



# BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS  
LICENCIATURA EN FÍSICA

ESTUDIO Y ANÁLISIS DEL VUELO LONGITUDINAL DE UNA  
AERONAVE

TESIS PRESENTADA COMO REQUISITO PARA OBTENER EL  
TÍTULO DE:  
LICENCIADO EN FÍSICA

PRESENTA  
JAVIER HERRERA MARTÍNEZ

DIRECTORES DE TESIS  
DR. W. FERMÍN GUERRERO SÁNCHEZ  
DR. VLADIMIR ALEXANDROV K.

PUEBLA, PUE.

ABRIL 2015



Dedicatoria



# Agradecimientos

Texto



# Resumen

En esta investigación se hace un análisis de la mecánica de vuelo de una aeronave. Se parte del análisis y desarrollo de las doce ecuaciones que describen la dinámica de una aeronave. Este trabajo continúa con la linealización de estas ecuaciones a partir de la teoría de pequeñas perturbaciones para representar la dinámica de vuelo longitudinal en el espacio de estados, separando este en sus modos fugoide y corto. Se aborda el desarrollo de las derivadas de estabilidad longitudinales presentes en el espacio de estados. Por último se analizan parámetros de diferentes perfiles aerodinámicos y se diseñan dos prototipos de aeronaves en el programa XFLR5.



# Introducción

En esta investigación se analiza la física y se describe la matemática presente en el vuelo de una aeronave de alas fijas. La historia de la aeronáutica comprende relatos e historias donde los hombres eran capaces de volar que datan desde la antigüedad, pasando en la edad media por el primer intento científico de vuelo llevado a cabo por Abbas Ibn Fernas y en el renacimiento por los diseños de Leonardo Da Vinci. En la época moderna el primer intento éxito de elevar una máquina más pesada que el aire fueron los deslizadores diseñados por Sir George Cayley. Algunos diseños más ambiciosos fueron construidos como el avión construido en 1894 por Sir Hiram Maxim 3200 kg y se extendía 30 m. Desde los primeros vuelos de Otto Lilienthal en la década de 1890, hasta los vuelos de los hermanos Wright los planeadores y aeronaves livianas sufrieron una evolución rápida. En menos de tres décadas el desarrollo de aeronaves pasó intentos de vuelo de escasos 100 metros a vuelos transcontinentales. La revolución de tecnologías computacionales y su implementación en las aeronaves, una carrera armamentística y tecnológica producto de un mundo polarizado ayudó en el diseño y desarrollo de la aeronáutica en la segunda mitad del siglo XX [1]. En la actualidad el estudio de los vehículos aéreos está en una amplia creciente, debido a las grandes ventajas que representa el desplazamiento en el espacio aéreo, esto conlleva a que se desarrollen nuevos y mejores vehículos aéreos y también que cuenten con los instrumentos necesarios para un vuelo óptimo, facilitando la tarea del piloto o que estos instrumentos permitan que sea autónomo. En la actualidad las tendencias apuntan hacia el desarrollo de ahorro de combustible en motores, así como combustibles alternativos, tecnologías de uso dual y restringido y el desarrollo de unidades aéreas no tripulada .

En México, empresas como GE y Honeywell realizan trabajos de investigación y desarrollo de nuevas turbinas, La aerolínea mexicana Interjet fue la primera empresa en el continente que realizó vuelos comerciales con biocombustible , al mismo tiempo algunas empresas se han enfocado a la manufactura y desarrollo de UAVs en el país. El crecimiento de tecnología aérea ha crecido rápidamente en el país en la última década, la industria aeroespacial crece 20% cada año, existen 267 empresas, de las cuales el 10% se dedica a la investigación y desarrollo.

En este trabajo el primer capítulo aborda la cinemática de traslación y la dinámica rotacional de una aeronave, haciendo la suposición de que el lector tiene conocimientos del empleo de matrices de rotación en los sistemas de referencia presentes en una aeronave. En el segundo capítulo se muestra cual es la forma de las fuerzas aerodinámicas presentes en una aeronave y se completa el desarrollo de las doce ecuaciones de la dinámica de vuelo. En el capítulo tres se trabaja con las ecuaciones longitudinales obteniendo su linealización a través de la teoría de pequeñas perturbaciones, y transcribiéndolas en la forma del espacio de estados. Para completar este estudio se desarrollan los cálculos en torno al cambio de las fuerzas respecto a diferentes variables obteniendo de esta forma las derivadas de estabilidad. Más adelante se obtienen las aproximaciones lineales de periodo corto y periodo largo para el vuelo longitudinal. Después se analizan parámetros aerodinámicos de perfiles NACA y se diseñan dos prototipos de aeronaves en el software XLFR5. Finalmente se presentan las conclusiones.

# Índice general

Resumen	I
Introducción	III
<b>1. Cinemática y Dinámica de la aeronave</b>	<b>1</b>
1.1. Variables de estado . . . . .	1
1.2. Cinemática traslacional . . . . .	2
1.3. Cinemática rotacional . . . . .	2
1.3.1. Movimiento de traslación. . . . .	3
1.3.2. Movimiento rotacional . . . . .	4
<b>2. Fuerzas y momentos</b>	<b>7</b>
2.1. Fuerzas Gravitacionales . . . . .	7
2.2. Fuerzas, Momentos y Coeficientes aerodinámicos . . . . .	8
2.2.1. Vuelo de un avión . . . . .	10
2.2.2. Modelo matemático de un perfil . . . . .	12
2.3. Superficies de control . . . . .	13
2.4. Fuerzas aerodinámicas longitudinales . . . . .	15
2.4.1. Fuerzas de propulsión . . . . .	17
2.4.2. Ecuaciones no lineales de movimiento. . . . .	18
<b>3. Linealización y estabilidad.</b>	<b>21</b>
3.1. Linealización . . . . .	21
3.2. Estabilidad . . . . .	29
3.3. Derivadas de estabilidad . . . . .	32
3.3.1. $C_{x_u}$ . . . . .	33
3.3.2. $C_{x_\alpha}$ . . . . .	35
3.3.3. $C_{z_u}$ . . . . .	38

3.3.4.	$C_{Z\alpha}$	40
3.3.5.	$C_{Z\dot{\alpha}}$	40
3.3.6.	$C_{Z\delta_e}$	42
3.3.7.	$C_{m_u}$	43
3.3.8.	$C_{m\alpha}$	43
3.3.9.	$C_{m\dot{\alpha}}$	47
3.3.10.	$C_{m_q}$	47
3.3.11.	$C_{m\delta_e}$	48
3.4.	Aproximación longitudinal	49
3.4.1.	Periodo largo	51
3.4.2.	Periodo corto	53
<b>4.</b>	<b>Resultados Numéricos</b>	<b>55</b>
4.1.	Análisis de perfiles.	55
4.2.	Diseño de aeronaves longitudinalmente estables.	69
4.3.	Conclusiones	74
<b>A.</b>	<b>Matrices de rotación y sistemas de referencia.</b>	<b>77</b>
A.1.	Matrices de rotación	77
A.2.	Ángulos de Euler	79
A.2.1.	Ángulos de Euler ZXZ	79
A.2.2.	Ángulos de Euler ZYZ	80
A.2.3.	Roll, Pitch y Yaw (alabeo, cabeceo y guineada)	81
A.3.	Sistemas inerciales.	82
A.3.1.	Sistema inercial $F^i$	82
A.3.2.	El sistema inercial vehicular $F^v$	82
A.3.3.	El sistema inercial vehículo-1 $F^{v1}$	82
A.3.4.	El sistema inercial vehículo-2 $F^{v2}$	84
A.3.5.	El sistema inercial de cuerpo $F^b$	85
A.3.6.	El sistema inercial de estabilidad $F^s$	86
A.3.7.	El sistema inercial relativo al viento $F^w$	87
A.3.8.	Velocidad Aerodinámica, Velocidad del viento y velocidad de grupo.	88
	<b>Bibliografía</b>	<b>94</b>





**Estudio y análisis del vuelo longitudinal de  
una aeronave**

**Javier Herrera Martínez**

Febrero 2015



# Capítulo 1

## Cinemática y Dinámica de la aeronave

En este capítulo se presenta el desarrollo de la cinemática de una aeronave, este es el resultado de una relación entre variables de estado a través de matrices de rotación [2]. La dinámica de traslación es un poco más compleja en ella se presenta a la aeronave como un cuerpo rígido en movimiento. Con este planteamiento se parte de la segunda ley de Newton aplicada a los grados de libertad de traslación y rotación, obteniendo los seis grados de libertad y los doce estados necesarios para modelar la cinemática y la dinámica de una aeronave, en estas ecuaciones las fuerzas externas aparecen en una forma muy general, en sentido de que no son descritas por completo en este capítulo.

### 1.1. Variables de estado

Para desarrollar las ecuaciones de movimiento de la aeronave se introducen 12 variables definidas en los sistemas de referencia asociados a una aeronave [3]. Se tienen tres estados asociados a la velocidad y tres estados asociados a la posición, y tres velocidades angulares asociadas al movimiento rotacional. Estos estados son presentados en la siguiente tabla

Nombre	Descripción
$p_n$	Posición Inercial del eje norte de la aeronave a lo largo de $i^i$ en $F^i$
$p_e$	Posición Inercial del eje este de la aeronave a lo largo de $j$ en $F^i$
$p_d$	Posición inercial del eje altitud de la aeronave a lo largo de $K^i$ en $F^i$
$u$	Velocidad en el sistema Inercial $F^b$ a lo largo de $i^b$
$v$	Velocidad en el sistema Inercial $F^b$ a lo largo de $j^b$
$w$	Velocidad en el sistema Inercial $F^b$ a lo largo de $k^b$
$\phi$	Ángulo Roll respecto a $F^{v2}$
$\theta$	Ángulo Pitch respecto a $F^{v1}$
$\psi$	Ángulo Yaw respecto a $F^v$
$p$	velocidad angular de Roll medido a lo largo de $i^b$ en $F^b$
$q$	velocidad angular de Pitch medido a lo largo de $j^b$ en $F^b$
$r$	velocidad angular de Yaw medido a lo largo de $i^b$ en $F^b$

## 1.2. Cinemática traslacional

Los componentes  $u, v$  y  $w$  corresponden a la velocidad inercial del vehículo proyectado en los ejes  $i^b, j^b$ , y  $k^b$  repectivamente, por otro lado, la posición traslacional de la aeronave es medida y expresada en el sistema inercial  $F^i$ . Relacionamos las velocidades y posiciones traslacionales, a través de las ma-

trices de rotación. 
$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p_n \\ p_e \\ p_d \end{pmatrix} = R_b^v \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = (R_v^b)^T \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

Usando la matriz de rotación en su forma explícita [2].

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_n \\ \dot{p}_e \\ \dot{p}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \cos \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

## 1.3. Cinemática rotacional

La relación entre  $p, q, r$  y  $\phi, \psi, \theta$  es complicada debido a que están definidas en diferentes sistemas inerciales, los rangos angulares en  $F^b$  pueden ser expresados en terminos de las derivadas de los ángulos de Euler, siempre que la transformación de rotación se realice de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + R_{v2}^b(\phi) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + R_{v2}^b(\phi) R_{v1}^{v2}(\theta) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Invirtiendo la expresión anterior

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix}$$

La cual expresa las derivadas de las tres posiciones de estados de posición angular  $\phi$  y  $\theta$ , y las velocidades angulares  $p, q, r$ .

### 1.3.1. Movimiento de traslación.

La segunda ley de Newton aplicada a un cuerpo que experimenta un movimiento de traslación se puede establecer como

$$m \frac{dV_g}{dt_i} = F$$

Donde  $m$  es la masa de la aeronave, las fuerzas externas sobre la aeronave incluyen la gravedad, las fuerzas aerodinámicas, y las fuerzas de propulsión.

La derivada de la velocidad tomada en el sistema inercial puede ser escrita en términos de la derivada en el sistema inercial vehicular, y la velocidad angular de acuerdo con la ecuación

$$\frac{d}{dt_i} p = \frac{d}{dt_b} p + \omega_{b/i} \times p.$$

puede ser escrita como

$$\frac{d}{dt_i} V_g = \frac{d}{dt_b} V_g + \omega_{b/i} \times V_g$$

Donde  $\omega_{b/i}$  es la velocidad angular de la aeronave con respecto al sistema inercial, combinando las ecuaciones anteriores obtenemos

$$m \left( \frac{d}{dt_b} V_g + \omega_{b/i} \times V_g \right) = F$$

En el caso de una aeronave, se puede aplicar más fácilmente la segunda ley de Newton mediante la expresión de las fuerzas y velocidades en el sistema

$F^b$  como.

$$m\left(\frac{d}{dt_b}V_g^b + \omega_{b/i}^b \times V_g^b\right) = F^b$$

Donde  $V_g^b = (u, v, w)^T$  y  $\omega_{b/i}^b = (p, q, r)^T$ . El vector  $F^b$  representa la suma de las fuerzas externas aplicadas y es definido en términos del sistema inercial del cuerpo como  $F^b = (F_x, f_y, F_z)^T$ . La expresión  $\frac{d}{dt_b}V_g^b$  es el rango de cambio de la velocidad expresado en el sistema inercial de cuerpo  $F^b$ , visto por un observador en el móvil. Puesto que  $u, v$  y  $w$  son la proyección instantánea de  $V_g^b$  en los ejes  $i^b, j^b$ , se deduce que.

$$\frac{d}{dt_b}V_g^b = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix}$$

Expandiendo el producto cruz de la ecuación  $m\left(\frac{d}{dt_b}V_g^b + \omega_{b/i}^b \times V_g^b\right) = F^b$  tenemos que

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rv - qw \\ pw - ru \\ qu - pv \end{pmatrix} + \frac{1}{m} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

### 1.3.2. Movimiento rotacional

Para la mecánica rotacional, de la Segunda ley de Newton se parte de

$$\frac{dh}{dt_i} = m$$

Donde  $h$  es el momento angular, y  $m$  son todos los momentos externos aplicados, podemos expandir esta ecuación obteniendo

$$\frac{dh}{dt_i} = \frac{dh}{dt_b} + \omega_{b/i} \times h = m$$

Expresado en el sistema de cuerpo

$$\frac{dh^b}{dt_b} + \omega_{b/i}^b \times h^b = m^b$$

Para un cuerpo rígido el momento angular está definido como el producto de la matriz de inercia  $J$  y el vector de velocidad angular como  $h^b = J\omega_{b/i}^b$  la matriz  $J$  está dada como

$$J = \begin{pmatrix} \int (y^2 + z^2)dm & -\int xydm & -\int xzdm \\ -\int xydm & \int (x^2 + z^2)dm & -\int yzdm \\ -\int xzdm & -\int yzdm & \int (x^2 + y^2)dm \end{pmatrix}$$

$$\triangleq \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{pmatrix}$$

Los terminos encontrados en la diagonal en esta matriz son llamados momentos de inercia, mientras que los que se encuentran fuera de esta son los productos de inercia.

Debido a que las integrales en la matriz se calculan respecto a los ejes  $i^b, j^b, k^b$  en el cuerpo rígido,  $J$  es constante cuando se ve desde el sistema de referencia  $F^b$ . Tomando las derivadas y sustituyendo en la ecuación se obtiene

$$J \frac{d\omega_{b/i}^b}{dt_b} + \omega_{b/i}^b \times (J\omega_{b/i}^b) = m^b$$

La expresión  $\frac{d\omega_{b/i}^b}{dt_b}$  es el rango de cambio de la velocidad angular expresada en terminos del sistema  $F^b$ . Ya que  $p, q, r$  son las proyecciones de  $\omega_{b/i}^b$  en los ejes  $i^b, j^b, k^b$ , se tiene entonces

$$\dot{\omega}_{b/i}^b = \frac{d\omega_{b/i}^b}{dt_b} = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix}$$

Obteniendo la ecuación

$$\dot{\omega}_{b/i}^b = J^{-1}[-\omega_{b/i}^b \times (J\omega_{b/i}^b) + m^b]$$

Una aeronave generalmente es simétrica respecto al plano  $i^b$  y  $j^b$  en ese caso  $J_{xy} = J_{yz} = 0$  lo cual implica que

$$J = \begin{pmatrix} J_x & 0 & -J_{xz} \\ 0 & J_y & 0 \\ -J_{xz} & 0 & J_z \end{pmatrix}$$

Definiendo los componentes del Momento aplicado externamente sobre los ejes  $k^b, i^b, j^b$ , como  $m^b \triangleq (l, m, n)^T$  podemos escribir la ecuación

$$\dot{\omega}_{b/i}^b = J^{-1}[-\omega_{b/i}^b \times (J\omega_{b/i}^b) + m^b]$$

en forma de sus componentes, como

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{J_z}{\Gamma} & 0 & \frac{J_{xz}}{\Gamma} \\ 0 & \frac{1}{J_y} & 0 \\ \frac{J_{xz}}{\Gamma} & 0 & \frac{J_x}{\Gamma} \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 0 & r & q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x & 0 & -J_{xz} \\ 0 & J_y & 0 \\ -J_{xz} & 0 & J_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} \frac{J_z}{\Gamma} & 0 & \frac{J_{xz}}{\Gamma} \\ 0 & \frac{1}{J_y} & 0 \\ \frac{J_{xz}}{\Gamma} & 0 & \frac{J_x}{\Gamma} \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} J_{xz}pq + (J_y - J_z)qr \\ J_{xz}(r^2 - p^2) + (J_z - J_x)pr \\ (J_x - J_y)pq - J_{xz}qr \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} \Gamma_1 pq - \Gamma_2 qr + \Gamma_3 l + \Gamma_4 n \\ \Gamma_1 pq - \Gamma_6(p^2 - r^2) + \frac{1}{J_y} m \\ \Gamma_7 pq - \Gamma_1 qr + \Gamma_4 l + \Gamma_8 n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donde  $\Gamma \triangleq J_x J_z - J_{xz}^2$

$$\Gamma_1 = \frac{J_{xz}(J_x - J_y + J_z)}{\Gamma}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_2 &= \frac{J_z(J_z - J_y) + J_{xz}^2}{\Gamma} \\
\Gamma_3 &= \frac{J_z}{\Gamma} \\
\Gamma_4 &= \frac{J_{xz}}{\Gamma} \\
\Gamma_5 &= \frac{J_z - J_x}{J_y} \\
\Gamma_6 &= \frac{J_{xz}}{J_y} \\
\Gamma_7 &= \frac{(J_x - J_y)J_x + J_{xz}^2}{\Gamma} \\
\Gamma_8 &= \frac{J_x}{\Gamma}
\end{aligned}$$

Los seis grados de libertad y los doce estados para modelar la cinemática y dinámica de una aeronave están dados en las siguientes ecuaciones.

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_n \\ \dot{p}_e \\ \dot{p}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_\theta C_\psi & C_\theta S_\psi & -S_\theta \\ S_\phi S_\theta C_\psi - C_\phi S_\psi & S_\phi S_\theta S_\psi + C_\phi C_\psi & S_\phi C_\theta \\ C_\phi C_\theta C_\psi + S_\phi S_\psi & C_\phi S_\theta S_\psi - S_\phi C_\psi & C_\phi C_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rv - qw \\ pw - ru \\ qu - pv \end{pmatrix} + \frac{1}{m} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_1 pq - \Gamma_2 qr + \Gamma_3 l + \Gamma_4 n \\ \Gamma_1 pq - \Gamma_6 (p^2 - r^2) + \frac{1}{J_y} m \\ \Gamma_7 pq - \Gamma_1 qr + \Gamma_4 l + \Gamma_8 n \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Estas ecuaciones representan la dinámica de una aeronave, están incompletas en el sentido de que las fuerzas externas aplicadas y los momentos externos no están definidos. Algunos momentos debidos a la gravedad, y propulsión serán deducidos más adelante.

# Capítulo 2

## Fuerzas y momentos

Se han mencionado las fuerzas externas actuando sobre la aeronave, presentando a estas como el vector  $(fx, fy, fz)$ , las ecuaciones que describen la dinámica de vuelo se presentaron anteriormente incompletas, aún no se expone cual es la forma de las fuerzas aerodinámicas, la fuerza de propulsión, y la influencia de las superficies de control. Estas ecuaciones deben estar definidas en el sistema inercial de cuerpo  $F^b$ , por lo cual el vector de la fuerza gravitacional se reescribe. Con el método usado para describir las fuerzas aerodinámicas, las fuerzas que actúan sobre la aeronave, la sustentación, el arrastre, y los torques quedan escritos en una forma muy similar, en este punto se introducirá el coeficiente aerodinámico, del cual dependerán todas estas fuerzas y torques. También se describe la forma de la fuerza inducida por el motor, que en este modelo se limita solo actúa sobre el eje x del sistema de cuerpo  $F^b$ ; y por último el papel de las superficies de control las cuales actúan sobre la aeronave creando los torques necesarios para inducir giros en tres de los seis grados de libertad de la aeronave; con esa información se completa la descripción general de las ecuaciones que describen la mecánica de vuelo presentadas al final de este capítulo.

### 2.1. Fuerzas Gravitacionales

Es valido pensar que en este modelo la fuerza gravitacional solo actuará sobre el centro de masas de la aeronave; debido a esto, la fuerza gravitacional no producirá ningún torque sobre la aeronave, sin embargo actuará sobre las fuerzas externas sobre la aeronave y tendrá componentes

con cada uno de los respectivos ejes sobre el cuerpo de la aeronave, los componentes de dicha fuerza serán función de la posición de la aeronave. Visto desde el sistema vehicular  $F^v$  la gravedad actuando sobre el centro de masas puede describirse de la siguiente manera

$$f_{gravedad}^v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix}$$

Aplicando la segunda ley de Newton, es decir sumando las fuerzas en el sistema  $F^b$  y por tanto transformando el vector  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix}$  al sistema de cuerpo, se obtiene

$$f_{gravedad}^b = R_v^b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix}$$

Donde  $R_v^b$  es la matriz de rotación

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$f_{gravedad}^b = \begin{pmatrix} -mg \sin \theta \\ mg \cos \theta \sin \phi \\ mg \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix}$$

Ya que la fuerza de la gravedad actúa a través del centro de masa de la aeronave, no hay torques producidos por esta fuerza.

## 2.2. Fuerzas, Momentos y Coeficientes aerodinámicos

El análisis de los fenómenos ligados con la corriente uniforme de un medio gaseoso alrededor de un vehículo volante, permite llegar a la conclusión de la

fuerza de resistencia  $F$  que actúa sobre dicho vehículo, es función de la densidad  $\rho$ , la velocidad del vehículo  $V$ , la viscosidad del fluido  $\mu$ , la aceleración gravitacional  $g$ , la longitud del cuerpo (la envergadura de un ala por ejemplo)  $l$ , y la velocidad del sonido en el medio  $a$ , además sobre la resistencia influyen el ángulo de ataque  $\alpha$  [4], de este modo

$$F = F(\rho, \mu, V, l, g, a, \alpha)$$

En base a un análisis dimensional [5] esta formula también se puede expresar por medio de una dependencia exponencial.

$$F = k\rho^a\mu^bV^cl^dg^ea^f\alpha$$

donde  $K$  es un coeficiente de proporcionalidad.

Las unidades de la fuerza, Newtons, tienen unidades de Longitud  $L$ , Masa  $M$ ; y tiempo  $T^{-2}$ , por lo cual la función  $f_0$ , con los exponentes  $a, b, c, d, e, f$ , y las unidades de las variables  $\rho, \mu, V, l, g, a$ , nos darán una función que da como resultado las unidades  $LMT^{-2}$ , a continuación se presentan las unidades

Densidad	$[\rho] = [L^{-3}][M]$
Viscosidad del aire	$[\mu] = [L^{-1}][M][T^{-1}]$
Velocidad del viento circundante	$[V] = [L][T^{-1}]$
Tamaño del cuerpo	$[l] = [L]$
Gravedad	$[g] = [L][T^{-2}]$
Velocidad del sonido	$[a] = [L][T^{-1}]$

El análisis dimensional plantea que la dimensión de la fuerza debe corresponder con la dimensión de la formula de dependencia exponencial

$$[F] = k[\rho]^a[\mu]^b[V]^c[l]^d[g]^e[a]^f\alpha$$

Con la información de la tabla anterior, expresando esta ecuación en unidades de longitud, masa y tiempo ( $L, M, T$ ) se encuentra la forma de esta dependencia lineal

$$\begin{aligned} [F] &= [M][L][T^{-2}] \\ &= k[\rho]^a[\mu]^b[V]^c[l]^d[g]^e[a]^f\alpha = \\ k[[L^{-3}][M]]^a[[L^{-1}][M][T^{-1}]]^b[[L][T^{-1}]]^c[L]^d[[L][T^{-2}]]^e[[L][T^{-1}]]^f\alpha & \\ &= k[L^{-3a-b+c+d+e+f}][M^{a+b}][T^{-b-c-2e-f}]\alpha \\ \Rightarrow [M][L][T^{-2}] &= [L^{-3a-b+c+d+e+f}][M^{a+b}][T^{-b-c-2e-f}] \end{aligned}$$

Tomando en cuenta solo los exponentes de la ecuación anterior se puede formar el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 1 &= -3a - b + c + d + e + f \\ 1 &= a + b \\ -2 &= -b - c - 2e - f \end{aligned}$$

De este sistema se obtiene

$$F = K \rho^{(1-b)} u^b V^{(2-b-2e-f)} l^{(2-b+c)} g^e a^f \alpha = k \rho (u/\rho V l)^b V^2 l^2 (a/V)^f (lG/V^2)^e \alpha$$

en la última ecuación los números entre paréntesis son los números de Reynolds  $Re$ , Froude  $Fr$  y Mach  $M$  [3].

Así la expresión para la fuerza de resistencia puede expresarse en la forma  $F = \rho V^2 L^2 K \Theta(Re, M, Fr, \alpha)$ , donde  $\Theta$  es la función de el ángulo  $\alpha$  y de los números  $Re, Fr, M$ .

La forma general de interacción de las fuerzas aerodinámicas es de la forma

$$F = \frac{1}{2} C S \rho V^2 \quad (2.1)$$

donde  $C$  es el coeficiente de resistencia y  $S$  el área característica del sólido. Igualando  $\rho V^2 L^2 K \Theta(Re, M, Fr, \alpha) = \frac{1}{2} C S \rho V^2$  se concluye que

$$C = \Theta(Re, M, Fr, \alpha)$$

La forma de  $C$  se determina de modo experimental o mediante métodos numéricos, como resultado de investigaciones teóricas de la corriente alrededor de los cuerpos de la forma prefijada. Definimos como coeficiente aerodinámico de cualquier fuerza aerodinámica  $F$  al cociente entre la magnitud de esta entre el producto de la presión dinámica por el área característica  $S$ .

### 2.2.1. Vuelo de un avión

Un perfil aerodinámico es la sección transversal de un ala, la forma de un perfil aerodinámico parecida a una gota de agua cayendo por la acción gravitacional, no es una constante de diseño por estética o casualidad, esta forma tan característica de un perfil aerodinámico divide un fluido en el viento que pasa a lo largo de la parte superior del perfil (extradós) y el viento

que pasa por la parte inferior del perfil (intradós). La forma de este perfil aerodinámico curvada en el extradós y menos pronunciada en el intradós produce un cambio de velocidades en el fluido que interacciona con el perfil y se divide entre el fluido superior e inferior. El principio de Bernoulli relaciona el aumento de la velocidad del flujo del fluido con la disminución de presión y viceversa. Por tanto si se quiere obtener una fuerza resultante capaz de elevar el perfil aerodinámico se necesita que la velocidad del viento en la parte superior del perfil sea mayor que la velocidad del viento en la parte inferior, solo de esta manera es capaz de volar una aeronave [6]. De hecho un perfil aerodinámico no solo desarrolla una fuerza de sustentación, sino también una fuerza de arrastre que debe ser mucho menor a la fuerza de sustentación, de lo contrario el perfil aerodinámico se frenaría a sí mismo haciendo imposible alcanzar una velocidad capaz de elevar el ala de la aeronave. Junto con la sustentación  $L$  (de la palabra Lift en ingles) y el arrastre  $D$  (Drag), aparece también un torque  $m$  (ya que en ingles es común referirse a este último como momento de una fuerza) sobre el perfil aerodinámico como resultado de su interacción con el viento y la tendencia de este a girar.

Considerando un plano longitudinal, el efecto de la presión actuando sobre la aeronave puede modelarse usando las fuerzas de arrastre (*drag*), elevación (*lift*), y momento ( $m$ ) [3]. Como es de esperarse la forma de estas fuerzas es determinada por medio de un análisis dimensional de forma similar al ejemplo anterior.

$$\begin{aligned} F_{lift} &= \frac{1}{2}\rho V_a^2 S C_L \\ F_{drag} &= \frac{1}{2}\rho V_a^2 S C_D \\ m &= \frac{1}{2}\rho V_a^2 S c C_m \end{aligned}$$

Donde  $C_L$ ,  $C_D$  y  $C_m$  son sus respectivos coeficientes aerodinámicos de elevación, arrastre, y momento; y  $c$  la cuerda del ala de la aeronave [3].

Para los perfiles de ala en general los coeficientes de momento de elevación, arrastre y cabeceo son influenciados de manera significativa por la forma, número de Reynolds, número de Mach y del ángulo de ataque. Para el rango de velocidad del flujo de aire en aeronaves pequeñas y miniatura, el número de Reynolds y efectos número Mach es aproximadamente constante.

Vamos a considerar los efectos de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  las velocidades angulares  $p$ ,  $q$ , y  $r$  y la deformación de las superficies de control de los coeficientes aerodinámicos.

### 2.2.2. Modelo matemático de un perfil

Existen perfiles diseñados a partir de la teoría basada en el comportamiento de una circunferencia en medio de un fluido el ejemplo de estos son los perfiles tipo Zhukovski. Con el avance tecnológico, en el siglo XX se da un gran avance en esta investigación y de aquí se obtienen los perfiles NACA (National Advisory Committee for Aeronautics) de cuatro y cinco cifras. En un perfil aéreo hay factores a considerar [7], estas cualidades aerodinámicas son las siguientes :

- La forma de su línea de curvatura media.
- La máxima comba.
- El espesor relativo.
- La posición del espesor máximo con relación a la cuerda.
- La curvatura del extradós y el intradós.

En la teoría para trazar un perfil NACA de 4 dígitos [5] se toma la cuerda de este como el eje donde se ubicaran las abscisas, a cada una de estas le corresponderá una ordenada sobre la línea media del perfil cuya ecuación es  $y_c$ .

$$y_c = \frac{m}{(1-p^2)}((1-2p) + 2px - x^2)$$

En estas ecuaciones  $m$  es la máxima comba del perfil y  $p$  es la posición de esta, ubicada sobre la cuerda de este.

Para obtener el intradós y estrados sobre  $y_c$  se superponen con una ecuación de distribución del espesor  $y_t$  del perfil alar

$$y_t = \frac{t}{0,2}(0,2969\sqrt{x} - 0,1260x - 0,3516x^2 + 0,2843x^3 - 0,1015x^4)$$

En esta ecuación  $t$  es el espesor máximo del perfil. En cada punto podemos encontrar la pendiente correspondiente a esta curva a través de la derivada de  $y_c$  en este punto.

El valor de esta pendiente es determinante, ya que nos brinda un ángulo  $Q$  a través del cual podemos obtener un factor dependiente de  $\cos\theta$  y  $\sin\theta$  para la superposición de  $Y_c$ , y  $X$  con  $y_t$ .

$$X_u = x - y_t \sin \theta$$

$$Y_u = y_c + y_t \cos \theta$$

$$X_L = x + y_t \sin \theta$$

$$Y_L = y_c - y_t \cos \theta$$

$$\text{donde } \theta = \arctan\left(\frac{dy_c}{dx}\right)$$

Las coordenadas  $(X_u, Y_u)$  y  $(X_L, Y_L)$  forman los puntos con los cuales se formarán las curvas de Extradós y los intradós

Cuando  $y_c$  es una línea recta obtenemos un perfil simétrico que corresponde a la ecuación  $y_t$ , y podrá variar cambiando el valor del espesor  $t$ .

En la serie NACA de 4 dígitos, estos cuatro dígitos son parámetros geométricos, el primero es  $m$ , dado en porcentajes de la cuerda, el segundo es  $p$ , dado en decimos de la cuerda, y el tercero es  $t$ , dado nuevamente en porcentajes de la cuerda.

Más adelante los perfiles NACA de 4 dígitos serán los principales perfiles de trabajo en esta investigación.

## 2.3. Superficies de control

Antes de describir por completo las fuerzas aerodinámicas y momentos producidos por las superficies de sustentación necesitamos describir las superficies de control que serán usadas en las maniobras de una aeronave.

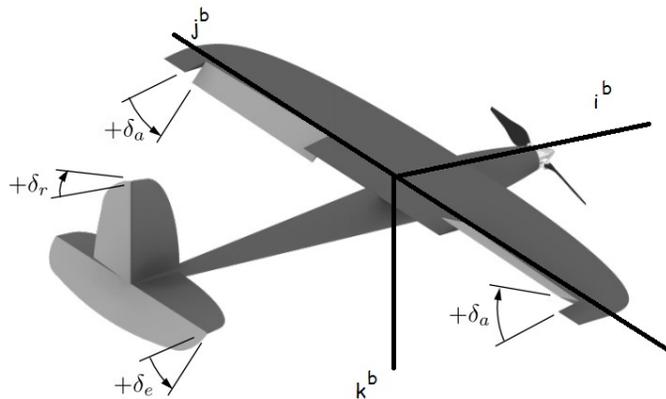


Figura 2.1: Superficies de control, los alerones son usados para el control del ángulo  $\phi$ , los elevadores para controlar el ángulo  $\theta$ , y el timón para controlar el ángulo  $\psi$

La imagen 2.1 muestra cual es la configuración típica de una aeronave, el alerón de deflexión es denotado por  $\delta_a$ , el elevador de deflexión es denotado por  $\delta_e$ , y el timón de deflexión es denotado por  $\delta_r$ . La dirección positiva de una superficie de control de deflexión es determinada aplicando la regla de la mano derecha al eje en rotación asociado a la superficie de control.

Podemos pensar en el alerón de deflexión como una composición de deflexiones debidas a los alerones izquierdo y derecho, definiendo la siguiente expresión

$$\delta_a = \frac{1}{2}(\delta_{a-left} - \delta_{a-right})$$

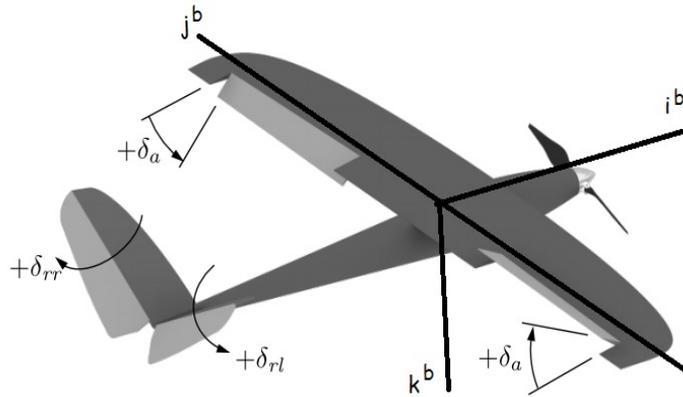


Figura 2.2: En esta imagen se aprecian los timo-elevadores, usados para producir el mismo movimiento que un timón y un elevador, en una sola superficie de control

Los timo-elevadores  $\delta_r$ , vease la imagen 2, producen una deflexión en el eje  $K^b$  del sistema de cuerpo de la aeronave  $F^b$ , una composición en los timo-elevadores izquierdo y derechos puede producir un torque sobre el eje  $j^b$ ; matemáticamente podemos expresar estos cambios como

$$\begin{pmatrix} \delta_e \\ \delta_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{rr} \\ \delta_{rl} \end{pmatrix}$$

Un efecto similar, se produce al hacer una diferencia entre los elevones, como lo muestra la figura 3, los elevones producen el mismo efecto sobre la que producen los alerones y elevadores sobre la aeronave, es decir, un torque a lo largo del eje  $I^b$ . Matemáticamente la relación se expresa de la manera siguiente

$$\begin{pmatrix} \delta_e \\ \delta_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{er} \\ \delta_{el} \end{pmatrix}$$

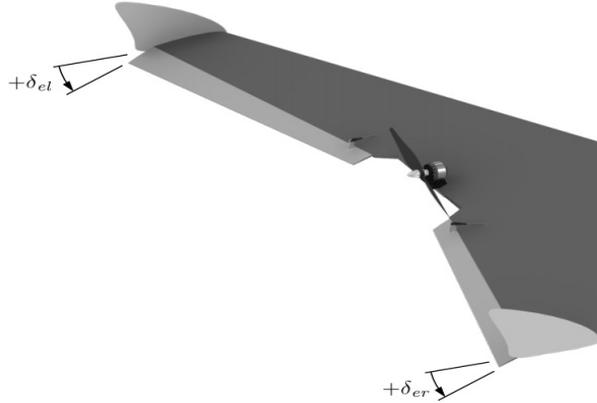


Figura 2.3: Elevones usados para remplazar elevadores y alerones

## 2.4. Fuerzas aerodinámicas longitudinales

Las fuerzas aerodinámicas y momentos longitudinales causan movimientos sobre el cuerpo de la aeronave en el plano  $i^b - k^b$  también conocido como el plano Pitch, por definición las fuerzas de arrastre y sustentación están alineadas a los ejes del sistema inercial de estabilidad  $F^s$ , por lo cual estas fuerzas están fuertemente influenciadas por el ángulo  $\alpha$ , el rango  $q$  y la deflexión  $\delta_e$ . Por lo cual las fuerzas  $F_{Lift}$ , y  $F_{Drag}$  y el momento  $m$  se pueden reescribir como función de  $\alpha$ ,  $q$ , y  $\delta_e$ .

Para ángulos de ataque lo suficientemente pequeños  $F_L$ ,  $F_D$  y  $m$  pueden ser modelados con una precisión aceptable usando aproximaciones lineales. Con el primer orden de la expansión en serie de Taylor y añadiendo el factor  $c/2V_a$  a  $\frac{\partial C_L}{\partial q}$  para conservar este termino como adimensional, las ecuaciones  $F_L$ ,  $F_D$  y  $m$  se transforman en

$$\begin{aligned} F_L &= \frac{1}{2}\rho V_a^2 S [C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha + C_{L_q} \frac{c}{2V_a} q + C_{L_{\delta_e}} \delta_e] \\ F_D &= \frac{1}{2}\rho V_a^2 S [C_{D_0} + C_{D_\alpha} \alpha + C_{D_q} \frac{c}{2V_a} q + C_{D_{\delta_e}} \delta_e] \\ m &= \frac{1}{2}\rho V_a^2 S c [C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_q} \frac{c}{2V_a} q + C_{m_{\delta_e}} \delta_e] \end{aligned}$$

Al incorporar a estos modelos el efecto de *ala puesta* las ecuaciones para la sustentación y arrastre son modificadas, definiendo a estas fuerzas como no lineales en función del ángulo de ataque, modelandolas de la siguiente manera

$$F_L = \frac{1}{2}\rho V_a^2 S [C_L + C_{L_q} \frac{c}{2V_a} q + C_{L_{\delta_e}} \delta_e]$$

$$F_D = \frac{1}{2}\rho V_a^2 S [C_D + C_{D_q} \frac{c}{2V_a} q + C_{D_{\delta_e}} \delta_e]$$

En estas ecuaciones  $C_L$  y  $C_D$  son expresados como una función no lineal de  $\alpha$ . Para ángulos de ataque que están más allá de las condiciones de *ala puesta*, las alas actúan como un *flat plate* cuyo coeficiente se modela como.

$$C_{L_{flat\ plate}} = 2sign(\alpha) \sin^2 \alpha \cos \alpha$$

Para obtener un modelo exacto de la sustentación como función del ángulo de ataque para un diseño de ala específico se necesita un test en tunel de viento o un detallado estudio computacional. Mientras que para muchas simulaciones no es necesario tener un modelo muy preciso pero aún así es necesario incorporar el efecto ala puesta. Un modelo de sustentación que incorpora el comportamiento lineal de sustentación y el efecto de ala puesta es el siguiente [3]

$$C_L = (1 - \sigma(\alpha))[C_{L_0}] + (\sigma(\alpha))[C_{L_\alpha} \alpha + 2sign(\alpha) \sin^2 \alpha \cos \alpha]$$

Para pequeñas aeronaves el coeficiente lineal de sustentación puede aproximarse a :

$$C_{L_\alpha} = \frac{\pi AR}{1 + \sqrt{1 + (AR/2)^2}}$$

En esta ecuación  $AR=b^2/S$ , esta es la relación de aspecto alar,  $b$  la envergadura, y  $S$  el área del Ala [3].

El coeficiente  $C_D$  también es una función no lineal del ángulo de ataque. Hay 2 contribuciones al coeficiente de arrastre  $C_D$ , uno es el coeficiente inducido y el otro es el coeficiente parasitario  $C_{D_p}$  [8]. El coeficiente  $C_D$  coeficiente tiene la forma:

$$C_D(\alpha) = C_{D_p} + \frac{(C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha)^2}{\pi e AR}$$

Donde el parámetro  $e$  es el factor de eficiencia de Oswald [9], cuyo rango está entre .8 y 1.0.

A pesar de que el modelo cuadrático obtiene resultados más exactos para un rango amplio en el ángulo de ataque  $\alpha$ , el modelo lineal también es bastante usado por su simplicidad y exactitud bajo condiciones de vuelo típicas.

Las ecuaciones de fuerzas de Arrastre  $F_D$  y sustentación  $F_L$ , están expresadas en el sistema inercial de estabilidad  $F^s$ . Expresando estas en el sistema inercial de cuerpo  $F^b$

$$f_x = \frac{1}{2}\rho V_a^2 S [ [-C_D(\alpha) \cos \alpha + C_L(\alpha) \sin \alpha] + [-C_{D_q} \cos \alpha + C_{L_q} \sin \alpha] \frac{c}{2V_a} q + [-C_{D_{\delta_e}} \cos \alpha + C_{L_{\delta_e}} \sin \alpha] \delta_e ]$$

$$f_x = \frac{1}{2}\rho V_a^2 S [ [-C_D(\alpha) \sin \alpha - C_L(\alpha) \cos \alpha] + [-C_{D_q} \sin \alpha - C_{L_q} \cos \alpha] \frac{c}{2V_a} q +$$

$$[-C_{D\delta_e} \sin \alpha - C_{L\delta_e} \cos \alpha] \delta_e \quad (2.2)$$

Denotando como

$$C_X(\alpha) = -C_D(\alpha) \cos \alpha + C_L(\alpha) \sin \alpha$$

$$C_{X_q}(\alpha) = -C_{D_q} \cos \alpha + C_{L_q} \sin \alpha$$

$$C_{X\delta_e}(\alpha) = -C_{D\delta_e} \cos \alpha + C_{L\delta_e} \sin \alpha$$

$$C_Z(\alpha) = -C_D(\alpha) \sin \alpha - C_L(\alpha) \cos \alpha$$

$$C_{Z_q}(\alpha) = -C_{D_q} \sin \alpha - C_{L_q} \cos \alpha$$

$$C_{Z\delta_e}(\alpha) = -C_{D\delta_e} \sin \alpha - C_{L\delta_e} \cos \alpha$$

Las ecuaciones para las fuerzas aerodinámicas longitudinales con respecto al sistema inercial de cuerpo son

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S \begin{pmatrix} C_X(\alpha) + [C_{X_q}(\alpha)] \frac{c}{2V_a} q + C_{X\delta_e}(\alpha) \delta_e \\ C_Z(\alpha) + \frac{c}{2V_a} q C_{Z_q}(\alpha) + C_{Z\delta_e}(\alpha) \delta_e \end{pmatrix}$$

### 2.4.1. Fuerzas de propulsión

Por último resta describir la fuerza de propulsión sobre la aeronave, en el supuesto de que la única fuerza de propulsión sobre esta sea ejercida por una hélice. Se puede diseñar un modelo simple para la propulsión de la hélice, este modelo es correcto para una hélice eficiente, aún así este modelo marca un punto de partida para un modelo usado en una simulación.

La fuerza debida al motor puede modelarse usando la ecuación de Bernoulli, haciendo una diferencia entre la presión de entrada y salida y multiplicando esta presión resultante por el área barrida y la cuerda de la hélice, esto es:

$$\begin{aligned} F_{x_p} &= S_{prop} C_{prop} (P_{downstream} - P_{upstream}) \\ &= S_{prop} C_{prop} \left( (P_0 + \frac{1}{2} \rho V_a^2) - (P_0 + \frac{1}{2} \rho V_{exit}^2) \right) \end{aligned}$$

donde  $P_0$  es la presión estática y  $V_{exit}$  es la velocidad del aire después de pasar por la hélice, esta velocidad es igual al producto de la velocidad angular de la hélice  $K_{motor}$  y al comando de modulación por ancho de pulso  $\delta_t$ .

$$V_{exit} = K_{motor} \delta_t.$$

entonces la fuerza debida a la hélice toma la forma:

$$F_{x_p} = \frac{1}{2} \rho S_{prop} C_{prop} ((K_{motor} \delta_t)^2 - V_a^2)$$

Finalmente las ecuaciones para las fuerzas aerodinámicas y momentos longitudinales con respecto al sistema inercial de cuerpo son

$$\begin{pmatrix} \dot{f}_x \\ \dot{f}_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\rho V_a^2 S \begin{pmatrix} C_X(\alpha) + [C_{X_q}(\alpha)]\frac{c}{2V_a}q + C_{X_{\delta_e}}(\alpha)\delta_e \\ C_Z(\alpha) + \frac{c}{2V_a}qC_{Z_q}(\alpha) + C_{Z_{\delta_e}}(\alpha)\delta_e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\rho S_{prop}C_{prop}((K_{motor}\delta_t)^2 - V_a^2) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

$$m = \frac{1}{2}\rho V_a^2 S c [C_{m_0} + C_{m_\alpha}\alpha + C_{m_q}\frac{c}{2V_a}q + C_{m_{\delta_e}}\delta_e] \quad (2.4)$$

### 2.4.2. Ecuaciones no lineales de movimiento.

Incorporando los modelos aerodinámicos y de propulsión descritos en las ecuaciones (1.1),(1.2),(1.3),(1.4),(2.3) y (2.4) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{p}_n &= (\cos \theta \cos \psi)u + (\sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi)v \\ &\quad + (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi)w \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_e &= (\cos \theta \cos \psi)u + (\sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi)v \\ &\quad + (\cos \phi \sin \theta \sin \psi + \sin \phi \cos \psi)w \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\dot{h} = u \sin \theta - v \sin \phi \cos \theta - w \cos \phi \cos \theta \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \dot{u} &= rv - qw - g \sin \theta + \frac{\rho V_a^2 S}{m} [C_X(\alpha) + C_{X_q}(\alpha)\frac{cq}{2V_a} + C_{X_{\delta_e}}(\alpha)\delta_e] \\ &\quad + \frac{\rho S_{prop}C_{prop}}{2m} [(K_{motor}\delta_t)^2 - V_a^2] \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\dot{v} = pw - ru + g \cos \theta \sin \phi + \frac{\rho V_a^2 S}{m} \times [C_{Y_0} + C_{Y_\beta}\beta\frac{bp}{2V_a} + C_{Y_r}\frac{br}{2V_a} + C_{Y_{\delta_a}}\delta_a + C_{Y_{\delta_r}}\delta_r] \quad (2.9)$$

$$\dot{w} = qu - pv + g \cos \theta \cos \phi + \frac{\rho V_a^2 S}{m} [C_Z(\alpha) + C_{Z_q}(\alpha)\frac{cq}{2V_a} + C_{Z_{\delta_e}}(\alpha)\delta_e] \quad (2.10)$$

$$\dot{\phi} = p + q \sin \phi \tan \theta + r \cos \phi \tan \theta \quad (2.11)$$

$$\dot{\theta} = q \cos \phi - r \sin \phi \quad (2.12)$$

$$\dot{\psi} = q \sin \phi \sec \theta + r \cos \phi \sec \theta \quad (2.13)$$

$$p = \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \quad (2.14)$$

$$q = \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \quad (2.15)$$

$$r = \dot{\psi} \cos \phi \sec \theta - \dot{\theta} \sin \phi \quad (2.16)$$

$$\dot{p} = \Gamma_1 p q - \Gamma_2 q r + \frac{1}{2} \rho V_a^2 S b \times [C_{p_0} + C_{p_\beta} \beta + C_{p_p} \frac{bp}{2V_a} + C_{p_{\delta_a}} \delta_a + C_{p_{\delta_r}} \delta_r] \quad (2.17)$$

$$\dot{q} = \Gamma_5 p r - \Gamma_6 (p^2 - r^2) + \frac{\rho V_a^2 S c}{2J_y} \times [C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_q} \frac{bp}{2V_a} + C_{m_{\delta_e}} \delta_e] \quad (2.18)$$

$$\dot{r} = \Gamma_7 p q - \Gamma_1 q r + \frac{1}{2} \rho V_a^2 S b \times [C_{r_0} + C_{r_\beta} \beta + C_{r_p} \frac{bp}{2V_a} + C_{r_t} \frac{br}{2V_a} + C_{r_{\delta_a}} \delta_a + C_{r_{\delta_r}} \delta_r] \quad (2.19)$$



# Capítulo 3

## Linealización y estabilidad.

Las 15 ecuaciones resultado del capítulo anterior describen de manera general la mecánica de la aeronave, para un vuelo en equilibrio estas ecuaciones pueden reescribirse de una forma sencilla, una aproximación que describa ese vuelo en particular. El método usado para representar las fuerzas y torques mediante coeficientes de estabilidad y linealizar estas ecuaciones conduce al análisis de las derivadas de estabilidad. Una vez obtenida es forma linealizada, estas ecuaciones se pueden reescribir en un formalismo más sencillo para trabajos futuros, en este caso son llevadas al espacio de estados. Bajo ciertas consideraciones este espacio de estados puede verse simplificado, en sus modos reducidos largo y corto. El modo de periodo largo o Fugoide describe oscilaciones largas tan prolongadas que la variación del ángulo de ataque es despreciable, en ellas solo varía en ángulo de cabeceo y la velocidad  $u$ , por otro lado en el periodo se toman como despreciable los cambios de velocidad en  $u$ , el periodo corto describe oscilaciones pequeñas sobre el ángulo de ataque y la velocidad angular  $q$ .

### 3.1. Linealización

Las ecuaciones de movimiento de una aeronave pueden ser separadas entre ecuaciones longitudinales y transversales [10]. Para hacer más sencillo el cálculo con las ecuaciones (2.8),(2.9),(2.10),(2.17),(2.18),(2.19),se trabaja con ellas rescribiendolas en una forma simplificada presentada a continuación:

$$\dot{u} = rv - qw - g \sin \theta + \frac{X}{m} \quad (3.1)$$

$$\dot{v} = pw - ru + g \cos \theta \sin \phi + \frac{Y}{m} \quad (3.2)$$

$$\dot{w} = qu - pv + g \cos \theta \cos \phi + Z \quad (3.3)$$

$$\dot{p} = \frac{J_{xz}}{J_x} pq - \frac{(J_z - J_y)}{J_x} qr + \frac{L}{J_x} + \frac{J_{xz}}{J_x} \dot{r} \quad (3.4)$$

$$\dot{q} = \Gamma_5 pr - \Gamma_6 (p^2 - r^2) + \frac{M}{J_y} \quad (3.5)$$

$$\dot{r} = -\frac{(I_y - J_x)}{J_z} pq - \frac{J_{xz}}{J_z} qr + \frac{N}{J_z} + \frac{J_{xz}}{J_z} \dot{p} \quad (3.6)$$

Donde

$$\begin{aligned} X/m &= \frac{\rho V_a^2 S}{m} [C_X(\alpha) + C_{X_q}(\alpha) \frac{cq}{2V_a} + C_{X_{\delta_e}}(\alpha) \delta_e] + \frac{\rho S_{prop} C_{prop}}{2m} [(K_{motor} \delta_t)^2 - V_a^2] \\ Y/m &= \frac{\rho V_a^2 S}{m} \times [C_{Y_0} + C_{Y_\beta} \beta \frac{bp}{2V_a} + C_{Y_r} \frac{br}{2V_a} + C_{Y_{\delta_a}} \delta_a + C_{Y_{\delta_r}} \delta_r] \\ Z/m &= \frac{\rho V_a^2 S}{m} [C_Z(\alpha) + C_{Z_q}(\alpha) \frac{cq}{2V_a} + C_{Z_{\delta_e}}(\alpha) \delta_e] \\ M/J_y &= \frac{\rho V_a^2 S c}{2J_y} \times [C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_q} \frac{bp}{2V_a} + C_{m_{\delta_e}} \delta_e] \\ L &= \frac{1}{2} J_{xz} \rho V_a^2 S b \times [C_{p_0} + C_{p_\beta} \beta + C_{p_p} \frac{bp}{2V_a} + C_{p_{\delta_a}} \delta_a + C_{p_{\delta_r}} \delta_r] - J_{xz} \dot{r} \\ N &= \frac{1}{2} J_{xz} \rho V_a^2 S b \times [C_{r_0} + C_{r_\beta} \beta + C_{r_p} \frac{bp}{2V_a} + C_{r_t} \frac{br}{2V_a} + C_{r_{\delta_a}} \delta_a + C_{r_{\delta_r}} \delta_r] - J_{xz} \dot{p} \end{aligned}$$

Las ecuaciones (3.1),(3.3),(3.5) son las ecuaciones longitudinales, de estas la ecuación que representa la fuerza actuando sobre la aeronave a lo largo del eje  $X$  en el sistema de cuerpo es

$$X - mg \sin \theta = m(\dot{v} + qw - rv) \quad (3.7)$$

Tomando como base la teoria de pequeñas perturbaciones para simplificar la ecuación (3.7) , se sustituyen las variables que aparecen en las ecuaciones de movimiento de una aeronave por un valor de referencia más una pequeña perturbación [10], estas variables y sus sutituciones aparecen en la tabla (1)

Velocidad sobre el eje $X$ en el sistema de cuerpo $F^b$	$u = u_0 + \Delta u$
Velocidad sobre el eje $Y$ en el sistema de cuerpo $F^b$	$v = v_0 + \Delta v$
Velocidad sobre el eje $Z$ en el sistema de cuerpo $F^b$	$w = w_0 + \Delta w$
Velocidad angular Roll en el sistema de cuerpo $F^b$	$p = p_0 + \Delta p$
Velocidad angular Pitch en el sistema de cuerpo $F^b$	$q = q_0 + \Delta q$
Velocidad angular Yaw en el sistema de cuerpo $F^b$	$r = r_0 + \Delta r$
Fuerza en el eje $X$ en el sistema $F^b$	$X = X_0 + \Delta X$
Fuerza en el eje $Y$ en el sistema $F^b$	$Y = Y_0 + \Delta Y$
Fuerza en el eje $Z$ en el sistema $F^b$	$Z = Z_0 + \Delta Z$
Torque en el eje $z$ en el sistema $F^b$	$M = M_0 + \Delta M$
Torque en el eje $x$ en el sistema $F^b$	$L = L_0 + \Delta L$
Torque en el eje $y$ en el sistema $F^b$	$N = N_0 + \Delta N$
Deflexiones en las superficies de Control	$\delta = \delta_0 + \Delta \delta$

Tabla 1

En adelante  $\delta_e$  será usada para describir las deflexiones en los elevadores de una aeronave, y  $\delta_T$  es el comando de la modulación por ancho de pulsos; más adelante estas serán definidas como las variables de control en las ecuaciones de movimiento longitudinales.

En la ecuación (3.7) se sustituyen las variables que aparecen originalmente, por las que aparecen en la tabla y se obtiene la siguiente ecuación

$$X_0 + \Delta X - mg \sin(\theta_0 + \Delta\theta) = \left[ \frac{d}{dt}(u_0 + \Delta u) + (q_0 + \Delta q)(w_0 + \Delta w) - (r_0 + \Delta r)(v_0 + \Delta v) \right] \quad (3.8)$$

Desarrollando las operaciones entre paréntesis

$$X_0 + \Delta X - mg \sin(\theta_0 + \Delta\theta) = \left[ \frac{d}{dt}\Delta u + (q_0 w_0 + \Delta q w_0 + q_0 \Delta w + \Delta q \Delta w) - (r_0 v_0 + \Delta r v_0 + r_0 \Delta v + \Delta r \Delta v) \right] \quad (3.9)$$

En este y los siguientes desarrollos se asume que las condiciones de vuelo son simétricas y la fuerza de propulsión sobre la aeronave es constante, lo cual significa que los sistemas de referencia  $F^v$ ,  $F^b$  se encuentran alineados, al igual que el vector de viento  $V_a$ , se encuentra alineado con el vector  $x$  del sistema de cuerpo  $F^b$ , en consecuencia los ángulos roll y yaw son nulos así como los movimientos de guiñada y alabeo de la misma forma son nulos, en consecuencia las velocidades  $u$  y  $w$  son cero, con las consideraciones anteriores

$$v_0 = w_0 = p_0 = q_0 = r_0 = \phi_0 = \psi_0 = 0 \quad (3.10)$$

Con la información de la ecuación (3.10) y despreciando los productos de las perturbaciones obtenemos la siguiente ecuación

$$X_0 + \Delta x - mg \sin(\theta_0 + \Delta\theta) = m\Delta\dot{u} \quad (3.11)$$

Desarrollando

$$\sin(\theta_0 + \Delta\theta) = \sin \theta_0 \cos \Delta\theta + \cos \theta_0 \sin \Delta\theta \quad (3.12)$$

Tomando en cuenta que  $\Delta\theta$  tiene un valor infinitesimal entonces

$$\begin{aligned} \sin \Delta\theta &\simeq \Delta\theta \\ \cos \Delta\theta &\simeq 1 \end{aligned} \quad (3.13)$$

sustituyendo el resultado anterior en la ecuación (3.12) se obtiene

$$X_0 + \Delta X - mg(\sin \theta_0 + \Delta\theta \cos \theta_0) = m\Delta\dot{u} \quad (3.14)$$

Tomando en cuenta sola mente los terminso donde no aparecen las perturbaciones, se llega a la siguiente ecuación

$$X_0 - mg \sin \theta_0 = 0 \quad (3.15)$$

Si se sustituye la ecuación (3.15) en la ecuación (3.14) entonces

$$\Delta X - mg\Delta\theta \cos \theta_0 = m\Delta\dot{u} \quad (3.16)$$

En la ecuación (3.16) la fuerza  $\Delta X$  es la diferencia entre las fuerzas aerodinámicas y de propulsión en la dirección  $x$  [10].

Tomando a la fuerza denotada por  $X$  solo como función de  $(u, w, \delta_e, \delta_T)$  y al punto  $(u_0, w_0, \delta_{e_0}, \delta_{T_0})$  tal que  $X(u_0, w_0, \delta_{e_0}, \delta_{T_0}) = X_0$ , entonces la diferencial de  $X$  en el punto  $(u_0, w_0, \delta_{e_0}, \delta_{T_0})$  es

$$dX = \frac{\partial X}{\partial u}(u - u_0) + \frac{\partial X}{\partial w}(w - w_0) + \frac{\partial X}{\partial \delta_e}(\delta_e - \delta_{e_0}) + \frac{\partial X}{\partial \delta_T}(\delta_T - \delta_{T_0}) \quad (3.17)$$

La aproximación lineal de  $X$  en el punto  $(u_0, w_0, \delta_{e_0}, \delta_{T_0})$  es

$$X = X(u_0, w_0, \delta_{e_0}, \delta_{T_0}) + dX$$

$$\begin{aligned}
&= X_0 + \frac{\partial X}{\partial u}(u - u_0) + \frac{\partial X}{\partial w}(w - w_0) + \frac{\partial X}{\partial \delta_e}(\delta_e - \delta_{e_0}) + \frac{\partial X}{\partial \delta_T}(\delta_T - \delta_{T_0}) \\
&= X_0 + \frac{\partial X}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial X}{\partial w}\Delta w + \frac{\partial X}{\partial \delta_e}\Delta \delta_e + \frac{\partial X}{\partial \delta_T}\Delta \delta_T \Rightarrow X - X_0 = \Delta X \\
&= \frac{\partial X}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial X}{\partial w}\Delta w + \frac{\partial X}{\partial \delta_e}\Delta \delta_e + \frac{\partial X}{\partial \delta_T}\Delta \delta_T \quad (3.18)
\end{aligned}$$

Sustituyendo la expresión para  $\Delta X$  de la ecuación (3.18) en la ecuación (3.16) se obtiene

$$\frac{\partial X}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial X}{\partial w}\Delta w + \frac{\partial X}{\partial \delta_e}\Delta \delta_e + \frac{\partial X}{\partial \delta_T}\Delta \delta_T - mg\Delta\theta \cos \theta_0 = m\Delta\dot{u} \quad (3.19)$$

En esta ecuación las parciales  $\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial w}, \frac{\partial X}{\partial \delta_e}, \frac{\partial X}{\partial \delta_T}$  son las derivadas de estabilidad y están evaluadas en  $(u_0, w_0, \delta_{e_0}, \delta_{T_0})$ , (es decir  $\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial X(u_0, w_0, \delta_{e_0}, \delta_{T_0})}{\partial u}$ )

Haciendo  $\Delta\dot{u} = \frac{d}{dt}\Delta u$ , la ecuación (3.8) puede reescribirse como

$$\frac{\partial X}{\partial \delta_e}\Delta \delta_e + \frac{\partial X}{\partial \delta_T}\Delta \delta_T = \left(m\frac{d}{dt} - \frac{\partial X}{\partial u}\right)\Delta u + \frac{\partial X}{\partial w}\Delta w + mg\Delta\theta \cos \theta_0 \quad (3.20)$$

Dividiendo entre  $m$  la ecuación (13) y usando la notación para derivadas parciales  $\frac{\partial X}{m\partial q_i} = f_{q_i}$ , donde  $f = f(q_1, q_2, \dots, q_n)$  La ecuación (3.3) se escribe de la siguiente forma.

$$\left(\frac{d}{dt} - X_u\right)\Delta u + X_w\Delta w + (g \cos \theta_0)\Delta\theta = X_{\delta_e}\Delta \delta_e + X_{\delta_T}\Delta \delta_T \quad (3.21)$$

Aplicando el mismo método usado para simplificar la ecuación (3.7) pero ahora en la ecuación

$$Z + mg \cos \theta \cos \phi = m(\dot{w} + pv - qu) \quad (3.22)$$

La ecuación (3.22) se reescribe como

$$\begin{aligned}
&Z_0 + \Delta Z + mg[\cos(\theta_0 + \Delta\theta) \cos(\phi_0 + \Delta\phi)] \\
&= \left[m\left[\frac{d}{dt}(w_0 + \Delta w)\right] + (p_0 + \Delta p)(v_0 + \Delta v) - (p_0 + \Delta p)(u_0 + \Delta u)\right] \quad (3.23)
\end{aligned}$$

Bajo el mismo criterio de la ecuación (3.13) y despreciando el producto de las perturbaciones (las deltas), y asumiendo las condiciones de vuelo simétrico

y una fuerza de propulsión constante, tal que la ecuación (3.10) sigue siendo válida en este desarrollo.

Por las consideraciones anteriores la ecuación (3.23) se reescribe de la siguiente forma

$$Z_0 + \Delta Z + mg[\cos \theta_0 \cos \Delta\theta - \sin \theta_0 \sin \Delta\theta][\cos \phi_0 \cos \Delta\phi - \sin \phi_0 \sin \Delta\phi] = m(\Delta\dot{w} - q_0 \Delta u) = Z_0 + \Delta Z + mg[\cos \theta_0 \cos \Delta\theta - \sin \theta_0 \sin \Delta\theta] = m(\Delta\dot{w} - q_0 \Delta u) \quad (3.24)$$

Tomando en cuenta que  $\Delta\theta$  tiene un valor que tiende a cero, entonces  $\sin \theta \simeq \theta$ ,  $\cos \theta \simeq 1$ , entonces la ecuación (3.24) se reescribe como

$$Z_0 + \Delta Z + mg[\cos \theta_0 - \Delta\theta \sin \theta_0] = m(\Delta\dot{w} - q_0 \Delta u) \quad (3.25)$$

De la ecuación (3.25) despreciando los terminos donde aparecen las perturbaciones se obtiene la ecuación de la aeronave en equilibrio actuando sobre el eje  $z$  en el sistema de cuerpo  $F^b$

$$Z + mg \cos \theta_0 = 0 \quad (3.26)$$

Sustituyendo la ecuación (3.26) en la ecuación (3.25) se obtiene

$$\Delta Z + mg[-\Delta\theta \sin \theta_0] = m[\Delta\dot{w} - q_0 \Delta u] \quad (3.27)$$

En la ecuación (3.27)  $\Delta Z$  se obtiene de una aproximación lineal, en este caso se supone a  $Z = Z(u, w, \dot{w}, q, \delta_e, \delta_T)$ , entonces en el punto  $(u_0, w_0, \dot{w}_0, q_0, \delta_{e_0}, \delta_{T_0})$  se tiene

$$Z = Z_0 + dZ = Z_0 + \frac{\partial Z(u_0, w_0, \dot{w}_0, q_0, \delta_{e_0}, \delta_{T_0})}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial Z(u_0, w_0, \dot{w}_0, q_0, \delta_{e_0}, \delta_{T_0})}{\partial w} \Delta w + \frac{\partial Z(u_0, w_0, \dot{w}_0, q_0, \delta_{e_0}, \delta_{T_0})}{\partial \dot{w}} \Delta \dot{w} + \frac{\partial Z(u_0, w_0, \dot{w}_0, q_0, \delta_{e_0}, \delta_{T_0})}{\partial q} \Delta q + \frac{\partial Z(u_0, w_0, \dot{w}_0, q_0, \delta_{e_0}, \delta_{T_0})}{\partial \delta_e} \Delta \delta_e + \frac{\partial Z(u_0, w_0, \dot{w}_0, q_0, \delta_{e_0}, \delta_{T_0})}{\partial \delta_T} \Delta \delta_T$$

Donde  $Z_0 = Z(u_0, w_0, \dot{w}_0, q_0, \delta_{e_0}, \delta_{T_0})$ .

$$\Rightarrow Z - Z_0 = \Delta Z = \frac{\partial Z}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial Z}{\partial w} \Delta w + \frac{\partial Z}{\partial \dot{w}} \Delta \dot{w} + \frac{\partial Z}{\partial q} \Delta q + \frac{\partial Z}{\partial \delta_e} \Delta \delta_e + \frac{\partial Z}{\partial \delta_T} \Delta \delta_T \quad (3.28)$$

Donde las parciales  $\frac{\partial Z}{\partial u}, \frac{\partial Z}{\partial w}, \frac{\partial Z}{\partial \dot{w}}, \frac{\partial Z}{\partial q}, \frac{\partial Z}{\partial \delta_e}, \frac{\partial Z}{\partial \delta_T}$ , están evaluadas en el punto  $(u_0, w_0, \dot{w}_0, q_0, \delta_{e_0}, \delta_{T_0})$ , sustituyendo la ecuación (3.28) en la ecuación (3.27) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial Z}{\partial w} \Delta w + \frac{\partial Z}{\partial \dot{w}} \Delta \dot{w} + \frac{\partial Z}{\partial q} \Delta q + \frac{\partial Z}{\partial \delta_e} \Delta \delta_e + \frac{\partial Z}{\partial \delta_T} \Delta \delta_T + mg[-\Delta \theta \sin \theta_0] = \\ m[\Delta \dot{w} - q_0 \Delta u] \\ \Rightarrow \frac{\partial Z}{\partial u} \Delta u + \left[ \left( \frac{\partial Z}{\partial \dot{w}} - m \right) \frac{d}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial w} \right] \Delta w + \left[ \left( u_0 + \frac{\partial Z}{\partial q} \right) \right] \Delta q - mg \Delta \theta \sin \theta_0 \\ + \frac{\partial Z}{\partial \delta_e} \Delta \delta_e + \frac{\partial Z}{\partial \delta_T} \Delta \delta_T = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Por otro lado

$$\theta = q \cos \phi - r \sin \phi, \quad (3.30)$$

entonces

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\theta} &= \frac{d}{dt} (\theta_0 + \Delta \theta) \\ &= (q_0 + \Delta q) (\cos(\phi_0 + \Delta \phi)) - (r_0 + \Delta r) (\sin(\phi_0 + \Delta \phi)) \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta \dot{\theta} &= q_0 \cos(\phi_0 + \Delta \phi) + \Delta q \cos(\phi_0 + \Delta \phi) - r_0 \sin(\phi_0 + \Delta \phi) + \Delta r \sin(\phi_0 + \Delta \phi) \\ &= q_0 [\cos \phi_0 \cos \Delta \phi - \sin \phi_0 \sin \Delta \phi] + \Delta q [\cos \phi_0 \cos \Delta \phi - \sin \phi_0 \sin \Delta \phi] - r_0 \sin(\phi_0 + \Delta \phi) \\ &\quad + \Delta r [\sin \phi_0 \cos \Delta \phi + \cos \phi_0 \sin \Delta \phi] \end{aligned} \quad (3.32)$$

Como  $q_0 = r_0 = \phi_0 = 0$

y  $\Delta \phi \ll 1$  entonces

$\cos \Delta \phi = \text{Cos} \phi_0 \simeq 1$  y  $\sin \phi_0 \simeq 0$  por lo cual

$$\Delta \dot{\theta} = \Delta q \quad (3.33)$$

Sustituyendo el resultado de la ecuación (3.30) en la ecuación (3.29)

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial u} \Delta u + \left[ \left( \frac{\partial Z}{\partial \dot{w}} - m \right) \frac{d}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial w} \right] \Delta w + \left[ \left( u_0 + \frac{\partial Z}{\partial q} \right) \right] \Delta \dot{\theta} - mg \Delta \theta \sin \theta_0 + \frac{\partial Z}{\partial \delta_e} \Delta \delta_e + \\ \frac{\partial Z}{\partial \delta_T} \Delta \delta_T = 0 \\ = \frac{\partial Z}{\partial u} \Delta u + \left[ \left( \frac{\partial Z}{\partial \dot{w}} - m \right) \frac{d}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial w} \right] \Delta w + \left[ \left( u_0 + \frac{\partial Z}{\partial q} \right) \frac{d}{dt} - mg \sin \theta_0 \right] \Delta \theta \\ + \frac{\partial Z}{\partial \delta_e} \Delta \delta_e + \frac{\partial Z}{\partial \delta_T} \Delta \delta_T \end{aligned} \quad (3.34)$$

Usando la notación para las parciales propuesta en los textos [11] ( $\frac{\partial f}{\partial q_i} = f_{q_i}$ ) la ecuación (3.31) se reescribe

$$-Z_q \Delta u - [(Z_{\dot{w}} - 1) \frac{d}{dt} + Z_w] \Delta w - [(u_0 + Z_q) \frac{d}{dt} - mg \sin \theta_0] \Delta \theta = Z_{\delta_e} \Delta \delta_e + Z_{\delta_T} \Delta \delta_T \quad (3.35)$$

La simplificación de la ecuación del torque  $M$

$$M = J_y \dot{q} + rp(J_x - J_z) + J_{xz}(p^2 - r^2) \quad (3.36)$$

donde  $\Gamma_5 = \frac{J_x - J_z}{J_y}$  y  $\Gamma_6 = \frac{J_{xz}}{J_y}$

se logra al igual que en los desarrollos anteriores sustituyendo cada variable por un valor de referencia más una pequeña perturbación obteniendo

$$\begin{aligned} M_0 + \Delta M &= I_y \frac{d}{dt}(q_0 + \Delta q) + (r_0 + \Delta r)(q_0 + \Delta q)(I_x - I_z) \\ &\quad + I_{xz}([p_0 + \Delta p]^2 - [r_0 + \Delta r]^2) \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow M_0 + \Delta M &= I_y \Delta \dot{q} + (r_0 q_0 + r_0 \Delta q + \Delta r q_0 + \Delta r \Delta q) \\ &\quad (I_x - I_z) + I_{xz}([p_0^2 + 2p_0 \Delta p + \Delta p^2] - [r_0^2 - 2r_0 \Delta r + \Delta r^2]^2) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Despreciando el producto de las perturbaciones y tomando en cuenta la ecuación (3.10), entonces la ecuación (3.34) se escribe como

$$M_0 + \Delta M = J_y \Delta \dot{q} \quad (3.39)$$

Si no se toman en cuenta los terminos con perturbaciones la ecuación (3.34) da como resultado  $M_0 = 0$ , sustituyendo este resultado en la ecuación (3.35)

$$\Delta M = J_y \Delta \dot{q} \quad (3.40)$$

si  $M = M(u, w, \dot{w}, q, \delta_e, \delta_T)$ , la aproximación lineal de  $M$  en el punto  $(u_0, w_0, \dot{w}_0, q_0, \delta_e, \delta_T)$  es

$$\begin{aligned} M(u, w, \dot{w}, q, \delta_e, \delta_T) &= M(u_0, w_0, \dot{w}_0, q_0, \delta_e, \delta_T) \\ &\quad + \frac{\partial M}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial M}{\partial w} \Delta w, \frac{\partial M}{\partial \dot{w}} \Delta \dot{w}, \frac{\partial M}{\partial q} \Delta q, \frac{\partial M}{\partial \delta_e} \Delta \delta_e, \frac{\partial M}{\partial \delta_T} \Delta \delta_T \end{aligned} \quad (3.41)$$

Entonces

$$\Delta M = M - M_0 = \frac{\partial M}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial M}{\partial w} \Delta w + \frac{\partial Z}{\partial \dot{w}} \Delta \dot{w} + \frac{\partial M}{\partial q} \Delta q + \frac{\partial M}{\partial \delta_e} \Delta \delta_e + \frac{\partial Z}{\partial \delta_T} \Delta \delta_T \quad (3.42)$$

Con el resultado de la ecuación (3.37) sustituido en (3.36) se obtiene

$$\frac{\partial M}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial M}{\partial w} \Delta w + \frac{\partial Z}{\partial \dot{w}} \Delta \dot{w} + \frac{\partial M}{\partial q} \Delta q + \frac{\partial M}{\partial \delta_e} \Delta \delta_e + \frac{\partial Z}{\partial \delta_T} \Delta \delta_T = J_y \left( \frac{d}{dt} \Delta q \right) \quad (3.43)$$

agrupando terminos y retomando la ecuación (3.30)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial M}{\partial u} \Delta u + \left[ \frac{\partial M}{\partial w} + \frac{\partial M}{\partial \dot{w}} \frac{d}{dt} \right] \Delta w + \frac{\partial M}{\partial \delta_e} \Delta \delta_e + \frac{\partial Z}{\partial \delta_T} \Delta \delta_T \\ & = \left[ I_y \left( \frac{d}{dt} \right) - \frac{\partial M}{\partial q} \right] \Delta q = \left[ I_y \left( \frac{d^2}{dt^2} \right) - \frac{\partial M}{\partial q} \frac{d}{dt} \right] \Delta \theta \end{aligned} \quad (3.44)$$

Usando nuevamente la notación propuesta en los textos [11] ( $\frac{\partial f}{\partial q_i} = f_{q_i}$ ) la ecuación (3.39) se reescribe

$$M_u \Delta u - \left[ M_w + M_{\dot{w}} \frac{d}{dt} \right] \Delta w + \left[ \left( \frac{d^2}{dt^2} \right) - M_q \frac{d}{dt} \right] \Delta \theta = M_{\delta_e} \Delta \delta_e + M_{\delta_T} \Delta \delta_T \quad (3.45)$$

Las ecuaciones longitudinales ya linealizadas son

$$\left( \frac{d}{dt} - X_u \right) \Delta u + X_w \Delta w + (g \cos \theta_0) \Delta \theta = X_{\delta_e} \Delta \delta_e + X_{\delta_T} \Delta \delta_T \quad (3.46)$$

$$-Z_q \Delta u - \left[ (Z_{\dot{w}} - 1) \frac{d}{dt} + Z_w \right] \Delta w - \left[ (u_0 + Z_q) \frac{d}{dt} - g \sin \theta_0 \right] \Delta \theta = Z_{\delta_e} \Delta \delta_e + Z_{\delta_T} \Delta \delta_T \quad (3.47)$$

$$M_u \Delta u - \left[ M_w + M_{\dot{w}} \frac{d}{dt} \right] \Delta w + \left[ \left( \frac{d^2}{dt^2} \right) - M_q \frac{d}{dt} \right] \Delta \theta = M_{\delta_e} \Delta \delta_e + M_{\delta_T} \Delta \delta_T \quad (3.48)$$

## 3.2. Estabilidad

Por lo general al diseñar una aeronave se busca que esta sea cómoda y segura, en la que el vuelo sea recto y nivelado, con ascensos y descensos suaves y nivelados; se busca que una aeronave sea estable.

Una aeronave es un sistema dinámico, en general el estudio de estabilidad de un sistema hace referencia al comportamiento de este dentro de límites

aceptables, es decir, si para toda entrada acotada se obtiene una salida acotada independiente de su estado inicial. Al mismo tiempo la respuesta del sistema a un impulso tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito.

Físicamente una aeronave estable al experimentar una perturbación en su movimiento está retorna por sí sola a su estado original como resultado de las fuerzas restitutivas debidas a la acción aerodinámica sobre la aeronave. La perturbación de la que se habla puede tener origen en factores externos, como perturbaciones atmosféricas, o también a acciones en superficies como el timón, los alerones, los elevadores etc.

Llegando a la conclusión de que una aeronave sumamente estable no solamente se opondrá a perturbaciones externas, sino también a perturbaciones debidas a las superficies de control sobre la aeronave. En otras palabras un sistema que es estable en lo absoluto no puede ser un sistema satisfactoriamente controlable.

Un planeador o un avión comercial son ejemplos de sistemas estables. Aviones furtivos cuya geometría los hace sumamente inestables como el F-117A son buenos ejemplos de aeronaves donde un sistema de control actúa para estabilizar la aeronave.

La acción de las superficies de control actuando a una distancia apreciable del centro de gravedad de la aeronave genera los momentos para equilibrar y controlar las rotaciones al rededor del eje  $y$  [12], contrarrestando el momento de cabeceo de otros componentes de la aeronave, como el ala, el fuselaje, etc.

El aporte de estos momentos actuando sobre el centro de gravedad

$$M_{cg} = M_{cg_w} + M_{cg_F} + M_{cg_t}$$

Donde .

$M_{cg}$  es el momento respecto al centro de gravedad de avión.

$M_{cg_F}$  es el momento respecto al centro de gravedad de avión por la acción del fuselaje.

$M_{cg_w}$  es el momento respecto al centro de gravedad de avión por la acción del ala.

$M_{cg_t}$  es el momento respecto al centro de gravedad de avión por la acción del timón.

Para obtener un equilibrio estático, la suma de estos momentos debe ser cero, y como se ha hecho en este capítulo con el análisis de los coeficientes aerodinámicos, resulta conveniente adimensionar estas ecuaciones.

Suponiendo que la aeronave se encuentra trimada, y esta repentinamente es sometida a una perturbación, dando como resultado un aumento en el

ángulo de ataque, como aparece en la figura.

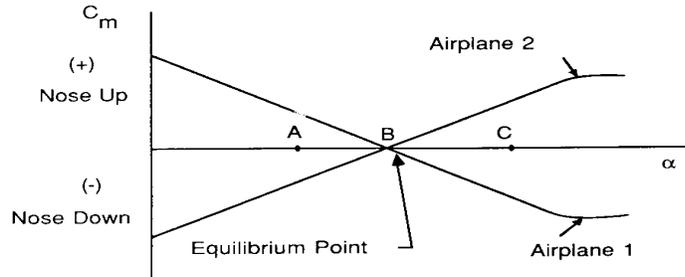


Figura 3.1: En esta imagen se representa como la pendiente negativa de  $C_{m\alpha}$  asegura que la aeronave sea longitudinalmente.

Si la pendiente de la curva fuese positiva puede observarse que A corresponde al punto B sobre la curva que implica un coeficiente de momento positivo que tiende a levantar la nariz del avión, aumentando aún más el ángulo de ataque. Esto configura obviamente una situación inestable. Si la pendiente de la curva fuese negativa el incremento de ángulo de ataque producido por la perturbación A se corresponde con el punto C que a través de un coeficiente de momentos de cabeceo negativo tiende a bajar la nariz, reduciendo el ángulo de ataque, mostrando una tendencia de retorno al estado original A. Entonces el requerimiento de estabilidad requiere una pendiente negativa [10], cuan grande debe ser este valor depende en mucho del diseñador de la aeronave. La estabilidad estática del avión establece si los momentos y fuerzas que genera la configuración del mismo, son los adecuados para producir la recuperación ante una perturbación cualquiera que lo desplace de su posición de equilibrio, respecto del baricentro del mismo.

El diseño de los elementos sustentadores de la aeronave, en concreto las alas, pueden ser un factor considerable para condiciones de equilibrio en una aeronave. Clasificando a las alas de una aeronave según su perfil aerodinámico, estos pueden dividirse en 3 tipos, perfiles de una curvatura, perfiles sin curvatura y perfiles de dos curvaturas.

Para el perfil de una curvatura en su línea media:

- 1) Valores de  $C_l$  aceptables
- 2) Valores de  $C_d$  bajos
- 3) Valores de  $C_m$  que deberán compensarse

Debe proveerse un momento adicional ya que el perfil “buscará” por si sólo llegar al valor de su  $\alpha_0$ .

Para el perfil sin curvatura (simétrico) en su línea media:

- 1) Valores de  $C_l$  aceptables
- 2) Valores de  $C_d$  altos

3)  $C_m = 0$  para  $0^\circ$  de incidencia. Debe proveerse algún momento adicional para que exista sustentación. El perfil “buscara” siempre el  $\alpha_0 = 0^\circ$

Para el perfil con doble curvatura en su línea media.

- 1) Valores aceptables de  $C_l$
- 2) Valores de  $C_d$  algo mayores a los del perfil asimétrico

3)  $C_m$  nulos en la zona de vuelo, No necesita adicionar otro elemento que anula el momento en el  $C_m$

Con lo expuesto anteriormente puede deducirse que el perfil asimétrico es inestable, el perfil simétrico es indiferente y el perfil con doble curvatura es estable o autoestable [12].

### 3.3. Derivadas de estabilidad

El método para representar a las fuerzas y momentos aerodinámicos por sus respectivos coeficientes aerodinámicos propone asumir que las fuerzas y momentos pueden ser expresados como una función de los valores instantáneos de las variables de perturbación, las variables de perturbación son valores instantáneos desde las condiciones iniciales del vuelo de referencia.

Una perturbación en la fuerza aerodinámica puede presentarse en términos de una expansión en serie de Taylor alrededor de un punto.

Por ejemplo la fuerza  $X$

$$\Delta X(u, \dot{u}, w, \dot{w}, \dots, \delta_e, \dot{\delta}_e, \delta_T, \dot{\delta}_T) = \frac{\partial X}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial X}{\partial \dot{u}} \Delta \dot{u} + \dots + \frac{\partial X}{\partial \dot{\delta}_T} \Delta \dot{\delta}_T \quad (3.49)$$

En la ecuación (3.49) el término

$$\frac{\partial X}{\partial u} = C_{x_u} \frac{1}{u} Q S \quad (3.50)$$

donde

$$C_{x_u} = \frac{\partial C_x}{\partial(u/u_0)} \quad (3.51)$$

y  $Q$  es la presión dinámica a la cual se hace referencia para representar una fuerza aerodinámica  $F = C_F QS$ , como alternativa a la forma  $F = C_F \frac{1}{2} \rho S V^2$ .

En la ecuación (3.121) la derivada  $\frac{\partial C_x}{\partial u}$  tiene dimensión pero ya que se ha definido  $C_{x_u}$  como adimensional, entonces se propone agregar  $u_0$  en la parcial de la ecuación (3.50)

Afortunadamente muchos de los terminos que aparecen en la ecuación (3.49) pueden ser descartados ya que en la práctica muchos de estos pueden tener valores despreciables [10].

A continuación se usará la aproximación de las derivadas de estabilidad para representar las fuerzas aerodinámicas y momentos aerodinámicos actuando sobre la aeronave. Las expresiones para cada fuerza y momento incluyen solo los términos usualmente más importantes en el estudio del movimiento de una aeronave.

### 3.3.1. $C_{x_u}$

La fuerza sobre el eje  $x$  ( $i^b$  en el sistema de cuerpo  $F^b$ ) es el resultado de la suma de las fuerzas de empuje y arrastre.

Tomando en cuenta que el cambio sobre la fuerza  $X$  es un resultado a la velocidad  $u$

$$\Delta X = \frac{\partial X}{\partial u} \Delta u \quad (3.52)$$

Debido a que

$$X = -D + T \quad (3.53)$$

entonces

$$\Delta X = \frac{\partial(-D + T)}{\partial u} \Delta u = -\frac{\partial D}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial T}{\partial u} \Delta u \Rightarrow \frac{\partial X}{\partial u} = -\frac{\partial D}{\partial u} + \frac{\partial T}{\partial u} \quad (3.54)$$

La fuerza de arrastre  $D$  es el ejemplo de una fuerza producida por un cuerpo en movimiento en medio de un fluido, por tanto la forma de esta ecuación es

$$F = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_F \quad (3.55)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido que circunda al cuerpo,  $S$  el área del cuerpo,  $V^2$  la velocidad del cuerpo y  $C_F$  el respectivo coeficiente aerodinámico de esta fuerza.

De la ecuación (3.55) podemos expresar a  $D$  como

$$D = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_D \quad (3.56)$$

Entonces

$$\frac{\partial D}{\partial u} = \frac{1}{2}\rho S \frac{\partial}{\partial u}(u^2 D) = \frac{1}{2}\rho S(u^2 \frac{\partial C_D}{\partial u} + 2u C_D) \quad (3.57)$$

Evaluando en el punto de equilibrio es decir para un valor  $u_0$  de  $u$

$$\frac{\partial D}{\partial u} = \frac{1}{2}\rho S(u_0^2 \frac{\partial C_D}{\partial u} + 2u_0 C_{D_0}) \quad (3.58)$$

Con el resultado de las ecuaciones (3.58), y (3.121), sustituidas en la ecuación (3.54) se obtiene

$$\begin{aligned} C_{x_u} \frac{1}{u_0} Q S &= -\frac{\rho S}{2}(u_0^2 \frac{\partial C_D}{\partial u} + 2u_0 C_{D_0}) + \frac{\partial T}{\partial u} \\ &= -\frac{\rho S}{2}(u_0^2 \frac{\partial C_D}{\partial u} + 2u_0 C_{D_0}) + \frac{\partial C_T}{\partial(u/u_0)} Q S \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\Rightarrow C_{x_u} = -\frac{\rho S u_0^2}{2 Q S}(u_0 \frac{\partial C_D}{\partial u} + 2 C_{D_0}) + C_{T_u} \frac{Q S u_0}{u_0 Q S} \quad (3.60)$$

Como se había mencionado anteriormente

$$\frac{\rho S V^2 C}{2} = Q S C \Rightarrow Q = \frac{\rho V^2}{2} \quad (3.61)$$

Con el resultado de la ecuación (3.61), la ecuación (3.60) toma la forma

$$C_{x_u} = -(u_0 \frac{\partial C_D}{\partial u} + 2 C_{D_0}) + C_{T_u} \quad (3.62)$$

$$C_{x_u} = -(\frac{\partial C_D}{\partial(u/u_0)} + 2 C_{D_0}) + C_{T_u} \quad (3.63)$$

$$C_{x_u} = -(C_{D_u} + 2 C_{D_0}) + C_{T_u} \quad (3.64)$$

3.3.2.  $C_{x_\alpha}$ 

Las principales fuerzas actuando sobre la aeronave están representadas en la figura (3.2); de estas fuerzas las fuerzas aerodinámicas presentes en el eje  $x$  del sistema de cuerpo  $F^b$  son la fuerza de arrastre  $D$ , empuje  $T$  así como una componente de la fuerza de sustentación  $F_L$ , dando como resultado la siguiente ecuación

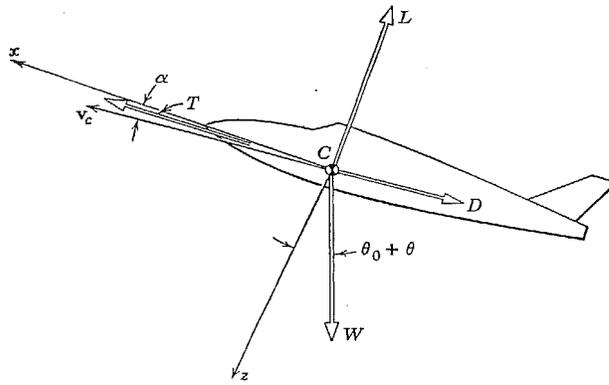


Figura 3.2: En esta imagen se esquematizan los vectores de fuerza sobre una aeronave, en esta los ejes  $X, Y, Z$  corresponden al sistema de cuerpo

$$\begin{aligned} F_x &= F_T - F_D + \sin \alpha F_L = F_x = \frac{1}{2} S \rho V^2 C_x \\ &= \frac{1}{2} S \rho V^2 C_T - \frac{1}{2} S \rho V^2 C_D + \frac{1}{2} S \rho V^2 C_L \sin \alpha \end{aligned} \quad (3.65)$$

Tomando en cuenta solo los coeficientes aerodinámicos  $C_x, C_D, C_T, C_L$

$$C_x = C_T - C_D + C_L \sin \alpha \quad (3.66)$$

En la ecuación anterior nuevamente consideramos ángulos para  $\alpha$  con valores infinitesimales

por tanto  $\sin \alpha \simeq \alpha$ . Con este resultado

$$C_x = C_T - C_D + \alpha C_L$$

Derivando esta ecuación en función de  $\alpha$  se obtiene

$$\frac{\partial C_x}{\partial \alpha} = \frac{\partial C_T}{\partial \alpha} - \frac{\partial C_D}{\partial \alpha} + C_L + \alpha \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \quad (3.67)$$

Asumiendo que el coeficiente aerodinámico de empuje es independiente del ángulo de ataque  $\alpha$ , ya que está depende del sistema de propulsión de la aeronave, entonces  $\frac{\partial C_T}{\partial \alpha} = 0$  dando como resultado

$$\frac{\partial C_x}{\partial \alpha} = -\frac{\partial C_D}{\partial \alpha} + C_L + \alpha \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \quad (3.68)$$

Evaluando la ecuación (3.68) en las ecuaciones de vuelo de referencia donde  $\alpha = 0$

$$C_{x_a} = \left(\frac{\partial C_x}{\partial \alpha}\right)_0 = C_{L_0} - \left(\frac{\partial C_D}{\partial \alpha}\right)_0 \quad (3.69)$$

La fuerza de arrastre aerodinámica puede modelarse por una gran cantidad de métodos matemáticos [3], cuyo resultado al graficar la fuerza de arrastre  $D$  en función de la fuerza de sustentación se presenta en la gráfica (3.3)

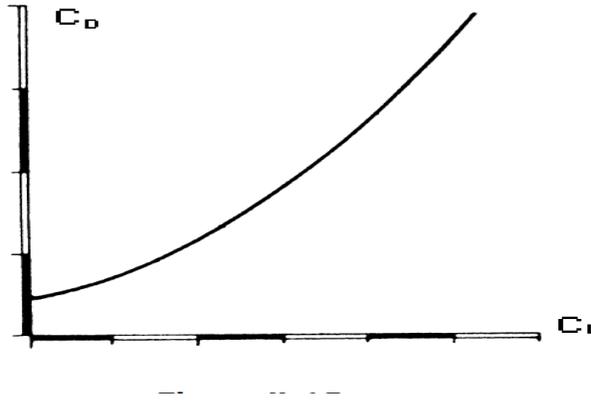


Figura 3.3: En esta imagen se presenta la gráfica de  $C_D$  en función de  $C_L$ , esta gráfica puede aproximarse a una parábola.

Esta función se puede aproximar a una parábola

$$y = a + bx^2 \quad (3.70)$$

al cambiar  $y$  por  $C_D$  y  $C_L$  por  $x$  en la ecuación (3.69) se obtiene

$$C_D = a + bC_L^2 \quad (3.71)$$

El valor de  $a$  es el coeficiente de arraste de la carga parásita [8] denotado por  $C_{Dp}$ , dando como resultado para  $C_D$

$$C_D = C_{Dp} + bC_L^2 \quad (3.72)$$

EL valor de  $b$  presente en las ecuaciones (3.70), (3.71),(3.72) es un valor que debe ser encontrado experimentalmente el cual es proporcional a la relación de aspecto del ala y al factor de eficiencia de Oswald

$$b = \frac{1}{e\pi AR} \quad (3.73)$$

En la ecuación (3.73)  $AR = b_0^2/S$  donde  $b_0$  es la envergadura del ala y  $S$  el área de esta.

La ecuación (3.72) se reescribe como

$$C_D = C_{Dp} + \frac{C_L^2}{e\pi AR} \quad (3.74)$$

Para  $C_L$  algunos textos [3] proponen usar una aproximación lineal

$$C_L(\alpha, q, \delta_e, \dots) = [C_{L_0} + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial C_L}{\partial q} q + \frac{\partial C_L}{\partial \delta_e} \delta_e + \dots] \quad (3.75)$$

Ya que solo interesan los términos donde aparecen el ángulo de ataque  $\alpha$ , los términos  $\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \alpha$ ,  $\frac{\partial C_L}{\partial q} q$ ,  $\frac{\partial C_L}{\partial \delta_e} \delta_e$ , ... en la ecuación (3.75) se desprecian obteniendo una relación para  $C_L$

$$C_L(\alpha) = [C_{L_0} + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \alpha] = [C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha] \quad (3.76)$$

Sustituyendo la ecuación (3.76) en la ecuación (3.74)

$$C_D = C_{Dp} + \frac{[C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha]^2}{e\pi AR} \quad (3.77)$$

Derivando parcialmente la ecuación (3.77) con respecto a  $\alpha$  se obtiene

$$\frac{\partial C_D}{\partial \alpha} = \frac{2(C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha)}{e\pi AR} C_{L_\alpha} = \frac{2C_{L_0}}{e\pi AR} C_{L_\alpha} + \frac{2C_{L_\alpha}^2 \alpha}{e\pi AR} \quad (3.78)$$

Evaluando en las condiciones de vuelo de referencia es decir, cuando  $\alpha = 0$

$$\left(\frac{\partial C_D}{\partial \alpha}\right)_0 = \frac{2C_{L_0}}{e\pi AR} C_{L_\alpha} + \frac{2C_{L_\alpha}^2(0)}{e\pi AR} = \frac{2C_{L_0}}{e\pi AR} C_{L_\alpha} \quad (3.79)$$

Finalmente con el resultado de (3.79) se concluye

$$C_{x_\alpha} = C_{L_0} - \frac{2C_{L_0}}{e\pi AR} C_{L_\alpha} \quad (3.80)$$

### 3.3.3. $C_{z_u}$

Como lo muestra la figura 1, la única fuerza actuando sobre el eje  $z$  en el sistema de cuerpo  $F^b$  es la fuerza de sustentación obteniendo

$$Z = -L \cos \alpha \quad (3.81)$$

Reescribiendo la fuerza  $L$  en terminos de la ecuación (3.14), tomando solo el primer termino de la expansión en serie de Taylor para la función coseno y ausmiendo que  $\alpha$  es un ángulo infinitesimal , entonces

$$Z = -\frac{1}{2} S \rho u^2 C_L \cos \alpha \simeq -\frac{1}{2} S \rho u^2 C_L \quad (3.82)$$

Derivando parcialmente  $Z$  con respecto a la velocidad  $u$

$$\frac{\partial Z}{\partial u} = -\frac{\partial(\frac{1}{2} S \rho u^2 C_L)}{\partial u} = -\frac{1}{2} S \rho \frac{\partial(u^2 C_L)}{\partial u} = -\frac{1}{2} S \rho [2u C_L + u^2 \frac{\partial C_L}{\partial u}] \quad (3.83)$$

Evaluando en las condicioes de vuelo de referencia

$$\frac{1}{2} S \rho [2u_0 C_L + u_0^2 \frac{\partial C_L}{\partial u}] \frac{1}{2} S \rho [2u_0 C_{L_0} + u_0 (\frac{\partial C_L}{\partial (u/u_0)})] \quad (3.84)$$

Entonces

$$\frac{\partial Z}{\partial u} = -\frac{1}{2} S \rho u_0 [2C_{L_0} + u_0 C_{L_u}] \quad (3.85)$$

En la ecuación (3.85)  $\frac{\partial Z}{\partial u} = C_{Z_u} \frac{1}{u_0} QS$  entonces

$$C_{Z_u} = -\frac{S\rho u_0^2}{2QS} [2C_{L_0} + u_0 C_{L_u}] \quad (3.86)$$

Por el resultado de la ecuación (3.61)

$$C_{z_u} = -[2C_{L_0} + C_{L_u}] \quad (3.87)$$

De la ecuación (3.84)

$$\frac{\partial C_L}{\partial(u/u_0)} = \frac{a}{a} \frac{\partial C_L}{\partial(u/u_0)} = \frac{u_0}{a} \frac{\partial C_L}{\partial(u/a)} \quad (3.88)$$

En la ecuación (3.89)  $a$  es la velocidad del sonido, por lo tanto

$$C_{L_u} = M \frac{\partial C_L}{\partial M} \quad (3.89)$$

donde  $M$  es el número de Mach

La formula de Plandtl-Glavert [10] propone

$$C_L = \frac{C_{L_{M=0}}}{\sqrt{1-M^2}} \quad (3.90)$$

Derivando  $C_L$  parcialmente respecto al número de Mach

$$\frac{\partial C_L}{\partial M} = C_L \frac{M}{1-M^2} \quad (3.91)$$

Evaluando en las condiciones de vuelo de referencia

$$\left(\frac{\partial C_L}{\partial M}\right)_0 = C_{L_0} \frac{M}{1-M^2} \quad (3.92)$$

Finalmente sustituyendo este resultado en (3.90)

$$C_{L_u} = C_{L_0} \frac{M^2}{1-M^2} \quad (3.93)$$

La ecuación (3.87) se reescribe

$$C_{Z_u} = -\frac{M}{1-M^2} C_{L_0} - 2C_{L_0} \quad (3.94)$$

### 3.3.4. $C_{Z\alpha}$

De la figura (3.2), la fuerza sobre el eje  $Z$  en el sistema de cuerpo es

$$Z = -(F_L + F_D \sin \alpha) \quad (3.95)$$

Nuevamente tomando solo el primer termino en la expansión de Taylor para la función seno y asumiendo que  $\alpha$  tienen un valor infinitesimal

$$\sin \alpha \simeq 1 \quad (3.96)$$

Con este resultado la ecuación (3.95) se reescribe

$$Z = -(F_L + F_D \alpha) \quad (3.97)$$

Reescribiendo la ecuación (3.95) en termino de la ecuación (3.55),

$$\frac{1}{2} S \rho C_Z = -\frac{1}{2} S \rho [C_L + C_D \alpha] C_Z = [C_L + C_D \alpha] \quad (3.98)$$

Derivando parcialmente con respecto a  $\alpha$

$$\frac{\partial C_Z}{\partial \alpha} = -\left[ \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} + \alpha \frac{\partial C_D}{\partial \alpha} + C_D \right] \quad (3.99)$$

Evaluando en las condiciones de vuelo de referencia, es decir  $\alpha = 0$

$$C_{Z\alpha} = \left( \frac{\partial C_Z}{\partial \alpha} \right)_0 = -[C_{L\alpha} + (0) \frac{\partial C_D}{\partial \alpha} + C_{D0}] = -[C_{L\alpha} + C_{D0}] \quad (3.100)$$

### 3.3.5. $C_{Z\dot{\alpha}}$

Los coeficientes aerodinámico  $C_{Z\dot{\alpha}}$  y  $C_{m\dot{\alpha}}$  Surge debido a la demora en la corriente descendente del ala al llegar a la cola.

A medida que el ángulo de ataque del ala cambia la circulación alrededor de esta se altera el cambio en la circulación altera la caída del flujo en la cola, sin embargo se necesita de un tiempo finito para que esto suceda. Al flujo de viento que atraviesa le toma un tiempo  $\Delta t = l_t/u$  para llegar desde el ala hasta la cola de la aeronave. Esto se muestra en la figura (3.4)

El retraso en el ángulo de ataque de la cola puede expresarse como

$$\Delta\alpha_t = \frac{d\varepsilon}{dt}\Delta t \quad (3.101)$$

donde  $\frac{d\varepsilon}{dt}$  es un resultado derivado de a teoría de ala finita [10] y definido como

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2C_{L\alpha_w}}{\pi AR_w} \quad (3.102)$$

Entonces

$$\Delta\alpha_t = \frac{d\varepsilon}{dt} \frac{l_t}{u_0} = \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} \frac{l_t}{u_0} = \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \dot{\alpha} \frac{l_t}{u_0} \quad (3.103)$$

Ya que se trabaja solamente con la sustentación en la cola de la aeronave, y como la única fuerza aerodinámica sobre este ehe es la fuerza de sustentación  $L$  entonces

$$\Delta Z = -\Delta l_t \quad (3.104)$$

(Donde el subíndice  $t$  hace referencia a "tail", cola en inglés)

Reescribiendo la ecuación (3.104)

$$\Delta Z = QS\Delta C_z = -\Delta l_t = -\Delta C_{l_t} S_t Q_t = -C_{L\alpha_t} \Delta\dot{\alpha} S_t Q_t \quad (3.105)$$

entonces

$$\Delta C_Z = -\frac{\Delta t}{QS} = -\frac{C_{L\alpha_t} \Delta\alpha_t Q_t S_t}{QS} \quad (3.106)$$

done  $C_{L\alpha_t}$  es la derivada del coeficiente de sustentación con respecto al ángulo de ataque en la cola.

De la ecuación (3.106)

$$\Delta C_Z = -C_{L\alpha_t} \Delta\alpha_t \eta \frac{S_t}{S} \quad (3.107)$$

donde

$$\eta = \frac{Q_t}{Q} \quad (3.108)$$

llamado factor de eficiencia horizontal de cola

Por el resultado de la ecuación (3.103)

$$\Delta C_Z = -C_{L\alpha_t} \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \dot{\alpha} \frac{l_t}{u_0} \eta \frac{S_t}{S} \quad (3.109)$$

Nuevamente para conservar a  $C_{Z_{\dot{\alpha}}}$  como un coeficiente adimensional, se define

$$C_{Z_{\dot{\alpha}}} = \frac{\partial C_Z}{\partial(\dot{\alpha}\bar{c}/2u_0)} = \frac{2u_0}{\bar{c}} \frac{\partial C_Z}{\partial \dot{\alpha}} \quad (3.110)$$

Por las consideraciones tomadas desde el principio derivar  $C_{Z_{\dot{\alpha}}}$  es equivalente a derivar  $\Delta C_{Z_{\dot{\alpha}}}$ , derivando respecto de  $\dot{\alpha}$  la ecuación (3.109) se obtiene

$$C_{Z_{\dot{\alpha}}} = -\frac{2u_0}{\bar{c}} [C_{L_{\alpha t}} \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \frac{l_t}{u_0} \eta \frac{S_t}{S}] = -2V_H \eta C_{L_{\alpha}} \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \quad (3.111)$$

Donde  $\frac{l_t S_t}{\bar{c} S} = V_H$ , llamado relación de volumen horizontal de cola.

### 3.3.6. $C_{Z_{\delta_e}}$

De la ecuación (3.75)

$$\Delta C_L = C_L - C_{L_0} = C_{L_{\alpha}} \alpha + C_{L_{\delta_e}} \delta_e + \dots \quad (3.112)$$

En este desarrollo solo se consideran con los términos donde aparece  $\delta_e$ , obteniendo

$$\Delta C_L = C_{L_{\delta_e}} \delta_e \quad (3.113)$$

En la ecuación (3.113)

$$C_{L_{\delta_e}} = \frac{dC_L}{d\delta_e} \quad (3.114)$$

Al igual que en la ecuación (3.111)

$$\Delta Z = -\Delta L = -\Delta L_t \quad (3.115)$$

De la ecuación (3.115)

$$-\Delta L = QS \Delta C_L \quad (3.116)$$

Entonces

$$\Delta C_L = \frac{S_t Q_t \Delta C_{L_t}}{QS} = \eta \frac{S_t}{S} \Delta C_{L_t} \quad (3.117)$$

Combiando la ecuación (3.117) con el resultado de la ecuación (3.113) se obtiene

$$\Delta C_L = \eta \frac{S_t}{S} \frac{dC_L}{d\delta_e} \delta_e \quad (3.118)$$

Derivando (3.118) con respecto a  $\delta_e$

$$C_{L_{\delta_e}} = \eta \frac{S_t}{S} \frac{dC_L}{d\delta_e} \quad (3.119)$$

### 3.3.7. $C_{m_u}$

El coeficiente de torque  $m$  depende del número de Mach que a su vez depende de la velocidad del sonido, por tanto

$$C_m = \frac{\partial C_m}{\partial(u/u_0)} = u_0 \frac{\partial C_m}{\partial u} \quad (3.120)$$

Podemos reescribir la ecuación (3.120)

$$C_{m_u} = \frac{a}{a} u_0 \frac{\partial C_m}{\partial u} = \frac{u_0}{a} \frac{\partial C_m}{\partial(u/a)} = M_0 \frac{\partial C_m}{\partial M} \quad (3.121)$$

### 3.3.8. $C_{m_\alpha}$

La derivada del coeficiente con respecto al ángulo de ataque  $\alpha$  puede ser planteada como la suma de las derivadas de cabeceo, con respecto al ángulo de ataque del fuselaje  $f$ , el ala  $w$ , y la cola  $t$ .

$$C_{m_\alpha} = C_{m_{\alpha_w}} + C_{m_{\alpha_f}} + C_{m_{\alpha_t}} \quad (3.122)$$

Para obtener  $C_{m_{\alpha_w}}$  se analiza la figura (3.4), en la cual se remplazan el ala por la línea de cuerda  $\bar{c}$ , la distancia de la línea de cuerda al centro aerodinámico se denota por  $X_{ac}$ , y la distancia del centro de la línea de cuerda al centro de masas se denota por  $X_{cg}$ . El ángulo de la línea de cuerda con la línea de referencia del fuselaje se denota por  $i_w$ .

Sumando los torques al centro de gravedad se obtiene

$$\begin{aligned} M_{cgw} = & L_w \cos(\alpha_w - i_w)(X_{cg} - X_{ac}) + D_w \sin(\alpha_w - i_w)(X_{cg} - X_{ac}) \\ & + L_w \sin(\alpha_w - i_w)(Z_{cg}) - D_w \cos(\alpha_w - i_w)(Z_g) + M_{cgw} \end{aligned} \quad (3.123)$$

dividiendo (3.123) por  $\frac{1}{2}\rho V^2 S \bar{c}$ , para quedarse solamente con  $C_m$

$$C_{m_{cgw}} = C_{Lw} \left( \frac{X_{cg}}{\bar{c}} - \frac{X_{ac}}{\bar{c}} \right) \cos(\alpha_w - i_w) \quad (3.124)$$

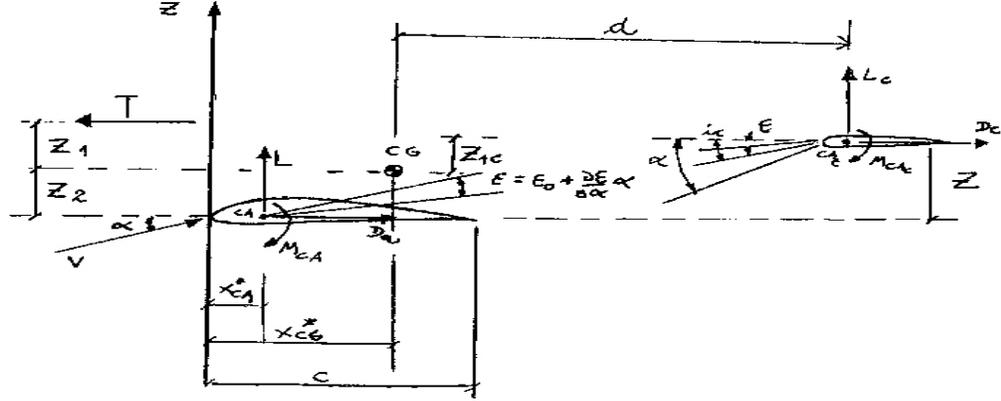


Figura 3.4: Imagen del sistema ala timón

Asumiendo que el ángulo de ataque es infinitesimal, se encuentra que

$$\cos(\alpha_w - i_w) \simeq 1 \quad \sin(\alpha_w - i_w) \simeq \alpha_w - i_w \quad (3.125)$$

Además  $C_L \gg C_D$ , obteniendo

$$C_{mcgw} = C_{Lw} \left( \frac{X_{cg}}{\bar{c}} - \frac{X_{ac}}{\bar{c}} \right) + C_{Lw} \frac{Z_g}{\bar{c}} (\alpha_w - i_w) \quad (3.126)$$

Si después se desprecia el término  $C_{Lw} \frac{Z_g}{\bar{c}} (\alpha_w - i_w)$  en (3.126)

Se obtiene

$$C_{mcgw} = C_{macw} + C_{Lw} \left( \frac{X_{cg}}{\bar{c}} - \frac{X_{ac}}{\bar{c}} \right) \quad (3.127)$$

Introduciendo para  $C_L$  de la ecuación (3.76) se obtiene

$$C_{mcgw} = (C_{mcaw} + C_{Law} + C_{L\alpha w} \alpha_w) \left( \frac{X_{cg}}{\bar{c}} - \frac{X_{ac}}{\bar{c}} \right) \quad (3.128)$$

Derivando  $C_{mcgw}$  con respecto a  $\alpha_w$  y evaluando en las condiciones de vuelo de referencia

$$\left( \frac{\partial C_{mcgw}}{\partial \alpha_w} \right)_0 = C_{m\alpha w} = C_{L\alpha w} \left( \frac{X_{cg}}{\bar{c}} - \frac{X_{ac}}{\bar{c}} \right) \quad (3.129)$$

o simplemente

$$C_{m\alpha w} = C_{L\alpha w} \left( \frac{X_{cg}}{\bar{c}} - \frac{X_{ac}}{\bar{c}} \right) \quad (3.130)$$

Para encontrar  $C_{m\alpha_t}$  se debe analizar la fuerza de sustentación  $l$ . esta puede tomarse como la suma de la sustentación, por el ala  $L_w$ , y sustentación por la cola de la aeronave  $l_t$

$$L = L_w + L_t \quad (3.131)$$

Reescribiendo

$$L = QSC_z = QSC_{Lw} + Q_t S_t C_{Lt} C_z = Q_t S_t C_{Lt} + C_{Lw} = \eta \frac{S_t}{S} C_{Lt} + C_{Lw} \quad (3.132)$$

Por otro lado el torque  $M_t$  producido por la fuerza actuando en la cola de la aeronave puede igualarse a la distancia de la cola al centro de masas  $l_t$  por la fuerza de sustentación en la cola.

$$M_t = l_t \times (-L_t) = -l_t L_t \sin \theta', \text{ donde } \theta' = 90^\circ$$

Entonces

$$M_t = l_t L_t \quad (3.133)$$

Dividiendo (3.133) entre  $\frac{1}{2}\rho V^2 S \bar{c}$

$$\frac{M_t}{\frac{1}{2}\rho V^2 S \bar{c}} = C_m = -\frac{l_t S_t}{S \bar{c}} \eta C_{Lt} \quad (3.134)$$

ya que  $V_H = \frac{l_t S}{\bar{c} S}$ , la ecuación (3.134) se reescribe

$$C_m = -V_H \eta C_{Lt}. \quad (3.135)$$

El ángulo de ataque de la cola  $\alpha_t$  es escrito en muchos textos como

$$\alpha_t = \alpha_w - i_w - \varepsilon + i_t \quad (3.136)$$

donde  $\alpha_w$  es el ángulo de ataque del ala,  $i_w$  es el ángulo de incidencia del ala,  $i_t$  es el ángulo de incidencia de la cola y  $\varepsilon$  es el ángulo de deslizamiento.

el coeficiente  $C_{Lt}$  puede escribirse como

$$C_{Lt} = C_{L\alpha_t} \alpha_t = C_{L\alpha_t} (\alpha_w - i_w - \varepsilon + i_t) \quad (3.137)$$

El ángulo de deslizamiento se puede expresar como

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \alpha_w \quad (3.138)$$

donde  $\varepsilon_0$  es ángulo de deslizamiento cuando  $\alpha = 0$

Sustituyendo los resultados de las ecuaciones (3.137) y (3.138) en (3.135)

$$\begin{aligned} C_m &= -V_H \eta C_{L\alpha_t} (\alpha_w - i_w + \varepsilon_0 + \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \alpha_w + i_t) C_m \\ &= V_H \eta C_{L\alpha_t} (\varepsilon_0 + i_w - i_t) - V_H \eta C_{L\alpha_t} \alpha (1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}) \end{aligned} \quad (3.139)$$

Derivando (3.139) entre  $\alpha_t$

$$C_{m\alpha_t} = -\eta V_H C_{L\alpha_t} (1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}) \quad (3.140)$$

Con el resultado de la ecuación (3.137) y (3.131) sustituyendo en (3.123) se obtiene

$$C_{m\alpha} = C_{L\alpha_w} (\frac{X_{Cg}}{\bar{c}} - \frac{X_{ac}}{\bar{c}}) + C_{m\alpha_f} - \eta V_H C_{L\alpha_t} (1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}) \quad (3.141)$$

Del análisis hecho sobre la derivada de estabilidad  $C_{m\alpha}$  para el ala sola, entonces de la ecuación del torque sobre un ala sola (3.130) se deduce que, para haya estabilidad longitudinal en el ala el coeficiente de torque  $C_{m\alpha_w}$  debe ser negativo, debido a que  $C_{L\alpha_w}$  siempre es positiva, entonces  $X_{Cg} < X_{Ca}$ . Esta será condición de equilibrio para el ala sola.

De igual manera en las condiciones de estabilidad estática longitudinal para el sistema ala-estabilizador se debe cumplir que  $C_{m\alpha} < 0$ , de la ecuación (3.141),  $C_{m\alpha}$  se encuentra acotado en un rango de valores que consideran los valores para  $C_{m\alpha}$  como aceptable [12], es decir  $-0,01 < C_{m\alpha} < -0,02$

El momento total sobre el Centro de gravedad de la aeronave puede obtenerse sumando el momento del ala, la cola y el fuselaje, obteniendo (3.141), si en esa ecuación  $C_{m\alpha} = 0$  entonces la aeronave se encontrará en equilibrio.

$$0 = C_{m\alpha} = C_{L\alpha_w} (\frac{X_{Cg}}{\bar{c}} - \frac{X_{ac}}{\bar{c}}) + C_{m\alpha_f} - \eta V_H C_{L\alpha_t} (1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha})$$

Si de esta ecuación se despeja  $\frac{X_{Cg}}{\bar{c}}$ , se obtiene

$$\frac{X_{Cg}}{\bar{c}} = \frac{X_{ac}}{\bar{c}} - \frac{C_{m\alpha_f}}{C_{L\alpha_w}} + \frac{C_{L\alpha_t}}{C_{L\alpha_w}} \eta V_H C_{L\alpha_t} (1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha})$$

En esta ecuación  $\frac{X_{Cg}}{\bar{c}}$  es llamado el punto de neutro, representa la posición más retrasada que puede ocupar dicho centro de masas para que el avión sea estáticamente estable.

**3.3.9.**  $C_{m\dot{\alpha}}$ 

De la ecuación (3.133), una perturbación en el torque  $M$  puede escribirse como

$$\Delta M = -l_t \Delta L_t = -l_t C_{L\alpha_t} \Delta \alpha_t Q_t S_t \quad (3.142)$$

con el resultado de la ecuación (3.103) sustituyendo en (3.142) y dividiendo entre  $QS$ , se obtiene

$$\frac{\Delta M}{QS} = \Delta C_m = -\frac{l_t C_{L\alpha_t} + \Delta \alpha_t Q_t S_t}{QS} = -\eta V_H C_{L\alpha_t} \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \dot{\alpha} \frac{l_t}{u_0} \quad (3.143)$$

Si se define  $C_{m\dot{\alpha}} = \frac{\partial C_m}{\partial(\dot{\alpha}\bar{c}/2u_0)} = \frac{2u_0}{\bar{c}} \frac{\partial C_m}{\partial \dot{\alpha}}$

Como se había mencionado anteriormente derivando  $\Delta C_m$  equivale a derivar  $C_m$

Entonces al derivar  $\Delta C_m$  con respecto de  $\dot{\alpha}$  se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}} \left( -\eta V_H C_{L\alpha_t} \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \dot{\alpha} \frac{l_t}{u_0} \right) = \left( -\eta V_H C_{L\alpha_t} \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \frac{l_t}{u_0} \right) \left( \frac{2u_0}{\bar{c}} \right) \quad (3.144)$$

$$\Rightarrow C_{m\dot{\alpha}} = -2C_{L\alpha_t} \eta V_H \frac{l_t}{\bar{c}} \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \quad (3.145)$$

**3.3.10.**  $C_{m_q}$ 

De la ecuación (3.133)

$$\Delta M = l_t \Delta L_t = -l_t C_{L\alpha_t} \Delta \alpha_t Q_t S_t \quad (3.146)$$

Ya que  $\Delta \alpha_t$  puede escribirse como  $\Delta \alpha_t = \frac{ql_t}{u_0}$

Entonces (3.146) puede reescribirse como

$$\Delta M = -l_t C_{L\alpha_t} \frac{ql_t}{u_0} Q_t S_t \quad (3.147)$$

Dividiendo entre  $QS$  para obtener  $\Delta C_m$

$$\frac{\Delta M}{QS} = \Delta C_m = -l_t C_{L\alpha_t} \frac{ql_t Q_t S_t}{u_0 QS} = -V_H \eta C_{L\alpha_t} \frac{ql_t}{u_0} \quad (3.148)$$

Nuevamente por mantener sin dimensión a  $C_{m_q}$ , se define

$$C_{m_q} = \frac{\partial C_m}{\partial(\dot{\alpha}\bar{c}/2u_0)} = \frac{2u_0}{\bar{c}} \frac{\partial C_m}{\partial q} \quad (3.149)$$

Derivar  $\Delta C_m$  es equivalente a derivar  $C_m$  [10] es equivalente a derivar  $C_m$  por tanto

$$C_{m_q} = \frac{\partial}{\partial q}(-V_H\eta C_{L\alpha t} \frac{ql_t}{u_0}) = -V_H\eta C_{L\alpha t} \frac{l_t}{u_0} (\frac{2u_0}{\bar{c}}) \quad (3.150)$$

$$\Rightarrow C_{m_q} = -2V_H\eta C_{L\alpha t} \frac{l_t}{\bar{c}} \quad (3.151)$$

### 3.3.11. $C_{m_{\delta_e}}$

De la ecuación (3.133)

$$\Delta M = -l_t \Delta L_t \quad (3.152)$$

donde

$$\Delta L = \Delta C_{L_t} \frac{1}{2} \rho V^2 S_t l_t \quad (3.153)$$

Dividiendo la ecuación (104) entre  $\frac{1}{2} \rho S \bar{c} u^2$

$$\frac{\Delta M}{\frac{1}{2} \rho S \bar{c} u^2} = \Delta C_m = \frac{l_t \Delta C_{L_t} \frac{1}{2} \rho V^2 S_t}{\frac{1}{2} \rho S \bar{c} u^2} = -V_H \eta \Delta C_{L_t} \quad (3.154)$$

De la ecuación (3.117)

$$\Delta C_L = \eta \frac{S_t}{S} \Delta C_{L_t} \Rightarrow \Delta C_{L_t} = \frac{\Delta C_L S}{\eta S_t} \quad (3.155)$$

ya que  $\Delta C_L$  también es  $\eta \frac{S_t}{S} \frac{dC_{L_t}}{d\delta_e} \delta_e = \Delta C_L$

entonces

$$\Delta C_{L_t} = \frac{dC_{L_t}}{d\delta_e} \delta_e \quad (3.156)$$

Con el resultado de la ecuación (3.155) sustituido en la ecuación (3.154) se obtiene

$$\Delta C_m = -V_H \eta \frac{dC_{L_t}}{d\delta_e} \delta_e \quad (3.157)$$

Derivando respecto de  $\delta_e$  la ecuación (3.156) se obtiene

$$C_{m_{\delta_e}} = -V_H \eta \frac{dC_{L_t}}{d\delta_e} \quad (3.158)$$

### 3.4. Aproximación longitudinal

El conjunto de ecuaciones longitudinales ya linealizadas escritas en su forma matricial son llamadas espacio de estados y son representadas matemáticamente como

$$\dot{x} = Ax + B\eta \quad (3.159)$$

donde  $x$  es el vector de estado,  $\eta$  el vector de control y las matrices  $A$  y  $B$  contienen las derivadas dimensionales de la aeronave.

En la practica  $Z_q$  y  $Z_{\dot{w}}$  son despreciadas porque sus contribuciones son insignificantes [10]. En las ecuaciones (3.46) y (3.47) el ángulo  $\theta_0$  tiene un valor que tiende a cero, por lo cual  $\cos\theta_0 \simeq 1$  y  $\sin\theta \simeq 0$ ; entonces la ecuación (3.46) toma la forma

$$\Delta\dot{u} = X_u\Delta u + X_w\Delta w + g\Delta\theta + X_{\delta_e}\Delta\delta_e + X_{\delta_T}\Delta\delta_T \quad (3.160)$$

Con las consideraciones anteriores para  $Z_q$  y  $Z_{\dot{w}}$  y despejando  $\Delta\dot{w}$  de la ecuación (3.46) esta se reescribe como

$$\Delta\dot{w} = Z_u\Delta u + Z_w\Delta w + u_0\Delta\dot{\theta} + X_{\delta_e}\Delta\delta_e + X_{\delta_T}\Delta\delta_T \quad (3.161)$$

De la ecuación (3.39)

$$\Delta\dot{\theta} = \Delta q \quad (3.162)$$

Con la ecuación (3.39) se puede reescribir la ecuación (4.47) como

$$-M_u\Delta u - M_w\Delta w - M_{\dot{w}}\Delta\dot{w} + \Delta\dot{q} - M_q\Delta\dot{\theta} = M_{\delta_e}\Delta\delta_e + M_{\delta_T}\Delta\delta_T \quad (3.163)$$

al despejar  $\Delta\dot{q}$  de (3.163) se obtiene

$$\Delta\dot{q} = M_u\Delta u + M_w\Delta w + M_{\dot{w}}\Delta\dot{w} + M_q\Delta q + M_{\delta_e}\Delta\delta_e + M_{\delta_T}\Delta\delta_T \quad (3.164)$$

si en la ecuación (3.164) se sustituye  $\Delta\dot{w}$  por

$Z_u\Delta u + Z_w\Delta w + u_0\Delta\dot{\theta} + X_{\delta_e}\Delta\delta_e + X_{\delta_T}\Delta\delta_T$  y se agrupan terminos se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta\dot{q} = & (M_u + M_{\dot{w}}Z_u)\Delta u + (M_w + M_{\dot{w}}Z_w)\Delta w + (M_q + M_{\dot{w}}u_0)\Delta q \\ & + (M_{\delta_e} + M_{\dot{w}}X_{\delta_e})\Delta\delta_e + (M_{\delta_T} + M_{\dot{w}}X_{\delta_T})\Delta\delta_T \end{aligned} \quad (3.165)$$

Si en las ecuaciones(3.161),(3.160),(3.162),(3.165) con los terminos  $\Delta\dot{u}$ ,  $\Delta\dot{w}$ ,  $\Delta\dot{\theta}$ ,  $\Delta\dot{q}$  son despejados y se toma a  $(\Delta u, \Delta w, \Delta q, \Delta\theta)^T$  como el vector de estado y a  $(\Delta\delta_e, \Delta\delta_T)^T$  como el vector de control, entonces la representación en el espacio de estados de las ecuaciones (3.46),(3.47),(3.48) y (3.33) tiene la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{u} \\ \Delta \dot{w} \\ \Delta \dot{q} \\ \Delta \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_u & X_w & 0 & -g \\ Z_u & Z_w & u_0 & 0 \\ M_u + M_{\dot{w}}Z_u & M_w + M_{\dot{w}}Z_w & M_q + M_{\dot{w}}u_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta w \\ \Delta q \\ \Delta \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{\delta_e} & X_{\delta_T} \\ Z_{\delta_e} & Z_{\delta_T} \\ M_{\delta_e} + M_{\dot{w}}Z_{\delta_e} & M_{\delta_T} + M_{\dot{w}}Z_{\delta_T} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_e \\ \Delta \delta_T \end{bmatrix}$$

La fuerza sobre el eje  $X$  y el eje  $Z$  en el sistema inercial de cuerpo  $F^b$ , así como el torque  $M$  forman el conjunto de ecuaciones longitudinales de una aeronave. Dichas ecuaciones al describir el movimiento de un avión perturbado de sus condiciones de vuelo en equilibrio se caracterizan por dos modos de oscilación en su movimiento.

El primero de estos modos de movimiento llamado periodo largo es un ligero amortiguamiento en el cambio de altitud a lo largo del tiempo Figura(3.5).

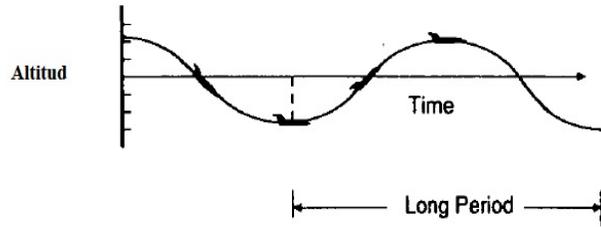


Figura 3.5: Periodo de oscilación largo, de un tiempo estimado en 30 segundos

El segundo es un movimiento amortiguado más fuerte y tiene un periodo corto de oscilación se llama modo de periodo corto Figura(3.6).

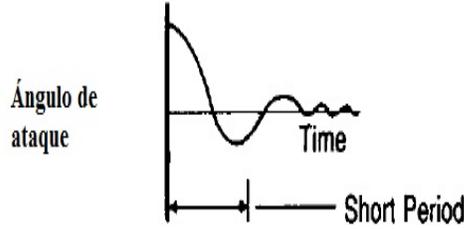


Figura 3.6: Periodo Corto, con una velocidad  $u$  constante, y una frecuencia de fracciones de segundo.

### 3.4.1. Periodo largo

El modo de oscilación largo es característico por cambios en la actitud pitch, la altitud y la velocidad en un ángulo de ataque casi constante.

Una aproximación al modo de periodo largo se obtiene al despreciar el torque  $M$  y asumir que el ángulo de ataque es cero

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta w}{u_0} \quad (3.166)$$

Si  $\Delta\alpha = 0$  entonces  $\Delta w = 0$

Con las consideraciones de la ecuación (3.166), las ecuaciones (3.46) y (3.47) toman la forma

$$\left(\frac{d}{dt} - X_u\right)\Delta u + \Delta\theta = X_{\delta_e}\Delta\delta_e + X_{\delta_T}\Delta\delta_T \quad (3.167)$$

$$-Z_u\Delta u - \left((u_0 + Z_q)\frac{d}{dt}\right)\Delta\theta = Z_{\delta_e}\Delta\delta_e + Z_{\delta_T}\Delta\delta_T \quad (3.168)$$

De la ecuación (3.167)

$$\Delta\dot{u} = -g\Delta\theta + X_u\Delta u + X_{\delta_e}\Delta\delta_e + X_{\delta_T}\Delta\delta_T \quad (3.169)$$

De la ecuación (3.168), despreciando  $Z_q$  se obtiene

$$\Delta\dot{\theta} = \frac{-Z_u\Delta u}{u_0} + Z_{\delta_e}\Delta\delta_e + Z_{\delta_T}\Delta\delta_T \quad (3.170)$$

Del sistema formado por las ecuaciones (3.169) y (3.170), la matriz de estados resultante es

$$A = \begin{bmatrix} X_u & -g \\ \frac{-Z_u}{u_0} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.171)$$

De esta matriz se puede obtener la ecuación característica para encontrar la frecuencia y relación de amortiguamiento de periodo largo.

De la ecuación

$$|\lambda I - A| = 0 \quad (3.172)$$

Donde  $\lambda$  es una constante e  $I$  es la matriz identidad

De las ecuaciones (3.171) y (3.172) se obtiene

$$\begin{vmatrix} \lambda - X_u & -1 \\ \frac{-Z_u}{u_0} & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - X_u \lambda - \frac{2g}{u_0} = 0 \quad (3.173)$$

Esta es una ecuación característica de la forma.

$$\lambda^2 - 2\zeta\omega\lambda - \omega^2 = 0 \quad (3.174)$$

donde los eigenvalores son

$$\lambda = \left[ X_u \pm \sqrt{X_u^2 + 4\frac{gZ_u}{u_0}} \right] / 2 \quad (3.175)$$

Por ser este un sistema de segundo orden [13] la frecuencia y relación de amortiguamiento son

$$\omega = \sqrt{\frac{-Z_u g}{u_0}} \quad (3.176)$$

$$\zeta = -\frac{X_u}{2\omega_{np}} \quad (3.177)$$

### 3.4.2. Periodo corto

La aproximación de periodo corto es obtenida si la perturbación en la velocidad  $u$  es cero, es decir  $\Delta u = 0$  y por tanto cualquier fuerza sobre el eje  $X$  en el sistema inercial  $F^b$  será despreciada.

Con esas consideraciones las ecuaciones longitudinales ya linealizadas tiene la forma

$$(1 - Z_{\dot{w}})\Delta\dot{w} - Z_w\Delta w - ((u_0 + Z_q)\Delta\dot{\theta}) = Z_{\delta_e}\Delta\delta_e + Z_{\delta_T}\Delta\delta_T \quad (3.178)$$

$$-M_{\dot{w}}\Delta\dot{w} - M_w\Delta w + (\ddot{\theta} - M_q\dot{\theta}) = M_{\delta_e}\Delta\delta_e + M_{\delta_T}\Delta\delta_T \quad (3.179)$$

Despreciando  $Z_q$  y  $Z_{\dot{w}}$ , y tomando en cuenta que  $\Delta q = \Delta\dot{\theta}$   
Las ecuaciones (3.178) y (3.179) toman la forma

$$\Delta w = Z_w\Delta w + u_0\Delta q + Z_{\delta_e}\Delta\delta_e + Z_{\delta_T}\Delta\delta_T \quad (3.180)$$

$$\begin{aligned} \Delta\dot{q} &= M_{\dot{w}}\Delta\dot{w} + M_w\Delta w + M_q\Delta q + M_{\delta_e}\Delta\delta_e + M_{\delta_T}\Delta\delta_T \\ &= M_{\dot{w}}(Z_w\Delta w + u_0\Delta q + Z_{\delta_e}\Delta\delta_e + Z_{\delta_T}\Delta\delta_T) + M_q\Delta q + M_{\delta_e}\Delta\delta_e + M_{\delta_T}\Delta\delta_T \\ &= (M_w + M_{\dot{w}}Z_w)\Delta w + (M_q + M_{\dot{w}}u_0)\Delta q + (M_{\delta_e} + M_{\dot{w}}Z_{\delta_e})\Delta\delta_e + (M_{\delta_T} + M_{\dot{w}}Z_{\delta_T})\Delta\delta_T \end{aligned} \quad (3.181)$$

Del sistema formado por las ecuaciones (3.180) y (3.181), la matriz de estado es

$$A = \begin{bmatrix} Z_w & u_0 \\ M_w + M_{\dot{w}}Z_w & M_q + M_{\dot{w}}u_0 \end{bmatrix} \quad (3.182)$$

De la relación

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta w}{u_0}$$

Se obtiene

$$M_\alpha = \frac{1}{I_y} \frac{\partial M}{\partial \alpha} = \frac{1}{I_y} \frac{\partial M}{(\partial \Delta w / u_0)} = \frac{u_0}{I_y} \frac{\partial M}{\partial w} = u_0 M_w \quad (3.183)$$

$$Z_\alpha = \frac{1}{m} \frac{\partial Z}{\partial \alpha} = \frac{1}{m} \frac{\partial Z}{(\partial \Delta w / u_0)} = \frac{u_0}{m} \frac{\partial Z}{\partial w} = u_0 Z_w \quad (3.184)$$

$$M_{\dot{\alpha}} = \frac{1}{m} \frac{\partial M}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{1}{m} \frac{\partial M}{(\partial \Delta \dot{w} / u_0)} = \frac{u_0}{m} \frac{\partial Z}{\partial \dot{w}} = u_0 M_{\dot{w}} \quad (3.185)$$

Con las ecuaciones (3.183), (3.185) y (3.184), la matriz  $A$  toma la forma.

$$\begin{bmatrix} \frac{Z_\alpha}{u_0} & 1 \\ M_\alpha + M_{\dot{\alpha}} \frac{Z_\alpha}{u_0} & M_q + M_{\dot{\alpha}} \end{bmatrix} = A \quad (3.186)$$

De la ecuación (3.172) se obtiene

$$\begin{vmatrix} \lambda - \frac{Z_\alpha}{u_0} & -1 \\ -M_\alpha - M_{\dot{\alpha}} \frac{Z_\alpha}{u_0} & \lambda - (M_q + M_{\dot{\alpha}}) \end{vmatrix} = \lambda^2 - (M_\alpha + M_{\dot{\alpha}} \frac{Z_\alpha}{u_0})\lambda + M_q \frac{Z_\alpha}{u_0} - M_\alpha = 0 \quad (3.187)$$

Los eigenvalores de la ecuación (3.186) son

$$\lambda = \frac{(M_q + M_{\dot{\alpha}} \frac{Z_\alpha}{u_0}) \pm \sqrt{(M_\alpha + M_{\dot{\alpha}} \frac{Z_\alpha}{u_0})^2 - 4(M_q \frac{Z_\alpha}{u_0} - M_\alpha)}}{2} \quad (3.188)$$

De esta ecuación, por ser un sistema de segundo orden [13], se deduce que la frecuencia sea

$$\omega = \sqrt{(M_q \frac{Z_\alpha}{u_0} - M_\alpha)} \quad (3.189)$$

El amortiguamiento de periodo corto

$$\zeta = -\frac{M_q + M_{\dot{\alpha}} \frac{Z_\alpha}{u_0}}{2\omega_{n_p}} \quad (3.190)$$

# Capítulo 4

## Resultados Numéricos

Para analizar los perfiles simétricos, asimétricos y autoestables se seleccionó el software XFLR5, el cuál permite graficar todo tipo de perfiles aerodinámicos, superficies de sustentación y control, así como analizar sus principales características aerodinámicas, en este estudio se usaron principalmente perfiles NACA de 4 dígitos a excepción del perfil CLARK Y y el perfil NACA 747a415. Este software también permite analizar las principales características aerodinámicas de prototipos a escala, en este caso se diseñaron dos prototipos y se analiza concretamente la estabilidad longitudinal estática en cada prototipo diseñado.

### 4.1. Análisis de perfiles.

**Perfiles simétricos.** El perfil NACA 0009 es un perfil simétrico cuyo máximo espesor corresponde al 9 % de su cuerda. El segundo perfil simétrico, el perfil NACA 0012 es un perfil simétrico cuyo máximo espesor corresponde al 12 % de su cuerda ambos perfiles se muestran en la imagen 4.1.

**Perfiles asimétricos.** En estos perfiles se usa como ejemplo el perfil NACA2412 y el perfil CLARK Y, el perfil NACA2412 tiene una máxima comba de 4 % en relación a la cuerda, ubicada en el lugar 2/10 respecto al largo de la cuerda, y su máximo espesor es de 12 % en relación a la cuerda. El perfil CLARK Y tiene un espesor de 11.7 por ciento y es plano en la superficie inferior con 30 por ciento de la cuerda medida hacia atrás. La parte inferior es plana simplifica las mediciones de ángulo en las hélices, y hace fácil la construcción de las alas en una superficie plana (Este perfil es usado en el

laboratorio por una aeronave modificada a escala). Estos perfiles se muestran en las imágenes 4.1 y 4.2.

**Perfiles asimétricos estables.** Para estos perfiles se eligieron los perfiles NACA 747a415, y el perfil A , este último es un perfil generado de combinar dos perfiles asimétricos, para tener dos curvas medias en un perfil, en el extradós corresponde el perfil NACA2712 y en el intradós el perfil NACA3524. El perfil NACA747a415 es un perfil de la nomenclatura NACA de 6 dígitos [14], ambos perfiles se presentan en la imagen 4.2.

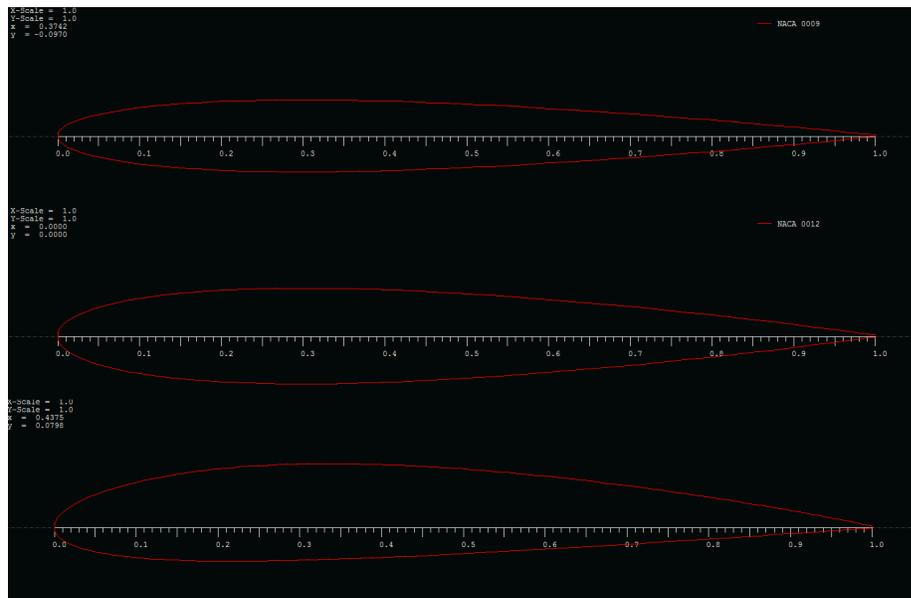


Figura 4.1: En esta imagen se muestran en orden descendente los perfiles NACA0009, NACA0012, y NACA2412.

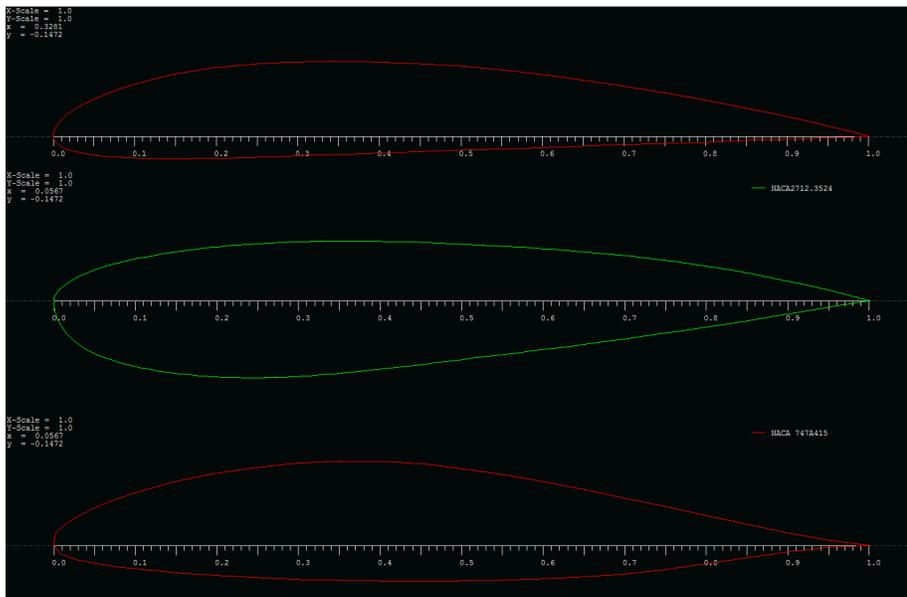


Figura 4.2: En esta imagen se muestran en orden descendente los perfiles CLARKY, Prototipo A, y NACA747a415.

Para analizar los perfiles NACA 0009 y NACA 0012 se usan Valores de Reynolds entre  $4 \times 10^6$  y  $4,4 \times 10^6$ , estos valores fueron elegidos ya que se encuentran cerca de los valores de Reynolds típicos para una aeronave del tamaño de una avioneta [15]. La velocidad elegida fue de .2 Mach, en ángulos que van desde 0 hasta los 15 grados. Las gráficas obtenidas al analizar estos y los demás perfiles corresponden a  $C_l$  en función de  $C_d$ ,  $C_l$  en función de  $\alpha$ ,  $C_m$  en función de  $\alpha$ ,  $C_l/C_d$  en función de  $\alpha$ , estas gráficas junto con las gráficas de la distribución de presión sobre la cuerda muestran la información principal sobre un perfil aerodinámico, y son presentadas en las gráficas (4.3) y (4.2).

Los perfiles asimétricos NACA 2412 y CLARK Y fueron analizados para valores de Reynolds entre  $4 \times 10^6$  y  $4,6 \times 10^6$ , desde  $0^\circ$  a  $20^\circ$  a una velocidad de .2 Mach, los resultados de las gráficas  $C_l$  y  $C_d$ ,  $C_l/C_d$  y  $\alpha$ ,  $C_l$  y  $\alpha$ ,  $C_m$  y  $\alpha$ , así como la distribución de las presiones sobre cada perfil se presenta en las gráficas(4.5) y (4.6).

Los perfiles asimétricos NACA 747a415 y A, fueron analizados para valores de Reynolds en un parámetro de 4 hasta 5 millones, de  $0^\circ$  a  $20^\circ$  a una velocidad de .2 Mach, los resultados se presenta en las gráficas (4.7), (4.8). También se puede visualizar como se distribuyen las presiones sobre los perfiles a medida que aumenta el ángulo de ataque en las gráficas (4.10) y (4.9). Los datos obtenidos de las gráficas de todos los perfiles, considerados relevantes, aparecen en la tabla 4.1.

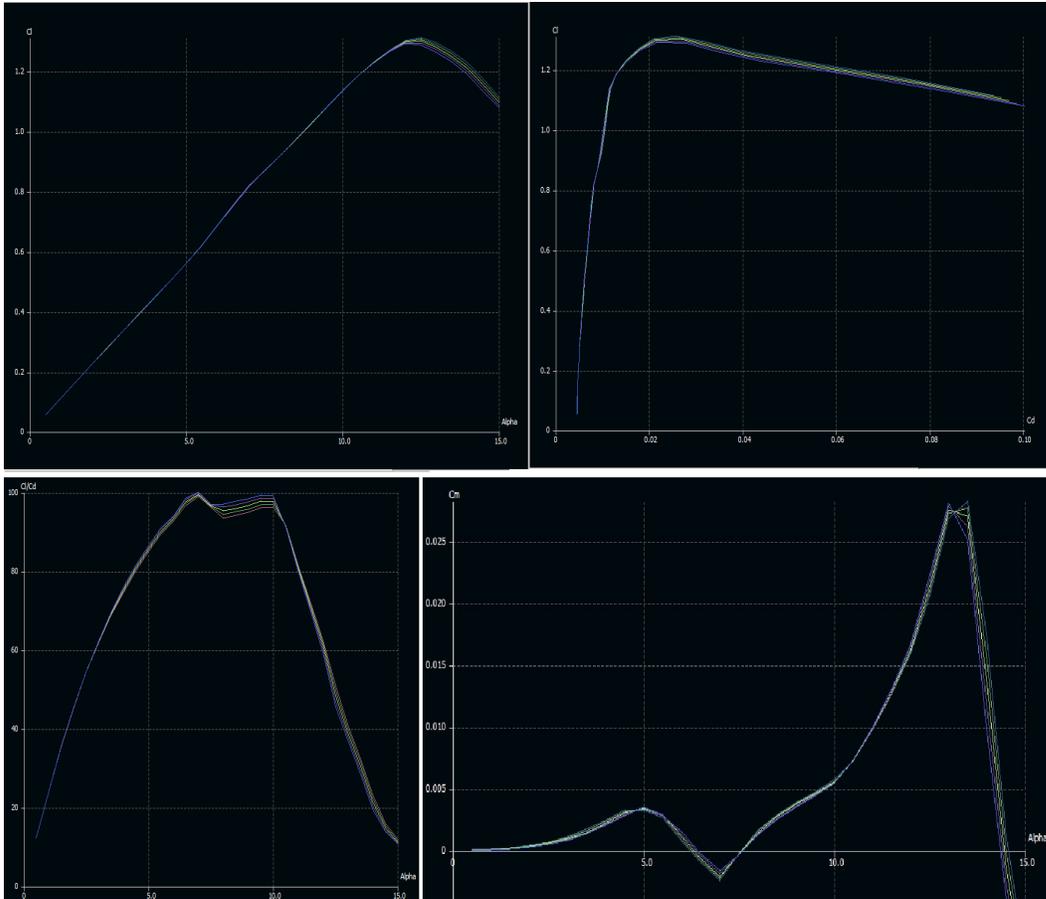


Figura 4.3: Gráficas de  $C_l$  en función de  $C_d$ ,  $C_l/C_d$  en función de  $\alpha$ ,  $C_l$  en función de  $\alpha$ , y  $C_m$  en función de  $\alpha$  para el perfil simétrico NACA009.

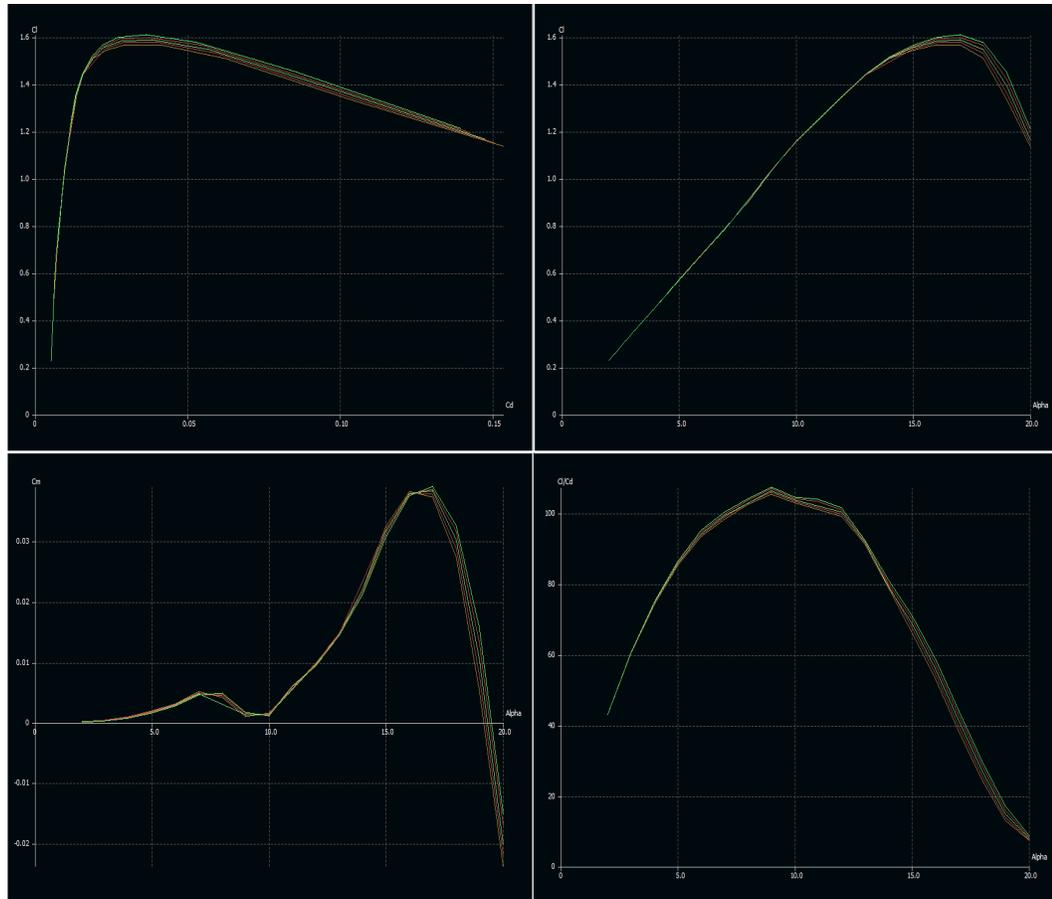


Figura 4.4: Gráficas de  $C_l$  en función de  $C_d$ ,  $C_l$  en función de  $\alpha$ ,  $C_m$  en función de  $\alpha$ , y  $C_l/C_d$  en función de  $\alpha$ , para el perfil simétrico NACA0012.



Figura 4.5: Gráficas de  $C_l$  en función de  $C_d$ ,  $C_m$  en función de  $\alpha$ ,  $C_l$  en función de  $C_d$ , y  $C_l$  en función de  $\alpha$  para el perfil asimétrico NACA2412.

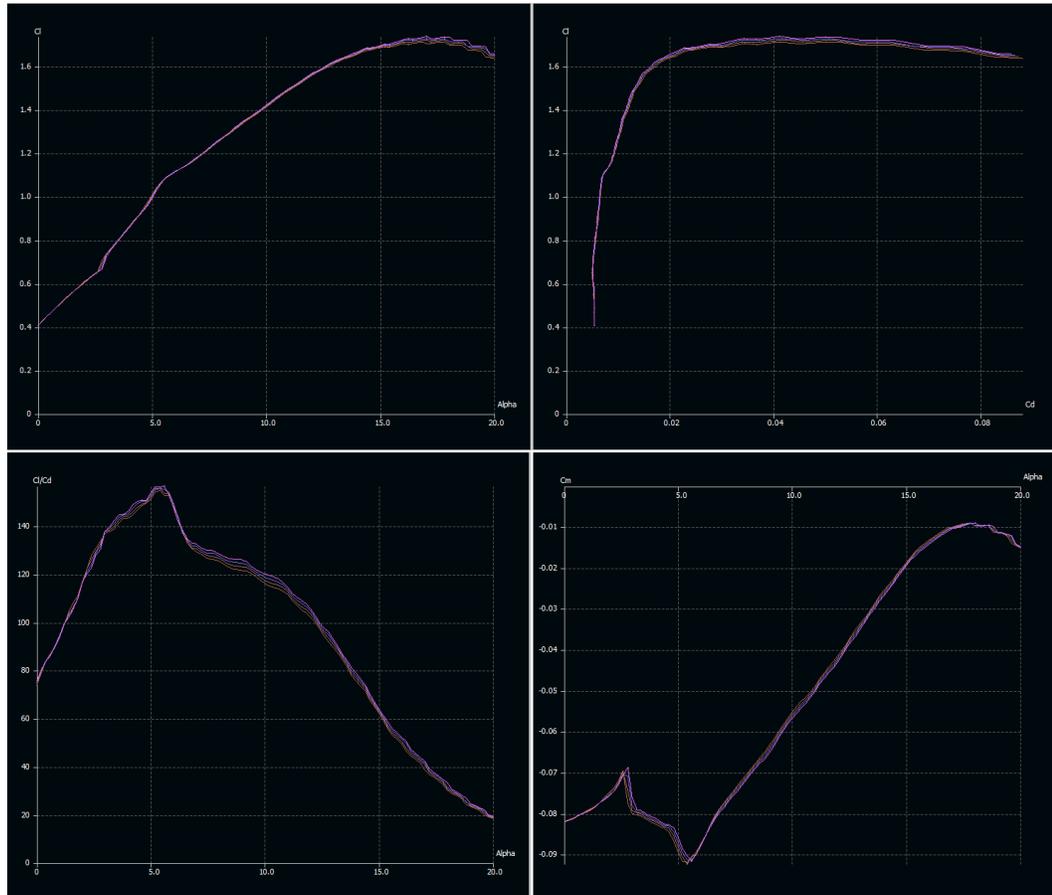


Figura 4.6: Gráficas de  $C_l$  en función de  $C_d$ ,  $C_l/C_d$  en función de  $\alpha$ ,  $C_l$  en función de  $\alpha$ , y  $C_m$  en función de  $\alpha$ , para el perfil asimétrico CLARK Y.

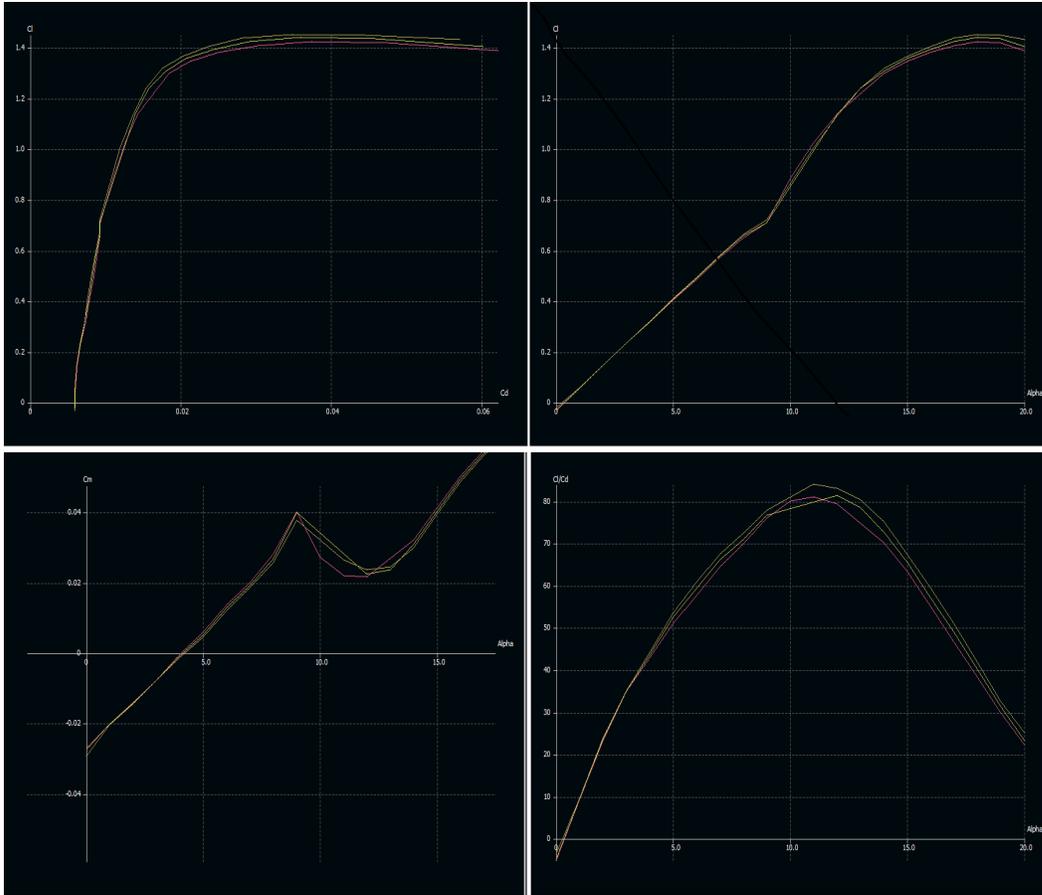


Figura 4.7: Gráficas del coeficiente  $C_l$  en función de  $C_d$ ,  $C_l$  en función de  $\alpha$ ,  $C_m$  en función de  $\alpha$ , y  $C_l/C_d$  en función de  $\alpha$ , para el perfil A

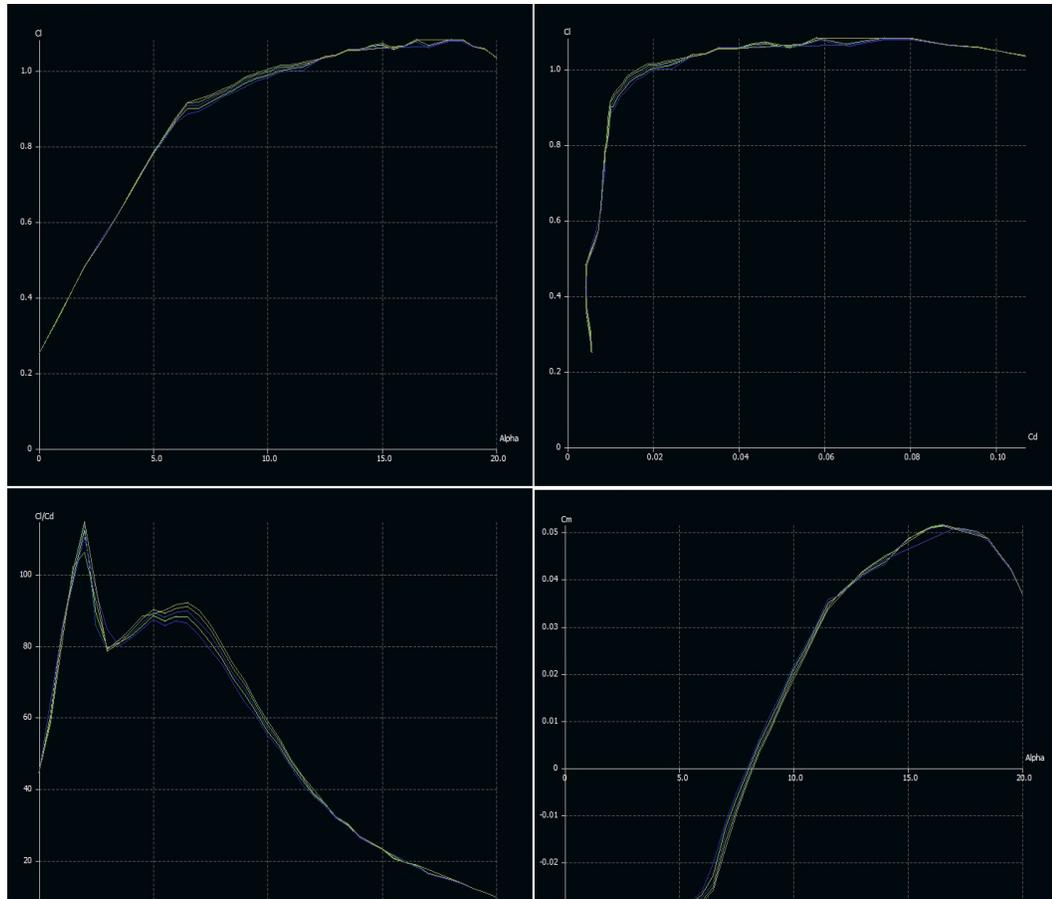


Figura 4.8: Gráfica del coeficiente  $C_l$  en función de  $C_d$ ,  $C_l$  en función de  $\alpha$ ,  $C_m$  en función de  $\alpha$ , y  $C_l/C_d$  en función de  $\alpha$ , para el perfil NACA747a415.

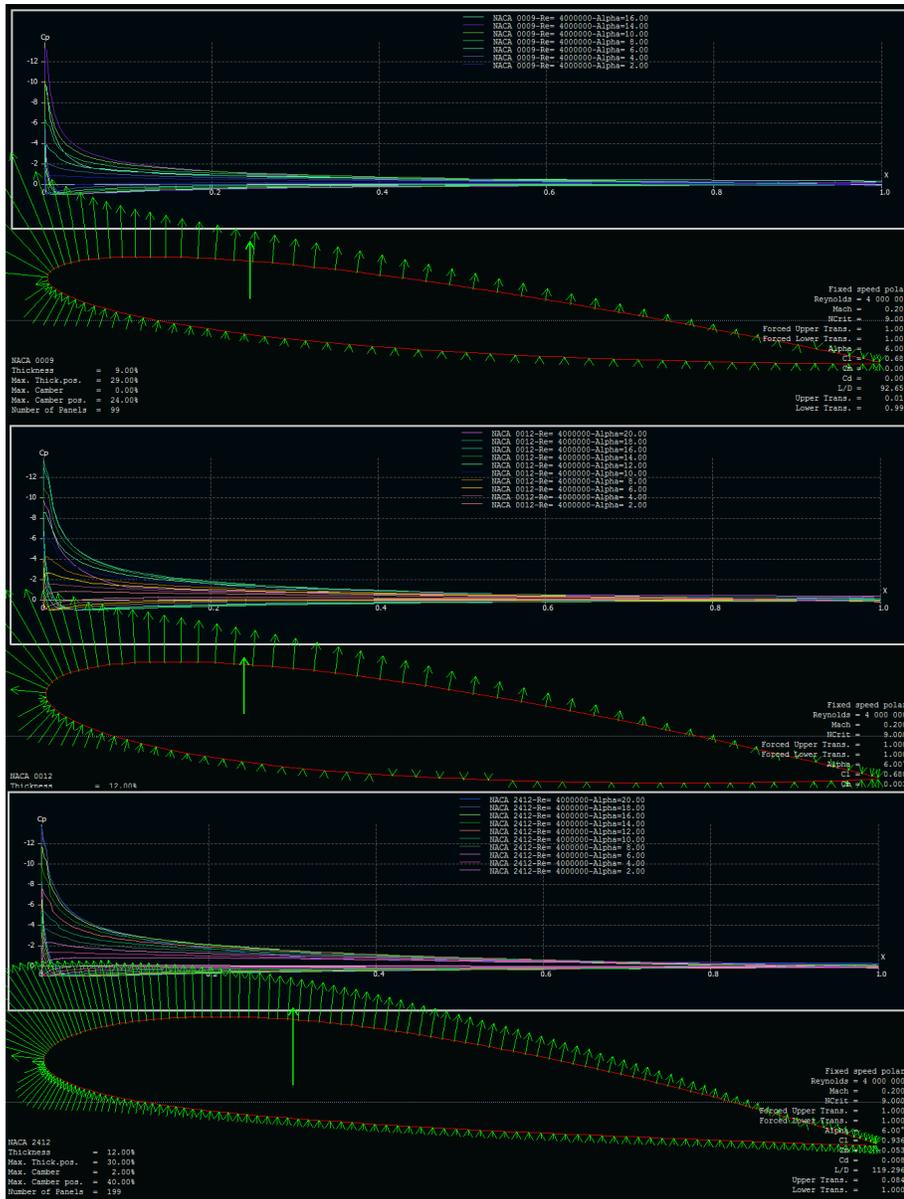


Figura 4.9: Gráficas que muestran la distribución del coeficiente de presión sobre la longitud de la cuerda a diferentes grados y un valor fijo de  $4 \times 10^6$  de Reynolds, junto con la representación de los vectores de fuerza sobre el intradós y el extradós para los perfiles NACA0009, NACA0012, y NACA2412.

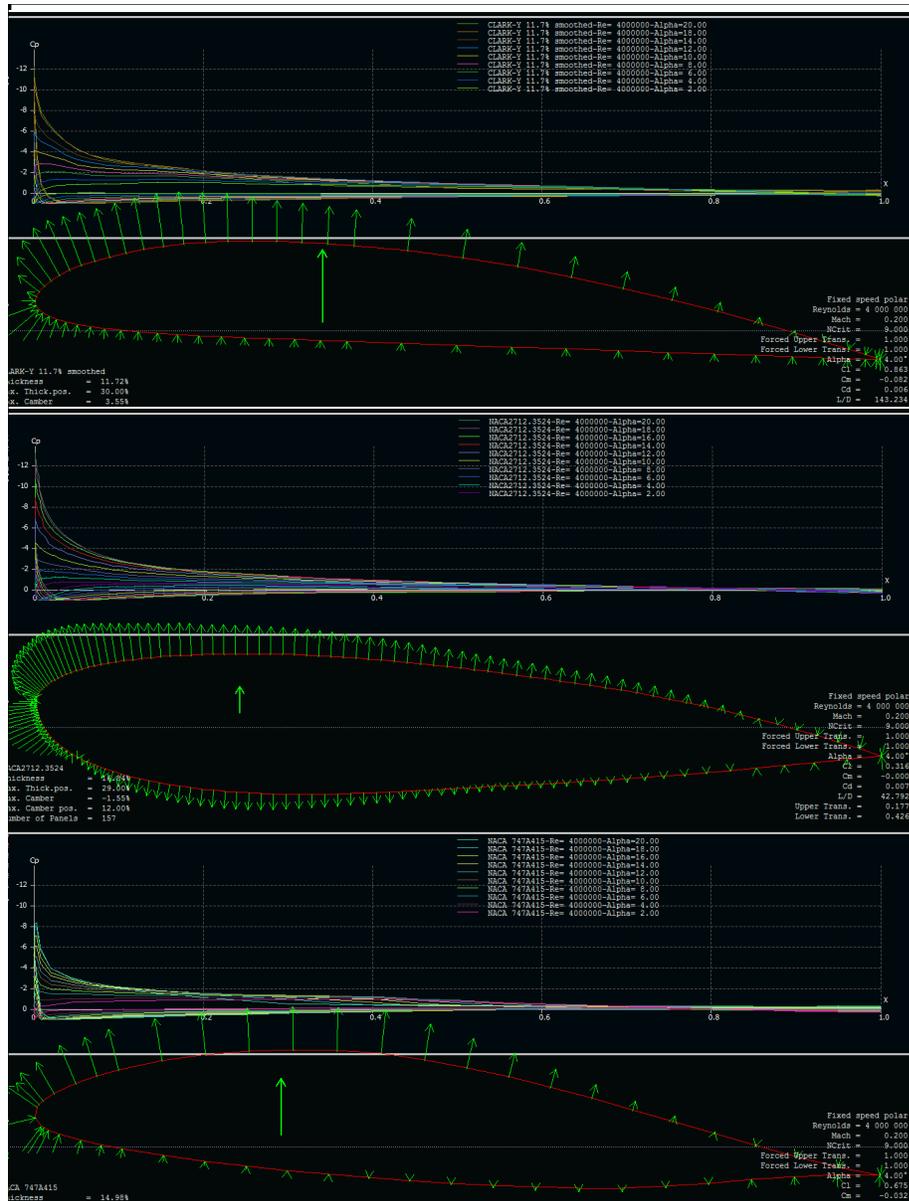


Figura 4.10: Gráficas que muestran la distribución del coeficiente de presión sobre la longitud de la cuerda a diferentes grados y un valor fijo de  $4 \times 10^6$  de Reynolds, junto con la representación de los vectores de fuerza sobre el intradós y el extradós para el perfil CLARK Y, A y NACA747a415.

Perfil	Números de Reynolds	$C_{lmax}$	$\alpha$	Parámetro de $\alpha$ donde $ C_m  < ,005$	$C_l/C_{dmax}$	$\alpha$
NACA0009	$4 \times 10^6$	1.31	12.5	0-9.57	98.88	7.1
	$4.1 \times 10^6$	1.30	12.5	0-9.64	98.88	7.1
	$4.2 \times 10^6$	1.29	12.5	0-9.68	99.26	7.1
	$4.3 \times 10^6$	1.29	12.5	0-9.72	99.82	7.1
	$4.4 \times 10^6$	1.28	12.27	0-9.72	100.01	7.1
NACA0012	$4 \times 10^6$	1.56	17.01	0-6.87	105.45	9.01
	$4.1 \times 10^6$	1.57	17.01	0-10.79	105.86	9.01
	$4.2 \times 10^6$	1.58	17.01	0-10.81	106.06	9.01
	$4.3 \times 10^6$	1.59	17.01	0-10.81	106.87	9.01
	$4.4 \times 10^6$	1.61	17.01	0-10.83	107.47	9.01
NACA2412	$4 \times 10^6$	1.75	17.01	16.11-18.72	121.85	4.46
	$4.2 \times 10^6$	1.76	17.01	16.14-18.87	121.85	4.46
	$4.4 \times 10^6$	1.77	17.01	16.22-19.01	123.01	4.46
	$4.6 \times 10^6$	1.78	17.01	16.25-19.2	123.01	4.46
CLARKY	$4 \times 10^6$	1.70	17.01	No tiene	150.88	5
	$4.2 \times 10^6$	1.72	17.01	No tiene	151.74	5
	$4.4 \times 10^6$	1.73	17.01	No tiene	152.61	5
A	$4.6 \times 10^6$	1.74	17.01	No tiene	147.43	6.02
	$4 \times 10^6$	1.4	18.02	3.30-4.81	81.02	11.01
	$4.5 \times 10^6$	1.44	18.02	3.30-4.96	81.36	11.97
NACA747a415	$5 \times 10^6$	1.45	18.02	3.30-5.03	84.04	11.01
	$4 \times 10^6$	1.07	18.42	7.53-8.42	110.21	2
	$4.5 \times 10^6$	1.07	18.42	7.61-8.5	101.69	1.6
	$5 \times 10^6$	1.07	18.42	7.70-8.59	103.14	1.58

Tabla 4.1

Las gráficas  $C_l$  en función de  $C_d$  así como en  $C_l/C_d$ , muestran la información de la eficiencia aerodinámica para el perfil NACA0009 y NACA0012, para estos perfiles la eficiencia máxima se encuentra entre  $7^\circ$  y  $10^\circ$ , debido a que en grados cercanos a cero este tipo de perfiles produce poca o nula sustentación.

Los gráficos de  $C_l$  en función alpha muestran como aumenta la sustentación de este perfil a medida que incrementa el ángulo de ataque llegando a

un máximo entre de los  $12.5^\circ$  y  $17.01^\circ$  y  $12.5^\circ$  dependiendo del número de Reynolds. A mayor ángulo de ataque la sustentación comenzará a descender.

La gráfica  $C_m$  y  $\alpha$  muestra que en ángulos menores a  $9.5^\circ$ , para el NACA0009 y  $6.87^\circ$  para NACA0012, los valores del coeficiente de torque son considerablemente pequeños, esto muestra como este perfil simétrico para ángulos que se aproximan a cero tendrán una tendencia natural a mantener su estabilidad.

La imágenes (4.28) y (4.29) esquematiza la presión sobre el extradós y el intradós, las gráficas que aparecen sobre el perfil representan la distribución del coeficiente de presión sobre la línea de cuerda, a medida que el ángulo de ataque incrementa también incrementa la sustentación, la distribución de presiones también cambia, los valores de la presión son negativos en el extradós, de manera que existe una succión que mueve a los perfiles y en consecuencia a las superficies de sustentación hacia arriba. Cuando el perfil se encuentra a  $12.5^\circ$  para NACA009 y  $17.01^\circ$  para NACA0012, alcanza su máximo valor para el coeficiente de sustentación en la animación; Los valores que adquieren los perfiles simétricos brindan características útiles para ser usados como los perfiles aerodinámicos en el estabilizador vertical, aún así también se pueden emplear las características aerodinámicas de estos perfiles a diferentes ángulos de ataque, haciendo muy versátil a estos perfiles, por ejemplo el perfil NACA0018 es usado en las hélices de un Helicóptero UH-1, el carguero C-5A y el caza F-86 [14].

Los perfiles NACA2412 y CLARKY tiene valores cercanos en su eficiencia aerodinámica, ambos perfiles adquieren una eficiencia máxima a cerca de los  $5^\circ$  del ángulo de ataque, pero esta eficiencia es superior en el perfil CLARK Y.

En las gráficas de sustentación contra ángulo de ataque, ambos perfiles adquieren valores positivos desde un ángulo de cero grados, y pierden sustentación en valores próximos a  $17^\circ$ , pero en el caso del perfil NACA 2412, este valor es ligeramente mayor con  $1.78^\circ$ , comparado con el perfil CLARK Y que alcanza un valor de  $1.73^\circ$ .

En las gráficas de  $C_m$  vs  $\alpha$  en valores próximos a los  $17.7^\circ$  el perfil NACA 2412 adquieren sus valores mínimos para ejercer torques con un valor de  $-0.001$ , el valor máximo para ejercer torque se encuentra en ambos perfiles en valores próximos a  $5.6^\circ$ , pero en el caso del perfil NACA 2412 este valor de  $C_m$  es de  $-0.05$  y en el caso del perfil CLARK Y es de  $-0.09$ , Comparando ambos perfiles se concluye que el perfil NACA 2412 brinda un poco más de sustentación, y es menos propenso a los giros para ángulos

menores a  $6^\circ$ , aún así los valores de estos perfiles no son iguales a cero en ninguna región del ángulo de ataque, por lo que al ser usados en superficies de sustentación sus características aerodinámicas de tendencia natural al giro deben ser compensadas con una configuración del timón de profundidad.

Los perfiles A y NACA 747a415 tienen una eficiencia aerodinámica menor que los perfiles asimétricos NACA 2412 y CLARK Y considerables. Para el perfil A el coeficiente de sustentación va desde 1.4 hasta 1.45 desde  $.025$  hasta  $.06$  en el eje de  $C_d$ . Y su máxima eficiencia entre  $11.01^\circ$  y  $11.97^\circ$ ; para el perfil NACA 747a415 la eficiencia está entre 1.06 hasta 1.08 en un margen de  $.036$  hasta  $.091$  en el eje de  $C_d$ , con un máximo de eficiencia aerodinámica entre  $1.59^\circ$  y  $2^\circ$ , La sustentación de estos perfiles también es menor, para el perfil A se tiene una sustentación máxima entre  $1.4^\circ$  y  $1.45^\circ$  a  $18.02^\circ$  y para el perfil NACA 747a415 de  $1.07$  a  $18.42^\circ$ , la relevancia de estos perfiles se encuentra en permanecer autoestables, o con valores de  $C_m$  nulos para algunos valores del ángulo de ataque.  $^\circ$  a  $4.04^\circ$  y  $4.14^\circ$  para el perfil A y de  $7.91^\circ$  hasta  $8.12^\circ$

## 4.2. Diseño de aeronaves longitudinalmente estables.

Para terminar el estudio de resultados numéricos se diseñaron dos aeronaves a escala en el Software FXLR5 para después analizar los datos que este programa arroja. El primer prototipo nombrado Ap5, es una aeronave con un perfil alar en la base que corresponde a un perfil NACA 2712 y otro perfil NACA 0009 en la punta, con una envergadura de 1.5 m, un diedro de  $8^\circ$  y alas en flecha. El timón de profundidad tiene un solo perfil que corresponde a un perfil NACA 2712 y un diedro de  $12^\circ$ , el estabilizador vertical tiene un perfil NACA 0009, y una masa de 2.75 kg.

El segundo prototipo es una aeronave nombrada Ap6, es una aeronave con un el perfil alar A a lo largo de toda el ala con una envergadura de 2m, el timón, el perfil de estabilizador corresponde a un perfil NACA 0009. El fuselaje tiene un peso de .900kg y un peso total de 1.5 kg, las demás especificaciones geométricas de ambos diseños aparecen en las imágenes (4.11) y (4.12).

Los prototipos Ap5 y Ap6 fueron simulados en el software XLFR5 con una velocidad de viento envolvente de 40 m/s, para un fluido no viscoso, haciendo

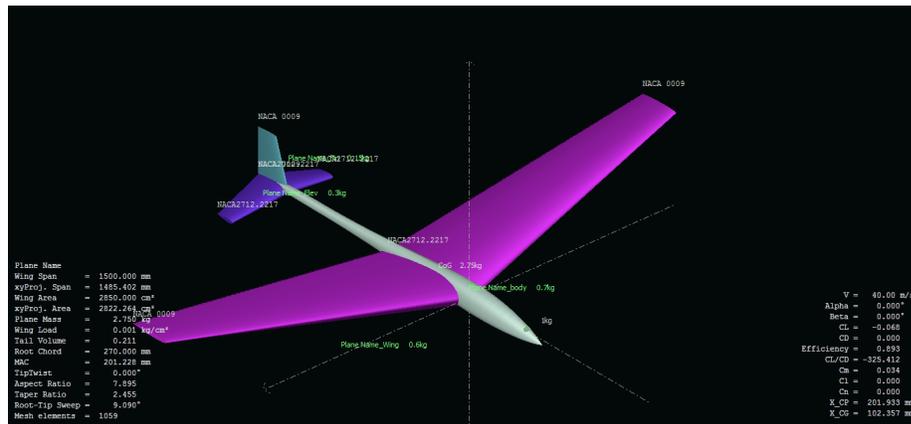


Figura 4.11: Prototipo virtual Ap5

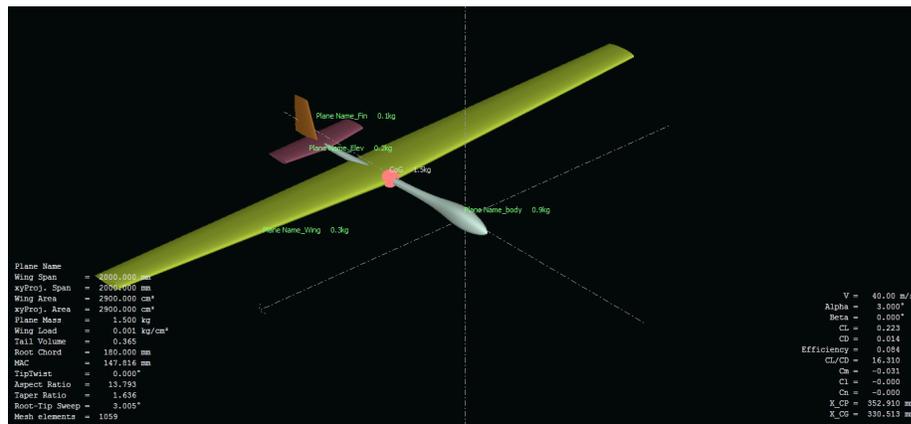


Figura 4.12: Prototipo virtual Ap6

variar su ángulo de ataque entre  $-2^\circ$  y  $3^\circ$ . El resultado de esa simulación se muestra en las imágenes (4.14) y (4.15).

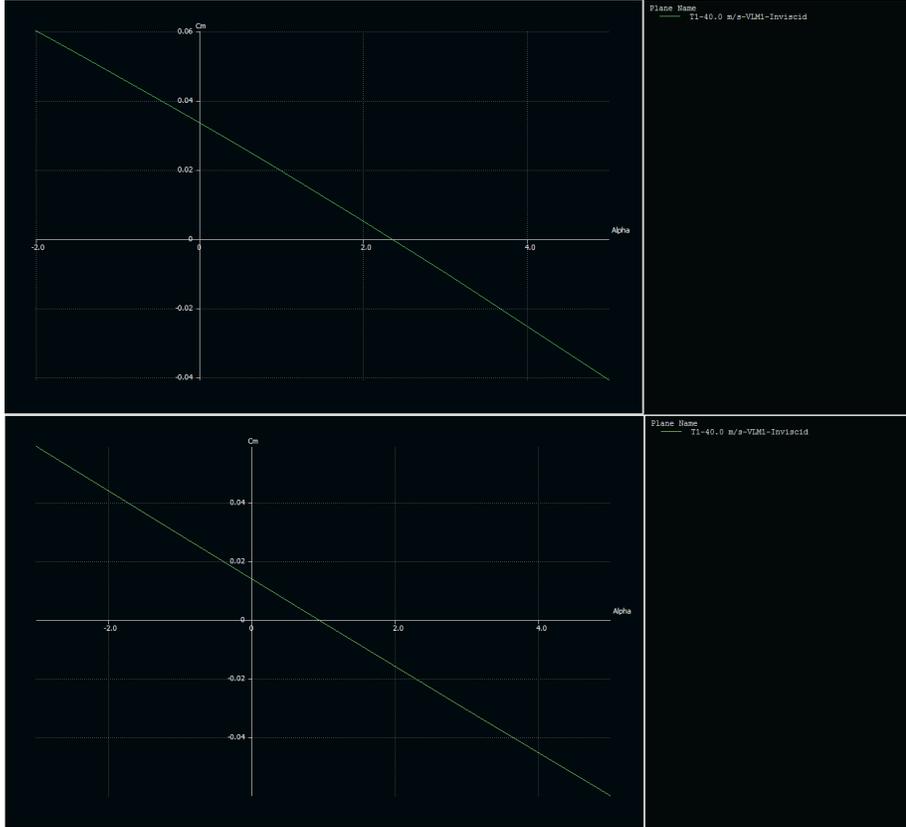


Figura 4.13: Gráficas de  $C_m$  en función de  $\alpha$ , para Ap5 en la gráfica superior y Ap6 en la gráfica inferior. En las gráficas que se observa un valor negativo en sus respectivas pendientes.

De las gráfica de  $C_m$  en función de  $\alpha$  (4.13) se puede apreciar que las pendientes de estas aeronaves son negativas, la distancia del centro de presiones o centro aerodinámico varía entre  $X_{ca}=263.066\text{mm}$  para  $-2^\circ$  y  $X_{ca}=263.066\text{mm}$  para  $3^\circ$ ; mientras que la distancia del centro de masas al centro de la cuerda es  $X_{cg}=102.357\text{mm}$ , para Ap5. La distancia del centro de presiones o centro aerodinámico varía entre  $X_{ca}=352.92\text{mm}$  para  $-2^\circ$  y  $X_{ca}=352.91\text{mm}$  para  $3^\circ$ ; mientras que la distancia del centro de masas al centro de la cuerda es  $X_{cg}=330.513\text{mm}$  para Ap6. En base a la gráfica (4.13)

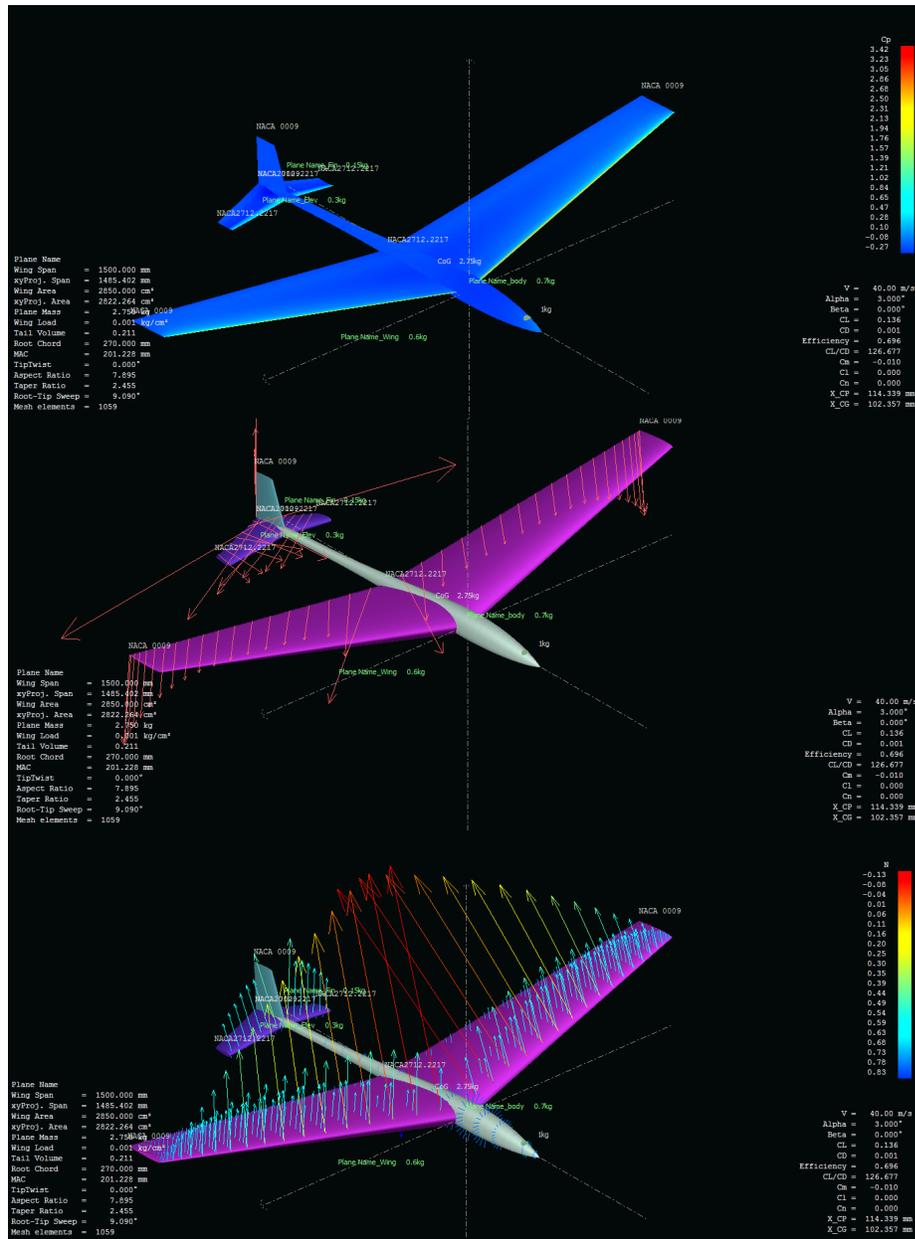


Figura 4.14: En esta imagen se representa en orden descendente el coeficiente de presión sobre el prototipo Ap5, el color azul representa valores negativos para este coeficiente mientras que colores rojos o amarillos representan valores positivos para este coeficiente. Después se representa el cambio de la dirección de aire desviado por la acción aerodinámica o Downwash debido a la aeronave Ap5. Por último la representación las fuerzas de sustentación sobre la aeronave Ap5.

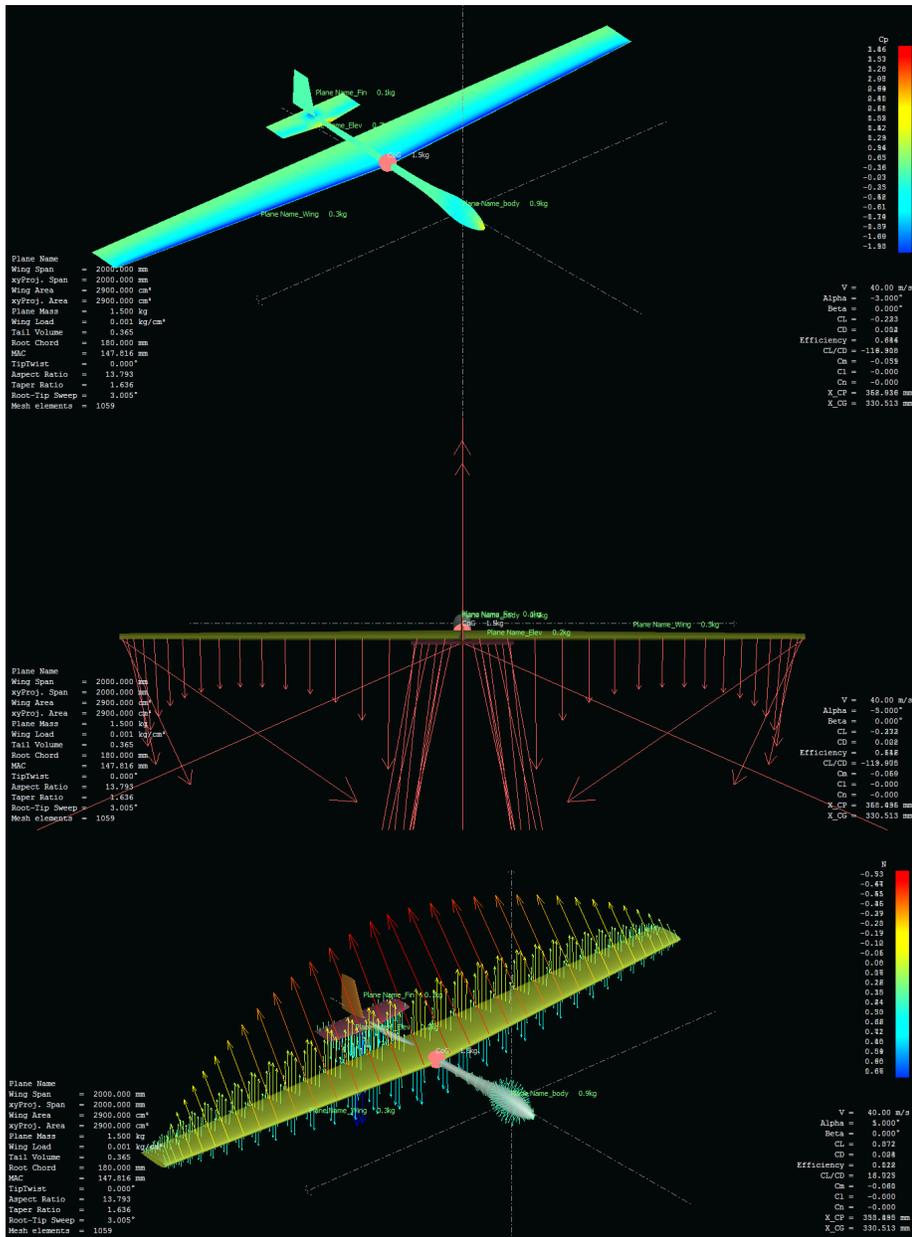


Figura 4.15: En esta imagen se representa en orden descendente el coeficiente de presión sobre el prototipo Ap6, el color azul representa valores negativos para este coeficiente mientras que colores rojos o amarillos representan valores positivos para este coeficiente. Después se representa el cambio de la dirección de aire desviado por la acción aerodinámica o Downwash debido a la aeronave Ap6. Por último la representación las fuerzas de sustentación sobre la aeronave Ap6.

los valores para la derivada de estabilidad  $C_{m_\alpha}$  son de -0.0141 para Ap5 y -0.0148 para Ap6, los valores son negativos y se encuentran entre -0.02 y -0.01 en ambos casos, por tanto ambas aeronaves tienen estabilidad longitudinal en un parámetro aceptable.

### 4.3. Conclusiones

El objetivo de este trabajo se centró en el estudio de la mecánica en torno al vuelo de una aeronave, desarrollando cálculos que en la mayoría de literaturas son derogados y comprobar el resultado de estos. En este contexto al comprobar las ecuaciones para fuerza y torque se muestra la relevancia que tiene la geometría de una aeronave, las forma de las fuerzas que hacen volar a esta, y presentan a  $C$  como el factor determinante en las ecuaciones de las fuerzas aerodinámicas.

Se presentó una revisión elemental de la mecánica de vuelo, en este estudio se llega a las ecuaciones (2.5), (2.6), (2.7) que describen la cinemática translacional, el estado de la aeronave y su relación con respecto a un observador en tierra, así como una relación entre el cambio de posición de esta respecto del tiempo y las velocidades  $u, v, w$ . Las ecuaciones (2.11), (2.12), (2.13) describen la cinemática rotacional mostrando la relación que hay entre  $\phi, \theta, \psi$  y  $p, q, r$ , donde  $p, q, r$  son las derivadas de  $\phi, \theta, \psi$ , solo en un caso particular, las velocidades angulares  $p, q, r$  son las derivadas de los ángulos de Euler solo en el caso en que  $\theta = \psi = 0$ . Partiendo de la segunda ley de Newton se obtiene como resultado el conjunto de ecuaciones (2.8), (2.9), (2.10) estas brindan información de la dinámica translacional. Las ecuaciones (2.17), (2.18), (2.19), describen la dinámica rotacional de la aeronave, y el conjunto de torques actuando sobre estas.

Más adelante con la linealización de las ecuaciones longitudinales se obtuvo la mejor aproximación que describe un vuelo crucero a velocidad constante, sin cambios bruscos en los ángulos de ataque y cabeceo, no es aplicable cuando la aeronave experimenta giros bruscos o vuelos estancados. Las ecuaciones ya linealizadas reescritas al espacio de estados, representadas en este formalismo brindan una representación compacta y conveniente para trabajar en la modelación de estas ecuaciones. El periodo largo es un resultado del intercambio de energía potencial y cinética entorno a una altitud de equilibrio y la velocidad, por esa razón solo están presentes  $X_u$  y  $Z_u$ , cuando  $X_u$  aumenta, aumenta el amortiguamiento en el periodo largo, cuando  $Z_u$  aumenta, au-

menta la frecuencia en el periodo largo. El periodo de oscilación corto es un resultado de la interacción entre los momentos de fuerza, producidos por un cambio en el ángulo de ataque. Cuando  $M_q + M_{\dot{\alpha}}$  incrementa, entonces incrementa el amortiguamiento, cuando  $M_{\alpha}$  aumenta aumenta la frecuencia. Estas aproximaciones escritas en el lenguaje de espacio de estados, pueden ser usadas para el diseño de un control automático longitudinal.

Los resultados numéricos brindan información sobre elementos usados en el laboratorio como fue el análisis de perfil CLARK Y, el estudio también reveló que el perfil NACA 2412 es una alternativa al uso del perfil CLARK Y. Se pudieron obtener parámetros presentes en perfiles simétricos cuya versatilidad puede ser empleada en hélices, alas o estabilizadores; los ángulos para los cuales los perfiles A y NACA 747a415 permanecerán indiferentes ante torques producidos por el viento circundante. También están determinados parámetros para el diseño de 2 prototipos que de acuerdo a la teoría son longitudinalmente estables. Esta información puede ser empleada en el diseño, y construcción de prototipos en el laboratorio de sistemas dinámicos. El resultado de esta investigación contribuye con teoría, e información de parámetros que serán usados para futuras investigaciones y proyectos en torno al desarrollo de unidades aéreas no tripuladas dentro de la facultad.



# Apéndice A

## Matrices de rotación y sistemas de referencia.

### A.1. Matrices de rotación

Consideremos dos sistemas de referencia  $F^{uvw}$  y  $F^{xyz}$  que compartan el mismo origen, uno de estos marcos se encuentra rotado un ángulo  $\eta$  respecto del otro como aparece en la figura 1.8

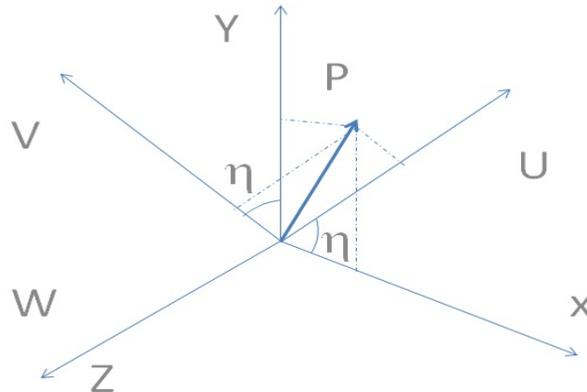


Figura A.1: Sistemas de referencia  $F^{uvw}$  y  $F^{xyz}$  compartiendo el mismo origen,  $F^{uvw}$  se encuentra rotado un ángulo  $\eta$  respecto de  $F^{xyz}$

Si colocamos un vector  $P = P_{xyz} = p_x i_x + p_y j_y + p_z k_z$  en  $F^{xyz}$  el mismo

vector en  $F^{uvw}$  será  $P_{uv} = p_u i_u + p_v j_v + p_w k_w$

Entonces  $p_x i_x + p_y j_y + p_z k_z = p_u i_u + p_v j_v + p_w k_w$

Tomando el producto punto de ambos lados con  $i_x, j_y, k_z$  respectivamente y ordenando los resultados en forma de matriz obtenemos

$$P_{xyz} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot j_v & i_x \cdot k_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot j_v & j_y \cdot k_w \\ k_z \cdot i_u & k_z \cdot j_v & k_z \cdot k_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{pmatrix}$$

Donde

$$i_x \cdot i_u = |i_x| |i_u| \cos \eta = \cos \eta$$

$$j_y \cdot i_u = |j_y| |i_u| \cos(90 - \eta) = \sin \eta$$

$$i_x \cdot j_v = |i_x| |j_v| \cos(90 + \eta) = -\sin \eta$$

$$j_y \cdot j_v = |j_y| |j_v| \cos \eta = \cos \eta$$

$$i_x \cdot k_w = j_y \cdot k_w = k_z \cdot i_u = k_z \cdot j_v = 0$$

$$k_z \cdot k_w = 1$$

$$\text{Entonces } P_{xyz} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \eta & \sin \eta & 0 \\ -\sin \eta & \cos \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{pmatrix}$$

Denotaremos como  $R_{uvw}^{xyz} = \begin{pmatrix} \cos \eta & \sin \eta & 0 \\ -\sin \eta & \cos \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; esta es una matriz de

rotación. Del mismo modo en que se obtuvo  $R_{uvw}^{xyz}$ , también se puede obtener  $R_{xyz}^{uvw}$

$$P_{xyz} = \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_u \cdot i_x & i_u \cdot j_y & i_u \cdot k_z \\ j_v \cdot i_x & j_v \cdot j_y & j_v \cdot k_z \\ k_w \cdot i_x & k_w \cdot j_y & k_w \cdot k_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$P_{xyz} = \begin{pmatrix} \cos \eta & -\sin \eta & 0 \\ \sin \eta & \cos \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$P_{xyz} = R_{xyz}^{uvw} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

Geoméricamente la matriz  $R_{uvw}^{xyz}$  representa una rotación sobre el eje  $k$ , por tal motivo denotaremos a  $R_{uvw}^{xyz}$  como  $R(k, w)$ . También se pueden hacer rotaciones sobre los ejes  $i$  y  $j$  procediendo de forma muy similar obteniendo

$$R(i, \varrho) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varrho & \sin \varrho \\ 0 & -\sin \varrho & \cos \varrho \end{pmatrix} \text{ Para una rotación sobre el eje } i$$

$$R(j, \xi) = \begin{pmatrix} \cos \xi & 0 & -\sin \xi \\ 0 & 1 & \\ \sin \xi & 0 & \cos \xi \end{pmatrix} \text{ Para una rotación sobre el eje } j$$

Dados dos sistemas de referencia  $a, b$  y  $c$ , las matrices de rotación tienen las siguientes propiedades.

Propiedad 1  $(R_a^b)^{-1} = (R_a^b)^T = R_b^a$

Propiedad 2  $R_b^c R_a^b = R_a^c$

Propiedad 3  $\det(R_a^b) = 1$

Si hacemos el producto de las matrices  $R(i, \theta), R(j, \phi), R(k, \omega)$  encontraremos una matriz que representa 3 giros simultaneos; este producto será la matriz  $T$ .

$$T = R(i, \rho)R(j, \xi)R(k, \eta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \rho & \sin \rho \\ 0 & -\sin \rho & \cos \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \xi & 0 & -\sin \xi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \xi & 0 & \cos \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \eta & -\sin \eta & 0 \\ \sin \eta & \cos \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} \cos \xi \cos \eta & \cos \xi \sin \eta & -\sin \xi \\ \sin \rho \sin \xi \sin \omega - \cos \rho \sin \eta & \sin \rho \sin \xi \sin \omega + \cos \rho \cos \eta & \sin \rho \cos \xi \\ \cos \rho \cos \xi \cos \omega + \sin \rho \sin \eta & \cos \rho \sin \xi \sin \eta & \cos \rho \cos \xi \end{pmatrix}$$

## A.2. Ángulos de Euler

Todo Sistema  $uvw$  referente a un cuerpo cuya orientación deseamos describir puede definirse respecto al sistema  $xyz$  mediante los ángulos  $\phi, \theta, \psi$ , estos son los denominados ángulos de Euler [2]. Girando sucesivamente el sistema  $xyz$  sobre uno de los ejes determinados de un diedro ortonormal los valores de  $\phi, \theta, \psi$  se obtendrá el sistema  $uvw$ . Además de los valores de los ángulos es necesario conocer cuales son los ejes sobre los que se realizan los giros, obteniendo 24 posibles combinaciones, siendo las más usuales las siguientes:

### A.2.1. Ángulos de Euler ZXZ

Es una de las representaciones más habituales entre las que se realizan los giros sobre ejes previamente girados. Se les suele asociar con los movimientos básicos de un giróscopo. Partiendo de los sistemas  $xyz$ , y  $uvw$  que en un

inicio coinciden, se puede colocar un sistema  $uvw$  en cualquier orientación tomando en cuenta los siguientes pasos:

1.-Gira el sistema  $uvw$  un ángulo  $\phi$  respecto al eje  $z$  convirtiéndose así en  $u'v'w'$

2.-Gira el sistema  $u'v'w'$  un ángulo  $\theta$  respecto al eje  $u'$  convirtiéndose así en el sistema  $u''v''w''$

3.-Gira el sistema  $u''v''w''$  un ángulo  $\psi$  respecto al eje  $w''$  convirtiéndose finalmente en  $u'''v'''w'''$  Estos ángulos están representados en la figura 1.9

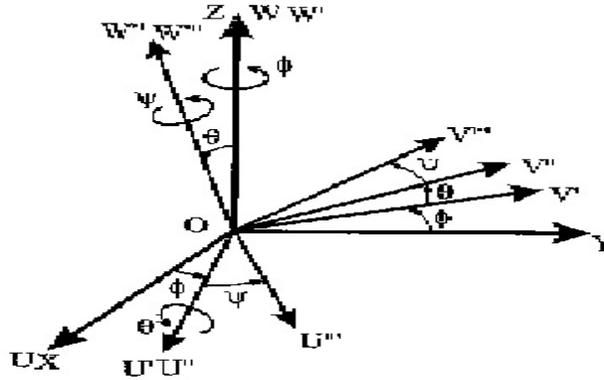


Figura A.2: Ángulos de Euler ZYZ

### A.2.2. Ángulos de Euler ZYZ

Este se diferencia del anterior en la elección del eje del segundo giro, se obtiene con los siguientes pasos

1.-Gira el sistema  $uvw$  un ángulo  $\phi$  con respecto al eje  $z$  convirtiéndose así en  $u'v'w'$

2.-Gira el sistema  $u'v'w'$  un ángulo  $\theta$  con respecto al eje  $v'$  convirtiéndose así en el sistema  $u''v''w''$

3.-Gira el sistema  $u''v''w''$  un ángulo  $\psi$  con respecto al eje  $w''$  convirtiéndose finalmente en  $u'''v'''w'''$  Estos ángulos son representados por la figura 1.10

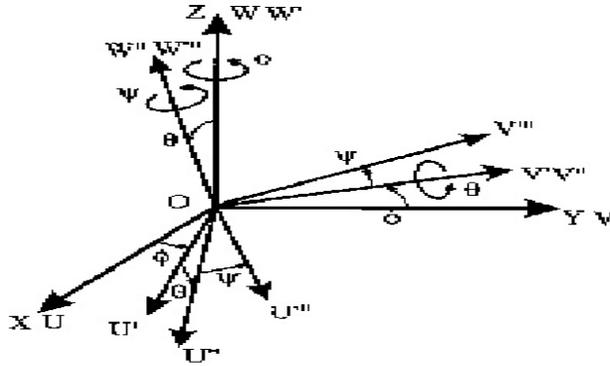


Figura A.3: Ángulos de Euler ZYZ

### A.2.3. Roll, Pitch y Yaw (alabeo, cabeceo y guineada)

Si partimos de los sistemas  $xyz$  y  $uvw$  al igual que en el caso anterior, se puede colocar al sistema  $uvw$  en cualquier orientación siguiendo los siguientes pasos:

- 1.-Girar el sistema  $uvw$  un ángulo  $\psi$  respecto al eje  $x$ , es el denominado Yaw o guineada
- 2.-Girar el sistema  $uvw$  un ángulo  $\theta$  respecto al eje  $y$ , es el denominado pitch o cabeceo
- 3.-Girar el sistema  $uvw$  un ángulo  $\phi$  respecto al eje  $z$ , es el denominado roll o alabeo

En adelante nos referiremos a los ángulos de alabeo, cabeceo y guineada por sus nombres en inglés. En todos los métodos anteriores se debe considerar que las rotaciones, no son transformaciones conmutativas, debiendo seguir una secuencia determinada en la aplicación de los mismos.

En aplicaciones técnicas tales como naves espaciales o satélites se utilizan estos ángulos, como los descritos anteriormente, se toman rotaciones en torno al ángulo yaw, pitch y roll. Estos ángulos están representados en la figura A.4

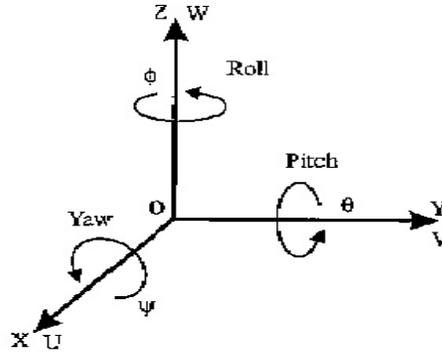


Figura A.4: A.de Euler yaw,pitch y roll

### A.3. Sistemas inerciales.

#### A.3.1. Sistema inercial $F^i$

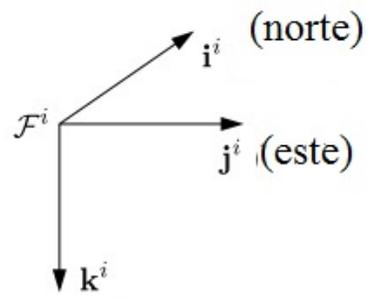
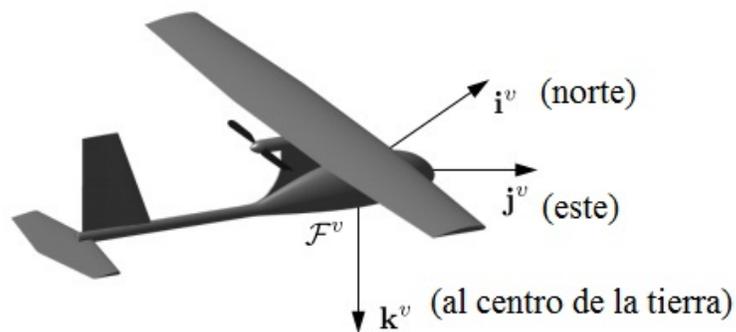
Este sistema inercial está fijo a tierra, el origen está en un punto particular. El eje  $i$  está alineado y apuntando hacia el este, mientras que eje  $j$  esta alineado y apuntando al norte, finalmente el eje  $k$ , está apuntado hacia el centro de la tierra. Este sistema inercial se observa esquematizado en la figura 1.1.

#### A.3.2. El sistema inercial vehicular $F^v$

EL origen del sistema inercial vehicular  $F^v$  se encuentra en el centro de masas de la aeronave los ejes del sistema  $F^v$  están alineados con los ejes de marco  $F^i$ , es decir  $i^v$  apunta hacia el norte,  $j^v$  apunta hacia el este,  $k^v$  apunta hacia el centro de la tierra. Este sistema inercial se observa esquematizado en la figura A.6.

#### A.3.3. EL sistema inercial vehículo-1 $F^{v1}$

Este sistema de referencia también se encuentra en el centro de masas de la aeronave, la diferencia entre  $F^{v1}$  y  $F^v$  radica en que  $F^{v1}$  está rotado en sentido contrario a las manecillas del reloj sobre el plano descrito por  $i^v$

Figura A.5: Sistema Inercial  $\mathcal{F}^i$ Figura A.6: Sistema Inercial  $\mathcal{F}^v$

y  $j^v$  un ángulo  $\psi$ , ángulo de guineada (yaw por su nombre en inglés). Este sistema inercial se observa esquematizado en la figura A.7.

La transformación del sistema  $F^v$  a  $F^{v1}$  está relacionada a través de una matriz de rotación

$$\vec{p}^{v1} = R_v^{v1}(\psi) \vec{p}^v$$

Donde

$$R_v^{v1}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

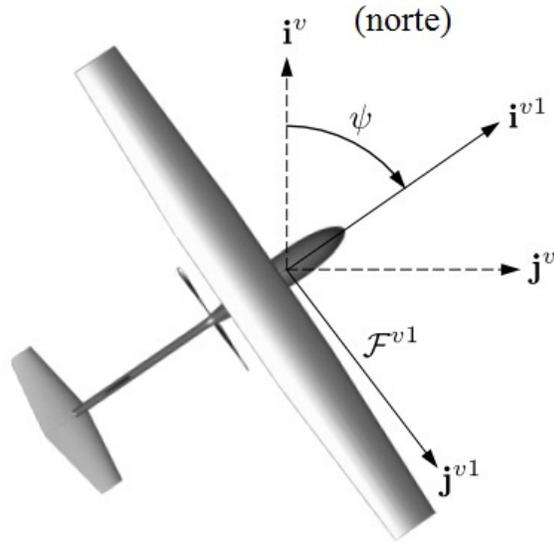


Figura A.7: Sistema Inercial  $F^{v1}$

#### A.3.4. El sistema inercial vehículo-2 $F^{v2}$

En este, el origen del sistema inercial está situado nuevamente en el centro de masas de la aeronave, en este caso los ejes  $i^{v2}, k^{v2}$  están rotados un ángulo

$\theta$ , ángulo de tono (pitch) del los ejes  $i^v, k^v$ , sobre el plano descrito por estos ejes. Este sistema inercial se observa esquematizado en la figura A.8.

Del mismo modo que en sistema inercial presentado anteriormente la transformación del sistema  $F^{v1}$  a  $F^{v2}$  se encuentra dada por una matriz de rotación .

$$\vec{p}^{v2} = R_{v1}^{v2}(\psi) \vec{p}^{v1}$$

Donde

$$R_{v1}^{v2}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

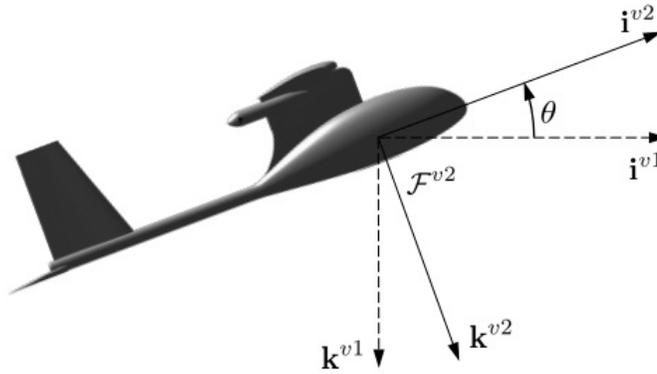


Figura A.8: Sistema Inercial  $F^{v2}$

### A.3.5. El sistema inercial de cuerpo $F^b$

Nuevamente el origen de este sistema inercial se encuentra en el centro de masas de la aeronave, este se obtiene rotando el marco  $F^{v2}$ , sobre de su eje  $i^{v2}$  un ángulo  $\phi$ , ángulo de rodamiento(roll). Este sistema inercial se observa esquematizado en la figura A.9.

La transformación del sistema  $F^{v2}$  a  $F^b$  está dada por

$$\vec{p}^b = R_{v2}^b(\phi) \vec{p}^{v2}$$

Donde

$$R_{v2}^b(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

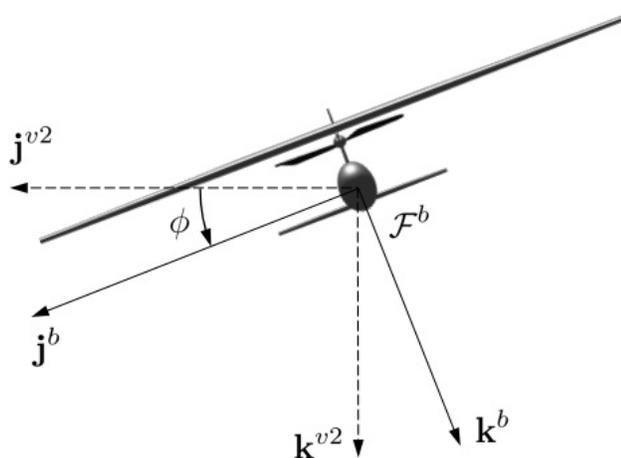


Figura A.9: Sistema Inercial  $\mathcal{F}^b$

Con lo anterior podemos contemplar una transformación del sistema  $\mathcal{F}^v$  al sistema  $\mathcal{F}^b$ , dada de la siguiente manera

$$R_v^b(\phi, \theta, \psi) = R_{v2}^b(\phi) R_{v1}^{v2}(\theta) R_v^{v1}(\psi)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### A.3.6. El sistema inercial de estabilidad $\mathcal{F}^s$

Las fuerzas aerodinámicas tienen su origen en el aire que circunda a la aeronave, nos referimos al vector relativo a la velocidad del viento circundante  $V_a$ , cuya magnitud es la del viento circundante y apunta en la dirección

de este; para definir este marco, cuyo origen está en el centro de nuestra aeronave, como ya es costumbre; pero este se encuentra rotado un ángulo  $\alpha$ , respecto al sistema  $F^v$  y el vector  $V_a$ , este ángulo  $\alpha$  es un ángulo positivo respecto de  $V_b$  que genera sustentación en las alas de la aeronave. Este sistema inercial se observa esquematizado en la figura A.10

La transformación del sistema  $F^b$  al sistema  $F^s$  se encuentra dada por un matriz de rotación

$$\vec{p}^s = R_b^s(\alpha) \vec{p}^b$$

Donde

$$R_b^s(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

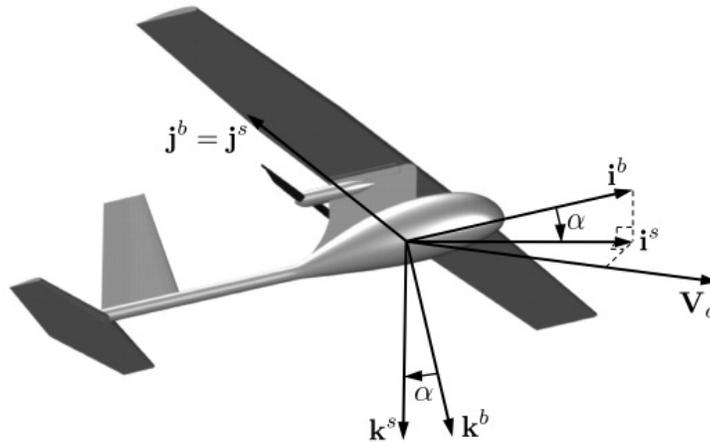


Figura A.10: Sistema Inercial  $F^s$

### A.3.7. El sistema inercial relativo al viento $F^w$

Este marco tiene su origen en el centro de masas de la aeronave, y se encuentra rotado en sentido de las manecillas del reloj un ángulo  $\beta$  entre el vector  $V_a$  y el eje  $i^s$ , por tanto el vector  $i^w$  se encuentra alineado con el vector  $V_a$ . Este sistema inercial se observa esquematizado en la figura ??

Donde la transformación del sistema  $F^s$  a  $F^w$  está dada por

$$\vec{p}^w = R_s^w(\beta) \vec{p}^s$$

Donde

$$R_s^w(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

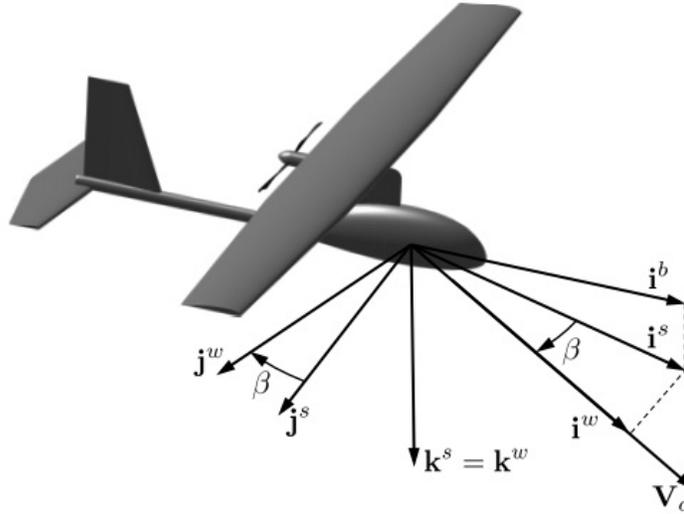


Figura A.11: Sistema Inercial  $F^w$

??

La transformación del sistema  $F^b$  al sistema  $F^w$  estará dada por el producto de las dos últimas matrices de rotación

$$\begin{aligned} R_b^w(\alpha, \beta) &= R_s^w(\beta)R_b^s(\beta) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \alpha & \sin \beta & \cos \beta \sin \alpha \\ -\sin \beta \cos \alpha & \cos \beta & -\sin \beta \sin \alpha \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### A.3.8. Velocidad Aerodinámica, Velocidad del viento y velocidad de grupo.

En el desarrollo de las ecuaciones dinámicas de movimiento de un avión, es importante recordar que la fuerza de inercia que experimenta la aeronave

dependen de las velocidades y aceleraciones relativas a un sistema de referencia fijo. Las fuerzas aerodinámicas, dependen de la velocidad del aire circundante al avión. Definimos la velocidad de grupo  $V_g$  como la velocidad respecto a un sistema de referencia, y la velocidad aerodinámica  $V_a$  como la velocidad del aire circundante a la aeronave. Cuando el viento no está presente, estas velocidades son iguales, y están representadas por la siguiente expresión.

$$V_a = V_g - V_w$$

Donde  $V_w$  es la velocidad del viento relativa a un marco inercial.

La velocidad de grupo puede descomponerse en el sistema de referencia de cuerpo  $F^b$ , en terminos de sus componentes,  $i^b, j^b, k^b$ .

$$V_g^b = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

donde  $V_g^b$  es la velocidad de la aeronave respecto a un sistema de referencia expresado en el sistema de cuerpo. De forma similar definimos también el este, norte y abajo, del viento como  $w_n, w_e, w_d$ , la expresión para la velocidad del viento en el sistema de cuerpo es

$$V_w^b = \begin{pmatrix} u_w \\ v_w \\ w_w \end{pmatrix} = R_v^b(\phi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} w_n \\ w_e \\ w_d \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que el vector de velocidad aerodinámica es la velocidad de la aeronave con respecto al viento, esta se puede expresar en el sistema de viento como.

$$V_a^w = \begin{pmatrix} V_a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definiendo  $u_r, v_r, w_r$  como las componentes del vector de velocidad aerodinámica en el sistema de cuerpo  $F^b$ , podemos escribir el vector en este sistema como

$$V_a^b - \begin{pmatrix} u_r \\ v_r \\ w_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - u_w \\ v - v_w \\ w - w_w \end{pmatrix}$$

combiando las expresiones anteriores podemos expresar el vector de velocidad aerodinámica en el sistema de cuerpo en terminos de la magnitud de la de la velocidad aerodinámica, el ángulo de ataque y el ángulo de deslizamiento como.

$$\begin{aligned}
V_a^b &= \begin{pmatrix} u_r \\ v_r \\ w_r \end{pmatrix} = R_w^b \begin{pmatrix} V_a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \alpha & \sin \beta & \cos \beta \sin \alpha \\ -\sin \beta \cos \alpha & \cos \beta & -\sin \beta \sin \alpha \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Lo cual implica que

$$\begin{pmatrix} u_r \\ v_r \\ w_r \end{pmatrix} = V_a \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \alpha \\ \sin \beta \\ \sin \beta \sin \alpha \end{pmatrix}$$

Habiendo introducido los conceptos anteriores como son los vectores de velocidad aerodinámica, velocidad de viento, velocidad de grupo, discutiremos definiciones importantes para la navegación de una aeronave

La dirección del vector de velocidad relativo a un sistema , usa dos ángulos , el ángulo de curso y el ángulo de vuelo. El ángulo de vuelo  $\gamma$  se define como el ángulo entre la horizontal y la velocidad de grupo.

El ángulo de curso  $\varkappa$  es el ángulo entre la proyección del vector de velocidad del suelo , en el plano horizontal y el norte real.

La relación entre el vector de velocidad del suelo, la velocidad aerodinámica y el vector de velocidad de viento esta dado por

$$V_a = V_g - V_w$$

a esta relación se le llama triángulo de viento.

la dirección del norte se indica mediante el vector  $i^i$ , y la dirección en la que el vehículo apunta se muestra por el vector  $i^b$ , que se fija en la dirección del cuerpo del eje x. Para el nivel de vuelo, el ángulo yaw ( $\psi$ ) es el ángulo entre la  $i^i$  y  $i^b$ , este define la dirección en la cual el vehículo está apuntando. La dirección del vehículo se está desplazando respecto a la masa de aire circundante, está dada por el vector de velocidad  $V_a$ . En vuelo estacionario, el nivel,  $V_a$  se alinea comunmente con  $i_b$ , es decir, que el ángulo de deslizamiento  $\beta$  es cero. Esta relación aparece en la siguiente imagen

Definimos otro ángulo, el ángulo cangrejo,  $\varkappa_c$  el cual es el ángulo resultante de la diferencia entre el ángulo de curso y el ángulo yaw. Este ángulo está esquematizado en la siguiente imagen.

$$\varkappa_c = \varkappa - \psi$$

También definimos el ángulo de masa de aire, este ángulo hace referencia a la trayectoria de vuelo  $\gamma_a$ , como la diferencia entre el ángulo pitch, y el ángulo de atáque. Este ángulo aparece en la siguiente imagen

$$\gamma_a = \theta - \alpha$$

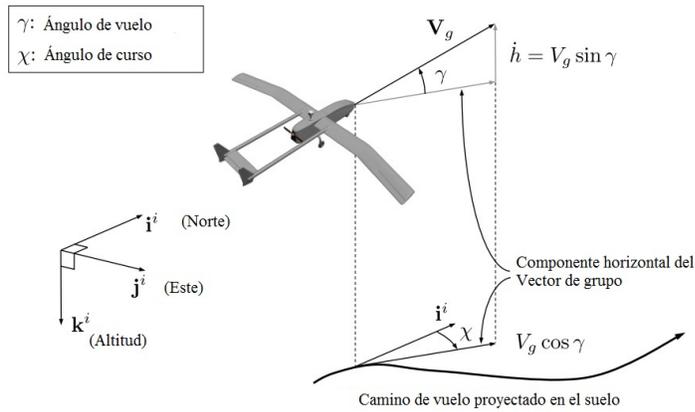


Figura A.12: En esta imagen aparecen esquematizados el ángulo de vuelo y el ángulo de curso

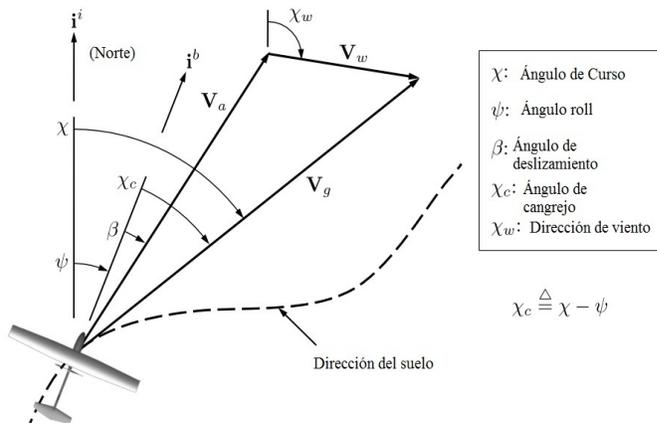


Figura A.13: En esta imagen se describe el ángulo de cangrejo

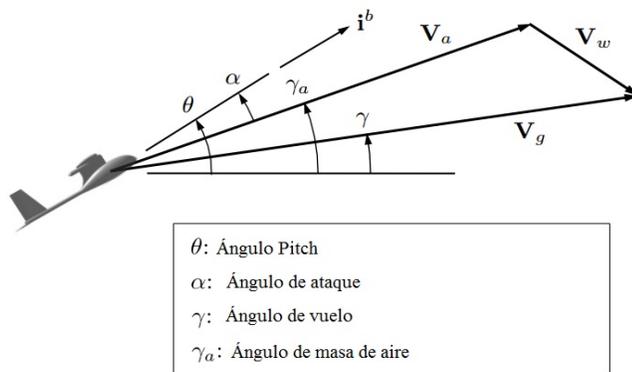


Figura A.14: Esquema del ángulo de masa de aire

en ausencia de viento es válida la igualdad

$$\gamma_a = \gamma$$

el vector de velocidad de suelo en el sistema inercial  $F^i$  puede ser expresado como

$$V_g^i = \begin{pmatrix} \cos \chi & \sin \chi & 0 \\ -\sin \chi & \cos \chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = V_g \begin{pmatrix} \cos \chi \cos \gamma \\ \sin \chi \cos \gamma \\ -\sin \gamma \end{pmatrix}$$

De forma similar el vector en el sistema  $F^i$  puede expresarse como

$$V_a^i = V_a \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \gamma_a \\ \sin \psi \cos \gamma_a \\ -\sin \gamma_a \end{pmatrix}$$

En el proceso de encontrar las ecuaciones de movimiento de una aeronave es necesario calcular las derivadas de los vectores en el sistema en movimiento, respecto a algún otro.

Supongamos que tenemos un vector  $p$  en movimiento visto desde el sistema  $F^b$ , y  $F^b$  está rotando desde otro sistema, por ejemplo  $F^i$  nuestro objetivo será encontrar la derivada con respecto del tiempo del vector  $p$  desde  $F^i$ . Para hacer esto denotamos la velocidad angular del sistema  $F^b$  en  $F^i$  como  $\omega_{b/i}$  y expresamos el vector  $p$  en términos de sus componentes

$$p = p_x i^b + p_y j^b + p_z k^b$$

La derivada con respecto al tiempo del sistema  $F^i$  puede ser encontrada derivando la ecuación anterior

$$\frac{dp}{dt_i} = \dot{p}_x i^b + \dot{p}_y j^b + \dot{p}_z k^b + p_x \frac{d}{dt_i} i^b + p_y \frac{d}{dt_i} j^b + p_z \frac{d}{dt_i} k^b$$

Donde el operador  $\frac{d}{dt_i}$  representa la derivación respecto del tiempo en el un sistema inercial.

Los 3 terminos  $p_x \frac{d}{dt_i} i^b + p_y \frac{d}{dt_i} j^b + p_z \frac{d}{dt_i} k^b$  representan el cambio de  $p$  debido a la rotación en el sistema  $F^b$  relativa a  $F^i$ , debido a que  $i^b, j^b, k^b$  están construidas en  $F^b$  sus derivadas pueden ser calculadas como

$$\dot{i}^b = \omega_{b/i} \times i^b$$

$$\dot{j}^b = \omega_{b/i} \times j^b$$

$$\dot{k}^b = \omega_{b/i} \times k^b$$

Así podemos reescribir los últimos tres terminos de la ecuación como

$$p_x \dot{i}^b + p_y \dot{j}^b + p_z \dot{k}^b = p_x (\omega_{b/i} \times i^b) + p_y (\omega_{b/i} \times j^b) + p_z (\omega_{b/i} \times k^b)$$

$$= \omega_{b/i} \times p$$

Combinando los resultados anteriores obtenemos

$$\frac{dp}{dt_i} = \frac{d}{dt_i} p + \omega_{b/i} \times p.$$

Esta ecuación es usada en el desarrollo de las ecuaciones de movimiento de la aeronave.



# Bibliografía

- [1] ANDERSON(1991) ,*Fundamentals of Aerodynamics*, segunda edición. Maryland:McGraw-Hill.
- [2] BARRIENTOS, A.(2006)*Fundamentos de Robótica*,tercera Edición.Madrid: McGrawhill
- [3] BEARD, R. W.(2012)*Small Unmanned Aircraft:Theory and practice*,primera edición. New jersey: Princeton University Press.
- [4] KRASNOV, N. (1989)*Aerodinámica en preguntas y problemas*: Editorial Mir.
- [5] AERO DESKTOP(2007)*Applied Aerodynamics: A digital Textbook*. Recuperado el 20 de Mayo de 2014 de <http://docs.desktop.aero/appliedaero/preface/welcome.html>
- [6] MUNÑOZ, M. A.(2000)*Manual de vuelo*. Recuperado el día 15 de Mayo de 2014 de <http://www.manualvuelo.com>
- [7] CABRERA PEDROSO, R. & PESTANA, A.(2008)*Obtención de modelo matemático para el desarrollo del perfil del ala de una aeronave*,Redalyc Revista de Ingeniería Mecánica, vol. 11, núm. 2,pp. 13-20.
- [8] STENGEL, R. F(2004)*Flight Dynamics*.New Jersey:Princeton University Press.
- [9] YECHOUT, T. R(2003)*Introduction to Aircraft Mechanics*: AIAA Education Series American Institute of aeronautics and Astronautics.
- [10] NELSON, R.(1989)*Flying Stability and Automatic Control*,segunda edición: McGrawhill.

- 
- [11] ETKIN, B.(1959) *Dynamic of Flying: Stability and Control*.,primera edición. New York: John Wiley & Sons Inc.
- [12] *Estabilidad Estática*, (n.d). Recuperado el día 8 de diciembre de 2015 de <http://www.ing.unlp.edu.ar/aeron/laclyfa/Carpetas/Catedra/Archivos/Estabilidad>
- [13] OGATA, K.(1998)*Ingeniería de control moderna*,tercera edición. México: Prentice Hall hispanoamérica S.A.
- [14] *Aerodinámica de perfiles*(2002) Recuperado el 10 de enero de 2015 de [kimerius.com/app/download/5782479311/Aerodinamica+de+perfiles.pdf](http://kimerius.com/app/download/5782479311/Aerodinamica+de+perfiles.pdf).
- [15] DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA III UNIVERSIDAD DE SEVILLA(n.d) *Viscosidad y número de Reynolds*,Recuperado el 12 de Enero de 2015 de <http://laplace.us.es/wiki/index.php/ViscosidadaynC3BAmerodeReynolds>.