



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Neutrinos en una extensión del Modelo Estándar con una
Simetría Horizontal del Sabor

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Rodolfo Enrique Barradas Palmeros

asesorado por

Dr. José Enrique Barradas Guevara

Dra. Olga Guadalupe Félix Beltrán

Puebla Pue.
Julio 2015

Título: Neutrinos en una extensión del Modelo Estándar con una Simetría Horizontal del Sabor

Estudiante: RODOLFO ENRIQUE BARRADAS PALMEROS

COMITÉ

Dr. Alfonso Rosado Sánchez
Presidente

Dr. Humberto Salazar Ibargüen
Secretario

Dra. Luz Adriana Cordero Cid
Vocal

Dra. Isabel Pedraza Domínguez
Suplente

Dr. José Enrique Barradas Guevara
Asesor

Dra. Olga Guadalupe Félix Beltrán
Asesora

Índice general

Dedicatoria	IX
Agradecimientos	XI
Resumen	XIII
Introducción	XV
1. El Modelo Estándar de la Física de Partículas	1
1.1. Modelo Estándar	1
1.1.1. El sector fermiónico	2
1.1.2. El sector de norma	2
1.1.3. El sector escalar	3
1.2. El Mecanismo de Higgs	4
1.2.1. Rompimiento espontáneo de simetría	4
1.2.2. Sector de rompimiento de simetría	4
1.2.3. Las masas de las partículas	6
1.3. Problemas del Modelo Estándar	9
2. Neutrinos	11
2.1. Historia de los neutrinos	11
2.2. Neutrinos Masivos	12
2.3. Neutrinos de Dirac o de Majorana	13
2.3.1. Espinores de Dirac	13
2.3.2. Espinores de Majorana	13
2.4. Oscilaciones de los Neutrinos	14
2.5. Los Neutrinos Ahora	15
2.5.1. Neutrinos Solares	15
2.5.2. Neutrinos Atmosféricos	15
3. Simetría Permutacional S_3	17
3.1. El grupo S_3	17
3.2. Representaciones del Grupo S_3	19
3.2.1. Proyectores	22
4. Matriz de masas de los neutrinos	25
4.1. Lagrangiano de Yukawa	26
4.2. Matriz de masa	27
4.3. Mecanismo see-saw	30
4.4. Análisis numérico de las masas de los neutrinos	31

5. Conclusiones	35
A. Cálculo de la matriz de masa usando el lagrangiano de Yukawa	37
B. Obtención de la matriz M_ν en términos de la masa de los neutrinos	45
Bibliografía	47

Índice de figuras

1.1. Partículas elementales del ME.	3
1.2. Rompimiento espontáneo de simetría. El potencial $V(\Phi)$ en a) la fase simétrica y b) en la fase del <i>rompimiento espontáneo de la simetría</i>	5
2.1. Principales modos de producción de partículas secundarias a través de la atmósfera. A la izquierda se encuentra la componente electromagnética, al centro la componente muónica o dura y a la derecha la componente nucleónica.	16
3.1. Simetrías de un triángulo equilátero.	20
4.1. Masa del primer neutrino en la jerarquía normal.	32
4.2. Masa del segundo neutrino en la jerarquía normal.	32
4.3. Masa del primer neutrino en la jerarquía invertida.	33
4.4. Masa del tercer neutrino en la jerarquía invertida.	33

Índice de tablas

1.1. Familias de quarks y leptones del ME.	2
1.2. Números cuánticos de los fermiones.	3
3.1. Tabla de multiplicar del grupo S_3	18
3.2. Representaciones irreducibles de los elementos de S_3	21
3.3. Tabla de caracteres de S_3	21
4.1. Espectro de masas de los fermiones	25

Dedicatoria

Dedico este trabajo a la memoria de mi abuela Manuela Fernández Rodríguez.

Agradecimientos

Agradezco a mis padres *Alicia* y *Rodolfo*, por su amor, sacrificio y apoyo incondicional durante todos estos años.

Agradezco a mis asesores por compartir su conocimiento y por la suma paciencia que me mostraron.

Agradezco a mis amigos que siempre estuvieron animándome y apoyándome.

Finalmente agradezco a la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla y a mis profesores por haberme dado la formación que ahora tengo.

Resumen

En este trabajo de tesis estudiamos una extensión del Modelo Estándar de la Física de Partículas Fundamentales con un grupo de simetría discreta. Las condiciones bajo las cuales se recuperan los resultados conocidos de la física de neutrinos, que se encuentra fuera del Modelo Estándar. Este estudio lo hacemos en el marco de una teoría extendida con simetría discreta de permutaciones de familias en los sectores fermiónico y de Higgs, con el grupo discreto S_3 . Se realiza el análisis del lagrangiano de Yukawa correspondiente a los leptones, la inclusión de un lagrangiano de Majorana para dar masa a los neutrinos y se calcula la matriz de masas correspondiente. Dicha matriz se diagonaliza y se estudia la región del espacio de parámetros donde se encuentran valores de las masas de los neutrinos que coincidan en los intervalos experimentales reportados en la literatura.

Introducción

El Modelo Estándar (ME) de las interacciones electrodébiles y fuertes es una teoría de norma que proporciona un marco teórico consistente y bien definido, en el cual se unifican la electrodinámica cuántica y las interacciones nucleares, débiles y fuertes. El grupo de norma GME de la teoría es un grupo semi simple local y no abeliano, $GME = SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ [1].

En particular, en el ME los términos bilineales en los campos fermiónicos no son invariantes de norma y es por esto que no se pueden introducir términos de masa que tengan la simetría de norma ya señalada. Este problema se soluciona agregando el mecanismo de Higgs, el cual genera la dinámica que producirá el rompimiento espontáneo de la simetría de norma $SU(2)_L \times U(1)_Y$, que da masas a los bosones de norma Z^0 , W^\pm y a los fermiones: seis quarks y tres leptones. Las masas m_f de los fermiones se obtienen de las interacciones de Yukawa formadas por los términos que acoplan el campo de Higgs con dos campos fermiónicos, $m_f = v\lambda_f/\sqrt{2}$, donde λ_f es un parámetro libre que se ajusta de los datos experimentales y se conoce como el acoplamiento de Yukawa del fermión f y v es el valor de expectación del vacío del campo de Higgs en la teoría. En el mecanismo de Higgs del ME, se introduce un solo campo escalar conocido como campo o bosón de Higgs, que es singlete de $SU(3)_C$ y doblete de $SU(2)_L$. El rompimiento espontáneo de la simetría se induce si el mínimo del potencial de Higgs se obtiene para valores de ϕ cuyo valor esperado en el vacío es diferente de cero, $\langle\phi\rangle \neq 0$.

En cuanto al sector de Higgs, recientemente se ha dado el descubrimiento de una partícula de tipo Higgs con m_h entre 126 GeV y 152 GeV en el LHC [2, 3], lo que nos da una prueba del mecanismo del rompimiento espontaneo de simetría electrodébil [4]. La masa reportada está de acuerdo con el rango de las pruebas de precisión electrodébiles [5], lo que apunta al éxito del ME, junto con su espín, paridad y acoplamientos. Hay muchas razones teóricas para poner en duda la idea de que el Modelo Estándar con un sector de Higgs, en el cual sólo hay un doblete de Higgs, sea la solución correcta, basta recordar que el Modelo Estándar, no predice la unificación de los acoplamientos de norma, g_3 , g_2 y g_1 . No hay una explicación para el patrón de masas que se observa, el llamado enigma de las jerarquías de masas no se ha resuelto, este surge porque experimentalmente se observa que fermiones de la misma carga pero de diferentes generaciones o familias tienen una gran diferencia en sus masas, de tal manera que para obtener los valores correctos de las masas de los fermiones es necesario elegir de manera apropiada los parámetros de Yukawa. Lo anterior mencionado hace que los valores de λ_f corran en un intervalo de $O(10^{-6})$ para el electrón y $O(1)$ para el quark top. Esta diferencia es tan grande que en una primera aproximación se pueden tomar como nulas las masas de las dos primeras familias. Los fermiones de la primera generación son muy ligeros comparados con la escala electrodébil, $v = \sqrt{2}G_F^{-1/2} = 246$ GeV [1]. Las masas de las partículas de la segunda generación son también relativamente pequeñas. De los fermiones de la tercer generación, sólo el quark top no es pequeño comparado con la escala electrodébil v .

Otro problema que no está resuelto en el Modelo Estándar, es la replicación de los fermiones, para explicar el espectro observado de partículas. En el ME se introducen tres generaciones o familias de fermiones, sin que haya una razón teórica que explique por qué la naturaleza es así.

Sabemos de los experimentos que las interacciones débiles violan la simetría de conjugación de carga y paridad (CP), particularmente en los decaimientos de los mesones K_0 [6, 7, 8] y B_0 [9, 10, 11, 12], y este problema tampoco está completamente explicado en el ME. En este modelo, la violación de CP se

introduce agregando como parámetro libre adicional una fase compleja en la matriz de mezclas de los quarks para tres familias, llamada la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa o V_{CKM} [13]. La matriz de mezclas de los quarks V_{CKM} acopla campos de quark con diferentes sabores en la representación, donde las matrices de masas de los quarks son diagonales. El desconocimiento de los elementos de la matriz de masas de los quarks se refleja en la ausencia de una relación funcional entre las masas de los quarks y los cuatro parámetros libres (tres ángulos de mezcla y la fase compleja que viola CP) con los que normalmente se parametriza la matriz de mezclas de los quarks V_{CKM} [14, 15, 16].

En el Modelo Estándar, tal como está formulado, la matriz de mezclas de los leptones, análoga, es una matriz unidad ya que el Modelo Estándar se formuló para neutrinos de masa nula. Sin embargo, evidencia experimental reciente indica que en el sector leptónico hay física más allá del Modelo Estándar. En particular, el problema del déficit de los neutrinos solares [17] surge de la observación que el flujo medido de neutrinos del electrón ν_e en los experimentos donde se usan detectores con cloro [18, 19], agua [20, 21], y galio [22, 23, 24], es sólo una fracción del flujo esperado de los cálculos de los modelos del Sol. Además, como los detectores utilizan sustancias diferentes, esto permite medir separadamente el flujo de neutrinos que participan en diferentes reacciones nucleares con umbrales de energía diferentes. SAGE y Gallex estudian la reacción ($\nu_e + {}^{71}\text{Ga} \rightarrow {}^{71}\text{Ge} + e^-$), la cual tiene un umbral de 0.23 MeV. Homestake estudia la reacción ($\nu_e + {}^{37}\text{Cl} \rightarrow {}^{37}\text{Ar} + e^-$) la cual tiene un umbral de 0.8 MeV. Los detectores Čerenkov de Kamiokande y Superkamiokande estudian la dispersión elástica de $\nu_e e$ y buscan $\nu_e \rightarrow \nu_e$, su umbral está cercano a 6.5 MeV [25].

En cada uno de estos experimentos se observan valores diferentes del déficit del flujo de neutrinos del electrón; de este hecho se infiere que la supresión del flujo de neutrinos depende de la energía. Los déficits de los flujos comparados con el Modelo Solar Estándar son [26]:

$$\begin{array}{ll} \textit{Gallex} & R = 0.60 \pm 0.06 \\ \textit{SAGE} & R = 0.52 \pm 0.06 \\ \textit{Homestake} & R = 0.33 \pm 0.03 \\ \textit{SuperK.} & R = 0.47 \pm 0.02 \end{array} \quad (1)$$

El problema de los neutrinos atmosféricos se refiere al déficit detectado de neutrinos del muón. Los flujos de los neutrinos del electrón ν_e y del muón ν_μ , surgen de las interacciones de los rayos cósmicos con la atmósfera de la Tierra. Estos neutrinos se producen principalmente del decaimiento de los piones $\pi \rightarrow \mu \rightarrow e$. Esta cadena produce dos neutrinos y antineutrinos del muón por cada neutrino y antineutrino del electrón [27]. La razón R [28, 29] del flujo esperado al observado en el experimento es

$$R = \frac{\left(\frac{\nu_\mu}{\nu_e}\right)_{\text{observado}}}{\left(\frac{\nu_\mu}{\nu_e}\right)_{\text{esperado}}} \approx 0.6. \quad (2)$$

El experimento de los Alamos del Liquid Scintillation Neutrino Detector (LSND) mide el flujo de neutrinos del electrón ν_e en un rayo de neutrinos del muón ν_μ , $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$, producidos en los decaimientos del pión en reposo. En este experimento se reporta un exceso de neutrinos del electrón ν_e [30, 31]. También han buscado oscilaciones de $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$, de los decaimientos del muón μ^+ en reposo [30, 32]. Los neutrinos del electrón $\bar{\nu}_e$ son detectados en el proceso cuasielástico $\bar{\nu}_e p \rightarrow e^+ n$ en correlación con un fotón monocromático de 2.2 MeV que se produce en la reacción de captura del neutrón $np \rightarrow d\gamma$. En este experimento se reporta un exceso de neutrinos del electrón $\bar{\nu}_e$.

Todos estos experimentos de neutrinos han dejado establecido que los neutrinos se mezclan y que probablemente tienen masa. En el caso particular de los neutrinos sabemos por la evidencia experimental obtenida de Kamiokande, del experimento Troitsk y los resultados obtenidos en PSI y LEP que las cotas para las masas de los neutrinos son diferentes de cero,

$$m_{\nu_e} < 3.9 \text{ eV}, \quad m_{\nu_\mu} < 170 \text{ KeV}, \quad m_{\nu_\tau} < 18.2 \text{ MeV}. \quad (3)$$

Estas cotas no nulas son la primer evidencia experimental de física nueva que muestra la necesidad de extender el marco del Modelo Estándar. El sector de Yukawa de los leptones con neutrinos masivos es uno de los sectores menos conocidos hasta ahora. Esto se debe principalmente a que los neutrinos son difíciles de detectar porque sólo participan en la interacción electrodébil, su carga eléctrica es nula y su masa es muy pequeña.

Si los neutrinos adquieren masa por el mecanismo de Higgs de manera análoga con el sector de quarks, con las masas dadas por el valor de expectación v entre estados del vacío del campo de Higgs y el acoplamiento de Yukawa correspondiente

$$m_\nu = \frac{v}{\sqrt{2}} \lambda_\nu. \quad (4)$$

El problema con las masas m_ν de los neutrinos está en el hecho de que se requiere un acoplamiento de Yukawa muy pequeño $\lambda_\nu < 10^{-10}$ para poder explicar la magnitud de las masas de los neutrinos $m_\nu < 10 \text{ eV}$, dado que el valor de expectación del doblete de Higgs es del orden de $v = (\sqrt{2} G_F)^{-1/2} = 246 \text{ GeV}$ y es este mismo valor de expectación del doblete de Higgs el que explica la magnitud de las masas de Dirac de los fermiones restantes del Modelo Estándar. Sin embargo, en el Modelo Estándar, tal como está ahora formulado, no se pueden introducir términos de masa para los neutrinos debido a que en el modelo no hay una representación del grupo de norma donde podamos acomodar a los neutrinos derechos de tal modo que se puedan acoplar con sus correspondientes neutrinos izquierdos para formar términos de masa de Dirac.

Los términos de masa para los neutrinos se pueden clasificar en tres tipos de acuerdo al acoplamiento de los campos de quiralidad izquierda y derecha del neutrino con el campo de Higgs. En el Modelo Estándar una masa tipo Dirac es aquella que conecta componentes izquierdas ψ_L y derechas conjugadas $\bar{\psi}_R = \psi_R^\dagger \gamma^0$ del mismo campo. Para las partículas que portan cualquier número cuántico $U(1)$, como la carga electromagnética, una masa de Dirac es el único término de masa posible, ya que para preservar estos números cuánticos $U(1)$ es necesario tener interacción partícula-antipartícula. Sin embargo, los neutrinos son una excepción a esta regla; debido a que no tienen carga electromagnética, es posible introducir otros tipos de términos de masa además de los términos de masa tipo Dirac. Estos otros términos de masa violan la conservación del número leptónico y en algunos casos $SU(2) \times U(1)$, pero están permitidos por la invariancia de Lorentz.

Una masa de tipo Majorana es aquella que conecta componentes izquierdas ψ_L y derechas ψ_R de campos conjugados; podemos introducir dos masas de Majorana diferentes, el primer tipo acopla partícula con partícula, el segundo tipo de masa de Majorana, acopla antipartícula con antipartícula. Una teoría mixta que contenga masas de Dirac y Majorana simultáneamente se obtiene con la lagrangiana \mathcal{L}_{DM} la cual se denota como

$$\mathcal{L}_{DM} = M_D \bar{\psi}_L \psi_R + M_T \bar{\psi}_L^c \psi_L + M_S \bar{\psi}_R^c \psi_R + h.c. \quad (5)$$

Una teoría que contenga masas de Majorana viola la conservación de cualquier número aditivo que porten los campos fermiónicos ψ , por ejemplo la carga eléctrica, así que todos los fermiones fundamentales, excepto los neutrinos, deben tener $M_T = M_S = 0$. Para neutrinos de Majorana, se viola el número leptónico por dos unidades y pueden ocurrir los decaimientos doble beta: $(Z-1) \rightarrow (Z+1) + e + e$, o los decaimientos $K^- \rightarrow \pi^+ ee$ del Kaón; si ocurren estos decaimientos, esta será una evidencia experimental clara de que existen neutrinos con masa de Majorana. Hasta hoy las cotas experimentales para que ocurran estos procesos son nulas. Si los eigenvalores de \mathbf{M}_T son nulos o muy pequeños y si los eigenvalores de \mathbf{M}_S son grandes comparados con los de \mathbf{M}_D , entonces el espectro de masas de los neutrinos se puede separar en un sector de neutrinos ligeros cuya matriz de masas de 3×3 se escribe como

$$(\mathbf{M}_\nu)_{\text{light}} = \mathbf{M}_D^T \mathbf{M}_S^{-1} \mathbf{M}_D, \quad (6)$$

y un sector de neutrinos pesados cuya matriz de masas de 3×3 se escribe como

$$(\mathbf{M}_\nu)_{\text{heavy}} = \mathbf{M}_S. \quad (7)$$

Este es el llamado mecanismo de see-saw que nos permite entender las masas pequeñas para los neutrinos que son del orden de eV.

En general la matriz de masas de los neutrinos \mathbf{M}_ν no es diagonal y es compleja, por lo que es necesario diagonalizarla al igual que a la matriz de masas de los leptones cargados \mathbf{M}_l , dando origen a la matriz de mezclas de los neutrinos.

Es necesario hacer muchos más experimentos para medir de manera precisa todos los parámetros de la matriz de mezclas de los neutrinos, culminando con el descubrimiento y estudio de la violación leptónica de CP. Como un primer paso en esta dirección, se estudian las transiciones de ν_μ a ν_e las cuales darían una medida del ángulo de mezcla leptónico θ_{13} . En los experimentos donde se controla el flujo de neutrinos por ejemplo los rayos beta provenientes de núcleos radiativos podrían proporcionar un rayo muy puro de neutrinos del electrón o antineutrinos del electrón de unos cuantos cientos de MeV lo cual permitiría hacer pruebas de violación de CP y T. Por último, las fábricas almacenadoras de muones ofrecen la posibilidad de medir la violación de CP aún para valores muy pequeños de θ_{13} .

Existen varias posibilidades para dar masa a los neutrinos en el Modelo Estándar:

- Extender el sector de Higgs.
- Extender el sector de leptones, agregando la parte derecha de los neutrinos.
- Extender tanto el sector de Higgs como el sector leptónico.

En este proyecto estudiamos la posibilidad de que la tercer hipótesis sea correcta, esto es, agregaremos un grupo de simetría de familias que permita incluir un singlete neutro de $SU(2)_L$, de quiralidad derecha ν_{Ri}^I para cada sabor $i = e, \mu, \tau$ de neutrino a la vez que extendemos el sector de Higgs agregando además del campo de Higgs, que es doblete de $SU(2)_L$ y singlete de grupo de sabor, un campo de Higgs que se transforme de manera no trivial bajo el grupo de simetría de familias. Esperamos que la replicación de las familias de quarks y leptones, los ángulos de mezcla de la matriz de mezclas de los quarks, la fase que viola la conjugación de carga y paridad (CP) y los acoplamientos de Yukawa se entiendan mejor si el Modelo Estándar se extiende agregando una simetría de familias, de tal manera que se puedan establecer relaciones entre las masas, los parámetros de mezcla y la fase que viola CP que nos permitan reducir el gran número de parámetros libres.

En este trabajo de tesis nos interesa estudiar la física de los neutrinos en una extensión del Modelo Estándar de la Física de Partículas con una simetría discreta S_3 [33, 34, 35, 36]. El objetivo de la tesis es calcular la matriz de masa de los neutrinos para esta extensión y analizar la viabilidad de la misma, de acuerdo a los resultados experimentales y modelos extendidos más grandes (A_4 y S_4) [37].

El trabajo de tesis está organizado como sigue: en el capítulo 1 se presenta brevemente el Modelo Estándar; el capítulo 2 se dedica al estudio de los neutrinos; la simetría permutacional S_3 así como la extensión del Modelo Estándar incluyendo esta simetría se presentan en el capítulo 3; en el capítulo 4 se calcula la matriz de masas de los neutrinos y el mecanismo see-saw y se dan los resultados obtenidos; para finalizar, se dan las conclusiones en el capítulo 5.

Capítulo 1

El Modelo Estándar de la Física de Partículas

1.1. Modelo Estándar

El Modelo Estándar es un marco teórico físico que describe a las partículas fundamentales y sus interacciones, el cual hace predicciones con buena precisión [1, 13, 38, 39, 40]. El ME es una teoría cuántica de campo renormalizable que describe, esencialmente, todos los datos de la física a la escala de energía de M_{Z^0} (~ 100 GeV), comprobada con un alto nivel de precisión. Esta teoría ha sido usada para explicar, calcular y predecir exitosamente a las partículas y sus interacciones, así como, una gran cantidad de fenómenos cuánticos.

Las partículas fundamentales son los constituyentes básicos de la materia sin estructura interna (que suponemos puntuales) conocida hasta los límites actuales de $10^{-18} \sim 10^{-19}$ m. Conocemos dos tipos de partículas, las constituyentes de la materia y las partículas portadoras de las interacciones fundamentales. Las primeras son fermiones de espín semientero, $s = \frac{1}{2}$, y se dividen en dos grupos: *leptones* y *quarks* [41, 42, 43]. Los leptones conocidos son el electrón e^- , el muón μ^- y el tau τ^- con carga eléctrica $Q = -1$ (todas las cargas están dadas en unidades de la carga eléctrica fundamental “ e ”), y sus correspondientes neutrinos ν_e , ν_μ y ν_τ con carga $Q = 0$. Los quarks conocidos son de seis sabores distintos: u , d , c , s , t y b tienen carga eléctrica $Q = \frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ y $-\frac{1}{3}$, respectivamente.

Los quarks poseen un número cuántico al que denominamos *color*, el cual para ellos puede ser de tres tipos, denotados genéricamente como q_i , ($i = 1, 2, 3$). Dado que el color no es observado en la naturaleza, los quarks deben estar confinados en agregados *incoloros* de dos o más quarks, a los que llamamos hadrones. Estas partículas compuestas se clasifican en *bariones* y *mesones*. Los bariones son fermiones compuestos por tres quarks, qqq , por ejemplo: el protón, $p \sim uud$ y el neutrón, $n \sim udd$. Los mesones son bosones formados por un quark y un antiquark, $q\bar{q}$, por ejemplo, los piones: $\pi^+ \sim u\bar{d}$, y $\pi^- \sim \bar{u}d$.

La segunda clase de partículas fundamentales son las partículas intermediarias de las interacciones. Las interacciones relevantes en la física de partículas son mediadas por el intercambio de una partícula fundamental que es un bosón de espín $s = 1$ ¹. El fotón, γ , es la partícula de intercambio en la interacción electromagnética; los ocho gluones g_α ($\alpha = 1, \dots, 8$) median la interacción fuerte entre los quarks y los tres bosones masivos, W^\pm y Z^0 , son los correspondientes bosones intermediarios de la interacción débiles.

El ME es una teoría basada en el grupo de simetría de norma $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Este grupo de norma incluye al grupo de simetría de la interacción fuerte, $SU(3)_C$ [44, 45, 46], y al grupo

¹La interacción gravitacional no es relevante a bajas energías. Las interacciones gravitacionales son mediadas por la partícula hipotética llamada *gravitón*, la cual tiene espín $s = 2$.

de simetría de las interacción electrodébil, $SU(2)_L \times U(1)_Y$ [47, 48, 49]. El grupo de simetría de las interacción electromagnética, $U(1)_{em}$, aparece en el ME como un subgrupo de $SU(2)_L \times U(1)_Y$ y es en este sentido que se dice que las interacciones débil y electromagnética están unificadas. Para el estudio de las partículas y sus interacciones en el modelo, se definen tres sectores:

- a) *El fermiónico,*
- b) *El bosónico o de norma; y*
- c) *El escalar o de Higgs.*

1.1.1. El sector fermiónico

Los quarks y leptones están organizados en tres familias (ver tabla 1.1). Cada familia contiene dos sabores de quarks (u^i, d^i ; donde i indica la carga de color) y dos de leptones (neutrinos ν_l y leptones l , tipo electrón). Las tres familias tienen propiedades idénticas, con excepción de la masa. El contenido de partículas en cada familia se muestra en la Tabla 1.1; además de estas se tienen sus correspondientes antipartículas. Los campos izquierdos y derechos se obtienen al usar los operadores de quiralidad P_L y P_R ,

$$e_L^- = P_L e^- = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) e^-, \quad e_R^- = P_R e^- = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) e^- \quad (1.1)$$

y ellos transforman como dobletes y singletes de $SU(2)_L$, respectivamente.

$$\begin{array}{l} 1^{er} \text{Familia:} \\ 2^{da} \text{Familia:} \\ 3^{ra} \text{Familia:} \end{array} \quad \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} \nu_e \\ e^- \end{array} \right)_L, \\ \left(\begin{array}{c} \nu_\mu \\ \mu^- \end{array} \right)_L, \\ \left(\begin{array}{c} \nu_\tau \\ \tau^- \end{array} \right)_L, \end{array} \quad \begin{array}{l} e_R^-, \\ \mu_R^-, \\ \tau_R^-, \end{array} \quad \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} u \\ d \end{array} \right)_L, \\ \left(\begin{array}{c} c \\ s \end{array} \right)_L, \\ \left(\begin{array}{c} t \\ b \end{array} \right)_L, \end{array} \quad \begin{array}{l} u_R, \quad d_R, \\ c_R, \quad s_R, \\ t_R, \quad b_R, \end{array}$$

Tabla 1.1: Familias de quarks y leptones del ME.

1.1.2. El sector de norma

Este sector se encuentra compuesto por ocho gluones, los cuales son los bosones de norma de $SU(3)_C$ y de las partículas W^\pm, Z^0 y γ que son los cuatro bosones de norma de $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Las principales propiedades físicas de estos bosones de norma intermediarios son: los gluones tienen masa nula, son eléctricamente neutros y tienen carga de color, la cual puede ser de ocho tipos distintos [42]. Como consecuencia de esto, los gluones no sólo interactúan con los quarks, sino también con ellos mismos. Los bosones W^\pm y Z^0 son partículas masivas y también interactúan entre ellas. Los W^\pm tienen carga $Q = \pm 1$ respectivamente mientras que el Z^0 es eléctricamente neutro. El γ es eléctricamente neutro, sin masa y no interactúa consigo mismo. Para asegurar acoplamientos de fermiones de helicidad izquierda con el bosón de norma W^+ , los fermiones de este tipo están representados por dobletes de $SU(2)_L$,

$$Q_L = \left(\begin{array}{c} u \\ d \end{array} \right)_L, \quad L_L = \left(\begin{array}{c} \nu_e \\ e \end{array} \right)_L,$$

donde q_L y l_L son los dobletes de quarks y leptones en $SU(2)_L$, respectivamente. Los estados fermiónicos de helicidad derecha se transforman como singletes bajo $SU(2)_L$; pero ambos, quarks y leptones, dobletes y singletes, se transforman de manera no trivial bajo el grupo de hipercarga $U(1)_Y$. Para los fermiones se definen los números cuánticos Q, T_3 , y Y , que son la carga eléctrica, la carga débil y la hipercarga, respectivamente. Los valores de estos números cuánticos se muestran en la Tabla 1.2 para los estados fermiónicos en el ME.

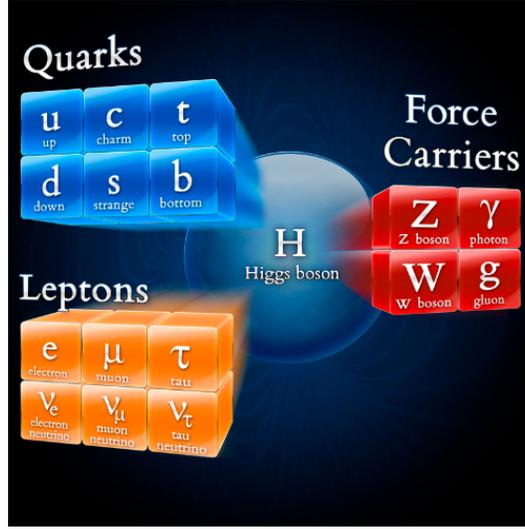


Figura 1.1: Partículas elementales del ME.

Números Cuánticos	u_R	u_L	d_R	d_L	ν_L	e_R	e_L
Y	2/3	1/6	-1/3	1/6	-1/2	-1	-1/2
T_3	0	1/2	0	-1/2	1/2	0	-1/2
Q	2/3	1/6	-1/3	-1/3	0	-1	-1

Tabla 1.2: Números cuánticos asociados a los fermiones en el ME.

1.1.3. El sector escalar

El sector de Higgs del ME ha sido confirmado experimentalmente de manera reciente [2, 3]. El hecho de que los bosones de norma débil sean masivos, indica que $SU(2)_L \times U(1)_Y$ no es una simetría del vacío. Por esto, se incluye un doblete de Higgs para generar la masa de los bosones electrodébiles W^\pm y Z^0 [50, 51, 52, 53, 54], así como, de los fermiones (excepto los neutrinos), debido a que los términos de masa

$$M_W^2 W_a^\mu W_\mu^a \text{ o } m\bar{\psi}\psi = m(\psi_L\psi_R + \psi_R\psi_L), \quad (1.2)$$

al ser introducidos de manera directa, destruyen la invariancia de norma $SU(2)_L \times U(1)_Y$, y por lo tanto la renormalizabilidad de la teoría. Para evitar este problema, la solución más conocida consiste en incluir en el ME el sector de Higgs, el cual induce un rompimiento espontáneo de la simetría, esto es,

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \longrightarrow SU(3)_C \times U(1)_{em}. \quad (1.3)$$

Esto se realiza a través del llamado Mecanismo de Higgs, el cual proporciona las masas correctas a los bosones de norma W^\pm y Z^0 y a los fermiones, y deja como consecuencia al *bosón de Higgs*.

Por otra parte, uno de los problemas que no se ha aclarado en el ME, es conocer la representación del bosón de Higgs que habrá de manifestarse en futuros experimentos. Esto es debido a que el mecanismo de Higgs no es único y existen muchas representaciones de bosones de Higgs que describen correctamente la dinámica del rompimiento espontáneo de la simetría. Sin embargo, la versión mínima incluye un doblete escalar complejo bajo $SU(2)_L$ dado por

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix},$$

que es un singlete bajo el grupo $SU(3)_C$, con una hipercarga asociada $Y_\Phi = 1$, y con isospín débil $T = 1/2$.

1.2. El Mecanismo de Higgs

Como ya se mencionó, uno de los ingredientes claves del ME de las interacciones electrodébiles es el concepto del rompimiento espontáneo de la simetría, que da como resultado la aparición de excitaciones Goldstone las cuales están relacionadas con términos de masa de los bosones de norma. Cuando el *rompimiento espontáneo de la simetría* se refiere a una simetría de norma en lugar de una global, entonces es el mecanismo de Higgs el que opera.

En el ME, el rompimiento espontáneo de la simetría se realiza por un campo escalar el cual adquiere un valor de expectación del vacío (v.e.v.) distinto de cero. El espectro físico resultante contiene no sólo a los bosones de norma masivos y a los campos fermiónicos sino también a la partícula de Higgs, un campo escalar eléctricamente neutro.

1.2.1. Rompimiento espontáneo de simetría

Una forma de explicar el fenómeno del *rompimiento espontáneo de la simetría* es

Un sistema físico tiene una simetría que ha sido espontáneamente rota si las interacciones que gobiernan la dinámica del sistema poseen tal simetría pero el estado base del sistema no.

En el lenguaje de la teoría cuántica de campos se dice que un sistema posee una simetría espontáneamente rota si el lagrangiano que describe la dinámica del sistema es invariante bajo estas transformaciones de simetría, pero el vacío de la teoría no. Aquí el vacío, $|0\rangle$, es el estado en el cual el valor de expectación del hamiltoniano $\langle 0|\mathbf{H}|0\rangle$ es mínimo.

Una de las implicaciones físicas del fenómeno del *rompimiento espontáneo de la simetría* es la aparición de modos no masivos. La situación general en la teoría cuántica del campo es descrita por el teorema de Goldstone:

“Si el lagrangiano de una teoría tiene una simetría global la cual no es una simetría del vacío entonces debe existir un bosón no masivo, escalar o pseudoescalar, asociado a cada generador que no aniquile el vacío y que tiene los mismos números cuánticos”.

Estos modos son conocidos como *bosones de Nambu-Goldstone* o simplemente *bosones de Goldstone*. El teorema de Goldstone es para teorías con rompimientos espontáneos de simetrías globales, pero pierde su validez para teorías de norma. En este caso es el mecanismo de Higgs el que opera:

Los bosones tipo Goldstone asociados al rompimiento espontáneo de simetría global no se manifiestan explícitamente en el espectro físico, sino que se “combinan” con los bosones de norma no masivos y como resultado, una vez que el espectro de la teoría se construye sobre el vacío asimétrico, aparecen partículas vectoriales masivas. El número de bosones vectoriales que adquieren masa es precisamente el número de bosones tipo Goldstone.

1.2.2. Sector de rompimiento de simetría

Sea Φ el sistema que provee el rompimiento $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$. Entonces Φ debe cumplir con los siguientes requerimientos:

1. Debe ser un campo escalar de manera que el rompimiento preserve la invariancia de Lorentz.
2. Debe ser un campo complejo de manera que el hamiltoniano sea hermitiano.

3. Debe tener valores de hipercarga e isospín débil distintos de cero para poder romper $SU(2)_L$ y $U(1)_Y$.
4. Sólo los componentes neutrales de Φ pueden adquirir v.e.v. distintos de cero de manera que se preserve la simetría $U(1)_{em}$ del vacío.
5. Las interacciones de Φ con los sectores fermiónico y de norma deben ser invariantes de norma.
6. Las autointeracciones de Φ dadas por el potencial $V(\Phi)$ deben producir la ruptura deseada, la cual está caracterizada en este caso por

$$\langle 0|\Phi^\dagger\Phi|0\rangle \neq 0.$$

7. $V(\Phi)$ debe ser renormalizable.

Tomando en cuenta estos puntos, la elección más simple para el sistema Φ y el lagrangiano del sector de rompimiento de simetría de la teoría electrodébil es:

$$\mathcal{L}_{SB} = (\mathcal{D}_\mu\Phi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu\Phi) - V(\Phi), \quad (1.4)$$

$$V(\Phi) = -\mu^2\Phi^\dagger\Phi + \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2 \quad \text{con } \lambda > 0, \quad (1.5)$$

donde

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

$$\mathcal{D}_\mu\Phi = \left(\partial_\mu - ig\frac{\tau^j}{2}W_\mu^j - i\frac{g'}{2}B_\mu \right) \Phi. \quad (1.7)$$

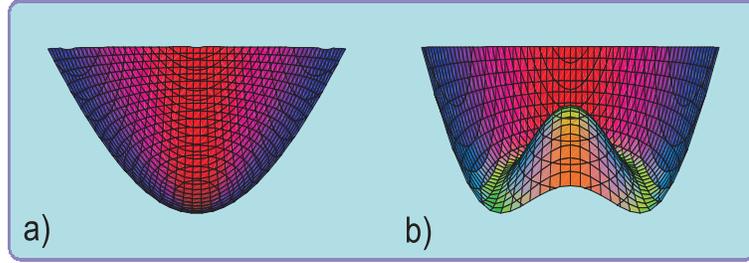


Figura 1.2: Rompimiento espontáneo de simetría. El potencial $V(\Phi)$ en **a)** la fase simétrica y **b)** en la fase del rompimiento espontáneo de la simetría.

Aquí, Φ es un doblete complejo fundamental, τ^j son los operadores de isospín; g y g' son las constantes de acoplamiento de norma correspondientes a los grupos $SU(2)_L$ y $U(1)_Y$, respectivamente; W_μ^j y B_μ son los campos de norma de $SU(2)_L$ y $U(1)_Y$, respectivamente. Dependiendo del signo del parámetro de masa ($-\mu^2$), existen dos posibles v.e.v. $\langle 0|\Phi^\dagger\Phi|0\rangle$ que minimizan el potencial $V(\Phi)$:

1. $(-\mu^2) > 0$: el mínimo es

$$\langle 0|\Phi^\dagger\Phi|0\rangle = 0, \quad (1.8)$$

entonces el vacío tiene simetría $SU(2)_L \times U(1)_Y$ y por lo tanto no hay rompimiento de simetría, lo cual se representa gráficamente en la figura 1.2 (a).

2. $(-\mu^2) < 0$: el mínimo es

$$|\langle 0|\Phi^\dagger\Phi|0\rangle| = -\frac{\mu^2}{\lambda}, \quad (1.9)$$

por lo tanto hay un número infinito de vacíos degenerados que corresponden al número infinito de posibles valores para $\langle 0|\Phi^\dagger\Phi|0\rangle$, por lo que

$$\Phi^2 = \Phi^\dagger\Phi = \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2) = -\frac{\mu^2}{\lambda}.$$

Cualquiera de estos vacíos posee simetría $U(1)_{em}$ pero no $SU(2)_L \times U(1)_Y$. El rompimiento $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$ ocurre una vez que se escoge un vacío en particular, gráficamente se representa en la figura 1.2 (b). Como es usual, tomamos la posibilidad más simple:

$$\begin{aligned} \langle \phi_1^2 \rangle_0 = -\frac{\mu^2}{\lambda}; \quad \langle \phi_2^2 \rangle_0 = \langle \phi_3^2 \rangle_0 = \langle \phi_4^2 \rangle_0 = 0; \\ |\langle 0|\Phi^\dagger\Phi|0\rangle| = \left(\frac{0}{\frac{v}{\sqrt{2}}} \right); \quad v^2 \equiv -\frac{\mu^2}{\lambda} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Otro aspecto interesante del mecanismo de Higgs es que preserva el número de grados de polarización. Estos son:

1. Antes del rompimiento espontáneo de la simetría: Tenemos un doblete escalar complejo Φ (con $4 \times 1 = 4$ grados de libertad), los campos de norma no masivos W^j (con $3 \times 2 = 6$ grados de libertad), y el campo de norma no masivo B (con $1 \times 2 = 2$ grados de libertad), para un total de 12 grados de libertad.
2. Después del rompimiento espontáneo de la simetría: Tenemos un escalar real físico h_{ME}° (con $1 \times 1 = 1$ grado de libertad), los campos masivos W^\pm y Z^0 (con $3 \times 3 = 9$ grados de libertad), y un fotón no masivo γ (con $1 \times 2 = 2$ grados de libertad), para un total de 12 grados de libertad.

Se dice que los grados de libertad escalares han sido “comidos” para dar a los bosones de norma W^\pm y Z^0 sus componentes longitudinales. Aún más, es importante notar que se introdujo en la teoría un grado de libertad extra a los necesarios desde el principio. Tres de las componentes reales de Φ , $\phi^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 \mp i\phi_2)$ y $\chi = \phi_3$, son los bosones tipo Goldstone necesarios en la teoría y el cuarto ϕ_4 se introduce sólo para completar el doblete complejo. Después del rompimiento de simetría, este grado de libertad extra se traduce en la aparición de una partícula escalar masiva en el espectro, el bosón de Higgs h_{ME}° .

1.2.3. Las masas de las partículas

Para poder obtener el espectro de las partículas y sus masas primero necesitamos escribir el lagrangiano del ME, que es invariante de norma $SU(2)_L \times U(1)_Y$:

$$\mathcal{L}_{ME} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{SB} + \mathcal{L}_{YW}, \quad (1.11)$$

donde \mathcal{L}_f es el lagrangiano del sector fermiónico, \mathcal{L}_G es el lagrangiano del sector bosónico de norma, \mathcal{L}_{SB} es el lagrangiano del sector de rompimiento de simetría y \mathcal{L}_{YW} es el lagrangiano de Yukawa, los cuales están dados por:

$$\mathcal{L}_f = \sum_{f=l,q} \bar{f}i\not{D}f, \quad (1.12)$$

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^i W_i^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP}, \quad (1.13)$$

$$\mathcal{L}_{SB} = (\mathcal{D}_\mu \Phi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \Phi) + \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad (1.14)$$

$$\mathcal{L}_{YW} = \lambda_e \bar{l}_L \Phi e_R + \lambda_u \bar{q}_L \tilde{\Phi} u_R + \lambda_d \bar{q}_L \Phi d_R + h.c., \quad (1.15)$$

en estas expresiones,

$$W_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i + g \epsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k, \quad (1.16)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad (1.17)$$

$$l_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, \quad q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi_0^* \\ -\phi^- \end{pmatrix}.$$

\mathcal{L}_{GF} y \mathcal{L}_{FP} son los lagrangianos de corrección de norma y de Faddeev-Popov, respectivamente que son necesarios en cualquier teoría de norma. Nótese que el lagrangiano \mathcal{L}_{SB} es necesario para proveer las masas M_{W^\pm} y M_{Z^0} mientras que \mathcal{L}_{YW} provee las masas M_f .

El procedimiento para obtener el espectro a partir del \mathcal{L}_{ME} es el siguiente:

1. Se debe fijar un vacío no simétrico, por lo que se escoge la ecuación (1.10),

$$|\langle 0 | \Phi^\dagger \Phi | 0 \rangle| = \left(\frac{0}{\frac{v}{\sqrt{2}}} \right). \quad (1.19)$$

2. El espectro físico se construye haciendo “pequeñas oscilaciones” alrededor de este vacío. Estas pequeñas oscilaciones están parametrizadas por

$$\Phi(x) = \exp \left(i \frac{\bar{\xi}(x) \cdot \bar{\sigma}}{v} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v + h_{ME}^\circ(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

donde $\bar{\xi}(x)$ y $h_{ME}^\circ(x)$ son campos “pequeños”.

3. Para poder eliminar los campos no-físicos $\bar{\xi}(x)$ hacemos las siguientes transformaciones de norma:

$$U(\xi) = \exp \left(-i \frac{\bar{\xi} \cdot \bar{\sigma}}{v} \right); \quad \Phi' = U(\xi) \Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v + h_{ME}^\circ(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix};$$

$$l'_L = U(\xi) l_L; \quad e'_R = e_R;$$

$$q'_L = U(\xi) q_L; \quad u'_R = u_R; \quad d'_R = d_R; \quad (1.21)$$

$$B'_\mu = B_\mu;$$

$$\left(\frac{\bar{\sigma} \cdot \bar{W}'_\mu}{2} \right) = U(\xi) \left(\frac{\bar{\sigma} \cdot \bar{W}_\mu}{2} \right) U^{-1}(\xi) - \frac{i}{g} (\partial_\mu U(\xi)) U^{-1}(\xi).$$

4. Finalmente, los eigenestados débiles son rotados a los eigenestados de masa los cuales definen los campos bosónicos de norma físicos:

$$W_\mu^\pm = \frac{W_\mu'^1 \mp i W_\mu'^2}{\sqrt{2}}, \quad (1.22)$$

$$Z_\mu = W_\mu'^3 \cos \theta_W - B'_\mu \sin \theta_W, \quad (1.23)$$

$$A_\mu = W_\mu'^3 \sin \theta_W + B'_\mu \cos \theta_W. \quad (1.24)$$

Ahora es posible obtener las masas de las partículas físicas de los siguientes términos del \mathcal{L}_{ME} :

$$(\mathcal{D}_\mu \Phi')^\dagger (\mathcal{D}^\mu \Phi') = \left(\frac{g^2 v^2}{4} \right) W_\mu^+ W^{\mu-} + \frac{1}{2} \left(\frac{(g^2 + g'^2) v^2}{4} \right) Z_\mu Z^\mu + \dots, \quad (1.25)$$

$$V(\Phi') = \frac{1}{2} (2\mu^2) h_{ME}^{\circ 2} + \dots, \quad (1.26)$$

$$\mathcal{L}_{YW} = \left(\lambda_e \frac{v}{\sqrt{2}} \right) \bar{e}'_L e'_R + \left(\lambda_u \frac{v}{\sqrt{2}} \right) \bar{u}'_L u'_R + \left(\lambda_d \frac{v}{\sqrt{2}} \right) \bar{d}'_L d'_R + \dots \quad (1.27)$$

Finalmente, obtenemos las predicciones a nivel árbol:

$$\begin{aligned} M_{W^\pm} &= \frac{gv}{2}; & M_{Z^0} &= \frac{\sqrt{(g^2 + g'^2)v}}{2}; & M_\gamma &= 0; \\ m_e &= \lambda_e \frac{v}{\sqrt{2}}; & m_u &= \lambda_u \frac{v}{\sqrt{2}}; & m_d &= \lambda_d \frac{v}{\sqrt{2}}; \dots, \\ & & & \text{y} & & \\ & & M_{h_{ME}^\circ} &= \sqrt{2}\mu, & & \end{aligned} \quad (1.28)$$

donde

$$v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}. \quad (1.29)$$

Con esto podemos reescribir a \mathcal{L}_{SB} y \mathcal{L}_{YW} , después de aplicar el mecanismo de Higgs, en términos de los campos escalares físicos, y obtener no sólo los términos de masa sino también los términos de interacción y cinéticos en el sector de Higgs,

$$\mathcal{L}_{SB} + \mathcal{L}_{YW} \rightarrow \mathcal{L}_{h_{ME}^\circ}^{libre} + \mathcal{L}_{h_{ME}^\circ}^{int} + \dots \quad (1.30)$$

donde

$$\mathcal{L}_{h_{ME}^\circ}^{libre} = \frac{1}{2} \partial_\mu h_{ME}^\circ \partial^\mu h_{ME}^\circ - \frac{1}{2} M_{h_{ME}^\circ}^2 h_{ME}^{\circ 2} \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{h_{ME}^\circ}^{int} &= -\frac{M_{h_{ME}^\circ}^2}{v^2} h_{ME}^{\circ 3} - \frac{M_{h_{ME}^\circ}^2}{8v^2} h_{ME}^{\circ 4} - \frac{m_e}{v} \bar{f} h_{ME}^\circ f \\ &+ M_W^2 W_\mu^+ W^{\mu-} \left(1 + \frac{2}{v} h_{ME}^\circ + \frac{2}{v^2} h_{ME}^{\circ 2} \right) \\ &+ M_Z^2 Z_\mu Z^\mu \left(1 + \frac{2}{v} h_{ME}^\circ + \frac{2}{v^2} h_{ME}^{\circ 2} \right) \end{aligned} \quad (1.32)$$

Ahora todas las masas están dadas en términos de un único parámetro de masa v y de los acoplamientos g , g' , λ , λ_e , etc. Así mismo, las interacciones del bosón de Higgs h_{ME}° con los fermiones y con los bosones de norma son proporcionales a los acoplamientos de norma y a las correspondientes masas de las partículas:

$$\begin{aligned} \bar{f} f h_{ME}^\circ &: -i \frac{g}{2} \frac{m_f}{M_W}; \\ W_\mu^+ W_\nu^- h_{ME}^\circ &: ig M_W g_{\mu\nu}; \\ Z_\mu Z_\nu h_{ME}^\circ &: i \frac{g}{\cos \theta_W} M_Z g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Experimentalmente se ha encontrado que [13]

$$M_{W^\pm} = 80.385 \pm 0.015 \text{ GeV},$$

$$M_Z = 91.1876 \pm 0.0021 \text{ GeV}.$$

Usando estos valores se tiene que $v = 254 \text{ GeV}$. De la ecuación (1.28) podemos observar que

$$\frac{M_W}{M_Z} = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = \cos \theta_W. \quad (1.34)$$

Dado que los bosones Z^0 y W^\pm no son degenerados en masa (a menos que $\theta_W \rightarrow 0$), una vez medido θ_W , el resultado de la ecuación (1.34) es una predicción del ME, la cual ha resultado ser consistente con los experimentos.

Una cantidad útil a considerar es

$$\rho \equiv \frac{M_W}{M_Z \cos \theta_W} \quad (1.35)$$

la cual vale 1 para el ME². Cualquier desviación de $\rho = 1$ es señal de la existencia de una nueva física.

1.3. Problemas del Modelo Estándar

El ME ha mostrado ser muy útil para la física de partículas pues explica muchos de los fenómenos hasta ahora conocidos, sin embargo, aún deja algunos aspectos sin responder, como:

- El origen y jerarquía del espectro de masas no es entendible.
- El número de generaciones en la teoría es arbitrario. Además, no hay explicación para la estructura de mezcla en la matriz de V_{CKM} . Aunque la violación de CP se puede incorporar en el ME vía la matriz V_{CKM} , su origen es un misterio.
- La asimetría entre materia y antimateria en el universo.
- El grupo de simetría $SU(2)_L \times U(1)_Y$ no es asintóticamente libre.
- No explica la cuantización de la carga eléctrica.
- El poder de predicción del ME es relativamente limitado debido a la existencia de 19 parámetros libres, entre ellos la masa del bosón de Higgs.

La gravedad no es contemplada dentro del ME, debido a que es “muy débil” como para jugar un papel importante dentro de la teoría. Actualmente no se cuenta con una teoría cuántica satisfactoria para la gravedad debido a varias dificultades que presenta la teoría, tanto matemáticas como conceptuales. Así mismo, las observaciones astronómicas apuntan a la existencia de una nueva clase de materia, hasta ahora desconocida, la llamada *materia oscura*³.

Finalmente, en Junio de 1998 la colaboración Super-Kamiokande [55], anunció el descubrimiento de evidencia de la oscilación de neutrinos atmosféricos, lo que implica que los neutrinos son masivos. Esta es la primera evidencia en contra del ME.

Por todo esto, el ME en lugar de ser considerado como una teoría fundamental de la naturaleza, debe entenderse como una teoría efectiva, esto es, como el límite de una teoría más fundamental. Existen varias opciones que aspiran a resolver los problemas del ME. Entre estas posibilidades se encuentran las Teorías de Gran Unificación [56] (GUT, por sus siglas en inglés), las cuales, aunque resuelven varios de los problemas del ME, no logran solucionar el problema de la jerarquía; los modelos Tecnicolor [56],

²De hecho, se ha demostrado que aún cuando existan dobletes de Higgs adicionales, el parámetro $\rho_{ME} = 1$ no cambia [4].

³Aparte de la materia oscura también existe la energía oscura. Estas dos conforman el 23% y el 73% de universo, respectivamente, mientras que la materia ordinaria sólo conforma el 4% de este.

CAPÍTULO 1. EL MODELO ESTÁNDAR DE LA FÍSICA DE PARTÍCULAS

1.3. PROBLEMAS DEL MODELO ESTÁNDAR

en los cuales el sector de Higgs es fuertemente interactuante y el bosón de Higgs no es una partícula fundamental; y finalmente Supersimetría [57] (SUSY, por sus siglas en inglés), la única simetría conocida capaz de relacionar fermiones y bosones, logrando solucionar varios de los problemas antes mencionados.

En este trabajo estamos interesados en explorar una extensión supersimétrica del ME. Para ello, presentamos una revisión del ME en el siguiente capítulo, lo cual dará entrada a la extensión que nos interesa.

Capítulo 2

Neutrinos

El estudio de los neutrinos es importante desde el punto de vista del Modelo Estándar, ya que este impone una masa nula para ellos, pero evidencias experimentales demuestran que tienen una masa diferente a cero [55]. Esta masa es pequeña con respecto a las demás partículas masivas del modelo, pero no puede ser despreciada. Los valores de las masas aún no han sido determinados, únicamente tenemos cotas máximas para estos valores, así como cotas para los valores de las diferencias entre las masas de ellos.

Una de las razones del interés por el estudio de la física de los neutrinos, es el hecho de que son partículas muy abundantes en el universo. La abundancia de restos del big bang es de $\sim 100\nu$ por cm^3 ; las supernovas del tipo II en una razón de 10s^{-1} del universo observable, producen $\sim 10^{58}\nu$, en cada explosión; estrellas ordinarias como el Sol, radían $\sim 3\%$ de su energía en neutrinos, y cerca de $1\nu\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$, son producidos por interacciones de rayos cósmicos con nuestra atmósfera; en un laboratorio, en un reactor típico con potencia térmica $P_t = 3\text{GW}_t$, son producidos $\sim 6 \times 10^{20}\bar{\nu}_e\text{s}^{-1}$. En contraste, las interacciones de los neutrinos son muy débiles, lo cual hace muy difícil el estudio de sus propiedades [58].

2.1. Historia de los neutrinos

La historia de la física de neutrinos comienza en 1930, cuando Wolfgang Pauli postula la existencia de una nueva partícula a la cual llamó “neutrón”, un fermión sin carga eléctrica el cual interactuaba débilmente con la materia y con una masa menor al 1% de la masa del protón. La presencia de este “neutrón” salvó el teorema de la estadística del espín y explicó la aparente violación de la conservación de la energía en el decaimiento β . En 1934, Enrico Fermi hizo una descripción con la mecánica cuántica de las interacciones débiles; él postuló que el decaimiento β era mediado por el proceso del decaimiento $n \rightarrow pe^-\bar{\nu}_e$. Hacia los años 50's inicia el Proyecto Poltergeist, encabezado por Frederick Reines y Clyde Cowan, cuyo objetivo era detectar neutrinos, los cuales fueron estudiados en reactores nucleares; evidencia definitiva fue obtenida al hacer un decaimiento beta inverso ($\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$) en un tanque centellador cerca del reactor de Hanford. [59]

En 1957 Pontecorvo propuso el fenómeno de oscilación de los neutrinos entre los estados de sabor definido, en analogía con la mezcla del kaon neutro, y en 1962 Maki, Nakagawa y Sakata presentan la matriz de mezcla que explica las oscilaciones propuestas por Pontecorvo. En ese mismo año Leon Lederman, Melvin Schwartz y Jack Steinberger descubren el neutrino del muón ν_μ en el laboratorio de Brookhaven. De 1974 a 1977, experimentos hechos por Martin Perl, revelaron la existencia de un tercer leptón, el τ , lo cual hizo suponer que existía un tercer sabor del neutrino, el ν_τ ; cuyo descubrimiento fue publicado en 2000 con evidencia obtenida en 1997 en el experimento DONUT. [59].

2.2. Neutrinos Masivos

El Modelo Estándar asume que los neutrinos no son masivos, pero debido a las oscilaciones de los neutrinos, estos deben tener masa. Este es uno de los problemas que el ME no resuelve, ya que en su formulación lagrangiana, los términos correspondientes a la masa de los neutrinos no existen. Para resolver este problema, en el ME se extiende el sector de los leptones, agregando la parte derecha de los neutrinos. Para hacer esto, basta con agregar un número m de campos fermiónicos neutros en singletes en $SU(2)_L$ y de quiralidad derecha sin alterar la estructura restante del ME. Estos neutrinos que son singletes de $SU(2)_L$, se conocen como neutrinos estériles ν_s , ya que no experimentan las interacciones inducidas por las mezclas con los neutrinos activos y se encuentran en casi todas las extensiones del ME. Dado que la carga electromagnética y la hipercarga Y de $U(1)$ difieren por la tercera componente del isospín y como los neutrinos no tienen carga eléctrica $Q = T_3 + Y = 0$, entonces los neutrinos estériles llevan números cuánticos de $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$: $\nu_{s_i}^I (1, 1)_0$, esto es, que el neutrino derecho es singlete de $SU(3)_c$, singlete de $SU(2)_L$, y tiene hipercarga cero. Dado que los neutrinos estériles no están acoplados a los campos de norma, pueden tener masas desnudas e interacciones de Yukawa sin violar la invariancia de norma de la teoría mediante [60], [61]:

$$-\mathcal{L}_N = \frac{1}{2} \bar{N}_i^c M_{N_{ij}} N_j + \Gamma_{ij}^\nu \bar{L}_{L_i} \tilde{\phi} N_j + h.c.. \quad (2.1)$$

Después del rompimiento espontáneo de la simetría, este término del Lagrangiano da lugar a dos términos de masa que provienen de términos renormalizables:

$$-\mathcal{L}_{M_\nu} = \bar{\nu}_{L_i} (M_D) \nu_{s_j} + \frac{1}{2} \bar{\nu}_{s_i}^c (M_R) \nu_{s_j} + h.c.. \quad (2.2)$$

donde ν^c indica el campo conjugado de carga $\nu^c = C\bar{\nu}^T$, con C la matriz de conjugación de carga. En la Ecuación 2.2 el primer término corresponde a la masa de Dirac, en el cual se conserva el número leptónico total (aún cuando se viola el número de las simetrías de los leptones), además M_D es una matriz compleja de $3 \times m$. El segundo término de la Ecuación 2.2 corresponde a la masa de Majorana, involucra dos campos de neutrino, viola la conservación del número leptónico, y M_R es una matriz simétrica compleja de $m \times m$.

En general, la Ecuación 2.2 la podemos escribir de la forma:

$$-\mathcal{L}_{M_\nu} = \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{\nu}_s^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_T & M_D \\ M_D^T & M_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L^c \\ \bar{\nu}_s \end{pmatrix} + h.c..$$

donde $\nu_L (\nu_s)$ representan 3 sabores de neutrino activo (estéril) y M_T es la matriz activa de Majorana la cual se genera por un triplete de Higgs. Uno de los modelos más populares para las masas de los neutrinos es el mecanismo del subibaja (o mecanismo seesaw) en el cual la matriz $M_T = 0$, y los eigenvalores de M_R son $\gg M_D$. Este mecanismo se deriva formalmente de la lagrangiana de masas de los neutrinos \mathcal{L}_{M_ν} de la ecuación 2.2, escrita como:

$$-\mathcal{L}_{M_\nu} = -\bar{\nu}_L M_D \nu_R - \frac{1}{2} \bar{\nu}_R M_R \nu_R, \quad (2.3)$$

donde ν_L representa las componentes izquierdas de los campos de neutrinos activos que provienen de los dobletes electrodébiles, y ν_R representa a las componentes derechas de los campos de los neutrinos estériles provenientes de singletes electrodébiles. El número de neutrinos derechos no es fijo, ya que no sabemos cuantos neutrinos derechos hay, pero el número de campos de neutrinos izquierdos es tres.

Para energías muy por abajo de la escala de la masa de los neutrinos derechos, podemos integrar a estos y eliminarlos de la teoría por medio de las ecuaciones de movimiento:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{M_\nu}}{\delta \nu_R} = 0.$$

Estas dan:

$$\bar{\nu}_R = -\bar{\nu}_L M_D M_R^{-1} \quad \text{y} \quad \nu_R = -M_R^{-1} M_D^T \nu_L,$$

que al sustituirlo en la Ecuación 2.3 nos da

$$\mathcal{L}_{M_\nu} = -\frac{1}{2} \bar{\nu}_L \mathcal{M}_\nu \nu_L,$$

\mathcal{M}_ν dada por $\mathcal{M}_\nu = -M_D M_R^{-1} M_D^T$. \mathcal{M}_ν es la matriz de masa de los neutrinos izquierdos; de este modo, los neutrinos izquierdos adquieren masa finita sin violar la invariancia de norma de la teoría y sin transtornar el buen acuerdo del ME con la fenomenología de bajas energías.

El mecanismo del subibaja proporciona una explicación natural del valor pequeño de las masas de los neutrinos de Majorana que estaría en buen acuerdo con los valores experimentales. En tanto que, en una teoría que sólo tuviera neutrinos de Dirac, se requeriría de un acoplamiento de Yukawa muy pequeño, $|\Gamma^\nu| < 10^{-10}$ para el cual no habría una explicación simple y natural de la teoría.

2.3. Neutrinos de Dirac o de Majorana

Los neutrinos en el ME, no son masivos, y estos se distinguen de sus antipartículas por la conservación total del número leptónico. De cualquier modo, las oscilaciones de los neutrinos dan evidencia que estos son masivos. La ausencia de carga del neutrino, permite escribir dos clases de términos de masa invariantes de Lorentz para el neutrino, las masas de Dirac y las de Majorana.

Los neutrinos masivos pueden ser partículas de Dirac o de Majorana, de cualquier modo, el ME de las corrientes débiles produce y absorbe neutrinos; para lo cual, las oscilaciones de los neutrinos no importa si son partículas de Dirac o de Majorana [62], [63]

2.3.1. Espinores de Dirac

Aquí, los neutrinos junto con los electrones, tienen cuatro estados independientes, partículas con estados derechos e izquierdos, ν_R y ν_L ; y antipartículas con estados derechos e izquierdos, $\bar{\nu}_R$ y $\bar{\nu}_L$. La ecuación de Dirac para un electrón es:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0,$$

la cual se obtiene de la lagrangiana:

$$\mathcal{L}_D = i\bar{\psi}\gamma^\lambda \partial_\lambda \psi - m\bar{\psi}\psi,$$

y nos lleva a la relación de energía momento:

$$p^\lambda p_\lambda = m^2,$$

cuando las matrices de Dirac, γ_λ , anticonmutan. Esta condición se satisface sólo si las matrices γ_λ , son de 4×4 o mayores. Por consiguiente ψ debe ser un espinor de cuatro componentes.

2.3.2. Espinores de Majorana

Los neutrinos de Majorana, por definición son sólo dos estados: neutrino izquierdo (ν_L), y antineutrino derecho ($\bar{\nu}_R$). Una partícula es de Majorana si el campo espinorial satisface la condición de ser igual a su conjugado de carga,

$$\psi_M = \psi_M^c = C\bar{\psi}^T \tag{2.4}$$

en la que C es la matriz de la conjugación de la carga eléctrica y tiene la propiedad:

$$C\gamma_\lambda C^{-1} = -(\gamma^\lambda)^T \tag{2.5}$$

Un electrón con carga $-e$, no puede ser una partícula de Majorana ya que su conjugado de carga es $+e$. Un neutrino es neutro, por lo que sí puede ser igual a su conjugado de carga. Así, tenemos que para la Ecuación 2.4, la construcción reduce el número de componentes independientes del espinor por un factor de dos, debido a que la partícula y la antipartícula son la misma partícula.

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \nu \\ i\sigma_2\nu^* \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \psi_M = \psi_M^c = C\bar{\psi}^T$$

2.4. Oscilaciones de los Neutrinos

La principal razón por la que los neutrinos oscilan es consecuencia de que estos tienen masa, como fue propuesto por Bruno Pontecorvo en la década de los 50's; por lo que es necesario tener un claro y correcto entendimiento de la teoría de las oscilaciones de los neutrinos para tener una interpretación correcta de los resultados experimentales. Con esto, las oscilaciones de los neutrinos y sus masas, representan una física más allá del Modelo Estándar [58], [62], [63].

En la teoría de las oscilaciones de los neutrinos, se asume que los neutrinos son creados o detectados con un antileptón cargado l_α^+ , con $\alpha = e, \mu$ o τ , y son descritos por:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{k=1}^3 U_{\alpha k}^* |\nu_k\rangle \quad (2.6)$$

ya que los estados $|\nu_k\rangle$ de los neutrinos masivos tienen masa definida m_k y energía definida E_k , ellos evolucionan con el tiempo como una onda plana:

$$i\frac{\partial}{\partial t} |\nu_k(t)\rangle = \mathcal{H} |\nu_k(t)\rangle \quad \implies \quad |\nu_k(t)\rangle = e^{-iE_k t} |\nu_k(0)\rangle \quad (2.7)$$

donde \mathcal{H} es el operador Hamiltoniano. Así la evolución temporal del estado de sabor de neutrino está dada por

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_{k=1}^3 U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} |\nu_k\rangle = \sum_{\beta=e,\mu,\tau} \left(\sum_{k=1}^3 U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} U_{\beta k} \right) |\nu_\beta\rangle \quad (2.8)$$

lo cual muestra que si la matriz de mezcla U es diferente de la unidad, para $t > 0$ el estado $|\nu_\alpha(t)\rangle$, el cual tiene un sabor α a $t = 0$, es la superposición de diferentes sabores. La cantidad entre paréntesis de la Ecuación 2.8 es la amplitud de $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ al tiempo t después de la producción ν_α , elevando al cuadrado el valor absoluto de esta cantidad, nos da la probabilidad de transición de $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$:

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) = |\langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle|^2 = \left| \sum_{k=1}^3 U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} U_{\beta k} \right|^2 = \sum_{k=1}^3 U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i(E_k - E_j)t} \quad (2.9)$$

como podemos ver que $P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t)$ depende sólo de la diferencia de energías $E_k - E_j$. En la teoría estándar de las oscilaciones de los neutrinos, se asume que todos los neutrinos masivos tienen el mismo momento \vec{p} , teniendo:

$$E_i = \sqrt{\vec{p}^2 + m_i^2} \simeq E + \frac{m_i^2}{2E} \quad \implies \quad E_k - E_j = \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E}$$

donde $E \simeq |\vec{p}|$ es la energía de un neutrino no masivo y $\Delta m_{kj}^2 = m_k^2 - m_j^2$. Para obtener una probabilidad de transición medible, es necesario convertir al tiempo t , el cual no es medible en los experimentos de oscilaciones de neutrinos, en L que es la distancia del detector en la cual se observa ν_β desde la fuente ν_α . Considerando neutrinos ultrarelativistas, tenemos $t \simeq L$, de modo que la Ecuación 2.9 queda como:

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L) = \sum_{k=1}^3 U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp \left[-i \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E} \right) \right] \quad (2.10)$$

la cual es usada en análisis experimental de datos de oscilaciones de neutrinos en el vacío.

2.5. Los Neutrinos Ahora

Actualmente los neutrinos y sus propiedades han sido estudiadas con mucho interés, aunque experimentos realizados no dan una precisión de las masas de los neutrinos, se ha detectado que los neutrinos oscilan entre los sabores que estos tienen ($\nu_\alpha \rightleftharpoons \nu_\beta$). De las distintas formas que se han observado a los neutrinos tenemos los siguientes [59], [64]:

2.5.1. Neutrinos Solares

El Sol es una de las grandes fabricas sólo de ν_e debido a las reacciones nucleares que se crean en este; se tiene suficiente evidencia, debido a que la energía que el Sol produce a través de la fusión protón-protón $p + p + p + p \rightarrow {}^4\text{He} + e^+ + e^+ + \nu_e + \nu_e + \gamma$. Fue en 1964, en un experimento hecho por Ray Davis en la mina de Homestake en el sur de Dakota, que se obtuvo la evidencia de neutrinos provenientes del Sol. El experimento Kamiokande (en 1985) fue diseñado para observar el decaimiento del protón, y para detectar neutrinos provenientes del Sol; en 1990 fueron construidos los experimentos GALLEX y SAGE, los cuales junto con el Kamiokande confirmaron un déficit observado por el experimento de Ray Davis; además de dar soluciones astrofísicas al problema de los neutrinos atmosféricos. Otros experimentos que dieron explicación acerca del déficit de los neutrinos fueron el Super-Kamiokande, el SNO y el KamLAND. En el Observatorio de Neutrinos de Sudbury (SNO) han medido cuidadosamente el flujo de los neutrinos solares de alta energía provenientes de la desintegración de ${}^8\text{Be}$.

2.5.2. Neutrinos Atmosféricos

A partir de 1980, experimentos empezaron a medir flujos de neutrinos atmosféricos con mayor precisión. Los neutrinos atmosféricos son producidos por los rayos cósmicos en las capas altas de la atmósfera terrestre; y posteriormente su presencia es registrada por un detector subterráneo. En detalle, los rayos cósmicos (muchos de ellos protones) chocan en la atmósfera y producen un chubasco de partículas, muchas de ellas piones; los cuales decaen en muones y neutrinos-muón. Después los muones decaen en electrones, neutrinos-electrón y antineutrinos-muón $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu$ (o $\bar{\nu}_\mu$) $\rightarrow e^\pm + \nu_e$ (o $\bar{\nu}_e$) + $\bar{\nu}_\mu$ (o ν_μ). Varios experimentos fueron construidos para estudiar los neutrinos atmosféricos, como el NUSSEX, Fréjus, Soudan, MACRO, Kamiokande, IMB, Super-Kamiokande; de los cuales, en los tres últimos experimentos se usó agua y detectores Čerenkov. Uno de los experimentos actuales para medir neutrinos atmosféricos es el Proyecto AMANDA (Antartic Muon And Neutrino Detector Array) el cual usa hielo natural para detectar el efecto Čerenkov, el cual también será usado para detectar neutrinos provenientes de explosiones de supernovas.

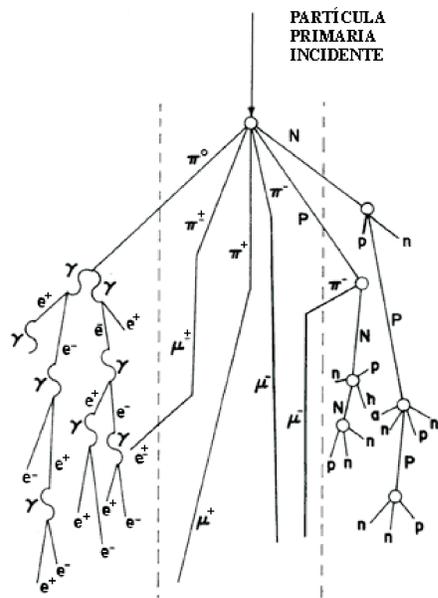


Figura 2.1: Principales modos de producción de partículas secundarias a través de la atmósfera. A la izquierda se encuentra la componente electromagnética, al centro la componente muónica o dura y a la derecha la componente nucleónica.

Capítulo 3

Simetría Permutacional S_3

Una de las extensiones del Modelo Estándar que nos interesan en este trabajo es la extensión con la simetría discreta invariante S_3 . En este capítulo se presenta el grupo S_3 , con sus propiedades, así como la construcción de los invariantes del grupo, necesarios para la construcción del Lagrangiano de Yukawa.

3.1. El grupo S_3

El grupo S_3 es el conjunto formado por las permutaciones de tres objetos [65], los cuales podemos etiquetar como (f_1, f_2, f_3) . Los elementos del grupo son

$$S_3 = \{E, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\},$$

donde E es el elemento identidad del grupo y los A_i con $i = 1, 2, \dots, 5$ etiquetan las permutaciones de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} E &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, & A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, & A_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ A_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, & A_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, & A_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La notación usada se refiere al intercambio de los subíndices de f_1, f_2 y f_3 , por ejemplo A_1 actúa de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} f_1 &\rightarrow f_2 \\ f_2 &\rightarrow f_1 \\ f_3 &\rightarrow f_3 \end{aligned}$$

Para la simplificación de los cálculos futuros referentes a S_3 , es conveniente establecer la tabla de multiplicación del grupo. En general, en el grupo de permutaciones S_n , el producto entre dos de sus elementos es simplemente su aplicación sucesiva, siendo este producto no conmutativo, por lo que en general S_n y en particular S_3 son grupos *no abelianos*. Así, a manera de ejemplo, podemos ver lo que ocurre al multiplicar A_2 con A_5 :

$$A_2 A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = A_3,$$

que en términos de f_1, f_2 y f_3 es

$$\begin{aligned} f_1 &\rightarrow f_3 \rightarrow f_1, \\ f_2 &\rightarrow f_1 \rightarrow f_3, \\ f_3 &\rightarrow f_2 \rightarrow f_2. \end{aligned}$$

Los productos entre los elementos restantes de S_3 se realizan de manera análoga al ejemplo anterior, obteniéndose de esta forma la tabla de multiplicación del grupo, dada en la tabla 3.1

Elementos	E	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
E	E	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	A_1	E	A_5	A_4	A_3	A_2
A_2	A_2	A_4	E	A_5	A_1	A_3
A_3	A_3	A_5	A_4	E	A_2	A_1
A_4	A_4	A_2	A_3	A_1	A_5	E
A_5	A_5	A_3	A_1	A_2	E	A_4

Tabla 3.1: Tabla de multiplicar del grupo S_3 .

Ahora, de manera general, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \in S_n \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \in S_n,$$

donde A^{-1} es el elemento inverso y cumple con

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E.$$

Como ejemplo particular en el caso de S_3 , el inverso de A_1 es

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

o bien, reordenando los términos, identificamos

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = A_1,$$

de manera análoga, tenemos los inversos de los demás elementos:

$$\begin{aligned} E^{-1} &= E & A_1^{-1} &= A_1 & A_2^{-1} &= A_2 \\ A_3^{-1} &= A_3 & A_4^{-1} &= A_5 & A_5^{-1} &= A_4 \end{aligned}$$

Estamos ahora en condiciones de determinar las clases conjugadas de S_3 .

Sea un grupo G de orden n , se define una clase conjugada del grupo cuyo representante es a como [65].

$$(a) = \{a, b \mid u^{-1}bu = a, \quad u \in G\}.$$

En S_3 , el elemento identidad E por sí mismo forma una clase, las demás clases se determinan haciendo uso de la tabla de multiplicación del grupo. Así, para la clase (A_1) , tenemos

$$\begin{aligned} A_1^{-1}A_1A_1 &= A_1A_1A_1 = A_1 \\ A_3^{-1}A_2A_3 &= A_3A_2A_3 = A_1 \\ A_4^{-1}A_3A_4 &= A_5A_3A_4 = A_1 \dots \end{aligned}$$

para (A_4) se tiene,

$$\begin{aligned} A_5^{-1}A_4A_5 &= A_4A_4A_5 = A_4 \\ A_2^{-1}A_5A_2 &= A_2A_5A_2 = A_4 \dots \end{aligned}$$

por lo tanto S_3 tiene tres clases conjugadas que son, con un cambio de notación,

$$E = \{E\}, \quad k_1 = \{A_4, A_5\}, \quad k_2 = \{A_1, A_2, A_3\} \tag{3.1}$$

Más adelante regresaremos a las clases conjugadas.

3.2. Representaciones del Grupo S_3

En esta sección construiremos un par de representaciones matriciales del grupo S_3 , empezaremos considerando el espacio vectorial tridimensional generado por los vectores base

$$\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\} \quad (3.2)$$

es evidente la forma en que actúa el elemento E sobre los vectores base, por lo que nos vemos tentados a representar en forma matricial dicho elemento de la manera siguiente

$$D(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para un ejemplo más ilustrativo, analicemos el efecto de aplicar A_5 a los vectores de la base,

$$A_5 e_1 = e_3,$$

$$A_5 e_2 = e_1,$$

$$A_5 e_3 = e_2,$$

así, la representación matricial de A_5 es

$$D(A_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

haciendo algo análogo con los demás elementos de S_3 , obtenemos entonces la llamada representación real del grupo S_3 ,

$$\begin{aligned} D(E) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & D(A_1) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & D(A_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ D(A_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & D(A_4) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & D(A_5) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

La representación real es una representación tridimensional.

Se construirá ahora una representación más, aprovechando el hecho de que el grupo S_3 es isomórfico al grupo de simetrías de un triángulo equilátero [66] (Figura 3.1), los elementos A_1 , A_2 y A_3 están asociados con reflexiones sobre los ejes de simetría indicados y los elementos A_4 y A_5 con rotaciones correspondientes a ángulos de $2\pi/3$ y $4\pi/3$ respectivamente, alrededor del eje z . Consideremos nuevamente el espacio vectorial tridimensional generado por los vectores base (3.2), a manera de ejemplo, veamos como actúa A_4 (rotación por $2\pi/3$ alrededor de z) sobre los vectores de la base,

$$A_4 e_1 = \cos \frac{2\pi}{3} e_1 + \sin \frac{2\pi}{3} e_2 = -\frac{1}{2} e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} e_2,$$

$$A_4 e_2 = -\sin \frac{2\pi}{3} e_1 + \cos \frac{2\pi}{3} e_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} e_1 - \frac{1}{2} e_2,$$

$$A_4 e_3 = e_3$$

por lo que podemos entonces representar matricialmente al elemento A_4 como sigue,

$$D(A_4) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

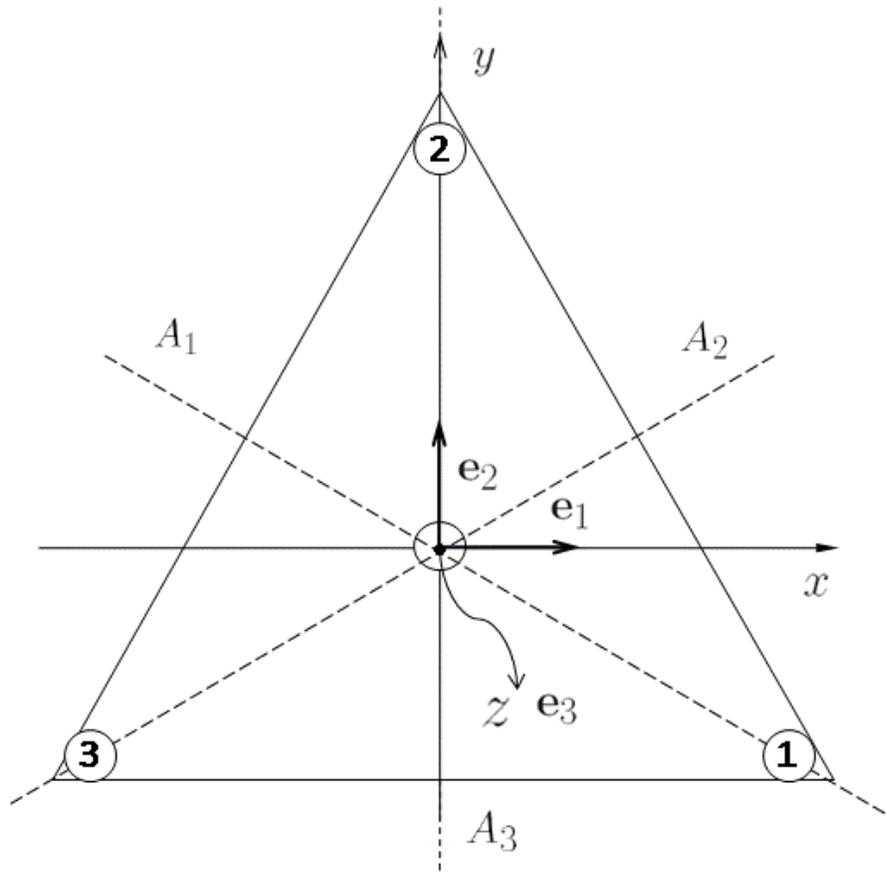


Figura 3.1: Simetrías de un triángulo equilátero.

Procediendo de forma similar con los otros elementos de S_3 , obtenemos

$$\begin{aligned}
 D(E) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & D(A_1) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
 D(A_2) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & D(A_3) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
 D(A_4) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & D(A_5) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Notamos que las matrices de esta representación son unitarias, por lo tanto la representación que acabamos de construir es una representación unitaria. De ahora en adelante se trabajará de manera particular sobre esta representación.

Ahora, de teoría de grupos, sabemos que el número de representaciones irreducibles no equivalentes de un grupo G de orden g es igual al número de clases conjugadas en el grupo, entonces en nuestro caso, debido a que el número de clases conjugadas de S_3 es 3 (ver (3.1)), podemos decir que el número de

CAPÍTULO 3. SIMETRÍA PERMUTACIONAL S_3
3.2. REPRESENTACIONES DEL GRUPO S_3

representaciones irreducibles de S_3 es 3. Por otro lado, también podemos determinar las dimensiones de las representaciones irreducibles de S_3 mediante la siguiente relación [65],

$$\sum_{\mu=1}^3 n_{\mu}^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 6$$

por simple inspección podemos notar que los valores para los cuales se verifica esta ecuación son $n_1 = n_2 = 1$ y $n_3 = 2$, por lo que las representaciones irreducibles de S_3 tienen dimensiones 1 y 2 respectivamente; esto es, podemos descomponer al grupo S_3 en dos singletes y un doblete.

Vemos ahora que todas las matrices de la representación (3.4), tienen una estructura en bloques, por lo que es evidente que son reducibles y por lo tanto las podemos descomponer en dos matrices de dimensiones (2×2) y (1×1) , pero además sabemos que existe una representación irreducible trivial para cada grupo, llamada la representación idéntica y que se caracteriza por $D^{(1)}(R_i) = 1$, para todo $R_i \in G$. Todo esto se resume en la Tabla 3.2.

Rep. Ele.	$D^{(1)}$	$D^{(2)}$	$D^{(3)}$
E	1	1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
A_1	1	-1	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
A_2	1	-1	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
A_3	1	-1	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
A_4	1	1	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
A_5	1	1	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Tabla 3.2: Representaciones irreducibles de los elementos de S_3 .

Utilizando la ecuación para obtener los caracteres de un grupo [65],

$$\chi(R) = \sum_{i=1}^d D_{ii}(R), \tag{3.5}$$

y usando la Tabla 3.2 podemos construir la correspondiente tabla de caracteres para S_3 ,

Rep. \ Clases	E	K_1^3	K_2^2
$D^{(1)}$	1	1	1
$D^{(2)}$	1	-1	1
$D^{(3)}$	2	0	-1

Tabla 3.3: Tabla de caracteres de S_3 .

Podemos expresar la representación (3.4) en términos de sus componentes irreducibles, esto es,

$$D = a_1 D^{(1)} \oplus a_2 D^{(2)} \oplus a_3 D^{(3)}, \tag{3.6}$$

donde \oplus denota la suma directa y las a_ν se pueden determinar según la ecuación [65],

$$a_\nu = \frac{1}{g} \sum_{i=1} c_i \chi_i^{(\nu)*} \chi_i,$$

donde g es el orden del grupo, c_i es el número de elementos en la clase K_i , $\chi_i^{(\nu)}$ es el carácter primitivo de la clase K_i , y χ_i es el carácter compuesto de la clase K_i . Haciendo el cálculo para a_1 , tenemos

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{g} \left(c_1 \chi_1^{(1)} \chi_1 + c_2 \chi_2^{(1)} \chi_2 + c_3 \chi_3^{(1)} \chi_3 \right) \\ &= \frac{1}{6} \left((1)(1)(3) + (3)(1)(-1) + (2)(1)(0) \right) \\ a_1 &= 0, \end{aligned}$$

análogamente, encontramos que

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 1,$$

lo que significa que tanto la representación $D^{(2)}$ como la $D^{(3)}$ están incluidas en D , pero $D^{(1)}$ no lo está.

3.2.1. Projectores

Al tener los proyectores del grupo podremos obtener las funciones adaptadas a la simetría S_3 (invariantes). Para construir los proyectores utilizamos la ecuación [65],

$$P^\nu = \frac{n_\nu}{g} \sum_i \chi_i^{(\nu)*} C_i,$$

donde C_i son los operadores de clase, obtenidos del producto directo de cada elemento de S_3 en la representación $D^{(3)}$; esto es,

$$\begin{aligned} C_0 &= E \otimes E = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} & C_1 &= A_1 \otimes A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}A_1 & -\frac{\sqrt{3}}{2}A_1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}A_1 & -\frac{1}{2}A_1 \end{pmatrix} \\ C_2 &= A_2 \otimes A_2 = \begin{pmatrix} -A_2 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} & C_3 &= A_3 \otimes A_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}A_3 & \frac{\sqrt{3}}{2}A_3 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}A_3 & -\frac{1}{2}A_3 \end{pmatrix} \\ C_4 &= A_4 \otimes A_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}A_4 & \frac{\sqrt{3}}{2}A_4 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}A_4 & -\frac{1}{2}A_4 \end{pmatrix} & C_5 &= A_5 \otimes A_5 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}A_5 & -\frac{\sqrt{3}}{2}A_5 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}A_5 & -\frac{1}{2}A_5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Así, calculando P^1 , cuya notación cambiamos a P_{1S} , el proyector sobre el singlete simétrico,

$$\begin{aligned} P_{1S} &= \frac{1}{6} (1(C_0) + 1(C_1 + C_2 + C_3) + 1(C_4 + C_5)) \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} E - A_2 + \frac{1}{2}(A_1 + A_3 - A_4 - A_5) & -\frac{\sqrt{3}}{2}(A_1 - A_3 - A_4 + A_5) \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}(A_1 - A_3 + A_4 - A_5) & E + A_2 - \frac{1}{2}(A_1 + A_3 + A_4 + A_5) \end{pmatrix} \\ P_{1S} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De manera similar, se encuentra P_{1A} , el proyector sobre el singlete antisimétrico (P^2),

$$P_{1A} = \frac{1}{6} (1(C_0) - 1(C_1 + C_2 + C_3) + 1(C_4 + C_5)) P_{1A} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y finalmente encontramos P_2 , el proyector sobre el doblete (P^3),

$$P_2 = \frac{2}{6} (2(C_0) + 0(C_1 + C_2 + C_3) - 1(C_4 + C_5)) P_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos reescribir los proyectores como sigue,

$$P_{1S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ 0 \ 0 \ 1)$$

$$P_{1A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (0 \ 1 \ -1 \ 0),$$

notando que P_2 puede ser descompuesto en dos términos,

$$P_2 = P_2^{(1)} + P_2^{(2)}$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ 0 \ 0 \ -1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (0 \ 1 \ 1 \ 0)$$

Con ayuda de los proyectores, el producto directo ($\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}$) se descompone en una suma directa de singletes y dobletes, aplicaremos cada uno de los proyectores obtenidos a dicho producto directo,

$$P_{1S}(\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ 0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_1 y_2 \\ x_2 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix}$$

$$P_{1S}(\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 y_1 + x_2 y_2) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De manera análoga, tenemos,

$$P_{1A}(\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1y_2 - x_2y_1) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_2(\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1y_1 - x_2y_2) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1y_2 + x_2y_1) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Los coeficientes de los eigenvectores son las funciones adaptadas a la simetría, le sigue de aquí que, si (x_1, x_2) y (y_1, y_2) son las componentes de dos dobles de S_3 , el producto de Kronecker $(x_1, x_2) \otimes (y_1, y_2)$ contiene las siguientes componentes:

- un singlete simétrico (invariante ante S_3): $\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1y_1 + x_2y_2)$
- un singlete antisimétrico (no invariante): $\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1y_2 - x_2y_1)$
- un doblete cuyas componentes son: $(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1y_1 - x_2y_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1y_2 + x_2y_1))$

La matriz \mathcal{U} que lleva a $\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}$ a una forma diagonal por bloques, se forma con los eigenvectores de los proyectores con eigenvalor 1. Así, para que 1_S aparezca en la esquina superior derecha, se coloca a $|1_S\rangle$ como primera columna y si ponemos a $|1_A\rangle$ como segunda columna, entonces 1_A queda en el segundo bloque diagonal, etc.

$$\mathcal{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Capítulo 4

Matriz de masas de los neutrinos

En el ME, los fermiones análogos en diferentes generaciones (como u , c y t) se encuentran igualmente acoplados a los bosones de norma de las interacciones fuertes, débiles y electromagnéticas. Por esta razón, antes del rompimiento espontáneo de la simetría de norma (antes de que los fermiones adquieran masa), el contenido físico del modelo no se altera si se intercambian los nombres de la familias; es decir, si se intercambian u , c y t , o d , s y b . Por esto, es evidente que antes del rompimiento de la simetría de norma, la lagrangiana del ME es simétrica respecto del grupo de permutaciones del sabor. Para el caso de tres familias, éste es el grupo S_3 , donde los objetos que se permutan son el nombre del sabor de los quarks en diferentes generaciones de cada sector. Se hace la asignación del índice de familia o de generación de cada fermión fundamental de acuerdo con su carga eléctrica y con la magnitud de su masa en orden creciente [13] (ver Tabla 4.1).

Partícula	Masa (MeV)	Masa (m_e)
e	$0.510998928 \pm 1.1 \times 10^{-8}$	1
μ	$105.66 \pm 3.5 \times 10^{-6}$	207
τ	$1,776.82 \pm 0.16$	3,477
ν_e	<0.23 eV	-
ν_μ	<0.23 eV	-
ν_τ	<0.23 eV	-
u	$2.3^{+0.7}_{-0.5}$	4.51
c	$1,275 \pm 25$	2,500
t	$173,210 \pm 710$	339,627
d	$4.8^{+0.5}_{-0.3}$	9.41
s	95 ± 5	186
b	$4,180 \pm 30$	8,196

Tabla 4.1: Espectro de masas de los fermiones, debido al confinamiento de los quarks y a que la interacción fuerte que los mantiene confinados renormaliza sus masas, el valor de las masas de los quarks es función de la energía (depende de la escala de energía a la cual se mide la masa).

Los fermiones fundamentales con igual carga eléctrica pero diferente masa, se transforman bajo la acción del mismo grupo de familias; hay dos valores de carga eléctrica para los leptones y dos para los quarks, así que podemos clasificar a los fermiones en dos grupos de familias de quarks y dos grupos de familias de leptones: la familia de los quarks tipo *up*, formada por los quarks $u = \psi_1^u$, $c = \psi_2^u$ y $t = \psi_3^u$ y la familia de los quarks tipo *down*, está formada por los quarks $d = \psi_1^d$, $s = \psi_2^d$ y $b = \psi_3^d$;

$$\psi^u = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \psi^d = \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix},$$

que podemos escribir en componetes como

$$\psi_i^q \quad q = u, d \quad i = 1, 2, 3.$$

En esta notación el superíndice q denota a los quarks tipo u o d , clasificándolos de está forma por su carga eléctrica; el subíndice i es el índice de familias, y clasifica a los quarks por la magnitud de su masa en orden creciente. De manera similar, en el sector leptónico tenemos a la familia de los leptones tipo *electrón* formada por los leptones $e = \psi_1^e$, $\mu = \psi_2^e$ y $\tau = \psi_3^e$ y a la familia de los leptones tipo *neutrino* formada por los leptones $\nu_e = \psi_1^{\nu_e}$, $\nu_\mu = \psi_2^{\nu_e}$ y $\nu_\tau = \psi_3^{\nu_e}$;

$$\psi^e = \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \psi^{\nu_e} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix},$$

que también se puede escribir en componetes como

$$\psi_i^l \quad l = e, \nu_e \quad i = 1, 2, 3.$$

En esta notación el superíndice l denota a los leptones tipo e o ν_e , clasificándolos de esta manera por su carga eléctrica; el subíndice i nuevamente es el índice de familias y clasifica a los leptones por la magnitud de su masa en orden creciente.

4.1. Lagrangiano de Yukawa

La densidad lagrangiana de Yukawa para los campos de neutrinos es [33]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_\nu} = & -Y_1^\nu \bar{L}_I (i\sigma_2) H_S^* \nu_{IR} - Y_3^\nu \bar{L}_3 (i\sigma_2) H_S^* \nu_{3R} \\ & -Y_2^\nu [\bar{L}_I \kappa_{IJ} (i\sigma_2) H_1^* \nu_{JR} + \bar{L}_I \eta_{IJ} (i\sigma_2) H_2^* \nu_{JR}] \\ & -Y_4^\nu \bar{L}_3 (i\sigma_2) H_1^* \nu_{IR} - Y_5^\nu \bar{L}_I (i\sigma_2) H_1^* \nu_{3R} + h.c., \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} H_S & \rightarrow \text{Campo de Higgs singlete de } SU(3) \\ H_i & \rightarrow \text{Componentes del campo de Higgs doblete de } SU(3) \\ L_i & \rightarrow \text{Doblete } SU(2) \text{ de los leptones} \\ \nu_{iR} & \rightarrow \text{Campos de leptones derechos, singletes de } SU(2) \\ Y_i^\nu & \rightarrow \text{Coeficientes de acoplamiento de Yukawa} \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} H_S &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3), \quad H_D = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 - \phi_2) \\ \frac{1}{\sqrt{6}} (\phi_1 + \phi_2 - 2\phi_3) \end{pmatrix}, \\ L_1 &= \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}, \\ \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \kappa = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observamos que los términos son lineales en los campos de los Higgs y son bilineales en los campos de los quarks.

Cada campo físico corresponde a una representación irreducible de la teoría, de manera que si tenemos tres campos f_i con $i = 1, 2, 3$, en la representación débil tenemos

$$\begin{pmatrix} f_{i1} \\ f_{i2} \\ f_{i3} \end{pmatrix}_W,$$

y en la representación del campo adaptada a la simetría S_3 tendremos que

$$\begin{pmatrix} f_{i1} \\ f_{i2} \\ f_{i3} \end{pmatrix}_W \rightarrow \begin{pmatrix} f_S \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

donde S denota el singlete y D denota el doblete. Recordemos ahora que

$$f_S = \frac{1}{\sqrt{3}}(f_1 + f_2 + f_3),$$

$$f_D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(f_1 - f_2) \\ \frac{1}{\sqrt{6}}(f_1 + f_2 - 2f_3) \end{pmatrix},$$

y se tienen tres campos de Higgs

$$\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix}_W \xrightarrow{\text{Representación adaptada a la simetría}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}(H_1 + H_2 + H_3) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(H_1 - H_2) \\ \frac{1}{\sqrt{6}}(H_1 + H_2 - 2H_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_S \\ H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}.$$

4.2. Matriz de masa

Para obtener la matriz de masa desarrollamos las interacciones de Yukawa, suponiendo que los valores de expectación sobre estados del vacío de los campos de Higgs son reales y cumplen con $\langle H_1 \rangle = \langle H_2 \rangle$, así como también $\langle H_S \rangle^2 + \langle H_1 \rangle^2 + \langle H_2 \rangle^2 \simeq (246 \text{ GeV})^2$ [33].

Desarrollamos un término de la densidad lagrangiana de Yukawa, por ejemplo \mathcal{L}_{Y_D} (los términos para quarks y leptones son equivalentes, cambiando únicamente en los coeficientes de acoplamiento de Yukawa), tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_D} = & -Y_1^d \bar{Q}_I H_S d_{IR} - Y_3^d \bar{Q}_3 H_S d_{3R} \\ & -Y_2^d [\bar{Q}_I \kappa_{IJ} H_1 d_{JR} + \bar{Q}_I \eta_{IJ} H_2 d_{JR}] \\ & -Y_4^d \bar{Q}_3 H_I d_{IR} - Y_5^d \bar{Q}_I H_I d_{3R} + h.c.. \end{aligned}$$

Se desarrollará el primer término aquí, añadiéndose los demás en el apéndice A,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Y_{D1}} &= -Y_1^d \bar{Q}_I H_S d_{IR} \\
&= -Y_1^d \{ \bar{Q}_1 H_S d_{1R} + \bar{Q}_2 H_S d_{2R} \} \\
&= -Y_1^d \left\{ (\bar{u}_L, \bar{d}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_S \rangle \end{pmatrix} d_R + (\bar{c}_L, \bar{s}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_S \rangle \end{pmatrix} s_R \right\} \\
&= -Y_1^d \{ \bar{d}_L \langle H_S \rangle d_R + \bar{s}_L \langle H_S \rangle s_R \} \\
&= -Y_1^d \left\{ (\bar{d}_L, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \langle H_S \rangle (1, 0, 0) \begin{pmatrix} d_R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (0, \bar{s}_L, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \langle H_S \rangle (0, 1, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ s_R \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= -Y_1^d \left\{ (\bar{d}_L, 0, 0) \begin{pmatrix} \langle H_S \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (0, \bar{s}_L, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \langle H_S \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s_R \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= -Y_1^d \left\{ (\bar{d}_L, \bar{s}_L, 0) \begin{pmatrix} \langle H_S \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle H_S \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Ahora calculamos $\mathcal{L}_{Y_{D1}}^\dagger$, en principio tenemos que

$$\mathcal{L}_{Y_{D1}}^\dagger = (-Y_1^d \bar{Q}_I H_S d_{IR})^\dagger = -Y_1^{d*} d_{IR}^\dagger (\bar{Q}_I H_S)^\dagger = -Y_1^{d*} d_{IR}^\dagger H_S^\dagger \bar{Q}_I^\dagger,$$

por otro lado, sabemos que

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0,$$

donde γ^0 tiene las propiedades $\gamma^0 \gamma^0 = \mathbb{1}$, $\gamma^0 \gamma^{0\dagger} = \mathbb{1}$, $\gamma^0 = \gamma^{0\dagger}$.

Así

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Y_{D1}}^\dagger &= -Y_1^{d*} d_{IR}^\dagger H_S^\dagger \bar{Q}_I^\dagger \\
&= -Y_1^{d*} \bar{d}_{IR} \gamma^0 H_S^\dagger \gamma^0 Q_I \\
&= -Y_1^{d*} \bar{d}_{IR} H_S^\dagger Q_I \\
&= -Y_1^{d*} \{ \bar{d}_1 R H_S^\dagger Q_{1R} + \bar{d}_2 R H_S^\dagger Q_{2R} \} \\
&= -Y_1^{d*} \left\{ \bar{d}_R (0, \langle H_S \rangle) \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} + \bar{s}_R (0, \langle H_S \rangle) \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix} \right\} \\
&= -Y_1^{d*} \{ \bar{d}_R \langle H_S \rangle d_L + \bar{s}_R \langle H_S \rangle s_L \} \\
&= -Y_1^{d*} \left\{ (\bar{d}_R, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \langle H_S \rangle (1, 0, 0) \begin{pmatrix} d_L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (0, \bar{s}_R, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \langle H_S \rangle (0, 1, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ s_L \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= -Y_1^{d*} \left\{ (\bar{d}_R, 0, 0) \begin{pmatrix} \langle H_S \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (0, \bar{s}_R, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \langle H_S \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s_L \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= -Y_1^{d*} \left\{ (\bar{d}_R, \bar{s}_R, 0) \begin{pmatrix} \langle H_S \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle H_S \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

El término de masa correspondiente a D_1 se obtiene mediante la expresión

$$\frac{1}{2} \bar{d} M_1 d,$$

y lo podemos obtener sumando $\mathcal{L}_{Y_{D1}}$ con $\mathcal{L}^\dagger_{Y_{D1}}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_{D1}} + \mathcal{L}^\dagger_{Y_{D1}} &= -Y_1^d \left\{ (\bar{d}_L, \bar{s}_L, 0) \begin{pmatrix} \langle H_S \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle H_S \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &\quad - Y_1^{d*} \left\{ (\bar{d}_R, \bar{s}_R, 0) \begin{pmatrix} \langle H_S \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle H_S \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \end{aligned}$$

de donde se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_{D1}} + \mathcal{L}^\dagger_{Y_{D1}} &= -(Y_1^d + Y_1^{d*}) \left\{ (\bar{d}, \bar{s}, 0) \begin{pmatrix} \langle H_S \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle H_S \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{2} (\bar{d}, \bar{s}, 0) \begin{pmatrix} -2(Y_1^d + Y_1^{d*}) \langle H_S \rangle & 0 & 0 \\ 0 & -2(Y_1^d + Y_1^{d*}) \langle H_S \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora, sabemos que

$$z + z^* = 2\text{Re}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

en nuestro caso

$$-2(Y_1^d + Y_1^{d*}) = -2\{2\text{Re}(Y_1^d)\} = -4\text{Re}(Y_1^d),$$

y haciendo el siguiente nombramiento

$$m_1 = -4\text{Re}(Y_1^d) \langle H_S \rangle,$$

tenemos

$$\mathcal{L}_{Y_{D1}} + \mathcal{L}^\dagger_{Y_{D1}} = \frac{1}{2} (\bar{d}, \bar{s}, 0) \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Al calcular el resto de los términos de la matriz de masa, \mathcal{L}_{Y_D} queda,

$$\mathcal{L}_{Y_D} = \frac{1}{2} (\bar{d}, \bar{s}, \bar{b}) \begin{pmatrix} m_1 + m_6 & m_2 & m_4^* \\ m_2 & m_1 - m_6 & m_5^* \\ m_4 & m_5 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix},$$

siendo la matriz de masa M_{Y_D} la obtenida en la ecuación A.6,

$$M_{Y_D} = \begin{pmatrix} m_1 + m_6 & m_2 & m_4^* \\ m_2 & m_1 - m_6 & m_5^* \\ m_4 & m_5 & m_3 \end{pmatrix}.$$

Recordemos ahora la consideración mencionada previamente,

$$\langle H_1 \rangle = \langle H_2 \rangle,$$

con la que obtenemos las siguientes igualdades

$$m_2 = m_6, \quad m_4 = m_5, \quad m_4^* = m_5^*,$$

y escribimos M_{Y_D}

$$M_{Y_D} = \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & m_2 & m_4^* \\ m_2 & m_1 - m_2 & m_4^* \\ m_4 & m_4 & m_3 \end{pmatrix}.$$

El resto de las matrices (y en particular M_{Y_ν}) tienen la misma estructura, cambiando únicamente los términos de acoplamiento de Yukawa.

4.3. Mecanismo see-saw

Utilizamos ahora los términos de masa de Majorana para los neutrinos derechos [33],

$$\mathcal{L}_M = -M_1 \nu_{1R}^T C \nu_{1R} - M_3 \nu_{3R}^T C \nu_{3R},$$

siendo C la matriz de conjugación de carga.

Ahora, podemos obtener la matriz de masa para los neutrinos izquierdos de Majorana, mediante el mecanismo de see-saw tipo I [67], tenemos

$$M_\nu = M_{Y_\nu} \tilde{M}^{-1} (M_{Y_\nu})^T,$$

donde $\tilde{M} = \text{diag}(M_1, M_2, M_3)$ [68] y M_{Y_ν} se considera con el ansatz $(M_{Y_\nu})_{13} = 0$. Desarrollando, tenemos

$$\begin{aligned} M_\nu &= \begin{pmatrix} m_2 & m_2 & 0 \\ m_2 & -m_2 & 0 \\ m_4 & m_4 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & M_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & M_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2 & m_2 & m_4 \\ m_2 & -m_2 & m_4 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2m_2^2 M_1^{-1} & 0 & 2m_2 m_4 M_1^{-1} \\ 0 & 2m_2^2 M_1^{-1} & 0 \\ 2m_2 m_4 M_1^{-1} & 0 & 2m_4^2 M_1^{-1} + m_3^2 M_3^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Podemos reescribir esta matriz en términos de las masas de los neutrinos si la diagonalizamos usando una matriz unitaria U_ν , notando que M_ν es compleja simétrica, por lo que podemos elegir fases para U_ν tales que la diagonalización se logra con

$$U_\nu^T M_\nu U_\nu = \text{diag}(m_{\nu 1}, m_{\nu 2}, m_{\nu 3}),$$

donde la matriz unitaria es [68]

$$U_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta_\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\eta & \text{sen}\eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\text{sen}\eta & \cos\eta & 0 \end{pmatrix}.$$

De esta manera obtenemos los términos de M_ν expresados con las masas de los neutrinos (ver apéndice B para el cálculo completo),

$$\begin{aligned} 2m_2^2 M_1^{-1} &= m_{\nu 3}, \\ 2m_2 m_4 M_1^{-1} &= \sqrt{(m_{\nu 3} - m_{\nu 1})(m_{\nu 2} - m_{\nu 3})} e^{-i\delta_\nu}, \\ 2m_4^2 M_1^{-1} + m_3^2 M_3^{-1} &= (m_{\nu 1} + m_{\nu 2} + m_{\nu 3}) e^{-2i\delta_\nu}. \end{aligned}$$

De acuerdo a la ecuación B.2, M_ν queda

$$M_\nu = \begin{pmatrix} m_{\nu 3} & 0 & \sqrt{(m_{\nu 3} - m_{\nu 1})(m_{\nu 2} - m_{\nu 3})} e^{-i\delta_\nu} \\ 0 & m_{\nu 3} & 0 \\ \sqrt{(m_{\nu 3} - m_{\nu 1})(m_{\nu 2} - m_{\nu 3})} e^{-i\delta_\nu} & 0 & (m_{\nu 1} + m_{\nu 2} + m_{\nu 3}) e^{-2i\delta_\nu} \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

donde tenemos como parámetros libres una fase implícita en m_1' , m_2' y en m_3' , y la fase de Dirac δ_ν .

4.4. Análisis numérico de las masas de los neutrinos

La ecuación 4.1 nos da la matriz de masa de los neutrinos en términos de las masas físicas, en esta sección se realiza un análisis numérico de las masas de los neutrinos para establecer un posible rango de valores para esta matriz.

Los experimentos que observan las oscilaciones de neutrinos determinan la diferencia de las masas de los neutrinos al cuadrado $\Delta m_{ij}^2 = m_{\nu i}^2 - m_{\nu j}^2$, por lo que los valores absolutos de las masas de los neutrinos son desconocidos. También queda indeterminada la cuestión acerca de cuál de las masas es la mayor, si $m_{\nu 2}$ es menor que $m_{\nu 3}$, decimos que nos encontramos con una jerarquía normal; sin embargo, si $m_{\nu 2}$ es mayor que $m_{\nu 3}$, nos encontramos con una jerarquía invertida [69].

Usando la ecuación de la diferencia de las masas de los neutrinos al cuadrado del párrafo anterior, podemos obtener las expresiones siguientes,

$$\begin{aligned} m_{\nu 1} &= \sqrt{m_{\nu 3}^2 - \Delta m_{31}^2}, & m_{\nu 2} &= \sqrt{m_{\nu 3}^2 - \Delta m_{32}^2}, & \text{Jerarquía normal.} \\ m_{\nu 1} &= \sqrt{m_{\nu 2}^2 - \Delta m_{23}^2}, & m_{\nu 3} &= \sqrt{m_{\nu 2}^2 - \Delta m_{21}^2}, & \text{Jerarquía invertida.} \end{aligned}$$

De aquí obtenemos una cota inferior para la masa $m_{\nu 3}$ (jerarquía normal) y $m_{\nu 2}$ (jerarquía invertida) si notamos que el radical debe ser mayor a cero, para tener masas reales,

$$\begin{aligned} m_{\nu 3} &> \sqrt{\Delta m_{31}^2} \quad \wedge \quad m_{\nu 3} > \sqrt{\Delta m_{32}^2} & \text{Jerarquía normal.} \\ m_{\nu 2} &> \sqrt{\Delta m_{23}^2} \quad \wedge \quad m_{\nu 2} > \sqrt{\Delta m_{21}^2} & \text{Jerarquía invertida.} \end{aligned}$$

Con los datos experimentales (eV²) [13]

$$\begin{aligned} \Delta m_{21}^2 &= 7.53 \pm 0.18 \times 10^{-5}, & \Delta m_{32}^2 &= 2.44 \pm 0.06 \times 10^{-3}, \\ \Delta m_{23}^2 &= 2.52 \pm 0.07 \times 10^{-3}, & \Delta m_{31}^2 &= \Delta m_{21}^2 + \Delta m_{32}^2. \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} m_{\nu 3} &> 4.9533 \times 10^{-2} \text{eV}, & \text{Jerarquía normal.} \\ m_{\nu 2} &> 4.9497 \times 10^{-2} \text{eV}, & \text{Jerarquía invertida.} \end{aligned}$$

Para encontrar las cotas superiores, usamos la cota superior para la suma de las masas de los tres neutrinos [70],

$$m_{\nu 1} + m_{\nu 2} + m_{\nu 3} < 0.23 \text{eV},$$

donde resolvemos para $m_{\nu 3}$ (jerarquía normal) y para $m_{\nu 2}$ (jerarquía invertida),

$$\begin{aligned} m_{\nu 3} &< 8.7333 \times 10^{-2} \text{eV}, & \text{Jerarquía normal.} \\ m_{\nu 2} &< 8.2664 \times 10^{-2} \text{eV}, & \text{Jerarquía invertida.} \end{aligned}$$

De esta forma, las cotas para los tres neutrinos en ambas jerarquías son las siguientes,

$$\begin{aligned} 0 \text{ eV} &< m_{\nu 1} < 7.1928 \times 10^{-2} \text{ eV}, \\ 0 \text{ eV} &< m_{\nu 2} < 7.2437 \times 10^{-2} \text{ eV}, & \text{Jerarquía normal.} \\ 4.9533 \times 10^{-2} \text{ eV} &< m_{\nu 3} < 8.7333 \times 10^{-2} \text{ eV}, \\ \\ 0 \text{ eV} &< m_{\nu 1} < 6.6206 \times 10^{-2} \text{ eV}, \\ 4.9497 \times 10^{-2} \text{ eV} &< m_{\nu 2} < 8.2664 \times 10^{-2} \text{ eV}, & \text{Jerarquía invertida.} \\ 0 \text{ eV} &< m_{\nu 3} < 8.2218 \times 10^{-2} \text{ eV}. \end{aligned}$$

Se muestran gráficas que relacionan las masas de los neutrinos en ambas jerarquías, en función de $m_{\nu 3}$ (jerarquía normal), Figuras 4.1 y 4.2, y en función de $m_{\nu 2}$ (jerarquía invertida), Figuras 4.3 y 4.4.

Con estos valores es posible tener una aproximación para la matriz de masa M_ν de forma numérica, lo que da pie al cálculo de la matriz V_{PMNS} como trabajo a futuro.

CAPÍTULO 4. MATRIZ DE MASAS DE LOS NEUTRINOS
4.4. ANÁLISIS NUMÉRICO DE LAS MASAS DE LOS NEUTRINOS

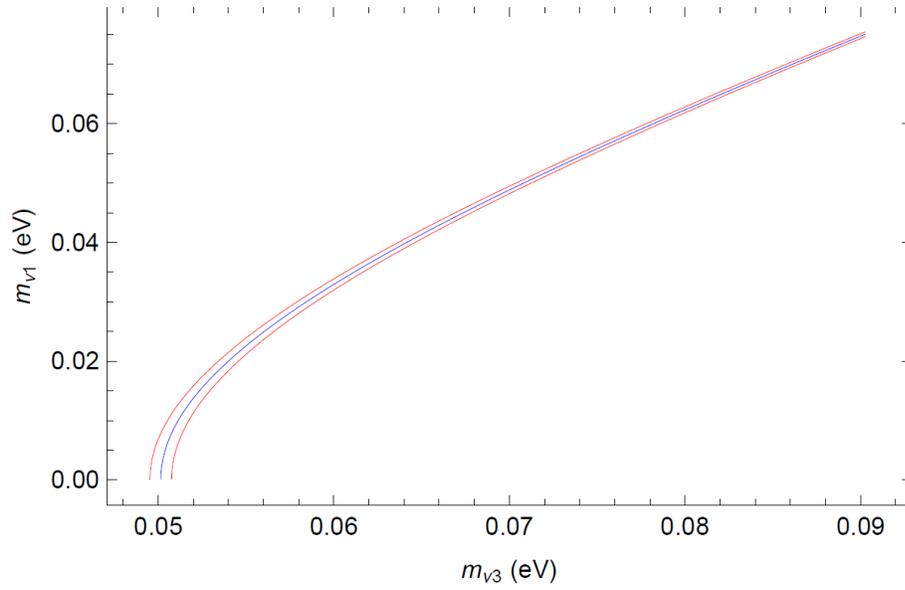


Figura 4.1: Masa del primer neutrino en la jerarquía normal.

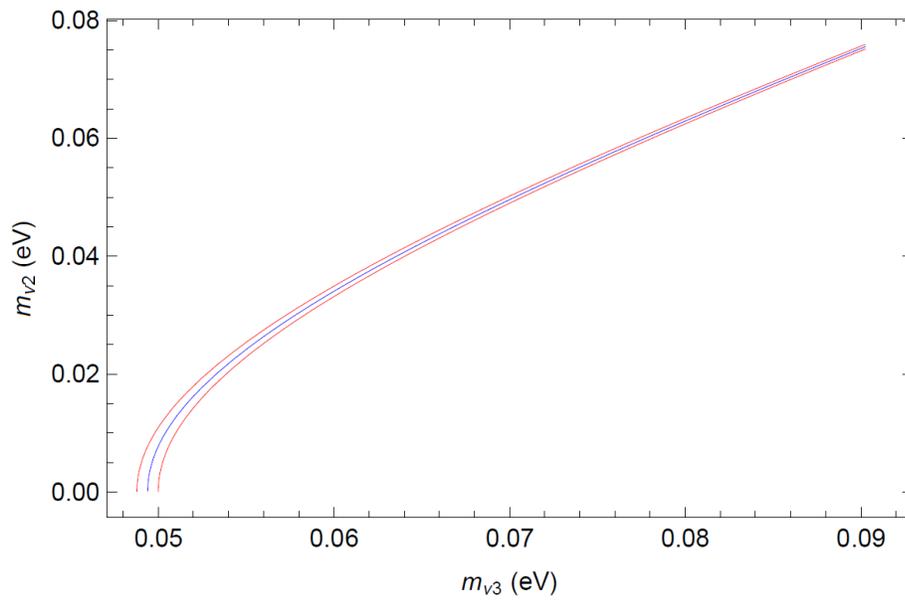


Figura 4.2: Masa del segundo neutrino en la jerarquía normal.

CAPÍTULO 4. MATRIZ DE MASAS DE LOS NEUTRINOS
4.4. ANÁLISIS NUMÉRICO DE LAS MASAS DE LOS NEUTRINOS

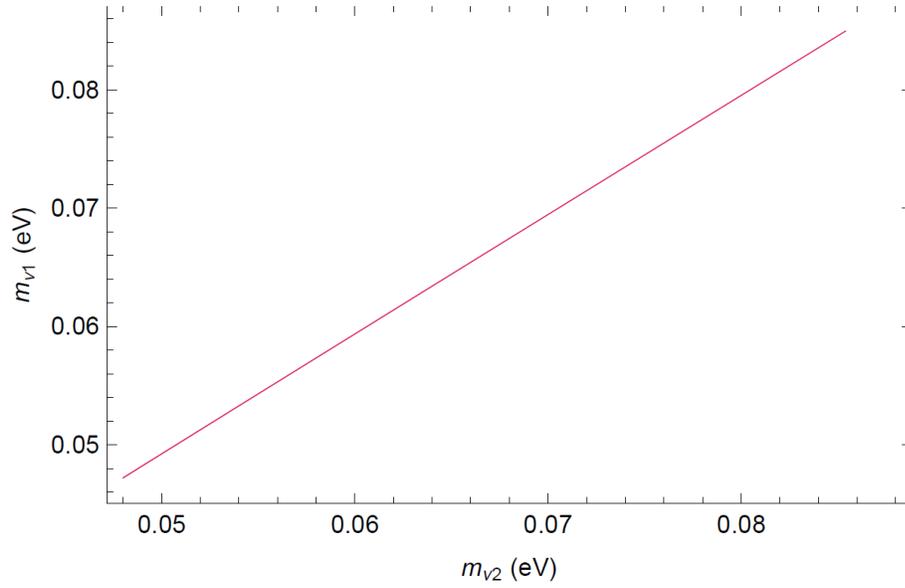


Figura 4.3: Masa del primer neutrino en la jerarquía invertida.

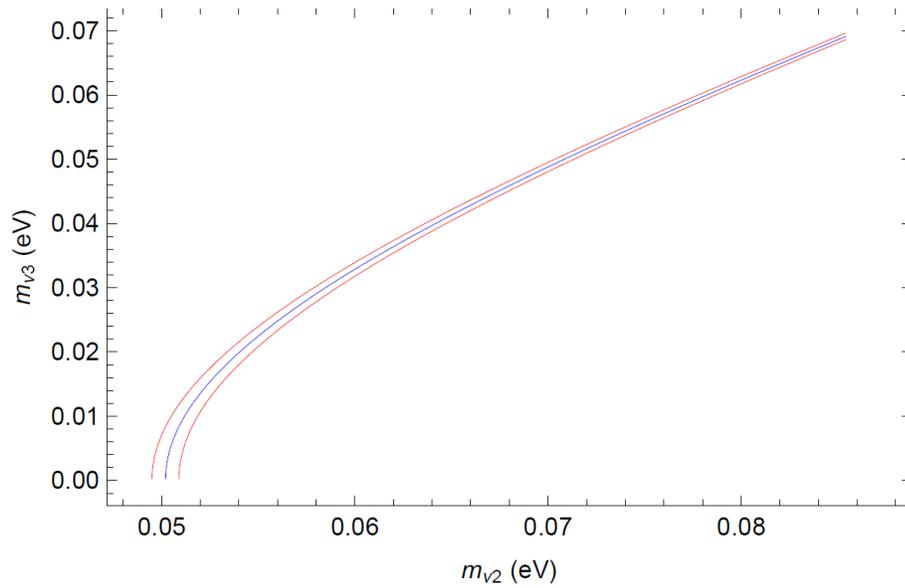


Figura 4.4: Masa del tercer neutrino en la jerarquía invertida.

Capítulo 5

Conclusiones

Introduciendo tres campos de Higgs que son dobletes de $SU(2)_L$ en la teoría, nosotros extendemos el concepto de sabor y generaciones al sector de Higgs y trabajamos con una extensión mínima del Modelo Estándar invariante S_3 . Una estructura bien definida de los acoplamientos de Yukawa es obtenida, la cual permite el cálculo explícito de la matriz de masas para los leptones. Además de la restricción de los coeficientes de Yukawa en el sector leptónico por la inclusión de la simetría Z_2 para la matriz de Dirac, y considerando la matriz de masas de Majorana para neutrinos derechos diagonal. El grupo de simetría del sabor $Z_2 \times S_3$ relaciona el espectro de masas. Así, se presentó el análisis de las masas de los neutrinos, usando las expresiones generales independientes del modelo y los datos experimentales para las diferencias de las masas de los neutrinos al cuadrado.

Como trabajo a futuro queda el cálculo de la matriz de mezclas leptónica V_{PMNS} , el análisis estadístico de las masas de los neutrinos a partir de los datos experimentales y el cálculo de los ángulos de mezcla en el sector leptónico, su análisis estadístico.

Apéndice A

Cálculo de la matriz de masa usando el lagrangiano de Yukawa

Las interacciones de Yukawa renormalizables más generales con simetría de familias exacta S_3 son:

$$\mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_{Y_D} + \mathcal{L}_{Y_U} + \mathcal{L}_{Y_E} + \mathcal{L}_{Y_\nu}, \quad (\text{A.1})$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_D} &= -Y_1^d \bar{Q}_I H_S d_{IR} - Y_3^d \bar{Q}_3 H_S d_{3R} \\ &\quad -Y_2^d [\bar{Q}_I \kappa_{IJ} H_1 d_{JR} + \bar{Q}_I \eta_{IJ} H_2 d_{JR}] \\ &\quad -Y_4^d \bar{Q}_3 H_I d_{IR} - Y_5^d \bar{Q}_I H_I d_{3R} + h.c., \\ \mathcal{L}_{Y_U} &= -Y_1^u \bar{Q}_I (i\sigma_2) H_S^* u_{IR} - Y_3^u \bar{Q}_3 (i\sigma_2) H_S^* u_{3R} \\ &\quad -Y_2^u [\bar{Q}_I \kappa_{IJ} (i\sigma_2) H_1^* u_{JR} + \eta \bar{Q}_I \eta_{IJ} (i\sigma_2) H_2^* u_{JR}] \\ &\quad -Y_4^u \bar{Q}_3 (i\sigma_2) H_I^* u_{IR} - Y_5^u \bar{Q}_I (i\sigma_2) H_I^* u_{3R} + h.c., \\ \mathcal{L}_{Y_E} &= -Y_1^e \bar{L}_I H_S e_{IR} - Y_3^e \bar{L}_3 H_S e_{3R} \\ &\quad -Y_2^e [\bar{L}_I \kappa_{IJ} H_1 e_{JR} + \bar{L}_I \eta_{IJ} H_2 e_{JR}] \\ &\quad -Y_4^e \bar{L}_3 H_I e_{IR} - Y_5^e \bar{L}_I H_I e_{3R} + h.c., \\ \mathcal{L}_{Y_\nu} &= -Y_1^\nu \bar{L}_I (i\sigma_2) H_S^* \nu_{IR} - Y_3^\nu \bar{L}_3 (i\sigma_2) H_S^* \nu_{3R} \\ &\quad -Y_2^\nu [\bar{L}_I \kappa_{IJ} (i\sigma_2) H_1^* \nu_{JR} + \bar{L}_I \eta_{IJ} (i\sigma_2) H_2^* \nu_{JR}] \\ &\quad -Y_4^\nu \bar{L}_3 (i\sigma_2) H_I^* \nu_{IR} - Y_5^\nu \bar{L}_I (i\sigma_2) H_I^* \nu_{3R} + h.c., \end{aligned}$$

donde

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

y los campos son

$$\begin{array}{lllllll} Q_1^T = (u_L, d_L), & u_R, & d_R, & L_1^T = (\nu_{eL}, e_L), & e_R, & \nu_{eR}, & H_1 \\ Q_2^T = (c_L, s_L), & c_R, & s_R, & L_2^T = (\nu_{\mu L}, \mu_L), & \mu_R, & \nu_{\mu R}, & H_2 \\ Q_3^T = (t_L, b_L), & t_R, & b_R, & L_3^T = (\nu_{\tau L}, \tau_L), & \tau_R, & \nu_{\tau R}, & H_S \end{array}$$

Debido a la presencia de los tres campos de Higgs, el potencial de Higgs $V_H(H_S, H_D)$ es más complicado que el del Modelo Estándar. Podemos suponer que los valores de expectación sobre estados del vacío de los campos de Higgs sean reales con $\langle H_1 \rangle = \langle H_2 \rangle$. Estos campos de Higgs también

**APÉNDICE A. CÁLCULO DE LA MATRIZ DE MASA USANDO EL
LAGRANGIANO DE YUKAWA**

satisfacen la restricción $\langle H_S \rangle^2 + \langle H_1 \rangle^2 + \langle H_2 \rangle^2 \simeq (246 \text{ GeV})^2/2$. Así, de las interacciones de Yukawa derivaremos las matrices de masa.

Calculemos las matrices de masa por partes, empezando por \mathcal{L}_{Y_D} ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_D} = & -Y_1^d \bar{Q}_I H_S d_{IR} - Y_3^d \bar{Q}_3 H_S d_{3R} \\ & -Y_2^d [\bar{Q}_I \kappa_{IJ} H_1 d_{JR} + \bar{Q}_I \eta_{IJ} H_2 d_{JR}] \\ & -Y_4^d \bar{Q}_3 H_I d_{IR} - Y_5^d \bar{Q}_I H_I d_{3R} + h.c., \end{aligned}$$

Desarrollando el primer término,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_{D_1}} &= -Y_1^d \bar{Q}_I H_S d_{IR} \\ &= -Y_1^d \{ \bar{Q}_1 H_S d_{1R} + \bar{Q}_2 H_S d_{2R} \} \\ &= -Y_1^d \left\{ (\bar{u}_L, \bar{d}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_S \rangle \end{pmatrix} d_R + (\bar{c}_L, \bar{s}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_S \rangle \end{pmatrix} s_R \right\} \\ &= -Y_1^d \{ \bar{d}_L \langle H_S \rangle d_R + \bar{s}_L \langle H_S \rangle s_R \} \\ &= -Y_1^d \left\{ (\bar{d}_L, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \langle H_S \rangle (1, 0, 0) \begin{pmatrix} d_R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (0, \bar{s}_L, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \langle H_S \rangle (0, 1, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ s_R \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= -Y_1^d \left\{ (\bar{d}_L, 0, 0) \begin{pmatrix} \langle H_S \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (0, \bar{s}_L, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \langle H_S \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s_R \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= -Y_1^d \left\{ (\bar{d}_L, \bar{s}_L, 0) \begin{pmatrix} \langle H_S \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle H_S \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Ahora calculamos $\mathcal{L}_{Y_{D_1}}^\dagger$, en principio tenemos que

$$\mathcal{L}_{Y_{D_1}}^\dagger = (-Y_1^d \bar{Q}_I H_S d_{IR})^\dagger = -Y_1^{d*} d_{IR}^\dagger (\bar{Q}_I H_S)^\dagger = -Y_1^{d*} d_{IR}^\dagger H_S^\dagger \bar{Q}_I^\dagger$$

por otro lado, sabemos que

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$$

donde γ^0 tiene las propiedades $\gamma^0 \gamma^0 = \mathbb{1}$, $\gamma^0 \gamma^{0\dagger} = \mathbb{1}$, $\gamma^0 = \gamma^{0\dagger}$.

Así

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^\dagger_{Y_{D_1}} &= -Y_1^{d*} d_{1R}^\dagger H_S^\dagger \bar{Q}_I^\dagger \\
&= -Y_1^{d*} \bar{d}_{1R} \gamma^0 H_S^\dagger \gamma^0 Q_I \\
&= -Y_1^{d*} \bar{d}_{1R} H_S^\dagger Q_I \\
&= -Y_1^{d*} \left\{ \bar{d}_1 R H_S^\dagger Q_{1R} + \bar{d}_2 R H_S^\dagger Q_{2R} \right\} \\
&= -Y_1^{d*} \left\{ \bar{d}_R (0, \langle H_S \rangle) \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} + \bar{s}_R (0, \langle H_S \rangle) \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix} \right\} \\
&= -Y_1^{d*} \left\{ \bar{d}_R \langle H_S \rangle d_L + \bar{s}_R \langle H_S \rangle s_L \right\} \\
&= -Y_1^{d*} \left\{ (\bar{d}_R, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \langle H_S \rangle (1, 0, 0) \begin{pmatrix} d_L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (0, \bar{s}_R, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \langle H_S \rangle (0, 1, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ s_L \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= -Y_1^{d*} \left\{ (\bar{d}_R, 0, 0) \begin{pmatrix} \langle H_S \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (0, \bar{s}_R, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \langle H_S \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s_L \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= -Y_1^{d*} \left\{ (\bar{d}_R, \bar{s}_R, 0) \begin{pmatrix} \langle H_S \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle H_S \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ 0 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

El término de masa correspondiente a D_1 se obtiene mediante la expresión

$$\frac{1}{2} \bar{d} M_1 d$$

y lo podemos obtener sumando $\mathcal{L}_{Y_{D_1}}$ con $\mathcal{L}^\dagger_{Y_{D_1}}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Y_{D_1}} + \mathcal{L}^\dagger_{Y_{D_1}} &= -Y_1^d \left\{ (\bar{d}_L, \bar{s}_L, 0) \begin{pmatrix} \langle H_S \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle H_S \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&\quad -Y_1^{d*} \left\{ (\bar{d}_R, \bar{s}_R, 0) \begin{pmatrix} \langle H_S \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle H_S \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ 0 \end{pmatrix} \right\},
\end{aligned}$$

de donde se obtiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Y_{D_1}} + \mathcal{L}^\dagger_{Y_{D_1}} &= -(Y_1^d + Y_1^{d*}) \left\{ (\bar{d}, \bar{s}, 0) \begin{pmatrix} \langle H_S \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle H_S \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \frac{1}{2} (\bar{d}, \bar{s}, 0) \begin{pmatrix} -2(Y_1^d + Y_1^{d*}) \langle H_S \rangle & 0 & 0 \\ 0 & -2(Y_1^d + Y_1^{d*}) \langle H_S \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ahora, sabemos que

$$z + z^* = 2\text{Re}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

en nuestro caso

$$-2(Y_1^d + Y_1^{d*}) = -2\{2\text{Re}(Y_1^d)\} = -4\text{Re}(Y_1^d)$$

y haciendo el siguiente nombramiento

$$m_1 = -4\text{Re}(Y_1^d) \langle H_S \rangle,$$

tenemos

$$\mathcal{L}_{Y_{D_1}} + \mathcal{L}^\dagger_{Y_{D_1}} = \frac{1}{2} (\bar{d}, \bar{s}, 0) \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$$

y tenemos la primer matriz de masa, correspondiente al primer término de \mathcal{L}_{Y_D} , a la cual llamamos M_1

$$M_1 = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Calculemos ahora la matriz de masa correspondiente al segundo término de \mathcal{L}_{Y_D} , a la que llamaremos M_3 , tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_{D_2}} &= -Y_3^d \bar{Q}_3 H_S d_{3R} \\ &= -Y_3^d (\bar{t}_L, \bar{b}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_S \rangle \end{pmatrix} b_R \\ &= -Y_3^d \bar{b}_L \langle H_S \rangle b_R \\ &= -Y_3^d (0, 0, \bar{b}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \langle H_S \rangle (0, 0, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_R \end{pmatrix} \\ &= -Y_3^d (0, 0, \bar{b}_L) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle H_S \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_R \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora calculamos $\mathcal{L}^\dagger_{Y_{D_2}}$ de manera análoga a $\mathcal{L}^\dagger_{Y_{D_1}}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_{D_2}} &= -Y_3^{d*} \bar{d}_{3R} H_S^\dagger Q_{3L} \\ &= -Y_3^{d*} \bar{b}_R (0, \langle H_S \rangle) \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix} \\ &= -Y_3^{d*} \bar{b}_R \langle H_S \rangle b_L \\ &= -Y_3^d (0, 0, \bar{b}_R) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \langle H_S \rangle (0, 0, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_L \end{pmatrix} \\ &= -Y_3^d (0, 0, \bar{b}_R) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle H_S \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_L \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Similar al caso anterior, obtenemos M_3 sumando $\mathcal{L}_{Y_{D_2}}$ con $\mathcal{L}^\dagger_{Y_{D_2}}$, con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_{D_2}} + \mathcal{L}^\dagger_{Y_{D_2}} &= \frac{1}{2} (0, 0, \bar{b}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2(Y_3^d + Y_3^{d*}) \langle H_S \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (0, 0, \bar{b}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4\text{Re}(Y_3^d) \langle H_S \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (0, 0, \bar{b}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde nombramos

$$m_3 = -4\text{Re}(Y_3^d) \langle H_S \rangle,$$

y tenemos la matriz de masa M_3

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Para el tercer y cuarto términos tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_{D3,4}} &= -Y_2^d [\bar{Q}_I \kappa_{IJ} H_1 d_{JR} + \bar{Q}_I \eta_{IJ} H_2 d_{JR}] \\ &= -Y_2^d [\bar{Q}_1 \kappa_{11} H_1 d_{1R} + \bar{Q}_1 \kappa_{12} H_1 d_{2R} + \bar{Q}_2 \kappa_{21} H_1 d_{1R} + \bar{Q}_2 \kappa_{22} H_1 d_{2R} \\ &\quad + \bar{Q}_1 \eta_{11} H_2 d_{1R} + \bar{Q}_1 \eta_{12} H_2 d_{2R} + \bar{Q}_2 \eta_{21} H_2 d_{1R} + \bar{Q}_2 \eta_{22} H_2 d_{2R}] \\ &= -Y_2^d [\bar{Q}_1 H_1 d_{2R} + \bar{Q}_2 H_1 d_{1R} + \bar{Q}_1 H_2 d_{1R} - \bar{Q}_2 H_2 d_{2R}] \\ &= -Y_2^d [(\bar{u}_L, \bar{d}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_1 \rangle \end{pmatrix} s_R + (\bar{c}_L, \bar{s}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_1 \rangle \end{pmatrix} d_R \\ &\quad + (\bar{u}_L, \bar{d}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_2 \rangle \end{pmatrix} d_R - (\bar{c}_L, \bar{s}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_2 \rangle \end{pmatrix} s_R] \\ &= -Y_2^d [\bar{d}_L \langle H_1 \rangle s_R + \bar{s}_L \langle H_1 \rangle d_R + \bar{d}_L \langle H_2 \rangle d_R - \bar{s}_L \langle H_2 \rangle s_R] \\ &= -Y_2^d (\bar{d}_L, \bar{s}_L, 0) \begin{pmatrix} \langle H_2 \rangle & \langle H_1 \rangle & 0 \\ \langle H_1 \rangle & -\langle H_2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calculamos ahora, $\mathcal{L}^\dagger_{Y_{D3,4}}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_{D3,4}} &= -Y_2^{d*} [\bar{d}_{JR} H_1^\dagger \kappa_{IJ}^\dagger Q_I + \bar{d}_{JR} H_2^\dagger \eta_{IJ}^\dagger Q_I] \\ &= -Y_2^{d*} [\bar{d}_{1R} H_1^\dagger \kappa_{11}^\dagger Q_1 + \bar{d}_{1R} H_1^\dagger \kappa_{21}^\dagger Q_2 + \bar{d}_{2R} H_1^\dagger \kappa_{12}^\dagger Q_1 + \bar{d}_{2R} H_1^\dagger \kappa_{22}^\dagger Q_2 \\ &\quad + \bar{d}_{1R} H_2^\dagger \eta_{11}^\dagger Q_1 + \bar{d}_{1R} H_2^\dagger \eta_{21}^\dagger Q_2 + \bar{d}_{2R} H_2^\dagger \eta_{12}^\dagger Q_1 + \bar{d}_{2R} H_2^\dagger \eta_{22}^\dagger Q_2] \\ &= -Y_2^{d*} [\bar{d}_{1R} H_1^\dagger Q_2 + \bar{d}_{2R} H_1^\dagger Q_1 + \bar{d}_{1R} H_2^\dagger Q_1 - \bar{d}_{2R} H_2^\dagger Q_2] \\ &= -Y_2^{d*} [\bar{d}_R(0, \langle H_1 \rangle) \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix} + \bar{s}_R(0, \langle H_1 \rangle) \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \\ &\quad + \bar{d}_R(0, \langle H_2 \rangle) \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} - \bar{s}_R(0, \langle H_2 \rangle) \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}] \\ &= -Y_2^{d*} [\bar{d}_R \langle H_1 \rangle s_L + \bar{s}_R \langle H_1 \rangle d_L + \bar{d}_R \langle H_2 \rangle d_L - \bar{s}_R \langle H_2 \rangle s_L] \\ &= -Y_2^{d*} (\bar{d}_R, \bar{s}_R, 0) \begin{pmatrix} \langle H_2 \rangle & \langle H_1 \rangle & 0 \\ \langle H_1 \rangle & -\langle H_2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sumando $\mathcal{L}_{Y_{D3,4}}$ con $\mathcal{L}^\dagger_{Y_{D3,4}}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_{D3,4}} + \mathcal{L}^\dagger_{Y_{D3,4}} &= \frac{1}{2} (\bar{d}, \bar{s}, 0) \begin{pmatrix} -2(Y_2^d + Y_2^{d*}) \langle H_2 \rangle & -2(Y_2^d + Y_2^{d*}) \langle H_1 \rangle & 0 \\ -2(Y_2^d + Y_2^{d*}) \langle H_1 \rangle & 2(Y_2^d + Y_2^{d*}) \langle H_2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (\bar{d}, \bar{s}, 0) \begin{pmatrix} -4\text{Re}(Y_2^d) \langle H_2 \rangle & -4\text{Re}(Y_2^d) \langle H_1 \rangle & 0 \\ -4\text{Re}(Y_2^d) \langle H_1 \rangle & 4\text{Re}(Y_2^d) \langle H_2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (\bar{d}, \bar{s}, 0) \begin{pmatrix} m_6 & m_2 & 0 \\ m_2 & -m_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y nombramos

$$m_2 = -4\text{Re}(Y_2^d) \langle H_1 \rangle, m_6 = -4\text{Re}(Y_2^d) \langle H_2 \rangle,$$

y la matriz de masa M_2 es

$$M_2 = \begin{pmatrix} m_6 & m_2 & 0 \\ m_2 & -m_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Para el quinto término tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_{D5}} &= -Y_4^d \bar{Q}_3 H_I d_{IR} \\ &= -Y_4^d \{ \bar{Q}_3 H_1 d_{1R} + \bar{Q}_3 H_2 d_{2R} \} \\ &= -Y_4^d \left\{ (\bar{t}_L, \bar{b}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_1 \rangle \end{pmatrix} d_R + (\bar{t}_L, \bar{b}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_2 \rangle \end{pmatrix} s_R \right\} \\ &= -Y_4^d \{ \bar{b}_L \langle H_1 \rangle d_R + \bar{b}_L \langle H_2 \rangle s_R \} \\ &= -Y_4^d (0, 0, \bar{b}_L) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \langle H_1 \rangle & \langle H_2 \rangle & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y su hermítico conjugado

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_{D5}}^\dagger &= -Y_4^{d*} \bar{d}_{IR} H_I^\dagger Q_3 \\ &= -Y_4^{d*} \{ \bar{d}_{1R} H_1^\dagger Q_3 + \bar{d}_{2R} H_2^\dagger Q_3 \} \\ &= -Y_4^{d*} \left\{ \bar{d}_R (0, \langle H_1 \rangle) \begin{pmatrix} \bar{t}_L \\ \bar{b}_L \end{pmatrix} + \bar{s}_R (0, \langle H_2 \rangle) \begin{pmatrix} \bar{t}_L \\ \bar{b}_L \end{pmatrix} \right\} \\ &= -Y_4^{d*} \{ \bar{d}_R \langle H_1 \rangle b_L + \bar{s}_R \langle H_2 \rangle b_L \} \\ &= -Y_4^{d*} (\bar{d}_R, \bar{s}_R, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \langle H_1 \rangle \\ 0 & 0 & \langle H_2 \rangle \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_L \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Desarrollemos ahora el sexto término

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_{D6}} &= -Y_5^d \bar{Q}_I H_I d_{3R} \\ &= -Y_5^d \{ \bar{Q}_1 H_1 b_R + \bar{Q}_2 H_2 b_R \} \\ &= -Y_5^d \left\{ (\bar{u}_L, \bar{d}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_1 \rangle \end{pmatrix} b_R + (\bar{c}_L, \bar{s}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_2 \rangle \end{pmatrix} b_R \right\} \\ &= -Y_5^d \{ \bar{d}_L \langle H_1 \rangle b_R + \bar{s}_L \langle H_2 \rangle b_R \} \\ &= -Y_5^d (\bar{d}_L, \bar{s}_L, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \langle H_1 \rangle \\ 0 & 0 & \langle H_2 \rangle \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_R \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y su hermítico conjugado

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^\dagger_{Y_{D6}} &= -Y_5^{d*} \bar{d}_{3R} H_I^\dagger Q_I \\
&= -Y_5^{d*} \left\{ \bar{d}_{3R} H_1^\dagger Q_1 + \bar{d}_{3R} H_2^\dagger Q_2 \right\} \\
&= -Y_5^{d*} \left\{ \bar{b}_R(0, \langle H_1 \rangle) \begin{pmatrix} \bar{u}_L \\ \bar{d}_L \end{pmatrix} + \bar{b}_R(0, \langle H_2 \rangle) \begin{pmatrix} \bar{c}_L \\ \bar{s}_L \end{pmatrix} \right\} \\
&= -Y_5^{d*} \left\{ \bar{b}_R \langle H_1 \rangle d_L + \bar{b}_R \langle H_2 \rangle s_L \right\} \\
&= -Y_5^{d*} (0, 0, \bar{b}_R) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \langle H_1 \rangle & \langle H_2 \rangle & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Los términos de masa restantes se obtienen con las sumas

$$\mathcal{L}_{Y_{D5}} + \mathcal{L}^\dagger_{Y_{D6}}, \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_{Y_{D6}} + \mathcal{L}^\dagger_{Y_{D5}}.$$

Tenemos la primera suma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Y_{D5}} + \mathcal{L}^\dagger_{Y_{D6}} &= \frac{1}{2} (0, 0, \bar{b}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2(Y_4^d + Y_5^{d*}) \langle H_1 \rangle & -2(Y_4^d + Y_5^{d*}) \langle H_2 \rangle & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} (0, 0, \bar{b}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ m_4 & m_5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

y para la segunda suma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^\dagger_{Y_{D5}} + \mathcal{L}_{Y_{D6}} &= \frac{1}{2} (\bar{d}, \bar{s}, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2(Y_4^{d*} + Y_5^d) \langle H_1 \rangle \\ 0 & 0 & -2(Y_4^{d*} + Y_5^d) \langle H_2 \rangle \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} (0, 0, \bar{b}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & m_4^* \\ 0 & 0 & m_5^* \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donde hemos nombrado

$$\begin{aligned}
m_4 &= -2(Y_4^d + Y_5^{d*}) \langle H_1 \rangle, & m_4^* &= -2(Y_4^{d*} + Y_5^d) \langle H_1 \rangle \\
m_5 &= -2(Y_4^d + Y_5^{d*}) \langle H_2 \rangle, & m_5^* &= -2(Y_4^{d*} + Y_5^d) \langle H_2 \rangle
\end{aligned}$$

y tenemos así las matrices de masa M_4 y M_5

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ m_4 & m_5 & 0 \end{pmatrix} \quad M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m_4^* \\ 0 & 0 & m_5^* \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.5}$$

Podemos ahora sumar todos los términos para expresar \mathcal{L}_{Y_D} en términos de la matriz de masa M_D

$$\mathcal{L}_{Y_D} = \frac{1}{2} (\bar{d}, \bar{s}, \bar{b}) \begin{pmatrix} m_1 + m_6 & m_2 & m_4^* \\ m_2 & m_1 - m_6 & m_5^* \\ m_4 & m_5 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

con la matriz M_D

$$M_D = \begin{pmatrix} m_1 + m_6 & m_2 & m_4^* \\ m_2 & m_1 - m_6 & m_5^* \\ m_4 & m_5 & m_3 \end{pmatrix} \tag{A.6}$$

Si consideramos

$$\langle H_1 \rangle = \langle H_2 \rangle$$

tenemos las siguientes igualdades

$$m_2 = m_6, \quad m_4 = m_5, \quad m_4^* = m_5^*$$

y podemos escribir M_D

$$M_D = \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & m_2 & m_4^* \\ m_2 & m_1 - m_2 & m_4^* \\ m_4 & m_4 & m_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

El cálculo para M_{Y_U} , M_{Y_E} y M_{Y_ν} es análogo y resulta en una matriz de la misma forma que la mostrada en la ecuación A.7, cambiando únicamente los términos de acoplamiento de Yukawa.

Apéndice B

Obtención de la matriz M_ν en términos de la masa de los neutrinos

En este apéndice se calcula la expresión para M_ν en términos de las masas de los neutrinos $m_{\nu 1}$, $m_{\nu 2}$ y $m_{\nu 3}$, partiendo de

$$U_\nu^T M_\nu U_\nu = \text{diag}(m_{\nu 1}, m_{\nu 2}, m_{\nu 3}) \quad (\text{B.1})$$

donde

$$U_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta_\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \eta & \sin \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \eta & \cos \eta & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$M_\nu = \begin{pmatrix} 2m_2^2 M_1^{-1} & 0 & 2m_2 m_4 M_1^{-1} \\ 0 & 2m_2^2 M_1^{-1} & 0 \\ 2m_2 m_4 M_1^{-1} & 0 & 2m_4^2 M_1^{-1} + m_3^2 M_3^{-1} \end{pmatrix}.$$

Etiquetaremos los términos de esta última matriz de la siguiente forma

$$\begin{aligned} A &= 2m_2^2 M_1^{-1} \\ B &= 2m_2 m_4 M_1^{-1} \\ D &= 2m_4^2 M_1^{-1} + m_3^2 M_3^{-1} \end{aligned}$$

de manera que tenemos

$$\begin{aligned} U_\nu^T M_\nu U_\nu &= \begin{pmatrix} \cos \eta & 0 & -e^{i\delta_\nu} \sin \eta \\ \sin \eta & 0 & e^{i\delta_\nu} \cos \eta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 & B \\ 0 & A & 0 \\ B & 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \eta & \sin \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -e^{i\delta_\nu} \sin \eta & 0 & e^{i\delta_\nu} \cos \eta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A \cos^2 \eta - 2B e^{i\delta_\nu} \cos \eta \sin \eta + D e^{2i\delta_\nu} \sin^2 \eta & (A - D e^{i\delta_\nu}) \cos \eta \sin \eta + B(\cos^2 \eta - \sin^2 \eta) & 0 \\ (A - D e^{i\delta_\nu}) \cos \eta \sin \eta + B(\cos^2 \eta - \sin^2 \eta) & A \sin^2 \eta + 2B e^{i\delta_\nu} \cos \eta \sin \eta + D e^{2i\delta_\nu} \cos^2 \eta & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde resolvemos de acuerdo a la ecuación (B.1), y obtenemos

$$\begin{aligned} A &= m_{\nu 3} \\ B &= \sqrt{(m_{\nu 3} - m_{\nu 1})(m_{\nu 2} - m_{\nu 3})} e^{-i\delta_\nu} \\ D &= (m_{\nu 1} + m_{\nu 2} + m_{\nu 3}) e^{-2i\delta_\nu} \end{aligned}$$

APÉNDICE B. OBTENCIÓN DE LA MATRIZ M_ν EN TÉRMINOS DE LA MASA DE
LOS NEUTRINOS

De esta forma, la matriz M_ν en función de las masas de los neutrinos es

$$M_\nu = \begin{pmatrix} m_{\nu 3} & 0 & \sqrt{(m_{\nu 3} - m_{\nu 1})(m_{\nu 2} - m_{\nu 3})}e^{-i\delta_\nu} \\ 0 & m_{\nu 3} & 0 \\ \sqrt{(m_{\nu 3} - m_{\nu 1})(m_{\nu 2} - m_{\nu 3})}e^{-i\delta_\nu} & 0 & (m_{\nu 1} + m_{\nu 2} + m_{\nu 3})e^{-2i\delta_\nu} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

Bibliografía

- [1] Herrero, M. (1999), The Standard model. *NATO Sci.Ser.C*, 534, 1–59.
- [2] Aad, G., et al. (2012), Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. *Phys.Lett.*, B716, 1–29.
- [3] Chatrchyan, S., et al. (2012), Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC. *Phys.Lett.*, B716, 30–61.
- [4] Gunion, J. F., Haber, H. E., Kane, G. L., et al. (2000), The Higgs Hunter’s Guide. *Front.Phys.*, 80, 1–448.
- [5] Erler, J. (2007), SM Precision Constraints at the LHC/ILC. *AIP Conf.Proc.*, 917, 244–251.
- [6] Christenson, J. H., Cronin, J. W., Fitch, V. L., et al. (1964), Evidence for the 2π Decay of the K_2^0 Meson. *Phys. Rev. Lett.*, 13, 138–140.
- [7] Barr, G., Buchholz, P., Carosi, R., et al. (1993), A new measurement of direct CP violation in the neutral kaon system. *Physics Letters B*, 317(1–2), 233 – 242.
- [8] Fanti, V., Lai, A., Marras, D., et al. (1999), A new measurement of direct CP violation in two pion decays of the neutral kaon. *Physics Letters B*, 465(1–4), 335 – 348.
- [9] Abashian, A., Abe, K., Abe, K., et al. (2001), Measurement of the CP Violation Parameter $\sin 2\varphi_1$ in B_d^0 Meson Decays. *Phys. Rev. Lett.*, 86, 2509–2514.
- [10] Aubert, B., Boutigny, D., De Bonis, I., et al. (2001), Measurement of CP-Violating Asymmetries in B^0 Decays to CP Eigenstates. *Phys. Rev. Lett.*, 86, 2515–2522.
- [11] Aubert, B., Boutigny, D., Gaillard, J. M., et al. (2001), Observation of CP Violation in the B^0 Meson System. *Phys. Rev. Lett.*, 87, 091,801.
- [12] Coan, T. E., Fadeyev, V., Maravin, Y., et al. (2000), Study of Exclusive Radiative B Meson Decays. *Phys. Rev. Lett.*, 84, 5283–5287.
- [13] Olive, K., et al. (2014), Review of Particle Physics. *Chin. Phys. C*, 38, 090,001.
- [14] Kobayashi, M., Maskawa, T. (1973), CP Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction. *Prog.Theor.Phys.*, 49, 652–657.
- [15] Chau, L.-L., Keung, W.-Y. (1984), Comments on the Parametrization of the Kobayashi-Maskawa Matrix. *Phys.Rev.Lett.*, 53, 1802.
- [16] Wolfenstein, L. (1983), Parametrization of the Kobayashi-Maskawa Matrix. *Phys. Rev. Lett.*, 51, 1945–1947.

- [17] Bahcall, J. N. (1996), Solar neutrinos: Where we are, where are we going. *Astrophys.J.*, *467*, 475–484.
- [18] Cleveland, B., Daily, T., Jr., R. D., et al. (1995), Update on the measurement of the solar neutrino flux with the Homestake chlorine detector. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, *38*(1–3), 47 – 53, neutrino 94.
- [19] Davis, R. (1994), A review of the Homestake solar neutrino experiment. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, *32*, 13–32.
- [20] Fukuda, Y., Hayakawa, T., Inoue, K., et al. (1996), Solar Neutrino Data Covering Solar Cycle 22. *Phys. Rev. Lett.*, *77*, 1683–1686.
- [21] Fukuda, Y., Hayakawa, T., Ichihara, E., et al. (1998), Measurements of the Solar Neutrino Flux from Super-Kamiokande’s First 300 Days. *Phys. Rev. Lett.*, *81*, 1158–1162.
- [22] Hampel, W., Heusser, G., Kiko, J., et al. (1996), {GALLEX} solar neutrino observations: Results for {GALLEX} {III}. *Physics Letters B*, *388*(2), 384 – 396.
- [23] Hampel, W., Handt, J., Heusser, G., et al. (1999), {GALLEX} solar neutrino observations: results for {GALLEX} {IV}. *Physics Letters B*, *447*(1–2), 127 – 133.
- [24] Abdurashitov, J. N., Gavrin, V. N., Girin, S. V., et al. (1996), The Russian-American Gallium Experiment (SAGE) Cr Neutrino Source Measurement. *Phys. Rev. Lett.*, *77*, 4708–4711.
- [25] Peccei, R. (1999), Neutrino physics. *AIP Conf.Proc.*, *490*, 80–124.
- [26] Barger, V. D. (2000), Overview of neutrino oscillation physics, 377–385.
- [27] Gaisser, T. K., Halzen, F., Stanev, T. (1995), Particle astrophysics with high energy neutrinos. *Physics Reports*, *258*(3), 173 – 236.
- [28] Hirata, K., et al. (1992), Observation of a small atmospheric muon-neutrino / electron-neutrino ratio in Kamiokande. *Phys.Lett.*, *B280*, 146–152.
- [29] Fukuda, Y., et al. (1994), Atmospheric muon-neutrino / electron-neutrino ratio in the multiGeV energy range. *Phys.Lett.*, *B335*, 237–245.
- [30] Athanassopoulos, C., et al. (1995), Candidate events in a search for anti-muon-neutrino to anti-electron-neutrino oscillations. *Phys.Rev.Lett.*, *75*, 2650–2653.
- [31] Athanassopoulos, C., et al. (1996), Evidence for anti-muon-neutrino to anti-electron-neutrino oscillations from the LSND experiment at LAMPF. *Phys.Rev.Lett.*, *77*, 3082–3085.
- [32] Athanassopoulos, C., et al. (1998), Evidence for $\nu(\mu)$ to $\nu(e)$ neutrino oscillations from LSND. *Phys.Rev.Lett.*, *81*, 1774–1777.
- [33] Kubo, J., Mondragon, A., Mondragon, M., et al. (2003), The Flavor symmetry. *Prog.Theor.Phys.*, *109*, 795–807.
- [34] Kubo, J., Mondragon, A., Mondragon, M., et al. (2005), A minimal S(3)-invariant extension of the standard model. *J.Phys.Conf.Ser.*, *18*, 380–384.
- [35] Mondragon, A. (2006), Models of flavour with discrete symmetries. *AIP Conf.Proc.*, *857B*, 266–282.
- [36] Kubo, J., Okada, H., Sakamaki, F. (2004), Higgs potential in minimal S(3) invariant extension of the standard model. *Phys.Rev.*, *D70*, 036,007.

- [37] Ma, E., Rajasekaran, G. (2001), Softly broken A(4) symmetry for nearly degenerate neutrino masses. *Phys.Rev., D64*, 113,012.
- [38] Kane, G. (1988), *Modern Elementary Particle Physics*.
- [39] Glashow, S. L. (1961), Partial-symmetries of weak interactions. *Nuclear Physics*, 22(4), 579 – 588.
- [40] Weinberg, S. (1967), A Model of Leptons. *Phys.Rev.Lett.*, 19, 1264–1266.
- [41] Aitchison, I. J. R., Hey, A. J. G. (2003), *Gauge Theories in Particle Physics: A Practical Introduction. Vol. 1: From Relativistic Quantum Mechanics to QED*. IOP.
- [42] Griffiths, D. (1987), *Introduction to Elementary Particles*. New York, USA: John Wiley & Sons.
- [43] Ryder, L. H. (1996), *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2 edición.
- [44] Gell-Mann, M. (1964), A Schematic model of baryons and mesons. *Phys. Lett.*, 8, 214–215.
- [45] Catani, S., Dittmar, M., Huston, J., et al. (2000), The QCD and standard model working group: Summary report.
- [46] Catani, S., Dittmar, M., Soper, D., et al. (2000), QCD.
- [47] Feynman, R., Gell-Mann, M. (1958), Theory of Fermi interaction. *Phys.Rev.*, 109, 193–198.
- [48] Goldstone, J., Salam, A., Weinberg, S. (1962), Broken Symmetries. *Phys.Rev.*, 127, 965–970.
- [49] Quigg, C. (2002), The Electroweak theory, 3–67.
- [50] Higgs, P. W. (1964), Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons. *Phys. Rev. Lett.*, 13, 508–509.
- [51] Higgs, P. W. (1966), Spontaneous Symmetry Breakdown without Massless Bosons. *Phys. Rev.*, 145, 1156–1163.
- [52] Dawson, S. (1994), Introduction to the physics of Higgs bosons.
- [53] Carena, M. S., Zerwas, P. M., Accomando, E., et al. (1996), Higgs physics at LEP-2.
- [54] Dawson, S. (1998), Introduction to electroweak symmetry breaking, 1–83.
- [55] Fukuda, Y., Hayakawa, T., Ichihara, E., et al. (1998), Evidence for Oscillation of Atmospheric Neutrinos. *Phys. Rev. Lett.*, 81, 1562–1567.
- [56] Eidelman, S., et al. (2004), Review of Particle Physics. *Physics Letters B*, 592.
- [57] Aitchison, I. J. (2005), Supersymmetry and the MSSM: An Elementary introduction.
- [58] Ceolin, M. B. (2003), Neutrino oscillations. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 29(12), R133.
- [59] Bilenky, S. (2013), Neutrino. History of a unique particle. *Eur.Phys.J.*, H38, 345–404.
- [60] Mondragón, A. (2005), El Sabor de los quarks y los leptones. En *IV Escuela Mexicana de Física Nuclear*.
- [61] Langacker, P. (2005), Neutrino physics (theory). *Int.J.Mod.Phys.*, A20, 5254–5265.
- [62] Boehm, F., Vogel, P. (1992), *Physics of Massive Neutrinos*. Cambridge University Press.

- [63] Mohapatra, R., Antusch, S., Babu, K., et al. (2004), Theory of neutrinos.
- [64] Andres, E., Askebjør, P., Barwick, S., et al. (2000), The AMANDA neutrino telescope: Principle of operation and first results. *Astropart.Phys.*, *13*, 1–20.
- [65] Hamermesh, M. (1989), *Group Theory and Its Application to Physical Problems*. Dover Books on Physics Series, Dover Publications.
- [66] Baumslag, B., Chandler, B. (1968), *Schaum's Outline of Group Theory*. Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Education.
- [67] Yanagida, T. (1979), HORIZONTAL SYMMETRY AND MASSES OF NEUTRINOS. *Conf.Proc.*, *C7902131*, 95–99.
- [68] Felix, O., Mondragon, A., Mondragon, M., et al. (2007), Neutrino masses and mixings in a minimal $S(3)$ -invariant extension of the standard model. *AIP Conf.Proc.*, *917*, 383–389.
- [69] Albright, C. H. (2004), Normal vs. inverted hierarchy in type I seesaw models. *Phys.Lett.*, *B599*, 285–293.
- [70] Lesgourgues, J., Pastor, S. (2014), Neutrino cosmology and Planck. *New J.Phys.*, *16*, 065,002.