



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Mecánica supersimétrica de sistemas no conservativos

Tesis

presentada para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Nephtalí Eliceo Martínez Pérez

asesorado por

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero

Febrero 2015

Título: Mecánica supersimétrica de sistemas no conservativos
Estudiante: NEPHTALÍ ELICEO MARTÍNEZ PÉREZ

JURADO

Dr. Gerardo F. Torres del Castillo
Presidente

Dr. Gilberto Tavares Velasco
Secretario

Dr. Roberto Cartas Fuentesvilla
Vocal

Dr. Bogar Díaz Jiménez
Suplente

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero
Asesor

Asesor

Índice general

Introducción	v
1. El principio de Hamilton	1
1.1. Sistemas no conservativos	2
1.2. Otro esquema de no conservatividad	3
2. El principio de acción estacionaria de Galley	5
2.0.1. Sistemas no conservativos	7
2.1. Ejemplos	8
2.1.1. Oscilador amortiguado	8
2.1.2. Osciladores acoplados	9
3. El principio de Hamilton para fermiones	13
3.1. El Principio de acción estacionaria	13
3.2. Ejemplos	14
3.2.1. Partícula libre	14
3.2.2. Osciladores fermiónicos	15
3.3. Acción de Galley fermiónica	16
3.3.1. Osciladores fermiónicos amortiguados	17
4. Elementos de la mecánica supersimétrica	19
4.1. Acción de un sistema supersimétrico	19
4.2. El formalismo del superespacio	20
4.2.1. Supersimetría N=1	20
4.2.2. Integración de Grassmann	21
4.2.3. Supersimetría N=2	21
4.2.4. Función delta	22
5. Acción supersimétrica estacionaria	23
5.1. Ejemplos	24
5.1.1. Oscilador supersimétrico	24
5.1.2. Osciladores supersimétricos acoplados	25
6. Acción de Galley supersimétrica	29
6.1. Ejemplos	30
6.1.1. Oscilador supersimétrico amortiguado	30

6.1.2. Osciladores acoplados	31
7. Conclusiones	35
A. Supersimetría en componentes	37
A.1. Desarrollos	37
A.2. Osciladores supersimétricos acoplados	37
A.3. Lagrangiana de Galley	41
B. Pruebas	43
B.1. Integración de los términos de frontera	43

Introducción

La forma más concisa y elegante de describir un sistema clásico se tiene cuando las ecuaciones de movimiento se derivan de una lagrangiana a través del Principio de Hamilton [1]. Sin embargo, en este método variacional no hay una manera directa de tratar interacciones no conservativas [2], en contraste con las leyes de Newton, que no tienen problema en incluirlas [3].

Los fenómenos disipativos también ocurren en diversos procesos de naturaleza cuántica [2]. Para la cuantización es conveniente contar con la descripción lagrangiana o hamiltoniana del sistema disipativo clásico, por lo que surge la necesidad de una formulación de la mecánica en la que sea posible introducir interacciones no conservativas de manera sistemática.

Una característica del Principio de Hamilton, que a primera vista parece no tener relación con los sistemas disipativos, es que está formulado como un problema con valores en la frontera (en el tiempo), no condiciones iniciales: se supone un conocimiento (parcial) del estado final del sistema. Recientemente Galley presentó en [4, 5] un principio variacional en el que solamente el estado inicial se supone (completamente) determinado, y dio una sencilla prescripción para construir lagrangianas de sistemas no conservativos. De acuerdo con [4], este nuevo principio variacional resulta adecuado para los sistemas no conservativos porque para ellos el estado final debe ser menos predecible y, en cambio, ser más sensible a las condiciones iniciales.

Por otra parte, la dinámica clásica está contenida en el límite $\hbar \rightarrow 0$ de la mecánica cuántica. Sin embargo, la mecánica cuántica lidia, además, con grados de libertad fermiónicos, que se describen con cantidades anticonmutativas. Al nivel clásico, la llamada pseudo-mecánica considera grados de libertad tanto bosónicos como fermiónicos [6]. La mecánica supersimétrica añade a las traslaciones en el tiempo, traslaciones dictadas por parámetros anticonmutativos, relacionando grados de libertad bosónicos y fermiónicos [7].

El principio de acción estacionaria se aplica, por lo general, de manera indistinta a cantidades bosónicas y fermiónicas [6, 7], pero resulta que, para los fermiones, las condiciones de frontera deben suplementarse de una forma fundamentalmente distinta [8]. Esta diferencia puede conducir a un principio de acción supersimétrica estacionaria menos elegante, ya que, debido a esta diferencia, las condiciones de frontera no se pueden expresar, en principio, supersimétricamente.

Este trabajo consiste en la aplicación del principio variacional de Galley a sistemas con grados de libertad fermiónicos y luego a sistemas supersimétricos. En el Capítulo 1 revisamos las características esenciales del principio de Hamilton y su relación con los sistemas no conservativos. En el Capítulo 2 se describe en forma detallada el Principio variacional de Galley y se presentan dos ejemplos, uno de ellos aparece en [4], pero aquí se hace una discusión más

amplia de la solución para señalar algunos detalles importantes en relación al principio variacional. En el Capítulo 3 discutimos el principio de Hamilton para sistemas con coordenadas fermiónicas y proponemos una versión de la acción de Galley para fermiones que ilustramos con un sistema de osciladores fermiónicos amortiguados. En el Capítulo 4, revisamos algunas ideas básicas de la mecánica supersimétrica y el formalismo del superespacio. En el Capítulo 5 revisamos el principio de acción supersimétrica usual y presentamos algunos ejemplos para familiarizarnos con los cálculos al nivel del superespacio. Finalmente, en el Capítulo 6, se propone una formulación del principio de acción estacionaria de Galley para sistemas supersimétricos. Para hacer más apreciables algunos resultados, en algunos ejemplos trabajamos de forma paralela con la supersimetría en componentes.

Capítulo 1

El principio de Hamilton

Sea un sistema descrito por n coordenadas generalizadas, entonces su estado en un instante dado t queda especificado por los valores de sus n coordenadas y velocidades generalizadas $[q^I(t), \dot{q}^I(t)]$, $I = 1, \dots, n$.

Se define la acción como

$$S[q^I] = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q^I, \dot{q}^I, t), \quad (1.1)$$

donde $L(q^I, \dot{q}^I, t)$ se conoce como la lagrangiana del sistema (más correctamente, una lagrangiana, ya que, por ejemplo, siempre se puede añadir una derivada total $\frac{d}{dt}F(q^I, t)$ sin modificar las ecuaciones de movimiento resultantes [9]). El principio de Hamilton establece que la trayectoria $q^I(t)$ del espacio de configuración por la que el sistema pasa del estado $\{q^I(t_i), \dot{q}^I(t_i)\}$, al tiempo t_i , a un estado $\{q^I(t_f), \dot{q}^I(t_f)\}$, al tiempo t_f , es tal que, sobre ella, S tiene un valor estacionario [10].

Sean $q^I(t)$ las coordenadas estacionarias, $\eta^I(t)$ desplazamientos virtuales y $\epsilon \ll 1$ un parámetro constante, se definen las parametrizaciones [4]

$$q^I(t, \epsilon) = q^I(t) + \epsilon \eta^I(t). \quad (1.2)$$

Entonces el principio de Hamilton se expresa matemáticamente como

$$\frac{dS}{d\epsilon} = 0. \quad (1.3)$$

Desarrollando (1.3) obtenemos

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \eta^I \left[\frac{\partial L}{\partial q^I} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I} \right) \right] \Big|_{\epsilon=0} \right\} + \eta^I \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I} \Big|_{t_i}^{t_f}, \quad (1.4)$$

donde usamos la convención de suma indicada por índices repetidos. Los términos fuera del signo de integración se llaman términos de frontera o de superficie, los cuales se eliminan fijando los valores de las coordenadas en los tiempos inicial y final, es decir, se imponen las condiciones $\eta^I(t_i) = \eta^I(t_f) = 0$. Como la variación de la acción debe ser cero para cualquier η^I , se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^I} = 0, \quad (1.5)$$

que es, en general, un sistema de n ecuaciones diferenciales de segundo orden conocido como las ecuaciones de Euler-Lagrange. El número de constantes de integración es igual al número de condiciones de frontera necesarias para definir el principio variacional [5].

Se define la *función energía* como [9, 10]

$$h \equiv \dot{q}^I \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I} - L, \quad (1.6)$$

cuya razón de cambio está dada por

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (1.7)$$

Bajo ciertas condiciones h se identifica con la energía del sistema y es una cantidad conservada si la lagrangiana no depende explícitamente del tiempo.

1.1. Sistemas no conservativos

El estudio de sistemas no conservativos se realiza generalmente fuera del método variacional. Esto es así porque estos sistemas no poseen lagrangianas naturales o estándar, es decir, que se puedan expresar como la diferencia de términos de energía cinética y energía potencial [1].

Para ciertos sistemas disipativos, como el oscilador amortiguado, cuya ecuación de movimiento es

$$\ddot{q} + \gamma \dot{q} + \omega^2 q = 0 \quad (1.8)$$

se conocen lagrangianas no estándar. Por ejemplo, la lagrangiana [11, 12],

$$L = e^{\gamma t} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^2 - \frac{\omega^2}{2} q^2 \right] \quad (1.9)$$

conduce a la ecuación (1.8) aunque no directamente, es necesario eliminar un factor $e^{\gamma t}$. La dependencia explícita en el tiempo de esta lagrangiana suele complicar algunas tareas, como el estudio de simetrías a través del Teorema de Noether [13] así como, dificultar la interpretación física de la hamiltoniana y los momentos [2]. Otra lagrangiana bien conocida para el oscilador amortiguado contiene un grado de libertad adicional [11, 12, 14]

$$L = \dot{q}\dot{q}' + \frac{\gamma}{2}(q\dot{q}' - \dot{q}q') - \omega^2 qq', \quad (1.10)$$

En este caso, se obtiene la ecuación adicional para q'

$$\ddot{q}' - \gamma \dot{q}' + \omega^2 q' = 0 \quad (1.11)$$

que se interpreta como un oscilador sometido a una fuerza “anti-fricción” que absorbe la energía disipada por q .

Por otra parte, a nivel puramente lagrangiano, se pueden considerar interacciones no conservativas por medio de la llamada *función disipativa* \mathcal{F} [9]. En este contexto, las ecuaciones de movimiento son

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^I} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}^I}. \quad (1.12)$$

Mientras que la razón de cambio de la energía está dada por

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial t} - \dot{q}^I \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}^I}. \quad (1.13)$$

Para el caso del oscilador amortiguado tenemos $L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2$, y $\mathcal{F} = \frac{\gamma m}{2}\dot{q}^2$, de donde se obtiene

$$\frac{dh}{dt} = -m\gamma\dot{q}^2 \quad (1.14)$$

1.2. Otro escenario de no conservatividad

Un sistema no conservativo tiene grados de libertad adicionales que no son accesibles (a la medición o el cálculo). Por ejemplo, las fuerzas de fricción tienen su origen en interacciones moleculares que son despreciadas en una descripción clásica (macroscópica) [3, 12]. Por otro lado, puede presentarse la situación en la que, aunque se disponga de la descripción completa del sistema, no se tenga interés en la dinámica de todos los grados de libertad [5]. Este segundo caso se ejemplificará ahora con el problema de osciladores acoplados q y Q , que fue tomado de [4]. En este problema solamente nos interesará la evolución de q , el cual es parte de un sistema que es, en su totalidad, conservativo. Para eliminar la modelación explícita de Q se obtendrá su ecuación de movimiento, se resolverá y la solución será sustituida de nuevo en la acción. De esta manera, la acción resultante, que es llamada acción efectiva en [4], corresponderá a la acción de q bajo la influencia de un agente externo. Este subsistema será entonces equivalente a un sistema abierto y deberá exhibir una dinámica no conservativa.

Consideremos un sistema formado por dos osciladores unidimensionales acoplados q y Q . Estamos interesados en obtener la acción efectiva para el oscilador q , si la acción resulta adecuada se hará una generalización a N osciladores Q , de manera que en el límite $N \rightarrow \infty$, se tenga un modelo para un oscilador interactuando con un medio continuo.

La acción inicial es

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{m}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) + \lambda q Q + \frac{M}{2}(\dot{Q}^2 - \Omega^2 Q^2) \right], \quad (1.15)$$

donde λ es la constante de acoplamiento. La ecuación de Euler-Lagrange para la coordenada Q es

$$\ddot{Q} + \Omega^2 Q = \frac{\lambda}{M} q. \quad (1.16)$$

Suponiendo un estado inicial dado $Q(t_i) = Q_0$ y $\dot{Q}(t_i) = V_0$, entonces la solución es

$$Q^s(t) = Q^{(h)}(t) + \frac{\lambda}{M} \int_{t_i}^{t_f} G_R(t-t') q(t') dt', \quad (1.17)$$

donde $Q^{(h)}(t)$ es la solución de la ecuación homogénea que satisface las condiciones iniciales y $G_R(t-t')$ es la función de Green retardada [15].

Sustituimos la solución Q^s en la acción inicial, para hacer más claro este proceso reescribimos la lagrangiana de la siguiente manera

$$L = \frac{m}{2}[\dot{q}^2 - \omega^2 q^2] + \lambda q Q - \frac{M}{2} Q [\ddot{Q} + \Omega^2 Q] + \frac{M}{2} \frac{d}{dt} (Q \dot{Q}). \quad (1.18)$$

CAPÍTULO 1. EL PRINCIPIO DE HAMILTON
1.2. OTRO ESCENARIO DE NO CONSERVATIVIDAD

Las derivadas totales que dependen de las velocidades no se pueden eliminar de la lagrangiana porque de acuerdo con la formulación del Principio de Hamilton, la variación de las velocidades no es cero. Sin embargo, al sustituir la solución (1.17) en 1.18 y aplicar la definición de la acción se obtiene el término de frontera proporcional a $Q^s \dot{Q}^s$ cuya variación $|\epsilon \eta_{Q^s} \dot{Q}^s + \epsilon \eta_{\dot{Q}^s} Q^s|_{t_i}^{t_f}$ es cero porque las coordenadas y velocidades que son parte de la solución están ya determinadas en todo t , especialmente en t_i y t_f . Entonces la lagrangiana efectiva es

$$L_{eff} = \frac{m}{2}[\dot{q}^2 - \omega^2 q^2] + \frac{\lambda}{2} q Q^s. \quad (1.19)$$

Entonces la acción correspondiente es, finalmente

$$S_{eff}[q] = \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt \left[m (\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) + \lambda q Q^h + \frac{\lambda^2}{M} \int_{t_i}^{t_f} dt' G_R(t-t') q(t) q(t') \right]. \quad (1.20)$$

El último término en la acción efectiva corresponde a la integral doble del término $q(t)q(t')$, el cual es simétrico bajo $t \leftrightarrow t'$, entonces, sólo la parte simétrica de la función de Green retardada sobrevive, esto es $\frac{1}{2}[G_R(t-t') + G_R(t'-t)]$. La ecuación de movimiento de q es

$$\ddot{q} + \omega^2 q = \frac{\lambda}{2m} Q^h + \frac{\lambda^2}{4M} \int_{t_i}^{t_f} dt' [G_R(t-t') + G_A(t-t')] q(t'), \quad (1.21)$$

donde se ha usado la relación $G_R(t'-t) = G_A(t-t')$ [15]. Debido a la presencia de la función avanzada de Green, la evolución no es completamente causal ni está completamente determinada por las condiciones iniciales. La función de Green es simétrica en el tiempo, lo cual implica una interacción de naturaleza conservativa entre q y Q .

Ahora bien, esperamos que la interacción con $N \rightarrow \infty$ osciladores Q sea un proceso no simétrico en el tiempo. La interacción de q con el continuo de osciladores debe ser un proceso disipativo (irreversible).

Si bien es cierto que si se hubiese trabajado sólo al nivel de las ecuaciones de movimiento, no habría surgido ningún problema, el objetivo de haber analizado este problema a nivel de la acción, de acuerdo con [4], era identificar el mecanismo por el que el principio de Hamilton resulta adecuado solamente para sistemas conservativos.

La función avanzada de Green aparece por la simetría del término $q(t)q(t')$, si este producto no fuera simétrico se acoplaría con la función retardada completa y obtendríamos ecuaciones de movimiento que describirían una evolución causal a partir de las condiciones iniciales. En el capítulo siguiente se describe un principio variacional propuesto por Galley, el cual está motivado por esta observación.

Capítulo 2

El principio de acción estacionaria de Galley

A continuación describiremos un nuevo principio de acción estacionaria que fue presentado recientemente en [4] (y discutido más ampliamente en [5]) al cual nos referiremos como el principio de acción estacionaria de Galley. Este principio variacional es compatible, por construcción, con condiciones iniciales y aplicable a una gama más amplia de sistemas no conservativos, específicamente, sistemas sujetos a interacciones no potenciales.

Sea un sistema caracterizado por n coordenadas generalizadas q^I y la lagrangiana $L(q^I, \dot{q}^I, t)$. Por cada q^I , debemos introducir dos coordenadas q_1^I y q_2^I (dos historias en el espacio de configuración). Se define la acción como

$$\hat{S}[q_1^I, q_2^I] = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q_1^I, \dot{q}_1^I, t) + \int_{t_f}^{t_i} dt L(q_2^I, \dot{q}_2^I, t). \quad (2.1)$$

Más adelante definiremos una acción S más general para incluir interacciones no conservativas. De manera similar al principio de Hamilton, debemos hallar las trayectorias que hacen estacionaria o extrema a la acción (2.1). Para realizar la variación de la acción debemos imponer $2n$ condiciones de frontera por cada trayectoria. Estas condiciones deben ser consistentes con el hecho de que el estado final debe quedar determinado por las ecuaciones de movimiento y el estado inicial.

Sean $q_a^I(t)$ ($a = 1, 2$) las trayectorias sobre las que la acción (2.1) tiene un valor estacionario, $\eta_a^I(t)$ desplazamientos virtuales y ϵ un parámetro constante, entonces el principio de acción estacionaria de Galley se expresa como $\frac{d\hat{S}}{d\epsilon} = 0$. Se imponen las $4n$ condiciones de frontera: para cualquier $\epsilon \ll 1$

$$\begin{aligned} \eta_a^I(t_i, \epsilon) &= 0, \quad a = 1, 2 \\ q_1^I(t_f, \epsilon) &= q_2^I(t_f, \epsilon), \\ \dot{q}_1^I(t_f, \epsilon) &= \dot{q}_2^I(t_f, \epsilon). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Las dos ecuaciones evaluadas en t_f constituyen la *condición de igualdad* y no determinan el estado final. De las dos últimas expresiones se sigue que $q_1^I(t_f) = q_2^I(t_f)$ y $\eta_1^I(t_f) = \eta_2^I(t_f)$ y similarmente para sus derivadas. En cualquier otro instante las coordenadas $q_{1,2}$ se suponen

diferentes. Realizando la variación de la acción obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{S}}{d\epsilon} = & \int_{t_i}^{t_f} dt \eta_1^I \left[\frac{\partial L(q_1^I)}{\partial q_1^I} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(q_1^I)}{\partial \dot{q}_1^I} \right) \right] \Big|_{\epsilon=0} + \eta_1^I \frac{\partial L(q_1^I)}{\partial \dot{q}_1^I} \Big|_{t_i}^{t_f} \\ & + \int_{t_f}^{t_i} dt \eta_2^I \left[\frac{\partial L(q_2^I)}{\partial q_2^I} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(q_2^I)}{\partial \dot{q}_2^I} \right) \right] \Big|_{\epsilon=0} + \eta_2^I \frac{\partial L(q_2^I)}{\partial \dot{q}_2^I} \Big|_{t_f}^{t_i} = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Los términos de frontera evaluados en t_i se eliminan con la condición de variación cero en (2.2). En el tiempo final tenemos

$$\eta_1^I \frac{\partial L(q_1^I)}{\partial \dot{q}_1^I} \Big|_{t_f} - \eta_2^I \frac{\partial L(q_2^I)}{\partial \dot{q}_2^I} \Big|_{t_f} = \eta_1^I(t_f) \left[\frac{\partial L(q_1^I)}{\partial \dot{q}_1^I} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L(q_2^I)}{\partial \dot{q}_2^I} \Big|_{t_f} \right] = 0, \quad (2.4)$$

donde se ha utilizado que la variación de las coordenadas en el tiempo final es la misma. Como la variación debe ser cero idénticamente y los desplazamientos η_a^I son arbitrarios, surgen dos sistemas de ecuaciones de Euler-Lagrange que definen a las trayectorias estacionarias. Necesitamos dar un paso más para obtener las ecuaciones de movimiento: tomar el *límite físico* (PL) [4], que consiste en imponer $q_1 = q_2 = q$, donde q es la coordenada física.

Se ha construido un principio de acción estacionaria en el que no se supone un estado final determinado. Hemos obtenido un sistema de ecuaciones diferenciales idéntico al que se obtiene con el principio de Hamilton, aunque bajo otras condiciones de frontera. Ocasionalmente tendremos que resolver las ecuaciones diferenciales antes de tomar el límite físico, para ello, la condición de igualdad en las coordenadas $q_{1,2}$ no resulta muy práctica. Una transformación de las coordenadas puede resultar conveniente, aunque con su implementación la acción perderá la forma (2.1).

Podemos escribir la acción (2.1) como

$$\hat{S} = \int_{t_i}^{t_f} dt \Lambda(q_i^I), \quad (2.5)$$

donde se ha introducido la lagrangiana Λ

$$\Lambda[q_a^I] \equiv L(q_1, \dot{q}_1) - L(q_2, \dot{q}_2). \quad (2.6)$$

Ahora realizamos la transformación a las coordenadas q_{\pm} , las cuales están dadas por

$$\begin{aligned} q_+^I & \equiv \frac{1}{2}(q_1^I + q_2^I), \\ q_-^I & \equiv q_1^I - q_2^I. \end{aligned} \quad (2.7)$$

De (2.2), derivamos condiciones de frontera más adecuadas para estas coordenadas

$$\begin{aligned} \eta_{\pm}^I(t_i) & = 0, \\ \eta_-^I(t_f) & = 0, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_+^I} \Big|_{t_f} & = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

La última expresión en (2.8) se verifica usando la regla de la cadena y la condición de igualdad

$$\left. \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_+^I} \right|_{t_f} = \left. \frac{\partial L(q_1^I)}{\partial \dot{q}_1^I} \right|_{t_f} - \left. \frac{\partial L(q_2^I)}{\partial \dot{q}_2^I} \right|_{t_f} = 0. \quad (2.9)$$

Desarrollando el principio variacional obtenemos los términos de frontera *B.T.*

$$B.T. = \eta_+^I \left. \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_+^I} \right|_{t_i}^{t_f} + \eta_-^I \left. \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_-^I} \right|_{t_i}^{t_f} = 0, \quad (2.10)$$

los cuales se anulan en virtud de (2.8). Así, quedan establecidas las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_\pm^I} \right) = \frac{\partial \Lambda}{\partial q_\pm^I}. \quad (2.11)$$

Esta transformación de coordenadas es conveniente porque, al tomar el límite físico, nos deshacemos automáticamente de las coordenadas q_-^I .

$$\begin{aligned} q_+^I(t) &\xrightarrow{PL} q^I(t) \\ q_-^I(t) &\xrightarrow{PL} 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Las ecuaciones diferenciales de las coordenadas q_\pm se resuelven con los valores en la frontera

$$\begin{aligned} q_+^I(t_i) &= q_0^I \quad ; \quad \dot{q}_+^I(t_i) = \dot{q}_0^I \\ q_-^I(t_f) &= 0 \quad ; \quad \dot{q}_-^I(t_f) = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde q_0^I y \dot{q}_0^I son las coordenadas y velocidades iniciales de la coordenadas físicas q^I . El valor cero de las coordenadas q_-^I y sus derivadas en el tiempo final se sigue de la condición de igualdad.

Las ecuaciones de movimiento que sobrevive al límite físico son las que se obtienen variando las coordenadas q_-^I .

2.0.1. Sistemas no conservativos

Una de las posibilidades que se abren al duplicar los grados de libertad de un sistema es la de incluir en la lagrangiana Λ términos de la forma $q_- \dot{q}_+^n$ que permiten describir interacciones no conservativas. La lagrangiana de un sistema no conservativo tendrá la forma general

$$\Lambda [q_a^I, \dot{q}_a^I, t] \equiv L(q_1^I, \dot{q}_1^I, t) - L(q_2^I, \dot{q}_2^I, t) + K(q_a^I, \dot{q}_a^I), \quad (2.14)$$

donde K es un “potencial generalizado” de fuerzas no conservativas. En general, el potencial K acopla las trayectorias $q_{1;2}$ porque no se puede expresar como una diferencia de funciones que dependan de un solo sistema de coordenadas.

La acción general de un sistema es, entonces

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt [L(q_1^I) - L(q_2^I) + K(q_a^I)], \quad (2.15)$$

donde $K = 0$ para un sistema conservativo. El potencial generalizado genera los términos de frontera adicionales

$$\eta_1^I \frac{\partial K(q_a^I, \dot{q}_a^I)}{\partial \dot{q}_1^I} \Big|_{t_i}^{t_f} + \eta_2^I \frac{\partial K(q_a^I, \dot{q}_a^I)}{\partial \dot{q}_2^I} \Big|_{t_i}^{t_f}, \quad (2.16)$$

los cuales se pueden anular con las condiciones de frontera (2.8) si K es, además, antisimétrica bajo $q_1^I \leftrightarrow q_2^I$.

En el límite físico se obtiene la ecuación de movimiento

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I} + \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^I} \right)_{PL} \right] = \frac{\partial L}{\partial q^I} + \left[\frac{\partial K}{\partial q^I} \right]_{PL}. \quad (2.17)$$

Usando la ecuación (2.17) y la definición de la función energía se obtiene

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} + \dot{q}^I \left[\frac{\partial K}{\partial q^I} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^I} \right) \right]_{PL}. \quad (2.18)$$

2.1. Ejemplos

2.1.1. Oscilador amortiguado

Una lagrangiana en las coordenadas \pm para este sistema es

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 - \omega^2 q_1^2) - \frac{m}{2}(\dot{q}_2^2 - \omega^2 q_2^2) + \frac{m\gamma}{2}(\dot{q}_1 q_2 - q_1 \dot{q}_2) \\ &= m(\dot{q}_- \dot{q}_+ - \omega^2 q_- q_+) + \frac{m\gamma}{2}(\dot{q}_- q_+ - \dot{q}_+ q_-). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Es fácil ver que esta lagrangiana conduce, en el límite físico, a la ecuación de movimiento (1.8) del oscilador amortiguado y que conduce a la potencia disipada correcta

$$\frac{dh}{dt} = -m\gamma \dot{q}^2. \quad (2.20)$$

En la teoría estándar, los términos de frontera que surgen de derivadas totales no contribuyen a las ecuaciones de movimiento porque, dado que las coordenadas están fijas en los extremos, su variación es cero. En el principio de acción estacionaria de Galley las variaciones en el tiempo final no son cero, así que los términos de frontera deben provenir equitativamente de las lagrangianas $L(q_1^I)$ y $L(q_2^I)$, es decir, el término de frontera debe ser antisimétrico.

Para ilustrar esto último consideremos la lagrangiana (2.19), el potencial generalizado $K(q_{\pm}) = \frac{m\gamma}{2}(\dot{q}_- q_+ - \dot{q}_+ q_-)$ se puede simplificar, por medio de la regla de derivación de Leibniz, a $K = -m\gamma q_- \dot{q}_+$. La derivada total que resulta es proporcional a $\frac{d}{dt}(q_- q_+)$, cuya contribución a la variación de la acción sería $[\epsilon q_+ \eta_- + \epsilon q_- \eta_+] \Big|_{t_i}^{t_f} = 0$, usando (2.2), por lo que se puede eliminar de la lagrangiana.

Por otra parte si se aplicara la regla de Leibniz a uno solo de los términos en $K = \frac{m\gamma}{2}(\dot{q}_1 q_2 - q_1 \dot{q}_2)$, resultaría el término $\frac{d}{dt}(q_1 q_2)$, cuya variación $[\epsilon q_2 \eta_1 + \epsilon q_1 \eta_2] \Big|_{t_i}^{t_f}$ no sería cero dadas las condiciones de frontera (2.2), por lo que se debe aplicar la regla de Leibniz a los dos términos del potencial $K(q_{1,2})$.

2.1.2. Osciladores acoplados

Se presenta ahora la solución que se ofrece en [4] del problema de osciladores acoplados pero en una manera extensa para observar algunos detalles importante que son omitidos en esa referencia.

Como el sistema es conservativo, tenemos $K = 0$, así, la lagrangiana en las coordenadas q_{\pm} es

$$\Lambda = m(\dot{q}_+\dot{q}_- - \omega^2 q_+q_-) + M(\dot{Q}_+\dot{Q}_- - \Omega^2 Q_+Q_-) + \lambda(q_+Q_- + q_-Q_+). \quad (2.21)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para las variables Q_{\pm} son

$$\ddot{Q}_{\pm} + \Omega^2 Q_{\pm} = \frac{\lambda}{M} q_{\pm}. \quad (2.22)$$

Los valores de frontera son

$$\begin{aligned} Q_+(t_i) &= Q_0 & \dot{Q}_+(t_i) &= V_0, \\ Q_-(t_f) &= 0 & \dot{Q}_-(t_f) &= 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

De esta manera, las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales son

$$\begin{aligned} Q_+^s(t) &= Q^{(h)}(t) + \frac{\lambda}{M} \int_{t_i}^{t_f} dt' G_R(t-t') q_+(t'), \\ Q_-^s(t) &= \frac{\lambda}{M} \int_{t_i}^{t_f} dt' G_A(t-t') q_-(t'). \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde $Q^{(h)} = V_0/\Omega \sin[\Omega(t-t_i)] + Q_0 \cos[\Omega(t-t_i)]$ es la solución de la ecuación homogénea que satisface las condiciones iniciales de la coordenada física. El que las ecuaciones sean resueltas con datos iniciales o finales solamente, determina el tipo de funciones de Green que deben llevar sus soluciones. Por otra parte

$$\begin{aligned} \Lambda &= m(\dot{q}_+\dot{q}_- - \omega^2 q_+q_-) + M(a+b)(\dot{Q}_+\dot{Q}_- - \Omega^2 Q_+Q_-) + \lambda(q_+Q_- + q_-Q_+) \\ &= m(\dot{q}_+\dot{q}_- - \omega^2 q_+q_-) - aMQ_+(\ddot{Q}_- + \Omega^2 Q_-) - bMQ_-(\ddot{Q}_+ + \Omega^2 Q_+) \\ &\quad + \lambda(q_+Q_- + q_-Q_+) + M \frac{d}{dt} (aQ_+\dot{Q}_- + b\dot{Q}_+Q_-), \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde $a+b = 1$. Estos coeficientes se introdujeron para integrar por partes ambas coordenadas en el producto $\dot{Q}_+\dot{Q}_-$. Al sustituir las soluciones, el último término en (2.25) da lugar, al nivel de la acción, al término de frontera

$$\left[aQ_+^s \dot{Q}_-^s + b\dot{Q}_+^s Q_-^s \right]_{t_i}^{t_f} = aQ_+^s(t_i) \dot{Q}_-^s(t_i) + b\dot{Q}_+^s(t_i) Q_-^s(t_i), \quad (2.26)$$

cuya variación es cero porque tanto coordenadas como velocidades están determinadas. Por lo tanto, la derivada total en (2.25) no contribuye a las ecuaciones de Euler-Lagrange. Ahora, sustituyendo las soluciones (2.24) en la lagrangiana se obtiene

$$\Lambda = m(\dot{q}_+\dot{q}_- - \omega^2 q_+q_-) + b\lambda q_- Q_+^s + a\lambda q_+ Q_-^s. \quad (2.27)$$

Dado que buscamos una evolución causal, dependiente completamente del estado inicial, imponemos $a = 0$. La lagrangiana efectiva es, por lo tanto,

$$\Lambda_{eff} = m(\dot{q}_+\dot{q}_- - \omega^2 q_+ q_-) + \lambda q_- Q_+^s. \quad (2.28)$$

La acción efectiva es, explícitamente

$$S_{eff} = \int_{t_i}^{t_f} dt \left[m(\dot{q}_+\dot{q}_- - \omega^2 q_+ q_-) + \lambda q_- Q^{(h)} + \frac{\lambda^2}{M} \int_{t_i}^{t_f} dt' G_R(t-t') q_-(t) q_+(t') \right] \quad (2.29)$$

El producto $q_-(t)q_+(t')$ no es simétrico bajo $t \leftrightarrow t'$ por lo que toda la función de Green retardada sobrevive a la integración.

Solución en términos de las coordenadas originales

Ahora se resolverá el problema en términos de las coordenadas $q_{1,2}$ para mostrar su equivalencia con las coordenadas q_{\pm} . La lagrangiana de Galley para el sistema de dos osciladores acoplados es

$$\Lambda = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 - \dot{q}_2^2) - \frac{m\omega^2}{2}(q_1^2 - q_2^2) + \lambda(q_1 Q_1 - q_2 Q_2) + \frac{M}{2}(\dot{Q}_1^2 - \dot{Q}_2^2) - \frac{M\Omega^2}{2}(Q_1^2 - Q_2^2). \quad (2.30)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange de las coordenadas $Q_{1,2}$ son

$$\ddot{Q}_{1,2} + \Omega^2 Q_{1,2} = \frac{\lambda}{M} q_{1,2}, \quad (2.31)$$

con las soluciones

$$Q_{1,2}^s = Q^{(h)} + \frac{\lambda}{M} \int_{t_i}^{t_f} dt' G_R(t-t') q_{1,2}(t'), \quad (2.32)$$

donde $Q^{(h)}$ es la solución de la ecuación homogénea de la coordenada física Q .

Ahora reescribimos la lagrangiana en la forma adecuada para sustituir la solución, sin embargo, debemos recordar que en términos de las coordenadas \pm , se podían introducir unos coeficientes que luego servirían para conseguir la acción con la función de Green retardada solamente. En este caso, si se aplicara la integración por partes de manera separada a las coordenadas $Q_{1,2}$ se obtendrían la diferencia de dos acciones idénticas a las del Capítulo 1, es decir, con los productos simétricos $q_{1,2}(t)q_{1,2}(t')$. Realizar la integración de esta forma equitativa, equivale a tomar $a = b = \frac{1}{2}$. Para obtener el mismo resultado que con las coordenadas \pm consideremos lo siguiente (pasando a la solución causal directamente)

$$\dot{Q}_1^2 - \dot{Q}_2^2 = (\dot{Q}_1 - \dot{Q}_2)(\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2) = \frac{d}{dt} \left[(Q_1 - Q_2)(\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2) \right] - (Q_1 - Q_2)(\ddot{Q}_1 + \ddot{Q}_2). \quad (2.33)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \Lambda = & \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 - \dot{q}_2^2) - \frac{m\omega^2}{2}(q_1^2 - q_2^2) + \lambda(q_1 Q_1 - q_2 Q_2) + \frac{M}{2} \frac{d}{dt} \left[(Q_1 - Q_2)(\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2) \right] \\ & - \frac{M}{2}(Q_1 - Q_2) \left[(\ddot{Q}_1 + \ddot{Q}_2) + \Omega^2(Q_1 + Q_2) \right], \end{aligned} \quad (2.34)$$

sustituyendo las soluciones tenemos

$$\begin{aligned}\Lambda_{eff} &= \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 - \dot{q}_2^2) - \frac{m\omega^2}{2}(q_1^2 - q_2^2) + \lambda(q_1 Q_1^s - q_2 Q_2^s) - \frac{\lambda}{2}(Q_1^s - Q_2^s)(q_1 + q_2) \\ &= \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 - \dot{q}_2^2) - \frac{m\omega^2}{2}(q_1^2 - q_2^2) + \frac{\lambda}{2}(q_1 - q_2)(Q_1^s + Q_2^s),\end{aligned}\quad (2.35)$$

que es precisamente la lagrangiana (2.28).

Interacción con un continuo de osciladores Q

Primero calcularemos la lagrangiana efectiva para N osciladores y luego tomaremos el límite $N \rightarrow \infty$.

$$\Lambda_N = m(\dot{q}_+ \dot{q}_- - \omega^2 q_+ q_-) + \sum_{n=1}^N M^n (\dot{Q}_+^n \dot{Q}_-^n - (\Omega^n)^2 Q_+^n Q_-^n) + \sum_{n=1}^N \lambda^n (q_+ Q_-^n + q_- Q_+^n). \quad (2.36)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange, para los osciladores Q^n son

$$\ddot{Q}_\pm^n + (\Omega^n)^2 Q_\pm^n = \frac{\lambda^n}{M^n} q_\pm, \quad (2.37)$$

con las soluciones

$$\begin{aligned}Q_+^{n(s)}(t) &= Q_+^{n(h)}(t) + \frac{\lambda^n}{M^n} \int_{t_i}^{t_f} dt' G_R^n(t-t') q_+(t'), \\ Q_-^{n(s)}(t) &= \frac{\lambda^n}{M^n} \int_{t_i}^{t_f} dt' G_A^n(t-t') q_-(t'),\end{aligned}\quad (2.38)$$

donde $G_R^n(t-t') = \frac{1}{\Omega^n} \sin[\Omega^n(t-t')] \Theta(t-t')$. Ahora bien,

$$\begin{aligned}\Lambda &= m(\dot{q}_+ \dot{q}_- - \omega^2 q_+ q_-) - \sum_{n=1}^N M^n Q_-^n (\ddot{Q}_+^n + (\Omega^n)^2 Q_+^n) \\ &\quad + \sum_{n=1}^N M^n \frac{d}{dt} (Q_-^n \dot{Q}_+^n) + \sum_{n=1}^N \lambda^n q_+ Q_-^n + \sum_{n=1}^N \lambda^n q_- Q_+^n.\end{aligned}\quad (2.39)$$

Eliminando las derivadas totales y sustituyendo las soluciones de las ecuaciones (2.37) tenemos

$$\begin{aligned}\Lambda &= m(\dot{q}_+ \dot{q}_- - \omega^2 q_+ q_-) + \sum_{n=1}^N \lambda^n q_- Q_+^{n(s)} \\ &= m(\dot{q}_+ \dot{q}_- - \omega^2 q_+ q_-) + q_- \sum_{n=1}^N \lambda^n Q_+^{n(h)} + \sum_{n=1}^N \frac{(\lambda^n)^2}{M^n} \int_{t_i}^{t_f} dt' G_R^n(t-t') q_-(t) q_+(t') \\ &= m(\dot{q}_+ \dot{q}_- - \omega^2 q_+ q_-) + q_- F(t) + \int_{t_i}^t dt' \gamma(t-t') q_-(t) q_+(t'),\end{aligned}\quad (2.40)$$

donde

$$F(t) = \sum_{n=1}^N \lambda^n Q^{n(h)}(t), \quad (2.41)$$

$$\gamma(t-t') = \sum_{n=1}^N \frac{(\lambda^n)^2}{M^n \Omega^n} \sin[\Omega^n(t-t')].$$

Eligiendo condiciones iniciales triviales $Q^n(t_i), \dot{Q}^n(t_i) = 0$ obtenemos $F(t) = 0$. Luego, consideramos que todos los osciladores Q^n tienen la misma masa $M^n = M$ para cualquier n y $\lambda^n = \lambda \Omega^n$ con λ constante, se obtiene

$$\gamma(t-t') = -\frac{\pi \lambda^2}{M} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \cos[\Omega^n(t-t')] \right). \quad (2.42)$$

Por otro lado

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \cos[\Omega^n(t-t')] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\Omega \cos[\Omega(t-t')] = \delta(t-t'), \quad (2.43)$$

entonces cuando $N \rightarrow \infty$, tenemos

$$\begin{aligned} \Lambda_{eff}[q_\pm, \dot{q}_\pm] &= m(\dot{q}_+\dot{q}_- - \omega^2 q_+ q_-) - \frac{\pi \lambda^2}{M} \int_{t_i}^t dt' q_-(t) q_+(t') \frac{\partial}{\partial t} \delta(t-t') \\ &= m(\dot{q}_+\dot{q}_- - \omega^2 q_+ q_-) - \frac{\pi \lambda^2}{M} q_-(t) \left[\frac{d}{dt} \int_{t_i}^t dt' \delta(t-t') q_+(t') - \delta(0) q_+(t) \right] \\ &= m(\dot{q}_+\dot{q}_- - \omega^2 q_+ q_-) - \frac{\pi \lambda^2}{M} q_-(t) [\dot{q}_+(t) - \delta(0) q_+(t)] \\ &= m\dot{q}_+\dot{q}_- - m \left(\omega^2 - \frac{\pi \lambda^2 \delta(0)}{mM} \right) q_- q_+ - \frac{\pi \lambda^2}{M} q_- \dot{q}_+ \\ &= m\dot{q}_+\dot{q}_- - m\omega_{ren}^2 q_- q_+ - \frac{\lambda'^2}{M} q_- \dot{q}_+ \end{aligned} \quad (2.44)$$

donde $\omega_{ren}^2 = \omega^2 - \frac{\pi \lambda^2 \delta(0)}{mM}$ y $\lambda' = \sqrt{\pi} \lambda$. La lagrangiana efectiva tiene la forma de la lagrangiana disipativa dada en (2.14) con la siguiente identificación

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} (\dot{q}^2 - \omega_{ren}^2 q^2) \quad (2.45)$$

$$K(q_\pm, \dot{q}_\pm) = -\frac{\lambda'^2}{M} q_- \dot{q}_+.$$

De la ecuación (2.18), la razón de cambio de la energía del oscilador q

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\lambda'^2}{M} \dot{q}^2, \quad (2.46)$$

que tiene la forma de la energía disipada por un oscilador amortiguado.

Capítulo 3

El principio de Hamilton para fermiones

Las coordenadas fermiónicas ψ^α se definen por medio de la relación

$$\psi^\alpha \psi^\beta + \psi^\beta \psi^\alpha = 0. \quad (3.1)$$

Se sigue inmediatamente que $(\psi^\alpha)^2 = 0$. A diferencia de lo que ocurre con coordenadas conmutativas, los términos de la forma $\dot{\psi}^\alpha \psi^\alpha = -\psi^\alpha \dot{\psi}^\alpha$ no son derivadas totales y contribuyen a las ecuaciones de movimiento.

Utilizaremos las siguientes reglas de derivación [6]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial \psi^\beta} &= \delta^{\alpha\beta}, \\ \frac{\partial (\psi^\alpha \psi^\beta)}{\partial \psi^\beta} &= -\psi^\alpha, \\ \delta F(\psi^\alpha) &= \delta \psi^\alpha \frac{\partial F}{\partial \psi^\alpha}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

3.1. El Principio de acción estacionaria

El principio de acción estacionaria para los sistemas con coordenadas fermiónicas funciona de manera similar al principio de Hamilton para coordenadas bosónicas [16]. Consideremos una lagrangiana que depende de las coordenadas ψ^α y sus derivadas $\dot{\psi}^\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2, \dots, m$. Definamos una acción preliminar de la manera usual

$$S[\psi^\alpha] = \int_{t_i}^{t_f} dt L(\psi^\alpha, \dot{\psi}^\alpha). \quad (3.3)$$

Realizando la variación de la acción obtenemos

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \delta \psi^\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial \psi^\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^\alpha} \right) \right] \right\} + \delta \psi^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^\alpha} \Big|_{t_i}^{t_f}. \quad (3.4)$$

Dado que las ecuaciones de movimiento de los fermiones son ecuaciones diferenciales de primer orden y sólo necesitan una constante para determinar la solución, no se pueden imponer las dos condiciones de variación cero por cada coordenada en los tiempos inicial y final. Para resolver este problema, en [8] se propone usar expresiones de la forma

$$f[\delta\psi^\alpha(t_i), \delta^\alpha(t_f)] = 0, \quad (3.5)$$

de manera que sólo m y no $2m$ valores en la frontera sean independientes. Luego, debemos redefinir la acción con un término de frontera

$$S = F[\psi^\alpha(t_i), \psi^\alpha(t_f)] + \int_{t_i}^{t_f} dt L(\psi^\alpha, \dot{\psi}^\alpha). \quad (3.6)$$

Estas adecuaciones al principio de acción estacionaria no pueden ser completamente arbitrarias, deben satisfacer los siguientes requerimientos: conducir a las ecuaciones de Euler-Lagrange usuales y, dados los valores de frontera, las soluciones de las ecuaciones de movimiento deben ser únicas (esta última condición puede no cumplirse para ciertas elecciones “desafortunadas” de los valores en la frontera).

Ahora se muestra cómo funciona este procedimiento para definir correctamente el principio variacional de los fermiones.

3.2. Ejemplos

3.2.1. Partícula libre

Este ejemplo aparece en [8]. La acción correcta para una partícula fermiónica libre es

$$S = \frac{i}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt [\dot{\psi}\psi] + \frac{i}{2} \psi(t_i)\psi(t_f), \quad (3.7)$$

con la condición de frontera

$$\delta\psi(t_i) + \delta\psi(t_f) = 0 \quad (3.8)$$

Para comprobar esto realizamos la variación de la acción

$$\begin{aligned} \delta S = & -i \int_{t_i}^{t_f} dt [\delta\psi\dot{\psi}] + \frac{i}{2} [\delta\psi(t_f)\psi(t_f) - \delta\psi(t_i)\psi(t_i)] \\ & + \frac{i}{2} [\delta\psi(t_i)\psi(t_f) + \psi(t_i)\delta\psi(t_f)]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Podemos ver que los términos de frontera se anulan idénticamente y obtenemos la ecuación de movimiento $\dot{\psi} = 0$. Suplementando el valor de frontera $\psi(t_i) + \psi(t_f) = 2\psi_0$, obtenemos la solución única, $\psi(t) = \psi_0$.

3.2.2. Osciladores fermiónicos

Otro ejemplo sencillo que ofrecemos es el siguiente

$$L = \frac{i}{2}(\dot{\psi}\bar{\psi} + \dot{\bar{\psi}}\psi) + \omega\bar{\psi}\psi. \quad (3.10)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\begin{aligned} i\dot{\bar{\psi}} + \omega\bar{\psi} &= 0, \\ i\dot{\psi} - \omega\psi &= 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

y tienen como solución general

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(t) &= Ae^{i\omega t}\bar{\psi}_0, \\ \psi(t) &= Be^{-i\omega t}\psi_0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

Para que estas ecuaciones y soluciones sean aceptables se debieron eliminar los siguientes términos de frontera

$$\frac{i}{2} [\delta\bar{\psi}(t_f)\psi(t_f) + \delta\psi(t_f)\bar{\psi}(t_f)] - \frac{i}{2} [\delta\bar{\psi}(t_i)\psi(t_i) + \delta\psi(t_i)\bar{\psi}(t_i)]. \quad (3.13)$$

Esto se puede lograr imponiendo las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} \delta\bar{\psi}(t_f) \pm \delta\bar{\psi}(t_i) &= 0, \\ \delta\psi(t_f) \pm \delta\psi(t_i) &= 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

y definiendo la acción como

$$S = \pm \frac{i}{2} [\bar{\psi}(t_i)\psi(t_f) + \psi(t_i)\bar{\psi}(t_f)] + \int_{t_i}^{t_f} dt L. \quad (3.15)$$

Para ser consistentes con el principio variacional, debemos determinar las soluciones suplementando la información asociada a las condiciones (3.14), por ejemplo

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(t_f) \pm \bar{\psi}(t_i) &= c, \\ \psi(t_f) \pm \psi(t_i) &= c', \end{aligned} \quad (3.16)$$

con las que obtenemos el sistema de ecuaciones algebraicas para determinar las constantes A y B .

$$\begin{aligned} A(e^{i\omega t_f} \pm e^{i\omega t_i}) &= c, \\ B(e^{-i\omega t_f} \pm e^{-i\omega t_i}) &= c'. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Podemos ver que con este procedimiento podemos definir correctamente el principio variacional, al menos con estos ejemplos sencillos. Sin embargo, los términos de frontera que se añaden dependen de la lagrangiana, lo cual plantea la pregunta de si es siempre posible encontrar tales términos de frontera. Por otro lado, no resultaría satisfactorio, para una teoría

supersimétrica, definir términos de frontera para cada tipo de grados de libertad. Además, anticipándonos al principio variacional de Galley para fermiones que deseamos establecer, los términos de frontera de la forma $F[\psi^\alpha(t_i), \psi^\alpha(t_f)]$ nos impedirían proponer el análogo de la condición de igualdad.

Otro punto de vista en relación a las condiciones de frontera es el siguiente: dado que las ecuaciones diferenciales de las coordenadas fermiónicas son de primer orden, al fijar las coordenadas en el tiempo inicial, las trayectorias que son solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange quedan completamente determinadas, lo cual no nos impide realizar desplazamientos virtuales. Luego, vistas como funciones de los valores iniciales fijos, las coordenadas en el tiempo final estarían determinadas y su variación sería nula automáticamente (esta forma de realizar la variación de la acción, también puede aplicarse a las coordenadas bosónicas si se fijan además las velocidades iniciales).

3.3. Acción de Galley fermiónica

Ahora se propone una versión del principio de acción estacionaria de Galley para coordenadas fermiónicas. En analogía con el caso bosónico, se introducen las coordenadas $\psi_{1,2}^\alpha$, las cuales están sujetas a las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \eta_a^\alpha(t_i, \epsilon) &= 0, \quad a = 1, 2 \\ \psi_1^\alpha(t_f, \epsilon) &= \psi_2^\alpha(t_f, \epsilon), \\ \dot{\psi}_1^\alpha(t_f, \epsilon) &= \dot{\psi}_2^\alpha(t_f, \epsilon), \end{aligned} \tag{3.18}$$

para cualquier $\epsilon \ll 1$. Las ecuaciones evaluadas en el tiempo final constituyen la condición de igualdad. Ahora bien, como las trayectorias estacionarias quedan determinadas por un sólo punto y están igualadas en el tiempo final, deben coincidir además en el tiempo inicial. Entonces se debe cumplir $\psi_1^\alpha(t_i, \epsilon) = \psi_2^\alpha(t_i, \epsilon)$ (esta es una condición que no es necesaria tratándose de coordenadas bosónicas, aunque se puede imponer también sin modificar los resultados ya presentados). Se define la acción como

$$S[\psi_a^\alpha] = \int_{t_i}^{t_f} \Lambda(\psi_i^\alpha, \dot{\psi}_i^\alpha), \tag{3.19}$$

donde

$$\Lambda[\psi_1^\alpha, \psi_2^\alpha] = L(\psi_1^\alpha, \dot{\psi}_1^\alpha) - L(\psi_2^\alpha, \dot{\psi}_2^\alpha) + K(\psi_a^\alpha, \dot{\psi}_a^\alpha). \tag{3.20}$$

Los términos de frontera se eliminan con (3.18), con lo se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\psi}_a^\alpha} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial \psi_a^\alpha} = 0, \tag{3.21}$$

para las coordenadas $\psi_{1,2}^\alpha$ o ψ_\pm^α .

3.3.1. Osciladores fermiónicos amortiguados

Ahora ofrecemos un ejemplo de un sistema no conservativo, que se ha construido dentro del contexto del Principio variacional de Galley para fermiones. Consideremos la lagrangiana

$$\Lambda = z^* \left(i\dot{\psi}_+ \psi_- + i\dot{\psi}_- \bar{\psi}_+ \right) + z \left(i\dot{\psi}_- \psi_+ + i\dot{\psi}_+ \bar{\psi}_- \right) + c \left(\bar{\psi}_- \psi_+ + \bar{\psi}_+ \psi_- \right), \quad (3.22)$$

donde $z = x + iy$. Las ecuaciones de movimiento, en el límite físico, son

$$\begin{aligned} 2iz\dot{\psi} - \omega\psi &= 0, \\ 2iz^*\dot{\bar{\psi}} + \omega\bar{\psi} &= 0, \end{aligned} \quad (3.23)$$

que tienen por solución

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \psi_0 \exp \left[\frac{\omega(-ix - y)}{2(x^2 + y^2)} t \right], \\ \bar{\psi}(t) &= \bar{\psi}_0 \exp \left[\frac{\omega(ix - y)}{2(x^2 + y^2)} t \right]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

En términos de las coordenadas $\psi_{1,2}$ tenemos

$$\begin{aligned} \Lambda = & x \left(i\dot{\psi}_1 \psi_1 + i\dot{\psi}_1 \bar{\psi}_1 \right) + \omega \bar{\psi}_1 \psi_1 - x \left(i\dot{\psi}_2 \psi_2 + i\dot{\psi}_2 \bar{\psi}_2 \right) - \omega \bar{\psi}_2 \psi_2 \\ & + y \left[\dot{\psi}_2 \psi_1 - \dot{\bar{\psi}}_1 \psi_2 - \dot{\psi}_2 \bar{\psi}_1 + \dot{\bar{\psi}}_1 \bar{\psi}_2 \right], \end{aligned} \quad (3.25)$$

que tiene la forma (3.20), con las identificaciones

$$\begin{aligned} L &= x \left(i\dot{\psi}\psi + i\dot{\bar{\psi}}\bar{\psi} \right) + \omega \bar{\psi}\psi, \\ K &= y \left[\dot{\psi}_2 \psi_1 - \dot{\bar{\psi}}_1 \psi_2 - \dot{\psi}_2 \bar{\psi}_1 + \dot{\bar{\psi}}_1 \bar{\psi}_2 \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

El potencial generalizado K es antisimétrico bajo $\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$.

La frecuencia de oscilación es

$$\omega' = \frac{\omega x}{2(x^2 + y^2)} \quad (3.27)$$

Capítulo 4

Elementos de la mecánica supersimétrica

En esta sección consideraremos sistemas bosónicos y fermiónicos de manera simultánea. La derivación con respecto a una variable conmutativa se realiza de la misma manera que con los números ordinarios. Para la derivación con respecto a una variable anticonmutativa usamos la regla [17]

$$\frac{\partial PQ}{\partial \psi^\alpha} = \frac{\partial P}{\partial \psi^\alpha} Q \pm P \frac{\partial Q}{\partial \psi^\alpha}, \quad (4.1)$$

con $+$ si P es conmutativo, por ejemplo $P = q$, o $-$, si P es anticonmutativo, por ejemplo $P = \psi$.

4.1. Acción de un sistema supersimétrico

Consideremos la acción para una partícula bosónica y una fermiónica [18]

$$S[q, \psi] = \int dt \left[\frac{1}{2} \dot{q}^2 + \frac{i}{2} \dot{\psi} \psi \right]. \quad (4.2)$$

Sea ϵ un parámetro impar de Grassmann, se definen las transformaciones

$$\begin{aligned} \delta q &= i\epsilon\psi, \\ \delta \psi &= -i\epsilon\dot{q}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Esta acción se dice invariante bajo (4.3) dado que su variación resulta en un término de frontera, el cual no contribuye a las ecuaciones de movimiento.

$$\delta S = \int dt \delta L = \int dt \frac{1}{2} \epsilon \frac{d}{dt} (\dot{q} \psi). \quad (4.4)$$

Las transformaciones (4.3) mezclan variables bosónicas y fermiónicas y se llaman transformaciones de supersimetría. En este caso el parámetro ϵ es constante, por lo que la supersimetría es global.

4.2. El formalismo del superespacio

Aunque es posible seguir hablando de supersimetría mediante lagrangianas donde se presenten las coordenadas fermiónicas y bosónicas de manera explícita, introduciremos ahora el formalismo del superespacio. Una de las principales razones para usar este lenguaje es que las lagrangianas o acciones son automáticamente invariantes supersimétricas [19].

4.2.1. Supersimetría N=1

El superespacio $N = 1$ para una teoría unidimensional ($D = 1$) contiene la variable par t y la variable impar θ_1 [19]. A diferencia de t , que representa al tiempo, θ_1 no es una variable física.

Una (super-)coordenada $\Phi(t, \theta_1)$ tiene la siguiente expansión en componentes

$$\Phi(t, \theta_1) = q(t) + i\theta_1\psi_1(t). \quad (4.5)$$

Se definen las (super-)traslaciones en el superespacio parametrizadas por el número real impar de Grassmann ϵ

$$\begin{aligned} \delta\theta &= \epsilon, \\ \delta t &= -i\epsilon\theta. \end{aligned} \quad (4.6)$$

La variación de Φ bajo (4.6) es

$$\delta\Phi = [\delta t\partial_t + \delta\theta\partial_\theta]\Phi \equiv \epsilon Q\Phi, \quad (4.7)$$

donde se ha definido Q , el generador de las traslaciones en el superespacio,

$$Q = \partial_\theta - i\theta\partial_t. \quad (4.8)$$

Las variaciones de las componentes son

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon q &= -i\epsilon\psi, \\ \delta_\epsilon \psi &= \epsilon\dot{q}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

El generador de traslaciones en el tiempo se define como $P \equiv i\partial_t$. Los generadores Q y P satisfacen el álgebra

$$\begin{aligned} \{Q, Q\} &= -2P, \\ [Q, P] &= 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Bajo las transformaciones (4.6) $d\theta$ es invariante pero no así dt . En cambio, $\Delta_t = dt - i\theta d\theta$ es invariante. La derivada covariante D es

$$D = \partial_\theta + i\theta\partial_t. \quad (4.11)$$

Esta expresión se obtiene, junto con $\nabla_t = \partial_t$, de la condición

$$[dt\partial_t + d\theta\partial_\theta]\Psi(t, \theta) = [\Delta_t\nabla_t + d\theta D]\Psi(t, \theta). \quad (4.12)$$

La derivada covariante satisface el álgebra

$$\begin{aligned} \{Q, D\} &= 0, \\ [D, D] &= 2P. \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.2.2. Integración de Grassmann

Una función de una sola variable θ de Grassmann, tiene la forma general

$$f = a + \theta b, \quad (4.14)$$

donde a y b son independientes de θ . La integración de Grassmann queda determinada con las definiciones [7]

$$\begin{aligned} \int d\theta &= 0, \\ \int d\theta\theta &= 1. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Entonces, para la función (4.14) tenemos

$$\int d\theta(a + \theta b) = b. \quad (4.16)$$

Cuando hay más variables de integración tenemos las siguientes reglas

$$\begin{aligned} \int d\theta^i\theta^j &= \delta^{ij}, \\ \int d\theta^i d\theta^j \dots d\theta^k\theta^k \dots \theta^j\theta^j \dots &= 1. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Con la integración definida podemos escribir la acción (4.2) en términos de la supercoordinada $\Phi(t, \theta) = q(t) + i\theta\psi(t)$

$$S = \frac{-i}{2} \int dt d\theta D\Phi\dot{\Phi}. \quad (4.18)$$

4.2.3. Supersimetría N=2

El superespacio contiene dos variables anticonmutativas θ_1 y θ_2 y el tiempo t [19]. Se definen las transformaciones

$$\begin{aligned} \delta\theta_1 &= \epsilon_1, \\ \delta\theta_2 &= \epsilon_2, \\ \delta t &= -i(\epsilon_1\theta_1 + \epsilon_2\theta_2). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Por conveniencia se adopta una representación compleja

$$\begin{aligned} \theta, \bar{\theta} &= \frac{\theta_1 \pm i\theta_2}{\sqrt{2}}, \\ \epsilon, \bar{\epsilon} &= \frac{\epsilon_1 \pm i\epsilon_2}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

entonces

$$\begin{aligned} \delta\theta &= \bar{\epsilon}, \\ \delta\bar{\theta} &= \epsilon, \\ \delta t &= -i(\epsilon\bar{\theta} + \bar{\epsilon}\theta). \end{aligned} \quad (4.21)$$

La variación de una supercoordenada $\Phi(t, \theta, \bar{\theta})$ es

$$\delta\Phi \equiv (\delta t \partial_t + \delta\theta \partial_\theta + \delta\bar{\theta} \partial_{\bar{\theta}})\Phi \equiv \epsilon Q\Phi + \bar{\epsilon} \bar{Q}\Phi, \quad (4.22)$$

de donde se obtienen las expresiones de los generadores de traslaciones

$$\begin{aligned} Q &= \partial_\theta - i\bar{\theta}\partial_t, \\ \bar{Q} &= \partial_{\bar{\theta}} - i\theta\partial_t, \end{aligned} \quad (4.23)$$

los cuales satisfacen el álgebra

$$\begin{aligned} \{Q, \bar{Q}\} &= -2P, \\ QQ &= \bar{Q}\bar{Q} = 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Sea $\Phi(t, \theta, \bar{\theta}) = q(t) + i\theta\bar{\psi}(t) + i\bar{\theta}\psi(t) - \theta\bar{\theta}A(t)$ el desarrollo en componentes de la supercoordenada, entonces, bajo (4.21), tenemos

$$\begin{aligned} \delta q &= i(\bar{\epsilon}\bar{\psi} + \epsilon\psi), \\ \delta\bar{\psi} &= \epsilon\dot{q} + i\epsilon A, \\ \delta\psi &= -\epsilon\dot{q} + i\bar{\epsilon}A, \\ \delta A &= (\epsilon\dot{\psi} - \bar{\epsilon}\dot{\bar{\psi}}). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Con los elementos invariantes $d\theta$, $d\bar{\theta}$ y $\Delta t = dt - i(d\bar{\theta}\theta + d\theta\bar{\theta})$, se construyen las derivadas covariantes

$$\begin{aligned} D &= \partial_\theta + i\bar{\theta}\partial_t, \\ \bar{D} &= \partial_{\bar{\theta}} + i\theta\partial_t. \end{aligned} \quad (4.26)$$

las cuales satisfacen el álgebra

$$\begin{aligned} \{D, \bar{D}\} &= 2P, \\ DD &= \bar{D}\bar{D} = 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

4.2.4. Función delta

En el caso de una sola variable θ , la función (o más correctamente, distribución) delta satisface la propiedad

$$\int d\theta \delta(\theta) f(\theta) = f(0). \quad (4.28)$$

Es sencillo ver que, en este caso, $\delta(\theta) = \theta$.

En forma más general tenemos [20]

$$\begin{aligned} \delta(\theta - \theta') &= \theta' - \theta = \int d\eta e^{\eta(\theta' - \theta)}, \\ \delta(\bar{\theta} - \bar{\theta}') &= \bar{\theta}' - \bar{\theta} = \int d\eta e^{\eta(\bar{\theta}' - \bar{\theta})}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

La función delta para el superespacio $N = 2$ es

$$\Delta(X - X') = \delta(t - t')\delta(\bar{\theta} - \bar{\theta}')\delta(\theta - \theta') = \delta(t - t')[\bar{\theta}'\theta' - \bar{\theta}\theta' + \theta\bar{\theta}' - \theta\bar{\theta}]. \quad (4.30)$$

Capítulo 5

Acción supersimétrica estacionaria

Sea un sistema supersimétrico descrito por n coordenadas $\Phi^I(X)$, que tiene asociada una densidad lagrangiana \mathcal{L} , se define la acción supersimétrica como [21]

$$S(\Phi^I) = \int_{t_i}^{t_f} dt \int d\theta d\bar{\theta} \mathcal{L}(\Phi^I) \equiv \int dX \mathcal{L}(\Phi^I). \quad (5.1)$$

Aunque en la literatura se llama a \mathcal{L} simplemente la lagrangiana, en lo que sigue nos referiremos a ella como la *densidad lagrangiana* para distinguirla de la lagrangiana usual L con la que trabajaremos de manera simultánea. La relación entre ellas es la siguiente

$$L(q^I, \psi^I) = \int d\theta d\bar{\theta} \mathcal{L}(\Phi^I). \quad (5.2)$$

Sea $\epsilon \ll 1$ un real y $\eta^I(X)$ desplazamientos virtuales con la siguiente expansión en componentes $\eta^I(X) = \delta q^I + i\theta\delta\psi^I + i\bar{\theta}\delta\bar{\psi}^I - \theta\bar{\theta}\delta A^I$, se definen las parametrizaciones

$$\Phi^I(X, \epsilon) = \Phi^I(X) + \epsilon\eta^I(X), \quad (5.3)$$

donde $\{\Phi(X)^I\}$ es la curva en el superespacio que hace extrema a la acción. Entonces, el principio de acción estacionaria queda expresado de la siguiente manera

$$\frac{dS(\epsilon)}{d\epsilon} = 0, \quad (5.4)$$

donde $S(\epsilon)$ es la acción definida con las coordenadas parametrizadas (5.3). Desarrollando (5.4) llegamos a las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^I} - D \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D\Phi^I} - \bar{D} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{D}\Phi^I} = 0, \quad (5.5)$$

siempre y cuando los términos de frontera se anulen, es decir

$$\int dX \left\{ D \left(\eta^I \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D\Phi^I} \right) + \bar{D} \left(\eta^I \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{D}\Phi^I} \right) \right\} = 0. \quad (5.6)$$

Para realizar la integración de estos términos utilizamos las expresiones siguientes

$$\begin{aligned} \int dX D\Phi &= i(-D\Phi)|_{t_i}^{t_f} \\ \int dX \bar{D}\Phi &= -i(-\bar{D}\Phi)|_{t_i}^{t_f} \end{aligned} \quad (5.7)$$

donde \neg indica que, sobre la supercoordenada que está actuando (a la derecha) se debe tomar $\theta = \bar{\theta} = 0$. La prueba de las ecuaciones (5.7) se encuentra en el Apéndice B.

Los términos de frontera *B.T.* son, por lo tanto,

$$B.T. = i\neg \left[D\eta^I \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D\Phi^I} + \eta^I D \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D\Phi^I} - \bar{D}\eta^I \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{D}\Phi^I} - \eta^I \bar{D} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{D}\Phi^I} \right] \Bigg|_{t_i}^{t_f}. \quad (5.8)$$

Usando la propiedad $\neg(\Phi_1\Phi_2) = (\neg\Phi_1)(\neg\Phi_2)$ y las expansiones de los términos a la izquierda (ver Apéndice A) vemos que los términos de frontera son proporcionales a δq^I y $\delta\psi^I$, las cuales, de acuerdo con la discusión de Capítulo 3, podemos considerar como variaciones nulas si las coordenadas están fijas al inicio.

5.1. Ejemplos

5.1.1. Oscilador supersimétrico

Este ejemplo tiene el objetivo de mostrar la equivalencia entre la variación realizada en el superespacio y en el espacio ordinario. Comencemos con la densidad

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\bar{D}\Phi D\Phi - \frac{\omega}{2}\Phi^2, \quad (5.9)$$

la ecuación de Euler-Lagrange es

$$\frac{1}{2}[D, \bar{D}]\Phi - \omega\Phi = 0, \quad (5.10)$$

que equivale al conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} A - \omega q &= 0, \\ \ddot{q} + \omega A &= 0, \\ i\dot{\bar{\psi}} + \omega\bar{\psi} &= 0, \\ i\dot{\psi} - \omega\psi &= 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

En componentes, la lagrangiana de este sistema supersimétrico es

$$L = \frac{1}{2}(i\dot{\bar{\psi}}\bar{\psi} + i\dot{\psi}\psi + \dot{q}^2 + A^2) + \omega(Aq + \bar{\psi}\psi) \quad (5.12)$$

o, usando la ecuación de Euler-Lagrange para A , que resulta ser una coordenada auxiliar,

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) + \frac{i}{2}(\dot{\bar{\psi}}\bar{\psi} + \dot{\psi}\psi) + \omega\bar{\psi}\psi. \quad (5.13)$$

Imponemos la condición de variación cero en los tiempos inicial y final para eliminar los términos de frontera, los cuales se pueden obtener de (5.8) o realizando la variación de L , en cualquier caso obtenemos

$$\left[\delta q \dot{q} + \frac{i}{2} \delta \psi \bar{\psi} + \frac{i}{2} \delta \bar{\psi} \psi \right] \Big|_{t_i}^{t_f} = 0. \quad (5.14)$$

5.1.2. Osciladores supersimétricos acoplados

Este ejemplo consiste en la supersimetrización del problema de osciladores acoplados Φ y Υ . Debemos obtener la solución de la ecuación de movimiento del oscilador Υ y sustituirla en la lagrangiana para hallar la acción efectiva del oscilador Φ . La densidad lagrangiana es

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\bar{D}\Phi D\Phi - \alpha\Phi^2) - \epsilon\Phi\Upsilon + \frac{M}{2} (\bar{D}\Upsilon D\Upsilon - \beta\Upsilon^2). \quad (5.15)$$

Los valores explícitos de los coeficientes se encuentran en el Apéndice A y son tales que conducen a la versión supersimétrica de la lagrangiana (1.15). La ecuación de movimiento del supercampo Υ es

$$\frac{1}{2} [D, \bar{D}]\Upsilon - \beta\Upsilon = \frac{\epsilon}{M}\Phi. \quad (5.16)$$

La (super-) función de Green $\mathcal{G}(X)$ satisface la ecuación

$$\frac{1}{2} [D, \bar{D}]\mathcal{G} - \beta\mathcal{G} = \delta(X - X'), \quad (5.17)$$

De esta manera, la solución de la ecuación de movimiento sería

$$\Upsilon^s = \Upsilon^h + \frac{\epsilon}{M} \int dX' \mathcal{G}^R(X - X') \Phi(X') \quad (5.18)$$

donde Υ^h la supercoordenada solución de la ecuación homogénea. Ahora bien,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{m}{2} (\bar{D}\Phi D\Phi - \alpha\Phi^2) - \epsilon\Phi\Upsilon + \frac{M}{2} \left[\frac{1}{2} \bar{D}\Upsilon D\Upsilon - \frac{1}{2} D\Upsilon \bar{D}\Upsilon - \beta\Upsilon^2 \right] \\ &= \frac{m}{2} (\bar{D}\Phi D\Phi - \alpha\Phi^2) - \epsilon\Phi\Upsilon + \frac{M}{2} \Upsilon \left[\frac{1}{2} [D, \bar{D}]\Upsilon - \beta\Upsilon \right] + \frac{M}{4} \bar{D}(\Upsilon D\Upsilon) - \frac{M}{4} D(\Upsilon \bar{D}\Upsilon). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Sustituyendo la solución (5.18) en (5.19) y eliminando las derivadas totales, tenemos

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{m}{2} (\bar{D}\Phi D\Phi - \alpha\Phi^2) - \frac{1}{2} \epsilon \Phi \Upsilon^s. \quad (5.20)$$

Por lo tanto, la acción efectiva para Φ es

$$S_{eff} = \frac{1}{2} \int dX \left[m (\bar{D}\Phi D\Phi - \alpha\Phi^2) - \epsilon \Phi \Upsilon^h - \frac{\epsilon^2}{M} \int dX' \mathcal{G}^R(X - X') \Phi(X) \Phi(X') \right]. \quad (5.21)$$

Podemos ver que en la acción aparece, como en el caso bosónico, la integral doble de $\Phi(X)\Phi(X')$, el cual es simétrico bajo $X \leftrightarrow X'$, aunque solamente la simetría temporal es relevante para la causalidad. Este comportamiento es de esperarse, ya que con la implementación de la supersimetría no hemos impuesto ninguna condición relacionada con la evolución de las coordenadas.

Solución por componentes

La lagrangiana que se obtiene de (5.15) es

$$L = \frac{m}{2} (\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) + \lambda q Q + \frac{M}{2} (\dot{Q}^2 - \Omega^2 Q^2) + \frac{m}{2} (i\dot{\psi}\bar{\psi} + i\dot{\bar{\psi}}\psi) + \frac{M}{2} (i\dot{\chi}\bar{\chi} + i\dot{\bar{\chi}}\chi) \quad (5.22)$$

$$+ m\alpha\bar{\psi}\psi + M\beta\bar{\chi}\chi + \epsilon(\bar{\chi}\psi + \bar{\psi}\chi).$$

Ya hemos visto en el Capítulo 1 lo que sucede con la parte bosónica, así que nos concentraremos en los fermiones, las ecuaciones de movimiento son

$$i\dot{\bar{\chi}} + \beta\bar{\chi} = -\frac{\epsilon}{M}\bar{\psi}, \quad (5.23)$$

$$i\dot{\chi} - \beta\chi = \frac{\epsilon}{M}\psi.$$

Las funciones de Green para estas ecuaciones satisfacen

$$i\dot{G}_{\bar{\chi}} + \beta G_{\bar{\chi}} = -\delta(t-t'), \quad (5.24)$$

$$i\dot{G}_{\chi} - \beta G_{\chi} = \delta(t-t').$$

que son las mismas que se obtienen directamente de (5.17). Como era de esperar, estas ecuaciones son complejas conjugadas una de la otra, de modo que $G_{\bar{\chi}} = G_{\chi}^*$. Entonces, las soluciones que satisfacen condiciones iniciales son

$$\bar{\chi}^s = \bar{\chi}^h + \frac{\epsilon}{M} \int dt' G_{\bar{\chi}}^R(t-t') \bar{\psi}(t'), \quad (5.25)$$

$$\chi^s = \chi^h + \frac{\epsilon}{M} \int dt' G_{\chi}^R(t-t') \psi(t'),$$

donde $G^R(t-t')$ es la función de Green retardada. Ahora, reacomodando el sector fermiónico L^ψ de la lagrangiana (5.22) obtenemos

$$L^\psi = \frac{m}{2} (i\dot{\psi}\bar{\psi} + i\dot{\bar{\psi}}\psi) + m\alpha\bar{\psi}\psi - \frac{M}{2} \bar{\chi} (i\dot{\chi} - \beta\chi) - \frac{M}{2} \chi (i\dot{\bar{\chi}} + \beta\bar{\chi}) + \epsilon(\bar{\chi}\psi + \bar{\psi}\chi). \quad (5.26)$$

Al sustituir las soluciones en (5.25) obtenemos la lagrangiana efectiva para los fermiones

$$L_{eff}^\psi = \frac{m}{2} (i\dot{\psi}\bar{\psi} + i\dot{\bar{\psi}}\psi) + m\alpha\bar{\psi}\psi + \frac{\epsilon}{2} (\bar{\psi}\chi^s - \psi\bar{\chi}^s). \quad (5.27)$$

La acción fermiónica efectiva es, por lo tanto,

$$S_{eff}^\psi = \frac{1}{2} \int dt \left[m(i\dot{\psi}\bar{\psi} + i\dot{\bar{\psi}}\psi) + 2m\alpha\bar{\psi}\psi - \epsilon(\psi\bar{\chi}^h - \bar{\psi}\chi^h) \right. \\ \left. + \frac{\epsilon^2}{M} \int dt' \{ G_{\chi}^R(t-t') \bar{\psi}(t) \psi(t') - G_{\bar{\chi}}^{R*}(t-t') \psi(t) \bar{\psi}(t') \} \right]. \quad (5.28)$$

La integral doble en (5.28) se puede escribir como

$$\int dt dt' \text{Re} (G_{\chi}^R(t-t')) \{ \bar{\psi}(t) \psi(t') - \psi(t) \bar{\psi}(t') \} + i \text{Im} (G_{\chi}^R(t-t')) \{ \bar{\psi}(t) \psi(t') + \psi(t) \bar{\psi}(t') \}, \quad (5.29)$$

donde el término $\bar{\psi}(t)\psi(t') - \psi(t)\bar{\psi}(t')$ es simétrico bajo $t \leftrightarrow t'$.

Volviendo a la relación entre el formalismo del superespacio y la supersimetría en componentes, la lagrangiana total efectiva es

$$L = \frac{m}{2} (\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) + \frac{\lambda}{2} q Q^s + \frac{m}{2} (i\dot{\psi}\bar{\psi} + i\dot{\bar{\psi}}\psi) + m\alpha\bar{\psi}\psi + \frac{\epsilon}{2} (\bar{\psi}\chi^s - \psi\bar{\chi}^s). \quad (5.30)$$

Esta lagrangiana puede ser derivada de (5.20), siempre y cuando sustituamos los valores de las coordenadas auxiliares que resultan de la densidad original (5.15).

Capítulo 6

Acción de Galley supersimétrica

En este capítulo se extiende el principio variacional para sistemas no conservativos a la mecánica supersimétrica $N = 2$. Por simplicidad, consideramos un sistema con una sola supercoordenada Φ .

La lagrangiana de Galley supersimétrica se define como

$$\Gamma(\Phi_1, \Phi_2) = \mathcal{L}(\Phi_1) - \mathcal{L}(\Phi_2) + \mathcal{K}(\Phi_1, \Phi_2), \quad (6.1)$$

donde K corresponde a un “superpotencial” de interacciones no conservativas. La acción se define como

$$S = \int dX \Gamma(\Phi_1, \Phi_2). \quad (6.2)$$

Sean $\Phi_a(X)$ ($a = 1, 2$) las trayectorias sobre las que la acción es estacionaria, $\eta_a(X)$ desplazamientos virtuales y ϵ un número real. Luego, se define la parametrización

$$\Phi_a(X, \epsilon) = \Phi_a(X) + \epsilon \eta_a(X). \quad (6.3)$$

Para realizar las variaciones fijamos imponemos las condiciones de frontera supersimétricas

$$\begin{aligned} \eta_a(X, \epsilon)|_{t_i} &= 0, \\ \Phi_1(X, \epsilon)|_{t_f} &= \Phi_2(X, \epsilon)|_{t_f}, \\ D\Phi_1(X, \epsilon)|_{t_f} &= D\Phi_2(X, \epsilon)|_{t_f}, \\ \bar{D}\Phi_1(X, \epsilon)|_{t_f} &= \bar{D}\Phi_2(X, \epsilon)|_{t_f}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Debemos recordar, que en el principio de acción estacionaria de Galley para los fermiones, establecido en el Capítulo 3, se imponía la condición adicional de que las coordenadas en el tiempo inicial eran iguales. Ponemos ahora esta condición en la expresión supersimétrica $\Phi_1(X, \epsilon)|_{t_i} = \Phi_2(X, \epsilon)|_{t_i}$.

Desarrollamos ahora el principio de acción estacionaria, $\frac{dS}{d\epsilon} = 0$,

$$\int dX \left\{ \eta_a \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial \Phi_a} - D \frac{\partial \Lambda}{\partial D \Phi_a} - \bar{D} \frac{\partial \Lambda}{\partial \bar{D} \Phi_a} \right] + D \left(\eta_a \frac{\partial \Lambda}{\partial D \Phi_a} \right) + \bar{D} \left(\eta_a \frac{\partial \Lambda}{\partial \bar{D} \Phi_a} \right) \right\} = 0. \quad (6.5)$$

Los términos de frontera $B.T.$ son, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 B.T. &= \int dX \left\{ D \left(\eta_1 \frac{\partial \Gamma}{\partial D\Phi_1} - \eta_2 \frac{\partial \Gamma}{\partial D\Phi_2} \right) + \bar{D} \left(\eta_1 \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{D}\Phi_1} - \eta_2 \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{D}\Phi_2} \right) \right\} \\
 &= i \left. \left(\eta_1 \frac{\partial \Gamma}{\partial D\Phi_1} - \eta_2 \frac{\partial \Gamma}{\partial D\Phi_2} \right) \right|_{t_i}^{t_f} - i \left. \left(\eta_1 \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{D}\Phi_1} - \eta_2 \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{D}\Phi_2} \right) \right|_{t_i}^{t_f} \\
 &= i \left\{ (D\eta_1) \frac{\partial(\mathcal{L} + \mathcal{K})}{\partial D\Phi_1} + \eta_1 D \frac{\partial(\mathcal{L} + \mathcal{K})}{\partial D\Phi_1} - (D\eta_2) \frac{\partial(\mathcal{L} - \mathcal{K})}{\partial D\Phi_2} - \eta_2 D \frac{\partial(\mathcal{L} - \mathcal{K})}{\partial D\Phi_2} \right\} \Big|_{t_i}^{t_f} \\
 &\quad - i \left\{ (\bar{D}\eta_1) \frac{\partial(\mathcal{L} + \mathcal{K})}{\partial \bar{D}\Phi_1} + \eta_1 \bar{D} \frac{\partial(\mathcal{L} + \mathcal{K})}{\partial \bar{D}\Phi_1} - (\bar{D}\eta_2) \frac{\partial(\mathcal{L} - \mathcal{K})}{\partial \bar{D}\Phi_2} - \eta_2 \bar{D} \frac{\partial(\mathcal{L} - \mathcal{K})}{\partial \bar{D}\Phi_2} \right\} \Big|_{t_i}^{t_f}
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Por la condición de igualdad y la antisimetría de \mathcal{K} se eliminan los ocho términos evaluados en t_f . La primera condición en (6.4) anula los cuatro términos proporcionales que contienen η_a en el tiempo inicial. Usando la expansión de $D\eta_a$ y la propiedad (B.2), encontramos que los cuatro términos que contienen $D\eta_a$ en t_i son proporcionales a $\delta\psi_a(t_i)$ y $\delta\bar{\psi}_a(t_i)$, de modo que se eliminan también con la primera condición en (6.4).

Con los términos de frontera eliminados, quedan establecidas las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \Phi_a} - D \frac{\partial \Gamma}{\partial D\Phi_a} - \bar{D} \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{D}\Phi_a} = 0. \tag{6.7}$$

6.1. Ejemplos

6.1.1. Oscilador supersimétrico amortiguado

En este ejemplo se presenta un potencial K que da lugar a una interacción no conservativa tanto en bosones como fermiones. La lagrangiana en las coordenadas \pm es

$$\Gamma = \sqrt{m} [z^* \bar{D}\Phi_- D\Phi_+ + z \bar{D}\Phi_+ D\Phi_- - \omega \Phi_+ \Phi_-], \tag{6.8}$$

donde $z = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{\epsilon}{2\omega}\right)^2} + i\frac{\epsilon}{2\omega} \right]$.

En este problema no necesitamos calcular ninguna acción efectiva, sino encontrar la evolución del sistema. La ecuación de movimiento, en el límite físico, es

$$[zD\bar{D} - z^*\bar{D}D]\Phi - \omega\Phi = 0. \tag{6.9}$$

Igualando a cero las componentes de la expresión (6.9) obtenemos, para los fermiones, ecuaciones equivalentes a las vistas en el Capítulo 3

$$\begin{aligned}
 2z\dot{\psi} + i\omega\psi &= 0, \\
 2z^*\dot{\bar{\psi}} - i\omega\bar{\psi} &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

Mientras que para el bosón tenemos el sistema de ecuaciones acopladas

$$\begin{aligned}
 2xA - 2y\dot{q} - \omega q &= 0, \\
 2x\ddot{q} + 2y\dot{A} + \omega A &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

que se convierte en la ecuación del oscilador armónico amortiguado al eliminar la coordenada auxiliar. Las soluciones son

$$\begin{aligned}\psi(t) &= e^{(-i\omega' - \frac{\epsilon}{2})t} \psi_0, \\ \bar{\psi}(t) &= e^{(i\omega' - \frac{\epsilon}{2})t} \bar{\psi}_0, \\ q(t) &= \left[e^{i\omega't} q_{01} + e^{-i\omega't} q_{02} \right] e^{-\frac{\epsilon t}{2}},\end{aligned}\tag{6.12}$$

donde $\omega' = \omega \sqrt{1 - \left(\frac{\epsilon}{2\omega}\right)^2}$. El cociente $\frac{\epsilon}{2\omega}$ determina si se trata de amortiguamiento débil, crítico o sobreamortiguamiento, según sea menor, igual o mayor que 1, respectivamente.

Ahora bien, escribiendo la densidad lagrangiana (6.8) en las coordenadas $\Phi_{1;2}$ obtenemos

$$\Gamma = \frac{\sqrt{m}}{2\omega} \left[w' \bar{D}\Phi_1 D\Phi_1 - \omega^2 \Phi^2 - (w' \bar{D}\Phi_2 D\Phi_2 - \omega^2 \Phi_2^2) + i\frac{\epsilon}{2} (\bar{D}\Phi_2 D\Phi_1 - \bar{D}\Phi_1 D\Phi_2) \right],\tag{6.13}$$

donde podemos identificar el potencial supersimétrico K como

$$K = i\frac{\epsilon\sqrt{m}}{4\omega} (\bar{D}\Phi_2 D\Phi_1 - \bar{D}\Phi_1 D\Phi_2),\tag{6.14}$$

el cual es antisimétrico bajo $\Phi_1 \leftrightarrow \Phi_2$, como se requiere para eliminar los términos de frontera y que la acción quede bien definida.

6.1.2. Osciladores acoplados

La lagrangiana en las coordenadas \pm es

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{m}{2} [\bar{D}\Phi_+ D\Phi_- + \bar{D}\Phi_- D\Phi_+ - 2\alpha\Phi_+\Phi_-] - \epsilon(\Phi_+\Upsilon_- + \Phi_-\Upsilon_+) \\ &+ \frac{M}{2} [\bar{D}\Upsilon_+ D\Upsilon_- + \bar{D}\Upsilon_- D\Upsilon_+ - 2\beta\Upsilon_+\Upsilon_-].\end{aligned}\tag{6.15}$$

Las ecuaciones de E-L para Υ_{\pm} son

$$\frac{1}{2}[D, \bar{D}]\Upsilon_{\pm} - \beta\Upsilon_{\pm} = \frac{\epsilon}{M}\Phi_{\pm},\tag{6.16}$$

con los valores de frontera

$$\begin{aligned}\Upsilon_+|_{t_i} &= \Upsilon_0, \\ \Upsilon_-|_{t_f} &= 0,\end{aligned}\tag{6.17}$$

donde Υ_0 es la coordenada física evaluada en el tiempo inicial. Las soluciones son

$$\begin{aligned}\Upsilon_+^s &= \Upsilon^h + \frac{\epsilon}{M} \int dX' \mathcal{G}^R(X - X') \Phi_+(X'), \\ \Upsilon_-^s &= \frac{\epsilon}{M} \int dX' \mathcal{G}^A(X - X') \Phi_-(X').\end{aligned}\tag{6.18}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \Gamma = & \frac{m}{2} [\bar{D}\Phi_+ D\Phi_- + \bar{D}\Phi_- D\Phi_+ - 2\alpha\Phi_+\Phi_-] - \epsilon(\Phi_+\Upsilon_- + \Phi_-\Upsilon_+) \\ & + \frac{M}{2} \{a\Upsilon_+ ([D, \bar{D}]\Upsilon_- - 2\beta\Upsilon_-) + b\Upsilon_- ([D, \bar{D}]\Upsilon_+ - 2\beta\Upsilon_+) \\ & + a\bar{D}(\Upsilon_+ D\Upsilon_-) - bD(\Upsilon_- \bar{D}\Upsilon_+) + b\bar{D}(\Upsilon_- D\Upsilon_+) - aD(\Upsilon_+ \bar{D}\Upsilon_-)\}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Imponemos la causalidad mediante $b = 1$, entonces, la lagrangiana efectiva es

$$\Gamma_{eff} = \frac{m}{2} [\bar{D}\Phi_+ D\Phi_- + \bar{D}\Phi_- D\Phi_+ - 2\alpha\Phi_+\Phi_-] - \epsilon\Phi_-\Upsilon_+^s. \quad (6.20)$$

Solucion en componentes

La densidad (6.20) equivale a la lagrangiana

$$\begin{aligned} \Delta_{eff} = & m(\dot{q}_+\dot{q}_- - \omega^2 q_+ q_-) + \lambda q_- Q_+^s + \frac{m}{2}(i\dot{\psi}_+\bar{\psi}_- + i\dot{\psi}_-\bar{\psi}_+ + i\dot{\bar{\psi}}_+\psi_- + i\dot{\bar{\psi}}_-\psi_+) \\ & + m\alpha(\bar{\psi}_-\psi_+ + \bar{\psi}_+\psi_-) + \epsilon(\bar{\chi}_+^s\psi_- + \bar{\psi}_-\chi_+^s), \end{aligned} \quad (6.21)$$

donde $\bar{\chi}_+^s$ y χ_+^s son las soluciones de las ecuaciones diferenciales que se obtienen de la lagrangiana completa, no de la efectiva. Hemos visto que las ecuaciones diferenciales que satisfacen las coordenadas duplicadas tiene la misma forma que las ecuaciones de las coordenadas físicas de la acción usual. Retomando (5.23), tenemos

$$\begin{aligned} i\dot{\bar{\chi}}_+ + \beta\bar{\chi}_+ &= -\frac{\epsilon}{M}\bar{\psi}_+, \\ i\dot{\chi}_+ - \beta\chi_+ &= \frac{\epsilon}{M}\psi_+. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Entonces $\bar{\chi}_+^s$ y χ_+^s están dados por

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_+(t) &= \bar{\chi}^h + \frac{\epsilon}{M} \int dt' G_{\bar{\chi}}(t-t')\bar{\psi}_+(t'), \\ \chi_+(t) &= \chi^h + \frac{\epsilon}{M} \int dt' G_{\chi}(t-t')\psi_+(t'). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Generalización a N osciladores supersimétricos

La densidad lagrangiana es

$$\begin{aligned} \Lambda = & \frac{m}{2} [\bar{D}\Phi_+ D\Phi_- + \bar{D}\Phi_- D\Phi_+ - 2\alpha\Phi_+\Phi_-] - \sum_{i=1}^N \epsilon^i (\Phi_+\Upsilon_-^i + \Phi_-\Upsilon_+^i) \\ & + \sum_{i=1}^N \frac{M^i}{2} [\bar{D}\Upsilon_+^i D\Upsilon_-^i + \bar{D}\Upsilon_-^i D\Upsilon_+^i - 2\beta^i \Upsilon_+^i \Upsilon_-^i], \end{aligned} \quad (6.24)$$

donde $i = 1, 2, \dots, N$. Las ecuaciones de movimiento de los osciladores Υ^i son

$$\frac{1}{2}[D, \bar{D}]\Upsilon_{\pm}^i - \beta^i \Upsilon^i = \frac{\epsilon^i}{M^i} \Phi_{\pm}, \quad (6.25)$$

cuyas soluciones son

$$\begin{aligned}\Upsilon_+^i &= \Upsilon^{ih} + \frac{\epsilon^i}{M^i} \int dX' \mathcal{G}^R(X - X') \Phi(X'), \\ \Upsilon_-^i &= \frac{\epsilon^i}{M^i} \int dX' \mathcal{G}^A(X - X') \Phi(X').\end{aligned}\tag{6.26}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\Lambda &= \frac{m}{2} [\bar{D}\Phi_+ D\Phi_- + \bar{D}\Phi_- D\Phi_+ - 2\alpha\Phi_+\Phi_-] - \sum_{i=1}^N \epsilon^i (\Phi_+ \Upsilon_-^i + \Phi_- \Upsilon_+^i) \\ &+ \sum_{i=1}^N \frac{M^i}{2} \{ \Upsilon_-^i ([D, \bar{D}]\Upsilon_+^i - 2\beta\Upsilon_+^i) - D(\Upsilon_-^i \bar{D}\Upsilon_+^i) + \bar{D}(\Upsilon_-^i D\Upsilon_+^i) \}.\end{aligned}\tag{6.27}$$

Como de costumbre, hemos dejado solamente la solución causal. La lagrangiana efectiva es

$$\Gamma_{eff}^N = \frac{m}{2} [\bar{D}\Phi_+ D\Phi_- + \bar{D}\Phi_- D\Phi_+ - 2\alpha\Phi_+\Phi_-] - \sum_{i=1}^N \epsilon^i \Phi_- \Upsilon_+^{is}.\tag{6.28}$$

Podemos hacer la identificación de un (super-) potencial de interacciones no conservativas

$$\mathcal{K} = - \sum_{i=1}^N \epsilon^i \Phi_- \Upsilon_+^{is}.\tag{6.29}$$

En componentes tenemos

$$\begin{aligned}\Lambda_{eff}^N &= m(\dot{q}_+ \dot{q}_- - \omega^2 q_+ q_-) + q_- \sum_{i=1}^N \lambda^i Q_+^i + \frac{m}{2} (i\dot{\psi}_+ \bar{\psi}_- + i\dot{\psi}_- \bar{\psi}_+ + i\dot{\bar{\psi}}_+ \psi_- + i\dot{\bar{\psi}}_- \psi_+) \\ &+ m\alpha(\bar{\psi}_- \psi_+ + \bar{\psi}_+ \psi_-) + \sum_{i=1}^N \epsilon^i (\bar{\psi}_- \chi_+^i - \psi_- \bar{\chi}_+^i).\end{aligned}\tag{6.30}$$

El potencial no conservativo para los bosones es el que se presentó en el Capítulo 2. Para los fermiones tenemos

$$K^\psi = \sum_{i=1}^N \epsilon^i (\bar{\psi}_- \chi_+^i - \psi_- \bar{\chi}_+^i).\tag{6.31}$$

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo se propuso la extensión del principio variacional de Galley a sistemas con grados de libertad anticonmutativos y sistemas supersimétricos. Esta generalización es directa, salvo por algunas condiciones adicionales, como la identificación de las coordenadas el tiempo inicial, necesaria para respetar las características de las ecuaciones de movimiento fermiónicas. En los ejemplos que presentamos se mantiene la prescripción de Galley de la lagrangiana generalizada. En el caso supersimétrico, el potencial de interacciones no conservativas se puede escribir incluso en el lenguaje del superespacio, manteniendo la propiedad de antisimetría bajo el intercambio de las etiquetas de las supercoordenadas duplicadas.

Como parte de un trabajo posterior se plantea el estudio de las cantidades conservadas mediante el Teorema de Noether para los sistemas supersimétricos. La formulación hamiltoniana, el paso a la teoría de campos y la cuantización.

Apéndice A

Supersimetría en componentes

A.1. Desarrollos

Sean $\Phi(t, \theta, \bar{\theta}) = q(t) + i\theta\bar{\psi} + i\bar{\theta}\psi - \theta\bar{\theta}A$ y $\Upsilon(t, \theta, \bar{\theta}) = Q + i\theta\bar{\chi} + i\bar{\theta}\chi - \theta\bar{\theta}B$ los desarrollos en componentes de dos supercoordenadas arbitrarias, entonces

$$\begin{aligned}
 D\Phi &= i\dot{\bar{\psi}} + \bar{\theta}(-A + i\dot{q}) + \theta\bar{\theta}\dot{\bar{\psi}}, \\
 \bar{D}\Phi &= i\dot{\psi} + \theta(A + i\dot{q}) - \theta\bar{\theta}\dot{\psi}, \\
 D\bar{D}\Phi &= A + i\dot{q} - 2\bar{\theta}\dot{\psi} + \theta\bar{\theta}(\ddot{q} - i\dot{A}), \\
 \bar{D}D\Phi &= -A + i\dot{q} - 2\theta\dot{\bar{\psi}} + \theta\bar{\theta}(-\ddot{q} - i\dot{A}), \\
 [D, \bar{D}]\Phi &= 2A - 2\bar{\theta}\dot{\psi} + 2\theta\dot{\bar{\psi}} + 2\theta\bar{\theta}\ddot{q}, \\
 D\Phi\bar{D}\Phi &= \theta\bar{\theta}(i\dot{\psi}\bar{\psi} + i\dot{\bar{\psi}}\psi + A^2 + \dot{q}^2) + \dots, \\
 \Phi\Phi &= \theta\bar{\theta}(-2Aq + 2\bar{\psi}\psi) + \dots, \\
 \Phi\Upsilon &= \bar{\theta}\theta(qB + AQ - \bar{\chi}\psi - \bar{\psi}\chi) + \dots, \\
 \bar{D}\Phi D\Upsilon &= \bar{\theta}\theta(AB - iA\dot{Q} + i\dot{q}B + \dot{q}\dot{Q} + i\dot{\chi}\psi + i\dot{\bar{\psi}}\bar{\chi}).
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Los términos omitidos en algunos casos son proporcionales a θ , $\bar{\theta}$ o a 1 y no sobreviven a la integración en el superespacio.

A.2. Osciladores supersimétricos acoplados

Sea \mathcal{L} la densidad dada por la expresión

$$\mathcal{L} = a\bar{D}\Psi D\Psi - b\Psi\Psi - c\Psi\Upsilon + d\bar{D}\Upsilon D\Upsilon - f\Upsilon\Upsilon. \tag{A.2}$$

Usando la definición (5.2) y la regla de integración

$$\int d\theta d\bar{\theta} \bar{\theta}\theta = 1, \tag{A.3}$$

obtenemos

$$L = a(i\dot{\psi}\bar{\psi} + i\dot{\bar{\psi}}\psi + A^2 + \dot{q}^2) - 2b(Aq + \psi\bar{\psi}) - 2f(BQ + \chi\bar{\chi}) + d(i\dot{\chi}\bar{\chi} + i\dot{\bar{\chi}}\chi + B^2 + \dot{Q}^2) - c(qB + AQ + \psi\bar{\chi} + \chi\bar{\psi}). \quad (\text{A.4})$$

Como L no contiene derivadas de A ni de B , se dice que éstas son coordenadas auxiliares, las ecuaciones de Euler-Lagrange de tales coordenadas no son ecuaciones diferenciales sino ecuaciones algebraicas

$$A = \frac{1}{a}(bq + \frac{1}{2}cQ), \quad (\text{A.5})$$

$$B = \frac{1}{d}(fQ + \frac{1}{2}cq).$$

sustituyendo (A.5) en (A.4) obtenemos

$$L = a \left[\dot{q}^2 - \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{4ad} \right) q^2 \right] - c \left[\frac{b}{a} + \frac{f}{d} \right] qQ + d \left[\dot{Q}^2 - \left(\frac{f^2}{d^2} + \frac{c^2}{4ad} \right) Q^2 \right] + a \left(i\dot{\psi}\bar{\psi} + i\dot{\bar{\psi}}\psi \right) + 2b\bar{\psi}\psi + c \left(\bar{\chi}\psi + \bar{\psi}\chi \right) + d \left(i\dot{\chi}\bar{\chi} + i\dot{\bar{\chi}}\chi \right) + 2f\bar{\chi}\chi. \quad (\text{A.6})$$

Desacoplamiento por medio de una rotación

La lagrangiana de un sistema de dos osciladores acoplados q y \tilde{Q} , con una constante de acoplamiento λ es

$$L = \frac{m}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) + \lambda q\tilde{Q} + \frac{M}{2}(\dot{\tilde{Q}}^2 - \Omega^2 \tilde{Q}^2). \quad (\text{A.7})$$

Podemos obtener la supersimetrización de esta lagrangiana identificando los coeficientes de la parte bosónica de (A.6) con los coeficientes de (A.7), sin embargo esta forma directa se torna muy complicada por lo que preferimos obtener los coeficientes de otra manera.

Usando $Q = \sqrt{\frac{M}{m}}\tilde{Q}$ y $\eta = \frac{\sqrt{mM}}{\lambda}$ podemos escribir la lagrangiana en una forma simplificada

$$L = \frac{m}{2} \left[\dot{q}^2 + \dot{Q}^2 - \omega^2 q^2 - \Omega^2 Q^2 + \frac{2}{\eta} qQ \right]. \quad (\text{A.8})$$

Para desacoplar los osciladores en (A.8) se realiza una rotación dictada por la matriz ortogonal \mathcal{O}

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \mathcal{O} \begin{bmatrix} q \\ Q \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} u & v \\ -v & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ Q \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

donde $u^2 + v^2 = 1$. La lagrangiana en las coordenadas rotadas (transformación pasiva) es

$$L = \frac{m}{2} \left\{ (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)(u^2 + v^2) + q_1^2(-\omega^2 u^2 - \Omega^2 v^2 + \frac{2}{\eta} uv) + q_2^2(-\omega^2 v^2 - \Omega^2 u^2 - \frac{2}{\eta} uv) + 2q_1 q_2 [uv(\omega^2 - \Omega^2) + \frac{1}{\eta}(u^2 - v^2)] \right\}, \quad (\text{A.10})$$

que corresponde a dos osciladores independientes si

$$u^2 - v^2 = \eta \delta u v, \quad (\text{A.11})$$

donde $\delta = \Omega^2 - \omega^2$. Usando la condición de ortogonalidad tenemos

$$u^2 = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \frac{\delta^2 \eta^2}{4}}} \right). \quad (\text{A.12})$$

Así, (A.10) es simplemente

$$L = \frac{m}{2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - \omega_1^2 q_1^2 - \omega_2^2 q_2^2], \quad (\text{A.13})$$

donde

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \omega^2 u^2 + \Omega^2 v^2 - \frac{2}{\eta} uv, \\ \omega_2^2 &= \omega^2 v^2 + \Omega^2 u^2 + \frac{2}{\eta} uv. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Para lograr el desacoplamiento, el reescalamiento de \hat{Q} fue un paso obligatorio pues de lo contrario habría sobrevivido un término de acoplamiento de las velocidades.

Identificación de los coeficientes

Sean las supercoordenadas

$$\begin{aligned} \Phi_1(t, \theta, \bar{\theta}) &= q_1 + i\theta\bar{\psi}_1 + i\bar{\theta}\psi_1 - \theta\bar{\theta}A, \\ \Phi_2(t, \theta, \bar{\theta}) &= q_2 + i\theta\bar{\psi}_2 + i\bar{\theta}\psi_2 - \theta\bar{\theta}B. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

La densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = a\bar{D}\Phi_1 D\Phi_1 - b\Phi_1\Phi_1 + d\bar{D}\Phi_2 D\Phi_2 - f\Phi_2\Phi_2, \quad (\text{A.16})$$

conduce a

$$\begin{aligned} L &= a[i\dot{\psi}_1\bar{\psi}_1 + i\dot{\bar{\psi}}_1\psi_1 + \dot{q}_1^2 + A^2] + d[i\dot{\psi}_2\bar{\psi}_2 + i\dot{\bar{\psi}}_2\psi_2 + \dot{q}_2^2 + B^2] \\ &+ b(-2Aq_1 + 2\bar{\psi}_1\psi_1) + f(-2Bq_2 + 2\bar{\psi}_2\psi_2). \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Usando la ecuaciones de movimiento de las coordenadas auxiliares y las siguientes identificaciones

$$\begin{aligned} a &= \frac{m}{2} = d, \\ b &= a\omega_1, \\ f &= a\omega_2, \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

se obtiene

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2} \left[\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - \omega_1^2 q_1^2 - \omega_2^2 q_2^2 + i\dot{\psi}_1\bar{\psi}_1 + i\dot{\bar{\psi}}_1\psi_1 + i\dot{\psi}_2\bar{\psi}_2 + i\dot{\bar{\psi}}_2\psi_2 \right. \\ &\left. + 2\omega_1\bar{\psi}_1\psi_1 + 2\omega_2\bar{\psi}_2\psi_2 \right], \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

APÉNDICE A. SUPERSIMETRÍA EN COMPONENTES
A.2. OSCILADORES SUPERSIMÉTRICOS ACOPLADOS

que es una versión supersimétrica de (A.13).

Suponiendo que las supercoordenadas Φ_1 y Φ_2 corresponden a la transformación de las supercoordenadas Φ y Υ , dictada por \mathcal{O} , es decir

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= u\Phi + v\Upsilon, \\ \Phi_2 &= -v\Phi + u\Upsilon.\end{aligned}\tag{A.20}$$

Entonces, al deshacer la rotación debemos obtener la lagrangiana de un sistema de osciladores supersimétricos acoplados

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{m}{2} [\bar{D}\Phi D\Phi - (\omega_1 u^2 + \omega_2 v^2)\Phi\Phi + \bar{D}\Upsilon D\Upsilon - (\omega_1 v^2 + \omega_2 u^2)\Upsilon\Upsilon \\ &\quad - 2uv(\omega_1 - \omega_2)\Phi\Upsilon],\end{aligned}\tag{A.21}$$

donde podemos identificar los coeficientes

$$\begin{aligned}a &= \frac{m}{2} = d, \\ b &= a(\omega_1 u^2 + \omega_2 v^2), \\ c &= 2auv(\omega_1 - \omega_2), \\ f &= a(\omega_1 v^2 + \omega_2 u^2).\end{aligned}\tag{A.22}$$

Usando los siguientes desarrollos de las supercoordenadas

$$\begin{aligned}\Phi(t, \theta, \bar{\theta}) &= q + i\theta\bar{\psi} + i\bar{\theta}\psi - \theta\bar{\theta}A, \\ \Upsilon(t, \theta, \bar{\theta}) &= Q + i\theta\bar{\chi} + i\bar{\theta}\chi - \theta\bar{\theta}B,\end{aligned}\tag{A.23}$$

y (A.6) encontramos que esta densidad conduce a la lagrangiana

$$\begin{aligned}L &= \frac{m}{2} \left[\dot{q}^2 - (\omega_1^2 u^2 + \omega_2^2 v^2)q^2 + \dot{Q}^2 - (\omega_1^2 v^2 + \omega_2^2 u^2)Q^2 \right. \\ &\quad - 2uv(\omega_1^2 - \omega_2^2)qQ + i\dot{\psi}\bar{\psi} + i\dot{\bar{\psi}}\psi + i\dot{\chi}\bar{\chi} + i\dot{\bar{\chi}}\chi \\ &\quad \left. + 2(\omega_1 u^2 + \omega_2 v^2)\bar{\psi}\psi + 2(\omega_1 v^2 + \omega_2 u^2)\bar{\chi}\chi + 2uv(\omega_1 - \omega_2)(\bar{\chi}\psi + \bar{\psi}\chi) \right],\end{aligned}\tag{A.24}$$

o, usando (A.11) y (A.14),

$$\begin{aligned}L &= \frac{m}{2} \left[\dot{q}^2 - \omega^2 q^2 + \dot{Q}^2 - \Omega^2 Q^2 + \frac{2}{\eta}qQ + i\dot{\psi}\bar{\psi} + i\dot{\bar{\psi}}\psi + i\dot{\chi}\bar{\chi} + i\dot{\bar{\chi}}\chi \right. \\ &\quad \left. + 2(\omega_1 u^2 + \omega_2 v^2)\bar{\psi}\psi + 2(\omega_1 v^2 + \omega_2 u^2)\bar{\chi}\chi + 2uv(\omega_1 - \omega_2)(\bar{\chi}\psi + \bar{\psi}\chi) \right],\end{aligned}\tag{A.25}$$

donde se aprecia fácilmente que se trata de una versión supersimétrica de (A.8).

Para un sistema de osciladores con masas distintas, debemos hacer un reescalamiento al nivel de las supercoordenadas: $\Upsilon = \sqrt{\frac{M}{m}}\hat{\Upsilon}$, donde $\hat{\Upsilon} = Q' + i\theta\bar{\chi}' + i\bar{\theta}\chi' - \theta\bar{\theta}B'$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{m}{2} [\bar{D}\Phi D\Phi - (\omega_1 u^2 + \omega_2 v^2)\Phi\Phi] + \frac{M}{2} [\bar{D}\hat{\Upsilon} D\hat{\Upsilon} - (\omega_1 v^2 + \omega_2 u^2)\hat{\Upsilon}\hat{\Upsilon}] \\ &\quad - \sqrt{mM}uv(\omega_1 - \omega_2)\Phi\hat{\Upsilon} \\ &\equiv \frac{m}{2} [\bar{D}\Phi D\Phi - \alpha\Phi^2] + \frac{M}{2} [\bar{D}\hat{\Upsilon} D\hat{\Upsilon} - \beta\hat{\Upsilon}^2] - \epsilon\Phi\hat{\Upsilon}.\end{aligned}\tag{A.26}$$

Sustituyendo en (A.21) y comparando con la forma general (A.2) podemos identificar los coeficientes

$$\begin{aligned} a' &= a, & f' &= \frac{M}{m}f, \\ b' &= b, & d' &= \frac{M}{m}d, \\ c' &= \sqrt{\frac{M}{m}}c, \end{aligned} \tag{A.27}$$

donde los coeficiente sin primar están dados por (A.22). Usando ahora la expresión (A.6) con estos coeficientes se obtiene la lagrangiana

$$\begin{aligned} L = & a \left[\dot{q}^2 - \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{4ad} \right) q^2 \right] - \sqrt{\frac{M}{m}}c \left[\frac{b}{a} + \frac{f}{d} \right] qQ' + \frac{M}{m}d \left[\dot{Q}'^2 - \left(\frac{f^2}{d^2} + \frac{c^2}{4ad} \right) Q'^2 \right] \\ & + a \left(i\dot{\psi}\bar{\psi} + i\dot{\bar{\psi}}\psi \right) + 2b\bar{\psi}\psi + \sqrt{\frac{M}{m}}c \left(\bar{\chi}'\psi + \bar{\psi}\chi' \right) + \frac{M}{m}d \left(i\dot{\chi}'\bar{\chi}' + i\dot{\bar{\chi}}'\chi' \right) + 2\frac{M}{m}f\bar{\chi}'\chi'. \end{aligned} \tag{A.28}$$

Podemos ver que el reescalamiento solo introduce algunos factores, dejando intacto el resto de combinaciones, así, sustituyendo los coeficientes (A.22) junto con (A.11) y (A.14) obtenemos finalmente la lagrangiana deseada

$$\begin{aligned} L = & \frac{m}{2} \left(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2 + i\dot{\psi}\bar{\psi} + i\dot{\bar{\psi}}\psi \right) + \lambda qQ' + \frac{M}{2} \left(\dot{Q}'^2 - \Omega^2 Q'^2 + i\dot{\chi}'\bar{\chi}' + i\dot{\bar{\chi}}'\chi' \right) \\ & + m(\omega_1 u^2 + \omega_2 v^2)\bar{\psi}\psi + M(\omega_1 v^2 + \omega_2 u^2)\bar{\chi}'\chi' + \sqrt{mM}uv(\omega_1 - \omega_2)(\bar{\chi}'\psi + \bar{\psi}\chi') \\ = & \frac{m}{2} \left(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2 \right) + \lambda qQ + \frac{M}{2} \left(\dot{Q}'^2 - \Omega^2 Q'^2 \right) + \frac{m}{2} \left(i\dot{\psi}\bar{\psi} + i\dot{\bar{\psi}}\psi \right) + \frac{M}{2} \left(i\dot{\chi}'\bar{\chi}' + i\dot{\bar{\chi}}'\chi' \right) \\ & + m\alpha\bar{\psi}\psi + M\beta\bar{\chi}'\chi' + \epsilon(\bar{\chi}'\psi + \bar{\psi}\chi'). \end{aligned} \tag{A.29}$$

A.3. Lagrangiana de Galley

Sea la densidad lagrangiana

$$\Gamma = a\bar{D}\Phi_- D\Phi_+ + b\bar{D}\Phi_+ D\Phi_- - c\Phi_+\Phi_-, \tag{A.30}$$

donde las supercoordenadas están dadas por

$$\Phi_{\pm} = q_{\pm} + i\theta\bar{\psi}_{\pm} + i\bar{\theta}\psi_{\pm} - \theta\bar{\theta}A_{\pm}. \tag{A.31}$$

La lagrangiana resultante es

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{a+b} \left[4ab\dot{q}_+\dot{q}_- + ic(a-b)(\dot{q}_-q_+ - \dot{q}_+q_-) - c^2q_+q_- \right] \\ & + a(i\dot{\bar{\psi}}_+\psi_- + i\dot{\psi}_-\bar{\psi}_+) + b(i\dot{\bar{\psi}}_-\psi_+ + i\dot{\psi}_+\bar{\psi}_-) + c(\bar{\psi}_-\psi_+ + \bar{\psi}_+\psi_-). \end{aligned} \tag{A.32}$$

Por simplicidad preferimos trabajar con la lagrangiana equivalente

$$\begin{aligned}
 L = & 4ab \left[\dot{q}_+ \dot{q}_- - \frac{c^2}{4ab} q_+ q_- \right] + ic(a-b) [\dot{q}_- q_+ - \dot{q}_+ q_-] \\
 & + (a+b) \left[a(i\dot{\psi}_+ \psi_- + i\dot{\psi}_- \bar{\psi}_+) + b(i\dot{\psi}_- \psi_+ + i\dot{\psi}_+ \bar{\psi}_-) + c(\bar{\psi}_- \psi_+ + \bar{\psi}_+ \psi_-) \right].
 \end{aligned} \tag{A.33}$$

Ahora identificamos el sector bosónico con la lagrangiana del oscilador amortiguado del Capítulo 2. Imponiendo la condición $a = b^*$, obtenemos

$$\begin{aligned}
 b &= \frac{\sqrt{m}}{2} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{\epsilon}{2\omega}\right)^2} + i\frac{\epsilon}{2\omega} \right], \\
 c &= \sqrt{m}\omega.
 \end{aligned} \tag{A.34}$$

Con estos coeficientes obtenemos finalmente

$$\begin{aligned}
 L = & m \left[\dot{q}_+ \dot{q}_- - \omega^2 q_+ q_- \right] + \frac{\epsilon m}{2} [\dot{q}_- q_+ - \dot{q}_+ q_-] \\
 & + (a+b) \left[a(i\dot{\psi}_+ \psi_- + i\dot{\psi}_- \bar{\psi}_+) + b(i\dot{\psi}_- \psi_+ + i\dot{\psi}_+ \bar{\psi}_-) + c(\bar{\psi}_- \psi_+ + \bar{\psi}_+ \psi_-) \right].
 \end{aligned} \tag{A.35}$$

Apéndice B

Pruebas

B.1. Integración de los términos de frontera

Definimos la acción de \neg sobre una supercoordenada Φ como

$$\neg\Phi \equiv \Phi|_{\theta, \bar{\theta}=0} = \int d\theta d\bar{\theta} \delta(\bar{\theta}) \delta(\theta) \Phi, \quad (\text{B.1})$$

la cual satisface

$$\neg(\Phi\Psi) = (\neg\Phi)(\neg\Psi). \quad (\text{B.2})$$

Podemos escribir la integración en el superespacio como

$$\int d\theta d\bar{\theta} \Phi = \frac{1}{2} \neg[D, \bar{D}] \Phi. \quad (\text{B.3})$$

Recordemos el álgebra de la derivadas covariantes

$$\begin{aligned} D\bar{D} + \bar{D}D &= 2i\partial_t, \\ D^2, \bar{D}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Luego, tenemos el siguiente caso particular

$$\begin{aligned} \int d\theta d\bar{\theta} D\Phi &= \frac{1}{2} \neg[D, \bar{D}] D\Phi = \frac{1}{2} \neg D\bar{D}D\Phi \\ &= \frac{1}{2} \neg(2i\partial_t - \bar{D}D) D\Phi = i \frac{d}{dt} (\neg D\Phi). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

En el último paso se ha cambiado el símbolo de derivada parcial por una derivada total porque \neg elimina la dependencia en las variables θ_i . Similarmente

$$\begin{aligned} \int d\theta d\bar{\theta} \bar{D}\Phi &= \frac{1}{2} \neg[D, \bar{D}] \bar{D}\Phi = -\frac{1}{2} \neg \bar{D}D\bar{D}\Phi \\ &= -\frac{1}{2} \neg(2i\partial_t - D\bar{D}) \bar{D}\Phi = -i \frac{d}{dt} (\neg \bar{D}\Phi). \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Bibliografía

- [1] Z.E. Musielak. *Chaos, Solitons & Fractals*. **42** (2009).
- [2] F. Riewe. *Phys. Rev. E*. **53** (1996).
- [3] C. Lanczos. *The Variational Principles of Mechanics* 4a. ed. University of Toronto Press. Toronto, 1970.
- [4] C.R. Galley. *Phys. Rev. Lett.* **110** (2013).
- [5] C.R. Galley, D. Tsang, L.C. Stein. arXiv:1412.3082 [math-ph].
- [6] K. Sundermeyer. *Constrained Dynamics, with Applications to Yang-Mills Theory, General Relativity, Classical Spin, Dual String Model*. Springer-Verlag. New York 1982.
- [7] B.K. Bagchi. *Supersymmetry in Quantum and Classical Mechanics*. Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. USA 2001.
- [8] C.A.P. Galvao, C. Teitelboim. *J. Math. Phys.* **21** (1980).
- [9] J.V. José, E.J. Saletan. *Classical Dynamics: a Contemporary Approach*. Cambridge University Press. New York 1998.
- [10] H. Goldstein, C.P. Poole, J.L. Safko. *Classical Mechanics*. 3a. ed. Addison-Wesley. USA 2001.
- [11] L.Y. Bahar, H.G. Kwatny. *Am. J. Phys.* **49** (1981).
- [12] H. Bateman. *Phys. Rev.* **38** (1931).
- [13] A. Choudhuri, S. Ghosh, B. Talukdar. *Pramana*. **70**. (2008).
- [14] R. Banerjee, P. Mukherjee. *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** (2002).
- [15] S. Bayin. *Mathematical Methods in Science and Engineering*. John Wiley & Sons. Hoboken, New Jersey 2006.
- [16] C. Ramírez, P.A. Ritto. *Rev. Mex. Fis.* **49** (2003).
- [17] M. Henneaux, C. Teitelboim. *Quantization of Gauge Systems*. Princeton University Press. Princeton, New Jersey 1994.

- [18] R.L. Rodrigues, W.P. Almeida, I.F. Neto. hep-th/0201242.
- [19] S. Bellucci. Supersymmetric Mechanics. Lecture Notes in Physics. Springer Berlin Heidelberg. New York 2006.
- [20] M. Salmhofer. Renormalization, an Introduction. Springer Berlin Heidelberg. New York 2007.
- [21] P.O. Freund. Introduction to Supersymmetry. Cambridge University Press. New York 1986.