



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Fisico-Matemáticas

Estructuras de Poisson para sistemas con constricciones no
holónomas

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Omar Rosas Flores

asesorado por

Dr. Gerardo F. Torres Del Castillo

Puebla Pue.
Junio de 2014



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Fisico-Matemáticas

Estructuras de Poisson para sistemas con constricciones no
holónomas

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Omar Rosas Flores

asesorado por

Dr. Gerardo F. Torres Del Castillo

Puebla Pue.
Junio de 2014

Título: Estructuras de Poisson para sistemas con constricciones no holónomas

Estudiante:OMAR ROSAS FLORES

COMITÉ

Dr. Mercedes Paulina Velázquez Quesada
Presidente

Dr. Gilberto Silva Ortigoza
Secretario

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero
Vocal

Dr. Alberto Escalante Hernández
Vocal

Dr. Gerardo F. Torres Del Castillo
Asesor

Índice general

Resumen	VII
Introducción	IX
1.	1
1.1. La dinámica de sistemas holónomos	1
1.2. La Estructura de Poisson	3
1.3. La descripción de sistemas no holónomos	6
1.4. El Patín de hielo	8
1.5. Partícula en un espacio de tres dimensiones	10
2. La construcción de las estructuras de Poisson	13
2.1. Una estructura de Poisson para el patín de hielo	14
2.2. Una estructura de Poisson para partícula en un espacio de tres dimensiones	18
2.3. Una segunda estructura de Poisson para partícula en un espacio de tres dimensiones	22
3. Conclusiones	27

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Gerardo F. Torres Del Castillo por brindarme la oportunidad de aprender de sus conocimientos y aptitudes. Así como a los valiosos comentarios aportados durante la elaboración del trabajo.

A los miembros de mi familia, ya que son los primeros que me apoyan y me animan incondicionalmente en cada decisión que tomo.

A los amigos que conocí durante mi estancia en licenciatura en física de la FCFM–BUAP, así como a todos aquellos que he conocido en otros ambientes y circunstancias.

A cada miembro del jurado por sus ilustres comentarios, enfocados en la calidad del trabajo final.

Y a la Secretaría de Educación Pública (S.E.P.) por el apoyo financiero brindado para la elaboración de este trabajo de tesis.

Finalmente, reconozco que todo esto habría sido imposible de realizar sin la paciencia y apoyo brindado por mi asesor, familia, amigos, miembros del jurado y S.E.P.

Resumen

En esta tesis se estudian algunos sistemas mecánicos con constricciones no holónomas y con un número finito de grados de libertad como son el *patín de hielo* y *partícula en un espacio de tres dimensiones*. Las ecuaciones de movimiento de estos sistemas no poseen una formulación de Hamilton como la de los sistemas mecánicos holónomos. No obstante, si admiten una estructura de Poisson.

Introducción

Realizar un análisis que describa el movimiento de cualquier sistema mecánico, implica tener un previo conocimiento de la forma, la masa, las restricciones y las fuerzas que actúan sobre cada sistema (ver en [1]).

La configuración de algunos sistemas mecánicos, se especifica por un número finito de cantidades q^1, q^2, \dots, q^n llamadas *coordenadas generalizadas*. Estas coordenadas forman los puntos de un espacio llamado *espacio de configuraciones* Q , donde cada punto representa la *configuración* del sistema en algún instante de tiempo t (ver en [1]–[4]).

Una manera de clasificar a los sistemas mecánicos es a través del tipo de ecuaciones de restricción que posean, surgiendo así, los llamados sistemas mecánicos *holónomos* y *no holónomos*.

En (1894) Hertz ¹ introduce el término *holónimo*, explicando que las ecuaciones de restricción, dadas como constricciones sobre las velocidades, pueden integrarse y ser expresadas como ecuaciones de constricción sobre las variables que caracterizan al espacio de configuraciones Q (ver en [5]). Precisamente, se llamará *sistema mecánico holónimo*, a cualquier sistema mecánico que posea todas y cada una de sus ecuaciones de constricción con esta característica (ver en [1]– [7]).

Si las ecuaciones de restricción, dadas en términos de las velocidades, no son *integrables*, serán llamadas *ecuaciones de constricción no holónomas* y cualquier sistema mecánico que posea al menos una ecuación de restricción, con esta cualidad, será llamado *sistema mecánico no holónimo* (ver en [1]–[7]).

Cada sistema mecánico posee un número de *grados de libertad*, siendo, igual al número de coordenadas independientes menos el número de ecuaciones de constricción. Cuando se estudia un sistema mecánico no holónimo, siempre requiere de más coordenadas para su descripción que grados de libertad posea. En cambio, en un sistema mecánico holónimo, el número de grados de libertad coincide con el número de coordenadas independientes requeridas para especificar la configuración del sistema (ver en [1]–[4]).

Las ecuaciones de movimiento de un sistema mecánico no holónimo son representadas por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de segundo orden, que admite una estructura de paréntesis de Poisson sobre un espacio (o variedad) llamado *variedad de Poisson*. Esta estructura toma en cuenta como Hamiltoniano a una constante de movimiento, que es elegida en función de las coordenadas de la *variedad de Poisson* (ver en [8] y [9]).

El contenido de la tesis se distribuye de la siguiente manera. En la sección 2 se presenta la teoría referente a sistemas holónomos y no holónomos, junto con la teoría referente a variedades de Poisson. Además se analizan dos sistemas mecánicos con una constricción no holónoma, *el patín de hielo* y *partícula en un espacio de tres dimensiones*, usando la teoría de sistemas no holónomos. La sección 3 explica el método para darles la estructura de paréntesis de Poisson a estos dos sistemas mecánicos y en la sección 4 se presentan las conclusiones de este reporte. Además para el resto de las secciones, la convención de suma entre índices es usada.

¹Heinrich Rudolf Hertz fue un físico alemán descubridor del efecto fotoeléctrico y de la propagación de las ondas electromagnéticas, así como de formas de producirlas y detectarlas. La unidad de medida de la frecuencia, el hercio (Hertz), lleva ese nombre en su honor.

Capítulo 1

1.1. La dinámica de sistemas holónomos

Para presentar la forma general de las ecuaciones de restricción que se consideran en este trabajo, se tomará en cuenta a las coordenadas que caracterizan al espacio de configuraciones Q para establecer la correspondiente clasificación de los sistemas mecánicos.

En términos de q^1, \dots, q^n , un sistema de m formas diferenciales (o 1-formas), está dado por

$$A_{ji}dq^i + B_{jt}dt = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (1.1)$$

donde A_{ji} y B_{jt} se consideran funciones de las coordenadas q^i y el tiempo t . La expresión (1.1) de forma equivalente se puede escribir como

$$A_{ji}\dot{q}^i + B_{jt} = 0. \quad (1.2)$$

Una condición suficiente que garantiza la integrabilidad del sistema de m formas diferenciales expresado por (1.1), es que cada forma diferencial (con $j = 1, \dots, m$) sea una diferencial exacta, o que sea capaz de transformarse en una, con ayuda de un factor integrante, dado en términos de q^i y t , de tal manera que se cumpla

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{ji}}{\partial q^k} &= \frac{\partial A_{jk}}{\partial q^i}, \\ \frac{\partial A_{ji}}{\partial t} &= \frac{\partial B_{jt}}{\partial q^i}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

con $(i, k = 1, \dots, n)$. Un conjunto de ecuaciones de restricción expresadas como en (1.1) o (1.2) y que satisfagan las condiciones expresadas en (1.3), implica la existencia de funciones F_j en términos de las coordenadas q^1, \dots, q^n y posiblemente el tiempo t , tales que

$$A_{ji} = \frac{\partial F_j}{\partial q^i}, \quad B_{jt} = \frac{\partial F_j}{\partial t}, \quad F_j(q^1, \dots, q^n, t) = 0. \quad (1.4)$$

Las funciones $F_j(q^1, \dots, q^n, t) = 0$ expresadas en (1.4), establecen que las ecuaciones de restricción inicialmente dadas en términos de las velocidades \dot{q}^i y posiblemente t , quedan expresadas en términos de las coordenadas q^i y t , cuando esto ocurre, el sistema de ecuaciones (1.1) es llamado *sistema de ecuaciones con constricciones holónomas*. Si alguna de las ecuaciones de restricción del sistema (1.1) no satisface las condiciones (1.3), se le llamará *sistema de ecuaciones con constricciones no holónomas* (ver en [1]–[7]).

Las ecuaciones de movimiento para sistemas holónomos se introducen a partir del *principio de Hamilton*, que toma en cuenta una función escalar $L(q^i, \dot{q}^i, t)$, que depende de las coordenadas generalizadas q^i , velocidades generalizadas \dot{q}^i (con $i = 1, \dots, n$) y posiblemente el tiempo t

(explícitamente), a esta función se le conoce como función Lagrangiana, o Lagrangiano. Para sistemas holónomos, donde las fuerzas que actúan sobre estos sistemas (excepto las de restricción) provienen de una función potencial V , dada en términos solamente de las coordenadas q^1, \dots, q^n , el Lagrangiano se escribe como energía cinética T menos energía potencial V , i.e., $L(q^i, \dot{q}^i, t) = T - V$ (ver en [1,2,3,4,6]).

El principio de Hamilton establece que *las curvas $q^i(t)$ que recorre un sistema holónimo sobre el espacio de configuraciones Q durante un intervalo de tiempo fijo $[t_0, t_1]$, es tal que, la integral*

$$A = \int_{t_0}^{t_1} L dt, \quad (1.5)$$

resulta tener un valor estacionario, con respecto a variaciones infinitesimales de las curvas $q^i(t)$, donde esas variaciones toman valores iguales a cero en t_0 y t_1 (ver [2,4,5,10]).

Encontrar el *valor estacionario* de la integral definida A , significa tomar un conjunto de trayectorias $q^i(t, \varepsilon)$ cercanas a $q^i(t)$ y exigir que se anule la primera derivada de A respecto al parámetro ε , donde ε es independiente de t . Por ejemplo una elección de un conjunto de trayectorias cercanas a $q^i(t)$ son

$$q^i(\varepsilon, t) = q^i(t) + \varepsilon \Gamma^i(t), \quad (1.6)$$

donde $\Gamma^i(t)$ son funciones arbitrarias con derivadas de segundo orden continuas respecto a t y que satisfacen las condiciones de frontera $\Gamma^i(t_0) = 0 = \Gamma^i(t_1)$, en $[t_0, t_1]$.

Al parametrizar el Lagrangiano de la expresión (1.5), usando un conjunto de ecuaciones paramétricas $q^i(t, \varepsilon)$ cualquiera o incluso el expresado por (1.6) y efectuar la integración (definida) en la expresión (1.5), se obtiene solamente una función de ε , esto es

$$A(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1} L(q^i(t, \varepsilon), \dot{q}^i(t, \varepsilon), t) dt. \quad (1.7)$$

Al considerar a $L = L(q^i, \dot{q}^i, t)$ con derivadas continuas de segundo orden respecto a t en cada uno de sus argumentos. La condición necesaria para que la expresión (1.5) tenga un *valor estacionario*, se expresa como

$$\delta A = \left(\frac{dA}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} d\varepsilon = 0, \quad \text{o} \quad \left(\frac{dA}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = 0. \quad (1.8)$$

Cuando se aplica la condición de valor estacionario a la expresión (1.7), se llega a

$$\delta A = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right] \delta q^i dt = 0, \quad (1.9)$$

donde

$$\delta q^i = \left(\frac{dq^i}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} d\varepsilon. \quad (1.10)$$

Por tratarse de sistemas holónomos, las variaciones δq^i son independientes, entonces las condiciones necesarias para que las integrales en (1.9) sean cero, son

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.11)$$

Las consideraciones anteriores, a parte de ser necesarias también son suficientes para obtener el valor estacionario de la integral A . La condición de suficiencia se logra empleando la ecuación (1.11), implicando que la integral de la ecuación (1.9) desaparezca, resultando la variación δA ser igual a cero. Las expresiones dadas en (1.11) son las ecuaciones de movimiento para sistemas

holónomos y el nombre que reciben es de ecuaciones de Euler–Lagrange o simplemente ecuaciones de Lagrange (ver en [1]–[6]).

El sistema de EDOs de segundo orden expresado en (1.11), admite una formulación de Hamilton.

En términos del Lagrangiano L , se introduce el *momento conjugado* asociado a la coordenada generalizada q^i , dado por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.12)$$

Cada momento conjugado expresado en (1.12), $p_i = p_i(q^k, \dot{q}^k, t)$ es función de las coordenadas q^k , velocidades \dot{q}^k (con $k = 1, \dots, n$) y el tiempo t . Pedir que esta última expresión sea invertible, permite obtener las velocidades $\dot{q}^i = \dot{q}^i(p_k, q^k, t)$, como una función de los momentos conjugados p_k , las coordenadas q^k y el tiempo t . Esta condición de invertibilidad se formaliza introduciendo el determinante de la matriz Hessiana $n \times n$ y pidiendo que sea diferente de cero, esto es

$$\left| \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^k} \right| = \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^i} \right| \neq 0. \quad (1.13)$$

La dinámica Hamiltoniana involucra la transición de (q^i, \dot{q}^i) a (q^i, p_i) , a través de una transformación de Legendre dada por

$$H(q^i, p_i, t) = p_i \dot{q}^i - L(q^i, \dot{q}^i, t), \quad (1.14)$$

donde $H(q^i, p_i, t)$ es llamado Hamiltoniano. En el caso de sistemas holónomos y conservativos i.e., cuyas fuerzas (excepto de constricción) provienen de un potencial, el Hamiltoniano como una función de (q^i, \dot{q}^i) es la energía total.

Al tomar las diferenciales (consideradas como variaciones) en ambos lados de la ecuación (1.14) y usando las ecuaciones de Lagrange (1.11) se obtienen

$$\dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.15)$$

Las dos primeras igualdades en la expresión (1.15), se conocen como *ecuaciones canónicas de Hamilton* y la descripción del movimiento con esas $2n$ ecuaciones diferenciales es lo que se conoce como dinámica Hamiltoniana (ver [1,2,3,4,6]).

1.2. La Estructura de Poisson

La mecánica de Hamilton se desarrolla sobre un espacio (o variedad) llamado *espacio fase*, formado por (q^i, p_i) y cuya dimensión es $2n$. Este espacio posee un carácter geométrico cuyas herramientas de estudio están basadas en la geometría de estructura simpléctica y más aun en la geometría de Poisson. El antecedente para ambas teorías se encuentra en el paréntesis de Poisson entre dos funciones arbitrarias diferenciables $f(q^i, p_i, t)$ y $g(q^i, p_i, t)$,

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i}. \quad (1.16)$$

Con ayuda del Hamiltoniano $H(q^i, p_i, t)$ y el paréntesis de Poisson (1.16), la evolución temporal de cualquier función diferenciable $f(q^i, p_i, t)$ se escribe como,

$$\dot{f} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (1.17)$$

Si f no posee una dependencia explícita del tiempo t , se tiene $\dot{f} = \{f, H\}$. De la expresión (1.16), se puede observar que $\{f, f\} = 0$, para toda función arbitraria diferenciable $f(q^i, p_i, t)$. En

particular, cuando H es el Hamiltoniano, de la expresión (1.17) se deduce que la derivada total de H respecto al tiempo es igual a la derivada parcial. Esto viene acompañado con la tercera ecuación en (1.15), esto es, si L no contiene a t explícitamente, tampoco lo hace H . Esta observación, afirma que para un sistema holónomo y conservativo, el Hamiltoniano H es una constante de movimiento (llamada la energía del sistema).

Las ecuaciones de Hamilton (1.15), en términos del paréntesis de Poisson, se pueden escribir como

$$\dot{q}^i = \{q^i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}. \quad (1.18)$$

Cualquier espacio (o variedad) M en el que se establezca una operación de corchetes $\{, \}$, entre funciones arbitrarias diferenciables f, g, \dots y que satisfaga las propiedades :

1. si $c_1, c_2 \in \mathcal{R}$, donde \mathcal{R} es el campo de números reales, $\{f, c_1g + c_2h\} = c_1\{f, g\} + c_2\{f, h\}$,
2. antisimetría $\{f, g\} = -\{g, f\}$,
3. la identidad de Jacobi $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$,
4. regla de Leibniz $\{fg, h\} = \{f, h\}g + f\{g, h\}$,

se le llamará *estructura de Paréntesis de Poisson* o *variedad de Poisson*. Y la operación de corchetes $\{, \}$ es llamada *Paréntesis de Poisson* (ver en [10]–[12]).

En este contexto, definido un $\{, \}$ paréntesis de Poisson sobre las funciones diferenciables f, g, \dots y que cumpla con las propiedades (1–4) define un álgebra de Lie, que se conoce como *álgebra de Poisson*. Es importante señalar que al haber establecido la linealidad por la derecha en el $\{, \}$ dada en la propiedad 1 junto con la antisimetría (propiedad 2), dan lugar a establecer que el paréntesis de Poisson $\{, \}$ sea bilineal (también pudo haberse establecido la linealidad por la izquierda (en la propiedad 1) junto con la antisimetría, dando origen a la bilinealidad).

Si una variedad de Poisson M , tiene dimensión $\dim M = d$ y alrededor de cada punto de M se consideran coordenadas arbitrarias locales (r^1, \dots, r^d) , entonces el paréntesis de Poisson tiene asociado un campo tensorial $J^{\mu\nu}$, que permite establecerlo como (ver en [10] y [11])

$$\{f, g\} = J^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial r^\mu} \frac{\partial g}{\partial r^\nu}, \quad \mu, \nu, \dots = 1, \dots, d. \quad (1.19)$$

Al tensor $J^{\mu\nu}$ se le llama (*estructura o tensor o matriz*) de *Poisson*, cuyas componentes matriciales, se determinan como $J^{\mu\nu} = \{r^\mu, r^\nu\}$ el paréntesis de Poisson entre las coordenadas r^ρ .

Por ser $J^{\mu\nu} = \{r^\mu, r^\nu\}$, significa que también debe satisfacer las propiedades (1–4) de un paréntesis de Poisson enumeradas anteriormente. En particular, para que se satisfaga la identidad de Jacobi entre funciones diferenciables, las coordenadas r^μ, r^ν, r^θ deben satisfacerla, i.e., $\{r^\mu, \{r^\nu, r^\theta\}\} + \{r^\nu, \{r^\theta, r^\mu\}\} + \{r^\theta, \{r^\mu, r^\nu\}\} = 0$ (ver en [12]).

Ahora, tomando en cuenta la definición de paréntesis de Poisson (1.19), es destacable la forma alternativa que llega a tomar la expresión $\{r^\mu, \{r^\nu, r^\theta\}\}$, escrita en términos del tensor de Poisson $J^{\mu\nu}$, i.e.,

$$\{r^\mu, \{r^\nu, r^\theta\}\} = \{r^\mu, J^{\nu\theta}\} = J^{\pi\rho} \frac{\partial r^\mu}{\partial r^\pi} \frac{\partial J^{\nu\theta}}{\partial r^\rho} = J^{\pi\rho} \delta_\pi^\mu \frac{\partial J^{\nu\theta}}{\partial r^\rho} = J^{\mu\rho} \frac{\partial J^{\nu\theta}}{\partial r^\rho}, \quad (1.20)$$

si se utiliza la expresión (1.20) y se realiza una transposición de los índices μ, ν, θ para escribir cada uno de los otros dos términos restantes en la identidad de Jacobi, esta queda escrita como

$$J^{\mu\rho} \frac{\partial J^{\nu\theta}}{\partial r^\rho} + J^{\nu\rho} \frac{\partial J^{\theta\mu}}{\partial r^\rho} + J^{\theta\rho} \frac{\partial J^{\mu\nu}}{\partial r^\rho} = 0. \quad (1.21)$$

En el contexto de una variedad de Poisson, dado el Hamiltoniano en términos de las coordenadas de una variedad de Poisson $H(r^\nu, t)$, se establece la evolución de cualquier función diferenciable

$f(r^\mu, t)$, que no dependa explícitamente del tiempo t , como $\dot{f} = \{f, H\}$ y usando la expresión (1.19) se escribe como

$$\dot{f} = J^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial r^\mu} \frac{\partial H}{\partial r^\nu}, \quad (1.22)$$

además, la evolución de las coordenadas locales r^μ , usando (1.19), se calcula como

$$\dot{r}^\mu = J^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial r^\nu}, \quad (1.23)$$

bajo esta perspectiva, la evolución de las coordenadas dada en (1.23), posee una estructura de paréntesis de Poisson sobre una variedad de Poisson M (ver en [9]–[12]).

El tensor de Poisson dota de una estructura geométrica a una variedad de Poisson, a través de la operación $\{, \}$ paréntesis de Poisson. Esta matriz de Poisson $J^{\mu\nu}$, es antisimétrica y cuadrada, i.e., $d \times d$. Posee un rango (número de filas o columnas independientes), que es igual a d si y solo si $J^{\mu\nu}$ es no degenerada (esto es, $\det J^{\mu\nu} \neq 0$) o el rango de $J^{\mu\nu}$ es menor que d , si y solo si $J^{\mu\nu}$ resulta ser degenerada ($\det J^{\mu\nu} = 0$).

El paréntesis de Poisson entre funciones diferenciables f, g, \dots , respecto a las coordenadas q^i, p_i y t expresado en (1.16), viene acompañado de una estructura geométrica que a continuación se presenta. Si se toma un sistema de coordenadas arbitrarias $x^\alpha = x^\alpha(q^i, p_i)$ (con $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, 2n$) siendo funciones diferenciables de las coordenadas de espacio fase, asociado al paréntesis de Poisson (1.16), se encuentra un campo tensorial $\sigma^{\alpha\beta}$, que permite expresarlo como (ver en [13])

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i}, \\ &= \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial q^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial p_i} - \frac{\partial x^\alpha}{\partial p_i} \frac{\partial x^\beta}{\partial q^i} \right) \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g}{\partial x^\beta} = \sigma^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g}{\partial x^\beta}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

donde $\sigma^{\alpha\beta} = \{x^\alpha, x^\beta\}$, es el paréntesis de Poisson entre las coordenadas de espacio fase. Además, $\sigma^{\alpha\beta} = -\sigma^{\beta\alpha}$ son las componentes de una matriz antisimétrica, porque la operación $\{, \}$, lo es. También el paréntesis de Poisson satisface la identidad de Jacobi para tres funciones arbitrarias y diferenciables del espacio fase $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ (ver en [2,10,13]), pero esto ocurre si la satisfacen las coordenadas $\{x^\alpha, \{x^\beta, x^\gamma\}\} + \{x^\beta, \{x^\gamma, x^\alpha\}\} + \{x^\gamma, \{x^\alpha, x^\beta\}\} = 0$, donde al tomar en cuenta la forma del campo tensorial $\sigma^{\alpha\beta} = \{x^\alpha, x^\beta\}$, la identidad de Jacobi queda escrita como un sistema de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) similar a la expresión (1.21), tomando en cuenta $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, \dots, 2n$ (ver en [10,12]).

De acuerdo a (1.17), la evolución de cualquier función f que no dependa de forma explícita de t , se calcula como $\dot{f} = \{f, H\}$, con H el Hamiltoniano. En particular, la evolución de las coordenadas x^α , se pueden escribir como

$$\dot{x}^\alpha = \sigma^{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial x^\beta}. \quad (1.25)$$

La expresión (1.25) se reduce a (1.18) cuando $(x^1, \dots, x^{2n}) = (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$, llamadas *coordenadas canónicas* y

$$(\sigma^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

donde I es la matriz identidad $n \times n$. En general a este tensor $\sigma^{\alpha\beta}$ se le conoce como *estructura simpléctica* (ver en [2,10]).

En términos generales, cualquier tensor de *estructura simpléctica*, $\sigma^{\mu\nu}$ que sea invertible permite definir un espacio que se conoce como *variedad simpléctica* (ver en [10,11,13]). Sea $(\omega_{\mu\nu})$ la inversa de $(\sigma^{\mu\nu})$, es decir, $\sigma^{\mu\nu} \omega_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu$. Al ser $\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu}$ antisimétrica (e invertible), la matriz inversa hereda la antisimetría $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ y la invertibilidad ($\det \omega_{\mu\nu} \neq 0$). Más aun, $\sigma^{\mu\nu}$ satisface el

sistema de (EDP) de primer orden (o identidad de Jacobi) (1.21) para las coordenadas x^α , que en términos de la expresión $\omega_{\nu\mu}$ queda escrita como (ver en [13])

$$\frac{\partial\omega_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial\omega_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial\omega_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} = 0. \quad (1.27)$$

En general, una *variedad simpléctica*, es un espacio que poseé un tensor $\omega_{\mu\nu}$, que es antisimétrico $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$, invertible ($\det \omega_{\mu\nu} \neq 0$) y que satisface la expresión (1.27). En particular, el espacio fase es una *variedad simpléctica*, porque de la expresión (1.26), se tiene $\det \sigma^{\alpha\beta} = 1$ y

$$(\omega_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

La expresión (1.28), permite afirmar que $(\omega_{\alpha\beta})$ es antisimétrica con $\det \omega_{\alpha\beta} = 1$ y trivialmente satisface la expresión (1.27).

En general, las tres condiciones que caracterizan (o definen a) una variedad simpléctica, que tiene por tensor a $\omega_{\mu\nu}$, definen una estructura simpléctica ($\sigma^{\mu\nu}$), debido a que el primero es el inverso del segundo y viceversa, i.e., $\sigma^{\mu\nu}\omega_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu$. Además, la operación de paréntesis de Poisson entre funciones diferenciables de las coordenadas $x^\alpha(q^i, p_i)$ (1.24), fue establecido en términos del tensor de estructura simpléctica, así que, cualquier variedad simpléctica tiene asociada la operación $\{, \}$ de paréntesis de Poisson, justamente por medio de la relación entre los tensores antes citados.

En términos generales, el corchete $\{, \}$ entre funciones asociado a una variedad simpléctica, satisface las propiedades (1–4) de una variedad de Poisson (ver en [2,10,13]), es por ello, que la operación $\{, \}$ es un paréntesis de Poisson, otra manera de decir esto último es que, toda variedad simpléctica es una variedad de Poisson, que se caracteriza por tener un tensor $\omega_{\mu\nu}$ que es no degenerado ($\det \omega_{\mu\nu} \neq 0$), sin embargo, el recíproco no siempre se cumple, ya que el paréntesis de Poisson sobre una variedad de Poisson se define en términos del tensor $J^{\mu\nu}$ que en algunos casos suele ser degenerado (ver en [14]).

1.3. La descripción de sistemas no holónomos

La configuración de un sistema no holónomo que se especifique por n coordenadas q^1, \dots, q^n y que posea m ecuaciones de restricción de la forma (1.1), tendrá $(n - m)$ grados de libertad.

Una manera de llegar a deducir las ecuaciones de movimiento de un sistema mecánico no holónomo, es a través de desplazamientos virtuales. Un desplazamiento virtual (infinitesimal) de un sistema, es el cambio de configuración de éste a consecuencia de una variación infinitesimal de las coordenadas δq^i , compatible con las fuerzas y ligaduras impuestas al sistema en el instante dado t (ver en [2]).

Por ejemplo, en lugar de considerar un sistema mecánico sujeto a m ecuaciones de constricción (1.1), mejor se considera sujeto a fuerzas externas adicionales, denotadas por Q'_k (con $k = 1, \dots, n$), donde físicamente estas fuerzas están generando el mismo efecto que realizaban las propias ligaduras, i.e., mantener invariado el movimiento del sistema mecánico. Por lo que las cantidades Q'_k reciben el nombre de *fuerzas de constricción generalizadas*.

Al suponer que las fuerzas de constricción Q'_k no realizan trabajo a lo largo de los desplazamientos virtuales δq^i , se debe cumplir que

$$\sum_{i=1}^n Q'_i \delta q^i = 0, \quad (1.29)$$

pero los desplazamientos virtuales δq^i , no son independientes, ya que deben satisfacer las ecuaciones de constricción (1.1) en un instante de tiempo fijo t , i.e.,

$$\sum_{i=1}^n A_{ji} \delta q^i = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (1.30)$$

A Lagrange se le ocurrió un método para convertir éste problema en uno de desplazamientos o variaciones independientes a través del método llamado *multiplicadores de Lagrange*. El método se describe a continuación.

Al ser válidas las expresiones (1.30) junto con los coeficientes $A_{ji} \neq 0$, se multiplica (ambos lados) por un factor λ_j llamado *multiplicador de Lagrange*, el cual es función de las coordenadas q^i y posiblemente el tiempo t , esto es

$$\lambda_j \sum_{i=1}^n A_{ji} \delta q^i = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (1.31)$$

Si se sustrae de la expresión (1.29) la suma de las m expresiones indicadas en (1.31), éste paso es válido, ya que no se modifica la hipótesis de haber supuesto, igual a cero el trabajo realizado por las fuerzas de constricción, porque lo que se esta restando al final es un cero, pero en forma de suma, cuyos términos individuales han sido supuestos distintos de cero. Luego, al intercambiar el orden de la suma, se obtiene

$$\sum_{i=1}^n \left(Q'_i - \sum_{j=1}^m \lambda_j A_{ji} \right) \delta q^i = 0. \quad (1.32)$$

Hasta este momento, los multiplicadores de Lagrange han sido considerados arbitrarios, además se debe tener en mente que los δq^i satisfacen las ecuaciones de restricción (1.30), i.e., no son independientes.

Si los valores de los multiplicadores de Lagrange λ_j son elegidos, tales que

$$Q'_i = \sum_{j=1}^m \lambda_j A_{ji}, \quad (1.33)$$

entonces, los coeficientes de los desplazamientos δq^i , expresados en (1.32) son iguales a cero, con estos valores asignados para las fuerzas de constricción se vuelve válida la expresión (1.32) para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales δq^i , finalmente esto afirma que las variaciones de las coordenadas δq^i son independientes.

Desde el punto de vista físico, se ha traducido en un problema donde las variaciones en las coordenadas δq^i son independientes (y no violan las constricciones porque ya no existen). Esto significa que se tiene un sistema mecánico holónimo sujeto a fuerzas externas adicionales (fuerzas de constricción generalizadas) por lo tanto, pueden ser usadas las ecuaciones de Lagrange para sistemas holónomos añadiendo las fuerzas de constricción Q'_i , esto es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = Q'_i.$$

Tomando en cuenta la expresión (1.33) en la ecuación anterior, la evolución de un sistema mecánico no holónimo con m ecuaciones de restricción de la forma (1.1), se determina por la llamada *forma estándar* de las ecuaciones de Lagrange para sistemas no holónomos, que se escribe como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \sum_{j=1}^m \lambda_j A_{ji} \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.34)$$

La expresión (1.34) es un sistema de EDOs de segundo orden, que desde el punto de vista matemático se puede ver como un sistema de n ecuaciones con $n+m$ incógnitas (las n coordenadas q^i y los m multiplicadores de Lagrange λ_j). Al incorporar las m ecuaciones de constricción expresadas en (1.2), se forma un sistema consistente, i.e., un sistema de $n+m$ ecuaciones con $n+m$ incógnitas, por lo tanto, el sistema tiene solución.

Bajo esta perspectiva, no solamente se obtiene la evolución del sistema mecánico, sino que además se obtiene a los m multiplicadores de Lagrange $\lambda_j(t)$ como parte de la solución. El significado físico asociado a estas expresiones $\lambda_j(t)$, es que expresan las fuerzas de ligadura aplicadas a

el sistema mecánico (por un agente externo), ya que son las fuerzas aplicadas al sistema para que se satisfagan las ecuaciones de constrictión.

Si las relaciones de constrictión para un problema se dan en forma diferencial (1.1) o (1.2), pueden incorporarse directamente a las ecuaciones de Lagrange usando los multiplicadores indeterminados de Lagrange a través de la forma estándar de las ecuaciones de Lagrange para un sistema no holónomo (1.34).

Por otra parte, la forma estándar de las ecuaciones de Lagrange para sistemas no holónomos, puede ser aplicado a sistemas con ecuaciones de ligadura holónomas expresadas por (1.4), cuando se desea conocer las fuerzas de constrictión Q'_i o cuando se desea reducir las coordenadas q a independientes (ver en [2,4,6]).

1.4. El Patín de hielo

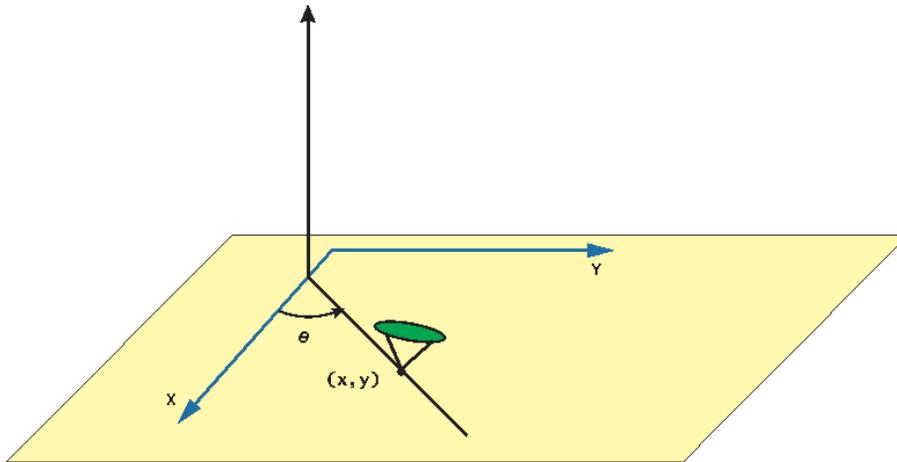


Figura 1.1: El patín de hielo.

La manera de modelar este problema es la siguiente. Se toma un sistema de coordenadas cartesianas $x-y$, fijo a una superficie (de hielo). Se considera el *patín de hielo* como una varilla delgada en contacto con esta superficie. La configuración de este sistema mecánico, se determina a través del centro de masa de la varilla, considerado como el punto en contacto con la superficie (hielo), y caracterizado por las coordenadas (x, y) , además es necesario conocer la orientación de la varilla, con respecto a los ejes coordenados $x-y$, para ello se considera un eje que pasa a través del centro de masa y respecto a este eje la rotación queda caracterizada por un ángulo, θ . El espacio de configuraciones Q para el *patín de hielo* queda descrito por las coordenadas $Q = (q^1, q^2, q^3) = (x, y, \theta)$, donde las dos primeras denotan la posición del punto de contacto en el plano $x-y$ y θ la orientación de la varilla respecto al eje x (ver en [5] y [7]). El Lagrangiano para el patín de hielo, se establece como la energía total del sistema (energía cinética de traslación más energía cinética de rotación), que es (ver en [5])

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2, \quad (1.35)$$

donde m es masa de la varilla y J es el momento de inercia del *patín* respecto a al eje que pasa a través del punto de contacto (o centro de masa). Este sistema tiene como ecuación de constrictión a (ver en [5,7,8,15,16]),

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0. \quad (1.36)$$

De acuerdo a la forma general para una ecuación de constricción en términos de las velocidades \dot{q}^i , dada en (1.2), se puede identificar a $A_{11} = \sin \theta$, $A_{12} = -\cos \theta$, $A_{13} = 0$ y $B_{1t} = 0$. De acuerdo a las condiciones expresadas en (1.3), se trata de una ecuación de constricción no holónoma, ya que, en particular se tiene

$$0 = \frac{\partial A_{13}}{\partial x} \neq \frac{\partial A_{11}}{\partial \theta} = \cos \theta.$$

Por el método de los multiplicadores de Lagrange, asociado a la ecuación de constricción (1.36), se tiene un multiplicador de Lagrange λ , que se incorpora a las ecuaciones de Lagrange para sistemas no holónomos (1.34), quedando escritas como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= \lambda A_{11}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} &= \lambda A_{12}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \lambda A_{13}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Por inspección se puede notar que las coordenadas x, y, θ , no aparecen explícitamente en el Lagrangiano para el patín de hielo (1.35), i.e., son *coordenadas ignorables*. Si se toma en consideración $m = 1$, $J = 1$, entonces las ecuaciones de movimiento (1.37), quedan escritas como

$$\ddot{x} = \lambda \sin \theta, \quad \ddot{y} = -\lambda \cos \theta, \quad \ddot{\theta} = 0, \quad (1.38)$$

donde λ representa la fuerza de constricción para este sistema. Las expresiones (1.36) y (1.38) representan un sistema completo de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas (x, y, θ, λ) .

Al combinar las ecuaciones de movimiento (1.38) con la ecuación de restricción (1.36), se halla el multiplicador de Lagrange en términos de q^i , \dot{q}^i y t (con $i = 1, 2, 3$) para ilustrar este hecho, se toma la derivada con respecto al tiempo de la ecuación de constricción (1.36) y se hace uso también de las ecuaciones de movimiento (1.38), resultando

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{x} \sin \theta + \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta - \ddot{y} \cos \theta + \dot{y} \dot{\theta} \sin \theta \\ &= (\lambda \sin \theta) \sin \theta + \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta - (-\lambda \cos \theta) \cos \theta + \dot{y} \dot{\theta} \sin \theta \\ &= \lambda(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + \dot{\theta}(\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta) \\ &= \lambda + \dot{\theta}(\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta) \\ \Rightarrow \lambda &= -\dot{\theta}(\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta). \end{aligned} \quad (1.39)$$

Al sustituir el valor de $\lambda = -\dot{\theta}(\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta)$, en las ecuaciones de movimiento (1.38), éstas quedan escritas como

$$\ddot{x} = -\dot{\theta} \sin \theta (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta), \quad \ddot{y} = \dot{\theta} \cos \theta (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta), \quad \ddot{\theta} = 0. \quad (1.40)$$

El sistema de EDOs de segundo orden obtenido en (1.40), es llamado de acuerdo a [8], *sistema asociado de segundo orden* para las ecuaciones de movimiento del patín de hielo. Ahora, el sistema de EDOs de segundo orden (1.40) será transformado en un sistema de EDOs de primer orden donde queda incluida la ecuación de constricción (1.36), para ilustrar este hecho, se realiza lo siguiente.

Se despeja \dot{y} de la expresión (1.36) y resulta $\dot{y} = \frac{\dot{x} \sin \theta}{\cos \theta} = \dot{x} \sec \theta \sin \theta$, si se introduce $v = \dot{x} \sec \theta$, el despeje inicial queda escrito como $\dot{y} = v \sin \theta$. Una manera alterna de escribir la ecuación de movimiento angular, expresada en (1.40), es introduciendo $\omega = \dot{\theta}$, con lo que la ecuación de movimiento $\ddot{\theta} = 0$ queda escrita como $\dot{\omega} = 0$. Ahora tomando en cuenta las ecuaciones de movimiento (1.40), se muestra que la derivada respecto al tiempo de v resulta

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\dot{x} \sec \theta)}{dt} = \ddot{x} \sec \theta + \dot{x} \dot{\theta} \sec \theta \tan \theta,$$

$$\begin{aligned}
 &= -\dot{\theta} \sec \theta \sin \theta (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta) + \dot{x} \dot{\theta} \sec \theta \tan \theta, \\
 &= \dot{\theta} \dot{x} \sec \theta (\tan \theta - \sin \theta \cos \theta) - \dot{\theta} \dot{y} \sec \theta \sin^2 \theta, \\
 &= \dot{\theta} \dot{x} \sec \theta \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \sin \theta \cos \theta \right) - \dot{\theta} \dot{y} \sec \theta \sin^2 \theta, \\
 &= \omega v \cos \theta \sec \theta \sin \theta \left(\frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta} \right) - \omega v \sin \theta \sec \theta \sin^2 \theta, \\
 &= \omega v \sec \theta \sin^3 \theta - \omega v \sec \theta \sin^3 \theta = 0.
 \end{aligned} \tag{1.41}$$

Al conjuntar las ecuaciones diferenciales de primer orden obtenidas en el párrafo anterior, junto con la obtenida en (1.41), se obtiene

$$\dot{x} = v \cos \theta, \quad \dot{y} = v \sin \theta, \quad \dot{\theta} = \omega, \quad \dot{\omega} = 0, \quad \dot{v} = 0. \tag{1.42}$$

El sistema de EDOs de primer orden expresado en (1.42), es un sistema de EDOs de primer orden autónomo (donde queda incluida la ecuación de restricción $\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0$), que esta asociado al sistema de EDOs de segundo orden, hallado en (1.40) y a partir de ahora será considerado como el sistema de ecuaciones de movimiento para el patín de hielo. Además, (1.42) aparece como un sistema de EDOs de primer orden acoplado (o vinculado), donde del lado izquierdo aparecen las derivadas respecto al tiempo de $(x, y, \theta, \omega, v)$, mientras que del lado derecho solamente aparecen funciones en términos de éstas variables (ver en [17]).

1.5. Partícula en un espacio de tres dimensiones

Este problema trata de una partícula puntual de masa m que se mueve en el espacio Euclideo de tres dimensiones bajo la acción de un potencial V , que es *constante*. En particular, se considera una partícula de masa $m = 1$, cuya configuración queda determinada por sus tres coordenadas cartesianas $(q^1, q^2, q^3) = (x, y, z)$ y cuyo espacio de configuraciones es denotado por Q . Si en particular se elige como potencial constante a $V = 0$, el Lagrangiano de *partícula en el espacio de tres dimensiones*, en coordenadas cartesianas solamente es la energía cinética, i.e.,

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \tag{1.43}$$

además, el problema se considera sujeto a una ecuación de constricción (no holónoma), dada por (ver en [5,8,15,16])

$$x\dot{y} + \dot{z} = 0. \tag{1.44}$$

Al realizar la comparación de la expresión (1.44) con la expresión general de una ecuación de constricción que ha sido dada en términos de las velocidades \dot{q}^i (1.2), se identifica a : $A_{11} = 0$, $A_{12} = x$, $A_{13} = 1$ y $B_{1t} = 0$. Y para comprobar que efectivamente, se trata de una constricción no holónoma, se muestra que no se cumplen con las condiciones expresadas en (1.3), ya que en particular,

$$1 = \frac{\partial A_{12}}{\partial x} \neq \frac{\partial A_{11}}{\partial y} = 0.$$

Al detectar la presencia de una única ecuación de constricción no holónoma (1.44), se asocia un multiplicador de Lagrange λ . Así que las ecuaciones de movimiento (1.34) para este sistema son

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= \lambda A_{11}, \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} &= \lambda A_{12}, \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} &= \lambda A_{13}.
 \end{aligned} \tag{1.45}$$

Por inspección se puede notar que las coordenadas x, y, z son *coordenadas ignorables* en el Lagrangiano de *partícula en el espacio de tres dimensiones* (1.43), por lo que las ecuaciones de movimiento (1.45) se pueden escribir como

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = \lambda x, \quad \ddot{z} = \lambda. \quad (1.46)$$

Las expresiones (1.44) y (1.46) representan un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas (x, y, z, λ) . Al combinar las ecuaciones de movimiento (1.46) con la ecuación de restricción (1.44), se encuentra el multiplicador de Lagrange en términos de q^i , \dot{q}^i y t (con $i = 1, 2, 3$) para ilustrar este hecho, se toma la derivada con respecto al tiempo de la ecuación de restricción (1.44) y se hace uso también de las ecuaciones de movimiento (1.46), resultando

$$\begin{aligned} 0 &= x\ddot{y} + \dot{x}\dot{y} + \ddot{z} = x(\lambda x) + \dot{x}\dot{y} + \lambda = \lambda(1 + x^2) + \dot{x}\dot{y}, \\ \lambda &= -\frac{\dot{x}\dot{y}}{(1 + x^2)}, \end{aligned} \quad (1.47)$$

recordando que λ es un multiplicador de Lagrange y está asociado con la fuerza de restricción. Con el valor hallado de λ , expresado en (1.47), se sustituye en las ecuaciones de movimiento obtenidas en (1.46), resultando

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -\frac{\dot{x}\dot{y}x}{(1 + x^2)}, \quad \ddot{z} = -\frac{\dot{x}\dot{y}}{(1 + x^2)}. \quad (1.48)$$

El sistema de EDOs de segundo orden obtenido en (1.48), es lo que en [8] llaman *sistema asociado de segundo orden* para las ecuaciones de movimiento de partícula en el espacio de tres dimensiones. Ahora, el sistema de EDOs de segundo orden (1.48) será transformado en un sistema de EDOs de primer orden donde queda incluida la ecuación de restricción (1.36), para ilustrar este hecho, se realiza lo siguiente.

Se introducen las velocidades en x y y de la partícula como $v_x = \dot{x}$ y $v_y = \dot{y}$ respectivamente. Luego, al despejar \dot{z} de la ecuación de restricción (1.44), tomando en cuenta los cambios de variables realizados, se encuentra que $\dot{z} = -xv_y$. Con ello, la primera ecuación de movimiento en (1.48), se escribe como $\dot{v}_x = \ddot{x} = 0$, luego la segunda ecuación de movimiento se puede escribir como $\dot{v}_y = \ddot{y} = -\frac{\dot{x}\dot{y}x}{(1 + x^2)}$.

Al conjuntar las ecuaciones diferenciales de primer orden obtenidas en el párrafo anterior, se obtiene

$$\dot{x} = v_x, \quad \dot{y} = v_y, \quad \dot{z} = -xv_y, \quad \dot{v}_x = 0, \quad \dot{v}_y = -\frac{xv_xv_y}{1 + x^2}. \quad (1.49)$$

El sistema de EDOs de primer orden expresado en (1.49), es un sistema de EDOs de primer orden autónomo (donde queda incluida la ecuación de restricción $x\dot{y} + \dot{z} = 0$) y está asociado al sistema de EDOs de segundo orden, hallado en (1.48). Ahora, las expresiones resultantes en (1.49), serán consideradas como las ecuaciones de movimiento para el problema de partícula en el espacio de tres dimensiones. Además, (1.49) aparece como un sistema de EDOs de primer orden acoplado (o vinculado), donde del lado izquierdo aparecen las derivadas respecto al tiempo de (x, y, z, v_x, v_y) , mientras que del lado derecho solamente aparecen funciones en términos de éstas variables (ver en [17]).

Capítulo 2

La construcción de las estructuras de Poisson

En este momento es conveniente realizar una recapitulación, destacando que el objetivo de este trabajo de tesis es darle una estructura de paréntesis de Poisson a las ecuaciones de movimiento que caracterizan a un sistema mecánico no holónomo.

Un sistema mecánico no holónomo con m ecuaciones de restricción (no integrables) dadas en términos de las velocidades q^i , es representado por las expresiones (1.2), en particular, para los sistemas mecánicos tratados aquí, $B_{jt} = 0$, resultando expresiones de la forma $A_{ji}\dot{q}^i = 0$ (con $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m$).

Las ecuaciones de movimiento de los sistemas mecánicos con constricciones no holónomas, son representadas por un sistema de EDOs de segundo orden, de la forma

$$\ddot{q}^i = F^i(\dot{q}^k, q^k, t, \lambda_1, \dots, \lambda_m), \quad (2.1)$$

con $(k = 1, \dots, n)$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ son los multiplicadores de Lagrange. Al combinarse las ecuaciones de constricción con las ecuaciones de movimiento (2.1), los multiplicadores de Lagrange son hallados en términos de las coordenadas q^j , las velocidades \dot{q}^j y el tiempo t , permitiendo escribir las ecuaciones de movimiento como un sistema de EDOs de segundo orden de la forma

$$\ddot{q}^i = G^i(\dot{q}^k, q^k, t), \quad (2.2)$$

de acuerdo a [8], el sistema de EDOs resultante en (2.2), se llama *sistema asociado de segundo orden*. Este sistema de EDOs de segundo orden, representa a las ecuaciones de movimiento del sistema mecánico y se transforma, en un sistema de EDOs de primer orden, en términos del tiempo y de variables que son funciones de las coordenadas, donde quedan incluidas las ecuaciones de constricción, formándose lo que en teoría de ecuaciones diferenciales, se conoce como un sistema de EDOs de primer orden *no autónomo*, i.e.,

$$\dot{r}^\alpha = f^\alpha(r^\beta, t), \quad \alpha, \beta, \dots = 1, 2, \dots, 2n - m. \quad (2.3)$$

En la expresión (2.3) es importante señalar que el número $2n - m$ queda determinada por el número m , que representa el número de ecuaciones de constricción del sistema.

Ahora, las ecuaciones diferenciales de primer orden, expresadas en (2.3), se convierten en nuestras ecuaciones de movimiento y conviene preguntarse, ¿si en algún contexto, es posible escribir a (2.3), bajo una operación de paréntesis de Poisson ?.

La respuesta a la pregunta planteada, es afirmativa y dicha respuesta viene fundamentada en la geometría de Poisson. Lo primero, es tomar en cuenta que la solución general del sistema de EDOs de primer orden (2.3), debe contener $2n - m$ constantes de integración (o de movimiento),

independientes entre si, en función de r^α y t . Si estas $2n - m$ constantes se etiquetan como C^β , en general, las variables r^α , se escriben como $r^\alpha = r^\alpha(r^\beta, C^\alpha, t)$.

Las expresiones r^α son elegidas como las coordenadas de un espacio (o variedad) llamada *variedad de Poisson* y el paréntesis de Poisson se establece como en la expresión (1.19). Luego, la evolución de las coordenadas r^ν sobre este espacio, de acuerdo a (1.23) se obtiene como $\dot{r}^\mu = \{r^\mu, H\} = J^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial r^\nu}$, donde una constante de movimiento en términos de las coordenadas de esta variedad es usada como Hamiltoniano H , pero de la expresión (2.3), \dot{r}^μ son las ecuaciones de movimiento para el sistema mecánico. Por lo tanto, en esta perspectiva se dota de una estructura de paréntesis de Poisson al sistema de EDOs de primer orden (2.3). Por analogía con el espacio fase, las coordenadas de una variedad de Poisson, r^μ pueden ser consideradas *coordenadas canónicas* de la misma variedad.

El paréntesis de Poisson satisface las propiedades (1–4) de una variedad de Poisson. En particular, la identidad de Jacobi entre funciones diferenciables de las coordenadas r^μ , se satisface si y solo si las coordenadas mismas la satisfacen, lográndose escribir como el sistema de EDPs (1.21). Así que la misión en nuestros problemas se reduce a hallar las componentes $J^{\mu\nu}$ en términos de las coordenadas r^μ , tales que simultáneamente satisfagan la expresión (1.21) y la expresión (1.23), para tener un paréntesis de Poisson (ver en [10, 11, 12, 14]).

En particular, para nuestros sistemas mecánicos con una constricción no holónoma, la operación de corchetes, tiene lugar en una variedad de Poisson de dimensión $d = 2n - m = 5$. Por ser las componentes de la matriz de Poisson $J^{\mu\nu} = \{r^\mu, r^\nu\}$ el paréntesis de Poisson entre las coordenadas r^θ (ver la expresión (1.23)), debe ser antisimétrica y satisfacer el siguiente sistema de EDPs de primer orden :

$$J^{\rho 1} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 2} \frac{\partial J^{31}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 3} \frac{\partial J^{12}}{\partial r^\rho} = 0, \quad (2.4)$$

$$J^{\rho 1} \frac{\partial J^{24}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 2} \frac{\partial J^{41}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 4} \frac{\partial J^{12}}{\partial r^\rho} = 0, \quad (2.5)$$

$$J^{\rho 1} \frac{\partial J^{25}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 2} \frac{\partial J^{51}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 5} \frac{\partial J^{12}}{\partial r^\rho} = 0, \quad (2.6)$$

$$J^{\rho 1} \frac{\partial J^{34}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 3} \frac{\partial J^{41}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 4} \frac{\partial J^{13}}{\partial r^\rho} = 0, \quad (2.7)$$

$$J^{\rho 1} \frac{\partial J^{35}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 3} \frac{\partial J^{51}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 5} \frac{\partial J^{13}}{\partial r^\rho} = 0, \quad (2.8)$$

$$J^{\rho 1} \frac{\partial J^{45}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 4} \frac{\partial J^{51}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 5} \frac{\partial J^{14}}{\partial r^\rho} = 0, \quad (2.9)$$

$$J^{\rho 2} \frac{\partial J^{34}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 3} \frac{\partial J^{42}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 4} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^\rho} = 0, \quad (2.10)$$

$$J^{\rho 2} \frac{\partial J^{35}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 3} \frac{\partial J^{52}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 5} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^\rho} = 0, \quad (2.11)$$

$$J^{\rho 2} \frac{\partial J^{54}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 4} \frac{\partial J^{25}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 5} \frac{\partial J^{42}}{\partial r^\rho} = 0, \quad (2.12)$$

$$J^{\rho 3} \frac{\partial J^{45}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 4} \frac{\partial J^{53}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 5} \frac{\partial J^{34}}{\partial r^\rho} = 0. \quad (2.13)$$

2.1. Una estructura de Poisson para el patín de hielo

El sistema de EDOs de primer orden que incluye a la ecuación de restricción no holónoma (1.36), en el problema del *patín de hielo*, quedó expresado en (1.42) como

$$\dot{x} = v \cos \theta, \quad \dot{y} = v \sin \theta, \quad \dot{\theta} = \omega, \quad \dot{\omega} = 0, \quad \dot{v} = 0.$$

Las expresiones $\dot{v} = 0$ y $\dot{\omega} = 0$, del sistema de EDOs de primer orden (1.42), afirman que v y ω son constantes movimiento, por ejemplo, $v = a_1$ y $\omega = a_3$. Luego, de la tercera ecuación de (1.42), se tiene que $\dot{\theta} = \omega = a_3$ y al integrar respecto al tiempo resulta $\theta = a_3 t + b_3$, con b_3 también una constante de movimiento (o de integración). Cuando se sustituyen los valores $v = a_1$ y $\theta = a_3 t + b_3$, en la segunda expresión de (1.42), resulta, $\dot{y} = v \sin \theta = a_1 \sin(a_3 t + b_3)$, luego, utilizando el método de separación de variables e integrando ambos lados, se obtiene

$$y = \frac{a_1}{a_3} \cos(a_3 t + b_3) + b_2 = \frac{a_1}{a_3} \cos \theta + b_2, \quad (2.14)$$

siendo b_2 también una constante respecto a t . Finalmente, la primera expresión de (1.42), se escribe como $\dot{x} = v \cos \theta = a_1 \cos(a_3 t + b_3)$, de esta manera, separando variables e integrando ambos lados, resulta

$$x = \frac{a_1}{a_3} \sin(a_3 t + b_3) + a_2 = \frac{a_1}{a_3} \sin \theta + a_2, \quad (2.15)$$

siendo nuevamente a_2 una constante respecto a t . Al ordenar las soluciones del sistema de EDOs de primer orden (1.42), en términos del conjunto de constantes de movimiento $(a_1, a_2, a_3, b_2, b_3)$, resulta

$$\begin{aligned} a_1 &= v, & a_2 &= x - \frac{v}{\omega} \sin \theta, & a_3 &= \omega, \\ b_2 &= y + \frac{v}{\omega} \cos \theta, & b_3 &= \theta - \omega t \end{aligned} \quad (2.16)$$

Para construir la estructura de Poisson para este problema, es necesario, establecer las coordenadas de la variedad. Por ejemplo, se eligen : $r^\mu = (r^1, r^2, r^3, r^4, r^5) = (\theta, x - \frac{v}{\omega} \sin \theta, v, y + \frac{v}{\omega} \cos \theta, \omega)$ y de acuerdo a este sistema de coordenadas r^μ , las ecuaciones de movimiento (o el sistema de EDOs de primer orden expresado en (1.42)), en términos de estas mismas coordenadas, se escriben como

$$\dot{r}^1 = r^5, \quad \dot{r}^2 = 0, \quad \dot{r}^3 = 0, \quad \dot{r}^4 = 0, \quad \dot{r}^5 = 0. \quad (2.17)$$

Tomando en cuenta las ecuaciones de movimiento (2.17), se puede observar que la derivada temporal de la expresión $\frac{1}{2} \left[(r^2)^2 + (r^3)^2 + (r^4)^2 + (r^5)^2 \right]$ es igual a cero (o una constante de movimiento), entonces se elige como Hamiltoniano, i.e., $H = \frac{1}{2} \left[(r^2)^2 + (r^3)^2 + (r^4)^2 + (r^5)^2 \right]$. Luego, utilizando la antisimetría de $J^{\mu\nu}$, se escriben las ecuaciones de movimiento (2.17) en la forma (1.23), resultando

$$\begin{aligned} \dot{r}^1 &= r^5 = J^{12} r^2 & + J^{13} r^3 & + J^{14} r^4 & + J^{15} r^5, \\ \dot{r}^2 &= 0 = & + J^{23} r^3 & + J^{24} r^4 & + J^{25} r^5, \\ \dot{r}^3 &= 0 = J^{32} r^2 & + & + J^{34} r^4 & + J^{35} r^5, \\ \dot{r}^4 &= 0 = J^{42} r^2 & + J^{43} r^3 & & + J^{45} r^5, \\ \dot{r}^5 &= 0 = J^{52} r^2 & + J^{53} r^3 & + J^{54} r^4. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Ahora, lo que sigue es asignar valores a cada entrada matricial de $J^{\mu\nu}$ (ya sean constantes o en términos de las coordenadas r^ρ), tales que simultáneamente satisfagan las ecuaciones de movimiento (2.18) y el sistema de EDPs de primer orden (2.4)–(2.13). Por ejemplo, cuando se eligen los valores: $J^{12} = 0$, $J^{13} = 0$, $J^{14} = 0$ y $J^{15} = 1$, se satisface la primera ecuación del sistema (2.18) y al sustituirlos en la expresión (2.4), tomando en cuenta la antisimetría de $J^{\mu\nu}$, resulta

$$\begin{aligned} 0 &= J^{\rho 1} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 2} \frac{\partial J^{34}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 3} \frac{\partial J^{45}}{\partial r^\rho}, \\ &= J^{41} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^1} + J^{21} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^2} + J^{31} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^3} + J^{41} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^4} + J^{51} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^5}, \\ &= -\frac{\partial J^{23}}{\partial r^5}, \quad \Rightarrow \quad J^{23} = J^{23}(r^1, r^2, r^3, r^4), \end{aligned} \quad (2.19)$$

CAPÍTULO 2. LA CONSTRUCCIÓN DE LAS ESTRUCTURAS DE POISSON
2.1. UNA ESTRUCTURA DE POISSON PARA EL PATÍN DE HIELO

volviendo a utilizar los valores $J^{12} = 0$, $J^{13} = 0$, $J^{14} = 0$ y $J^{15} = 1$, ahora en la expresión (2.5), se obtiene

$$\begin{aligned}
 0 &= J^{\rho 1} \frac{\partial J^{24}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 2} \frac{\partial J^{44}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 4} \frac{\partial J^{14}}{\partial r^\rho}, \\
 &= J^{41} \frac{\partial J^{24}}{\partial r^1} + J^{24} \frac{\partial J^{24}}{\partial r^2} + J^{34} \frac{\partial J^{24}}{\partial r^3} + J^{44} \frac{\partial J^{24}}{\partial r^4} + J^{51} \frac{\partial J^{24}}{\partial r^5}, \\
 &= -\frac{\partial J^{24}}{\partial r^5}, \quad \Rightarrow \quad J^{24} = J^{24}(r^1, r^2, r^3, r^4), \tag{2.20}
 \end{aligned}$$

nuevamente utilizando los valores $J^{12} = 0$, $J^{13} = 0$, $J^{14} = 0$ y $J^{15} = 1$, esta vez en la expresión (2.6), resulta

$$\begin{aligned}
 0 &= J^{\rho 1} \frac{\partial J^{25}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 2} \frac{\partial J^{54}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 5} \frac{\partial J^{14}}{\partial r^\rho}, \\
 &= J^{41} \frac{\partial J^{25}}{\partial r^1} + J^{24} \frac{\partial J^{25}}{\partial r^2} + J^{34} \frac{\partial J^{25}}{\partial r^3} + J^{44} \frac{\partial J^{25}}{\partial r^4} + J^{51} \frac{\partial J^{25}}{\partial r^5}, \\
 &= -\frac{\partial J^{25}}{\partial r^5} = 0, \quad \Rightarrow \quad J^{25} = J^{25}(r^1, r^2, r^3, r^4). \tag{2.21}
 \end{aligned}$$

Una manera de satisfacer la dependencia funcional expresada en (2.19)–(2.21), es eligiendo los valores $J^{23} = 1/(r^2 r^3)$, $J^{24} = -1/(r^2 r^4)$ y $J^{25} = 0$, porque también satisfacen la segunda ecuación diferencial del sistema (2.18) i.e., $\dot{i}^2 = 0$.

Mientras tanto, volviendo a tomar en cuenta los valores $J^{12} = 0$, $J^{13} = 0$, $J^{14} = 0$ y $J^{15} = 1$, ahora en la expresión (2.7), se obtiene

$$\begin{aligned}
 0 &= J^{\rho 1} \frac{\partial J^{34}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 3} \frac{\partial J^{44}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 4} \frac{\partial J^{14}}{\partial r^\rho}, \\
 &= J^{41} \frac{\partial J^{34}}{\partial r^1} + J^{24} \frac{\partial J^{34}}{\partial r^2} + J^{34} \frac{\partial J^{34}}{\partial r^3} + J^{44} \frac{\partial J^{34}}{\partial r^4} + J^{51} \frac{\partial J^{34}}{\partial r^5}, \\
 &= -\frac{\partial J^{34}}{\partial r^5}, \quad \Rightarrow \quad J^{34} = J^{34}(r^1, r^2, r^3, r^4), \tag{2.22}
 \end{aligned}$$

posteriormente, al usar el valor $J^{23} = -1/(r^2 r^3)$ en la tercera ecuación del sistema (2.18), se obtiene

$$\begin{aligned}
 0 &= \dot{i}^3, \\
 &= -J^{23} r^2 + J^{34} r^4 + J^{35} r^5, \\
 &= -\frac{r^2}{r^2 r^3} + J^{34} r^4 + J^{35} r^5, \\
 &= -\frac{1}{r^3} + J^{34} r^4 + J^{35} r^5.
 \end{aligned}$$

Al elegir los valores de $J^{34} = 1/(r^3 r^4)$ y $J^{35} = 0$ se satisface la tercera ecuación del sistema (2.18), i.e., $\dot{i}^3 = 0$ junto con la dependencia funcional de J^{34} expresada en (2.22).

Con los valores elegidos para $J^{13} = 0$, $J^{15} = 1$ y $J^{35} = 0$, la expresión (2.8) se satisface inmediatamente, esto es

$$J^{\rho 1} \frac{\partial J^{35}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 3} \frac{\partial J^{54}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 5} \frac{\partial J^{14}}{\partial r^\rho} = 0.$$

Usando una vez más los valores $J^{12} = 0$, $J^{13} = 0$, $J^{14} = 0$ y $J^{15} = 1$, ahora en la expresión (2.9), resulta

$$0 = J^{\rho 1} \frac{\partial J^{45}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 4} \frac{\partial J^{54}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 5} \frac{\partial J^{14}}{\partial r^\rho},$$

CAPÍTULO 2. LA CONSTRUCCIÓN DE LAS ESTRUCTURAS DE POISSON
2.1. UNA ESTRUCTURA DE POISSON PARA EL PATÍN DE HIELO

$$\begin{aligned}
 &= J^{41} \frac{\partial J^{45}}{\partial r^1} + J^{42} \frac{\partial J^{45}}{\partial r^2} + J^{43} \frac{\partial J^{45}}{\partial r^3} + J^{44} \frac{\partial J^{45}}{\partial r^4} + J^{51} \frac{\partial J^{45}}{\partial r^5}, \\
 &= -\frac{\partial J^{45}}{\partial r^5} = 0, \quad \Rightarrow \quad J^{45} = J^{45}(r^1, r^2, r^3, r^4),
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

sin embargo, cuando se sustituyen los valores asignados para $J^{24} = -1/(r^2 r^4)$ y $J^{34} = 1/(r^3 r^4)$ en la cuarta ecuación del sistema (2.18), se obtiene

$$\begin{aligned}
 0 &= \dot{r}^4 = -J^{24} r^2 - J^{34} r^3 + J^{45} r^5, \\
 &= -\left(-\frac{r^2}{r^2 r^4}\right) - \frac{r^3}{r^3 r^4} + J^{45} r^5, \\
 &= \frac{1}{r^4} - \frac{1}{r^4} + J^{45} r^5 = J^{45} r^5,
 \end{aligned}$$

donde se observa que forzosamente $J^{45} = 0$, valor que corresponde con la dependencia funcional expresada en (2.23). Ahora tomando en cuenta los valores $J^{23} = 1/(r^2 r^3)$, $J^{24} = -1/(r^2 r^4)$ y $J^{34} = 1/(r^3 r^4)$ en la ecuación (2.10) se muestra que la satisfacen, esto es

$$\begin{aligned}
 &J^{\rho 2} \frac{\partial J^{34}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 3} \frac{\partial J^{42}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 4} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^\rho}, \\
 &= J^{32} \frac{\partial J^{34}}{\partial r^3} + J^{42} \frac{\partial J^{34}}{\partial r^4} + J^{23} \frac{\partial J^{42}}{\partial r^2} + J^{43} \frac{\partial J^{42}}{\partial r^4} + J^{24} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^2} + J^{34} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^3}, \\
 &= \left(-\frac{1}{r^2 r^3}\right) \left(-\frac{1}{(r^3)^2 r^4}\right) + \frac{1}{r^2 r^4} \left(-\frac{1}{r^3 (r^4)^2}\right) + \frac{1}{r^2 r^3} \left(-\frac{1}{(r^2)^2 r^4}\right), \\
 &- \frac{1}{r^3 r^4} \left(-\frac{1}{r^2 (r^4)^2}\right) - \frac{1}{r^2 r^4} \left(-\frac{1}{(r^2)^2 r^3}\right) + \frac{1}{r^3 r^4} \left(-\frac{1}{r^2 (r^3)^2}\right), \\
 &= \frac{1}{r^2 (r^3)^3 r^4} - \frac{1}{r^2 r^3 (r^4)^3} - \frac{1}{(r^2)^3 r^3 r^4} + \frac{1}{r^2 r^3 (r^4)^3} + \frac{1}{(r^2)^3 r^3 r^4} - \frac{1}{r^2 (r^3)^3 r^4}, \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Utilizando los valores asignados para $J^{23} = 1/(r^2 r^3)$, $J^{25} = 0$ y $J^{35} = 0$, notése que expresión (2.11) también se satisface, i.e.,

$$\begin{aligned}
 &J^{\rho 2} \frac{\partial J^{35}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 3} \frac{\partial J^{52}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 5} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^\rho}, \\
 &= J^{25} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^2} + J^{35} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^3}, \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

La expresión (2.12) también se cumple al sustituir los valores $J^{24} = -1/(r^2 r^4)$, $J^{25} = 0$ y $J^{45} = 0$ asignados anteriormente, esto es

$$\begin{aligned}
 &J^{\rho 2} \frac{\partial J^{54}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 4} \frac{\partial J^{25}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 5} \frac{\partial J^{42}}{\partial r^\rho}, \\
 &= J^{25} \frac{\partial J^{42}}{\partial r^2} + J^{45} \frac{\partial J^{42}}{\partial r^4}, \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Finalmente, se cumple la expresión (2.13), con los valores $J^{34} = 1/(r^3 r^4)$, $J^{35} = 0$ y $J^{45} = 0$, i.e.,

$$\begin{aligned}
 &J^{\rho 3} \frac{\partial J^{45}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 4} \frac{\partial J^{53}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 5} \frac{\partial J^{34}}{\partial r^\rho}, \\
 &= J^{35} \frac{\partial J^{34}}{\partial r^3} + J^{45} \frac{\partial J^{34}}{\partial r^4}, \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Los valores asignados para la matriz o tensor de Poisson $J^{\mu\nu}$ que verifican las expresiones (2.4)–(2.13), junto con el sistema de ecuaciones de movimiento (2.18) son:

$$\begin{aligned} J^{12} &= 0, & J^{13} &= 0, & J^{14} &= 0, & J^{15} &= 1, \\ J^{23} &= \frac{1}{r^2 r^3}, & J^{24} &= -\frac{1}{r^2 r^4}, & J^{25} &= 0, \\ J^{34} &= \frac{1}{r^3 r^4}, & J^{35} &= 0, & J^{45} &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz de Poisson $J^{\mu\nu}$, para el problema del patín de hielo, es

$$J^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 r^3} & -\frac{1}{r^2 r^4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r^2 r^3} & 0 & \frac{1}{r^3 r^4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2 r^4} & -\frac{1}{r^3 r^4} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

donde $r^\mu = (r^1, r^2, r^3, r^4, r^5) = (\theta, x - \frac{v}{\omega} \sin \theta, v, y + \frac{v}{\omega} \cos \theta, \omega)$ son las coordenadas de la variedad de Poisson y cada entrada matricial $J^{\mu\nu} = \{r^\mu, r^\nu\}$ es el paréntesis de Poisson entre las coordenadas r^μ con $\mu, \nu, \dots = 1, 2, 3, 4, 5$.

Por tratar de establecer una similitud con la dinámica Hamiltoniana de sistemas holónomos, las coordenadas de la variedad de Poisson son etiquetadas de la siguiente manera: $r^\mu = (r^1, r^2, r^3, r^4, r^5) = (q^1, q^2, q^3, p_1, p_2) = (\theta, x - \frac{v}{\omega} \sin \theta, v, y + \frac{v}{\omega} \cos \theta, \omega)$, incluso cualquier otra, i.e., tres momentos p y dos coordenadas q , haciendo referencia a lo que en el contexto de sistemas holónomos se conoce como *coordenadas canónicas*. Sólo es una forma de familiarizar las ecuaciones de movimiento de sistemas mecánicos no holónomos con lo que se conoce para sistemas holónomos, pero sin olvidar que existen aspectos que los diferencian y fueron expuestos anteriormente.

2.2. Una estructura de Poisson para partícula en un espacio de tres dimensiones

El sistema de EDOs de primer orden que incluye a la ecuación de restricción no holónoma (1.44) para el problema de *partícula en un espacio de tres dimensiones* quedó expresado en (1.49) como

$$\dot{x} = v_x, \quad \dot{y} = v_y, \quad \dot{z} = -xv_y, \quad \dot{v}_x = 0, \quad \dot{v}_y = -\frac{xv_x v_y}{1+x^2}.$$

La expresión $v_x = 0$, del sistema de EDOs de primer orden (1.49), afirma que v_x es una constante movimiento, esto es, $v_x = c_1$. Cuando, se sustituye este valor en la primera ecuación de (1.49), se tiene, $\dot{x} = v_x = c_1$ y al integrar ambos lados respecto a t , se obtiene $x = c_1 t + d_1$, con d_1 otra constante de movimiento (o de integración).

Tomando en cuenta los valores hallados para $x = c_1 t + d_1$ y $v_x = c_1$, el lado derecho de la quinta ecuación del sistema de EDOs de primer orden (1.49) es una función de t , v_y y d_1 , lo que la hace una ecuación diferencial separable y usando $dx = c_1 dt$, se obtiene

$$\frac{dv_y}{v_y} = -\frac{xc_1}{1+x^2} dt = -\frac{x \cancel{c_1} dx}{1+x^2 \cancel{c_1}},$$

al integrar ambos lados, resulta $\ln v_y = -\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \ln(c_1 c_2)$ y de acuerdo a las propiedades del *logaritmo natural*, esta última ecuación se expresa como

$$v_y = \frac{c_1 c_2}{\sqrt{1+x^2}}. \quad (2.25)$$

La expresión (2.25) se sustituye en la segunda ecuación diferencial del sistema de EDOs de primer orden (1.49) y se resuelve también por el método de separación de variables, tomando en cuenta la expresión $dx = c_1 dt$, lo cual resulta

$$dy = \frac{c_1 c_2}{\sqrt{1+x^2}} dt = \frac{\mathcal{A} c_2}{\sqrt{1+x^2}} \frac{dx}{\mathcal{A}},$$

al integrar ambos lados, la integración de la función del lado derecho es llevada a cabo con un cambio de variable trigonométrico ($x = \tan \theta$), resultando

$$y = c_2 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + d_2, \quad (2.26)$$

donde d_2 también es una constante de movimiento. Finalmente, con la sustitución de (2.25) en la tercera ecuación diferencial del sistema de EDOs de primer orden (1.49) y utilizando separación de variables junto con $dx = c_1 dt$, resulta

$$dz = -\frac{xc_1 c_2}{\sqrt{1+x^2}} dt = -\frac{x\mathcal{A} c_2}{\sqrt{1+x^2}} \frac{dx}{\mathcal{A}},$$

al integrar ambos lados, la integración de la función del lado derecho se llevó a cabo por el método de sustitución (con $u = 1 + x^2$), resultando

$$z = c_2 \sqrt{1+x^2} + d_3, \quad (2.27)$$

donde d_3 es otra constante de movimiento. Al ordenar las soluciones del sistema de EDOs de primer orden (1.49), en términos del conjunto de constantes de movimiento (c_1, c_2, d_1, d_2, d_3), resulta

$$\begin{aligned} c_1 = v_x, \quad c_2 = \frac{v_y \sqrt{1+x^2}}{v_x}, \quad d_1 = x - v_x t, \\ d_2 = y - \frac{v_y \sqrt{1+x^2}}{v_x} \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \quad d_3 = z + \frac{v_y(1+x^2)}{v_x}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Para construir la estructura de Poisson para este problema, se establecen las coordenadas de la variedad, como: $r^\mu = (r^1, r^2, r^3, r^4, r^5) = (x, d_2, d_3, v_x, c_2)$ y de acuerdo a este sistema de coordenadas, las ecuaciones de movimiento (o el sistema de EDOs de primer expresado en (1.49)), se escriben como

$$\dot{r}^1 = r^4, \quad \dot{r}^2 = 0, \quad \dot{r}^3 = 0, \quad \dot{r}^4 = 0, \quad \dot{r}^5 = 0. \quad (2.29)$$

Tomando en cuenta las ecuaciones de movimiento (2.29), se puede observar que la derivada respecto al tiempo de la expresión $r^2 r^5 - r^3 r^4$ es igual a cero (o una constante de movimiento), que se elige como Hamiltoniano para el sistema de EDOs de primer orden (2.29) i.e., $H = r^2 r^5 - r^3 r^4$. Ahora se escriben las ecuaciones de movimiento (2.29), tomando en cuenta la antisimetría $J^{\mu\nu}$ como en la expresión (1.23), i.e.,

$$\begin{aligned} \dot{r}^1 = r^4 &= J^{12} r^5 + J^{13}(-r^4) + J^{14} r^3 + J^{15} r^2, \\ \dot{r}^2 = 0 &= J^{23}(-r^4) + J^{24}(-r^3) + J^{25} r^2, \\ \dot{r}^3 = 0 &= J^{32} r^5 + J^{34}(-r^3) + J^{35} r^2, \\ \dot{r}^4 = 0 &= J^{42} r^5 + J^{43}(-r^4) + J^{45} r^2, \\ \dot{r}^5 = 0 &= J^{52} r^5 + J^{53}(-r^4) + J^{54}(-r^3). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Procediendo de la misma manera que en el problema del patín hielo, por ejemplo se asignan los valores: $J^{12} = 0$, $J^{13} = -1$, $J^{14} = 0$ y $J^{15} = 0$. Con ellos, se observa que se satisface la primera

ecuación del sistema (2.30) y al sustituirlos en la expresión (2.4), tomando en cuenta la antisimetría de $J^{\mu\nu}$, resulta

$$\begin{aligned}
 0 &= J^{\rho 1} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 2} \frac{\partial J^{31}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 3} \frac{\partial J^{12}}{\partial r^\rho}, \\
 &= J^{41} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^1} + J^{24} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^2} + J^{31} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^3} + J^{41} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^4} + J^{51} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^5}, \\
 &= \frac{\partial J^{23}}{\partial r^3}, \quad \Rightarrow \quad J^{23} = J^{23}(r^1, r^2, r^4, r^5),
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

volviendo a utilizar los valores ya asignados, $J^{12} = 0$, $J^{13} = -1$, $J^{14} = 0$ y $J^{15} = 0$, ahora en la expresión (2.5), se tiene

$$\begin{aligned}
 0 &= J^{\rho 1} \frac{\partial J^{24}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 2} \frac{\partial J^{41}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 4} \frac{\partial J^{12}}{\partial r^\rho}, \\
 &= J^{41} \frac{\partial J^{24}}{\partial r^1} + J^{24} \frac{\partial J^{24}}{\partial r^2} + J^{31} \frac{\partial J^{24}}{\partial r^3} + J^{41} \frac{\partial J^{24}}{\partial r^4} + J^{51} \frac{\partial J^{24}}{\partial r^5}, \\
 &= \frac{\partial J^{24}}{\partial r^3}, \quad \Rightarrow \quad J^{24} = J^{24}(r^1, r^2, r^4, r^5),
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

nuevamente, con la ayuda de $J^{12} = 0$, $J^{13} = -1$, $J^{14} = 0$ y $J^{15} = 0$, esta vez en la expresión (2.6), resulta

$$\begin{aligned}
 0 &= J^{\rho 1} \frac{\partial J^{25}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 2} \frac{\partial J^{51}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 5} \frac{\partial J^{12}}{\partial r^\rho}, \\
 &= J^{41} \frac{\partial J^{25}}{\partial r^1} + J^{24} \frac{\partial J^{25}}{\partial r^2} + J^{31} \frac{\partial J^{25}}{\partial r^3} + J^{41} \frac{\partial J^{25}}{\partial r^4} + J^{51} \frac{\partial J^{25}}{\partial r^5}, \\
 &= \frac{\partial J^{25}}{\partial r^3}, \quad \Rightarrow \quad J^{25} = J^{25}(r^1, r^2, r^4, r^5).
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Una manera de satisfacer la dependencia funcional expresada en (2.31)–(2.33) es eligiendo los valores $J^{23} = r^2$, $J^{24} = 0$ y $J^{25} = r^4$, ya que juntos satisfacen la segunda ecuación del sistema (2.29), i.e., $\dot{r}^2 = 0$.

Al volver a utilizar los valores $J^{12} = 0$, $J^{13} = -1$, $J^{14} = 0$ y $J^{15} = 0$, pero en esta ocasión sobre la expresión (2.7), se tiene

$$\begin{aligned}
 0 &= J^{\rho 1} \frac{\partial J^{34}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 3} \frac{\partial J^{41}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 4} \frac{\partial J^{12}}{\partial r^\rho}, \\
 &= J^{41} \frac{\partial J^{34}}{\partial r^1} + J^{24} \frac{\partial J^{34}}{\partial r^2} + J^{31} \frac{\partial J^{34}}{\partial r^3} + J^{41} \frac{\partial J^{34}}{\partial r^4} + J^{51} \frac{\partial J^{34}}{\partial r^5}, \\
 &= \frac{\partial J^{34}}{\partial r^3}, \quad \Rightarrow \quad J^{34} = J^{34}(r^1, r^2, r^4, r^5),
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

nuevamente, con ayuda de los valores $J^{12} = 0$, $J^{13} = -1$, $J^{14} = 0$ y $J^{15} = 0$, ahora en la expresión (2.8), resulta

$$\begin{aligned}
 0 &= J^{\rho 1} \frac{\partial J^{35}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 3} \frac{\partial J^{51}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 5} \frac{\partial J^{12}}{\partial r^\rho}, \\
 &= J^{41} \frac{\partial J^{35}}{\partial r^1} + J^{24} \frac{\partial J^{35}}{\partial r^2} + J^{31} \frac{\partial J^{35}}{\partial r^3} + J^{41} \frac{\partial J^{35}}{\partial r^4} + J^{51} \frac{\partial J^{35}}{\partial r^5}, \\
 &= \frac{\partial J^{35}}{\partial r^3}, \quad \Rightarrow \quad J^{35} = J^{35}(r^1, r^2, r^4, r^5).
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Al elegir los valores $J^{34} = 0$ y $J^{35} = r^5$ cumplen con la dependencia funcional expresada en (2.34) y (2.35), respectivamente. Además satisfacen la tercera expresión del sistema (2.30), resultando $\dot{r}^3 = 0$.

Cuando se utilizan los valores $J^{12} = 0$, $J^{13} = -1$, $J^{14} = 0$ y $J^{15} = 0$, en esta ocasión sobre la ecuación (2.9), se tiene

$$\begin{aligned}
 0 &= J^{\rho 1} \frac{\partial J^{45}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 4} \frac{\partial J^{54}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 5} \frac{\partial J^{14}}{\partial r^\rho}, \\
 &= J^{11} \frac{\partial J^{45}}{\partial r^1} + J^{21} \frac{\partial J^{45}}{\partial r^2} + J^{31} \frac{\partial J^{45}}{\partial r^3} + J^{41} \frac{\partial J^{45}}{\partial r^4} + J^{51} \frac{\partial J^{45}}{\partial r^5}, \\
 &= \frac{\partial J^{45}}{\partial r^3}, \quad \Rightarrow \quad J^{45} = J^{45}(r^1, r^2, r^3, r^4).
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Como se debe satisfacer la cuarta ecuación del sistema (2.30), esto es, $\dot{r}^4 = 0 = -J^{24}r^5 + J^{34}r^4 + J^{45}r^2 = J^{45}r^5$, dejando la única posibilidad que $J^{45} = 0$, valor que satisface la dependencia funcional expresada en (2.36). Este último valor junto con $J^{25} = r^4$ y $J^{35} = r^5$, permiten que la quinta ecuación del sistema (2.30) se satisfaga, i.e., $\dot{r}^5 = J^{52}r^5 + J^{53}(-r^4) + J^{54}(-r^3) = -J^{25}r^5 + J^{35}r^4 = -r^4r^5 + r^4r^5 = 0$.

Considerando los valores elegidos para $J^{23} = r^2$, $J^{24} = 0$ y $J^{34} = 0$ en la ecuación (2.10), se muestra que la satisfacen, esto es

$$\begin{aligned}
 &J^{\rho 2} \frac{\partial J^{34}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 3} \frac{\partial J^{42}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 4} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^\rho}, \\
 &= J^{24} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^2}, \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Ahora, con ayuda de los valores $J^{23} = r^2$, $J^{25} = r^4$, $J^{34} = 0$ y $J^{35} = r^5$, sustituidos en la expresión (2.11), también la verifican, esto es

$$\begin{aligned}
 &J^{\rho 2} \frac{\partial J^{35}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 3} \frac{\partial J^{52}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 5} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^\rho}, \\
 &= J^{52} \frac{\partial J^{35}}{\partial r^5} + J^{43} \frac{\partial J^{52}}{\partial r^4} + J^{25} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^2}, \\
 &= -r^4 + r^4 = 0.
 \end{aligned}$$

Para comprobar que la expresión (2.12) también se comprueba, se toma en cuenta los valores $J^{24} = 0$, $J^{25} = r^4$ y $J^{45} = 0$, esto es

$$\begin{aligned}
 &J^{\rho 2} \frac{\partial J^{54}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 4} \frac{\partial J^{25}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 5} \frac{\partial J^{42}}{\partial r^\rho}, \\
 &= J^{44} \frac{\partial J^{25}}{\partial r^4}, \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Finalmente, con ayuda de los valores $J^{34} = 0$, $J^{35} = r^5$ y $J^{45} = 0$ se comprueba la expresión (2.13), i.e.,

$$\begin{aligned}
 &J^{\rho 3} \frac{\partial J^{45}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 4} \frac{\partial J^{53}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 5} \frac{\partial J^{34}}{\partial r^\rho}, \\
 &= J^{54} \frac{\partial J^{53}}{\partial r^5}, \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Los valores asignados para la matriz o tensor de Poisson $J^{\mu\nu}$ que verifican las expresiones (2.4)–(2.13), junto con el sistema de ecuaciones de movimiento (2.30) son:

$$\begin{aligned} J^{12} &= 0, & J^{13} &= -1, & J^{14} &= 0, & J^{15} &= 0 \\ J^{23} &= r^2, & J^{24} &= 0, & J^{25} &= r^4 \\ J^{34} &= 0, & J^{35} &= r^5, & J^{45} &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz de Poisson $J^{\mu\nu}$ que se obtuvo para este caso es

$$J^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 & r^4 \\ 1 & -r^2 & 0 & 0 & r^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r^4 & -r^5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

donde $r^\mu = (r^1, r^2, r^3, r^4, r^5) = (x, d_2, d_3, v_x, c_2)$ son las coordenadas de la variedad de Poisson, para el problema de la *partícula en un espacio de tres dimensiones* y cada entrada matricial $J^{\mu\nu} = \{r^\mu, r^\nu\}$ es el paréntesis de Poisson entre las coordenadas r^μ con $\mu, \nu, \dots = 1, 2, 3, 4, 5$.

De la expresión (2.37) se puede observar que el paréntesis de Poisson de la coordenada $r^4 = v_x$ con todas las demás es igual a cero. En este caso, el paréntesis de Poisson de r^4 conmuta con cualquier función diferenciable f dada en términos de las coordenadas r^μ , i.e., $\{r^4, f\} = 0$, cuando esto ocurre, a $r^4 = v_x$ se le conoce como *función de Casimir* y presenta a $r^4 = v_x$ como una constante de movimiento intrínseca del sistema de EDOs de primer orden (1.49).

Por similitud con la dinámica Hamiltoniana de sistemas holónomos, las coordenadas de la variedad de Poisson son etiquetadas de la siguiente manera: $r^\mu = (r^1, r^2, r^3, r^4, r^5) = (q^1, q^2, p_1, p_2, p_3)$, incluso cualquier otra, i.e., tres coordenadas q y dos momentos p , haciendo referencia a lo que en el contexto de sistemas holónomos se conoce como *coordenadas canónicas*.

2.3. Una segunda estructura de Poisson para partícula en un espacio de tres dimensiones

Continuando, con el sistema de EDOs de primer orden para el problema de partícula en un espacio de tres dimensiones (2.29), otro ejemplo de *estructura de Poisson* será construido. Por ejemplo, la expresión $\frac{1}{2}[(r^2)^2 + (r^3)^2 + (r^4)^2 + (r^5)^2]$ es una constante de movimiento, ya que su derivada respecto al tiempo, tomando en cuenta las expresiones (2.29), es igual a cero, entonces, se elige como Hamiltoniano, i.e., $H = \frac{1}{2}[(r^2)^2 + (r^3)^2 + (r^4)^2 + (r^5)^2]$.

Ahora se escribirán las ecuaciones de movimiento (2.29), en términos de $J^{\mu\nu}$, como en la expresión (1.23), i.e.,

$$\begin{aligned} \dot{r}^1 &= r^4 = J^{12}r^2 + J^{13}r^3 + J^{14}r^4 + J^{15}r^5, \\ \dot{r}^2 &= 0 = J^{23}r^3 + J^{24}r^4 + J^{25}r^5, \\ \dot{r}^3 &= 0 = J^{32}r^2 + J^{34}r^4 + J^{35}r^5, \\ \dot{r}^4 &= 0 = J^{42}r^2 + J^{43}r^3 + J^{45}r^5, \\ \dot{r}^5 &= 0 = J^{52}r^2 + J^{53}r^3 + J^{54}r^4. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Procediendo de la misma manera que se hizo para el problema del patín hielo y para el ejemplo anterior de este mismo problema, por ejemplo asignando los valores: $J^{12} = 0$, $J^{13} = 0$, $J^{14} = 1$ y $J^{15} = 0$, ya que satisfacen la primera ecuación del sistema (2.38) y cuando se sustituyen en la expresión (2.4), tomando en cuenta la antisimetría de $J^{\mu\nu}$, resulta

$$0 = J^{\rho 1} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 2} \frac{\partial J^{34}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 3} \frac{\partial J^{45}}{\partial r^\rho},$$

$$\begin{aligned}
 &= J^{11} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^1} + J^{21} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^2} + J^{31} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^3} + J^{41} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^4} + J^{51} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^5}, \\
 &= -\frac{\partial J^{23}}{\partial r^4}, \quad \Rightarrow \quad J^{23} = J^{23}(r^1, r^2, r^3, r^5),
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

con la sustitución de los valores $J^{12} = 0$, $J^{13} = 0$, $J^{14} = 1$ y $J^{15} = 0$, en la ecuación (2.5), se obtiene

$$\begin{aligned}
 0 &= J^{\rho 1} \frac{\partial J^{24}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 2} \frac{\partial J^{24}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 4} \frac{\partial J^{24}}{\partial r^\rho}, \\
 &= J^{11} \frac{\partial J^{24}}{\partial r^1} + J^{21} \frac{\partial J^{24}}{\partial r^2} + J^{31} \frac{\partial J^{24}}{\partial r^3} + J^{41} \frac{\partial J^{24}}{\partial r^4} + J^{51} \frac{\partial J^{24}}{\partial r^5}, \\
 &= -\frac{\partial J^{24}}{\partial r^4}, \quad \Rightarrow \quad J^{24} = J^{24}(r^1, r^2, r^3, r^5),
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

volviendo a utilizar los valores $J^{12} = 0$, $J^{13} = 0$, $J^{14} = 1$ y $J^{15} = 0$, esta vez en la expresión (2.6), resulta

$$\begin{aligned}
 0 &= J^{\rho 1} \frac{\partial J^{25}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 2} \frac{\partial J^{25}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 5} \frac{\partial J^{25}}{\partial r^\rho}, \\
 &= J^{11} \frac{\partial J^{25}}{\partial r^1} + J^{21} \frac{\partial J^{25}}{\partial r^2} + J^{31} \frac{\partial J^{25}}{\partial r^3} + J^{41} \frac{\partial J^{25}}{\partial r^4} + J^{51} \frac{\partial J^{25}}{\partial r^5}, \\
 &= -\frac{\partial J^{25}}{\partial r^4}, \quad \Rightarrow \quad J^{25} = J^{25}(r^1, r^2, r^3, r^5).
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

Eligiendo los valores $J^{23} = 1/(r^2 r^3)$, $J^{24} = 0$ y $J^{25} = -1/(r^2 r^5)$, porque cumplen con la dependencia funcional expresada en (2.39)–(2.41) y satisfacen la segunda ecuación del sistema (2.38), i.e., $\dot{r}^2 = 0$.

Volviendo a considerar los valores $J^{12} = 0$, $J^{13} = 0$, $J^{14} = 1$ y $J^{15} = 0$, en esta ocasión sobre la expresión (2.7), se obtiene

$$\begin{aligned}
 0 &= J^{\rho 1} \frac{\partial J^{34}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 3} \frac{\partial J^{34}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 4} \frac{\partial J^{34}}{\partial r^\rho}, \\
 &= J^{11} \frac{\partial J^{34}}{\partial r^1} + J^{21} \frac{\partial J^{34}}{\partial r^2} + J^{31} \frac{\partial J^{34}}{\partial r^3} + J^{41} \frac{\partial J^{34}}{\partial r^4} + J^{51} \frac{\partial J^{34}}{\partial r^5}, \\
 &= -\frac{\partial J^{34}}{\partial r^4}, \quad \Rightarrow \quad J^{34} = J^{34}(r^1, r^2, r^3, r^5),
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

una vez más tomando en cuenta los valores $J^{12} = 0$, $J^{13} = 0$, $J^{14} = 1$ y $J^{15} = 0$, ahora en la ecuación (2.8), se tiene

$$\begin{aligned}
 0 &= J^{\rho 1} \frac{\partial J^{35}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 3} \frac{\partial J^{35}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 5} \frac{\partial J^{35}}{\partial r^\rho}, \\
 &= J^{11} \frac{\partial J^{35}}{\partial r^1} + J^{21} \frac{\partial J^{35}}{\partial r^2} + J^{31} \frac{\partial J^{35}}{\partial r^3} + J^{41} \frac{\partial J^{35}}{\partial r^4} + J^{51} \frac{\partial J^{35}}{\partial r^5}, \\
 &= -\frac{\partial J^{35}}{\partial r^4}, \quad \Rightarrow \quad J^{35} = J^{35}(r^1, r^2, r^3, r^5).
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Eligiendo los valores $J^{34} = 0$ y $J^{35} = 1/(r^3 r^5)$ satisfacen la dependencia funcional expresada en (2.42) y (2.43), respectivamente. Además tomando en cuenta el valor asignado para $J^{23} = 1/(r^2 r^3)$, se satisface la tercera ecuación del sistema (2.38), esto es, $\dot{r}^3 = 0$.

Volviendo a considerar a los valores $J^{12} = 0$, $J^{13} = 0$, $J^{14} = 1$ y $J^{15} = 0$, esta vez en la expresión (2.9), se tiene

$$\begin{aligned}
0 &= J^{\rho 1} \frac{\partial J^{45}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 4} \frac{\partial J^{54}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 5} \frac{\partial J^{44}}{\partial r^\rho}, \\
&= J^{11} \frac{\partial J^{45}}{\partial r^1} + J^{21} \frac{\partial J^{45}}{\partial r^2} + J^{31} \frac{\partial J^{45}}{\partial r^3} + J^{41} \frac{\partial J^{45}}{\partial r^4} + J^{51} \frac{\partial J^{45}}{\partial r^5}, \\
&= -\frac{\partial J^{45}}{\partial r^4}, \quad \Rightarrow \quad J^{45} = J^{45}(r^1, r^2, r^3, r^5).
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Usando los valores de $J^{24} = 0$ y $J^{34} = 0$ en la cuarta ecuación del sistema (2.38), resulta $0 = \dot{r}^4 = J^{42} r^2 + J^{43} r^3 + J^{45} r^5 = J^{45} r^5$, lo cual obliga a que $J^{45} = 0$ y este valor concuerda con la dependencia funcional establecida en la expresión (2.44).

Con los valores asignados anteriormente para $J^{25} = -1/(r^2 r^5)$, $J^{35} = 1/(r^3 r^5)$ y $J^{45} = 0$, se satisface la quinta ecuación en el sistema (2.38), esto es

$$\begin{aligned}
\dot{r}^5 &= J^{52} r^2 + J^{53} r^3 + J^{54} r^4, \\
&= -J^{25} r^2 - J^{35} r^3 - J^{45} r^4, \\
&= \frac{1}{r^5} - \frac{1}{r^5}, \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Con ayuda de los valores $J^{23} = 1/(r^2 r^3)$, $J^{24} = 0$ y $J^{34} = 0$, se muestra que la expresión (2.10) se satisface, i.e.,

$$\begin{aligned}
&J^{\rho 2} \frac{\partial J^{34}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 3} \frac{\partial J^{42}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 4} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^\rho}, \\
&= J^{24} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^2} + J^{34} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^3}, \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Sustituyendo los valores $J^{23} = 1/(r^2 r^3)$, $J^{25} = -1/(r^2 r^5)$ y $J^{35} = 1/(r^3 r^5)$ en la expresión (2.11), se muestra que también se verifica, esto es

$$\begin{aligned}
&J^{\rho 2} \frac{\partial J^{35}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 3} \frac{\partial J^{52}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 5} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^\rho}, \\
&= J^{32} \frac{\partial J^{35}}{\partial r^3} + J^{52} \frac{\partial J^{35}}{\partial r^5} + J^{23} \frac{\partial J^{52}}{\partial r^2} + J^{53} \frac{\partial J^{52}}{\partial r^5} + J^{25} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^2} + J^{35} \frac{\partial J^{23}}{\partial r^3}, \\
&= \left(-\frac{1}{r^2 r^3}\right) \left(-\frac{1}{(r^3)^2 r^5}\right) + \left(\frac{1}{r^2 r^5}\right) \left(-\frac{1}{r^3 (r^5)^2}\right) + \left(\frac{1}{r^2 r^3}\right) \left(-\frac{1}{(r^2)^2 r^5}\right), \\
&+ \left(-\frac{1}{r^3 r^5}\right) \left(-\frac{1}{r^2 (r^5)^2}\right) + \left(-\frac{1}{r^2 r^5}\right) \left(-\frac{1}{(r^2)^2 r^3}\right) + \left(\frac{1}{r^3 r^5}\right) \left(-\frac{1}{r^2 (r^3)^2}\right), \\
&= \frac{1}{(r^2)^3 r^3 r^5} + \frac{1}{r^2 (r^3)^3 r^5} + \frac{1}{r^2 r^3 (r^5)^3} + -\frac{1}{(r^2)^3 r^3 r^5} - \frac{1}{r^2 (r^3)^3 r^5} - \frac{1}{r^2 r^3 (r^5)^3}, \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Los valores $J^{24} = 0$, $J^{25} = -1/(r^2 r^5)$ y $J^{45} = 0$ sustituidos en la expresión (2.12) la satisfacen, esto es

$$\begin{aligned}
&J^{\rho 2} \frac{\partial J^{54}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 4} \frac{\partial J^{25}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 5} \frac{\partial J^{42}}{\partial r^\rho}, \\
&= J^{24} \frac{\partial J^{25}}{\partial r^2} + J^{54} \frac{\partial J^{25}}{\partial r^5}, \\
&= 0,
\end{aligned}$$

finalmente, al sustituir las expresiones $J^{34} = 0$, $J^{35} = 1/(r^3 r^5)$ y $J^{45} = 0$ en (2.13), la satisfacen, i.e.,

$$\begin{aligned} & J^{\rho 3} \frac{\partial J^{45}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 4} \frac{\partial J^{53}}{\partial r^\rho} + J^{\rho 5} \frac{\partial J^{34}}{\partial r^\rho}, \\ &= J^{34} \frac{\partial J^{53}}{\partial r^3} + J^{54} \frac{\partial J^{53}}{\partial r^5}, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Los valores asignados para la matriz o tensor de Poisson $J^{\mu\nu}$ que verifican las expresiones (2.4)–(2.13), junto con el sistema de ecuaciones de movimiento (2.37) son:

$$\begin{aligned} J^{12} &= 0, & J^{13} &= 0, & J^{14} &= 1, & J^{15} &= 0 \\ J^{23} &= \frac{1}{r^2 r^3}, & J^{24} &= 0, & J^{25} &= -\frac{1}{r^2 r^4} \\ J^{34} &= 0, & J^{35} &= \frac{1}{r^3 r^5}, & J^{45} &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz de Poisson $J^{\mu\nu}$ que se obtuvo para este caso es

$$J^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 r^3} & 0 & -\frac{1}{r^2 r^5} \\ 0 & -\frac{1}{r^2 r^3} & 0 & 0 & \frac{1}{r^3 r^5} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2 r^5} & -\frac{1}{r^3 r^5} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

donde $r^\mu = (r^1, r^2, r^3, r^4, r^5) = (x, d_2, d_3, v_x, c_2)$ son las coordenadas de la variedad de Poisson, para el problema de la *partícula en un espacio de tres dimensiones* y cada entrada matricial $J^{\mu\nu} = \{r^\mu, r^\nu\}$ es el paréntesis de Poisson entre las coordenadas r^μ con $\mu, \nu, \dots = 1, 2, 3, 4, 5$.

Por similitud con la dinámica Hamiltoniana de sistemas holónomos, las coordenadas de la variedad de Poisson ahora son etiquetadas de la siguiente manera: $r^\mu = (r^1, r^2, r^3, r^4, r^5) = (q^1, q^2, q^3, p_2, p_3) = (x, d_2, d_3, v_x, c_2)$, incluso cualquier otra, i.e., dos coordenadas q y tres momentos p , haciendo referencia a lo que en el contexto de sistemas holónomos se conoce como *coordenadas canónicas*.

Capítulo 3

Conclusiones

Aunque no se puede definir una estructura simpléctica para estos sistemas mecánicos no holónomos, uno puede buscar una estructura de Poisson que comparte muchas propiedades con las estructuras simplécticas. Una estructura simpléctica dota de una estructura natural de paréntesis de Poisson a una variedad simpléctica, pero el paréntesis de Poisson es propio de un espacio (o variedad de Poisson), siendo en este sentido, las variedades simplécticas también variedades de Poisson.

Para cada sistema mecánico que se ha presentado aquí, existe una infinidad de constantes de movimiento (basta con multiplicar a cada Hamiltoniano de los ejemplos por una constante arbitraria) que pueden ser elegidas como Hamiltonianos del sistema de EDOs de primer orden autónomo y por lo tanto, dan lugar a una infinidad de estructuras de Poisson, en cada caso.

Bibliografía

- [1] E. T. Whittaker, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies: With an Introduction to the Problem of Three Bodies*, 2nd ed. (Cambridge University Press, 1917).
- [2] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2nd ed. (Addison-Wesley, 1980).
- [3] C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*, Mathematical Expositions, No. 4, (University of Toronto Press, 1949).
- [4] D.T. Greenwood, *Classical Dynamics*, (Dover Publications, 1997).
- [5] A. M. Bloch, J. Baillieul, P. Crouch and J. Marsden, *Nonholonomic Mechanics and Control*, Interdisciplinary Applied Mathematics, vol. 24, (Springer, 2007).
- [6] S. T. Thornton and J. B. Marion, *Classical dynamics of particles and systems*, 5th ed. (Cengage Learning, 2003).
- [7] Ju. I. Neimarks and N. A. Fufaev, *Dynamics of Nonholonomic Systems. Translations of Mathematical Monographs, V. 33*, (American Mathematical Society, 2004).
- [8] G.F. Torres del Castillo and O. Sosa Rodríguez, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* 11 (2014) 1450017.
- [9] G. F. Torres del Castillo, *Differentiable Manifolds: A Theoretical Physics Approach*, Birkhäuser, 2012.
- [10] J. E. Marsden and T. S. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry*, 2nd ed. (Springer-Verlag, 1999).
- [11] J. -P. Dufor and N. T. Zung, *Poisson Structures and Their Normal Forms*, Progress in Mathematics 242, (Birkhäuser-Verlag, Basel, 2005).
- [12] Camille Laurent- Gengoux, Anne Pichereau and Pol Vanhaecke, *Poisson Structures*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 347, (Springer-Verlag, 2012).
- [13] G.F. Torres del Castillo and G. Mendoza Torres, *Rev. Mex. Fis.* 49 (2003) 445.
- [14] Z. M. Lou, Z. D. Chen and W. L. Wang, *Chin. Phys.* 14 (2005) 1483.
- [15] A. J. Van Der Schaft and B. M. Maschke, *Reports on Mathematical Physics.* 34 (1994) 225.
- [16] A.M. Bloch, O.E. Fernandez and T. Mestdag, *Hamiltonization of Nonholonomic Systems and the Inverse Problem of the Calculus of Variations*, arXiv:0812.0437v1, (2008).
- [17] G. F. Simmons and S. G. Krantz, *Ecuaciones diferenciales. Teoría, técnica y práctica*, (McGraw-Hill, 2007).

