(y)\} = \delta_a^b\delta_j^i\delta^3(x-y), \tag{4.1.3}$$

y la variación de la acción respecto a $(\tau^i, \Lambda^i, \varsigma^i{}_a, \chi^i{}_{0a})$ se obtiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta \Lambda^i} &= \partial_a \Pi_i^a + \epsilon_{ik}{}^j \omega_a{}^{0k} P_j^a + \epsilon_{ik}{}^j \gamma_a^k \Pi_j^a = 0,\\
\frac{\delta S}{\delta \tau^i} &= \partial_a P_i^a + \epsilon_{il}{}^k \gamma_a^l P_k^a - \epsilon_{ik}{}^l \omega_a{}^{0k} \Pi_l^a = 0,\\
\frac{\delta S}{\delta \chi^i{}_{0a}} &= P_i^a - \Xi F_{0ibc}\eta^{abc} = 0,\\
\frac{\delta S}{\delta \varsigma^i{}_a} &= \Pi_i^a - \Xi F_{ibc}\eta^{abc} = 0,
\end{aligned}$$

donde se pueden identificar las siguientes restricciones

$$\phi_l = \partial_a \Pi_l^a + \epsilon_{lk}{}^j \omega_a{}^{0k} P_j^a + \epsilon_{lk}{}^j \gamma_a^k \Pi_j^a = 0, \tag{4.1.4}$$

$$\psi_j = \partial_a P_j^a + \epsilon_{jl}{}^k \gamma_a^l P_k^a - \epsilon_{jk}{}^l \omega_a{}^{0k} \Pi_l^a = 0, \tag{4.1.5}$$

$$\Psi_i^a = P_i^a - \Xi\left(2\partial_b \omega_{c0i} + 2\epsilon_{ijk}\omega_b{}^k{}_0 \gamma_c^j\right)\eta^{abc} = 0, \tag{4.1.6}$$

$$\Phi_i^a = \Pi_i^a - \Xi\left(2\partial_b \gamma_{ic} - \epsilon_{ijk}\omega_b{}^{j0}\omega_{c0}{}^k + \epsilon_{ijk}\gamma_b^j\gamma_c^k\right)\eta^{abc} = 0, \tag{4.1.7}$$

y las variables $\tau^i, \Lambda^i, \varsigma^i{}_0, \chi^i{}_{0a}$ son identificadas como multiplicadores de Lagrange.
Es importante comentar que las restricciones (4.1.4)-(4.1.7) son las mismas que las encontradas en (3.1.4)-(3.1.7), sin embargo, las estructuras simplécticas para la segunda clase de Chern y del invariante de Euler son diferentes, esto lo podemos ver comparando (4.1.2), (4.1.3) y (3.1.2), (3.1.3). Por otra parte, las condiciones de reductibilidad son las mismas.

4.2. Álgebra de restricciones

En esta parte calcularemos los paréntesis de Poisson entre todas las restricciones encontradas. Para esta acción tenemos las mismas restricciones que en la sección 3, pero con las variables canónicas expresadas en las ecuaciones (4.1.2) y (4.1.3), utilizando estas dos ecuaciones anteriores en las ecuaciones (2.2.5), (2.2.13), (2.2.10), (3.2.5), (3.2.10), (3.2.7) obtendremos el álgebra de restricciones.[1]
Para calcular el siguiente paréntesis de Poisson tomaremos el paréntesis (2.2.5), y utilizando los paréntesis fundamentales (4.1.2) y (4.1.3) obtenemos

$$\begin{aligned}
\{\phi_i(x),\phi_l(y)\} &= \frac{\Xi}{\Omega}\Big[-\epsilon_{lq}{}^{p}\partial_{a_x}\left(P_p^n(y)\delta_n^a\delta_i^q\delta^3(x-y)\right)+\epsilon_{ij}{}^{k}\partial_{b_y}\left(P_k^a(x)\delta_l^j\delta_a^b\delta^3(x-y)\right)+\\
&+\epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lq}{}^{p}\delta_n^a\delta_k^q\delta^3(x-y)\omega_a{}^{0j}(x)\Pi_p^n(y)+\epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lq}{}^{p}P_k^a(x)\gamma_n^q(y)\delta_p^j\delta_a^n\delta^3(x-y)-\\
&-\epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lq}{}^{p}\delta_p^j\delta_a^n\delta^3(x-y)\Pi_k^a(x)\omega_n{}^{0q}(y)-\epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lq}{}^{p}\gamma_a^j(x)P_p^n(y)\delta_n^a\delta_k^q\delta^3(x-y)\Big]=\\
&= \frac{\Xi}{\Omega}\Big[-\epsilon_{li}{}^{p}\partial_{a_x}\left(P_p^a(y)\delta^3(x-y)\right)+\epsilon_{il}{}^{k}\partial_{a_y}\left(P_k^a(x)\delta^3(x-y)\right)+\\
&+\epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lk}{}^{p}\delta^3(x-y)\omega_a{}^{0j}(x)\Pi_p^a(y)+\epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lq}{}^{j}P_k^a(x)\gamma_a^q(y)\delta^3(x-y)-\\
&-\epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lq}{}^{j}\delta^3(x-y)\Pi_k^a(x)\omega_a{}^{0q}(y)-\epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lk}{}^{p}\gamma_a^j(x)P_p^a(y)\delta^3(x-y)\Big],
\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

si aplicamos la identidad de Jacobi (2.2.7) encontraremos que

$$\{\phi_i(x),\phi_l(y)\}=-\frac{\Xi}{\Omega}\epsilon_{il}{}^{k}\psi_k\delta^3(x-y). \tag{4.2.2}$$

Para calcular el siguiente paréntesis, tomaremos la expresión del paréntesis (2.2.10) y utilizando nuevamente los paréntesis fundamentales (4.1.2) y (4.1.3) veremos lo siguiente

[1] Es válido usar las ecuaciones (2.2.5), (2.2.13), (2.2.10), (3.2.5), (3.2.10), (3.2.7) porque en el desarrollo solo se utilizó el hecho de que $\{\gamma_i^a(x),\gamma_j^b(y)\}=\{\Pi_i^a(x),\Pi_j^b(y)\}=\{P_i^a(x),P_j^b(y)\}=\{\omega_a{}^{0i}(x),\omega_b{}^{0j}(y)\}=0$ que para las secciones 3,2 y 4 son las mismas.

$$\begin{aligned}
\{\psi_i(x), \psi_l(y)\} &= \frac{\Xi}{\Omega}\Big[\epsilon_{lq}{}^{p}\partial_{a_x}\left(P^n_p(y)\delta^a_n\delta^q_i\delta^3(x-y)\right) - \epsilon_{ij}{}^{k}\partial_{b_y}\left(P^a_k(y)\delta^j_l\delta^b_a\delta^3(x-y)\right) + \\
&+\epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lq}{}^{p}P^n_p(y)\delta^a_n\delta^q_k\delta^3(x-y)\gamma^j_a(x) - \epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lq}{}^{p}P^a_k(x)\delta^j_p\delta^n_a\delta^3(x-y)\gamma^q_n(y) + \\
&+\epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lq}{}^{p}\Pi^a_k(x)\delta^n_a\delta^j_p\delta^3(x-y)\omega_n{}^{0q}(y) - \epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lq}{}^{p}\Pi^n_p(y)\delta^a_n\delta^q_k\delta^3(x-y)\omega_a{}^{0j}(x)\Big] = \\
&= \frac{\Xi}{\Omega}\Big[\epsilon_{li}{}^{p}\partial_{a_x}\left(P^a_p(y)\delta^3(x-y)\right) - \epsilon_{il}{}^{k}\partial_{a_y}\left(P^a_k(y)\delta^3(x-y)\right) + \\
&+\epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lk}{}^{p}P^a_p(y)\delta^3(x-y)\gamma^j_a(x) - \epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lq}{}^{j}P^a_k(x)\delta^3(x-y)\gamma^q_a(y) + \\
&+\epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lq}{}^{j}\Pi^a_k(x)\delta^3(x-y)\omega_a{}^{0q}(y) - \epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lk}{}^{p}\Pi^a_p(y\delta^3(x-y)\omega_a{}^{0j}(x)\Big],
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

aplicando la identidad de Jacobi (2.2.7) encontraremos que el paréntesis tiene la siguiente forma

$$\{\psi_i(x), \psi_l(y)\} = \frac{\Xi}{\Omega}\epsilon_{il}{}^{k}\psi_k\delta^3(x-y). \tag{4.2.4}$$

Para poder calcular el siguiente paréntesis de Poisson entre las restricciones $\phi_i(x)$ y $\psi_l(y)$, tomaremos la expresión del paréntesis (2.2.13) y aplicando los paréntesis fundamentales (4.1.2) y (4.1.3) obtendremos

$$\begin{aligned}
\{\phi_i(x), \psi_l(y)\} &= \frac{\Xi}{\Omega}\Big[\epsilon_{lq}{}^{p}\partial_{a_x}\left(\Pi^n_p(y)\delta^a_n\delta^q_i\delta^3(x-y)\right) + \epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lq}{}^{p}P^n_p(y)\delta^a_n\delta^q_k\delta^3(x-y)\omega_a{}^{0j}(x) - \\
&-\epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lq}{}^{p}P^a_k(x)\delta^n_a\delta^j_p\delta^3(x-y)\omega_n{}^{0q}(y) - \epsilon_{ij}{}^{k}\partial_{b_y}\left(\delta^j_l\delta^b_a\delta^3(x-y)\Pi^a_k(x)\right) - \\
&-\epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lq}{}^{p}\delta^j_p\delta^n_a\delta^3(x-y)\Pi^a_k(x)\gamma^q_n(y) + \epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lq}{}^{p}\gamma^j_a(x)\Pi^n_p(y)\delta^a_n\delta^q_k\delta^3(x-y)\Big] = \\
&= \frac{\Xi}{\Omega}\Big[\epsilon_{li}{}^{p}\partial_{a_x}\left(\Pi^a_p(y)\delta^3(x-y)\right) + \epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lk}{}^{p}P^a_p(y)\delta^3(x-y)\omega_a{}^{0j}(x) - \\
&-\epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lq}{}^{j}P^a_k(x)\delta^3(x-y)\omega_a{}^{0q}(y) - \epsilon_{il}{}^{k}\partial_{a_y}\left(\delta^3(x-y)\Pi^a_k(x)\right) - \\
&-\epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lq}{}^{j}\delta^3(x-y)\Pi^a_k(x)\gamma^q_a(y) + \epsilon_{ij}{}^{k}\epsilon_{lk}{}^{p}\gamma^j_a(x)\Pi^a_p(y)\delta^3(x-y)\Big],
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

aplicando la identidad de Jacobi (2.2.7) el paréntesis estará dado por

$$\{\phi_i(x), \psi_l(y)\} = \frac{\Xi}{\Omega}\epsilon_{il}{}^{k}\phi_k\delta^3(x-y). \tag{4.2.6}$$

Para calcular el paréntesis de Poisson entre las restricciones $\Phi^a_i(x)$ y $\Phi^d_l(y)$, tomaremos la expresión del paréntesis (3.2.5) y usando los paréntesis fundamentales (4.1.2) y (4.1.3), el paréntesis de Poisson estará dado por

$$\begin{aligned}
\{\Phi_i^a(x), \Phi_l^d(y)\} &= \frac{\Xi^2}{\Omega}\Big(-\eta^{def}\epsilon_{lqp}\omega_e{}^{q0}(y)\delta_f^a\delta_i^p\delta^3(x-y) - \eta^{def}\epsilon_{lqp}\delta_e^a\delta_i^q\delta^3(x-y)\omega_{f0}{}^p(y) + \\
&+\eta^{abc}\epsilon_{ijk}\omega_b{}^{j0}(x)\delta_c^d\delta_l^k\delta^3(x-y) + \eta^{abc}\epsilon_{ijk}\delta_b^d\delta_l^j\delta^3(x-y)\omega_{c0}{}^k(x)\Big) = \\
&= \frac{\Xi^2}{\Omega}\Big(-\eta^{dea}\epsilon_{lqi}\omega_e{}^{q0}(y)\delta^3(x-y) - \eta^{daf}\epsilon_{lip}\delta^3(x-y)\omega_{f0}{}^p(y) + \\
&+\eta^{abd}\epsilon_{ijl}\omega_b{}^{j0}(x)\delta^3(x-y) + \eta^{adc}\epsilon_{ilk}\delta^3(x-y)\omega_{c0}{}^k(x)\Big), \qquad (4.2.7)
\end{aligned}$$

permutando y renombrando índices, encontramos que

$$\{\Phi_i^a(x), \Phi_l^d(y)\} = 0. \qquad (4.2.8)$$

Para obtener la expresión del siguiente paréntesis, utilizaremos la expresión (3.2.7), sustituyendo los paréntesis fundamentales (4.1.2) y (4.1.3) encontraremos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\{\phi_i(x), \Psi_l^b(y)\} &= 2\frac{\Xi^2}{\Omega}\eta^{bca}\partial_{a_x}\partial_{c_y}\left[\delta^3(x-y)\right] + 2\frac{\Xi^2}{\Omega}\eta^{bad}\epsilon_{lqi}\partial_{a_x}\left[\delta^3(x-y)\gamma_d^q(y)\right] - \\
&-2\frac{\Xi^2}{\Omega}\eta^{bca}\epsilon_{ij}{}^q\epsilon_{lqp}\omega_c{}^p{}_0(y)\delta^3(x-y)\omega_a{}^{0j}(x) - \frac{\Xi}{\Omega}\epsilon_{il}{}^k\delta^3(x-y)\Pi_k^a(x) + \\
&+2\frac{\Xi^2}{\Omega}\eta^{bca}\epsilon_{ijl}\partial_{c_y}\left[\gamma_a^j(x)\delta^3(x-y)\right] + \\
&+2\frac{\Xi^2}{\Omega}\eta^{bad}\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lqk}\gamma_a^j(x)\delta^3(x-y)\gamma_d^q(y), \qquad (4.2.9)
\end{aligned}$$

haciendo el álgebra correspondiente obtenemos

$$\{\phi_i(x), \Psi_l^b(y)\} = \frac{\Xi}{\Omega}\epsilon_{il}{}^k\Phi_k^a\delta^3(x-y). \qquad (4.2.10)$$

La expresión del paréntesis de Poisson $\{\Phi_i^a(x), \Psi_l^d(y)\}$ estará dada usando la expresión (3.2.10) y utilizando los paréntesis fundamentales de Poisson (4.1.2) y (4.1.3) encontraremos que

$$
\begin{aligned}
\{\Phi_i^a(x), \Psi_l^d(y)\} &= 2\frac{\Xi^2}{\Omega}\eta^{def}\partial_{e_y}\left[\delta_f^a\delta_{il}\delta^3(x-y)\right] + 2\frac{\Xi^2}{\Omega}\eta^{def}\epsilon_{lqp}\delta_e^a\delta_i^p\delta^3(x-y)\gamma_f^q(y) + \\
&\quad +2\frac{\Xi^2}{\Omega}\eta^{abc}\partial_{b_x}\left[\delta_{il}\delta_c^d\delta^3(x-y)\right] + \frac{\Xi^2}{\Omega}\eta^{abc}\epsilon_{ijk}\gamma_b^j(x)\delta_l^k\delta_c^d\delta^3(x-y) + \\
&\quad +\frac{\Xi^2}{\Omega}\eta^{abc}\epsilon_{ijk}\delta_l^j\delta_b^d\delta^3(x-y)\gamma_c^k(x) = \\
&= +2\frac{\Xi^2}{\Omega}\eta^{daf}\epsilon_{lqi}\delta^3(x-y)\gamma_f^q(y) + \frac{\Xi^2}{\Omega}\eta^{abd}\epsilon_{ijl}\gamma_b^j(x)\delta^3(x-y) + \\
&\quad +\frac{\Xi^2}{\Omega}\eta^{adc}\epsilon_{ilk}\delta^3(x-y)\gamma_c^k(x), \qquad (4.2.11)
\end{aligned}
$$

redefiniendo y permutando los índices, el paréntesis tendrá la siguiente forma

$$\{\Phi_i^a(x), \Psi_l^d(y)\} = 0. \qquad (4.2.12)$$

Por la similitud a la expresión (4.2.11), los siguientes paréntesis son

$$\{\Phi_i^a(x), \Phi_l^d(y)\} = 0, \qquad (4.2.13)$$
$$\{\Psi_i^a(x), \Psi_l^d(y)\} = 0. \qquad (4.2.14)$$

Para obtener la forma del paréntesis entre las restricciones $\psi_i(x)$ y $\Psi_l^b(y)$, utilizaremos la expresión (3.2.14) y utilizando los paréntesis fundamentales de Poisson (4.1.2), (4.1.3) en (3.2.14) veremos que

$$\begin{aligned}
\{\psi_i(x), \Psi^b_l(y)\} &= -2\frac{\Xi^2}{\Omega}\eta^{bcd}\epsilon_{lqp}\partial_{a_x}\left[\omega_c{}^p{}_0(y)\delta^a_d\delta^q_i\delta^3(x-y)\right] - \frac{\Xi}{\Omega}\epsilon_{ij}{}^k\delta^j_l\delta^b_a\delta^3(x-y)P^a_k(x) - \\
& -2\frac{\Xi^2}{\Omega}\eta^{bcd}\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lqp}\gamma^j_a(x)\omega_c{}^p{}_0(y)\delta^a_d\delta^q_k\delta^3(x-y) - \\
& -2\frac{\Xi^2}{\Omega}\eta^{bcd}\epsilon_{ij}{}^k\partial_{c_y}\left[\omega_a{}^{0j}(x)\delta^a_d\delta_{kl}\delta^3(x-y)\right] - \\
& -2\frac{\Xi^2}{\Omega}\eta^{bcd}\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lqp}\omega_a{}^{0j}(x)\delta^a_c\delta^p_k\delta^3(x-y)\gamma^q_d(y) = \\
&= -2\frac{\Xi^2}{\Omega}\eta^{bca}\epsilon_{lip}\partial_{a_x}\left[\omega_c{}^p{}_0(y)\delta^3(x-y)\right] - \frac{\Xi}{\Omega}\epsilon_{il}{}^k\delta^3(x-y)P^a_k(x) - \\
& -2\frac{\Xi^2}{\Omega}\eta^{bca}\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lkp}\gamma^j_a(x)\omega_c{}^p{}_0(y)\delta^3(x-y) - \\
& -2\frac{\Xi^2}{\Omega}\eta^{bca}\epsilon_{ijl}\partial_{c_y}\left[\omega_a{}^{0j}(x)\delta^3(x-y)\right] - \\
& -2\frac{\Xi^2}{\Omega}\eta^{bad}\epsilon_{ij}{}^k\epsilon_{lqk}\omega_a{}^{0j}(x)\delta^3(x-y)\gamma^q_d(y), \qquad (4.2.15)
\end{aligned}$$

utilizando laidentidad de Jacobi (2.2.7) en (4.2.15) la forma del paréntesis será

$$\{\psi_i(x), \Psi^b_l(y)\} = \frac{\Xi}{\Omega}\epsilon_{il}{}^k\Psi^b_k\delta^3(x-y). \qquad (4.2.16)$$

De manera similar a lo desarrollado anteriomente, tenemos que los paréntesis de Poisson entre las siguientes restricciones tienen la forma

$$\{\phi_i(x), \Phi^b_l(y)\} = -\frac{\Xi}{\Omega}\epsilon_{il}{}^k\Psi^b_k\delta^3(x-y), \qquad (4.2.17)$$

$$\{\psi_i(x), \Phi^b_l(y)\} = \frac{\Xi}{\Omega}\epsilon_{il}{}^k\Phi^b_k\delta^3(x-y). \qquad (4.2.18)$$

Por lo tanto, el álgebra entre las restricciones está dada por

$$\{\phi_i(x), \psi_j(y)\} = \frac{\Xi}{\Omega}\epsilon_{ij}{}^{k}\phi_k\delta^3(x-y), \tag{4.2.19}$$
$$\{\phi_i(x), \phi_j(y)\} = -\frac{\Xi}{\Omega}\epsilon_{ij}{}^{k}\psi_k\delta^3(x-y), \tag{4.2.20}$$
$$\{\phi_i(x), \Phi^a_j(y)\} = -\frac{\Xi}{\Omega}\epsilon_{ij}{}^{k}\Psi^a_k\delta^3(x-y), \tag{4.2.21}$$
$$\{\phi_i(x), \Psi^a_j(y)\} = \frac{\Xi}{\Omega}\epsilon_{ij}{}^{k}\Phi^a_k\delta^3(x-y), \tag{4.2.22}$$
$$\{\psi_i(x), \psi_j(y)\} = \frac{\Xi}{\Omega}\epsilon_{ij}{}^{k}\psi_k\delta^3(x-y), \tag{4.2.23}$$
$$\{\psi_i(x), \Phi^a_j(y)\} = \frac{\Xi}{\Omega}\epsilon_{ij}{}^{k}\Phi^a_k\delta^3(x-y), \tag{4.2.24}$$
$$\{\psi_i(x), \Psi^a_j(y)\} = \frac{\Xi}{\Omega}\epsilon_{ij}{}^{k}\Psi^a_k\delta^3(x-y), \tag{4.2.25}$$
$$\{\Phi^a_i, \Phi^b_j(y)\} = 0, \tag{4.2.26}$$
$$\{\Phi^a_i(x), \Psi^b_j(y)\} = 0, \tag{4.2.27}$$
$$\{\Psi^a_i(x), \Psi^b_j(y)\} = 0. \tag{4.2.28}$$

Podemos notar que el álgebra de restricciones (4.2.26)-(4.2.28) comparada con (3.2.26)-(3.2.28) son exactamente las mismas, sin embargo, comparando (4.2.19)-(4.2.25) con (3.2.19)-(3.2.25) son diferentes, aunque el álgebra sea cerrada, los paréntesis de Poisson son diferentes en ambas teorías.

Como en los capítulos 2 y 3, debido a que el álgebra es cerrada, concluimos que las restricciones encontradas son de primera clase y por lo tanto generan transformaciones de norma. Respecto a este punto definimos el siguiente generador

$$G = \int \{\alpha^l\phi_l + \beta^j\psi_j + \mu^i_a\Psi^a_i + g^i_a\Phi^a_i\}\mathrm{d}x^3, \tag{4.2.29}$$

donde α, β, ν, g son parámetros arbitrarios. De esta manera, las transformaciones de norma están dadas por

$$\delta\gamma^h_\nu = -\frac{\Omega}{\Xi}\Big[-\partial_\nu\beta^h + \epsilon_{lk}{}^{h}\alpha^l\omega_\nu{}^{0k} + \epsilon_{jl}{}^{h}\beta^j\gamma^l_\nu + \mu^h_\nu\Big], \tag{4.2.30}$$
$$\delta\omega_\nu{}^{0h} = \frac{\Omega}{\Xi}\Big[-\partial_\nu\alpha^h + \epsilon_{lk}{}^{h}\alpha^l\gamma^k_\nu - \epsilon_{jk}{}^{h}\beta^j\omega_\nu{}^{0k} + g^h_\nu\Big]. \tag{4.2.31}$$

De igual manera que en los capítulos anteriores, tenemos 36 variables canónicas que describen al sistema y 18 restricciones de primera clase independientes, por lo que el conteo de grados de libertad es cero, es decir, la teoría no contiene grados de libertad físicos.

4.3. Conclusiones

En este capítulo encontramos algo muy similar a lo obtenido en el capítulo anterior, a diferencia de la estructura simpléctica y el álgebra de restricciones, que son diferentes para ambas teorías.
En el siguiente capítulo, aplicaremos el mismo procedimiento que usamos en la acción anterior a la acción generalizada, encontrando así sus ecuaciones de movimiento, el Hamiltoniano canónico, los paréntesis fundamentales de Poisson, el álgebra de restricciones y finalmente las transformaciones de norma asociadas a dicha acción.

Capítulo 5

La Acción Generalizada

En este capítulo trabajaremos con una acción que está definida en términos de una teoría BF, la segunda clase de Chern y un término que en gravedad a la BF se le asocia a la constante cosmológica. La acción está dada por

$$S[B, A] = \int F^{IJ} \wedge F_{IJ} + 2kB^{IJ} \wedge F_{IJ} + k^2 B^{IJ} \wedge B_{IJ}. \tag{5.0.1}$$

El análisis hamiltoniano de la acción (5.0.1) ha sido reportado en [21], en ese artículo se trabajó con el espacio de configuración original, tomando por variables dinámicas a la conexión A y el campo B. Dentro de los resultados importantes encontrados en [21], podemos citar que la teoría (5.0.1) es topológica, la teoría tiene restricciones de primera clase reductibles y restricciones de segunda clase irreductibles y el Hamiltoniano extendido es una combinación lineal de restricciones de primera clase. En este capítulo, realizaremos el análisis Hamiltoniano de la acción (5.0.1) [21] en términos de las nuevas variables definidas anteriormente, encontraremos solo restricciones de primera clase reductibles y concluiremos también que la teoría es topológica.

De la acción (5.0.1) es posible obtener las ecuaciones de movimiento. Debido a que las variables dinámicas de la acción corresponden a A^{IJ} y B_{IJ}, variaremos la acción (5.0.1) con respecto a cada una de ellas para obtener las ecuaciones de movimiento. De esta manera si variamos con respecto a la variable $B^{IJ}_{\mu\nu}$ obtendremos la primera ecuación de movimiento

$$
\begin{aligned}
& \frac{\delta}{\delta B^{IJ}_{\alpha\beta}}\Big[F^{IJ}\wedge F_{IJ}+2kB^{IJ}\wedge F_{IJ}+k^2B^{IJ}\wedge B_{IJ}\Big] \\
= \;& \frac{\delta}{\delta B^{IJ}_{\alpha\beta}}\Big[\frac{1}{4}F^{IJ}_{\alpha\beta}F_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}+\frac{k}{2}B^{IJ}_{\alpha\beta}F_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}+\frac{k^2}{4}B^{IJ}_{\alpha\beta}B_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\Big] \\
= \;& \frac{k}{2}\delta B^{IJ}_{\alpha\beta}F_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}+\frac{k^2}{4}\delta B^{IJ}_{\alpha\beta}B_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}+\frac{k^2}{4}B^{IJ}_{\alpha\beta}\delta B_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \\
= \;& \frac{k}{2}\delta B^{IJ}_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\Big[F_{IJ\mu\nu}+\frac{k}{2}B_{IJ\mu\nu}\Big]+\frac{k^2}{4}\delta B^{IJ}_{\mu\nu}B_{IJ\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \\
= \;& \frac{k}{2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\Big[F_{IJ\mu\nu}+kB_{IJ\mu\nu}\Big]=0,
\end{aligned}
$$

que en forma compacta podemos escribir

$$
F_{IJ}=-kB_{IJ}. \tag{5.0.2}
$$

Ahora si variamos la acción (5.0.1) con respecto a la variable A^{IJ}_{σ} obtendremos la segunda ecuación de movimiento

$$
\begin{aligned}
& \frac{\delta}{\delta A^{IJ}_{\alpha}}\Big[F^{IJ}\wedge F_{IJ}+2kB^{IJ}\wedge F_{IJ}+k^2B^{IJ}\wedge B_{IJ}\Big] \\
= \;& \frac{\delta}{\delta A^{IJ}_{\alpha}}\Big[\frac{1}{4}F^{IJ}_{\alpha\beta}F_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}+\frac{k}{2}B^{IJ}_{\alpha\beta}F_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}+\frac{k^2}{4}B^{IJ}_{\alpha\beta}B_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\Big] \\
= \;& \frac{1}{4}\frac{\delta}{\delta A^{IJ}_{\alpha}}\Big[\partial_\alpha A^{IJ}_{\beta}-\partial_\beta A^{IJ}_{\alpha}+A^{I}_{\alpha k}A^{kJ}_{\beta}+A^{J}_{\alpha k}A^{Ik}_{\beta}\Big]F_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \\
& +\frac{k}{2}\frac{\delta}{\delta A^{IJ}_{\alpha}}\Big[\partial_\mu A^{IJ}_{\nu}-\partial_\nu A^{IJ}_{\mu}+A^{I}_{\mu k}A^{kJ}_{\nu}+A^{J}_{\mu k}A^{Ik}_{\nu}\Big]B_{IJ\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \\
= \;& \frac{1}{4}\frac{\delta}{\delta A^{IJ}_{\alpha}}\Big[\partial_\alpha A^{IJ}_{\beta}-\partial_\beta A^{IJ}_{\alpha}+A^{I}_{\alpha k}A^{kJ}_{\beta}+A^{J}_{\alpha k}A^{Ik}_{\beta}\Big]\Big[F_{IJ\mu\nu}+2kB_{IJ\mu\nu}\Big]\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \\
= \;& \partial_\beta\Big(F_{IJ\mu\nu}+2kB_{IJ\mu\nu}\Big)\Big]\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}+A^{k}_{\beta J}\Big(F_{IJ\mu\nu}+2kB_{IJ\mu\nu}\Big)\Big]\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \\
& +A^{k}_{\alpha I}\Big(F_{IJ\mu\nu}+2kB_{IJ\mu\nu}\Big)\Big]\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \\
= \;& \Big[D_\beta\Big(F_{IJ\mu\nu}+2kB_{IJ\mu\nu}\Big)\Big]\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}=0,
\end{aligned}
$$

que en forma compacta podemos escribir como

$$D\Big(F_{IJ}+2kB_{IJ}\Big)=0, \tag{5.0.3}$$

donde D se ha definido en el capítulo 2.

5.1. Cambios de Variable

Como en los capítulos anteriores, romperemos la covarianza de Lorentz local y usaremos las variables ya definidas en el capítulo 2. De esta manera, tenemos que para la acción (5.0.1), si corremos los índices espacio-tiempo y de grupo obtenemos

$$
\begin{aligned}
& F^{IJ}\wedge F_{IJ}+2kB^{IJ}\wedge F_{IJ}+k^2B^{IJ}\wedge B_{IJ}=\frac{1}{4}F^{IJ}_{\alpha\beta}F_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}+\frac{k}{2}B^{IJ}_{\alpha\beta}F_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\\
& +\frac{k^2}{4}B^{IJ}_{\alpha\beta}B_{IJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\\
= & \frac{1}{4}F^{0J}_{\alpha\beta}F_{0J\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}+\frac{1}{4}F^{iJ}_{\alpha\beta}F_{iJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}+\frac{k}{2}B^{0J}_{\alpha\beta}F_{0J\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}+\frac{k}{2}B^{iJ}_{\alpha\beta}F_{iJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\\
& +\frac{k^2}{4}B^{0J}_{\alpha\beta}B_{0J\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}+\frac{k^2}{4}B^{iJ}_{\alpha\beta}B_{iJ\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\\
= & \frac{1}{4}F^{0j}_{\alpha\beta}F_{0j\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}+\frac{1}{4}F^{i0}_{\alpha\beta}F_{i0\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}+\frac{1}{4}F^{ij}_{\alpha\beta}F_{ij\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}+\frac{k}{2}B^{0j}_{\alpha\beta}F_{0j\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}+\frac{k}{2}B^{i0}_{\alpha\beta}F_{i0\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\\
& +\frac{k}{2}B^{ij}_{\alpha\beta}F_{ij\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}+\frac{k^2}{4}B^{0j}_{\alpha\beta}B_{0j\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}+\frac{k^2}{4}B^{i0}_{\alpha\beta}B_{i0\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}+\frac{k^2}{4}B^{ij}_{\alpha\beta}B_{ij\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\\
= & \frac{1}{2}F^{0j}_{\alpha\beta}F_{0j\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}+\frac{1}{4}F^{ij}_{\alpha\beta}F_{ij\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}+kB^{0j}_{\alpha\beta}F_{0j\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}+\frac{k}{2}B^{ij}_{\alpha\beta}F_{ij\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\\
& +\frac{k^2}{2}B^{0j}_{\alpha\beta}B_{0j\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}+\frac{k^2}{4}B^{ij}_{\alpha\beta}B_{ij\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\\
= & \frac{1}{2}F^{0j}_{0a}F_{0jbc}\epsilon^{0abc}+\frac{1}{2}F^{0j}_{a0}F_{0jbc}\epsilon^{a0bc}+\frac{1}{2}F^{0j}_{ab}F_{0j0c}\epsilon^{ab0c}+\frac{1}{2}F^{0j}_{ab}F_{0jc0}\epsilon^{abc0}\\
& +\frac{1}{4}F^{ij}_{0a}F_{ijbc}\epsilon^{0abc}+\frac{1}{4}F^{ij}_{a0}F_{ijbc}\epsilon^{a0bc}+\frac{1}{4}F^{ij}_{ab}F_{ij0c}\epsilon^{ab0c}+\frac{1}{4}F^{ij}_{ab}F_{ijc0}\epsilon^{abc0}\\
& +kB^{0j}_{0a}F_{0jbc}\epsilon^{0abc}+kB^{0j}_{a0}F_{0jbc}\epsilon^{a0bc}+kB^{0j}_{ab}F_{0j0c}\epsilon^{ab0c}+kB^{0j}_{ab}F_{0jc0}\epsilon^{abc0}\\
& +\frac{k}{2}B^{ij}_{0a}F_{ijbc}\epsilon^{0abc}+\frac{k}{2}B^{ij}_{a0}F_{ijbc}\epsilon^{a0bc}+\frac{k}{2}B^{ij}_{ab}F_{ij0c}\epsilon^{ab0c}+\frac{k}{2}B^{ij}_{ab}F_{ijc0}\epsilon^{abc0}\\
& +\frac{k^2}{2}B^{0j}_{0a}B_{0jbc}\epsilon^{0abc}+\frac{k^2}{2}B^{0j}_{a0}B_{0jbc}\epsilon^{a0bc}+\frac{k^2}{2}B^{0j}_{ab}B_{0j0c}\epsilon^{ab0c}+\frac{k^2}{2}B^{0j}_{ab}B_{0jc0}\epsilon^{abc0}\\
& +\frac{k^2}{4}B^{ij}_{0a}B_{ijbc}\epsilon^{0abc}+\frac{k^2}{4}B^{ij}_{a0}B_{ijbc}\epsilon^{a0bc}+\frac{k^2}{4}B^{ij}_{ab}B_{ij0c}\epsilon^{ab0c}+\frac{k^2}{4}B^{ij}_{ab}B_{ijc0}\epsilon^{abc0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \;& F^{0j}_{0a}F_{0jbc}\eta^{abc} + F^{0j}_{ab}F_{0j0c}\eta^{abc} + \frac{1}{2}F^{ij}_{0a}F_{ijbc}\eta^{abc} + \frac{1}{2}F^{ij}_{ab}F_{ij0c}\eta^{abc} + 2kB^{0j}_{0a}F_{0jbc}\eta^{abc} \\
& +2kB^{0j}_{ab}F_{0j0c}\eta^{abc} + kB^{ij}_{0a}F_{ijbc}\eta^{abc} + kB^{ij}_{ab}F_{ij0c}\eta^{abc} + k^2B^{0j}_{0a}B_{0jbc}\eta^{abc} + k^2B^{0j}_{ab}B_{0j0c}\eta^{abc} \\
& +\frac{k^2}{2}B^{ij}_{0a}B_{ijbc}\eta^{abc} + \frac{k^2}{2}B^{ij}_{ab}B_{ij0c}\eta^{abc}.
\end{aligned}
$$

Ahora introduciendo las variables definidas anteriormente, encontramos que (5.0.1) se puede escribir de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
& F^{IJ}\wedge F_{IJ} + 2kB^{IJ}\wedge F_{IJ} + k^2B^{IJ}\wedge B_{IJ} = \Big[\dot{\omega}_a{}^{0j} - \partial_a\omega_0{}^{0j} + \epsilon^j{}_{lk}\omega_0{}^{k0}\gamma^l_a \\
& -\epsilon^j{}_{lk}\omega_a{}^{k0}\gamma^l_0\Big]F_{0jbc}\eta^{abc} \\
& +\Big[\dot{\omega}_c{}^{0j} - \partial_c\omega_0{}^{0j} + \epsilon^j{}_{lk}\omega_0{}^{k0}\gamma^l_c - \epsilon^j{}_{lk}\omega_c{}^{k0}\gamma^l_0\Big]F_{0jab}\eta^{abc} - \frac{1}{2}\epsilon^{ij}{}_lF^l{}_{0a}F_{ijbc}\eta^{abc} \\
& -\frac{1}{2}\epsilon^{ij}{}_lF^l{}_{ab}F_{ij0c}\eta^{abc} - k\varsigma_{0ja}F^{0j}_{bc}\eta^{abc} + \frac{2k}{\Xi}P^c_j\Big[\dot{\omega}_c{}^{0j} - \partial_c\omega_0{}^{0j} + \epsilon^j{}_{lk}\omega_0{}^{k0}\gamma^l_c - \epsilon^j{}_{lk}\omega_c{}^{k0}\gamma^l_0\Big] \\
& -k\epsilon^{ij}{}_lB^l{}_{0a}F_{ijbc}\eta^{abc} - k\epsilon^{ij}{}_lB^l{}_{ab}F_{ij0c}\eta^{abc} + \frac{k^2}{\Xi}B^{0j}_{0a}P^a_j - \frac{k^2}{2}B^{0j}_{ab}\varsigma_{0jc}\eta^{abc} - \frac{k^2}{2}\epsilon^{ij}{}_lB^l{}_{0a}B_{ijbc}\eta^{abc} \\
& -\epsilon^{ij}{}_lB^l{}_{ab}B_{ij0c}\eta^{abc}\Big(\frac{k^2}{2}\Big) \\
= \;& 2F_{0jbc}\eta^{abc}\Big[\dot{\omega}_a{}^{0j} - \partial_a\omega_0{}^{0j} + \epsilon^j{}_{lk}\omega_0{}^{k0}\gamma^l_a - \epsilon^j{}_{lk}\omega_a{}^{k0}\gamma^l_0\Big] + F^l{}_{0a}F_{lbc}\eta^{abc} + F^l{}_{ab}F_{l0c}\eta^{abc} \\
& -k\varsigma_{0ja}F^{0j}_{bc}\eta^{abc} + \frac{2k}{\Xi}P^c_j\Big[\dot{\omega}_c{}^{0j} - \partial_c\omega_0{}^{0j} + \epsilon^j{}_{lk}\omega_0{}^{k0}\gamma^l_c - \epsilon^j{}_{lk}\omega_c{}^{k0}\gamma^l_0\Big] + 2kB^l{}_{0a}F_{lbc}\eta^{abc} \\
& +2kB^l{}_{ab}F_{l0c}\eta^{abc} - \frac{k^2}{2\Xi}P^a_j\varsigma^j{}_a - \frac{k^2}{2\Xi}\varsigma_{jc}P^{jc} + k^2B^l{}_{0a}B_{lbc}\eta^{abc} + k^2B^l{}_{ab}B_{l0c}\eta^{abc} \\
= \;& 2\dot{\omega}_a{}^{0j}\Big[\frac{k}{\Xi}P^a_j + F_{0jbc}\eta^{abc}\Big] - 2\Lambda^j\partial_a\Big[F_{ojbc}\eta^{abc} + \frac{2k}{\Xi}P^a_j\Big] + 2\Lambda^k\epsilon^j{}_{lk}\gamma^l_a\Big[F_{ojbc}\eta^{abc} + \frac{k}{\Xi}P^a_j\Big] \\
& +2\tau^l\epsilon^j{}_{lk}\omega_a{}^{k0}\Big[F_{0jbc}\eta^{abc} + \frac{k}{\Xi}P^a_j\Big] + 2\Big[\dot{\gamma}^l_a - \partial_a\gamma^l_0 - \epsilon^l{}_{jk}\omega_0{}^{j0}\omega_{a0}{}^k + \epsilon^l{}_{jk}\gamma^j_0\gamma^k_a\Big]F_{lbc}\eta^{abc} \\
& -k\varsigma_{ja}F^{0j}_{bc}\eta^{abc} - k\chi^l{}_{0a}F_{lbc}\eta^{abc} + \frac{2k}{\Xi}\Pi^c_l\Big[\dot{\gamma}^l_c - \partial_c\gamma^l_0 - \epsilon^l{}_{jk}\omega_0{}^{j0}\omega_{c0}{}^k + \epsilon^l{}_{jk}\gamma^j_0\gamma^k_c\Big] - \frac{k^2}{\Xi}P^a_j\varsigma^j_a \\
& -\frac{k^2}{\Xi}\chi^l{}_{0a}\Pi^a_l \\
= \;& 2\dot{\gamma}^l_a\Big[\frac{k}{\Xi}\Pi^a_l + F_{lbc}\eta^{abc}\Big] + 2\dot{\omega}_a{}^{0j}\Big[\frac{k}{\Xi}P^a_j + F_{0jbc}\eta^{abc}\Big] - 2\Lambda^j\Big[\partial_a\Big(\frac{k}{\Xi}P^a_j + F_{0jbc}\eta^{abc}\Big) \\
& +\epsilon_{jl}{}^k\gamma^l_a\Big(\frac{k}{\Xi}P^a_k + F_{0kbc}\eta^{abc}\Big) - \epsilon_{jk}{}^l\omega_{a0}{}^k\Big(\frac{k}{\Xi}\Pi^a_l + F_{lbc}\eta^{abc}\Big)\Big] - 2\tau^l\Big[\partial_a\Big(\frac{k}{\Xi}\Pi^a_l + F_{lbc}\eta^{abc}\Big)
\end{aligned}
$$

$$+\epsilon_{lk}{}^{j}\omega_a{}^{0k}\Big(\frac{k}{\Xi}P_j^a + F_{0jbc}\eta^{abc}\Big) + \epsilon_{lk}{}^{j}\gamma_a^k\Big(\frac{k}{\Xi}\Pi_j^a + F_{jbc}\eta^{abc}\Big)\Big] + k\varsigma_a^j\Big[\frac{k}{\Xi}P_j^a + F_{0jbc}\eta^{abc}\Big]$$
$$-k\chi^l{}_{0a}\Big[\frac{k}{\Xi}\Pi_l^a + F_{lbc}\eta^{abc}\Big],$$

definiendo los siguientes cambios de variable

$$\Pi_l'^a = 2\Big[\frac{k}{\Xi}\Pi_l^a + F_{lbc}\eta^{abc}\Big], \tag{5.1.1}$$
$$P_l'^a = 2\Big[\frac{k}{\Xi}P_l^a + F_{0lbc}\eta^{abc}\Big], \tag{5.1.2}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
= \;& \dot{\gamma}_a^l\Pi_l'^a + \dot{\omega}_a{}^{0j}P_j'^a - \Lambda^j\Big[\partial_a P_j'^a + \epsilon_{jl}{}^{k}\gamma_a^l P_k'^a - \epsilon_{jk}{}^{l}\omega_{a0}{}^{k}\Pi_l'^a\Big] - \tau^l\Big[\partial_a\Pi_l'^a + \epsilon_{lk}{}^{j}\omega_a{}^{0k}P_j'^a \\
& +\epsilon_{lk}{}^{j}\gamma_a^k\Pi_j'^a\Big] + \frac{k}{2}\varsigma_a^j\Big[P_j'^a - 2F_{0jbc}\eta^{abc} + F_{0jbc}\eta^{abc}\Big] - \frac{k}{2}\chi^l{}_{0a}\Big[\Pi_l'^a - 2F_{lbc}\eta^{abc} + F_{lbc}\eta^{abc}\Big] \\
= \;& \dot{\gamma}_a^l\Pi_l'^a + \dot{\omega}_a{}^{0j}P_j'^a - \Lambda^j\Big[\partial_a P_j'^a + \epsilon_{jl}{}^{k}\gamma_a^l P_k'^a - \epsilon_{jk}{}^{l}\omega_{a0}{}^{k}\Pi_l'^a\Big] - \tau^l\Big[\partial_a\Pi_l'^a + \epsilon_{lk}{}^{j}\omega_a{}^{0k}P_j'^a \\
& +\epsilon_{lk}{}^{j}\gamma_a^k\Pi_j'^a\Big] + \frac{k}{2}\varsigma_a^j\Big[P_j'^a - F_{0jbc}\eta^{abc}\Big] - \frac{k}{2}\chi^l{}_{0a}\Big[\Pi_l'^a - F_{lbc}\eta^{abc}\Big].
\end{aligned}$$

De este modo, se puede observar que la acción generalizada tipo BF (5.0.1) en términos de las nuevas variables tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned}
& S[\gamma_a^i, \pi_i^a, \omega_a{}^{0i}, P_i^a, \tau^i, \Lambda^i, \varsigma^i{}_a, \chi^i{}_{0a}] \\
= & \int \dot{\gamma}_a^l\Pi_l'^a + \dot{\omega}_a{}^{0j}P_j'^a - \Lambda^j\Big[\partial_a P_j'^a + \epsilon_{jl}{}^{k}\gamma_a^l P_k'^a - \epsilon_{jk}{}^{l}\omega_{a0}{}^{k}\Pi_l'^a\Big] - \tau^l\Big[\partial_a\Pi_l'^a + \epsilon_{lk}{}^{j}\omega_a{}^{0k}P_j'^a \\
& +\epsilon_{lk}{}^{j}\gamma_a^k\Pi_j'^a\Big] + \frac{k}{2}\varsigma_a^j\Big[P_j'^a - F_{0jbc}\eta^{abc}\Big] - \frac{k}{2}\chi^l{}_{0a}\Big[\Pi_l'^a - F_{lbc}\eta^{abc}\Big].
\end{aligned} \tag{5.1.3}$$

Podemos observar que la acción anterior (5.1.3) se ha llevado a la forma que encontramos en (1.6.1) donde $H_c = 0$. Este resultado es esperado puesto que la covarianza bajo difeomorfismos se mantiene. De (5.1.3) podemos identificar los paréntesis fundamentales de Poisson, dados por

$$\{\gamma_a^i(x), \Pi_j'^b(y)\} = \delta_j^i\delta_a^b\delta^3(x-y), \tag{5.1.4}$$

$$\{\omega_a{}^{0i}(x), P_j^{\prime b}(y)\} = \delta_a^b \delta_j^i \delta^3(x-y), \tag{5.1.5}$$

y si variamos la acción respecto a variables $\tau^i, \Lambda^i, \varsigma^i{}_a, \chi^i{}_{0a}$ se obtiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta \tau^i} &= \partial_a \Pi_i^{\prime a} + \epsilon_{ik}{}^j \omega_a{}^{0k} P_j^{\prime a} + \epsilon_{ik}{}^j \gamma_a^k \Pi_j^{\prime a} = 0 = \phi_i, \\
\frac{\delta S}{\delta \Lambda^i} &= \partial_a P_i^{\prime a} + \epsilon_{il}{}^k \gamma_a^l P_k^{\prime a} - \epsilon_{ik}{}^l \omega_a{}^{0k} \Pi_l^{\prime a} = 0 = \psi_i, \\
\frac{\delta S}{\delta \varsigma^i{}_a} &= P_i^{\prime a} - F_{0ibc}\eta^{abc} = 0 = \Psi_i^a, \\
\frac{\delta S}{\delta \chi^i{}_{0a}} &= \Pi_i^{\prime a} - F_{ibc}\eta^{abc} = 0 = \Phi_i^a,
\end{aligned}$$

donde se pueden identificar las siguientes restricciones

$$\phi_l = \partial_a \Pi_l^{\prime a} + \epsilon_{lk}{}^j \omega_a{}^{0k} P_j^{\prime a} + \epsilon_{lk}{}^j \gamma_a^k \Pi_j^{\prime a} = 0, \tag{5.1.6}$$

$$\psi_j = \partial_a P_j^{\prime a} + \epsilon_{jl}{}^k \gamma_a^l P_k^{\prime a} - \epsilon_{jk}{}^l \omega_a{}^{0k} \Pi_l^{\prime a} = 0, \tag{5.1.7}$$

$$\Psi_i^a = P_i^{\prime a} - \left(2\partial_b \omega_{c0i} + 2\epsilon_{ijk}\omega_b{}^k{}_0 \gamma_c^j\right)\eta^{abc} = 0, \tag{5.1.8}$$

$$\Phi_i^a = \Pi_i^{\prime a} - \left(2\partial_b \gamma_{ic} - \epsilon_{ijk}\omega_b{}^{j0}\omega_{c0}{}^k + \epsilon_{ijk}\gamma_b^j\gamma_c^k\right)\eta^{abc} = 0, \tag{5.1.9}$$

y las variables $\tau^i, \Lambda^i, \varsigma^i{}_0, \chi^i{}_{0a}$ son identificadas como multiplicadores de Lagrange.

5.2. Álgebra de restricciones

Bajo los cambios de variable propuestos en (5.1.1) y (5.1.2), las restricciones y las variables $q's$ y $p's$ tienen la misma forma que en el capítulo 3, por lo que su álgebra de restricciones es la misma bajo esas nuevas variables. Por tanto, el álgebra entre las restricciones está dada por

$$
\begin{aligned}
\{\phi_i(x), \psi_j(y)\} &= \epsilon_{ij}{}^k \psi_k \delta^3(x-y), && (5.2.1)\\
\{\phi_i(x), \phi_j(y)\} &= \epsilon_{ij}{}^k \phi_k \delta^3(x-y), && (5.2.2)\\
\{\phi_i(x), \Phi^a_j(y)\} &= \epsilon_{ij}{}^k \Phi^a_k \delta^3(x-y), && (5.2.3)\\
\{\phi_i(x), \Psi^a_j(y)\} &= \epsilon_{ij}{}^k \Psi^a_k \delta^3(x-y), && (5.2.4)\\
\{\psi_i(x), \psi_j(y)\} &= -\epsilon_{ij}{}^k \phi_k \delta^3(x-y), && (5.2.5)\\
\{\psi_i(x), \Phi^a_j(y)\} &= \epsilon_{ij}{}^k \Psi^a_k \delta^3(x-y), && (5.2.6)\\
\{\psi_i(x), \Psi^a_j(y)\} &= -\epsilon_{ij}{}^k \Phi^a_k \delta^3(x-y), && (5.2.7)\\
\{\Phi^a_i, \Phi^b_j(y)\} &= 0, && (5.2.8)\\
\{\Phi^a_i(x), \Psi^b_j(y)\} &= 0, && (5.2.9)\\
\{\Psi^a_i(x), \Psi^b_j(y)\} &= 0. && (5.2.10)
\end{aligned}
$$

Como en los capítulos anteriores, debido a que el álgebra es cerrada, concluimos que las restricciones encontradas son de primera clase y por lo tanto generan transformaciones de norma. En este punto, la función generadora y las transformaciones de norma de esta acción son las mismas que las encontradas en el capítulo 3 por el argumento usado al principio de esta sección bajo las nuevas variables, con esto podemos concluir que las transformaciones de norma están dadas por

$$
\begin{aligned}
\delta\gamma^h_\nu &= -\partial_\nu \alpha^h + \epsilon_{lk}{}^h \alpha^l \gamma^k_\nu - \epsilon_{jk}{}^h \beta^j \omega_\nu{}^{0k} + g^h_\nu, && (5.2.11)\\
\delta\omega_\nu{}^{0h} &= -\partial_\nu \beta^h + \epsilon_{lk}{}^h \alpha^l \omega_\nu{}^{0k} + \epsilon_{jl}{}^h \beta^j \gamma^l_\nu + \mu^h_\nu. && (5.2.12)
\end{aligned}
$$

Las restricciones presentan la misma reductibilidad que en la segunda clase de Chern, por tanto, el conteo de grados de libertad también es cero, es decir, la teoría no tiene grados de libertad físicos.

5.3. Conclusiones

Hemos encontrado para esta teoría que el análisis Hamiltoniano tiene la misma estructura que la segunda clase de Chern bajo los cambios de variable propuestos en este capítulo. Sin embargo, a pesar de tener la misma estructura, los resultados no son los mismos, en efecto, las restricciones encontradas para la segunda clase de Chern (3.1.6) y (3.1.7) sí dependen de la variable Ξ, mientras que las restricciones (5.1.9) y (5.1.9) no dependen.

Capítulo 6

Perspectivas

Como pudimos observar, en este trabajo se ha analizado desde el punto de vista Hamiltoniano la teoría BF, la segunda clase de Chern, el invariante de Euler y una acción generalizada. Nuestro análisis ha sido desarrollado aplicando un esquema de Dirac reducido. Es decir, únicamente se ha asociado el momento canónico a las variables dinámicas que aparecen en la acción con una derivada temporal. Por supuesto que no es el análisis más general, de hecho, se piensa que como trabajo a futuro, se va a desarrollar el análisis aplicando un formalismo de Dirac estricto, de esta manera, podremos conocer la estructura de las restricciones en el espacio fase completo y también podremos construir los paréntesis de Dirac. Respecto a este punto, realizando el formalismo estricto, se tendrán restricciones de primera y segunda clase, así tendremos dos caminos para construir los paréntesis de Dirac; un camino es fijando el gauge y otro camino será mediante la eliminación de las restricciones de segunda clase, toda esta información nos servirá para trabajos posteriores.

Cabe mencionar que a diferencia de lo reportado en el artículo [21] donde se ha usado el esquema de Dirac estricto aplicado a una teoría BF y a la acción generalizada, en este trabajo, hemos definido nuevas variables para describir el formalismo Hamiltoniano bajo el esquema de Dirac reducido. Otra diferencia que podemos notar es que en este trabajo hemos roto la covarianza de Lorentz, esto nos ayudará para calcular con mayor facilidad los paréntesis de Dirac, también podemos ver que el álgebra de restricciones es cerrada, cabe notar que el álgebra de restricciones en esta tesis posee la estructura de un álgebra de Lie, lo cual no sucede en el artículo [21].

Otro punto importante a comentar, es que con el presente trabajo, tenemos las herramientas necesarias para añadir los invariantes a relatividad general y analizar a la teoría mediante el uso de las variables con las que se trabajó en la presente tesis, sin embargo, todo ese trabajo se deja para el futuro.

Como ejemplo, al sumar la teoría BF con la segunda clase de Chern $S[A,B]=\int\Big(B^{IJ}\wedge F_{IJ}+\Xi\Big[B^{IJ}\wedge F_{IJ}-\frac{1}{2}B^{IJ}\wedge B_{IJ}\Big]\Big)$, obtendremos que las ecuaciones de movimiento son

$$F^{IJ}[1+\Xi]-B^{IJ}=0, \tag{6.0.1}$$
$$[1+\Xi]DB^{IJ}=0. \tag{6.0.2}$$

Si sustituimos (6.0.1) en (6.0.2), obtenemos la identidad de Bianchi, por otro lado, si sustituimos (6.0.1) en la acción, obtendremos una acción proporcional a la segunda clase de Chern, es decir, la suma de la teoría BF con la segunda clase de Chern se reduce a la segunda clase de Chern. También podemos encontrar que los paréntesis fundamentales son

$$\{{\omega_a}^{0i},P^b_j\}=\frac{\Xi}{\Xi+1}\delta^b_a\delta^i_j\delta^3(x-y) \tag{6.0.3}$$
$$\{\gamma^i_a,\Pi^b_j\}=\frac{\Xi}{\Xi+1}\delta^b_a\delta^i_j\delta^3(x-y) \tag{6.0.4}$$

y las restricciones obtenidas tienen la siguiente forma

$$\phi_l=\partial_a\Pi^a_l+{\epsilon_{lk}}^j{\omega_a}^{0k}P^a_j+{\epsilon_{lk}}^j\gamma^k_a\Pi^a_j=0, \tag{6.0.5}$$
$$\psi_j=\partial_aP^a_j+{\epsilon_{jl}}^k\gamma^l_aP^a_k-{\epsilon_{jk}}^l{\omega_a}^{0k}\Pi^a_l=0, \tag{6.0.6}$$
$$\Psi^a_i=P^a_i-[1+\Xi]\left(2\partial_b\omega_{c0i}+2\epsilon_{ijk}{\omega_b}^k{}_0\gamma^j_c\right)\eta^{abc}=0, \tag{6.0.7}$$
$$\Phi^a_i=\Pi^a_i-[1+\Xi]\left(2\partial_b\gamma_{ic}-\epsilon_{ijk}{\omega_b}^{j0}{\omega_{c0}}^k+\epsilon_{ijk}\gamma^j_b\gamma^k_c\right)\eta^{abc}=0. \tag{6.0.8}$$

Podemos notar que las ecuaciones de movimiento son las mismas que la segunda clase de Chern, sin embargo, las restricciones y la estructura simpléctica no son las mismas.

Bibliografía

[1] J. F. Plebanski, On the separation of Einstenian substructures. J. Math. Phys. 18 (1997) 2511.

[2] Derek K. Wise, MacDowell-Mansonri Gravity and Cartan Geometry, gr-qc/0611154.

[3] E. Witten, Topological gravity, Phys. Lett. B 206 (1988) 601.

[4] R. Jackiw, Topological Investigations in Quantized Gauge Theories, P.258, exercise, in Current Algebra and Anomalies, edited by S. B. Treiman et al (World Scientific, 1985).

[5] L. Crane and D. Yetter, On algebra structure implicit in topological quantum field theories, Kansas preprint (1994).

[6] L. Smolin, Linking topological quantum field theory and nonperturbative quantum gravity, J. Math. Phys. 36 (1995) 6417.

[7] M. Montesinos and A. Perez Phys. Rev. D77:104020, 2008.

[8] J. C. Baez, An introduction to spin foam models of BF theory and quantum gravity, Lect. Notes Phys. 543, 25 (200). J. C. Baez, Spin foam models, Class. Grav. 15, 1827 (1998).

[9] E. Witten, Nucl. Phys. B311, 46 (1998).

[10] E. Witten, Nucl. Phys. B323. 113 (1989).

[11] Alberto Escalante, Physics Letters B, 676, 105-11 (2009).

[12] Alberto Escalante, Int. J. Theor. Phys. Vol. 48, No. 9, 2473-2729 (2009).

[13] Alberto Escalante and Leopoldo Carbajal, Annals of Physics 326, 323-339 (2011).

[14] A. Escalante and J. Angel López Osio, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 75, N. 3 (2012).

[15] M. Montesinos, Journal of Physics: Conference series 24, 44-51 (2005)

[16] H. Goldstein, Mecánica Clásica, Ed. 1987, España: Editorial Reverté (2002).

[17] M. G. Calkin, Lagrangian and Hamiltonian Mechanics, Ed. 1996, Singapore: World Scientific Press (2005).

[18] M. Mondragón and M. Montesinos, J. Math. Phys. 47 (2006) 022301.

[19] M. Montesinos, Class. Quant. Grav. 23:2267-2278 (2006).

[20] M. Montesinos, , Class. Quant. Grav. 18 (2001) 1847-1852.

[21] A. Escalante and I. Ruvalcaba, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 09, 1250053 (2012).

[22] I. Rubalcava, Analisis Hamiltoniano a Teorías tipo BF. F.C.F.M., BUAP. Tesis de Maestría, febrero 2010.