Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN FÍSICA

TRANSFORMADA FRACCIONARIA DE FOURIER PARA OBTENCÓN DE DISTRIBUCIONES DE WIGNER CON ALGORITMO DE RETROPROYECCIÓN FILTRADA

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADO EN FÍSICA

PRESENTA

IRÁN RAMOS PRIETO

DIRECTOR DE TESIS

DR. GUSTAVO RODRÍGUEZ ZURITA

Dedicatoria

Agradecimientos

Texto

Contenido

Resumen

En es te trabajo se demuestra la relaci'on que existe entre la distribuci'on de Wigner y la transformada fraccionaria de Fourier mediante el algoritmo de retroproyeccion filtrada, se comparan los resultados analíticos encontrados para diferentes funciones con los resultados num'ericos, y la validez de estos resultados se establece calculando el momento cero. Se desmuestran propidades b'asicas de la distribucio'on de Wigner y la tranformada de Radon para llegar a la relaci'on entre la distribuci'on de Wigner y la transformda fraccionaria de Fourier.

Capítulo 1

Introducción

En este trabajo se exponen las propiedades de la transformada fraccionaria de Fourier y su implementación mediante sistemas ópticos. Esta transformada se deriva de las proyecciones paralelas de la distribución de Wigner, por lo que se define ésta, revisando sus propiedades básicas. Se busca explorar más la relación de proyecciones de la distribución de Wigner con las técnicas tomográficas para proyecciones paralelas. La distribución de Wigner se ha propuesto como una representación para señales o imágenes que combina la variable de tiempo (o posición) con la variable frecuencial. Definiendo funciones unidimensionales, pueden construirse distribuciones bidimensionales de Wigner. Muchas de sus propiedades se relacionan con las de la transformada de Fourier. Puede mostrarse que las proyecciones paralelas de la distribución de Wigner resultan ser transformaciones lineales canónicas. De ahi que se puedan definir transformadas de Fourier fraccionarias con parámetro $\theta = a\frac{\pi}{2}$, con $-2 \leq a \leq 2$. Uno de los objetivos de este trabajo consiste en demostrar los pasos intermedios involucrados en el establecimiento de estas propiedades en relación a imágenes unidimensionales. Puesto que las proyecciones paralelas a cierto ángulo ϕ, pueden ser descritas por técnicas de Tomografía, se buscan explorar estas relaciones, en particular con la transformada de Radon. Al estudiar sus aplicaciones en sistemas ópticos, se plantea la realización experimental de estas propiedades. Se busca también una representación para imágenes en 2 dimensiones.

Capítulo 2

Proyecciones paralelas y transformada de Radon

La tomograf'ia es una t'ecnica que permite la reconstrucci'on del interior de un cuerpo en base a las proyecciones de una onda de sondeo que lo atravieza. Uno de los casos m'as simples es el de las proyecciones paralelas, en el cual la onda de sondeo es una onda plana y conserva su car'acter durante su paso por el objeto hasta su salida, donde es detectada. La onda resulta modificada en atenuaci'on (objetos de absorci'on) o en fase (objetos de fase en aproximaci'on de refracci'on baja). Este caso admite una descripci'on con transformadas integrales y transformadas de Radon. Este tipo de transformadas integrales representan proyecciones paralelas y ser'a introducida en el teorema central de Fourier. Otros casos de la tomograf'ia surgen cuando a) la iluminaci'on no es paralela, sino en forma de cono o abanico b) si se considera refracci'on c) si se considera la difracci'on d) si se incluye el esparcimiento. Tales casos exceden los prop'ositos de esta tesis y no se incluir'a en 'esta.

2.1 El teorema central de Fourier

2.1.1 Formaci'on de im'agenes en un sistema telec'entrico

Se considerar'a un sistema 'optico coherente formador de im'agenes, lineal e invariante, en una disposici'on telec'entrica para transformada de Fourier con lentes de igual longitud focal f_0. Las coordenadas de los planos objeto, de frecuencias espaciales (plano de Fourier), y de imagen se denotan por (X, Y), (f_X, f_Y) y (X', Y') respectivamente. Se emplear'an coordenadas normalizadas respecto al di'ametro de la pupila, denotado por $2R$; as'i:

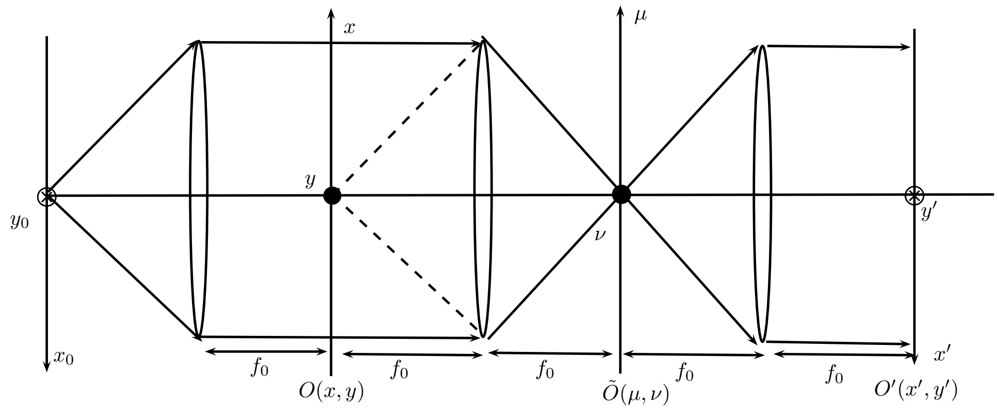


Figure 2.1: Sistema "telecentrico" que posibilita la obtenci'on de la misma funcin'on

entonces, las distribuciones de amplitud en planos de Fourier e im'agen son:

$$\tilde{O}'(\mu,\nu) = \tilde{O}(\mu,\nu)P_R(\mu,\nu) \tag{2.1}$$

$$O'(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{O}'(\mu,\nu)\} \tag{2.2}$$

donde $P_R(\mu,\nu)$ es la funci'on de pupila coherente, Aqu'i, desde luego

$$\begin{aligned}\tilde{O}(\mu,\nu) &= \mathcal{F}\{O(x,y)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dxdyO(x,y)e^{-i2\pi(\mu x+\nu y)}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

2.2 Proyecci'on paralela como convoluci'on.

Por conveniencia, consid'erese ejes coordenados rectangulares $(P, P_\perp)$ y $(\omega, \omega_\perp)$ obtenidos por rotaci'on, al 'angulo ϕ, de los ejes (x, y) y $\mu, \nu)$, respectivamente

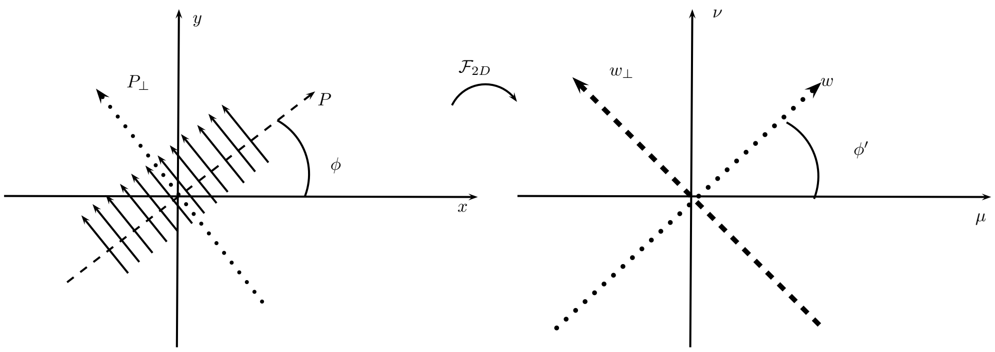


Figure 2.2: Muestreo de la transformada bidimensional de Fourier

.

$$\begin{pmatrix} P \\ P_{\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\phi & sen\phi \\ -sen\phi & cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} \omega \\ \omega_{\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\phi' & sen\phi' \\ -sen\phi' & cos\phi' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix}$$

Las unidades de $\vec{p} = (P, P_{\perp})$ son las de $\vec{x} = (x, y)$. Las de $\vec{\omega} = (\omega, \omega_{\perp})$ son las de $\vec{\mu} = (\mu, \nu)$. Consideramos los valores de la transformda de $\tilde{O}(\mu, \nu)$ a lo largo de una linea recta de inclinaci'on $\phi' = \phi$ pasando por el origen. El muestreo de dichos valores puede escribirse como:

$$\tilde{O}(\mu, \nu)\delta(\omega_{\perp}) = \tilde{O}(\mu, \nu)\delta(-\mu sen\phi + \nu cos\phi) \tag{2.4}$$

que esquematiza en la figura (2.2). Pero el muestreo de los valores a lo largo de lineas se corresponde, en el plano objeto con la convoluci'on entre las transformadas inversas de cada factor: $\tilde{O}(\mu, \nu)$ y $\delta(\omega_{\perp})$. Considerando que $\mathcal{F}^{-1}\{\delta(\omega_{\perp})\} = \delta(p)$ para cualquier valor de ϕ, al determinar la transformada de Fourier del muestreo lineal, surgen las siguiente relaciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{O}(\mu, \nu)\delta(-\mu sen\phi &+ \nu cos\phi)\} \qquad (2.5) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{O}(\mu, \nu)\} * \mathcal{F}^{-1}\{\delta(-\mu sen\phi + \nu cos\phi)\} \\ &= O(x, y) * \delta(xcos\phi + ysen\phi) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta O(\xi, \eta)\delta[(x - \xi)cos\phi + (y - \eta)sen\phi] \\ &\equiv \mathcal{R}\{O(x, y)\} = \breve{O}_{\phi}(p) \end{aligned}$$

donde se ha identificado a la transformada de Radon como ($dx^2 = dxdy$)

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\{O(x, y)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta O(\xi, \eta)\delta(p - \xi cos\phi - \eta sen\phi) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx^2 O(\vec{x})\delta(p - \hat{u}_{\phi} \cdot \vec{x}) \end{aligned} \tag{2.6}$$

con $\hat{u}_{\phi} = (cos\phi, sen\phi)$, $\breve{O}_{\phi}(p)$ es la transformada de Radon de $O(\vec{x})$, conocida tambi'en como la proyecci'on paralela de $O(\vec{x})$. 'Esta funci'on de la coordenada p es la señal de $O(\vec{x})$ tras cruzar y acumular sus valores. Esto puede verse como sigue; con $x' = \vec{x} \cdot \hat{u}_{\phi}$ la ecuaci'on (2.6) resulta

$$\begin{aligned} \breve{O}_{\phi}(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} dy' dx' \int_{-\infty}^{\infty} O(x', y')\delta(p - x') \\ &= \int_{-\infty} dy' O(p, y') \end{aligned}$$

que es una integral de l'inea del tipo

$$S_L = \int_L O(x, y) dl$$

siendo L una recta dado por $x = p'$.

De la ecuaci'on (2.6), se verifica la linealidad de la transformada de Radon como

$$\mathcal{R}_{\phi}\{aO_1(\vec{x}) + O_2(\vec{x})\} = a\mathcal{R}_{\phi}\{O_1(\vec{x})\} + \mathcal{R}_{\phi}\{O_2(\vec{x})\}$$

donde $a = constante$.

2.3 La inversa de la transformada de Radon

Cualitativamente, la cuesti'on de la transformaci'on inversa de Radon puede resolverse interpretando a la proyecci'on paralela, $\breve{O}_\phi(p)$, como la transformada inversa unidimensional, $\mathcal{F}^{-1}_{1D}\{\cdots\}$, del muestreo de la transformada bidimensional $\tilde{O}(\mu,\nu) = \mathcal{F}_{2D}\{O(x,y)\}$, realizado a lo largo de la recta $\omega_\perp = 0$. Entonces, conociendo $\hat{O}_\phi(p)$ para toda ϕ

$$\begin{aligned} O(x,y) &= \mathcal{F}^{-1}_{2D}\{\tilde{O}(\mu,\nu)\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}_{2D}\vec{\mathcal{B}}\mathcal{F}_{1D}\{\breve{O}_\phi(p)\} \end{aligned} \tag{2.7}$$

donde se ha implicitado que $\tilde{O}(\mu,\nu)$ se construye con toda $\breve{O}_\phi(p)$ convenientemente acomodadas, $\mathcal{F}_{1D}\{\cdots\}$ es de $p \to w$, y la operaci'on de acomodo se denota por $\vec{\mathcal{B}}$, donde $\mathcal{F}_{1D}\{\cdots\}$ es un muestreo de la transformada bidimensional de Fourier. Lo anterior en todo caso, muestra que la transformada inversa de Radon no es tan semejante a la transformada directa. Estando, sin embargo, en posesi'on de aqu'ella, se estar'ia en posici'on de reconstru'ir a la distribuci'on $O(\vec{x})$ conociendo sus proyecciones $\breve{O}_\phi(p)$.

Inspeccionando m'as en detalle la propiedad establecida en el teorema central de Fourier, considerese la transformada bidimensional de la distribuci'on objeto y su transformada inversa, 'esto es, con $d\mu^2 = d\mu d\nu$

$$\begin{aligned} O(\vec{x}) = O(x,y) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\mu^2 \tilde{O}(\vec{\mu}) e^{i2\pi\vec{\mu}\cdot\vec{x}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\mu d\nu \tilde{O}(\mu,\nu) e^{i2\pi(\mu x+\nu y)}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Para el caso particular de la recta definida por $\delta(\omega_\perp)$, se define $\omega_\perp = 0$ y en concecuencia de las relaciones inversas se tiene

$$\mu = \omega cos\phi \qquad \text{y} \qquad \nu = \omega sen\phi,$$

con $d\mu d\nu = \omega d\omega d\phi$.Sustituyendo en la transformada bidimensional inversa, se tiene

$$\begin{aligned} O(x,y) &= \int_0^\infty \omega d\omega \int_0^{2\pi} d\phi \tilde{O}_\phi(\omega,\phi) e^{i2\pi\omega(xcos\phi+ysen\phi)} \\ &= \int_0^\pi d\phi \int_0^\infty \omega d\omega \tilde{O}_\phi(\omega,\phi) e^{i2\pi\omega(xcos\phi+ysen\phi)} \\ &+ \int_0^\pi d\phi \int_0^\infty \omega d\omega \tilde{O}_{\phi+\pi}(\omega,\phi+\pi) e^{i2\pi\omega(xcos[\phi+\pi]+ysen[\phi+\pi])}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

con $\tilde{O}_\phi(\omega,\phi)$ los valores de la funci'on $\tilde{O}(\mu,\nu)$ a lo largo de la recta $\omega_\perp = 0$ en coordenadas polares.

Para visualizar algunas simetr'ias de una proyecci'on, consider'ese primero una funci'on $\delta(x-x_0, y-y_0)$, con $x_0 = r_0cos\phi_0$, $y_0 = r_0sen\phi_0$. Su proyecci'on es

$$\begin{aligned} \breve{f}_\phi(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} dxdy\delta(x-x_0,y-y_0)\delta(p-xcos\phi-ysen\phi) \\ &= \delta(p-x_0cos\phi-y_0sen\phi) \\ &= \delta(p-r_0cos[\phi-\phi_0]). \end{aligned} \tag{2.10}$$

El senograma correspondiente es un trazo senoidal(plano p, ϕ) con desfasamiento ϕ_0, donde se entiende a un senograma como las proyecciones de la funci'on a cada diferente 'angulo de detecci'on. En general

$$\breve{f}_{\phi+2\pi}(p) = \breve{f}_{\phi}(p) \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} \breve{f}_{\phi+\pi}(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} dxdyf(x,y)\delta(p - xcos[\phi+\pi] - ysen[\phi+\pi]) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dxdyf(x,y)\delta(p + xcos\phi + ysen\phi) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dxdyf(x,y)\delta(-p - xcos\phi - ysen\phi) \\ &= \breve{f}_{\phi}(-p), \end{aligned} \tag{2.12}$$

donde $\delta(\frac{x}{x_0}) =\mid x_0 \mid \delta(x)$ con $x_0 = -1$. Es una simetr'ia de medio ciclo.
De la simetr'ia de medio ciclo, se tiene para la transformada

$$\begin{aligned} \tilde{\breve{f}}_{\phi+\pi}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dp\breve{f}_{\phi+\pi}(p)e^{-i2\pi p\omega} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp\breve{f}_{\phi}(-p)e^{-i2\pi p\omega} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp\breve{f}_{\phi}(p)e^{i2\pi p\omega} \\ &= \tilde{\breve{f}}_{\phi}(-\omega). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Aplicando la simetr'ia al segundo t'ermino de la ecuaci'on (2.9), se obtiene

$$\int_0^{\pi} d\phi \int_0^{\infty} \omega d\omega \tilde{O}_{\phi+\pi}(\omega, \phi+\pi)e^{i2\pi(-xcos\phi - ysen\phi)w}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\pi} d\phi \int_0^{\infty} \omega d\omega \tilde{O}_{\phi}(-\omega, \phi)e^{-i2\pi\omega p} \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{-\infty} -\omega(-d\omega)\tilde{O}_{\phi}(\omega, \phi)e^{i2\pi\omega p} \\ &= \int_0^{\pi} d\phi \int_{-\infty}^{0} \mid \omega \mid d\omega \tilde{O}_{\phi}(\omega, \phi)e^{i2\pi\omega p}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

donde $p = xcos\phi + ysen\phi$. La ecuaci'on (2.14) resulta entonces

$$O(x,y) = \int_0^{\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mid \omega \mid \tilde{O}_{\phi}(\omega, \phi)e^{i2\pi\omega p}. \tag{2.15}$$

Por otra parte el teorema de Fourier de rebanada establece que

$$\tilde{O}_{\phi}(\omega, \phi) = \tilde{\breve{O}}_{\phi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dp\tilde{O}_{\phi}(p)e^{-i2\pi\omega p}, \tag{2.16}$$

con $\breve{O}_\phi(p)$ la proyecci'on paralela de $O(x,y)$. Definiendo a la proyecci'on filtrada como

$$\breve{Q}_\phi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mid \omega \mid \tilde{\breve{O}}_\phi(\omega) e^{i2\pi\omega p}, \tag{2.17}$$

la ecuaci'on (2.15) se reescribe como

$$O(x,y) = \int_0^\pi d\phi \breve{Q}_\phi(p) = \int_0^\pi d\phi \breve{Q}_\phi(xcos\phi + ysen\phi). \tag{2.18}$$

El resultado establece una posible operaci'on de transformaci'on inversa de Radon mediada por un filtrado, con un filtro espacial $\mid \omega \mid$, por lo cual $\breve{Q}_\phi(p)$ es una proyecci'on filtrada ecuaci'on (2.16). La ecuaci'on (2.17) es la retroproyecci'on de las proyecciones filtradas.

2.4 Retroproyecci'on (backprojection)

La ecuaci'on (2.18) establece una sumatoria angular de las proyecciones filtradas $\breve{Q}_\phi(p)$, que son variantes de $\breve{f}_\phi(p)$ alteradas por un filtro de transmitancia $\mid \omega \mid$. La correspondiente sumatoria de las proyecciones sin filtrar puede escribirse como

$$\hat{O}(x,y) \equiv O_b(x,y) = \int_0^\pi d\phi \breve{O}_\phi(p) = \int_0^\pi d\phi \breve{O}_\phi(\vec{x} \cdot \hat{u}_\phi). \tag{2.19}$$

El resultado, siendo una funci'on sobre el plano (x,y), puede pensarse como la suma de los valores $\breve{f}_\phi(p)$ extendidos a lo largo de las rectas perpendiculares a $\hat{u}_\phi$. Puede considerarse que $O_b(x,y)$ es una versi'on aproximada de $O(x,y)$. Â¿Qu'e tan aproximada puede ser 'esta versi'on?, surge del analisis siguiente. $O(\vec{x})$ es la retroproyecci'on de las $\breve{O}_\phi(p)$.
Cambiando de sistema coordenado, con $O_b(x,y) \to \hat{O}_b(r,\theta)$, se tiene

$$\hat{O}_b(r,\theta) = 2\pi\vec{\mathcal{B}}\breve{O}_\phi(p) = 2\pi\vec{\mathcal{B}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{O}(\omega,\phi) e^{i2\pi\omega p},$$

habiendo usado la ecuaci'on (2.7), aplicando $\mathcal{F}_{1D}^{-1}\mathcal{F}_{2D}$ en ambos miembros. Entonces

$$\begin{aligned} \hat{O}_b(r,\theta) &= \int_0^\pi d\phi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{O}(\omega,\phi) e^{i2\pi\omega r cos(\theta-\phi)} \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} d\omega \tilde{O}(\omega,\phi) e^{i2\pi\omega r cos(\theta-\phi)} \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} \omega d\omega [\tilde{O}(\omega,\phi)\omega^{-1}] e^{i2\pi\omega r cos(\theta-\phi)} \\ &= \mathcal{F}_{2D}^{-1}\{\omega^{-1}\tilde{O}(\omega,\phi)\}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Usando ahora el teorema de convoluci'on, se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{O}_b(r,\theta) &= \mathcal{F}_{2D}^{-1}\{\omega^{-1}\} * \mathcal{F}_{2D}^{-1}\{\tilde{O}(\omega,\phi)\} \\ &= \frac{1}{r} * O(r,\theta), \end{aligned} \tag{2.21}$$

con $\xi = 2\pi\omega$, y de la transformada de Hankel, se usa el siguiente resultado

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{2D}^{-1}\{\frac{1}{\omega}\} &= 2\pi \int_0^\infty J_0(2\pi\omega r)d\omega \\ &= \int_0^\infty J_0(r\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{r}\int_0^\infty J_0(\xi')d\xi' = \frac{1}{r}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

As'i, $\hat{O}(x,y)$ resulta ser una version $O(x,y)$ construida a partir de una funci'on de respuesta impulso de la forma $\frac{1}{r}$ (emborronamiento $\frac{1}{r}$).

2.5 Algoritmos para reconstrucci'on empleando retroproyeci'on de proyecciones filtradas

Retornando a las proyecciones filtradas $\breve{Q}_\phi(p)$ dadas por la ecuaci'on (3.17) se observa que puede reescribirse como una convoluci'on:

$$\begin{aligned} \breve{Q}_\phi(p) &= \mathcal{F}^{-1}\{\mid \omega \mid \tilde{\breve{Q}}_\phi(\omega)\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\{\mid \omega \mid\} * \breve{O}_\phi(p) \\ &= h_{\mathcal{B}}(p) * \breve{O}_\phi(p), \end{aligned} \tag{2.23}$$

donde $h_{\mathcal{B}}(p) = \mathcal{F}^{-1}\{\mid \omega \mid\}$. La implementaci'on num'erica de la ecuaci'o (3.23) es empleada para obtener su retroproyecci'on seg'un la ecuaci'on (3.18). Diversas aproximaciones a $h_{\mathcal{B}}(p)$ determinan diferentes filtrados. Cuatros filtros son usados en los algoritmos de reconstrucci'on: Low pass cosine, Shepp-Logan, Ram-Lak y Hamming generalizado.

2.6 El momento cero de la transformada de Radon

La propiedad de 'areas constantes para cada proyecci'on es muy general y se relaciona con el momento cero de la transformada de Radon, definido como $\int_{-\infty}^{\infty} dp\breve{O}_\phi(p)$. Por sustituci'on, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dp\breve{O}_\phi(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \left(\int_{-\infty}^{\infty} d\vec{x}O(\vec{x})\delta(p-\hat{u}_\phi\cdot\vec{x}) \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{x}O(\vec{x}) \int_{-\infty}^{\infty} dp\delta(p-\hat{u}_\phi\cdot\vec{x}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{x}O(\vec{x}) = \mathcal{F}\{O(x,y)\}_{\mu=\nu=0}, \end{aligned} \tag{2.24}$$

que resulta ser el promedio de la funci'on $O(x,y)$, o bien, el valor del orden $(0,0)$ de su transformada bidimensional, $\tilde{O}(0,0)$. El promedio es el 'unico punto en com'un de las transformadas de Fourier (unidimensionales, de p a ω) de cada proyecci'on, por lo cual, debe ser de igual valor independiente de ϕ. Si la funci'on $O(x,y) = K$, el momento cero es $K-veces$ el 'area del dominio de la funci'on, que es un caso particular. Esta propiedad puede ilustrarse con el caso del objeto $O(x, y) = rect([x-1/2]/2)rect([y-1/2)]/2)$. El momento cero es

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp\breve{O}_\phi(p) = \int_0^{sen\phi} \frac{pdp}{sen\phi cos\phi} + \int_{sen\phi}^{cos\phi} \frac{dp}{cos\phi} + \int_{cos\phi}^{sen\phi+cos\phi} \frac{sen\phi + cos\phi - p}{sen\phi cos\phi} dp$$

$$= \frac{p^2}{2sen\phi cos\phi} |_0^{sen\phi} + \frac{p}{cos\phi} |_{sen\phi}^{cos\phi} + \frac{sen\phi + cos\phi}{sen\phi cos\phi} p |_{cos\phi}^{sen\phi+cos\phi}$$
$$- \frac{1}{2} \frac{p^2}{sen\phi cos\phi} |_{cos\phi}^{sen\phi+cos\phi}$$
$$= \frac{1}{2} tan\phi + 1 - tan\phi + \frac{sen\phi + cos\phi}{sen\phi cos\phi}(sen\phi + cos\phi - cos\phi) - \frac{1}{2} \frac{(sen\phi + cos\phi)^2}{sen\phi cos\phi}$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{cos\phi}{sen\phi}$$
$$= -\frac{1}{2} tan\phi + 1 + \frac{sen\phi + cos\phi}{cos\phi} - \frac{1}{2} \frac{sen^2\phi + 2sen\phi cos\phi + cos^2\phi}{sen\phi cos\phi} + \frac{1}{2} \frac{cos\phi}{sen\phi}$$
$$= -\frac{1}{2} tan\phi + 1 + tan\phi + 1 - \frac{1}{2}(tan\phi + 2 + \frac{cos\phi}{sen\phi}) + \frac{1}{2} \frac{cos\phi}{sen\phi}$$
$$= -\frac{1}{2} tan\phi + 1 + tan\phi + 1 - \frac{1}{2} tan\phi - 1 - \frac{1}{2} \frac{cos\phi}{sen\phi} + \frac{1}{2} + \frac{cos\phi}{sen\phi}$$
$$= 1.$$

Interpretando el 'area de cada proyecci'on como proporcional a la amplitud transmitida, debe ser siempre de igual valor. La verificaci'on experimental de esta propiedad puede servir como un criterio de rechazo de datos experimentales en el caso de violarse.

Capítulo 3

La distribución de Wigner en señales de una dimensión

3.1 Definición. Difracción en campo lejano. Sistemas ópticos. Formación de imágenes.

Las transformaciones integrales involucradas en difracción tienen relación con la llamada distribución de Wigner, que puede definirse como:

$$W_f(x,\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x+\frac{x'}{2}) f^*(x-\frac{x'}{2}) e^{-i2\pi\mu x'} \tag{3.1}$$

Donde $f(x)$ es una señal unidimensional y μ su variable conjugada en transformada de Fourier. Entonces, en nuestra notación:

$$W_f(x,\mu) = \mathcal{F}_{x'\to\mu}\{f(x+\frac{x'}{2}) f^*(x-\frac{x'}{2})\} \tag{3.2}$$

Por ejemplo, si $x = 0$

$$\begin{aligned} W_f(0,\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x'/2) f^*(-x'/2) e^{-i2\pi\mu x'} \\ &= \mathcal{F}\{f(x'/2) f^*(-x'/2)\} \\ &= \mathcal{F}\{f(x'/2)\} * \mathcal{F}\{f^*(-x'/2)\} \\ &= 4\tilde{f}(2\mu) * \tilde{f}^*(2\mu) \end{aligned} \tag{3.3}$$

3.1.1 Propiedades básicas

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} d\mu W_f(x,\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\mu dx' f(x+x'/2)f^*(x-x'/2)e^{-i2\pi\mu x'} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x+x'/2)f^*(x-x'/2)\int_{-\infty}^{\infty} d\mu e^{-i2\pi\mu x'} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x+x'/2)f^*(x-x'/2)\delta(x') \\
f(x)f^*(x) &= \mid f(x)\mid^2 \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

Otra propiedad es:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dx W_f(x,\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx dx' f(x+x'/2)f^*(x-x'/2)e^{-i2\pi\mu x'} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-i2\pi\mu x'}\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x+x'/2)f^*(x-x'/2) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-i2\pi\mu x'}\int_{-\infty}^{\infty} dx'' f(x'')f^*(x''-x') \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-i2\pi\mu x'}\int_{-\infty}^{\infty} dx'' f(x'')f^*(-[x'-x'']) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-i2\pi\mu x'}[f(x')*f^*(-x')] \\
&= \mathcal{F}\{f(x')*f^*(-x')\} \\
&= \mathcal{F}\{f(x')\}\mathcal{F}\{f^*(-x')\} \\
\tilde{f}(\mu)\tilde{f}^*(\mu) &= \mid \tilde{f}(\mu)\mid^2 \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

3.1.2 Relaciones de Parseval

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx d\mu W_f(x,\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x+x'/2)f^*(x-x'/2)dx d\mu e^{-i2\pi\mu x'} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x+x'/2)f^*(x-x'/2)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\mu x'}d\mu \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x+x'/2)f^*(x-x'/2)\delta(x') \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)f^*(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \mid f(x)\mid^2 \\
&\equiv \,\mid\mid f\mid\mid^2 \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

Se nota que considerando (3.5)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx d\mu W_f(x,\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} dx W_f(x,\mu) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \mid \tilde{f}(\mu) \mid^2 \end{aligned} \tag{3.7}$$

O bien considerando (3.4)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx d\mu W_f(x,\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} d\mu W_f(x,\mu) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \mid \tilde{f}(x) \mid^2 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Por lo cual se restablece el teorema de Parseval:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx \mid \tilde{f}(x) \mid^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \mid \tilde{f}(\mu) \mid^2 \\ \mid\mid f \mid\mid^2 &= \mid\mid \tilde{f} \mid\mid^2 \end{aligned} \tag{3.9}$$

3.2 Simetría en la definición de $W_f(x,\mu)$ respecto de x y de μ

Una de las características más interesantes de la distribución de Wigner consiste en la simetría de su definición respecto de x y μ. Considere la operación que define a W_f pero realizada en el espacio μ, con un cambio de signo en el núcleo:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x+\frac{x'}{2}) f^*(x-\frac{x'}{2}) e^{-i2\pi\mu x'} &= \mathcal{F}\{f(x+\frac{x'}{2}) f^*(x-\frac{x'}{2})\} \\ &= \mathcal{F}\{f(x+\frac{x'}{2})\} * \mathcal{F}\{f^*(x-\frac{x'}{2})\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2\tilde{f}(2\mu) e^{i2\pi(2\mu)x} * 2\tilde{f}^*(2\mu) e^{-i2\pi(2\mu)x} \\ &= 2\cdot 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \tilde{f}(2\xi) e^{i2\pi(2\xi)x} \tilde{f}(2\mu-2\xi) e^{-i2\pi 2(\mu-\xi)x} \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi'' \tilde{f}(\mu+\xi'') \tilde{f}^*(\mu-\xi'') e^{i2\pi 2\xi'' x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\mu' \tilde{f}(\mu+\mu'/2) \tilde{f}^*(\mu-\mu'/2) e^{i2\pi\mu' x} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Donde ultizando definición de convolución y cambios de variable obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x+\frac{x'}{2}) f^*(x-\frac{x'}{2}) e^{-i2\pi\mu x'} = \int_{-\infty}^{\infty} d\mu' \tilde{f}(\mu+\frac{\mu'}{2}) \tilde{f}^*(\mu-\frac{\mu'}{2}) e^{i2\pi\mu' x} \tag{3.11}$$

3.3 Algunas distribuciones de Wigner: ejemplos $\xi, \chi_0, \zeta_0 s \in \mathbb{R}$

3.3.1 $f(x) = e^{i2\pi\xi_0 x}$, fase lineal

$$\begin{aligned} W_f(x,\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{i2\pi\xi_0(x+\frac{x'}{2})} e^{-i2\pi\xi_0(x-\frac{x'}{2})} e^{-i2\pi\mu x'} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-i2\pi(\mu-\xi_0)x'} \\ &= \delta(\mu-\xi_0) \end{aligned} \tag{3.12}$$

3.3.2 $f(x) = \delta(x-\xi_0)$

$$\begin{aligned} W_f(x,\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \delta(x+\frac{x'}{2}-\xi_0)\delta(x-\frac{x'}{2}-\xi_0) e^{i2\pi\mu x'} \\ &= 4\int_{-\infty}^{\infty} dx' \delta(x'-2[x-\xi_0])\delta(x'+2[x-\xi_0]) e^{-i2\pi\mu x'} \\ &= 4\delta(4[x-\xi_0]) e^{-i2\pi\mu 4(x-\xi_0)} \\ &= \delta(x-\xi_0) \end{aligned} \tag{3.13}$$

3.3.3 $f(x) = exp\{-i\pi(\chi_0 x^2 + 2\xi_0 x + \zeta_0)\}$, fase cuadrática

$$\begin{aligned} W_f(x,\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' exp\{-i\pi(\chi_0 x' x + \xi_0 x')\} exp\{-i2\pi\mu x'\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' exp\{-i2\pi(-\chi_0 x' x + [\mu-\xi_0]x')\} \\ &= \delta(\mu-\xi_0-\chi_0 x) \end{aligned} \tag{3.14}$$

3.3.4 $(2\sigma)^{\frac{1}{4}} exp\{-\pi\sigma x^2\}$, función gaussiana

$$\begin{aligned} W_f(x,\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' (2\sigma)^{\frac{1}{4}} exp\{-2\pi\sigma(x^2 + (\frac{x'}{2})^2 - i\mu\frac{x'}{\sigma})\} \\ &= (2\sigma)^{\frac{1}{2}} exp\{-2\pi\sigma x^2\} \int_{-\infty}^{\infty} dx' exp\{-2\pi\sigma([\frac{x'}{2}]^{-} i\frac{\mu}{\sigma}x' + \frac{\mu^2}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{\sigma^2})\} \\ &= (2\sigma)^{\frac{1}{2}} exp\{-2\pi\sigma x^2\} exp\{-2\pi\frac{\mu^2}{\sigma^2}\} \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma}}\sqrt{\pi} \\ &= 2exp\{-2\pi(\sigma x^2 + \frac{\mu^2}{\sigma^2})\} \end{aligned} \tag{3.15}$$

3.3.5 $f(x) = rect(x)$, función rectangular

$$W_f(x,\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' rect(x+\frac{x'}{2}) rect(x-\frac{x'}{2}) e^{-i2\pi\mu x'}$$

Realizando el cambio de variable $x'' = x + \frac{x'}{2}$ tenemos:

$$\begin{aligned} W_f(x,\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx'' rect(x'') rect(2x - x'') e^{-i2\pi\mu 2(x''-x)} \\ &= e^{i2\pi\mu 2x} 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx'' rect(2x - x'') e^{-i2\pi\mu 2x''} \end{aligned}$$

Que es la transformada de Fourier de un rectángulo de ancho $1 - 2 \mid x \mid$ desplazado por $x'' = \frac{(1-2x)}{2} + (2x - \frac{1}{2}) = x$. La transformada se evalúa en 2μ, por lo cual.

$$\begin{aligned} W_f(x,\mu) &= e^{i2\pi(2\mu)x} 2(1 - 2 \mid x \mid) senc[2(1 - 2 \mid x \mid)\mu] e^{-i2\pi(2\mu)x} \\ &= 2(1 - 2 \mid x \mid) rect(x) senc[2(1 - 2 \mid x \mid)\mu] \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.4 Otras propiedades

3.4.1 Conjugación

$$\begin{aligned} W_f^*(x,\mu) &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x + x'/2) f^*(x - x'/2) e^{-i2\pi\mu x'} \right]^* \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' f^*(x + x'/2) f(x - x'/2) e^{i2\pi\mu x'} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Realizando el cambio de varible $x'' = -x'$ tenemos que:

$$\begin{aligned} W_f^*(x,\mu) &= -\int_{\infty}^{-\infty} dx'' f^*(x - x''/2) f(x + x''/2) e^{-i2\pi\mu x''} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx'' f^*(x - x''/2) f(x + x''/2) e^{-i2\pi\mu x''} \\ &= W_f(x,\mu) \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.4.2 Desplazamiento en x: $f(x - \xi_0)$

$$\begin{aligned} W_f(x,\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x + x'/2 - \xi_0) f^*(x - x'/2 - \xi_0) e^{-i2\pi\mu x'} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' f([x - \xi_0] + x'/2) f^*([x - \xi_0] - x'/2) e^{-i2\pi\mu x'} \\ &= W_f(x - \xi_0, \mu) \end{aligned} \quad (3.19)$$

3.4.3 Función de fase lineal: $e^{i2\pi\xi_0 x} f(x)$

$$\begin{aligned} W_f(x,\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{i2\pi\xi_0(x+x'/2)} e^{-i2\pi\xi_0(x-x'/2)} f(x - x'/2) f^*(x - x'/2) e^{-i2\pi\mu x'} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-i2\pi[\mu-\xi_0]x'} f(x - x'/2) f^*(x - x'/2) \\ &= W_f(x, \mu - \xi_0) \end{aligned} \quad (3.20)$$

3.4.4 Momentos

Considerando las ecuaciones (3.7) y (3.8) tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\mu dx x^n W_f(x,\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx x^n \int_{-\infty}^{\infty} d\mu W_f(x,\mu) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx x^n \mid f(x) \mid^2 \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned} \int_{\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\mu dx \mu^n W_f(x,\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \mu^n \int_{-\infty}^{\infty} dx W_f(x,\mu) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \mu^n \mid \tilde{f}(\mu) \mid^2 \end{aligned} \tag{3.22}$$

3.4.5 Escalamiento en espacio y frecuencia: $x/\mu \rightarrow x$, $M\mu \rightarrow \mu$

$$\begin{aligned} \tilde{W}_f(x,\mu) &= \frac{1}{M}\int_{-\infty}^{\infty} dx' f(\frac{x+x'/2}{M}) f^*(\frac{x-x'/2}{M}) e^{-i2\pi M\mu \frac{x'}{M}} \\ &= \frac{1}{M}\int_{-\infty}^{\infty} dx'' M f(x/M + x''/2) f^*(x/M - x''/2) e^{-i2\pi M\mu x''} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx'' f(x/M + x''/2) f^*(x/M - x''/2) e^{-i2\pi M\mu x''} \\ &= W_f(\frac{x}{M}, M\mu) \end{aligned} \tag{3.23}$$

3.5 Condiciones para que $W_f(x,\mu)$ sea distribución de alguna función

Invirtiendo la definición de la distribución de Wigner, obtenemos:

$$f(x+x'/2)f^*(x-x'/2) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mu W_f(x,\mu)e^{i2\pi\mu x'} \tag{3.24}$$

Si, y sólamente si después de evaluar la integral del segundo miembro para una cierta función $W_f(x,\mu)$ dada, el resultado fuera expresable de la forma indicada en el primer miembro, tal función $W_f(x,\mu)$ sería una función distribución de Wigner legítima. De lo contrario no tendría correspondencia como función $f(x)$ alguna.
Para el caso en que $x = x'/2$, de la ecuación (3.23) para una distribución legítima:

$$f(x') = \frac{1}{f^*(0)} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu W_f(x'/2,\mu)e^{i2\pi\mu x'} \tag{3.25}$$

Por otra parte, si $f'(x) = f(x)e^{i\pi\xi_0}$ con $x \to x'$ entonces:

$$\begin{aligned} f'(x+x'/2)f'^*(x-x'/2) &= f(x+x'/2)e^{i\pi\xi_0}f^*(x-x'/2)e^{-i\pi\xi_0} \\ &= f(x+x'/2)f^*(x-x'/2) \end{aligned} \tag{3.26}$$

Por lo cual $W_{f'}(x,\mu) = W_f(x,\mu) = W_f(x,\mu)$: $f'(x)$ y $f(x)$ posee idéntica distribución de Wigner.

3.6 Tren de pulsos

Para el caso de un tren de pulsos (peine de Dirac), se tiene que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-nx_0) \tag{3.27}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} W_{\Sigma\delta}(x,\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x+x'/2-n) \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \delta(x-x'/2-n')e^{-i2\pi\mu x'} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx'\delta(x+x'/2-n)\delta(x-x'/2-n')e^{-i2\pi\mu x'} \end{aligned}$$

Para $x'/2 = n - x$, resulta:

$$
\begin{aligned}
W_{\Sigma\delta}(x,\mu) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{n'=-\infty}^{\infty}\delta(2x-[n+n'])e^{-i2\pi\mu(2n-2x)} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{n'=-\infty}^{\infty}\delta(2x-[n+n'])e^{-i2\pi\mu 2n}e^{i2\pi 2\mu x} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{n'=-\infty}^{\infty}\delta(x-\frac{n+n'}{2})e^{-i2\pi 2\mu n}e^{i4\pi\mu x} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n''=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n''/2)e^{-i2\pi\mu n\frac{1}{1/2}}e^{i4\pi\mu x} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n''=-\infty}^{\infty}\delta(x-\frac{n''}{2})\sum_{n=-\infty}^{\infty}e{-}i2\pi\mu 2ne^{i4\pi\mu x} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n''=-\infty}^{\infty}\delta(x-\frac{n''}{2})\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\mu-\frac{n}{2})e^{i4\pi\mu x} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-\frac{n}{2})\sum_{n'=-\infty}^{\infty}\delta(\mu-\frac{n'}{2})(-1)^{nn'} \qquad (3.28)
\end{aligned}
$$

Dado que $x = \frac{n''}{2}$, $\mu = n\frac{n}{2}$ y $x\mu = \frac{nn''}{2}$. Así

$$
W_{\Sigma\delta}(x,\mu) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{n'=-\infty}^{\infty}(1)^{nn'}\delta(x-\frac{n}{2})\delta(\mu-\frac{n'}{2}) \qquad (3.29)
$$

3.7 Productos de distribuciones de Wigner

3.7.1 Productos integrados en espacio y frecuencia

Consideérese el producto de dos distribuciones de Wigner. Al integrarlo en espacio y frecuencia, se obtiene que, para las funciones f y h

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dxd\mu W_f(x,\mu)W_h(x,\mu) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dx'\int_{-\infty}^{\infty}dx'' f(x+\frac{x'}{2})f^*(x-\frac{x'}{2})h(x+\frac{x''}{2})h^*(x-\frac{x''}{2})\delta(x'+x'') \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dx' f(x+\frac{x'}{2})f^*(x-\frac{x'}{2})h(x-\frac{x'}{2})h^*(x+\frac{x'}{2}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dx'\left[f^*(x+\frac{x'}{2})h(x+\frac{x'}{2})\right]^* f^*(x-\frac{x'}{2})h(x-\frac{x'}{2}) \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

Considerando que las variables son de igual tipo y escala, se obtiene:

$$
\mid\int_{-\infty}^{\infty}dxf^*(x)h(x)\mid^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dxd\mu W_f(x,\mu)W_h(x,\mu) \qquad (3.31)
$$

3.7.2 Productos integrados en el espacio

Puede obtenerse la transformada de Wigner de una convolución, para ello se debe calcular

$$h(x) * f(x)\,|_{x+x'/2} \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} d\xi h(\xi) f(x + x'/2 - \xi) \tag{3.32}$$

Además tomando:

$$(h(x) * f(x))^*\,|_{x+x'/2} \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f^*(\xi') h^*(x - x'/2 - \xi') \tag{3.33}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} W_{h*f}(x,\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} d\xi h(\xi) f(x + \frac{x'}{2} - \xi) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' f^*(\xi') h^*(x - \frac{x'}{2} - \xi') e^{-i2\pi\mu x'} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' h(\xi) h^*(x - \frac{x'}{2} - \xi') f(x + \frac{x'}{2} - \xi) f^*(\xi') e^{-i2\pi\mu x'} \end{aligned} \tag{3.34}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} W_f(x - x', \mu) W_h(x', \mu) dx' = \\ &\int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x' + \frac{\xi}{2}) f^*(x - x' - \frac{\xi}{2}) e^{-i2\pi\mu\xi'} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} h(x' + \frac{\xi'}{2}) h^*(x' - \frac{\xi'}{2}) e^{-i2\pi\mu\xi'} d\xi' \\ &\int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' h(x' + \frac{\xi'}{2}) h^*(x' - \frac{\xi'}{2}) f(x - x' + \frac{\xi}{2}) f^*(x - x' - \frac{\xi'}{2}) e^{-i2\pi\mu(\xi+\xi')} \end{aligned} \tag{3.35}$$

Considerando las expresiones (3.33) y (3.34), para que sean equivalentes debe suceder que se cumplan las siguientes estructuras:

$$\begin{gathered} x' = \xi_0 + \xi_0', \quad \xi = x_0' + \tfrac{\xi_0'}{2}, \quad x - \tfrac{x'}{2} - \xi' = x_0' - \tfrac{\xi_0'}{2} \\ \xi' = x_0 - x_0' - \tfrac{\xi_0}{2}, \quad x + \tfrac{x'}{2} - \xi = x_0 - x_0' + \tfrac{\xi_0}{2} \end{gathered}$$

Sustituyendo encontramos lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' h(x_0' + \frac{\xi_0'}{2}) h^*(x_0' - \frac{\xi_0'}{2}) f(x_0 - x_0' + \frac{\xi_0}{2}) f^*(x_0 - x_0' - \frac{\xi_0'}{2}) e^{-i2\pi\mu(\xi_0+\xi_0')} \\ = & \int_{-\infty}^{\infty} dx_0' \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_0' \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_0 h(x_0' + \frac{\xi_0'}{2}) h^*(x_0' - \frac{x_0'}{2}) f(x_0 - x_0' + \frac{\xi_0}{2}) f^*(x_0 - x_0' - \frac{\xi_0'}{2}) e^{-i2\pi\mu(\xi_0+\xi_0')} \\ = & \int_{-\infty}^{\infty} dx_0' \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_0' h(x_0' + \frac{\xi_0'}{2}) h^*(x_0' - \frac{x_0'}{2}) e^{-i2\pi\mu x_0'} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_0 f(x_0 - x_0' + \frac{\xi_0}{2}) f^*(x_0 - x_0' - \frac{\xi_0'}{2}) e^{-i2\pi\mu\xi_0} \\ = & \int_{-\infty}^{\infty} dx_0' W_h(x_0, \mu) W_f(x_0, \mu) \end{aligned} \tag{3.36}$$

Lo cual nos lleva a

$$W_{h*f}(x,\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} dx W_h(x,\mu) W_f(x,\mu) \tag{3.37}$$

3.7.3 Transformada de Wigner y transformada de Fourier

Siendo

$$\tilde{f}(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-i2\pi\mu x}, \quad \text{con} \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \tilde{f}(\mu) e^{i2\pi\mu x}$$

Se tiene que

$$\tilde{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f(\xi) e^{-i2\pi\mu\xi} \,|_{\mu=x} = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f(\xi) e^{-i2\pi x\xi}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x + x'/2) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f(\xi) e^{-i2\pi(x+x'/2)\xi} \quad \text{y tambi'en} \\
\tilde{f}^*(x - x'/2) &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\xi f(\xi) e^{-i2\pi(x-x'/2)\xi}\right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f^*(\xi) e^{i2\pi(x-x'/2)\xi},
\end{aligned}$$

por lo cual, $W_{\tilde{f}}$ es

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f(\xi) e^{-i2\pi(x+x'/2)\xi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' f^*(\xi') e^{i2\pi(x-x'/2)\xi'} e^{-i2\pi\mu x'} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' f(\xi) f^*(\xi') e^{-i2\pi(x+x'/2)\xi} e^{i2\pi(x-x'/2)\xi'} e^{-i2\pi\mu x'} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' f(\xi) f^*(\xi') e^{-i2\pi x[\xi-\xi']} e^{-i2\pi \frac{x}{2}[\xi-\xi']} e^{-i2\pi\mu x'}.
\end{aligned}$$

Bucando $\xi = \xi_0 + {\xi'}_0/2$ y $\xi' = \xi - {\xi'}_0/2$, se observa que

$$\xi \pm {\xi'}_0 = \begin{cases} 2\xi_0 \\ {\xi'}_0 \end{cases} \tag{3.38}$$

por lo que la integral anterior se escribe como

$$\begin{aligned}
W_{\tilde{f}} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_0 \int_{-\infty}^{\infty} d{\xi'}_0 f(\xi_0 + {\xi'}_0/2) f^*(\xi - {\xi'}_0/2) e^{-i2\pi x{\xi'}_0} e^{-i2\pi x'\xi_0} e^{-i2\pi\mu x'} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi'_0 f(\xi_0 + \xi'_0/2) f^*(\xi_0 - \xi'_0/2) e^{-i2\pi x\xi'_0} \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-i2\pi x'[\mu+\xi_0]} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi'_0 f(\xi_0 + \xi'_0/2) f^*(\xi_0 - \xi'_0/2) e^{-i2\pi x\xi'_0} \delta(\mu + \xi_0) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi'_0 f(-\mu + \xi'_0/2) f^*(-\mu - \xi'_0/2) e^{-i2\pi(-\mu)x} = W_f(-\mu, x).
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Este resultado puede interpretarse en t'erminos de un giro de $W_f(x, \mu)$. En efecto, $W_f(xcos\theta - \mu sen\theta, xsen\theta + \mu sen\theta)$ ser'ia la expresi'on de la transformada de Wigner girada por el 'angulo θ. Para $\theta = \frac{\pi}{2}$, se tiene que $W_f(-\mu, x)$. As'i,

$$W_{\tilde{f}}(x, \mu) = W_f(-\mu, x)$$

implica que las transformadas de Wigner de un par de Fourier resultan de un giro de $\frac{\pi}{2}$ una de la otra. La matriz correspondiente ser'ia

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu \\ x \end{pmatrix}$$

3.7.4 Convoluci'on y transformada de Wigner

Atendiendo al resultado anterior

$$W_{f\cdot g} = W_{\tilde{f}*\tilde{g}}(-\mu, x),$$

y ya que $f \cdot g$ y $\tilde{f} * \tilde{g}$ son pares de Fourier. Con los cambios

$$-\mu \to x, \quad x \to \mu, \quad \mu' \to x$$

en la ecuaci'on (3.36), se tiene

$$\begin{aligned} W_{f\cdot g}(x,\mu)W_{\tilde{f}*\tilde{g}}(-\mu,x) &= \int_{+\infty}^{-\infty} (-d\mu')W_{\tilde{f}}(-\mu',x)W_{\tilde{g}}(-\mu+\mu',x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\mu' W_f(x,\mu')W_g(x,\mu-\mu') \end{aligned} \tag{3.40}$$

3.8 La funci'on de ambigüedad

La funci'on de ambigüedad se define como

$$A_f(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{\mu}}) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x'+\bar{\bar{x}}/2)f^*(x'-\bar{\bar{x}}/2)e^{-i2\pi\bar{\bar{\mu}}x'} \tag{3.41}$$

Compar'ando esta expresi'on con la ecuaci'on (3.1), pueden definirse las siguientes dos funciones

$$\begin{aligned} \Upsilon(\mu,\bar{\bar{x}}) &= f(x+\bar{\bar{x}}/2)f^*(x-\bar{\bar{x}}/2) && (3.42) \\ \Gamma(\mu,\bar{\bar{\mu}} &= \tilde{f}(\mu+\bar{\bar{\mu}}/2)\tilde{f}^*(\mu-\bar{\bar{\mu}}/2). && (3.43) \end{aligned}$$

Con estas funciones, se encuentran las realciones de Fourier

$$W_f(x,\mu)\int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\bar{x}}\Upsilon(x,\bar{\bar{x}})e^{-i2\pi\mu\bar{\bar{x}}} = \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\bar{\mu}}\Gamma(\mu,\bar{\bar{\mu}})e^{i2\pi\bar{\bar{\mu}}x} \tag{3.44}$$

donde se ha usado la ecuaci'on (3.10), reescribiendo con las nuevas definiciones. An'alogamente,

$$A_f(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{\mu}}) = \int_{-\infty}^{\infty} \Upsilon(x,\bar{\bar{x}})e^{-i2\pi\bar{\bar{\mu}}x} = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\mu,\bar{\bar{\mu}})e^{i2\pi\mu\bar{\bar{x}}}. \tag{3.45}$$

Observando las relaciones inversas de Fourier de las ecuaciones (3.42) y (3.43) se tiene que por ejemplo,

$$\Upsilon(x,\bar{\bar{x}}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mu W_f(x,\mu)e^{i2\pi\mu\bar{\bar{x}}} \tag{3.46}$$

por lo cual, tras sustituci'on en la ecuai'on (3.44), se obtiene

$$A_f(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{\mu}}) = \int_{-\infty}^{\infty} dxd\mu W_f(x,\mu)e^{-i2\pi(\bar{\bar{\mu}}x-\mu\bar{\bar{x}})}. \tag{3.47}$$

Algunas propiedades son las siguientes:

$$\begin{array}{rcl} A_f^*(-\bar{\bar{x}},-\bar{\mu}) & = & A_f^*(\bar{\bar{x}},\bar{\mu}) \\ f(x-\xi) & \to & A_f(\bar{\bar{x}},\bar{\mu})e^{-i2\pi\xi\bar{\mu}} \\ e^{i2\pi\xi x}f(x) & \to & A_f(\bar{\bar{x}},\bar{\mu})e^{i2\pi\xi\bar{\bar{x}}} \\ A_f(0,\bar{\mu}) & = & \displaystyle\int \tilde{f}(\mu+\bar{\mu})\tilde{f}^*(\mu)d\mu) = \mathfrak{R}_{\tilde{f}\tilde{f}}(\bar{\mu}) \\ A_f(\bar{\bar{x}},0) & = & \displaystyle\int f(x+\bar{\bar{x}})f^*(x)dx = \mathfrak{R}_{ff}(\bar{\bar{x}}) \end{array}$$

3.9 Autocorrelaciones

Considerando $A_f(\bar{\bar{x}},0)$, se tiene

$$A_f(\bar{\bar{x}},0)\int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x'+\bar{\bar{x}}/2)f^*(x-\bar{\bar{x}}/2) = \mathfrak{R}_{ff}(\bar{\bar{x}}), \tag{3.48}$$

donde $\mathfrak{R}_{ff}(\bar{\bar{x}})$ es la funci'on de autocorrelaci'on. Su transformada de Fourier es la funci'on de densidad espectral $\mid \tilde{f}(\mu) \mid^2$

$$\begin{aligned} A_f(0,\bar{\mu}) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \mid f(x') \mid^2 e^{-i2\pi\mu x'} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\mu' \tilde{f}(\mu+\mu'/2)\tilde{f}^*(\mu-\mu'/2)e^{i2\pi\mu'\bar{\bar{x}}} \mid_{\bar{\bar{x}}=0} \\ &= \mathfrak{R}_{\tilde{f}\tilde{f}}(\bar{\mu}) \end{aligned} \tag{3.49}$$

3.10 Interrelaciones.

La ecuaci'on (3.44) puede rescribirse como

$$W_f(x,\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\bar{x}}\Upsilon(x,\bar{\bar{x}})e^{-i2\pi\mu\bar{\bar{x}}} = \int_{-\infty}^{\infty} d\mu\Gamma(\mu,\bar{\mu})e^{i2\pi\bar{\mu}x} \tag{3.50}$$

que, sustituido en la ecuaci'on (3.47), proporciona lo siguiente

$$\begin{aligned} A_f(\bar{\bar{x}},\bar{\mu}) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} d\mu W_f(x,\mu)e^{-i2\pi\mu\bar{\bar{x}}}e^{i2\pi\bar{\mu}x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dxd\mu W_f(x,\mu)e^{-i2\pi(\bar{\mu}x-\mu\bar{\bar{x}})} \end{aligned} \tag{3.51}$$

que es pr'acticamente una relaci'on de transformada de Fourier bidimensional. Lo ser'ia, excepto por el signo del factor $\mu\bar{\bar{x}}$, que sugiere una transformada inversa.
Las relaciones establecidas en las ecuaciones (3.46),(3.47) y (3.51) se ilustran en la figura siguiente.
Las restantes relaciones indicadas pueden tambi'en demostrarse (las relaciones de transformada bidimensional de Fourier entre $\Upsilon(x,\bar{\bar{x}})$ y $\Gamma(\mu,\bar{\mu})$)

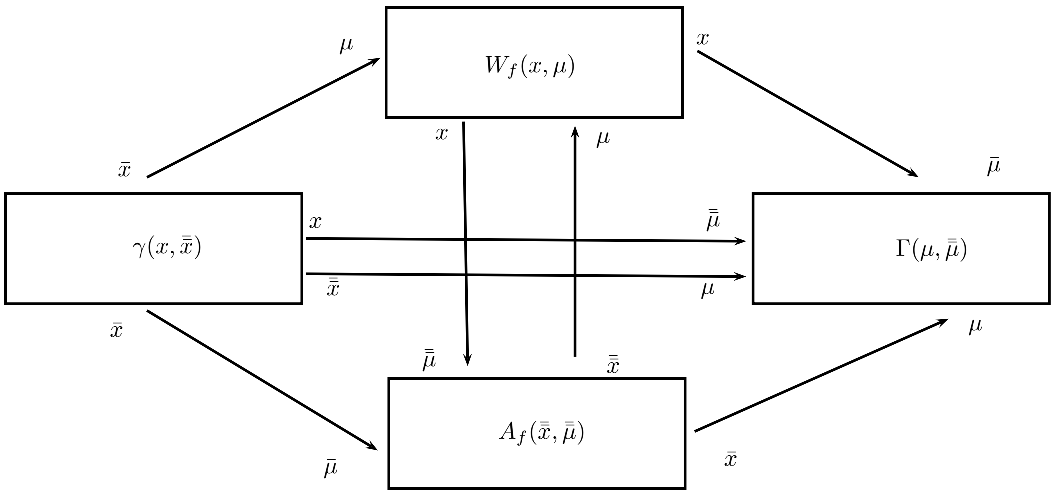


Figure 3.1: Interrelaciones

Capítulo 4

Las transformadas fraccionarias de Fourier

Se puede indicar un giro fraccionario de orden a para $W_f(x,\mu)$ como

$$W_{f_a}(x,\mu) = W_f(xcos\theta - \mu sen\theta, xsen\theta + \mu cos\theta) \tag{4.1}$$

con $\theta = \frac{a\pi}{2}$, a un n'umero racional. Ya se ha visto el caso para $a = 1$, en el cual $f_a = f_1 = \tilde{f}$. Se considerar'a ahora el caso m'as general usando procedimientos de transformaciones lineales can'onicas

4.1 Transformaciones lineales can'onicas

Una transformaci'on lineal can'onica con par'ametro $\mathbb{M}$ de la funci'on $f(x')$ puede escribirse como $C_{\mathbb{M}}f$, donde

$$(C_{\mathbb{M}}f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' C_{\mathbb{M}}(x,x')f(x') \tag{4.2}$$

con, el n'ucleo o kernel,

$$\begin{aligned} C_{\mathbb{M}}(x,x') &= A_{\mathbb{M}} \exp[i\pi(\alpha x^2 - \beta x x' + \gamma x'^2)] & (4.3)\\ &\text{y} \\ A_{\mathbb{M}} &= \sqrt{\beta} e^{-i\frac{\pi}{4}} & (4.4) \end{aligned}$$

siendo α, β, γ valores reales.

Para el caso de una transformada unitaria herm'itica, se debe observar que

$$C_{\mathbb{M}}^{-1}(x,x') = C_{\mathbb{M}}^{*}(x,x') \tag{4.5}$$

donde $C_{\mathbb{M}}^{-1}(x,x')$ es el n'ucleo de la transformaci'on inversa, tal que

$$(C_{\mathbb{M}}^{-1}f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\mathbb{M}}^{-1}(x,x')f(x')dx \tag{4.6}$$

con

$$C_{\mathbb{M}}^{-1}(x,x') = A_{\mathbb{M}}^{*}\exp[-i\pi(\gamma x^2 - 2\beta xx' + \alpha x'^2)] \tag{4.7}$$

y

$$\begin{aligned} A_{\mathbb{M}}^{*} &= \frac{1}{\sqrt{1/\beta}} e^{\frac{i\pi}{4}} \\ &= \sqrt{-\beta}e^{\frac{-i\pi}{4}}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Se ve que

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_{\mathbb{M}}^{-1}(X,x'')C_{\mathbb{M}}(x'',x')dx' =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx'' A_{\mathbb{M}}A_{\mathbb{M}}^{*}\exp[-i\pi(\gamma x^2 - 2\beta xx' + \alpha x''^2)]\exp[+i\pi(\alpha x''^2 - 2\beta x''x' + \gamma x'^2)]$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i2\pi\beta x''(x'-x) - i\pi\gamma(x^2 - x'^2)]\sqrt{\beta}\sqrt{-\beta}e^{-i\frac{\pi}{2}}dx'' \\ &= \sqrt{\beta}\sqrt{-\beta}e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\pi\gamma(x^2-x'^2)}\int_{-\infty}^{\infty} dx'' e^{-i2\pi\beta x''(x'-x)} \\ &= i\beta e^{-i\frac{\pi}{2}}\delta(x\beta[x'-x]) \\ &= \delta(x'-x), \end{aligned} \tag{4.9}$$

resultado que corresponde con el teorema de Fourier.

4.2 La matriz $\mathbb{M}$

Los par'ametros α, β, γ se pueden escribir como una matriz $\mathbb{M}$ de la forma siguiente

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\beta} & \frac{1}{\beta} \\ -\beta + \frac{\alpha\gamma}{\beta} & \frac{\alpha}{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\beta} & -\frac{1}{\beta} \\ \beta - \frac{\alpha\gamma}{\beta} & \frac{\alpha}{\beta} \end{pmatrix}^{-1}$$

con $det\mathbb{M} = 1$. Se cumple tambi'en que

$$\alpha = \frac{D}{B} = \frac{1}{A}(\frac{1}{B} + C), \quad \beta = \frac{1}{B}, \quad \gamma = \frac{A}{B} = \frac{1}{D}(\frac{1}{B} + C). \tag{4.10}$$

Para la rotaci'on al 'angulo θ, se tiene que

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{1}{sen\theta}, \quad \alpha = \frac{cos\theta}{sen\theta} = ctg\theta = \gamma$$

4.3 Transformada fraccionaria de Fourier

Considerando a la matriz $\mathbb{M}$ de la previa secci'on, se concretiza una transformada integral de la forma siguiente

$$f_a(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_a(x,x')f(x')dx', \tag{4.11}$$

con $\theta = \frac{a\pi}{2}$,

$$K_a(x,x') = A_a \exp[i\pi(cot\theta x^2 - 2csc\theta x x' + cot\theta x'^2)] \tag{4.12}$$

y

$$A_a = \frac{e^{-i[\pi sgn(\theta)/4-\theta/2]}}{\sqrt{\mid sen\theta \mid}}, \tag{4.13}$$

donde $0 \leq\mid a \mid\leq 2.$. En relaci'on a la transformaci'on can'onica, existe una discrepancia de un factor de fase.

Capítulo 5

Simulaci'on en Mathcad y presentaci'on de resultados

5.1 Relaci'on entre la distribuci'on de Wigner y la tranformada de fraccionaria de Fourier

De calculos anteriores llegamos a la relaci'on que existe entre la distribuci'on de Wigner y la transformada fraccionaria de Fourier, 'esta relaci'on se hace posible mediante la transformada inversa de Radon:

$$W_f(x, \mu) = \mathcal{R}^{-1}\{\mid f_a(x) \mid^2\} \tag{5.1}$$

Mediante 'esta relaci'on entre la transformada fraccionaria de Fourier($f_a(x)$),de orden fraccionario a y la distribuci'on de Wigner utilizando transformada inversa de Radon, realizamos algunos ejemplos para funciones de una sola dimensi'on, donde conocemos especificamente la distribuci'on de Wigner analítica de dichos ejemplos y comparamos estos resultados an'aliticos con nuestros resultados num'ericos despu'es de calcular con la ecuaci'on (5.1) la distribuci'on de Wigner n'umerica.

5.2 Distribuci'on de Wigner de la funci'on $f(x) = rect(x)$

A continuaci'on calculamos num'ericamente la distribuci'on de Wigner mediante la transformada inversa de Radon de dicha funci'on, utilizando la ecuaci'on (5.1) y la definici'on ya encontrada de la transformada fraccionaria de Fourier, ecuaci'on (4.11), mediante el algoritmo presentado en el ap'endice B, adem'as de calcular primero las proyecciones paralelas que forman el senograma de 'esta funci'on. Despu'es de la obtenci'on del senograma formado por la proyecciones paralelas (Figura 5.1), calculamos la transformada inversa de Radon para obtener la distribuci'on de Wigner num'erica de la funci'on $rect(x)$(Figura 5.2). Ahora calculamos la distribuci'on de Wigner

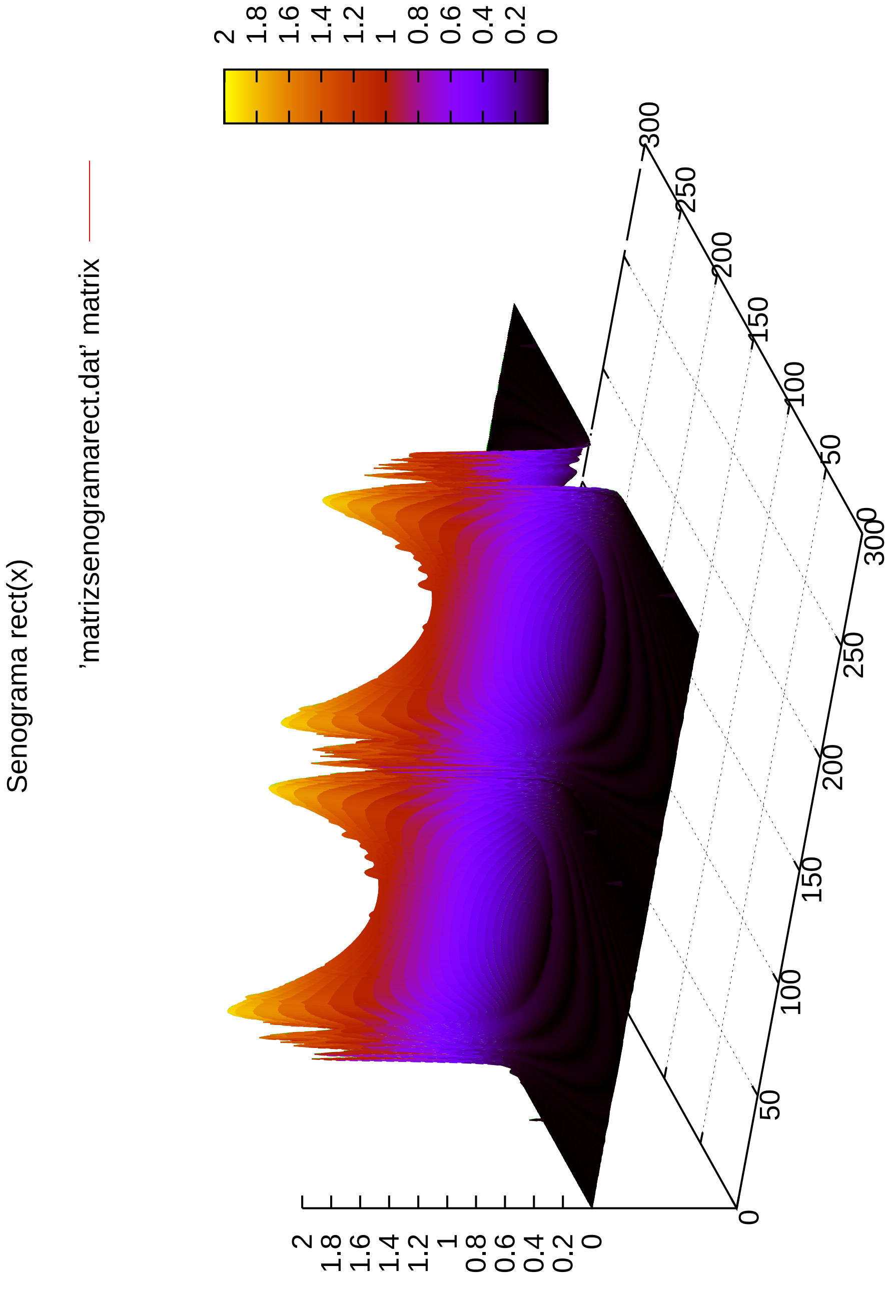
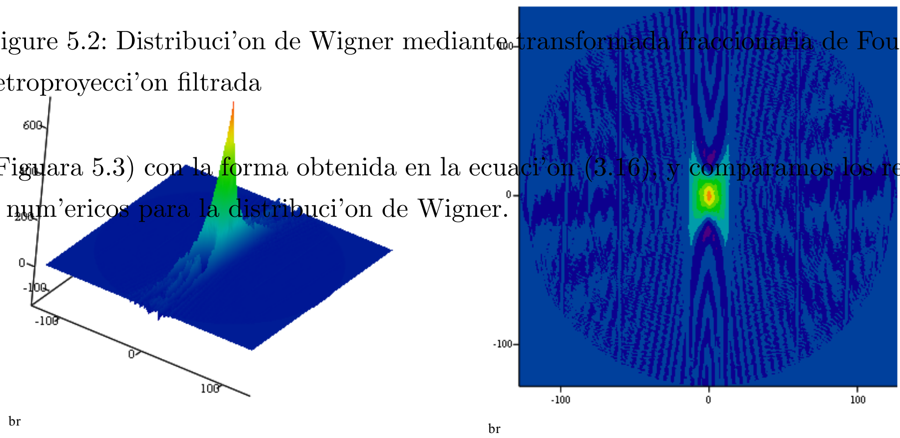


Figure 5.1: Senograma de la funci’on $rect(x)$

Figure 5.2: Distribuci'on de Wigner mediante transformada fraccionaria de Fourier y algoritmo de retroproyecci'on filtrada



(Figuara 5.3) con la forma obtenida en la ecuaci'on (3.16) y comparamos los resultados analíticos y num'ericos para la distribuci'on de Wigner.

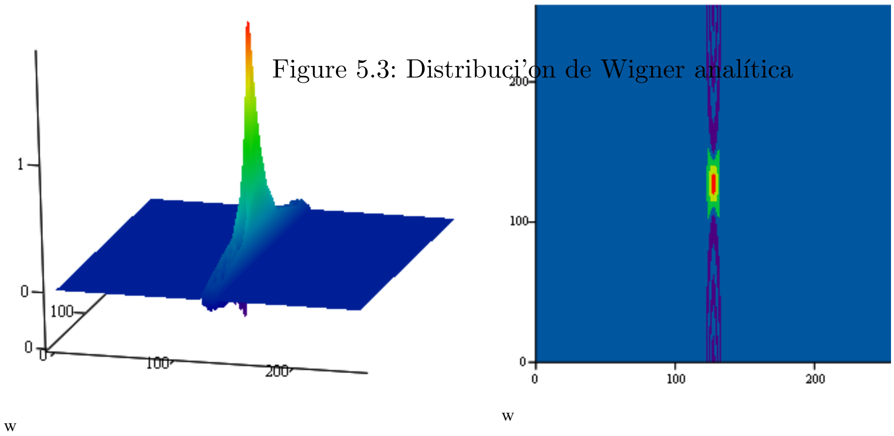


Figure 5.3: Distribuci'on de Wigner analítica

5.3 Distribuci'on de Wigner de la funci'on $f(x) = gaussiana$

Continuando con el camino seguido en la anterior secci'on, calculamos la distribuci'on de Wigner mediante transformada fraccionaria de Fourier y algoritmo de retroproyecci'on filtrada

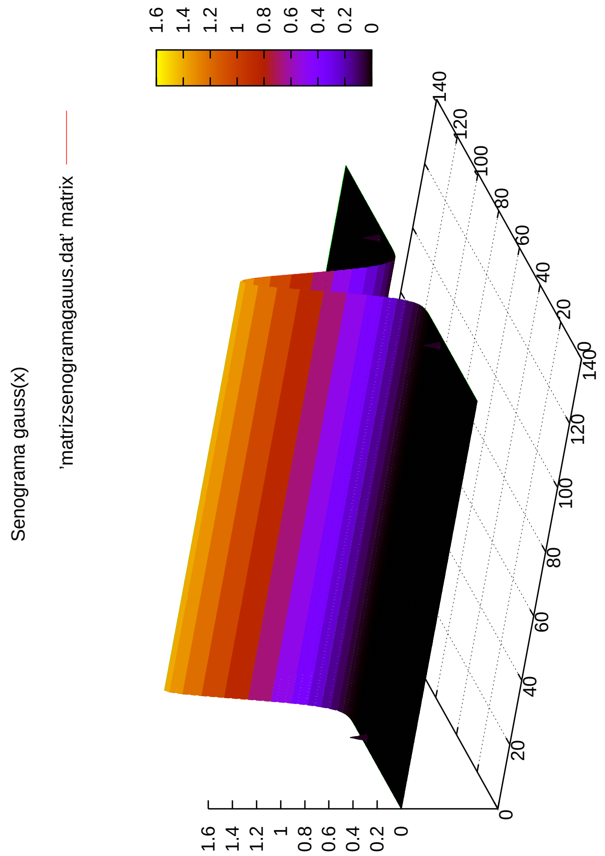
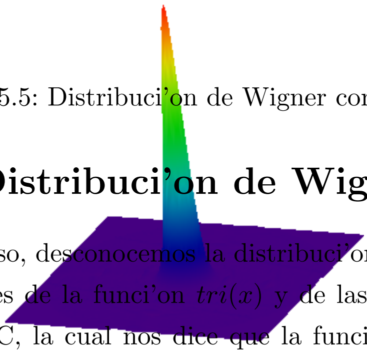


Figure 5.4: Senograma de la funci'on $gauss(x)$

y ahora con este resultado mostrados en la Figura 5.4, calculamos la distribuci'on de Wigner con algoritmo de retroproyecci'on filtrada(Figura 5.5)

Comparamos nuestros resultados con la distribuci'on de Wigner analítica(Figura 5.6)



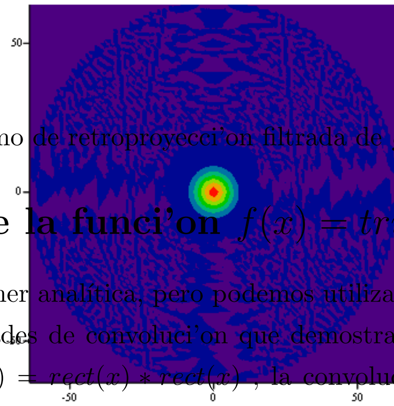


Figure 5.5: Distribuci'on de Wigner con Algoritmo de retroproyecci'on filtrada de $gauss(x)$

5.4 Distribuci'on de Wigner de la funci'on $f(x) = tri(x)$

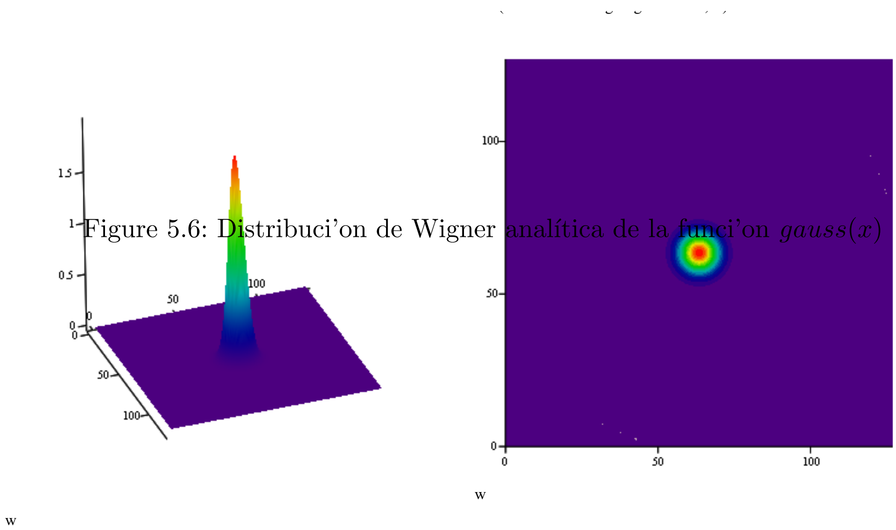
En este caso, desconocemos la distribuci'on de Wigner analítica, pero podemos utilizar una de las propiedades de la funci'on $tri(x)$ y de las propiedades de convoluci'on que demostraremos en el ap'endice C, la cual nos dice que la funci'on $tri(x) = rect(x) * rect(x)$, la convoluci'on de dos funciones rect'angulo es una funci'on tri'angulo, Continuando con la misma linea seguida en las dos secciones anteriores obtenemos el senograma(Figura 5.7).

Y la distribuci'on de Wigner mediante transformada fraccionaria de Fourier y algoritmo de retroproyecci'on (Figura 5.8). Ahora, como desconocemos la forma analítica de la distribuci'on de Wigner de la funci'on $tri(x)$ utilizando propiedades de convoluci'on y propiedades de la distribuci'on de Wigner de una convoluci'on de funciones ecuaci'on (3.37), obtenemos la distribuci'on de Wigner analítica(Figura5.9) para la funci'on $tri(x)$

5.5 Momento cero de cada una de las funciones estudiadas

Como ya hemos mencionado, el calculo del momento cero de las funciones estudiadas, $rect(x)$, $gauss(x)$ y $tri(x)$ garantiza la validez de nuestros calculos y estos son los resultados de nuestras diferentes funciones estudiadas.

Figure 5.6: Distribuci'on de Wigner analítica de la funci'on $gauss(x)$



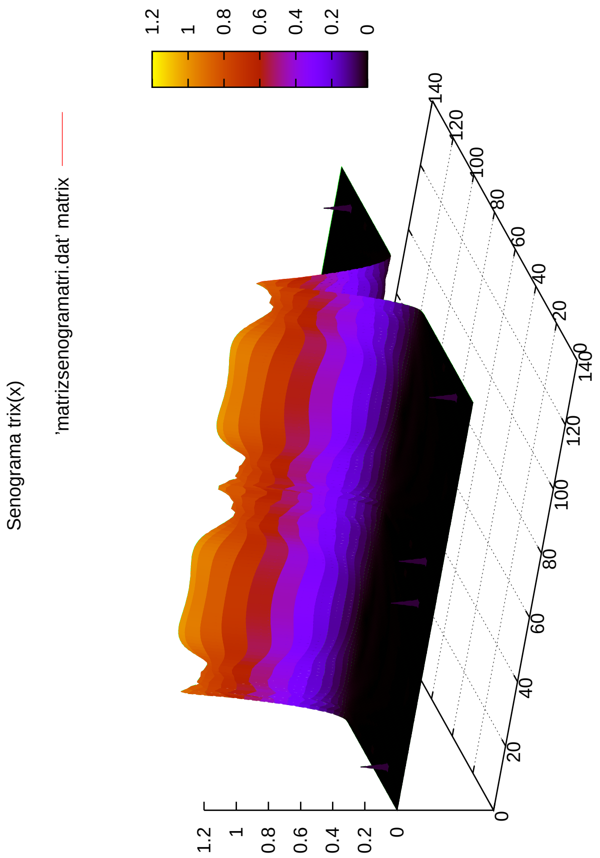


Figure 5.7: Senograma $tri(x)$

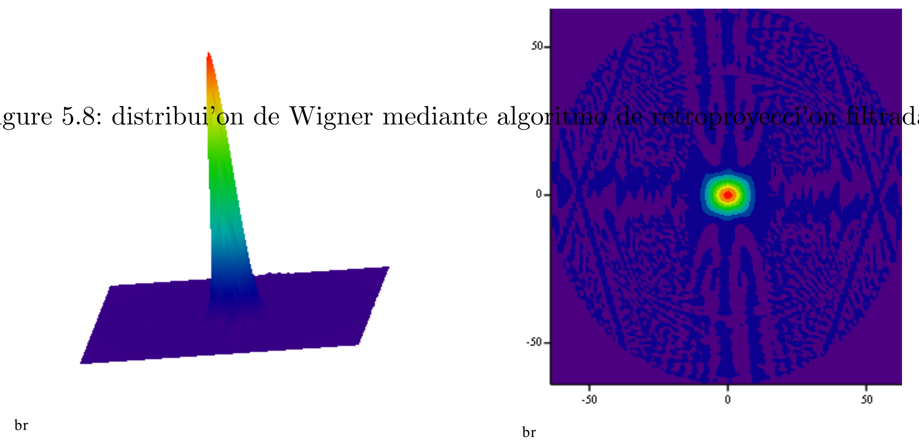
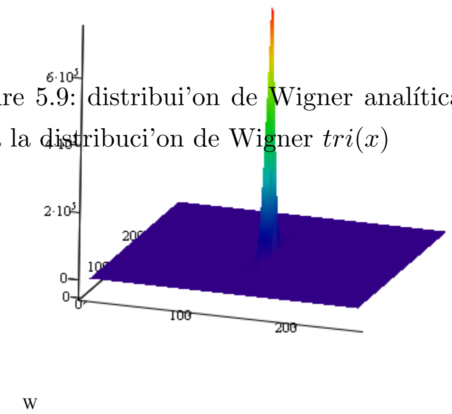


Figure 5.8: distribui'on de Wigner mediante algoritmo de retroproyecci'on filtrada $tri(x)$



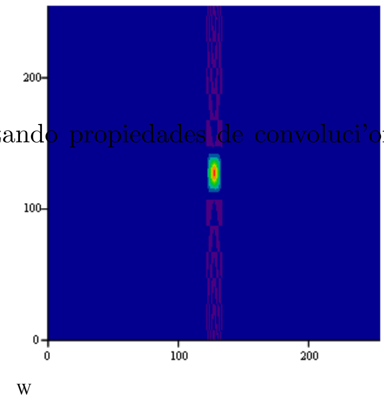


Figure 5.9: distribui'on de Wigner analítica utilizando propiedades de convoluci'on de funciones para la distribuci'on de Wigner $tri(x)$

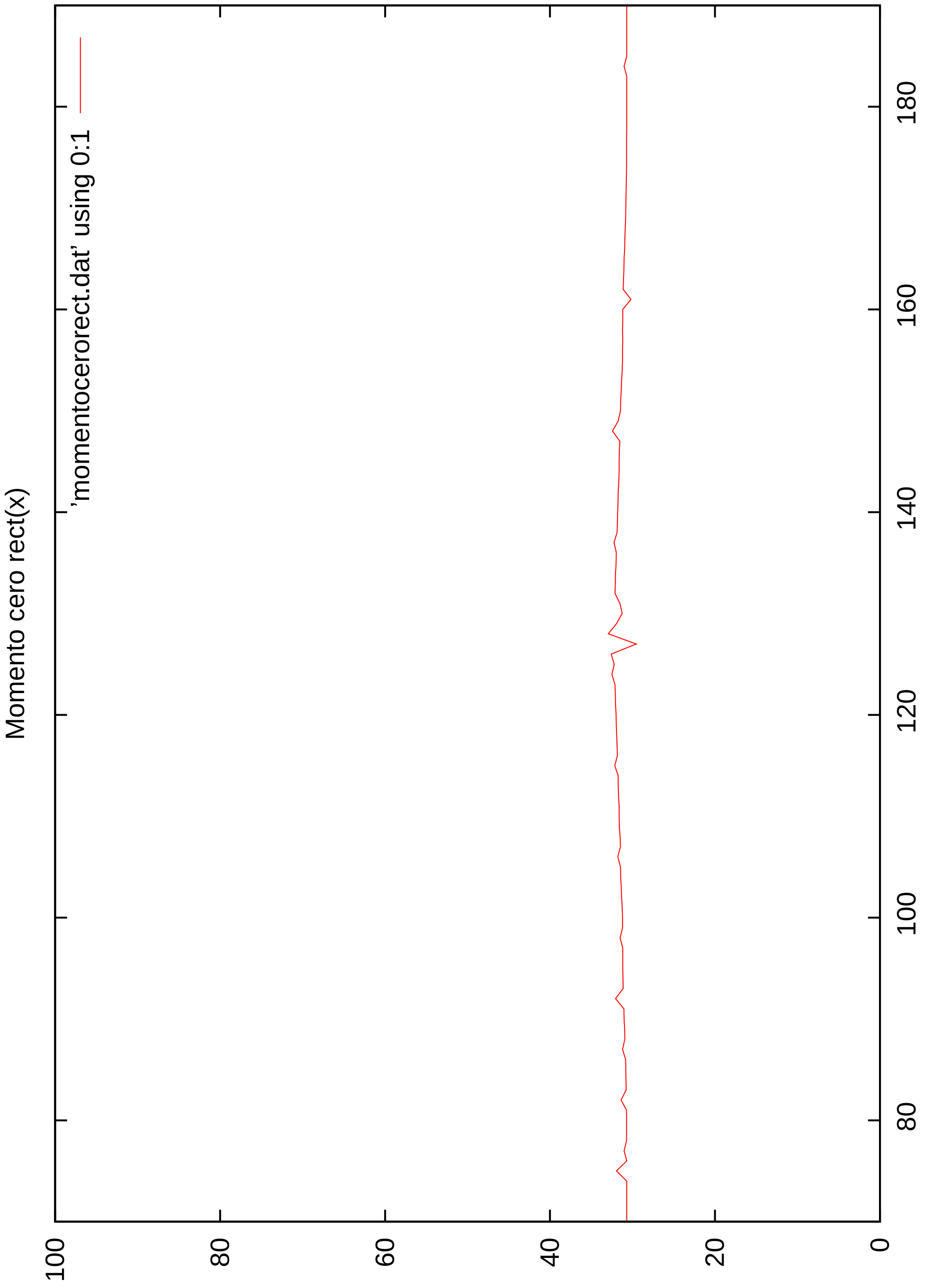


Figure 5.10: Momentos cero $rect(x)$

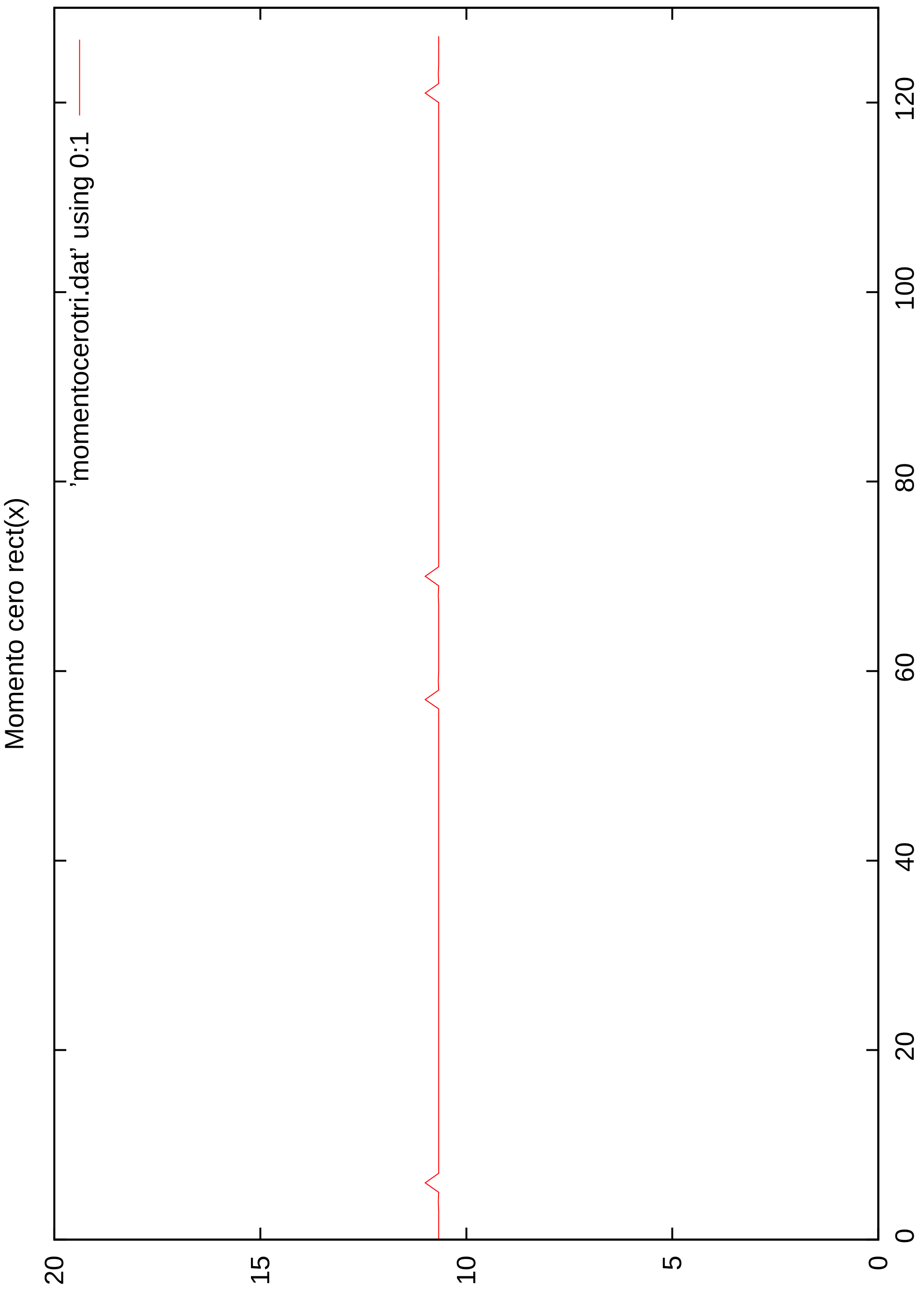


Figure 5.11: Momentos cero $tri(x)$

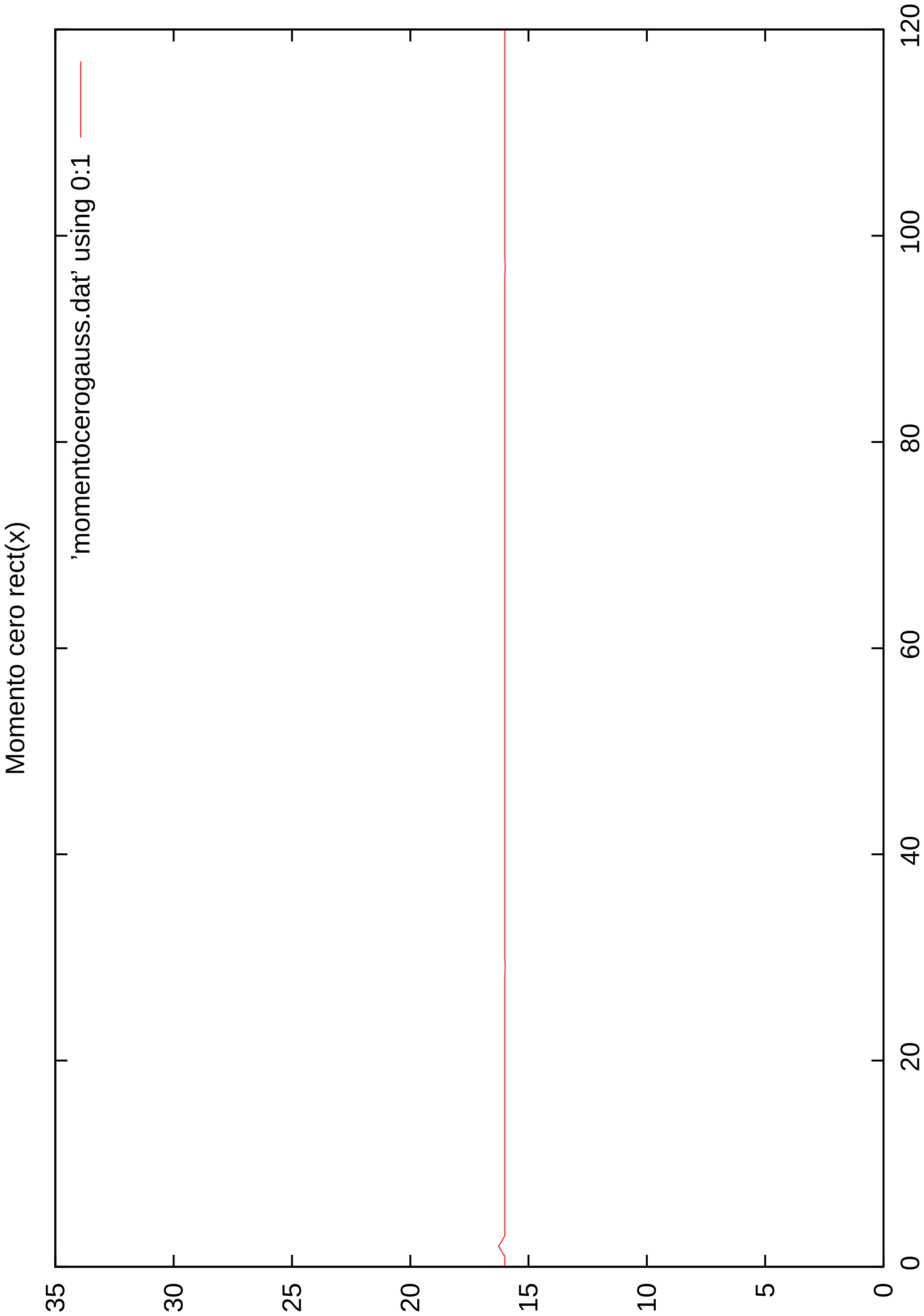


Figure 5.12: Momentos cero $gauss(x)$

Conclusión

Como ya hemos mencionado, la distribuci'on de Wigner se puede obtener mediante la transformada fraccionaria de Fourier aplicando algoritmo de retroproyecci'on fitrada, comenzamos explicando las proyecciones paralelas de cierta funci'on , donde estos c'alculos nos condujeron a la transformada de Radon y despu'es demostramos alguna de las propiedades de la distribuci'on de Wigner, posteriormente definimos a la transformada fraccionaria de Fourier y finalmente encontramos la relaci'on existente entre la tranformada fraccionaria de Fourier y la distribuci'on de Wigner, esta relaci'on es posible mediante la transformada inversa de Radon. En nuestros calculos obtenidos de las tres diferentes funciones estudiadas, comparamos siempre, nuestros calculos num'ericos con las formas analíticas ya encontradas de la distribuci'on de Wigner de dichas funciones, exceptuando el caso de la funci'on $tri(x)$, donde no se tiene una forma analítica y recurrimos a propiedades de la distribuci'on de Wigner de una convoluci'on de funciones y pudimos comparar nuestros resultados num'ericos con los calculados mediante dichas propiedades de convoluci'on de funciones para la distribuci'on de Wigner. Ademas como se observa que la implementaci'on del algoritmo de retroproyecci'on fltrada introduce constantes que afectan los valores num'ericos de la imagen reconstruida. Sin embargo la imagen es perfectamente reconocible. Las $f_a(x)$ obtenidas se compararon con las figuras 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, de la referecincia (Haldum M. Ozaktas, Zeev Zalevsky, M. Alper Kutay, The Fractional Fourier Transform with applications in optics and signal processing.) y aparece una discrepancia num'erica, escencialmente num'erica. Pero las gr'aficas son comparables. Las 2 observaciones anteriores sugieren que las implementaciones num'ericas(sobre todo la retroproyecci'on filtrada) introduce factores de proporcionalidad Una forma que valida nuestros c'alculos presentados para obtenci'on de la Distribuci'on de Wigner, es el calculo del momento cero, que garantiza la obtenc'ion num'erica de la distribuci'on de Wigner.

Appendix A

Demostraci'on: $\mathcal{F}^{a_1}\{\mathcal{F}^{a_2}\{\hat{q}(u)\}\} = \mathcal{F}^{a_1+a_2}\{\hat{q}(u)\}$

$$\mathcal{F}^{a_1}\{\mathcal{F}^{a_2}\{\hat{q}(u)\}\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} B_{a_1}(u,u')B_{a_2}(u',u'')\hat{q}(u'')du'du''$$

$$\begin{aligned}
= &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{exp[-i(\pi\hat{\phi_1}/4 - \phi_1/2)]}{|\ sin\phi_1\ |^{1/2}} exp[i\pi(u^2cot\phi_1 - 2uu'csc\phi_1 + u'^2cot\phi_1)] \\
&\frac{exp[-i(\pi\hat{\phi}_2/4 - \phi_2)]}{|\ sin\phi_2\ |^{1/2}} exp[i\pi(u'^2cot\phi_2 - 2u'u''csc\phi_2 + u''^2cot\phi_2)]\hat{q}(u'')du'du'' \\
= &\int_{-\infty}^{\infty} du''\hat{q}(u'')\int_{-\infty}^{\infty} \frac{exp[-i(\pi[\hat{\phi}_1+\hat{\phi}_2]/4 - [\phi_1+\phi_2]/2)]}{|\ sin\phi_1 sin\phi_2\ |^{1/2}} \\
&exp[i\pi(u^2cot\phi_1 - 2uu'csc\phi_1 + u'^2cot\phi_1 + u'^2cot\phi_2 - 2u'u''csc\phi_2 + u''^2cot\phi_2)]du' \\
= &\int_{-\infty}^{\infty} du''\hat{q}(y'')\frac{exp[-i(\pi[\hat{\phi}_1+\hat{\phi}_2]/4 - [\phi_1+\phi_2]/2)]}{|\ sin\phi_1 sin\phi_2\ |^{1/2}} exp[i\pi(u^2cot\phi_1 + u''^2cot\phi_2)] \\
&\int_{-\infty}^{\infty} du'exp[i\pi(u'^2\{cot\phi_1 + cot\phi_2\} - 2u'\{ucsc\phi_1 + u''csc\phi_2\})]
\end{aligned} \tag{A.1}$$

considerando s'olo la ultima integral y haciendo algunos cambios de variable para facilitar la manipulaci'on de los t'erminos tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} du'exp[i\pi(u'^2\{cot\phi_1 + cot\phi_2\} - 2u'\{ucsc\phi_1 + u''csc\phi_2\})]$$

con, $\epsilon = u'^2$, $\quad \alpha = cot\phi_1 + cot\phi_2, \beta = ucsc\phi_1 + u''csc\phi_2$ obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} exp[i\pi(\epsilon^2\alpha - 2\epsilon\beta)]d\epsilon \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} exp[i\pi(\epsilon^2\alpha - 2\epsilon\beta + \frac{\beta^2}{\alpha} - \frac{\beta^2}{\alpha})]d\epsilon \\
&= exp[-i\pi\frac{\beta^2}{\alpha}]\int_{-\infty}^{\infty} exp[i\pi\alpha(\epsilon - \frac{\beta^2}{\alpha})^2]d\epsilon
\end{aligned}$$

con $x'^2 = \alpha[\epsilon - \frac{\beta^2}{\alpha}]$ y $dx' = \sqrt{\alpha}d\epsilon$, entonces obtenemos:

$$\begin{aligned}
&= exp[i\pi\frac{\beta^2}{\alpha}]\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx'}{\sqrt{\alpha}}exp[i'^2] \\
&= \frac{exp[i\pi\beta^2/\alpha]}{\alpha}\frac{1}{\sqrt{-i}}
\end{aligned}$$

pues $\int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{i\pi x'^2} = \frac{1}{\sqrt{-i}}$. Sustituyendo en la ecuaci'on (A.1), tenemos:

$$\mathcal{F}^{a_1}\{\mathcal{F}^{a_1}\{\hat{q}(u)\}\} = \int_{-\infty}^{\infty} du''\hat{q}(u'')\frac{exp[-i(\pi[\hat{\phi}_1+\hat{\phi}_2]/4-[\phi_1+\phi_2]/2)]}{\mid sin\phi_1 sin\phi_2 \mid^{1/2}} exp[i\pi(u^2cot\phi_1+u'^2cot\phi_2)]\frac{exp[i\pi\beta^2/2]}{\sqrt{\alpha}\sqrt{-i}}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} du''\hat{q}(u'')\frac{exp[-i(\pi[\hat{\phi}_1+\hat{\phi}_2]/4-[\phi_1+\phi_2]/2)]}{\mid sin\phi_1 sin\phi_2 \mid^{1/2}}\frac{1}{(cot\phi_1+cot\phi_2)^2\sqrt{-i}} \\ &\quad exp[i\pi(u^2cot\phi_1+u''^2cot\phi_2-\frac{u^2csc^2\phi_1+u''^2csc^2\phi_2+2uu'csc\phi_1csc\phi_2}{cot\phi_1+cot\phi_2})] \end{aligned} \tag{A.2}$$

Simplificando tenemos:

$$\begin{aligned} 1.\quad sin\phi_1 sin\phi_2(cot\phi_1 cot\phi_2) &= sin\phi_1 sin\phi_2\left(\frac{cos\phi_1}{sin\phi_1}+\frac{cos\phi_2}{sin\phi_2}\right) \\ &= sin\phi_1 sin\phi_2\left(\frac{sin\phi_2 cos\phi_1+sin\phi_1 cos\phi_2}{sin\phi_2 sin\phi_1}\right. \\ &= sin\phi_2 cos\phi_1+sin\phi_1 cos\phi_2 \\ &= sin(\phi_1+\phi_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.\quad u^2\left(cot\phi_1-\frac{csc\phi_1}{cot\phi_1+\cot\phi_2}\right) &= u^2\left(\frac{cot^2\phi_1+cot\phi_1cot\phi_2-csc^2\phi_1}{cot\phi_1+cot\phi_2}\right) \\ &= u^2\left(\frac{\frac{cos^2\phi_1}{sin^2\phi_1}+\frac{cos\phi_1}{sin\phi_1}\frac{cos\phi_2}{sin\phi_2}-\frac{1}{sin^2\phi_1}}{\frac{cos\phi_1}{sin\phi_1}+\frac{cos\phi_2}{sin\phi_2}}\right) \\ &= u^2\left(\frac{cos\phi_1cos\phi_2-\frac{sin\phi_2}{sin\phi_1}[1-cos^2\phi_1]}{sin(\phi_1+\phi_2)}\right) \\ &= \left(\frac{cos\phi_1cos\phi_2-sin\phi_1sin\phi_2}{sin(\phi_1+\phi_2)}\right) \\ &= u^2\frac{cos(\phi_1+\phi_2)}{sin(\phi_1+\phi_2)} \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned} 3.\quad u''^2\left(cot\phi_2-\frac{csc^2\phi_2}{cot\phi_1+cot\phi_2}\right) &= u''^2\left(\frac{cot\phi_1cot\phi_2+cot^2\phi_2-csc^2\phi_2}{cot\phi_1+cot\phi_2}\right) \\ &= u''^2\left(\frac{\frac{cos\phi_1}{sin\phi_1}\frac{cos\phi_2}{sin\phi_2}+\frac{cos^2\phi_2}{sin^2\phi_2}-\frac{1}{sin^2\phi_2}}{\frac{cos\phi_1}{sin\phi_1}+\frac{cos\phi_2}{sin\phi_2}}\right) \\ &= u''^2\left(\frac{cos\phi_1cos\phi_2-\frac{sin\phi_1}{sin\phi_2}[1-cos^2\phi_2]}{sin(\phi_1+\phi_2)}\right) \\ &= u''^2\left(\frac{cos\phi_1cos\phi_2-sin\phi_1sin\phi_2}{sin(\phi_1+\phi_2)}\right) \\ &= u''^2\frac{cos(\phi_1+\phi_2)}{sin(\phi_1+\phi_2)} \\ &= u''^2cot(\phi_1+\phi_2) \end{aligned} \tag{A.4}$$

$$4. \quad \frac{2uu''csc\phi_1 csc\phi_2}{cot\phi_1 + cot\phi_2} = 2uu''\frac{\frac{1}{sin\phi_1}\frac{1}{sin\phi_2}}{\frac{cos\phi_1}{sin\phi_1} + \frac{cos\phi_2}{sin\phi_2}}$$

$$= 2uu''\frac{\frac{1}{sin\phi_1 sin\phi_2}}{\frac{cos\phi_1 sin\phi_2 + sin\phi_1 cos\phi_2}{sin\phi_1 sin\phi_2}}$$

$$= 2uu''\frac{1}{sin(\phi_1 + \phi_2)} = 2uu''csc(\phi_1 + \phi_2) \tag{A.5}$$

Sustituyendo las simplificaciones anteriores en la ecuaci'on (A.2), tenemos entonces:

$$\mathcal{F}^{a_1}\{\mathcal{F}^{a_2}\{\hat{q}(u)\}\} = \int_{-\infty}^{\infty} du''\hat{q}(u'')\frac{exp[-i(\pi[\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2]/2 - [\phi_1 + \phi_2]/2)]}{\mid sin\phi_1 sin\phi_2 \mid^{1/2}}$$
$$exp[i\pi(u^2 cot(\phi_1 + \phi_2) - 2uu''csc(\phi_1 + \phi_2) + u''^2 cot(\phi_1 + \phi_2))]$$

$$= \mathcal{F}^{a_1 + a_2}\{\hat{q}(u)\} \tag{A.6}$$

con esto queda demostrada la propiedad:

$$\mathcal{F}^{a_1}\{\mathcal{F}^{a_2}\{\hat{q}(u)\}\} = \mathcal{F}^{a_1 + a_2}\{\hat{q}(u)\}$$

Appendix B

Demostraci'on de la ecuaci'on 4.11

De la definici'on de la transformada de Radon y la distribuci'on de Wigner tenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}\{W_f(x,\mu)\} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx d\mu W_f(x,\mu)\delta(p - x\cos\phi - \mu\sin\phi) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx dx' f(x+x'/2)f^*(x-x'/2)\int_{-\infty}^{\infty} d\mu e^{-i2\pi\mu x'}\delta(p - x\cos\phi - \mu\sin\phi) \\ &= \frac{1}{\mid\sin\phi\mid}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx dx' f(x+x'/2)f^*(x-x'/2)exp\{\frac{px'}{\sin\phi} - xx'\cot\phi\},\end{aligned}$$

realizando el cambio de variable $x_1 = x + x'/2$ y $x_2 = x - x'/2$ y adem'as, $dx_1 dx_2 = -dx dx'$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx dx' f(x_1)f^*(x_2)exp\{-i2\pi(\frac{p(x_1-x_2)}{\sin\phi} - \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)\cot\phi)\} \\ &= \frac{-1}{\mid\sin\phi\mid}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 f(x_1)e^{-i2(px_1\csc\phi-(1/2)x_1^2\cot\phi)}\int_{\infty}^{-\infty} dx_2 f^*(x_2)e^{-i2(px_2\csc\phi-(1/2)x_2^2\cot\phi)} \\ &= \mid\frac{1}{\sqrt{\mid\sin\phi\mid}}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 f(x_1)e^{i\pi(\cot\phi x_1^2 - 2px\csc\phi+\cot\phi p^2)}\mid^2 . \end{aligned} \quad \text{(B.1)}$$

Así se puede establecer la igualdad

$$\mathcal{R}_\phi\{W_f(x,\mu)\} = \mid f_a(p)\mid^2,$$

lo cual significa que la proyecci'on paralela de $W_f(x,\mu)$ al 'angulo de proyecci'on resulta exactamente igual al m'odulo cuadrado de la transformada fraccionaria de Fourier. Consecuentemente, se tiene la igualdad

$$W_f(x,\mu)\mathcal{R}^{-1}\{\mid f_a(p)\mid^2\}.$$

Appendix C

Programa para calcular la transformada fraccionaria de Fourier

$N := 256 \quad i := 0..N-1 \quad xmin := -4 \quad xmax := 4 \qquad b := 7.813 \times 10^{-3} \qquad \frac{1}{127} = $

$x_i := xmin + \frac{i\cdot(xmax - xmin)}{N} \qquad y_i := xmin + \frac{i\cdot(xmax - xmin)}{N} \qquad a := 7.813 \times 10^{-3} \quad \phi := a\cdot\frac{\pi}{2} \quad \phi t := \mathrm{if}(0 \le \sin(\phi), 1, -1)$

$\phi = 0.012 \qquad \phi t = 1 \qquad \cot(\phi) = 81.478 \qquad \csc(\phi) = 81.484 \qquad \sin(\phi) = 0.012$

$$B(x,y) := \frac{e^{-i\cdot\left(\pi\cdot\frac{\phi t}{4} - \frac{\phi}{2}\right)}}{\left[\left(|\sin(\phi)|\right)^{\frac{1}{2}}\right]}\cdot e^{i\pi\left(x^2\cdot\cot(\phi) - 2x\cdot y\cdot\csc(\phi) + \cot(\phi)\,y^2\right)}$$

$Ba(x,y) := \mathrm{Re}(B(x,y)) + i\cdot\mathrm{Im}(B(x,y))$

$$rect(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{if } |x| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{otherwise} \end{cases} \qquad aw := 1.02$$

$q(y) := rect\left(\frac{y}{aw}\right) \qquad qe(y) := q(y)\cdot 1 \qquad Bqe(x,y) := B(x,y)\cdot qe(y)$

$$Fa(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}(Bqe(x,y))\,dy + i\cdot\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}(Bqe(x,y))\,dy$$

Figure C.1: Programa realizado en mathcad para calcular la transformada fraccionaria de Fourier

Appendix D

Programa de la retroproyeccion filtrada

CWD = "C:\Iran\"

R := READPRN("C:\Iran\gauss.dat")

$M := R \qquad m := -64 .. 63$

$$H_m := \sum_{i=-64}^{63} M_{i,m}$$

momentocero := WRITEPRN("momentocerogauss.dat" , H)

matriz := WRITEPRN("matrizsenogramagauus.dat" , M)

$m \equiv 128 \qquad ORIGIN \equiv \frac{-m}{2} \qquad i := \frac{-m}{2} .. \frac{m}{2} - 1 \qquad j := \frac{-m}{2} .. \frac{m}{2} - 1$

$nl \equiv m \qquad l := \frac{-nl}{2} .. \frac{nl}{2} - 1 \qquad \alpha_l := \frac{2\cdot\pi}{nl}\cdot\left(l + \frac{nl}{2}\right)$

$cs_l := \cos(\alpha_l) \qquad sn_l := \sin(\alpha_l)$

$k := \frac{-m}{2} .. \frac{m}{2} - 1 \qquad n := \frac{-m}{2} .. \frac{m}{2} - 1$

$mdts := \left(\frac{m}{2}\right)^2 \qquad mmt := \frac{-m}{2} \qquad a_{i,j} := i^2 + j^2$

$p := M\cdot 127$

$cols(p) = 128 \qquad rows(p) = 128$

$c := 1$

$$h_k := \frac{-1}{4\cdot k^2 - 1}\cdot\frac{2}{\pi^2\cdot c^2}$$

$$hh_k := if\left(k = 0, \frac{1}{4\cdot c^2}, if\left(mod(k,2) = 0, 0, \frac{-1}{\pi^2\cdot c^2\cdot k^2}\right)\right)$$

$$gg(l) := \left(|l| \le \frac{m}{2} - 1\right)\cdot hh_l$$

Figure D.1: Programa de reconstrucci'on(transformada inversa de Radon)

$$kk(l, id, jd) := if\left(a_{id,jd} \ge mdts, mmt, floor\left(cs_l\cdot id + sn_l\cdot jd\right)\right)$$

Appendix E

Diagrama de flujo para la obtenci'on de la distribuci'on de Wigner mediante transformada fraccionaria de Fourier y retroproyecci'on filtrada

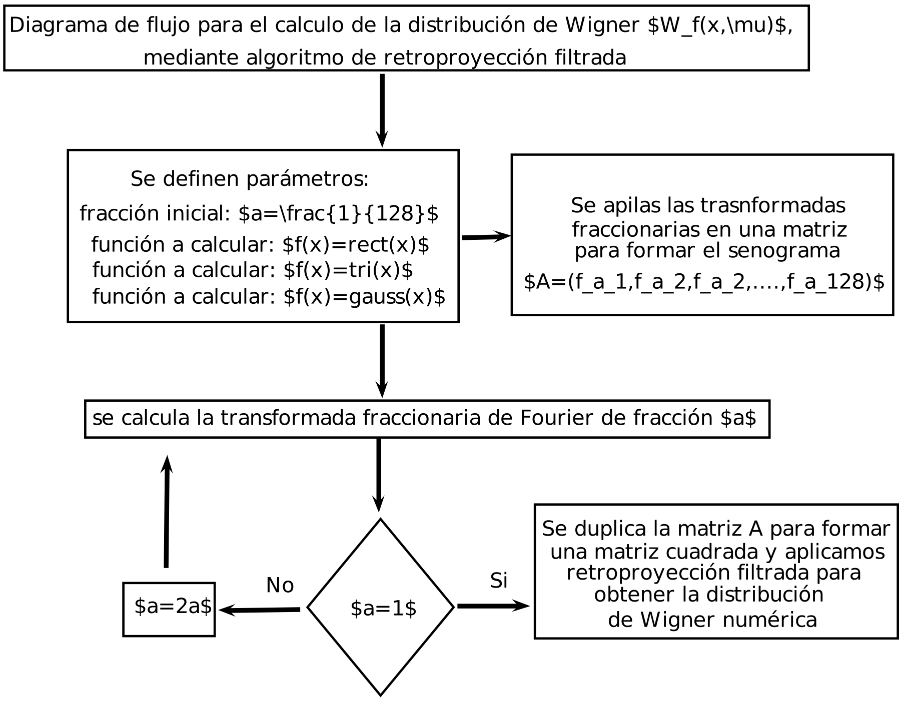


Figure E.1: Diagrama de flujo para la obtenci'on de la distribuci'on de Wigner

Appendix F

Definicion de funciones calculadas, $rect(x)$, $tri(x)$ y $gauss(x)$

$$\mathrm{rect}(t) = \Pi(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } |t| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{if } |t| = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{if } |t| < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Figure F.1: definicion $rect(x)$

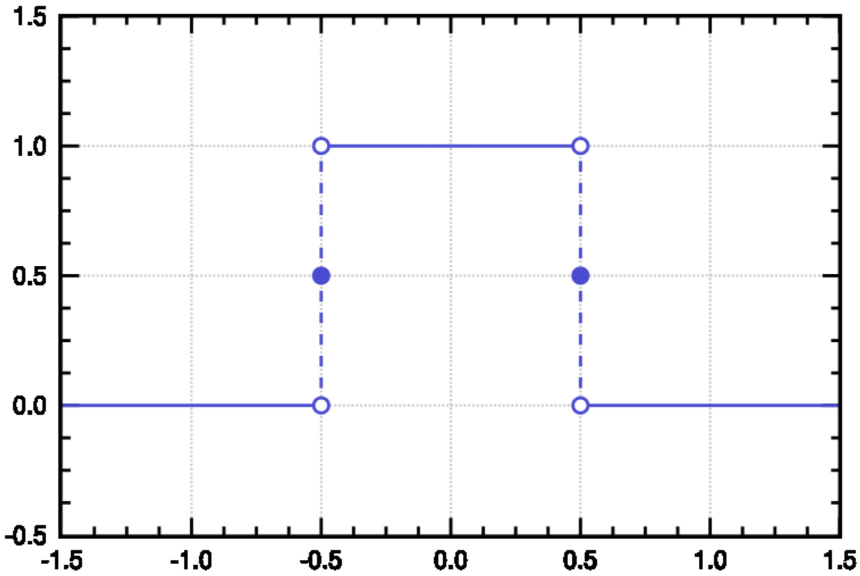


Figure F.2: gr'afica de $rect(x)$

$$\mathrm{tri}(t) = \wedge(t) \overset{\mathrm{def}}{=} \max(1 - |t|, 0) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Figure F.3: definicion $tri(x)$

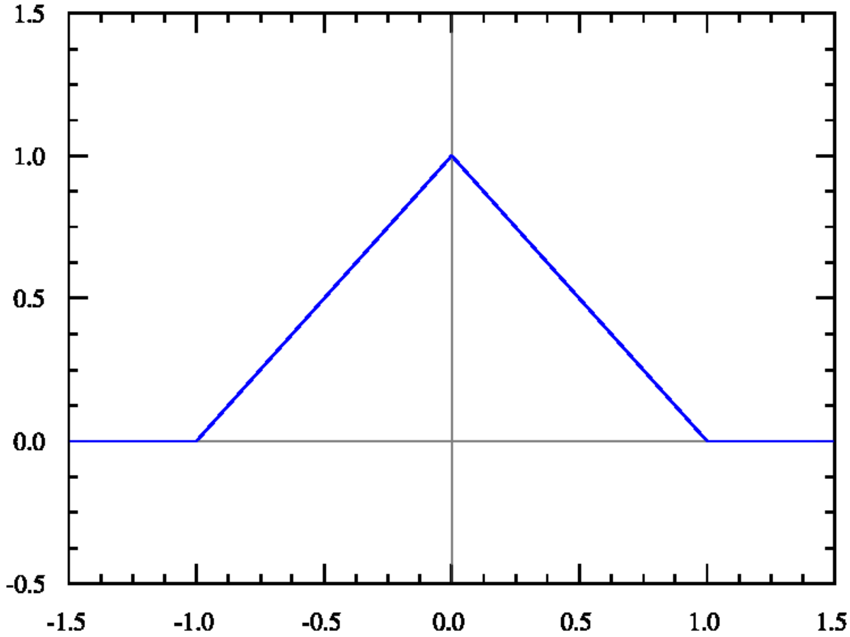


Figure F.4: gr'afica de $tri(x)$

$$f(x) = ae^{-\frac{(x-b)^2}{2c^2}}$$

Figure F.5: definicion $gauss(x)$

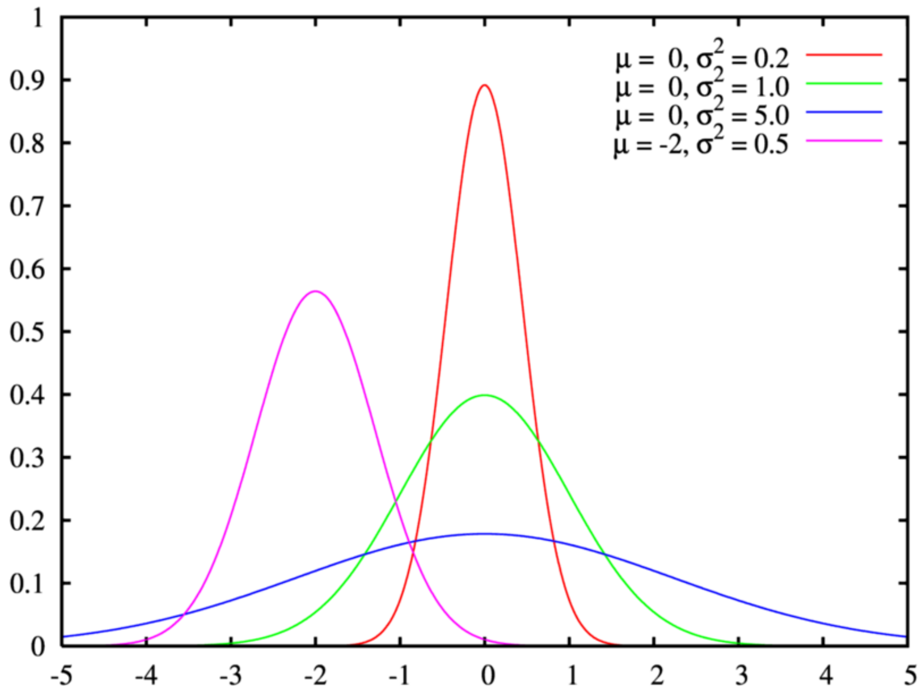


Figure F.6: gr'afica de $gauss(x)$

Appendix G

Ejemplos de algunos ordenes de fracci'on para la funci'on $rect(x)$

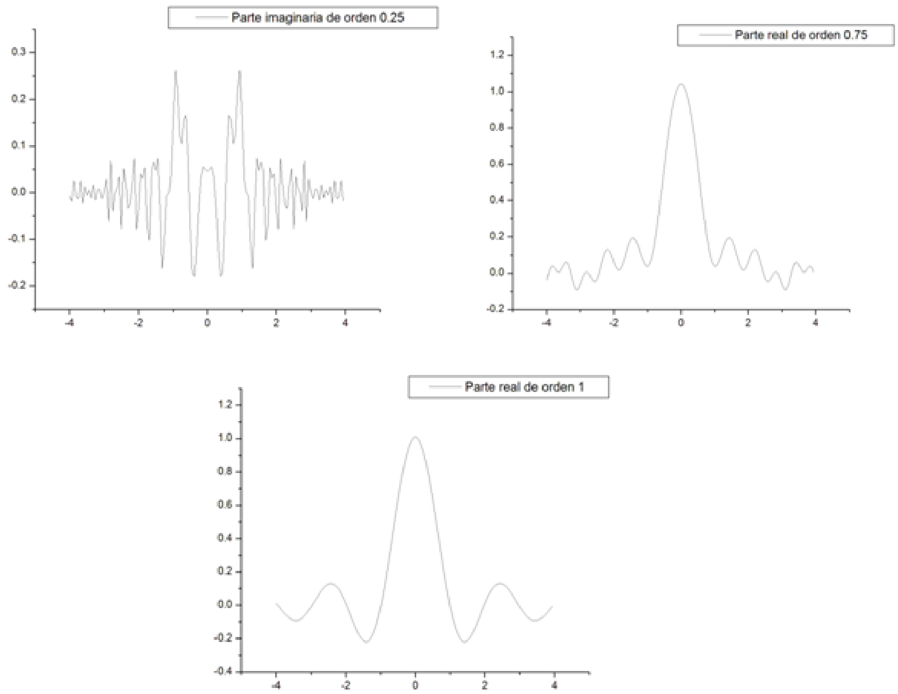


Figure G.1: gr'afica de $gauss(x)$

Referencias

[1] Haldum M. Ozaktas, Zeev Zalevsky, M. Alper Kutay, The Fractional Fourier Transform with applications in optics and signal processing.

[2] A. W. Lohmann, Image rotation, Wigner rotation, and the fractional order Fourier transform.

[3] A. W. Lohmann, A fake zoom lens for fractional Fourier experiment, Opt. Lett. 115, 437-443 (1995).

[4] A. W. Lohmann, D. Mendlovic, and Z. Zalavesky, Fractional transformations in optics, Opt. Chapter IV, 263-342 (1998).

[5] A. W. Lohmann, D. Mendlovic, and Z. Zalavesky, Fractional transformations in optics, Opt. Chapter IV, 263-342 (1998).

[6] D. Mendlovic and H. M. Ozaktas, Fractional Fourier transform and their optical implementation, Opt Soc Am, 10:1875-1881 (1993).

[7] Restricted Radon transforms and unions of hyperplanes. (Revista Matematica Iberoamericana)

[8] Frank Natterer, The Mathematics of Computerized Tomography (Classics in Applied Mathematics, 32), Society for Industrial and Applied Mathematics. ISBN 0-89871-493-1.

[9] Deans, Stanley R. (1983). The Radon Transform and Some of Its Applications. New York: John Wiley Sons.

[10] Frank Natterer and Frank Wubbeling, Mathematical Methods in Image Reconstruction, Society for Industrial and Applied Mathematics. ISBN 0-89871-472-9

[11] E.P. Wigner, "On the quantum correction for thermodynamic equilibrium", Phys. Rev. 40 (June 1932) 749â759. doi:10.1103/PhysRev.40.749