



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

**ESTUDIO DE LA EPILEPSIA A PARTIR DE LA DINÁMICA DE UN
CONJUNTO DE OSCILADORES ACOPLADOS NO LINEALES**

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito para la obtención del grado de

Licenciatura en Física

por

Jhoana Licetd Barranco Díaz

asesorada por

Dr. José Fernando Rojas Rodríguez

Dr. Adrián Hernández Santiago

Julio, 2015

"El científico no estudia la naturaleza por la utilidad que le pueda reportar; la estudia por el gozo que le proporciona, y este gozo se debe a la belleza que hay en ella. ... La belleza intelectual se basta a sí misma, y es por ella, más que quizá por el bien futuro de la humanidad, por lo que el científico consagra su vida a un trabajo largo y difícil".

Henri Poincaré (1854 - 1912) filósofo y matemático francés.

Agradecimientos

Este trabajo se lo dedico a mis padres Ángeles Diaz Rodríguez y Clemente Barranco Duran ya que son mi motor para seguir adelante y por ser mis héroes, a mi hermano y ángel protector Alexis de Jesús Armas Barranco que siempre estuvo cuando lo necesitaba y a mi familia, pero también a mis amigos y a mi compañero que siempre me ha apoyado y al profesor Fernando Rojas Rodríguez que me abrió los ojos a una nueva visión de la física e hizo posible la realización de este trabajo.

Objetivos

El presente trabajo de investigación tiene como objetivo caracterizar el grado de sincronización presente en un sistema de osciladores caóticos globalmente acoplados y sujetos a un ruido externo, usando dos tipos de osciladores caóticos. La idea es comparar con resultados asociados a una especie de sincronización o resonancia (que aquí llamaremos *sincronización*) que ocurre en la dinámica de las oscilaciones de dos regiones (o subredes) de la red neuronal, una sana y otra epileptogénica.

Resumen

En este proyecto se estudia el fenómeno de sincronización en sistemas dinámicos caóticos y como se puede asemejar el fenómeno de sincronización de la epilepsia mediante osciladores caóticos globalmente acoplados.

Se presenta modelación numérica de la sincronización de sistemas de osciladores caóticos, las condiciones para una correcta sincronización y algunos ejemplos de sistemas caóticos.

Se aplican las características de sincronización en sistemas caóticos para simular numéricamente la sincronización de un electroencefalograma, con los sistemas de Lorenz y algunos sistemas de Sprott. Este tipo de modelación estudia una posibilidad para poder detectar una convulsión antes de que ocurra y/o identificar un ataque epiléptico.

El software utilizado para el lenguaje de programación y simulaciones es Python.

Metodología

Para lograr el objetivo en este trabajo de investigación, utilizaremos los sistemas de osciladores acoplados de Edward N. Lorenz y J. C. Sprott, para el diseño de osciladores caóticos a partir de la propuesta realizada en el artículo «Análisis de la sincronización de señales EEG usando dinámica no lineal»[1].

Aplicaremos técnicas de la dinámica no lineal para caracterizar el efecto del ruido sobre los osciladores caóticos acoplados globalmente al igual que el grado de sincronización que hay en ellos. El efecto de sincronización ocurre cuando dos o más osciladores caóticos tienden a seguir una región en común.

Para resolver los sistemas de ecuaciones (3.1) y (3.2) se elaboró un código en el lenguaje de Python en el cual los métodos que elegimos para analizar nuestros osciladores caóticos son método de Euler y método de Runge-Kutta.

Índice

Objetivos	4
Resumen	4
Metodología	4
1 Introducción	9
1.1 Obtención de un EEG	9
1.2 Dinámica del cerebro	10
1.3 Dinámica no lineal y caos	10
2 Dinámica no lineal y osciladores caóticos	13
2.1 Dinámica de sistemas una visión ampliada que permite estudiar diferentes tipos de sistemas: formulación, espacio fase, estabilidad y puntos fijos	14
2.2 El caso discreto: mapeo logístico y caos	15
2.3 Osciladores caóticos típicos	16
3 Epilepsia y dinámica no lineal	19
3.1 Alteraciones en las series de tiempo del EEG	19
3.2 Una posible explicación: modelo de Análisis de la sincronización de señales EEG usando dinámica no lineal	20
3.3 Estudio del modelo: posibilidad de extensión	21
4 Resultados y Discusión	25
5 Conclusiones y Perspectivas	31
Apéndice A	31
Bibliografía	31

Capítulo 1

Introducción

La necesidad de encontrar nuevos métodos que puedan detectar enfermedades relacionadas con sistemas biológicos ha despertado la curiosidad de muchos científicos, en busca de explicaciones y soluciones, sin embargo esto ha resultado muy complejo. Por lo tanto, es necesario ampliar nuestra visión en el campo de la física hacia los sistemas naturales.

En los últimos años ha habido un mayor interés en el estudio de sistemas dinámicos no lineales [2], por ejemplo los sistemas biológicos, en especial el sistema nervioso central [3], en el que se detectan diversas enfermedades, síndromes y trastornos, como la enfermedad de Parkinson, enfermedad de Alzheimer, Huntington, Epilepsia, etc. Este interés se debe a que los sistemas naturales, incluyendo los biológicos, frecuentemente muestran dinámica no lineal y caos.

La epilepsia es una enfermedad común neurológica grave, donde hay una tendencia a tener convulsiones que se originan en el cerebro, y es usualmente solo diagnosticada después de que una persona ha sufrido más de un convulsión [4]. La epilepsia se define como “una alteración crónica del cerebro con varias etiologías, caracterizadas por crisis recurrentes, debidas a excesivas descargas electricas de las neuronas cerebrales” [5].

No todas las convulsiones son debido a la epilepsia, pueden ocurrir por muchas diferentes razones. Existen diferentes tipos de epilepsias, las cuales se dividen en dos principales: epilepsia focal (o parcial) y epilepsia generalizada. Cualquier persona puede desarrollar epilepsia, ocurre en todas las edades, razas y clases sociales [4].

1.1 Obtención de un EEG

La electroencefalografía (EEG) es el registro y evaluación de los potenciales eléctricos generados por el cerebro y obtenidos en la superficie del cuero cabelludo [6]. Uno de los usos fundamentales del EEG está en el diagnóstico y localización de la epilepsia, que tiene origen en una activación excesiva de parte o todo el sistema nervioso central [7].

La evaluación de un EEG se hace mediante inspección visual de las curvas, usando ciertos criterios conocidos; tales como, formas de ondas consideradas como características, para ciertos procesos de enfermedades, por ejemplo, ataques epilépticos, tumores cerebrales entre otras. Sin embargo, incluso a poco tiempo de ser descubierto el EEG, se realizó el primer intento para evaluaciones más cuantitativas del fenómeno. Hoy, los registros del EEG se pueden almacenar electrónicamente y una costosa instrumentación de métodos de evaluación computarizada está disponible. Algunos científicos esperan que en un futuro próximo, la interpretación del EEG mediante el “observador experimentado” pueda ser reemplazada por evaluación computarizada. Hasta ahora, sin embargo esto no se ha hecho realidad, ya que cada método de procesamiento de datos computarizados del EEG sistemáticamente desprecia información contenida en los registros [8].

1.2 Dinámica del cerebro

Una serie de tiempo es una colección de observaciones, clasificadas mediante el tiempo de cada observación [9]. La evolución en el tiempo de un sistema dinámico es representada mediante la variación del tiempo o series de tiempo de sus variables dinámicas [10].

Una técnica para distinguir movimientos caóticos y no caóticos, es el cálculo de **exponentes de Lyapunov**, los cuales son cantidades medidas de la evolución de vecindades de trayectorias de fase [10]. Además el coeficiente de Lyapunov de un mapeo puede ser usado para obtener una medida de la dependencia sensitiva sobre las condiciones iniciales que es una característica de la conducta caótica [10].

1.3 Dinámica no lineal y caos

Un sistema dinámico consiste de un conjunto de posibles estados, juntos con una regla que determina el estado presente en términos de estados pasados. Hay dos tipos de sistemas dinámicos: sistemas dinámicos de tiempo discreto y continuo [11].

La dinámica caótica puede proveer un marco conceptual para analizar fenómenos volátiles donde las técnicas convencionales no proveen señales de sincronización.

La evolución del tiempo irregular e impredecible de muchos sistemas no lineales ha sido llamado “caos”. Su característica central es que los sistemas no repiten su conducta anterior (pero se aproximan), sin embargo, a pesar de su falta de regularidad, los sistemas dinámicos caóticos siguen ecuaciones deterministas tales como aquellas obtenidas de la segunda ley de Newton [10].

El carácter único de la dinámica caótica se puede apreciar cuando las ecuaciones que rigen al sistema son no lineales y se conoce como “sensibilidad a condiciones iniciales” ya que un pequeño cambio en las condiciones generan que las trayectorias evolucionen diferente. Para la dinámica caótica la irregularidad es parte de la dinámica intrínseca del sistema [10].

El movimiento caótico no es un fenómeno extraño. Se considera un sistema dinámico descrito por un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden. Varias condiciones necesarias para el movimiento caótico son: que el sistema tiene al menos 3 variables dinámicas independientes, y las ecuaciones contienen un término no lineal, que acopla varias de las variables [10].

Una aplicación de los sistemas caóticos es la sincronización. La sincronización entre dos sistemas se consigue cuando uno de los dos sistemas cambia su trayectoria a la seguida por el otro sistema o bien a una nueva trayectoria común a ambos sistemas [12].

La epilepsia es una enfermedad dinámica, tal que su dinámica se expresa de manera natural en forma matemática usando ecuaciones diferenciales [13].

Capítulo 2

Dinámica no lineal y osciladores caóticos

Los sistemas dinámicos existen en todas las ramas de las ciencias y se hace evidente a partir de sus ecuaciones diferenciales, como en: mecánica clásica, física, economía, matemáticas y hasta en biología [2]. Por ejemplo el movimiento de las estrellas y las galaxias, el mercado de valores que cambia en el tiempo, los cambios en experimentos químicos, el aumento y disminución de poblaciones y el movimiento de un péndulo simple .

Un sistema dinámico es aquel cuyos estados cambian con el tiempo (t). Existen dos tipos principales de sistemas dinámicos: aquellos para los que la variable tiempo es discreta y aquellos para la cual es continua [14]

Definición 2.1. *Los sistemas dinámicos discretos pueden ser representados como la iteración de una función.*

$$x_{t+1} = f(x_t), t \in \mathbb{Z} \quad (2.1)$$

Definición 2.2. *Los sistemas dinámicos continuos son descritos mediante una ecuación diferencial.*

$$\frac{dx}{dy} = \dot{x} = \mathbf{X}(x) \quad (2.2)$$

Donde x representa el estado del sistema y toma valores en el estado o espacio fase.

Sistemas dinámicos no lineales: son sistemas que varían en el tiempo, en los cuales su salida no es directamente proporcional a la entrada y además son sensibles a las condiciones iniciales, también llamados **sistemas caóticos**. La sensibilidad quiere decir que si dos sistemas dinámicos idénticos se inician en diferentes condiciones iniciales tendrán comportamientos distintos. Por lo general un mismo sistema sometido a condiciones iniciales diferentes, resulta tener un comportamiento del mismo tipo, sin embargo esto no ocurre en este tipo de sistemas.

2.1 Dinámica de sistemas una visión ampliada que permite estudiar diferentes tipos de sistemas: formulación, espacio fase, estabilidad y puntos fijos

El conocimiento de la dinámica no lineal está basada en la noción de un sistema dinámico. Un sistema dinámico puede ser pensado como un objeto de cualquier naturaleza, cuyo estado evoluciona en el tiempo de acuerdo con una ley dinámica.

Considere un sistema dinámico descrito por un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden. Las condiciones necesarias para un movimiento caótico son, a) el sistema debe tener al menos tres variables dinámicas independientes y b) las ecuaciones de movimiento deben contener un término no lineal, que acople varias de las variables. Las ecuaciones pueden ser expresadas como:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}\tag{2.3}$$

donde n debe ser al menos 3. Dos ejemplos de ecuaciones no lineales son:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_1 x_2 + \dots + \delta x_n \\ \frac{dx_1}{dt} &= \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma \sin x_2 + \dots + \delta x_n\end{aligned}$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son constantes. En cada caso los términos no lineales acoplan tanto a x_1 y a x_2 . Sistemas tales como esos son frecuentemente caóticos para algunas elecciones de constantes.

A continuación se dan algunas definiciones y características de los sistemas caóticos.

Definición 2.3. *El espacio de estados es el conjunto de todos los posibles estados de un sistema dinámico; cada estado del sistema corresponde a un único punto en el espacio de estados. En general, cualquier conjunto abstracto podría ser un espacio de estados de algún sistema dinámico. Un espacio de estados es frecuentemente llamado un espacio fase [15].*

Definición 2.4. *Una función cuyo espacio de entrada (dominio) y espacio de salida (rango) son el mismo y es llamado un mapeo.*

Definición 2.5. *Un Atractor es la propiedad de un sistema dinámico, el cual está manifestado por la tendencia bajo diversas pero delimitadas condiciones, que conducen a un estado de actividad reproducible y permanecen allí.*

Definición 2.6. La *trayectoria* es una descripción matemática de la secuencia de valores adoptadas por una variable de estado en ir de una condición inicial o de partida hacia un atractor o a través de una secuencia de atractores. La transición de un atractor a otro es llamada un cambio de estado o bifurcación.

Definición 2.7. Un *Atractor extraño* se manifiesta como una actividad que parece ser aleatoria, pero que es determinística y reproducible, si las condiciones iniciales pueden ser replicadas (por ejemplo, el atractor de Lorenz o el atractor de Rössler).

Definición 2.8. Un *Punto fijo* es la solución más simple del estado estable. Al aumentar el tiempo, todas las trayectorias tienden a terminar en este punto. Los puntos fijos estables son atractores. Un ejemplo típico es un péndulo que ha venido del reposo después de algún tiempo de oscilación debido a la fricción.

Definición 2.9. *Bifurcación* quiere decir el rompimiento en dos partes, describe cualquier cambio súbito en la conducta del sistema cuando algún parámetro es variado.

Definición 2.10. El *Ruido* descrito en el enfoque neurofisiológico en general se describe como: “señal no deseada” que interfiere con las señales deseadas.

Definición 2.11. *Ciclo límite:* Es una órbita aislada cerrada, que corresponde por tanto a soluciones periódicas; así, no existen otras órbitas cerradas en su vecindad y por lo tanto las trayectorias vecinas se mueven acercándose o alejándose del ciclo límite. Si todas las trayectorias vecinas se acercan al ciclo, entonces éste es estable y es inestable en caso contrario.

2.2 El caso discreto: mapeo logístico y caos

El mapeo logístico es unidimensional y no lineal [10]. Mapeo logístico es un mapeo surge en biología de la población, con un modelo de fluctuaciones en la población de una sola especie con generaciones que no se superponen. Se asume que la población de generación $(n + 1)$ es excepcionalmente determinada por la población de la generación precedente según la ley [16].

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

La simpleza de tal ley es la hipótesis Maltusiana de la tasa de reproducción constante $F(x) = \mu x$, es un crecimiento exponencial cuando $\mu > 1$.

El mapeo logístico se usa en dinámica poblacional, como por ejemplo $f(x) = ax(1 - x)$ tenemos que a representa la “fertilidad” o “taza de crecimiento”. Por ejemplo si $0 \leq a \leq 4$, $0 \leq x_a \leq 1$ y f es una parábola, la cual es iterada

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(x_1) = f^2(x_0) \\ &\vdots \\ x_n &= f(x_{n-1}) = f^n(x_0) \end{aligned}$$

Donde n es la n – ésima iteración de x_0 , por lo tanto a el conjunto de todas las iteraciones es el mapeo de f .

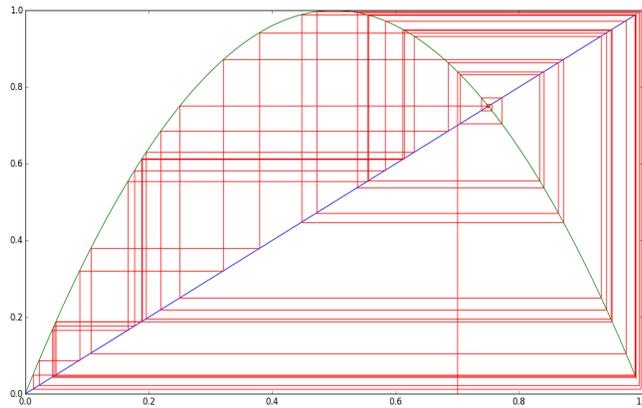


Figura 2.1. Mapeo logístico para un estado caótico a $\mu = 4.0$

El mapeo logístico ilustra muchas características de dinámica caótica, tal como bifurcaciones, doble período, sensibilidad a las condiciones iniciales, etc.

2.3 Osciladores caóticos típicos

Ahora se presentan un conjunto sistemas dinámicos no lineales a los cuales también llamamos osciladores caóticos.

	Sistema Dinámico	Parámetros
Lorenz	$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y$ $\dot{y} = -xz + rx - y$ $\dot{z} = xy - bz$	$\sigma = 10$ $b = 8/3$ $r \approx 24.74$
Rössler	$\dot{x} = -y - z$ $\dot{y} = x - ay$ $\dot{z} = b + (x - c)z$	$a = 0.1$ $b = 0.1$ $c = 14$

Tabla 2.1. Sistemas dinámicos caóticos Lorenz y Rössler

	Sistema Dinámico		Sistema Dinámico		Sistema Dinámico		Sistema Dinámico
1	$\dot{x} = y$ $\dot{y} = -x + yz$ $\dot{z} = 1 - y^2$	6	$\dot{x} = y + z$ $\dot{y} = -x + 0.5y$ $\dot{z} = x^2 - z$	11	$\dot{x} = xy - z$ $\dot{y} = x - y$ $\dot{z} = x + 0.3z$	16	$\dot{x} = 2.7y + x$ $\dot{y} = -x + y^2$ $\dot{z} = x + y$
2	$\dot{x} = yz$ $\dot{y} = x - y$ $\dot{z} = 1 - xy$	7	$\dot{x} = 0.4x + z$ $\dot{y} = xz - y$ $\dot{z} = -x + y$	12	$\dot{x} = y + 3.9z$ $\dot{y} = 0.9x^2 - y$ $\dot{z} = 1 - x$	17	$\dot{x} = -z$ $\dot{y} = -y$ $\dot{z} = 3.1x + y^2 + 0.5z$
3	$\dot{x} = yz$ $\dot{y} = x - y$ $\dot{z} = 1 - x^2$	8	$\dot{x} = -y + z^2$ $\dot{y} = x + 0.5y$ $\dot{z} = x - z$	13	$\dot{x} = -z$ $\dot{y} = -x^2 - y$ $\dot{z} = 1.7 + 1.7x + y$	18	$\dot{x} = 0.9 - y$ $\dot{y} = 0.4 + z$ $\dot{z} = xy - z$
4	$\dot{x} = -y$ $\dot{y} = x + z$ $\dot{z} = xz + 3y^2$	9	$\dot{x} = -0.2y$ $\dot{y} = x + z$ $\dot{z} = x + y^2 - z$	14	$\dot{x} = -2y$ $\dot{y} = x + z^2$ $\dot{z} = 1 + y - 2z$	19	$\dot{x} = -x - 4y$ $\dot{y} = x + z^2$ $\dot{z} = 1 + z$
5	$\dot{x} = yz$ $\dot{y} = x^2 - y$ $\dot{z} = 1 - 4x$	10	$\dot{x} = 2z$ $\dot{y} = -2y + z$ $\dot{z} = -x + y + y^2$	15	$\dot{x} = y$ $\dot{y} = x - z$ $\dot{z} = x + xz + 2.7y$		

Tabla 2.2. Sistemas dinámicos caóticos de J.C. Sprott

Si graficamos las ecuaciones diferenciales de los atractores de Lorenz y de Sprott, obtenemos lo siguiente.

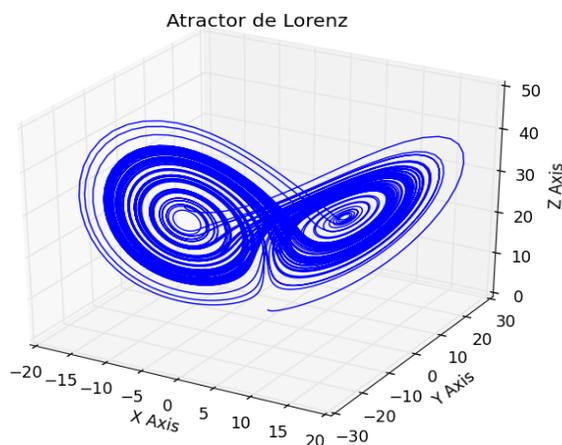


Figura 2.2. Atractor de Lorenz

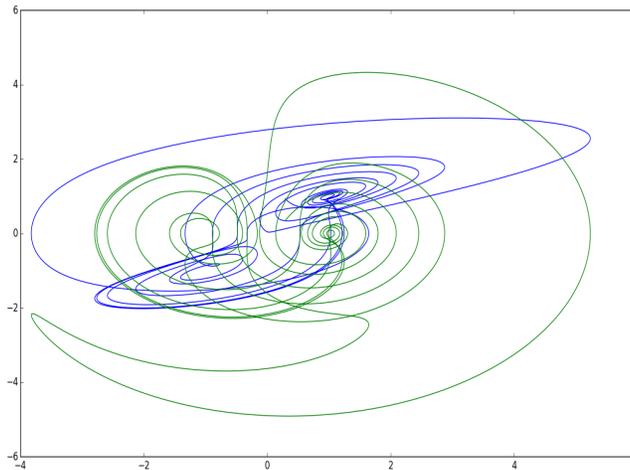


Figura 2.3. Atractor de Sprott número 2.

Los resultados esenciales derivados de este tipo de ecuaciones diferenciales son los siguientes [3]:

1. Las oscilaciones tienen conducta de tiempo pseudoaleatorio (o conducta caótica).
2. Las trayectorias oscilan caóticamente por un largo tiempo antes que se encuentran en un estado estable estacionario estático o periódico (pre-turbulencia).
3. Algunas trayectorias alternan entre oscilaciones caóticas y periodo estable (intermitencia).
4. Para ciertos valores de los parámetros las trayectorias parecen caóticas aunque ellas permanecen en la vecindad de una oscilación periódica inestable (periodicidad ruidosa).

Capítulo 3

Epilepsia y dinámica no lineal

La epilepsia puede tener etiologías diversas, desde la antigüedad la epilepsia era considerada como un “mal sagrado” porque se presentaba como un fenómeno incomprensible y asombroso. El primero en explicar el origen de la epilepsia fue Hipócrates de Cos, quien pensaba que era una enfermedad natural que provenía del cerebro. Posteriormente Thomas Willis sitúa al cerebro como el origen de la epilepsia. Para años más actuales John Hughlings Jackson la definió como una alteración del sistema nervioso central caracterizada por una descarga excesiva y desordenada del tejido nervioso central sobre los músculos, causadas por un incremento y sincronización anormales de la actividad eléctrica neuronal.

Hoy en día definimos a la epilepsia como una alteración del sistema nervioso central caracterizada por un incremento y sincronización anormales de la actividad eléctrica neuronal, que se manifiesta por episodios recurrentes, espontáneos, intensos e impredecibles conocidos como crisis epilépticas.

También se ha descrito como grupos de redes de neuronas autorítmicas que actúan como osciladores verdaderos o como resonadores [13].

De las definiciones anteriores, es evidente que la epilepsia se puede modelar con las herramientas de los sistemas dinámicos no lineales, ya que en sí misma es un sistema dinámico caótico.

3.1 Alteraciones en las series de tiempo del EEG

Si un sistema produce una señal o una serie de tiempo, es decir, un observable del cual se puede estudiar su evolución en el tiempo, esta señal da información sobre la dinámica interna del sistema, sin necesidad de manipular el sistema o abrirlo. Si el observable es constante en el tiempo y por consecuencia la señal no cambia, el sistema debe de ser estático. Si la señal cambia, el sistema debe de ser dinámico, y la manera en la cual cambia delata el tipo de dinámica interna. En principio, las variaciones que hay en un sistema dinámico pueden ser complejas, aleatorias, caóticas, o periódicas [17].

Un EEG representa los cambios en el campo eléctrico originados en el cerebro, un registro EEG es una serie de tiempo, estocástica, no determinista; es decir, no siempre se obtiene la misma actividad con las mismas condiciones iniciales.

Por otra parte se ha asumido que el EEG debería ser considerado como una de las más importantes oscilaciones que afecta la producción y conducción de señalización en el cerebro, a la vez que el EEG tiene un atractor extraño. Además se ha descrito la necesidad de evaluar las señales EEG con herramientas no lineales [18].

El EEG se compone de la actividad de un conjunto de osciladores que producen actividad rítmica en varios rangos de frecuencia. Esos osciladores están usualmente activados aleatoriamente, sin embargo por la aplicación de la estimulación sensorial se acoplan y actúan de forma coherente. Por otra parte las respuestas reales de un EEG son de carácter oscilatorio amortiguado [18].

3.2 Una posible explicación: modelo de Análisis de la sincronización de señales EEG usando dinámica no lineal

La dinámica no lineal abre nuevas ventanas en la comprensión del electroencefalograma debido a que el sistema neuronal ciertamente involucra mecanismos no lineales a nivel microscópico. Desde una perspectiva teórica, la identificación y caracterización de la no linealidad en el EEG conlleva a usar las propiedades de modelos matemáticos para describir el comportamiento dinámico de un cerebro normal o de uno patológico.

Diversos investigadores han usado métodos no lineales para revelar que el EEG es generado por un proceso neuronal determinista. Se presenta y se aplica una técnica de la dinámica no lineal que permite caracterizar el efecto del ruido sobre osciladores caóticos acoplados globalmente, así como también, el grado de sincronización que experimentan los osciladores.

El fenómeno de sincronización ocurre cuando dos o más sistemas caóticos acoplados que inicialmente evolucionan sobre atractores diferentes, siguen eventualmente una trayectoria común.

En la siguiente Sección, se investigan dos modelos dinámicos teóricos que consisten en un conjunto de osciladores caóticos de Lorenz y Sprott globalmente acoplados y sujetos a un ruido externo.

Se estudia la formación de dominios dinámicos sincronizados o clusters inducidos por ruido en esos modelos. Se calcula la cantidad de clusters formados para diferentes valores de los parámetros que mide la intensidad de acoplamiento, y se introducen dos parámetros de orden para caracterizar la sincronización global del sistema [1].

3.3 Estudio del modelo: posibilidad de extensión

Presentamos una propuesta al artículo antes mencionado [1] con los osciladores de Lorenz y Sprott.

Nos enfocamos a estudiar la sincronización en términos generalizados por medio de sistemas caóticos como son los osciladores caóticos de E. N. Lorenz y J. C. Sprott globalmente acoplados a partir del modelo propuesto con los osciladores caóticos de Rössler globalmente acoplados. El modelo está descrito por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= -\sigma x_i + \sigma y_i + \varepsilon(\bar{x} - x_i) + \xi_i(t) \\ \dot{y}_i &= -x_i z_i + r x_i - y_i + \varepsilon(\bar{y} - y_i) \\ \dot{z}_i &= x_i z_i - b z_i + \varepsilon(\bar{z} - z_i)\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= y_i z_i + \varepsilon(\bar{x} - x_i) + \xi_i(t) \\ \dot{y}_i &= x_i - y_i + \varepsilon(\bar{y} - y_i) \\ \dot{z}_i &= 1 - x_i z_i + \varepsilon(\bar{z} - z_i)\end{aligned}\tag{3.2}$$

con $i = 1, 2, \dots, N$, N es el número de osciladores; $\xi_i(t)$ es la fuente de ruido sobre el oscilador i , y su valor medio es $\langle \xi_i \rangle = 0$ y su correlación es $\langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = 2S\delta(t - t')\delta_{ij}$, tal que S es la dispersión del ruido. El parámetro ε representa la intensidad de acoplamiento global entre los osciladores, y el valor medio de las variables x_i esta dado por

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t)\tag{3.3}$$

con expresiones similares para \bar{y} y \bar{z} . Tomamos los valores de los parámetros σ , r y b tales que los osciladores de Lorenz individuales se encuentran en régimen caótico, esto es, $\sigma = 10$, $r = 28$ y $b = \frac{8}{3}$.

Se define un dominio como un subconjunto de la población de osciladores en el cual las distancias en el espacio fase entre pares de elementos i, j , pertenecientes al subconjunto que son menores que un cierto valor umbral γ , tal que $d_{ij} < \gamma$. Definimos d_{ij} como la distancia entre pares de elementos.

$$d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}\tag{3.4}$$

Introducimos dos parámetros de orden distintos para caracterizar la formación de dominios dinámicos (clústers). Primero definimos $r(t)$ como la fracción de pares de elementos (i, j) que están separados a una distancia $d_{ij} < \gamma$.

$$r(t) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^N \Theta[\gamma - d_{ij}(t)] \quad (3.5)$$

El segundo parámetro de orden es $s(t)$, es la fracción de elementos i que en un tiempo t tienen al menos un elemento j localizado a una distancia $d_{ij} < \gamma$.

$$s(t) = 1 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \prod_{j=1; j \neq i}^N \Theta[d_{ij} - \gamma] \quad (3.6)$$

donde $\Theta(x)$ es la función escalón de Heaviside, tal que

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

El último término de la ecuación (3.6) es la fracción de elementos cuya distancia a algún otro elemento es mayor a γ .

Cuando la sincronización es total tenemos $r(t) = s(t) = 1$. Si toda la población de osciladores está distribuida en dominios dinámicos (clústers) se tiene $s(t) = 1$, mientras que $r(t) < 1$; debido a que los dominios dinámicos (clústers) pueden estar separados. Si algunos de los elementos de el sistema están formando dominios dinámicos (clústers), pero otros están fuera de ellos, se tiene $r(t) < s(t) < 1$.

Acoplamos 70 osciladores con diferentes valores para el valor umbral γ , debido a que el valor que se uso en el artículo corresponde a la desviación estándar de cada señal EEG. Los valores propuestos son $\gamma = 0.0096, 0.0035, 0.027, 0.01, 0.15$

Para caracterizar la sincronización y formación de clusters en las señales EEG, se utilizaron los parámetros de orden $r(t)$ y $s(t)$ del artículo [1]. Los cuales más adelante compareros con los resultados obtenidos de los osciladores propuestos.

En las imágenes siguientes se muestran los valores de los parámetros $r(t)$ y $s(t)$ para un sujeto sano y un caso de crisis epiléptica. En el segundo caso se pueden observar los acoplamientos (picos de ambos parámetros) asociados con la crisis (Figura 3.2).

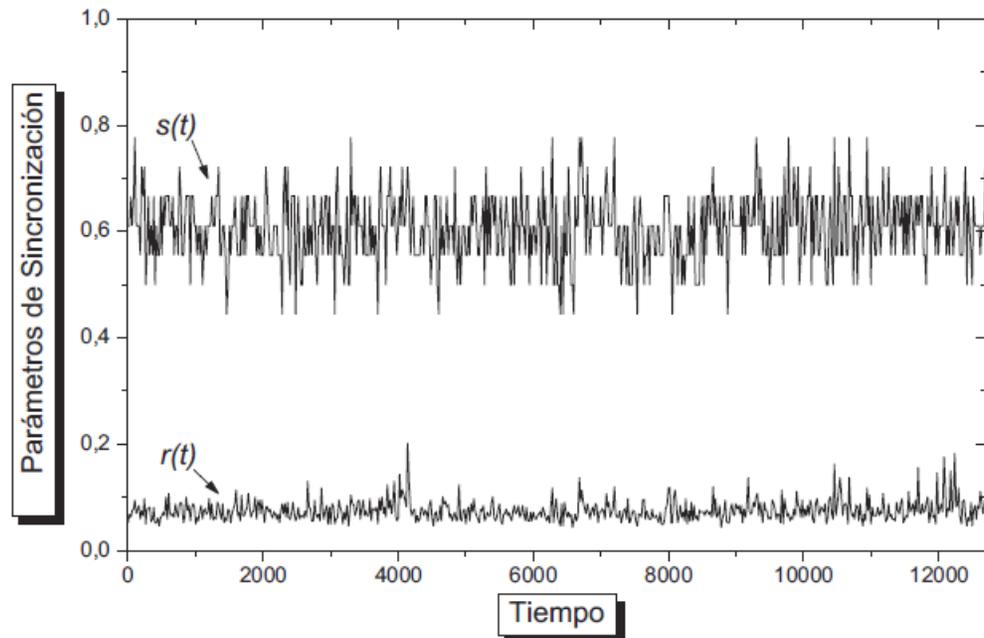


Figura 3.1. Parámetros $r(t)$ y $s(t)$ para el EEG de un sujeto sano.

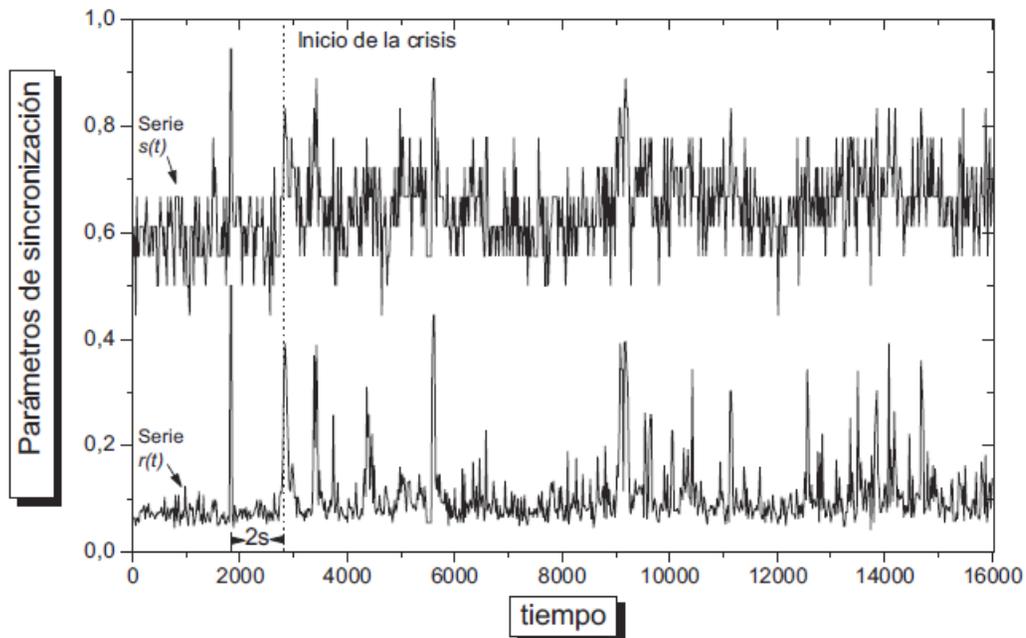


Figura 3.2. Parámetros $r(t)$ y $s(t)$ del EEG del paciente epiléptico en crisis. La línea punteada vertical señala el comienzo de la crisis

Capítulo 4

Resultados y Discusión

Para el análisis de la formación de clusters en los sistemas descritos por los sistemas de ecuaciones (3.1) y (3.2), tenemos el siguiente criterio ya mencionado en el capítulo anterior.

La sincronización es total cuando $r(t) = s(t) = 1$. Si toda la población de osciladores está distribuida en dominios dinámicos se tiene $s(t) = 1$, mientras que $r(t) < 1$; debido a que los dominios dinámicos pueden estar separados. Si algunos de los elementos de el sistema están formando dominios dinámicos, pero otros están fuera de ellos, se tiene $r(t) < s(t) < 1$.

En la siguiente figura se muestra el espacio fase de las posiciones de los osciladores y como se forman los clusters debido al valor umbral γ , respecto a un oscilador y su distancia con los otros osciladores.

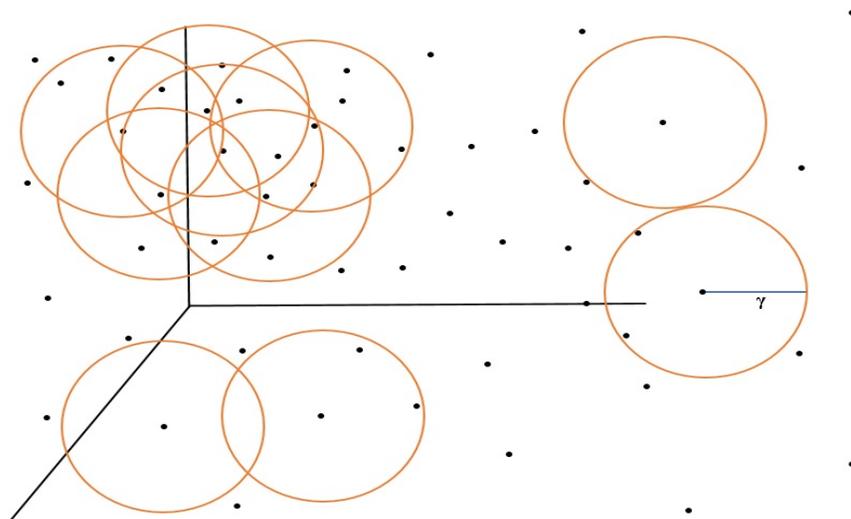


Figura 4.1. Espacio Fase de las sistemas de osciladores acoplados con el criterio los parámetros de orden r y s . El radio de las esferas es el valor umbral γ y los ejes corresponden a las tres variables de un oscilador caótico. En un instante t cada punto es el estado de uno de los osciladores acoplados.

A continuación se muestran los parámetros de orden $r(t)$ y $s(t)$ en función de la intensidad de acoplamiento ε , respecto al valor que asignamos al valor umbral γ .

Se observa en las gráficas que para cada punto de las funciones $r(t)$ y $s(t)$, dependiendo de la intensidad de acoplamiento ε , se obtienen diferentes formaciones de clusters, usando como criterio las ecuaciones (3.5) y (3.6).

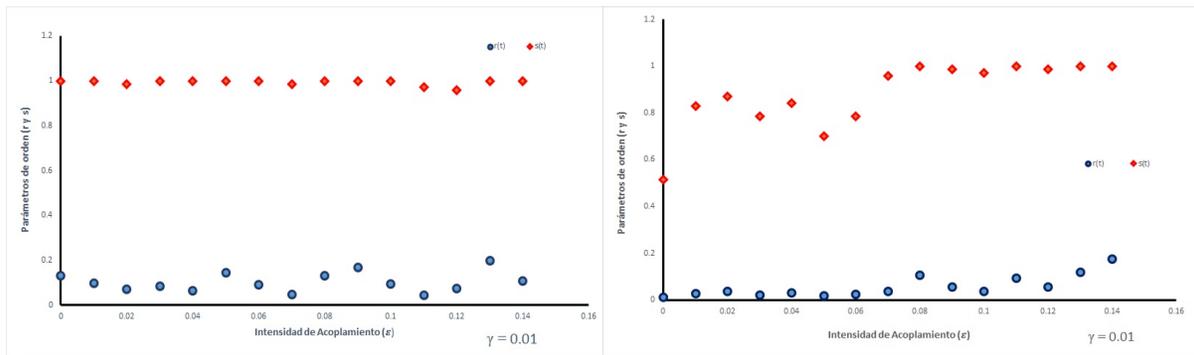


Figura 4.2. Se muestran los parámetros de orden r y s vs intensidad de acoplamiento ε para los osciladores caóticos de Lorenz y de Sprott con $\gamma = 0.01$

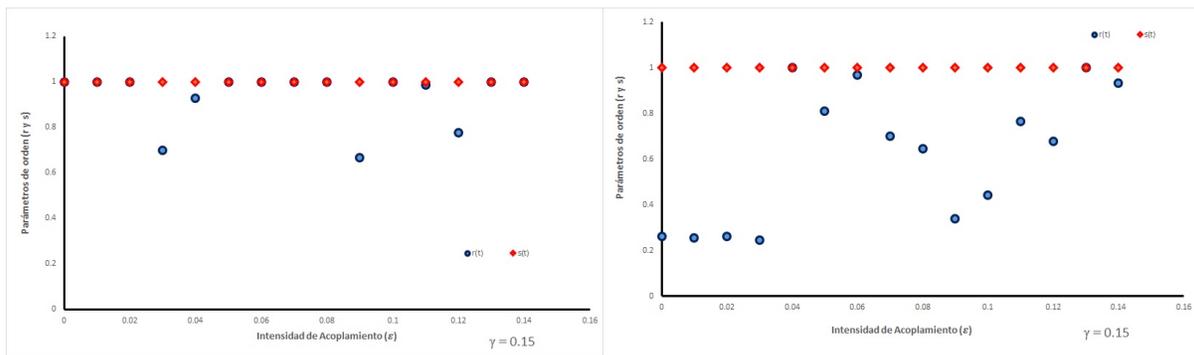


Figura 4.3. Se muestran los parámetros de orden r y s vs intensidad de acoplamiento ε para los osciladores caóticos de Lorenz y de Sprott con $\gamma = 0.15$

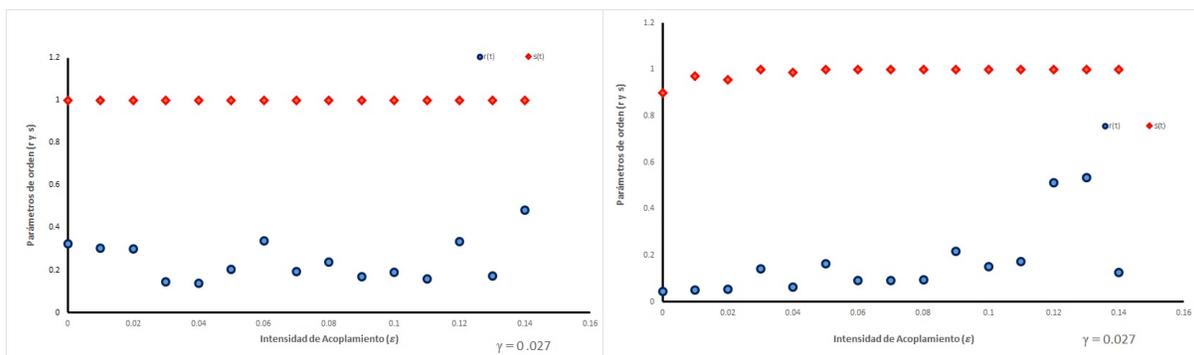


Figura 4.4. Se muestran los parámetros de orden r y s vs intensidad de acoplamiento ε para los osciladores caóticos de Lorenz y de Sprott con $\gamma = 0.027$

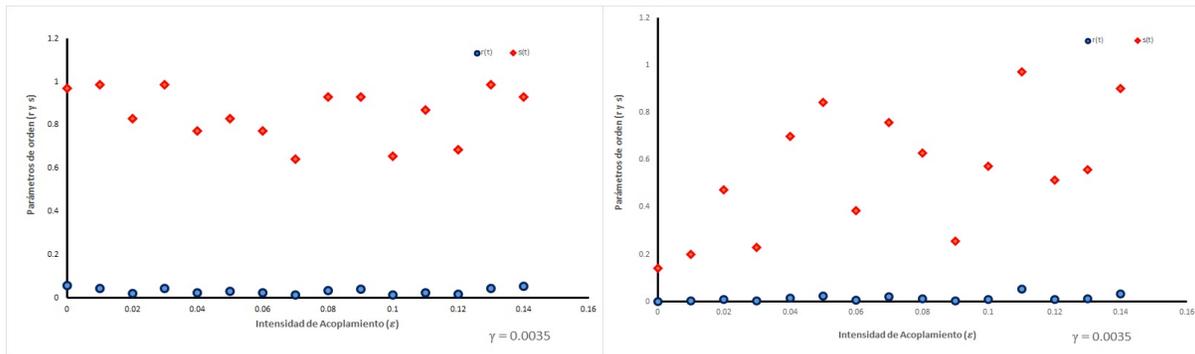


Figura 4.5. Se muestran los parámetros de orden r y s vs intensidad de acoplamiento ε para los osciladores caóticos de Lorenz y de Sprott con $\gamma = 0.0035$

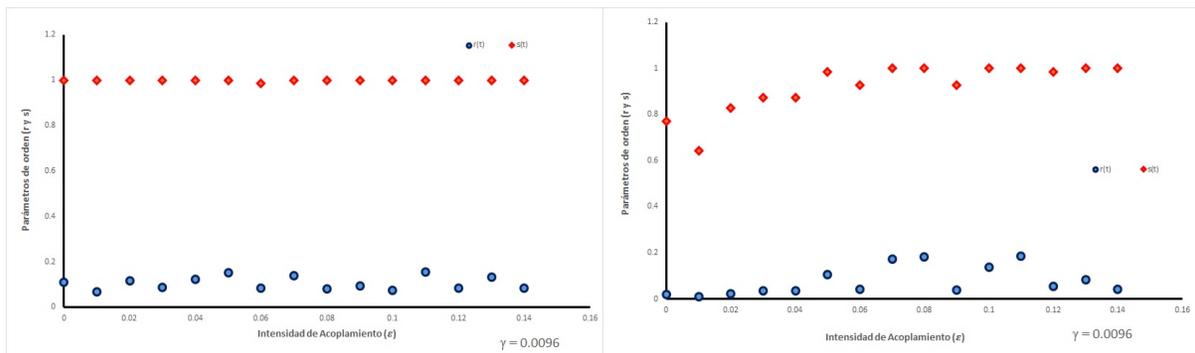


Figura 4.6. Se muestran los parámetros de orden r y s vs intensidad de acoplamiento ε para los osciladores caóticos de Lorenz y de Sprott con $\gamma = 0.0096$

En las siguientes figuras se compara de manera gráfica la precisión de los dos métodos empleados Runge-Kutta y Euler.

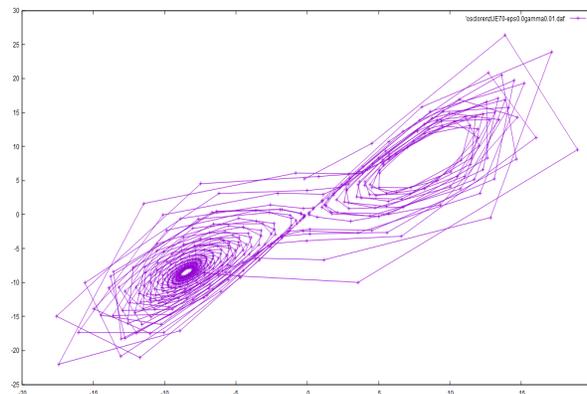


Figura 4.7. Dinámica del oscilador de Lorenz con el método de Runge-Kutta.

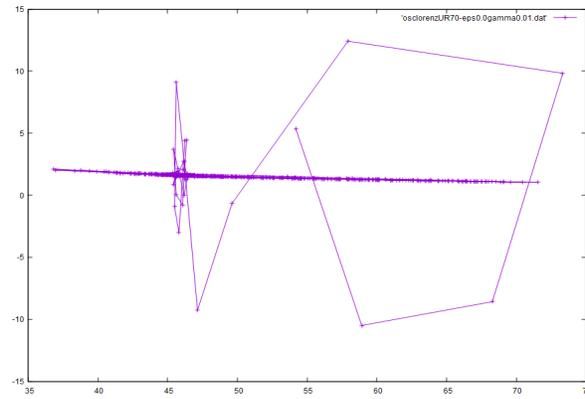


Figura 4.8. Dinámica del oscilador de Lorenz con el método de Euler.

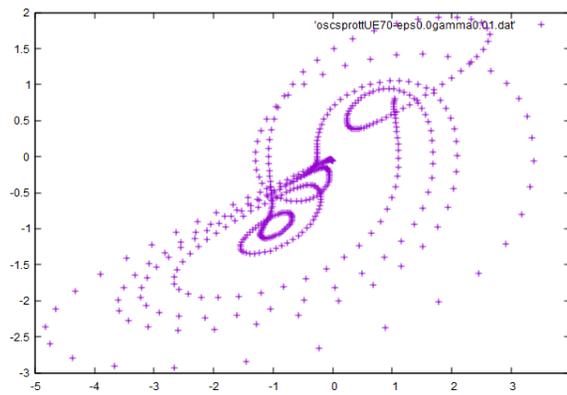


Figura 4.9. Dinámica del oscilador de Sprott con el método de Runge-Kutta.

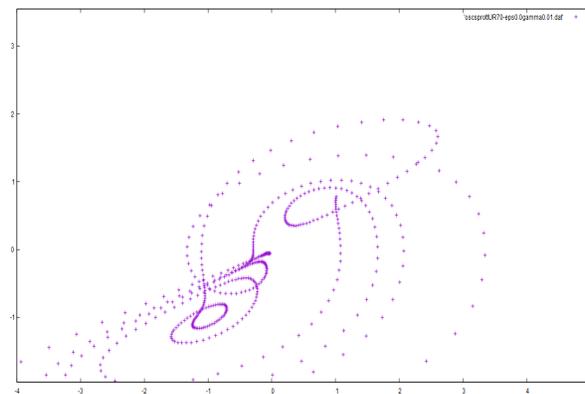


Figura 4.10. Dinámica del oscilador de Sprott con el método de Euler.

Se observa que el oscilador de Lorenz es más sensible al tamaño de pasos en comparación con el oscilador de Sprott, que muestra soluciones parecidas sin importar el método empleado.

Capítulo 5

Conclusiones y Perspectivas

5.1 Conclusiones

El término de ruido en las ecuaciones y en las simulaciones se incluyó para poder comparar el modelo teórico y el comportamiento de un sistema real, ya que cuando se analiza un electroencefalograma hay factores que harán fluctuar algunas mediciones.

El valor umbral es un parámetro fundamental en el cálculo de dominios dinámicos sincronizados: es necesario un criterio y puede ser más confiable para caracterizar un EEG.

Se analizaron los parámetros $r(t)$ y $s(t)$ con un γ constante, y se pudo observar que su comportamiento depende del sistema de osciladores que uno emplee.

Se analizó la formación de dominios dinámicos sincronizados descritos por los sistemas de ecuaciones de osciladores caóticos globalmente acoplados de E. Lorenz y J. C. Sprott y se observó una similitud en los parámetros de orden.

El sistema de osciladores caóticos de Lorenz es más sensible al tamaño de pasos, en comparación al de Sprott.

Los osciladores caóticos son un buen modelo para simular la dinámica del cerebro, ya que se pueden comparar los EEG con las gráficas que muestran los parámetros de orden $r(t)$ y $s(t)$ vs intensidad de acoplamiento ε .

5.2 Perspectivas

Se abre la posibilidad de hacer una pronta detección a un ataque epiléptico con diferentes sistemas dinámicos caóticos.

También se puede tener otra perspectiva del modelo ya que el término $\xi_i(t)$ de las ecuaciones, podemos generalizarlo como una estimulación externa al sistema y así poder obtener otro tipo de resultados más cercanos a un EEG real.

El modelo propuesto del sistema de ecuaciones (3.1) y (3.2) se puede generalizar a más sistemas dinámicos.

Las constantes en las ecuaciones (3.1) y (3.2) se podrían proponer como valores de neurotransmisores que influyen en la dinámica del cerebro.

Más adelante se podría verificar la validez del modelo para cualquier sistema de osciladores caóticos.

Apéndice A

Código del programa en Python para el sistema de ecuaciones [3.1] y [3.2]

```
autoPython 2.7.8 (default, Jul  2 2014, 19:48:49) [MSC v.1500 64 bit (AMD64)]
Python plugin for TeXmacs.
Please see the documentation in Help -> Plugins -> Python
auto
```

Python]

```
#-*-coding: utf8-*-
""" osciladores de Lorentz acoplados en x

    se usa Runge-Kuta de 4o orden (nueva función Step)
    se usa también Euler para comparar...
    se agrega la distribucion de distancias

"""

from Larray2 import *
from Ldynamicsystems2 import *

#parametros del problema
a, b, c = 10.0, 28.0, 2.66 # 4.5  5.0 5.7
nosc = 70
gamma = 0.0096
umbral = 0.03
dt = 0.0001
npasos = 500000

#problemas del programa
U = array([random((3)) for i in range(nosc)])
#print "U",U

def xm():
    global nosc
    return sum(U[:,0])/float(nosc)
```

```

def ym():
    global nosc
    return sum(U[:,1])/float(nosc)

def zm():
    return sum(U[:,2])/float(nosc)

def dij(Ui,Uj):
    return sqrt((Ui[0] - Uj[0])**2 + (Ui[1] - Uj[1])**2 + (Ui[2] - Uj[2])**2)

def Theta(x):
    if x<0: return 0
    else: return 1

def r():
    global gamma,U,nosc
    N1 = float(nosc*(nosc-1))
    S = 0.0
    for i in range(nosc):
        for j in range(nosc):
            if i<>j:
                S += Theta(gamma-dij(U[i],U[j]))
    return S/N1

def s(eps): # k es el indice de la lista epsilon
    global gamma,U,D
    S = 0.
    for i in range(nosc):
        P = 1.
        for j in range(nosc):
            if i <> j:
                dd = dij(U[i],U[j])
                P = P * Theta(dd-gamma)
                if i < j: D[eps].append(dd) # para histograma de distancias
vs epsilon
        S += P

    return 1.- S/float(nosc)

def f0():
    global U, epsilon, epsi, umbral
    return -a*U[0,0] + a*U[0,1] + epsilon[eps]*(xm()-U[0,0]) +
    umbral*(2*random((1))[0]-1.)

def f1(Ui):
    global epsilon,eps,i,a
    return -Ui[0]*Ui[2] + b*Ui[0] - Ui[1] + epsilon[eps]*(ym()-Ui[1])

```

```

def f2(Ui):
    global epsilon,epsi,b,c
    return Ui[0]*Ui[1] - c*Ui[2] + epsilon[epsi]*(zm()-Ui[2])

def F(Ui):
    return array([f0(),f1(Ui),f2(Ui)])

def G(U):
    return array([F(U[i]) for i in range(nosc)])

ff = open("osclorenzRS"+str(nosc)+"gamma"+str(gamma)+".dat", "w")

epsilon = arange(0.0, 0.15, 0.01) #[0.01*j for j in range(15)]
epsi = 0
leps = len(epsilon)
D = [[] for j in range(leps)]
#print D
#raw_input()

josc = nosc/10
nU = 10
if not josc: # opcion pocos osciladores
    josc = 1
    nU = nosc

# la dinamica vil
for eps in range(leps):
    U = 0.4*array([random((3)) for i in range(nosc)])
    V = U.copy()
    epsi = eps
    U = G(U)
    V = G(V)
    fu = open("osclorenzUE"+str(nosc)+"-eps"+str(epsilon[epsi])+"gamma"+str(gamma)+".dat",
" w")
    fv = open("osclorenzUR"+str(nosc)+"-eps"+str(epsilon[epsi])+"gamma"+str(gamma)+".dat",
" w")
    for i in range(npasos):
        #print eps,i,
        U = U + RungeKuttaStep(U,G,dt)
        V = V + dt*G(V)
        #print U
        if i % 1000 == 0:
            fu = open("osclorenzUE"+str(nosc)+"-eps"+str(epsilon[epsi])+"gamma"+str(gamma)+".c
"a")
            fv = open("osclorenzUR"+str(nosc)+"-eps"+str(epsilon[epsi])+"gamma"+str(gamma)+".c
"a")
            for j in range(nU):
                fu.write("%f %f %f " %
(U[j*josc,0],U[j*josc,1],U[j*josc,2]))

```

```

        fv.write("%f %f %f " %
(V[j*josc,0],V[j*josc,1],V[j*josc,2]))
        fu.write("\n")
        fv.write("\n")
        fu.close()
        fv.close()

#print
# r(t) y s(t) en terminos de epsilon para grafica
ff = open("osclorenzRS"+str(nosc)+"gamma"+str(gamma)+".dat", "a")
ff.write("%f %f %f \n" % (epsilon[eps], r(), s(eps)))
ff.close()
# distribucion de distancias para cada acoplamiento epsilon
X, Y = distrib(array(D[eps]))
savedistrib(X,Y,name='osclorenz'+str(nosc)+'DD'+str(epsilon[eps]))

```

```

#-*-coding: utf8-*-

```

```

""" osciladores de Sprott acoplados en x

```

```

    se usa Runge-Kuta de 4o orden (nueva función Step)
    se usa también Euler para comparar...
    se agrega la distribucion de distancias

```

```

"""

```

```

from Larray2 import *
from Ldynamicsystems2 import *

```

```

#parametros del problema
#a, b, c = 10.0, 28.0, 2.66 # 4.5 5.0 5.7
nosc = 70
gamma = 0.0096
umbral = 0.03
dt = 0.0001
npasos = 500000

```

```

#problemas del programa
U = array([random((3)) for i in range(nosc)])
#print "U",U

```

```

def xm():
    global nosc
    return sum(U[:,0])/float(nosc)

```

```

def ym():

```

```

    global nosc
    return sum(U[:,1])/float(nosc)

def zm():
    return sum(U[:,2])/float(nosc)

def dij(Ui,Uj):
    return sqrt((Ui[0] - Uj[0])**2 + (Ui[1] - Uj[1])**2 + (Ui[2] - Uj[2])**2)

def Theta(x):
    if x<0: return 0
    else: return 1

def r():
    global gamma,U,nosc
    N1 = float(nosc*(nosc-1))
    S = 0.0
    for i in range(nosc):
        for j in range(nosc):
            if i<>j:
                S += Theta(gamma-dij(U[i],U[j]))
    return S/N1

def s(epsil): # k es el indice de la lista epsilon
    global gamma,U,D
    S = 0.
    for i in range(nosc):
        P = 1.
        for j in range(nosc):
            if i <> j:
                dd = dij(U[i],U[j])
                P = P * Theta(dd-gamma)
                if i < j: D[epsil].append(dd) # para histograma de distancias
vs epsilon
        S += P

    return 1.- S/float(nosc)

def f0():
    global U, epsilon, epsi, umbral
    return U[0,1]*U[0,2] + epsilon[epsil]*(xm()-U[0,0]) +
    umbral*(2*random((1))[0]-1.)

def f1(Ui):
    global epsilon,epsil,a
    return Ui[0] - Ui[1] + epsilon[epsil]*(ym()-Ui[1])

def f2(Ui):
    global epsilon,epsil,b,c

```

```

        return 1 - Ui[0]*Ui[1] + epsilon[epsi]*(zm()-Ui[2])

def F(Ui):
    return array([f0(),f1(Ui),f2(Ui)])

def G(U):
    return array([F(U[i]) for i in range(nosc)])

ff = open("oscsprottRS"+str(nosc)+"gamma"+str(gamma)+".dat", "w")

epsilon = arange(0.0, 0.15, 0.01) #[0.01*j for j in range(15)]
epsi = 0
leps = len(epsilon)
D = [[] for j in range(leps)]
#print D
#raw_input()

josc = nosc/10
nU = 10
if not josc: # opcion pocos osciladores
    josc = 1
    nU = nosc

# la dinamica vil
for eps in range(leps):
    U = 0.4*array([random((3)) for i in range(nosc)])
    V = U.copy()
    epsi = eps
    U = G(U)
    V = G(V)
    fu = open("oscsprottUE"+str(nosc)+"-eps"+str(epsilon[epsi])+"gamma"+str(gamma)+".dat",
" w")
    fv = open("oscsprottUR"+str(nosc)+"-eps"+str(epsilon[epsi])+"gamma"+str(gamma)+".dat",
" w")
    for i in range(npasos):
        #print eps,i,
        U = U + RungeKuttaStep(U,G,dt)
        V = V + dt*G(V)
        #print U
        if i % 1000 == 0:
            fu = open("oscsprottUE"+str(nosc)+"-eps"+str(epsilon[epsi])+"gamma"+str(gamma)+".
" a")
            fv = open("oscsprottUR"+str(nosc)+"-eps"+str(epsilon[epsi])+"gamma"+str(gamma)+".
" a")

            for j in range(nU):
                fu.write("%f %f %f " %
(U[j*josc,0],U[j*josc,1],U[j*josc,2]))
                fv.write("%f %f %f " %
(V[j*josc,0],V[j*josc,1],V[j*josc,2]))

```

```
        fu.write("\n")
        fv.write("\n")
        fu.close()
        fv.close()

#print
# r(t) y s(t) en terminos de epsilon para grafica
ff = open("oscsprottRS"+str(nosc)+"gamma"+str(gamma)+".dat", "a")
ff.write("%f %f %f \n" % (epsilon[eps], r(), s(eps)))
ff.close()
# distribucion de distancias para cada acoplamiento epsilon
X, Y = distrib(array(D[eps]))
savedistrib(X,Y,name='oscsprott'+str(nosc)+'DD'+str(epsilon[eps]))
```


Bibliografía

- [1] Miguel Guillén Pablo Consenza Mario G. y Coutin Pedro. Escalona-Morán. Análisis de la sincronización de señales EEG usando dinámica no lineal. *Ciencia* 13(4), 505-513, 13 N^o 4, 2005.
- [2] RobertI: Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. WestView Press, 2003.
- [3] Erol Basar. *Chaos in Brain function Containing original chapters by Erol Basar, T.H: Bullock and Topical articles Reprinted from the Springer in Brain Dynamics*. Springer-Verlag, 1990.
- [4] http://www.epilepsysociety.org.uk/what-epilepsy#.VGqmG_mG-AV.
- [5] Ignacio De Llano San Claudio. Epilepsia farmacorresistente del lóbulo temporal, aportaciones a la neurofisiología clínica. 2005.
- [6] Lucía González de Guevara and José Guevara C. Utilidad de la electroencefalografía en las epilepsias y síndromes epilépticos de la infancia". *Archivos venezolanos de puericultura y pediatría*, 70(2), 2007.
- [7] Rafael Barea Navarro. Tema 5: Electroencefalografía.
- [8] F. Vogel. Genetics and the Electroencephalogram, 2000.
- [9] James D. Hamilton. *Time Series Analysis*. Princeton University press, 1994.
- [10] G. I. Baker and J. P. Gollub. *Chaotic dynamics an introduction*. Cambridge University Press, 1990.
- [11] Katehleen T. Alligood, Tim D. Sauer, and James A. Yorke. *Chaos an introduction to dynamical systems*. Springer-Verlag, 1996.
- [12] César Moreno Sierra. Sincronización de sistemas caóticos.
- [13] Ivan Soltesz and Kevin Staley. *Computational neuroscience in epilepsy*. Academic Press - Elsevier, 2008 edition, 2008.
- [14] D. K. Arrowsmith and C. M: Place. *An introduction to dynamical systems*. Cambridge University Press, 1990.
- [15] http://www.scholarpedia.org/article/Phase_space.
- [16] J. M. T. Thompson and H. B. Stewart. *Nonlinear Dynamics and Chaos, Geometrical Methods for Engineers and Scientist*. 1986.
- [17] *Medidas de complejidad en series de tiempo fisiológicas*, 2011.
- [18] Erol Basar. Brain function and oscillations. I, 1998.