

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Fisico-Matemáticas

---

Flujos geométricos en escenarios con rompimiento espontáneo  
de simetría

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**Licenciado en Física**

por

José Arturo Olvera Santamaría

asesorado por

Dr. Roberto Cartas Fuentes

Puebla Pue.  
Febrero 2014



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Fisico-Matemáticas

---

Flujos geométricos en escenarios con rompimiento espontáneo  
de simetría

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**Licenciado en Física**

por

José Arturo Olvera Santamaría

asesorado por

Dr. Roberto Cartas Fuentevilla

Puebla Pue.  
Febrero 2014



**Título:** Flujos geométricos en escenarios con rompimiento espontáneo de simetría

**Estudiante:** JOSÉ ARTURO OLVERA SANTAMARÍA

COMITÉ

---

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero  
Presidente

---

Dr. J. Jesús Toscano Chávez  
Secretario

---

Dr. Alberto Escalante Hernández  
Vocal

---

Dr. Gerardo Torres del Castillo  
Vocal

---

Dr. Roberto Cartas Fuentes  
Asesor

II

# Agradecimientos

*A mi madre por su apoyo incondicional y ser siempre el mejor ejemplo de lucha para mi.*

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
Facultad de ciencias físico matemáticas  
Licenciatura en física

## Resumen

### **“Flujos geométricos en escenarios con rompimiento espontáneo de simetría”**

Considerando la acción para la teoría  $\lambda\phi^4$  para un campo escalar bosónico masivo como un “funcional de entropía” en el espacio de campos y las constantes de acoplamiento, determinamos los flujos gradiente para el campo escalar, la masa, y el parámetro de auto-interacción. Cuando el parámetro de flujo es identificado con la escala de energía, mostramos que existen transiciones de fase conforme se incrementa la energía entre escenarios sin rompimiento espontáneo de simetría y escenarios con rompimiento espontáneo de simetría. Dado que una ecuación de calor no lineal conduce el campo escalar a través de un proceso de *reacción-difusión* (en general los flujos no son reversibles) imitando los flujos de grupo de renormalización del c-teorema, la deformación del campo a medida que se incrementa la energía puede ser descrita como ondas viajeras no lineales, o solitones asociados a soluciones auto-similares.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Rompimiento espontáneo de simetría</b>	<b>3</b>
<b>3. Conjetura de Poincaré y flujo de Ricci como ecuación de difusión para la métrica</b>	<b>9</b>
3.1. Conjetura de Poincaré . . . . .	9
3.2. Flujo de Ricci . . . . .	9
<b>4. Algunas aplicaciones del flujo de Ricci en física</b>	<b>13</b>
4.1. Uso de la gravedad 3D inspirada en teoría de cuerdas para entender la conjetura de Thurston . . . . .	13
4.2. Flujo de Ricci y Modelos Sigma . . . . .	14
4.3. Solitones . . . . .	16
4.4. Masa en altas dimensiones . . . . .	16
4.5. Métricas lorentzianas estáticas . . . . .	16
<b>5. El lagrangiano de la teoría <math>\lambda\phi_d^4</math> como funcional de entropía</b>	<b>19</b>
5.1. Reparametrización . . . . .	22
5.2. $\partial_\tau \mathcal{E} < 0$ (Inversión del parámetro $\tau$ ) . . . . .	26
5.3. $\lambda$ Variable . . . . .	30
5.4. Convergencia del gradiente . . . . .	31
<b>6. Los flujos de parámetros como series infinitas y transiciones de fase</b>	<b>33</b>
6.1. Casos integrables no invertibles . . . . .	37
6.2. Continuaciones analíticas para $m^2(\tau)$ . . . . .	39
6.3. Otros casos . . . . .	40
6.4. El flujo gradiente- $\lambda$ y transiciones de fase dobles . . . . .	40
6.4.1. Flujos gradiente en fase . . . . .	41
6.4.2. Flujos gradiente fuera de fase . . . . .	41
<b>7. Difusión del campo <math>\phi</math></b>	<b>43</b>
7.1. Soluciones ondas-viajeras . . . . .	43
7.1.1. Caso SSB; $m^2 < 0$ . . . . .	43
7.1.2. Caso UES; $m^2 > 0$ . . . . .	46
7.2. Solitones; soluciones autosimilares . . . . .	47
<b>8. Conclusiones</b>	<b>51</b>

<b>9. Apéndice</b>	<b>53</b>
9.1. Ecuación de difusión . . . . .	53
9.1.1. Reversión de la ecuación del calor . . . . .	55
9.2. Renormalización . . . . .	57
9.2.1. Tipos de Renormalización . . . . .	60
9.2.2. Teorías no renormalizables . . . . .	60
9.2.3. Teorías Renormalizables . . . . .	61
9.2.4. Teorías Super-renormalizables . . . . .	61
9.2.5. Teorías finitas . . . . .	62

# Capítulo 1

## Introducción

En el presente trabajo se hace una revisión rápida de algunos conceptos, para luego abordar el lagrangiano de la teoría  $\lambda\phi_d^4$  como funcional de entropía y explorar algunas de sus consecuencias. Entre los conceptos que se revisan está la ruptura espontánea de simetría; cuya esencia reside en que las soluciones con una simetría particular pueden tener soluciones que violen individualmente la simetría, aunque el conjunto de todas las soluciones sea simétrico; la invariancia de norma local del lagrangiano permanece invariante, pues no se ha roto la simetría introduciendo agentes externos; sino que se ha roto espontáneamente. Este recurso matemático es utilizado por Higgs en el lagrangiano invariante de norma de bosones sin masa; con la intención de que al romper espontáneamente la simetría aparezcan los términos que dan origen a los campos de norma masivos.

Veremos además, que el problema de la clasificación de las 3 variedades dio origen al concepto del flujo de Ricci; introducido por Richard Hamilton, el cual es un método para hacer evolucionar una métrica Riemanniana; el resultado obtenido motivó que Hamilton diseñara su programa para demostrar la conjetura de geometrización de Thurston; la cual establece que una 3-variedad con una topología dada, tiene una descomposición canónica en 3-variedades simples, cada una de las cuales admite una, y solo una, de las ocho geometrías homogéneas.

Por otra parte, la idea esencial detrás del flujo de grupo de renormalización (RGF) para una teoría cuántica de campos, es que la física dependa de la escala, por lo que la descripción de un sistema en términos tanto de los grados de libertad, como de un principio de acción cambiará con la escala. El problema de si tal flujo es un flujo gradiente es una pregunta muy complicada desde un punto de vista físico y matemático, el problema consiste en determinar la ortogonalidad del flujo en superficies de nivel de una función de potencial en el espacio de las constantes de acoplamiento. Como ya se mencionó, las ecuaciones de evolución geométricas se introdujeron originalmente para hacer frente a los problemas de los teoremas de uniformización en geometría diferencial, y puestas en práctica con éxito por G. Perelman quien probó la conjetura de Poincaré en tres dimensiones; el carácter monótono del llamado “funcional de entropía” juega un papel clave en la construcción del correspondiente flujo gradiente. Además, el “funcional de entropía” en el contexto de los flujos geométricos aparece en contextos físicos en el papel de principios de acción, y es bien conocido el que utilizó G. Perelman en el contexto de la teoría de cuerdas, ya que el célebre flujo de Ricci corresponde al término de orden más bajo de la expansión perturbativa de lazos; por lo tanto, en principio, los flujos geométricos se pueden utilizar como aproximaciones a los flujos del grupo de renormalización en la teoría cuántica de campos.

El enfoque de funcional entropía de Perelman para flujos geométricos sugiere una receta directa para la determinación de los flujos relevantes para una teoría de interés, y consiste en tomar la acción correspondiente como función potencial en el espacio de acoplamiento de espacio de campos/constantes a lo largo de un parámetro de flujo (que puede ser identificado en particular con la escala de energía, por ejemplo), e invocando la monotonicidad, para determinar los flujos gradiente correspondientes de sus constantes de acoplamiento, parámetros de masa, y los campos

que aparecen en tal acción; esas corrientes de gradiente se pueden comparar posteriormente con los flujos de grupo de renormalización estándar definido por las funciones  $\beta$ . Independientemente de las similitudes y diferencias entre ambos flujos, los flujos gradiente de una acción tienen interés por sí mismos, un enfoque de este tipo puede ser considerado una aproximación no perturbativa para el flujo de grupo de renormalización en el sentido de que los flujos gradiente no se construyen en términos de las funciones  $\beta$ . Sin embargo, como veremos, los flujos gradiente, se definirán en términos de sumas infinitas.

Como ya se ha comentado, la motivación en gran medida en el estudio de los flujos geométricos es la clasificación topológica de variedades, y por lo tanto las ecuaciones de evolución geométricas describirán la dinámica de una variedad, sin embargo, en el presente trabajo intentamos aplicar el mecanismo de flujos geométricos para el estudio de la teoría del campo interactuante más simple, que es la de un campo escalar bosónico de una componente con autointeracción  $\lambda\phi^4$ ; que en el contexto habitual de la teoría cuántica de campos, el fondo es plano y fijo; con las restricciones apropiadas, la teoría ofrece escenarios de rompimiento espontáneo de simetría, que se estudiarán de forma dinámica a lo largo de los flujos. Esta teoría, aunque sencilla, no es trivial, incluso en cuatro dimensiones, la posible trivialidad de la teoría está íntimamente relacionada con los límites teóricos sobre los valores de la masa del Higgs. Sin embargo, nuestro tratamiento no tiene restricciones sobre la dimensión del fondo, y se desarrollará para  $\lambda\phi_d^4$ , con  $d$  arbitraria.

En las siguientes secciones se define la función de Lagrange para la teoría del campo escalar  $\phi$  y parámetros  $(m, \lambda)$ , que dependen de un parámetro de flujo  $\tau$ ; el  $\tau$ -gradiente de la función de Lagrange se determina como una función de los flujos de gradiente del campo y de los parámetros. Considerando entonces el descenso y ascenso para el lagrangiano (en este sentido funciona como una funcional de entropía tanto en el espacio de campos como en el espacio de parámetros), determinamos esos flujos gradiente. El potencial de la teoría muestra un cambio cualitativo entre escenarios Unbroken Exact Symmetry (UES) y Spontaneous Symmetry Breaking (SSB) a lo largo de ciertas trayectorias; en particular, el cambio de un vacío único en los escenarios UES a un vacío degenerado en los escenarios SSB (y viceversa). Luego, se mostrará que los flujos de parámetros se corresponden en general a sumas infinitas, imitando la expansión de lazo para las funciones  $\beta$ ; además se describen las transiciones de fase entre UES y escenarios SSB. En la Sección VII se dejan fijos los parámetros de los flujos, y se deja fluir el campo a través de una ecuación difusiva; considerando el caso de una dimensión espacial, se discuten las soluciones explícitas para la evolución no lineal, es decir, soluciones de ondas viajeras y solitones como soluciones auto-similares. Es importante aclarar que el concepto de dualidad se utilizará en este trabajo, hoy en día dualidad aparece vinculando regiones de acoplamiento fuertes y débiles en la teoría de cuerdas y en teorías de campo supersimétrico; además vincula fase eléctrica/magnética, fase de Higgs/confinamiento, etc. Dado que vamos a deformar la teoría a lo largo de las trayectorias en el espacio de parámetros y campos, las diferentes descripciones de la teoría surgirán de forma natural en las regiones de autointeracción fuerte/débil, fases masiva/sin masa, etc.

Además, se utiliza el criterio de clasificación de Ehrenfest para las transiciones de fase de un sistema; una transición de fase tiene el orden dado por la derivada más baja de la energía que no es continua en el punto de transición. Dado que en nuestro caso, el campo escalar se deforma de forma dinámica a lo largo del  $\tau$  gradiente, el funcional cuyo comportamiento determinará las transiciones de fase debe incluir también la parte cinética, además del término habitual asociado a la energía potencial. De hecho, todas las transiciones de fase que se producen en el presente análisis serán de primera orden.

## Capítulo 2

# Rompimiento espontáneo de simetría

En la naturaleza existe una gran cantidad de simetrías, en muchos casos, estas simetrías pueden cambiar o desaparecer ya sea natural o artificialmente. Usualmente la simetría en las ecuaciones que describen tal o cual situación es útil para distintos fines, lo que se busca es que las ecuaciones que representan un modelo dado, conserven cierta simetría aunque la simetría del modelo haya cambiado, o como se dice comúnmente se rompa. Un ejemplo ilustrativo de la simetría rota, es el de un lápiz que se mantiene en equilibrio sobre su punta. Es simétrico en el sentido de que mientras mantiene el equilibrio sobre la punta, cualquier dirección es tan buena como cualquier otra; cuando el lápiz cae inevitablemente al azar, en una u otra dirección, rompe la simetría.

Otro ejemplo viene de la física del estado sólido; considere algún material ferromagnético para el cual sus átomos poseen un espín  $\sigma_i$ , aunque el hamiltoniano no considera alguna dirección en especial, el estado base del hamiltoniano puede consistir en la alineación del espín de todos sus átomos, esta simetría rotacional puede ser rota por el estado de vacío, aun cuando el hamiltoniano permanezca simétrico. En las ecuaciones, la simetría puede ser rota de manera explícita o espontáneamente.

En el modelo estándar, se dice que la masa es generada a través del mecanismo de Higgs, el cual depende de la ruptura espontánea de la simetría; se dice que si el estado de mínima energía o estado de vacío no es invariante bajo un grupo de transformaciones, mientras que el lagrangiano sí es invariante bajo el mismo grupo de transformaciones, entonces se tiene un rompimiento espontáneo de la simetría. [1]

Además, la ruptura espontánea de la simetría también puede estar asociada con la generación de campos vectoriales masivos. En la teoría de la superconductividad, por ejemplo, la ruptura espontánea de la simetría se produce a temperaturas extremadamente bajas, lo cual nos da el efecto Meissner, en el que las líneas de flujo magnético son expulsadas del interior de un superconductor. Sin embargo, el campo magnético penetra ligeramente en el medio, por lo que hay un pequeño campo electromagnético, que corresponde a un “fotón masivo”, llamamos a estos fotones masivos; *bosones de Nambu-Goldstone*. Por tanto se concluye que la ruptura espontánea de simetría, puede bajo ciertas circunstancias, dar masa a un campo vectorial sin masa. De manera similar, la ruptura espontánea de la simetría, da una solución al problema que los físicos enfrentaron tratando de escribir una teoría de las interacciones débiles en los años 50s y 60s. Uno de los candidatos era la teoría del mesón vectorial masivo. Sin embargo, dicha teoría era conocida por ser no renormalizable; la ruptura espontánea de simetría, sin embargo, resuelve este problema. Conserva la renormalizabilidad de la teoría de norma original incluso después de la ruptura de la simetría.[1]

Para ilustrar el rompimiento espontáneo de simetría, se introduce un campo escalar con una

## CAPÍTULO 2. ROMPIMIENTO ESPONTÁNEO DE SIMETRÍA

---

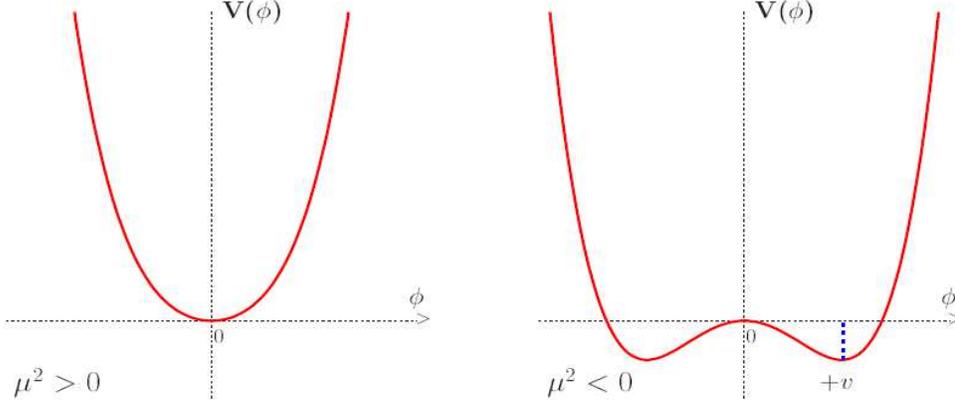


Figura 2.1: Gráfica para  $V(\phi)$  con a)  $m^2 > 0$  y b)  $m^2 < 0$

interacción  $\phi^4$ , que tiene simetría de reflexión  $\phi \rightarrow -\phi$ ;

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{4} \lambda^4; \quad (2.1)$$

cabe señalar que aún cuando  $\phi^3$  podría ser más práctico,[2]  $\phi^3$  no guarda la simetría de reflexión  $\phi \rightarrow -\phi$ , además, la energía no está acotada por abajo, debido a ello, se prefiere el estudio de  $\phi^4$ . Si  $m^2$  es negativo, entonces  $m$  es imaginaria, es decir, tenemos taquiones en la teoría. Sin embargo, con la mecánica cuántica, podemos reinterpretar esto en el sentido de que simplemente se ha expandido alrededor del vacío equivocado. En la Figura 2.1, vemos dos posibles descripciones de  $m^2 \phi^2/2 + \lambda \phi^4/4$ , una con  $m^2$  positivo, lo que nos da un vacío singular, y otra con  $m^2$  negativo, que corresponde a una masa taquiónica. Para el segundo potencial, la partícula no estaría en el vacío usual  $\phi = 0$ . En su lugar, bajaría a un potencial de un estado de menor energía en la parte inferior de uno de los pozos. Por lo tanto, podemos expandir alrededor del nuevo mínimo  $\phi = v$ .

Una analogía aproximada en la mecánica clásica puede ser un vástago vertical, que se cuelga del techo. Normalmente, el estado de menor energía estaría dado por  $\theta = 0$ . Si se desplaza la varilla un ángulo  $\theta$ , entonces el potencial se asemejará a a) en la Figura 2.1. Si se pone a girar a la varilla alrededor del eje vertical, entonces se tendrá a un nuevo equilibrio en algún ángulo fijo  $\theta = \theta_0$ , y su potencial efectivo se parecerá a b) en la Figura 2.1. Para la varilla giratoria,  $\theta = 0$  ya no es el estado de energía más bajo. Para la partícula escalar se dijo que, si  $m^2$  es positivo, entonces sólo hay mínimo; la configuración de vacío usual  $\phi = 0$  y el potencial aún es simétrico, es decir, que tiene la simetría  $\phi \rightarrow -\phi$ . [1] Sin embargo, si  $m^2$  es negativo, entonces en la mecánica cuántica el valor esperado del campo  $\phi$  ya no es el mismo porque hemos elegido un vacío “erróneo”. Para el potencial taquiónico, podemos fácilmente encontrar la ubicación del nuevo mínimo,

$$\phi_0 = v = \pm \sqrt{-6m^2/\lambda}; \quad (2.2)$$

normalmente, exigimos que el valor esperado de vacío del campo escalar se desvanezca. Sin embargo, si el vacío es el incorrecto, entonces encontramos que en su lugar

$$\langle 0 | \phi | 0 \rangle = v, \quad (2.3)$$

para corregir esta situación, debemos cambiar el valor del campo  $\phi$  como sigue

$$\bar{\phi} = \phi - v; \quad (2.4)$$

## CAPÍTULO 2. ROMPIMIENTO ESPONTÁNEO DE SIMETRÍA

---

como el campo  $\bar{\phi}$  ha cambiado, se ha roto la simetría original  $\phi \rightarrow -\phi$  y

$$\langle 0|\bar{\phi}|0 \rangle = 0. \quad (2.5)$$

También tenemos una nueva acción dada por

$$\frac{1}{2}\partial_\mu\bar{\phi}\partial^\mu\bar{\phi} + m^2\bar{\phi}^2 - \frac{1}{6}\lambda v\bar{\phi}^3 - \frac{1}{4!}\lambda\bar{\phi}^4. \quad (2.6)$$

Como  $m^2$  es negativo, tenemos una partícula escalar ordinaria con una masa positiva cuadrada dada por  $-2m^2$ . La simetría original entre  $\phi$  y  $-\phi$  se ha roto espontáneamente porque el campo se ha desplazado y hay un nuevo vacío.

Ahora vamos a discutir un ejemplo menos trivial donde el campo  $\phi^i$  se transforma como un  $N$ -vector;

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi^i\partial^\mu\phi^{i\mu} - \frac{1}{2}m^2\phi^i\phi^i - \frac{\lambda}{4!}(\phi^i\phi^i)^2; \quad (2.7)$$

veamos que podríamos cambiar el signo en la ecuación (2.7) al término que contiene  $\phi^2$  y obtendríamos

$$\mathcal{L} = \left[ \frac{1}{2}\partial_\mu\phi^i\partial^\mu\phi^{i\mu} + \frac{1}{2}m^2\phi^i\phi^i \right] - \frac{\lambda}{4!}(\phi^i\phi^i)^2, \quad (2.8)$$

por lo que podríamos concluir que para  $\lambda$  pequeña, el campo crearía una partícula de masa  $\sqrt{-\mu^2} = i\mu$ . Pero obviamente algo andaría mal. En esencia pasaría algo similar si le diéramos el signo equivocado a la constante de un resorte en un oscilador anarmónico. Si escribimos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 + kq^2) - \frac{\lambda}{4}q^4, \quad (2.9)$$

tiene dos mínimos en  $q = \pm v$ , donde  $v = \left(\frac{k}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}$ , a bajas energías se escoge cualquiera de los dos mínimos y se estudian pequeñas oscilaciones alrededor de ellos, conmutando los mínimos se rompe la simetría de reflexión  $q \rightarrow -q$  del sistema. Sin embargo en mecánica cuántica la partícula puede tunelar entre los dos mínimos y la probabilidad de que se encuentre en uno u otro estado será igual, por lo que se respeta la simetría  $q \rightarrow -q$  del hamiltoniano. Cabe señalar que podríamos romper la simetría de manera explícita añadiendo términos como  $\phi_1^2, \phi_1^4$  y  $\phi_1^2\phi_2^2$ , para romper la simetría de  $O(N)$  a  $O(N-1)$ , bajo la cual  $\phi_2 \dots \phi_N$  rotará como un vector de  $N-1$  componentes. Ésta forma de romper la simetría, se conoce como rompimiento explícito, y se puede romper en etapas; si queremos hasta una simetría  $O(N-M)$ , con  $N > M$ ; en este ejemplo, con los términos que hemos agregado, la simetría de reflexión aun permanece de  $\phi \rightarrow -\phi$ . [3]

Por otra parte se puede dejar al sistema romper la simetría por si mismo, o como ya se ha dicho, podemos romper espontáneamente la simetría.

Nuevamente debemos encontrar el mínimo de la energía potencial

$$\int d^D x \left[ \frac{1}{2}\partial_\mu\phi^i\partial^\mu\phi^{i\mu} + V(\phi_i) \right] = \int d^D x \left[ \frac{1}{2}\partial_\mu\phi^i\partial^\mu\phi^{i\mu} - \frac{1}{2}m^2\phi^i\phi^i - \frac{\lambda}{4!}(\phi^i\phi^i)^2 \right]; \quad (2.10)$$

donde  $D$  es la dimensión del espacio, claramente, cualquier variación espacial en  $\phi$  sólo incrementa la energía, por lo que podemos poner a  $\phi$  como una cantidad independiente del espacio tiempo y buscar el mínimo de  $V(\phi)$ . La diferencia entre la mecánica cuántica y la teoría cuántica de campos es que ahora se tiene una barrera de potencial  $[V(0) + V(\pm 0)] \int d^D x$  y ahora el estado base de la función es concentrado alrededor de  $-v$  o  $+v$ , debemos de escoger alguno de los dos y construir una teoría de perturbaciones alrededor de el, no importa cual se escoja, la física es equivalente, pero al hacer una elección se rompe la simetría de reflexión  $\phi \rightarrow -\phi$  de la lagrangiana, la simetría



Figura 2.2: Anillo degenerado de soluciones para el nuevo mínimo

de reflexión es rota espontáneamente. Una vez más, si el término de masa tiene el signo incorrecto (es decir, si  $m^2$  es negativa), entonces tenemos una nueva solución dada por:

$$\phi^i \phi^i = v^2 = -6m^2/\lambda, \quad (2.11)$$

en este caso se tiene un número infinito de vacíos. En la Figura 2.2, vemos que hay en realidad un anillo degenerado de soluciones en la parte inferior del pozo de potencial. Cualquier solución de esta ecuación da un nuevo vacío. Ahora vamos a romper esta degeneración singularizando la última entrada del vector columna:

$$\langle \phi \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ v \end{pmatrix} = (v_i) \quad (2.12)$$

donde  $v_i = 0$ , si  $i = 1, \dots, N-1$  y  $v_N = v$ . Este vacío es invariante bajo el grupo que deja la última entrada  $v_N = v$  invariante, es decir, el subgrupo  $O(N-1)$ . Así estamos rompiendo con esta elección de vacío el grupo original de simetría  $O(N)$  a  $O(N-1)$ .

Sean  $\tau^i$  los generadores de  $O(N)$ . Estos generadores, a su vez, pueden dividirse en dos grupos: los generadores de  $O(N-1)$ , y todo lo demás. Sea  $\bar{\tau}^j$  igual esos generadores restantes. La forma sencilla de la parametrización de este nuevo vacío es para permitir que la última componente del campo  $\phi^i$  nos de un valor esperado del vacío distinto de cero:  $\phi_N \rightarrow \phi_N + v$ , manteniendo el otro  $\phi_i$  igual. Sin embargo, vamos a encontrar conveniente introducir una parametrización ligeramente más complicada de los  $N$  campos  $\phi^i$  dentro del vector. Vamos a elegir en su lugar:

$$\phi = e^{i\xi_j \zeta_j / v} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ v + \sigma(x) \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

## CAPÍTULO 2. ROMPIMIENTO ESPONTÁNEO DE SIMETRÍA

---

donde hemos sustituido los  $N$  campos originales  $\phi^i$  con un nuevo conjunto, dado por  $N - 1$  campos  $\xi_i$ , y por  $\sigma$ . Al orden más bajo, tenemos  $\phi_i = \xi_i$  para  $i < N$  y  $\phi_N = v + \sigma$ , y la acción se convierte en:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \partial_\mu \xi_i \partial^\mu \xi^i) - \frac{1}{2}(v + \sigma)^2 - \frac{1}{4!}\lambda(v + \sigma)^4 + \text{términos de orden más alto.} \quad (2.14)$$

La acción es aún invariante bajo una simetría residual,  $O(N - 1)$ . Hacemos hincapié en que el número de  $\xi_i$  bosones sin masa, es igual al número de generadores  $\bar{\tau}^i$  rotos. Como ya se dijo, llamamos a estos bosones, bosones de Nambu-Goldstone, estos bosones jugarán un papel especial en la construcción de teorías realistas de las interacciones débiles. En resumen, tenemos:

$$O(N) \rightarrow O(N - 1) \Rightarrow N - 1 \quad \text{Bosones de Nambu Goldstone,} \quad (2.15)$$

es decir, el rompimiento de la simetría  $O(N)$  a  $O(N - 1)$  nos deja con  $N - 1$  bosones de Nambu-Goldstone  $\xi_i$ , o un bosón para cada uno de los generadores rotos  $\bar{\tau}^i$ . [1]



## Capítulo 3

# Conjetura de Poincaré y flujo de Ricci como ecuación de difusión para la métrica

### 3.1. Conjetura de Poincaré

El problema precursor para la clasificación de las 3-variedades fue planteado por Henri Poincaré (1854 – 1912) con el fin de caracterizar la esfera  $S^3$ . En 1904, Poincaré observó que una propiedad característica de la 2-esfera es que se trata de una variedad simplemente conexa, o sea, toda curva cerrada y sin autointersecciones contenida en la variedad se puede deformar a un punto de manera continua. Esto le lleva a plantearse si la misma cuestión es cierta en dimensión 3, donde formula una pregunta que, usando un lenguaje actual, quedaría como;

$$\textit{¿Toda 3-variedad cerrada y simplemente conexa es homeomorfa a la esfera } S^3 \textit{ ?} \quad (3.1)$$

La afirmación que resulta a esta interrogante se conoce como Conjetura de Poincaré, y los esfuerzos por demostrarla abrieron el camino hacia el proyecto más ambicioso de clasificar todas las 3-variedades, cosa que fue un objetivo arduamente perseguido a lo largo del siglo XX. El matemático ruso Grisha Perelman publicó en noviembre de 2002 un artículo titulado “*The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*” [5], el cual contenía un esbozo de la demostración de la Conjetura de Geometrización.

El 5 de junio de 2006 los matemáticos chinos Zhu Xiping y Cao Huaidong anunciaron la demostración completa, basándose en los trabajos preliminares de Perelman, lo que, una vez realizada su validación por la comunidad matemática, y otorgando el crédito principal a Perelman; daría fin a la clasificación completa de las estructuras topológicas de dimensión tres o tridimensionales. En agosto de 2006 se le otorgó a Perelman la Medalla Fields por “sus contribuciones a la geometría y sus ideas revolucionarias en la estructura analítica y geométrica del flujo de Ricci”, premio que Perelman rechazó.

### 3.2. Flujo de Ricci

En 1982, Richard Hamilton introdujo el concepto de flujo de Ricci para variedades de dimensión arbitraria; como se mencionó anteriormente, se trata de un método para hacer evolucionar una métrica Riemanniana. Hamilton buscaba averiguar si las variedades que admitían métricas de cierta complicación podían admitir también métricas más “suaves” (de curvatura constante, homogéneas,

**CAPÍTULO 3. CONJETURA DE POINCARÉ Y FLUJO DE RICCI COMO  
ECUACIÓN DE DIFUSIÓN PARA LA MÉTRICA**  
3.2. FLUJO DE RICCI

---

... ). El resultado obtenido motivó que Hamilton diseñara su programa para demostrar la Conjetura de Geometrización usando el flujo de Ricci. El flujo de Ricci es una familia uniparamétrica de métricas Riemannianas solución de

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = -2Ric_{g_t}, \quad (3.2)$$

con la condición inicial  $g_0 = g$ . La ecuación (3.2) se conoce como ecuación del flujo de Ricci o simplemente flujo de Ricci, y es invariante bajo cambios de escala, es decir, si  $g_t$  es solución de (3.2), también lo es  $\tilde{g}_t = c^2 g_{c^2 t}$ . Para entender que el uso de la ecuación (3.2) es natural para el objetivo que inicialmente perseguía Hamilton, conviene regresar a una de las ecuaciones de evolución más antigua; la ecuación del calor, discutida en el apéndice.

$$\nabla^2 T(\vec{r}, t) = -\frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t}; \quad T(\vec{r}, 0) = T_0; \quad (3.3)$$

cuya solución  $T(x, y, z, t)$  da la temperatura de un punto  $(x, y, z)$  al tiempo  $t$ , cuando la temperatura inicial es  $T_0(x, y, z)$ . Esta solución, es tal que la temperatura tiende a una distribución lo más homogénea posible a medida que el tiempo avanza. Cuando  $t \rightarrow \infty$ , se verifica  $\nabla^2 T = 0$  (es decir,  $T$  es una función armónica) y la distribución de temperatura resultante es uniforme. Esta propiedad de la ecuación del calor inspiró a Ells y Sampson, quienes usaron un tipo de ecuación semejante, pero no lineal, para demostrar que toda aplicación entre variedades riemannianas (cumpliendo ciertas acotaciones en su curvatura) evoluciona a una aplicación de un tipo muy especial. Hamilton buscó una ecuación de evolución de la métrica que tuviera alguna semejanza con la del calor y esperaba que la solución tienda a uniformizar la métrica.

Podemos incluso esperar que, igual que la solución de la ecuación del calor tiende a distribuirse uniformemente sobre el espacio, la métrica tienda a distribuirse también de modo semejante sobre todos los puntos de la variedad, como ocurre en los espacios localmente homogéneos. Antes de pensar en que la ecuación que se busca sea del tipo (3.2) hay que plantearse una cuestión más elemental: ¿Qué ecuaciones son posibles?. Cuando buscamos una ecuación para la derivada parcial temporal de una métrica riemanniana  $g_t$  sobre una variedad  $M$ , buscamos una ecuación “tipo flujo” con la forma general

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = \square. \quad (3.4)$$

Hay que exigir condiciones geométricas con el fin de que (3.4) tenga sentido:

- i) Para que la resolución sea posible,  $\square$  deberá estar definido únicamente en función de  $g_t$  y sus derivadas respecto de las coordenadas de  $M$  (como máximo hasta orden 2).
- ii)  $\square \equiv \square(g_t)$  será una forma bilineal simétrica (por serlo la métrica ya que derivar respecto del tiempo no afecta a las coordenadas de la variedad).
- iii) Por último, es deseable que (3.4) sea invariante bajo cambios de coordenadas.

Con las tres propiedades anteriores, la única posibilidad es que  $\square(g_t)$  sea una combinación lineal de la propia métrica  $g_t$  y de la curvatura de Ricci asociada a  $g_t$ . Así,

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = \alpha Ric_{g_t} + \lambda(t)g_t; \quad (3.5)$$

y tratando de hacer los cálculos más sencillos, tomaremos  $\lambda = 0$  y  $\alpha$  constante

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = \alpha Ric_{g_t}. \quad (3.6)$$

**CAPÍTULO 3. CONJETURA DE POINCARÉ Y FLUJO DE RICCI COMO  
ECUACIÓN DE DIFUSIÓN PARA LA MÉTRICA**  
3.2. FLUJO DE RICCI

---

Para averiguar el signo que conviene tomar para  $\alpha$  en (3.6), buscamos una ecuación del tipo (3.4). Del desarrollo de Taylor de las componentes de la métrica en coordenadas normales y la definición de la curvatura de Ricci,

$$(\Delta g_{ij})(p) = \sum_{a=1}^n \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^{a^2}}(p) = -g^{ab} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^a \partial x^b}(p) = \frac{1}{3} Ric_{ij}(p) + O(\|x\|). \quad (3.7)$$

Luego, (3.6) se puede aproximar por

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} \approx 3\alpha \Delta g_t; \quad (3.8)$$

por lo tanto, sólo si  $\alpha < 0$  el flujo de Ricci se puede aproximar linealmente por una ecuación como la del calor. Finalmente, el valor específico de  $\alpha$  es una cuestión arbitraria; en concreto, por motivos de cálculo, Hamilton tomó  $\alpha = -2$ .

Para que el estudio práctico del flujo de Ricci sea posible, lo primero que se ha de plantear es si la ecuación (3.2) tiene solución, al menos para pequeños intervalos de tiempo. Esto lo asegura el resultado que enunciamos a continuación, cuya prueba la dio Hamilton en 1982 y la simplificó DeTurck un año más tarde: *Dada cualquier variedad riemanniana  $(M, g)$  de dimensión arbitraria, existe  $\epsilon$  y una única solución diferenciable  $g_t$  del flujo de Ricci, con  $t \in [0, \epsilon)$ , tal que  $g_0 = g$ .*

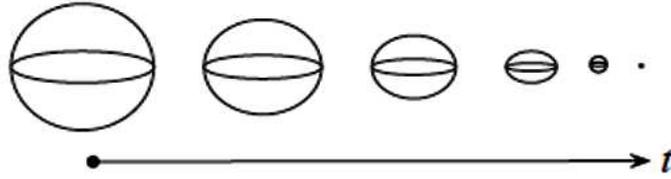


Figura 3.1:

La analogía del flujo de Ricci con la ecuación del calor no es tan perfecta como decíamos anteriormente, pues surgen dificultades al observar los ejemplos más sencillos de soluciones del flujo de Ricci, por ejemplo; si hacemos evolucionar la métrica estándar de una esfera siguiendo el flujo de Ricci, la variedad se contrae conforme el tiempo avanza hasta que, en un tiempo finito, colapsa a un punto (esto es, la métrica tiende a cero y la curvatura se vuelve no acotada en todo punto). En la figura (3.1), la esfera acaba convirtiéndose en un punto (el cual tiene volumen cero). Una posible estrategia para evitar este comportamiento sería exigir que el volumen de la solución se mantenga constante con el tiempo. La modificación de (3.2) para que se cumpla esta condición lleva a la ecuación del flujo de Ricci normalizado.

$$\frac{\partial \tilde{g}_t}{\partial t} = -2Ric_{\tilde{g}_t} + \frac{2}{n} r \tilde{g}_t \quad (3.9)$$

donde  $r = r(t)$  es una función que depende de una integral de la curvatura. El siguiente resultado muestra que el procedimiento funciona, y se enuncia como el siguiente teorema:

*Si  $(M, g)$  es una 3-variedad riemanniana con  $Ric_g > 0$ , entonces la solución de (3.2) se contrae a un punto en un tiempo finito; pero existe una única solución  $g_t$  de (3.9) definida para todo  $t = 0$  y tal que  $g_0 = g$ . Además,  $g_t$  converge, cuando  $t \rightarrow \infty$ , a una métrica de curvatura seccional constante y positiva.*

**CAPÍTULO 3. CONJETURA DE POINCARÉ Y FLUJO DE RICCI COMO  
ECUACIÓN DE DIFUSIÓN PARA LA MÉTRICA**  
3.2. FLUJO DE RICCI

---

Las soluciones de (3.2) y (3.9) son equivalentes en el sentido de que una se obtiene a partir de la otra multiplicando por un factor de reescalamiento adecuado y haciendo una reparametrización temporal. A causa de esta propiedad, el flujo de Ricci normalizado es una herramienta que ha caído en desuso; pues se consigue el mismo efecto simplemente expandiendo las distancias y el tiempo en una solución ordinaria de (3.2).

Resulta natural preguntarse hasta cuando se puede prolongar la solución de (3.2), ya que el ejemplo anterior muestra que el flujo de Ricci no existe en general para todo el intervalo de tiempo  $[0, 8)$ . A grandes rasgos, diremos que el flujo se vuelve singular en el instante  $T$  si no se puede extender más allá de  $T$ . Hamilton probó que si la solución de (3.2) existe sólo en un intervalo de tiempo finito, entonces la curvatura no está acotada.

Este resultado propicia una clasificación para las soluciones del flujo de Ricci en singulares y no singulares. Según esto, para que el flujo produzca una singularidad hay dos posibilidades; (a) que en el instante singular la curvatura se haga infinita en todos los puntos de la variedad (como el caso de la esfera) y (b) que la curvatura sea no acotada sólo en una región concreta de la variedad. Vimos que la posibilidad (a) es evitable usando el flujo de Ricci normalizado, (b) también se da, y ésta es la que produce los mayores problemas en el estudio del flujo de Ricci.

## Capítulo 4

# Algunas aplicaciones del flujo de Ricci en física

### 4.1. Uso de la gravedad 3D inspirada en teoría de cuerdas para entender la conjetura de Thurston

El teorema de uniformización en dos dimensiones establece que una variedad cerrada orientable de dos dimensiones admite únicamente la geometría de curvatura constante con curvaturas positivas, cero o negativas. Este teorema ha demostrado ser una herramienta muy poderosa en física de dos dimensiones, con aplicaciones en teorías de campos conformes teoría de cuerdas. En el formalismo de las integrales de trayectoria, uno puede sumar sobre las geometrías y topologías 2-D; por lo tanto, en la integral de trayectoria, uno puede sumar sobre las deformaciones de cada una de estas geometrías.[9]

La importancia potencial de un teorema de uniformización 3D es evidente, en particular en el contexto de la física de membranas o gravedad cuántica tridimensional, donde uno debe ser capaz de realizar la cuantización de integrales de trayectoria a través de un procedimiento similar al aplicado en dos dimensiones. Por otra parte, la conjetura de Thurston establece que una 3-variedad con una topología dada, tiene una descomposición canónica en 3-variedades simples, cada una de las cuales admite una, y sólo una, de las ocho geometrías homogéneas;  $H^3$ ,  $S^3$ ,  $E^3$ ,  $S^2 \times S^1$ ,  $H^2 \times S^1$ ,  $Sol$ ,  $Nil$  y  $S_L(2, R)$ . Las primeras tres geometrías son simétricas, y por lo tanto isotropas. Las cinco restantes son anisotropas, y por lo tanto menos simétricas, pero todos tienen por lo menos tres grupos de isometrías triparamétricas. [9]

Para probar un teorema de uniformización, hay que demostrar que una variedad diferenciable con una topología dada admite una cierta simetría. Esta es una tarea formidable, que pretende mostrar que las estructuras admitidas en una pequeña parte de la variedad, pueden ser extendidas para cubrir la totalidad de la misma. Una alternativa es suponer que la variedad admite alguna métrica, luego, mostrar que este puede ser deformada en la métrica requerida la cual es altamente simétrica. La elección obvia de la deformación, es tratar la métrica inicial similar a un flujo de calor, y entonces dejar que el fluya en el tiempo, a través de algún sistema parabólico de ecuaciones diferenciales parciales. La idea es que el flujo de calor se uniformiza, de modo que al final, cuando  $t \rightarrow \infty$ , la temperatura se vuelve uniforme. El problema con esta estrategia es que hay que encontrar un sistema parabólico por el cual fluya la métrica. Se espera que el flujo sea de la forma

$$\dot{g}_{\mu\nu} = \mathcal{O}(g_{\mu\nu}); \tag{4.1}$$

donde el operador  $\mathcal{O}$  es elíptico. Por otra parte, este operador debe transformarse como un tensor bajo transformaciones de coordenadas, lo cual restringe al operador a ser construido a partir del tensor de curvatura, por lo que se elige el flujo de Ricci

$$\dot{g}_{\mu\nu} = -2R_{\mu\nu}. \tag{4.2}$$

El primer problema con este flujo es que no es estrictamente parabólico, aunque comparte muchas de las propiedades de las ecuaciones de calor más simples. De hecho, ni siquiera es un sistema lineal en derivadas parciales, ya que la inversa de la métrica aparece en el tensor de Ricci en el lado derecho. Entonces, primero hay que resolver algunos problemas difíciles en análisis; la existencia de flujos de corta duración, extensión a tiempos finitos, la aparición de singularidades, etc. Muchos de estos problemas han sido resueltos por Hamilton y otros, pero no todos.[9]

Pero hay otro problema con el flujo de Ricci, ¿Cómo incorporar la topología de la variedad? Después de todo, la uniformización se reduce a demostrar que dada una topología múltiple, implica admisibilidad de una única métrica homogénea. Para el caso de variedades cerradas 2D, es bastante sencillo modificar el flujo de Ricci, así que la topología es especificada. Esto debido a que estas variedades se caracterizan como espacios topológicos por su número de Euler  $\chi(M_2)$ , y están relacionadas con la curvatura a través de la fórmula de Gauss-Bonnet. Así que el flujo de Ricci modificado está dado por

$$\dot{g}_{\mu\nu} = -2R_{\mu\nu} + \frac{\chi(M_2)}{V(M_2)} g_{\mu\nu}, \tag{4.3}$$

donde

$$V(M_2) = \int_{M_2} d^2x \sqrt{g} \tag{4.4}$$

es el volumen de  $M_2$ .

El flujo tiene como puntos fijos a las geometrías de curvatura constante. La existencia de este flujo y el hecho de que converge a sus puntos fijos fue probado por Hamilton y Chow, dando así una nueva prueba del teorema de uniformización en dos dimensiones. El punto importante aquí es que la topología de  $M_2$  da los datos explícitos en el segundo término del flujo.[9]

Desafortunadamente, el caso en 3D no es tan simple. Además del problema de que, en general, las versiones en tres dimensiones de los flujos de Ricci y los flujos de Ricci modificados tienen singularidades, la topología de una variedad de 3D cerrada no puede ser fácilmente expresada como un punto de datos en el lado derecho de un flujo modificado de Ricci. Por ejemplo, el número de Euler de una variedad 3D cerrada es cero. Así, un término en el flujo modificado Ricci proporcional a la propia métrica no podría ser obviamente especificado por los datos topológicos.[9]

## 4.2. Flujo de Ricci y Modelos Sigma

El flujo de Ricci fue presentado por Hamilton hace más de 25 años, y ha sido estudiado por los matemáticos principalmente como una herramienta para probar la conjetura de geometrización para 3-variedades cerradas, que incluye como caso especial, la conjetura de Poincaré. La ecuación describe la deformación de una métrica de Riemann  $g_{ij}$  con un tiempo  $\lambda$ . La deformación es impulsada por la curvatura de Ricci, de modo que las partes de la variedad con mayor curvatura de Ricci se someterán a una mayor deformación. Las regiones con curvatura de Ricci pequeña, cambiarán sólo un poco durante el flujo. [8]

El estudio matemático del flujo de Ricci ha experimentado un enorme crecimiento después del trabajo de Perelman, y es un buen momento para buscar las aplicaciones físicas. Hay varias posibilidades, algunas pero no todas relacionadas con el flujo del grupo de renormalización. Una

breve lista de preguntas del flujo de Ricci y sus posibles aplicaciones físicas incluirían algunas de las siguientes preguntas:

¿Hay clases de métricas de Lorentz a las que se pueda aplicar el flujo de Ricci? (Se dice clases, en parte porque el problema no restringido de valores iniciales podría ser mal planteado.) Si es así, seguramente se encontrarán aplicaciones en la relatividad general, pero ¿qué son exactamente las aplicaciones útiles?.[8]

¿Es estable el espacio plano bajo el flujo de Ricci? Si no lo es, entonces la masa podría comportarse de forma inesperada bajo un flujo de GR (Grupo de renormalización). Esto podría tener aplicaciones en la condensación Taquiónica en teoría de cuerdas.[8]

¿Podemos hacer el flujo de Ricci en variedades con frontera? Hay un trabajo reciente sobre este tema en el contexto de una aplicación a la termodinámica de agujeros negros. A su vez, esta cuestión tiene cierta relación con ciertas formulaciones de masa cuasilocal.[8]

La definición de entropía de Perelman puede generalizarse a un flujo GR completo (de modelos sigma no lineales) para expresar esto como un gradiente de flujo en un espacio de constantes de acoplamiento equipados con una métrica definida positiva? Si es así, entonces esto daría lugar a una  $C$ -función para este flujo.[8]

Comencemos con la conexión entre el flujo de Ricci y el flujo de GR para la teoría de cuerdas o, más precisamente, para modelos sigma bosónicos no lineales de 2 dimensiones espacio-tiempo a una variedad Riemanniana curva. Considere el modelo sigma sólo con el acoplamiento a la métrica espacial  $g_{ij}$ . La acción es

$$S = \alpha' \int_M h^{ab}(\sigma) g_{ij} X \frac{\partial X^i}{\partial \sigma^a} \frac{\partial X^j}{\partial \sigma^b} \sqrt{h} d^2 \sigma; \quad (4.5)$$

pensando en esto como punto de partida para una teoría de campos cuánticos escalares  $X_i$  en 2 dimensiones, entonces  $g_{ij}(X)$  representa las constantes de acoplamiento de la teoría y se puede esperar que sea renormalizable. El flujo del grupo de renormalización perturbativo puede expresarse como una serie de potencias en  $\alpha'$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \lambda} = -\alpha' R_{ij} - a \frac{\alpha'^2}{2} R_{iklm} R_j^{klm} + \dots, \quad (4.6)$$

por lo tanto, si tomamos  $a \rightarrow 0$ , se obtiene la ecuación del flujo de Ricci. Sin embargo, esto no significa necesariamente que las soluciones se aproximan entre sí en escalas arbitrarias de  $\lambda$  conforme  $a$  se hace pequeño. Por otra parte, para evitar problemas, se tendrá en cuenta soluciones  $g$  definidas en un dominio semi-infinito o infinito, así para cualquier  $a$  finito el dominio de  $\lambda$  también es semi-infinito o infinito. Los flujos de dichos dominios son clasificados como antiguo ( $\lambda \in (-\infty, 0)$ ), inmortal ( $\lambda \in (0, \infty)$ ) o eterno ( $\lambda \in (-\infty, \infty)$ ). Los flujos antiguos y eternos son de mayor interés. [8]

Si una solución antigua o eterna  $g_{ij}(t)$  es asintóticamente plana en cada  $t$ , entonces la curvatura escalar obedece  $R \geq 0$  para todo  $t$ . Eso significa que el teorema de masa positiva se cumple a lo largo del flujo. Esto también prueba la pregunta de cómo se comporta la masa bajo un flujo de RG, o al menos, en el contexto actual, bajo un flujo de Ricci. Esto nos lleva primero a una discusión de una solución especial de la corriente conocida como un solitón de Ricci, y luego a la cuestión de si el espacio plano es asintóticamente estable con respecto al flujo de Ricci.[8]

### 4.3. Solitones

Como modelo de flujo de Ricci, considere la ecuación lineal del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{4.7}$$

para la temperatura  $u(t, x)$ . La solución general para  $x \in [0, \pi]$  y condiciones de frontera arbitrarias tiene la solución general

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n^2 t} \sin(nx). \tag{4.8}$$

Las soluciones separables son autosimilares, lo cual significa que evolucionan puramente en el tiempo reescalando su amplitud, pero la solución general no es autosimilar ya que no es separable. [8] Si los datos iniciales contienen muchos modos de Fourier, el más bajo de los cuales es el modo  $n$ -ésimo, entonces en los últimos momentos los modos superiores  $m > n$  son suprimidos con respecto a este modo por un factor de  $e^{-(m^2-n^2)t}$ , por lo que la solución tiende a  $e^{-N^2 t} \text{sen} nx$ . Las soluciones siempre se acercan a la auto-similitud en los últimos momentos. [8]

En el flujo de Ricci, las soluciones auto-similares existen y se llaman solitones de Ricci. Siempre son antiguas, inmortales o eternas, por lo que son de interés para nosotros. Por supuesto, en contraste con el caso de la ecuación de calor, un flujo arbitrario de Ricci no es una suma de solitones, puesto que el flujo de Ricci no es lineal, pero en general los flujos a veces son asíntotas de solitones en ciertos límites. Los solitones estables no reescalán bajo el flujo de Ricci. Cualquier métrica de Ricci plana es un ejemplo de un solitón constante. También hay solitones en expansión y contracción, los cuales reescalán. Un ejemplo sencillo de un solitón es la  $n$ -esfera contrayéndose. [8]

### 4.4. Masa en altas dimensiones

En dimensión  $n \geq 3$ , podemos definir la planitud asintótica eligiendo las coordenadas adecuadas cerca de infinito. Una métrica asintóticamente plana es una cuyas componentes difieren de la referencia por un elemento de un cierto espacio  $H_\delta^k$ , donde la tasa de caída de  $\delta$  es suficiente para dar una masa ADM bien definida. Volviendo por un momento a la analogía de la ecuación del calor, recordemos que la ecuación del calor unidimensional en un dominio infinito tiene una cierta no-unicidad. [8]

Es necesario imponer cada de las condiciones en las soluciones de la ecuación de calor a lo largo de todo el flujo, no sólo en la distribución de la temperatura inicial, con el fin de tener unicidad. Sorprendentemente, este problema no parece surgir para el flujo de Ricci. Por lo menos, la planitud asintótica de datos iniciales siempre se mantiene tanto tiempo como el flujo permanece no singular. Debido a que la planitud asintótica se conserva, se puede evaluar la masa en cualquier momento a lo largo del flujo. Si la masa evaluada en dos diferentes valores  $\lambda$  difiere, entonces en algún  $\lambda$  intermedio de la masa debe tener flujo derivado distinto de cero. [8]

### 4.5. Métricas lorentzianas estáticas

La discusión de los puntos de la sección anterior a la probable importancia de la comprensión de que el flujo de masa cuasilocal tendría para la cuestión general de la estabilidad del espacio

**CAPÍTULO 4. ALGUNAS APLICACIONES DEL FLUJO DE RICCI EN FÍSICA**  
**4.5. MÉTRICAS LORENTZIANAS ESTÁTICAS**

---

plano (y otros puntos fijos asintóticamente planos) cuando no se supone simetría. Específicamente, una comprensión de las condiciones en las que la masa se evapora monótonamente en  $\lambda$  es probable que sea una herramienta importante.[8]

A la inversa, el flujo de Ricci puede conducir a una mejor comprensión de la masa cuasilocal. La masa cuasilocal es importante sólo en la medida en que proporciona una caracterización útil geométrica de las regiones delimitadas dentro de un colector. Como tal, la masa cuasilocal debe tener propiedades útiles, de la que monotonidad y positividad son ejemplos clásicos. [8]



## Capítulo 5

# El lagrangiano de la teoría $\lambda\phi_d^4$ como funcional de entropía

En este capítulo aplicamos las ideas de los flujos geométricos basados en el fenómeno de difusión, descritos previamente. Comenzamos con el lagrangiano usual para la teoría  $\lambda\phi_d^4$  tomándolo como funcional de un parámetro  $\tau$ , que define un flujo en el espacio de parámetros y campos;

$$\mathcal{E}[\phi(x, \tau), m(\tau), \lambda(\tau)] = \int \left( \frac{1}{2} \partial^i \phi \partial^i \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{4!} \lambda \phi^4 \right) d^n x; \quad (5.1)$$

la dependencia en  $\tau$  de la funcional (5.1) puede ser interpretada en diversos sentidos; si  $\tau$  se identifica con la escala de energía, entonces se puede estudiar en el esquema de Hamilton-Perelman, la deformación de la teoría conforme  $\tau$  varia. Además,  $\tau$  también puede ser identificado con la temperatura, y debido a que la energía del sistema cambia con  $\tau$ , entonces  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\tau)$  puede describir un sistema abierto intercambiando energía con los alrededores; por lo tanto, tenemos una teoría de campo a temperatura distinta de cero, con  $\mathcal{E}(\tau = 0)$  identificado con la función de Lagrange habitual para una teoría a *temperatura cero*.

En (5.1), la constante de acoplamiento  $\lambda$  se supone generalmente positiva, el escenario sin rompimiento de simetría requiere  $m^2 > 0$ , y el rompimiento espontáneo de simetría requiere  $m^2 < 0$ . Estas restricciones sobre la masa definen los regímenes en el espacio de parámetros, que se conectarán mediante trayectorias definidas a lo largo de los flujos gradiente, por lo que dichas trayectorias conectarán escenarios UES y SSB. El gradiente a lo largo del flujo del parámetro  $\tau$  queda de la siguiente manera;

$$\partial_\tau \mathcal{E} = - \int \left[ \left( \square \phi + m^2 \phi + \frac{1}{3!} \lambda \phi^3 \right) \partial_t \phi + \frac{1}{2} \phi^2 \frac{d}{d\tau} m^2 + \frac{1}{4!} \phi^4 \frac{d}{d\tau} \lambda \right] d^n x; \quad (5.2)$$

donde  $\square \equiv \partial_i \partial^i$  es el operador de Laplace - Beltrami. En el esquema de Perelman, la funcional  $\mathcal{E}$  debe ser estrictamente monótona y puede ser positiva o negativa. Veamos que sucede para el caso  $\partial_\tau \mathcal{E} > 0$ .

La monotonidad de  $\mathcal{E}$ , implica que cada término del gradiente  $\partial_\tau \mathcal{E}$  debe ser positivo, por lo que se propone un “flujo de Higgs” como

$$\partial_\tau \phi = \square \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi} \quad (5.3)$$

$$= \square \phi - m^2 \phi + \frac{1}{3!} \lambda \phi^3 \quad (5.4)$$

es decir, se tiene una ecuación de difusión con correcciones no lineales para el campo de Higgs. Además, la monotonidad de  $\mathcal{E}$  requiere que  $\partial_\tau m^2 \geq 0$ , y  $\partial_\tau \lambda \geq 0$ ; los casos con igualdades

## CAPÍTULO 5. EL LAGRANGIANO DE LA TEORÍA $\lambda\phi_D^4$ COMO FUNCIONAL DE ENTROPIÍA

estrictas son triviales, pues implican que  $m^2$  y  $\lambda$  son estacionarios a lo largo de los flujos. Por otra parte UES y SSB requieren  $\lambda > 0$ , por tanto, si esta condición es impuesta en  $\tau = 0$ , la condición  $\partial_\tau \lambda \geq 0$  mantendrá la positividad requerida por la monotonicidad de  $\mathcal{E}$  para todo  $\tau$ , y el escenario para el rompimiento de simetría será posible a lo largo del flujo. El comportamiento de la masa a lo largo del flujo es un aspecto delicado; UES requiere  $m^2 > 0$ , y SSB requiere  $m^2 < 0$ , sin embargo, la monotonicidad es consistente con ambos, pues la restricción  $\partial_\tau m^2 \geq 0$  funciona tanto para  $m^2 > 0$ , como para  $m^2 < 0$ . Así, se propone también el siguiente “flujo de masa”;

$$\partial_\tau m^2 = \mu(m^2)^n \quad (5.5)$$

cuya solución es

$$m^2(x, \tau) = [(n-1)(-\mu\tau - \mu_0)]^{\frac{1}{1-n}} \quad n = 0, 2, 4, \dots \quad (5.6)$$

donde  $\mu$  es una función arbitraria de las m-coordenadas, además se propone  $\mu(x) \geq 0$ ; la solución de este flujo con  $\mu_0 = \mu_0(x)$  es nuevamente una función arbitraria de  $x$ , pero sin la restricción de positividad. Elegimos  $\tau = 0$  como el momento en el que debe ocurrir el rompimiento espontaneo de simetría, luego, eventualmente el sistema evolucionará a lo largo del flujo. De manera similar se tiene para  $\lambda$

$$\partial_t \lambda = \nu(\lambda)^l \Rightarrow \lambda(x, t) = [(l-1)(-\nu\tau - \nu_0)]^{\frac{1}{1-l}} \quad l = 0, 2, 4, \dots \quad (5.7)$$

existen varios escenarios para el espectro de masa, dependiendo del signo de  $\mu_0$  y  $n$ . Si  $\mu_0 > 0$ , la gráfica es bien comportada, sin embargo si  $\mu_0 < 0$  obtendremos singularidades cuando  $\tau = -\frac{\mu_0}{\mu}$ , y dependiendo del signo de  $n$  tendremos un escenario con o sin rompimiento. Al llegar al “tiempo” crítico  $\tau_0 = -\frac{\mu_0}{\mu}$  habrá una singularidad y después de ella un cambio de signo en la masa, lo que separará escenarios con rompimiento de escenarios sin rompimiento o viceversa. Si  $\mu_0 = 0$  entonces habrá 2 casos dependiendo del valor de  $n$ ; si  $n \leq 0$ , tendremos rompimiento espontáneo de simetría, si  $n > 0$  no habrá tal rompimiento.

A continuación se muestran las gráficas del potencial en los distintos casos mencionados anteriormente y determinados por el flujo de masa con el parámetro  $\lambda$  fijo; así, en los escenarios descritos, la teoría se mantiene auto-interactuante. Posteriormente consideraremos el escenario general con  $\lambda$  variable.

### i) $\mu_0 > 0, n > 0$

En este caso  $m^2$  es negativo; existe SSB en el intervalo  $[0, \infty)$  y el potencial de Higgs se va suavizando a través del flujo de masa y no se presentan singularidades.

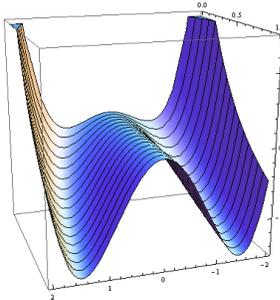


Figura 5.1:  $\mu_0 > 0, n > 0$

La distancia entre los mínimos y la altura del potencial disminuyen conforme evoluciona en el parámetro  $\tau$ . Además tenemos  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} m = 0$

**CAPÍTULO 5. EL LAGRANGIANO DE LA TEORÍA  $\lambda\phi_D^4$  COMO FUNCIONAL DE ENTROPÍA**

---

**ii)**  $\mu_0 > 0, n \leq 0$ . En este caso no hay rompimiento en el intervalo  $[0, \infty)$  y el potencial se va cerrando conforme crece el parámetro  $\tau$ .

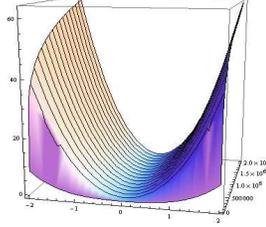


Figura 5.2:  $\mu_0 > 0, n \leq 0$

**iii)**  $\mu_0 < 0, n > 0$ .

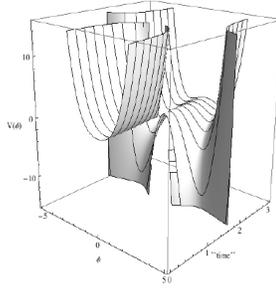


Figura 5.3:  $\mu_0 < 0, n > 0$

Este caso corresponde a un escenario UES en el intervalo  $[0, -\frac{\mu_0}{\mu})$  apareciendo una singularidad en  $\tau = -\frac{\mu_0}{\mu}$ , después de dicha singularidad el potencial tiene la forma de SSB y se va suavizando de manera similar al caso *i*).

**iv)**  $\mu_0 < 0, n \leq 0$ . En este caso se pasa de manera continua de un escenario SSB a otro UES. El caso  $\mu_0 < 0$  es más interesante pues las singularidades aparecen solo cuando  $\mu_0 < 0$ ,

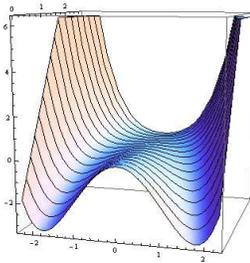


Figura 5.4:  $\mu_0 < 0, n \leq 0$

además, cuando se da el caso  $\mu_0 < 0$  junto con  $n \leq 0$  se puede pasar de manera continua de SSB a UES, debido a que en este caso la potencia, en la expresión para la masa, no puede ser negativa, por lo que no hay problema si la suma de los términos bajo la potencia es cero.

## 5.1. Reparametrización

Después de analizar los casos anteriores, se propone una reparametrización de  $\tau$  con la intención de eliminar las singularidades, ya que si hacemos una elección adecuada del parámetro  $\tau$ , y las singularidades son removibles, entonces dichas singularidades no deben ser físicas. Se propone la siguiente reparametrización, la cual mantiene la positividad del gradiente y elimina las singularidades,

$$\partial_\tau m^2 = \mu^2 e^{\gamma\tau} m^{2n}, \quad (5.8)$$

cuya solución es

$$m^2 = \left( (2n-1) \left( \frac{-e^{\gamma\tau} \mu^2}{\gamma} - u_0 \right) \right)^{\frac{1}{1-2n}}. \quad (5.9)$$

Si no imponemos condiciones sobre las constantes, nuevamente obtendremos singularidades, debido a que todo el término está elevado a una potencia fraccionaria que puede ser negativa dependiendo del signo de  $n$ ; por tanto si la potencia es negativa y la suma de los términos bajo la potencia  $n$  es cero, obtendremos una singularidad. Para evitar esta situación podemos imponer algunas condiciones, es decir, hacer que el término bajo la potencia fraccionaria nunca sea cero. Por otra parte también nos interesan los escenarios en que el parámetro  $\tau$  es invertido, lo cual correspondería a obtener un gradiente de masa negativo, al plantear una ecuación diferencial que involucre el gradiente negativo, tendremos una nueva solución similar a la que se obtuvo en el gradiente positivo; una vez que tengamos esta nueva solución, deberá existir continuidad entre las dos soluciones en  $\tau = 0$ .

De la solución para la reparametrización de  $\tau$  podemos ver que mientras  $u_0$  sea mayor que cero no existirán singularidades; sin embargo, si  $u_0$  es menor que cero existirán singularidades en el caso en que la suma de los términos bajo la potencia sea cero. Para evitar la singularidad será necesario hacer;

$$-\frac{\mu^2}{\gamma} - u_0 < 0, \quad (5.10)$$

$$\Rightarrow \mu^2 > -u_0\gamma \quad (5.11)$$

al imponer estas condiciones las singularidades desaparecen, y lo que se obtiene son potenciales con o sin rompimiento dependiendo del signo de  $n$ ; que se van suavizando o cerrando respectivamente conforme  $\tau \rightarrow \pm\infty$ . A continuación se muestran los distintos casos “sin singularidades”.

**v)**  $u_0 > 0, n \geq 2, \gamma > 0$

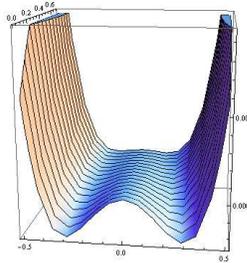


Figura 5.5:  $u_0 > 0, n \geq 2, \gamma > 0$

Al remover la singularidad este caso es equivalente al *i*)

**vi)**  $u_0 > 0, n < 0, \gamma > 0$

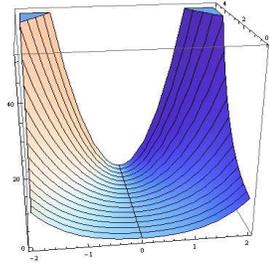


Figura 5.6:  $u_0 > 0, n < 0, \gamma > 0$

Como ya se mencionó, en los casos con  $u_0 > 0$  no hay singularidades; la existencia del rompimiento espontáneo de simetría será determinado por el valor de  $n$ ; cuando  $n$  sea positivo habrá rompimiento y cuando  $n$  sea negativo no habrá rompimiento, lo cual se puede ver de la solución para  $m$ .

**vii)**  $u_0 < 0, n \geq 2, \gamma > 0$

Este caso es equivalente al *i*)

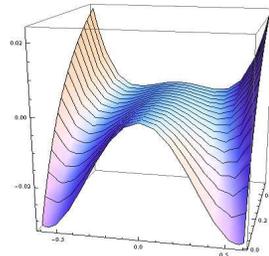


Figura 5.7:  $u_0 < 0, n \geq 2, \gamma > 0$

**viii)**  $u_0 < 0, n < 0, \gamma > 0$

Este caso es equivalente al *ii*)

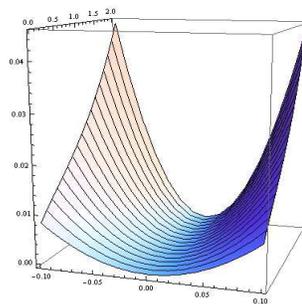


Figura 5.8:  $u_0 < 0, n < 0, \gamma > 0$

**ix)**  $u_0 = 0, n > 1, \gamma > 0$

Este caso es equivalente al *i)*

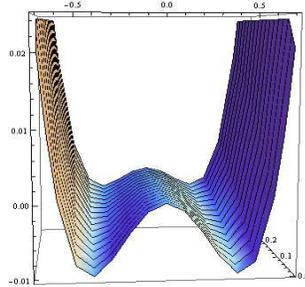


Figura 5.9:  $u_0 = 0, n > 1, \gamma > 0$

**x)**  $u_0 = 0, n < 0, \gamma > 0$

Este caso es equivalente al *ii)*

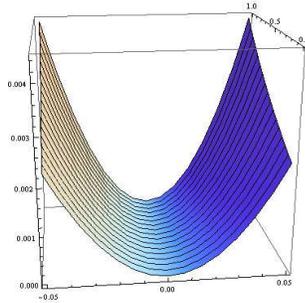


Figura 5.10:  $u_0 = 0, n < 0, \gamma > 0$

**xi)**  $n = 0, u_0 > 0, \gamma > 0$

Este caso es equivalente al *ii)*

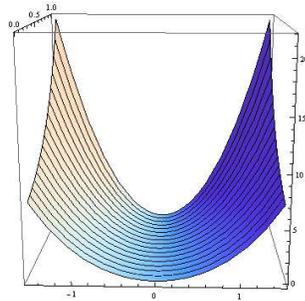


Figura 5.11:  $n = 0, u_0 > 0, \gamma > 0$

Las singularidades han sido removidas en todos los casos usando una reparametrización de  $\tau$ , lo que nos deja escenarios sólo con rompimiento o sin rompimiento espontaneo de simetría.

**xii)**  $n = 0, u_0 < 0, \gamma > 0$

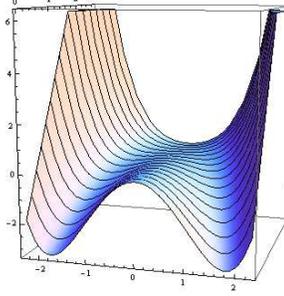


Figura 5.12:  $n = 0, u_0 < 0, \gamma > 0$

Este caso es especial ya que se pasa de un perfil con rompimiento espontáneo de simetría a uno sin rompimiento en un tiempo finito; y se puede observar un cambio cualitativo en el perfil de SSB a UES. Esto se debe a que cuando  $n = 0$  no importa si los términos bajo la potencia dan una suma igual a cero, por lo que la masa puede evolucionar desde valores negativos a valores positivos sin necesidad de atravesar una singularidad.

**xiii)**  $n = 0, u_0 = 0, \gamma > 0$

Este caso es equivalente a *ii)*

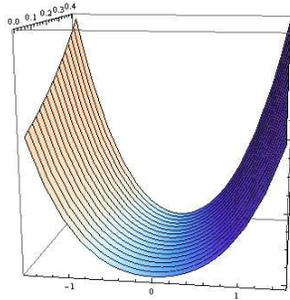


Figura 5.13:  $n = 0, u_0 = 0, \gamma > 0$

Finalmente, este último caso es el más sencillo pues tanto  $u_0$  como  $n$  son cero, lo cual permite al potencial solo una posibilidad; el caso en el que no hay rompimiento espontáneo de simetría. Como ya se mencionó, es clara la imposibilidad de pasar de un escenario sin rompimiento a uno con rompimiento en los casos con  $n \neq 0$ ; hipotéticamente las singularidades se encuentran en el infinito, es decir requeriríamos de un tiempo infinito para pasar de un escenario a otro. En la primera solución que se obtuvo para la masa  $m$ , para pasar de un escenario a otro era necesario atravesar una singularidad; lo que nos indica que no es posible pasar de un escenario a otro, pues hay que atravesar una singularidad o esperar un “tiempo” infinito, lo cual es físicamente imposible.

Si se comienza con un potencial que presenta UES en  $\tau = 0$ , así se mantendrá en el intervalo  $[0, \infty)$ ; por otra parte, si se comienza con un potencial que presenta SSB habrá dos situaciones; una en la que el potencial se va suavizando en el intervalo  $(0, \infty)$  sin presentar singularidades, y otra, cuando  $n = 0$ ; en la que hay un cambio cualitativo en el potencial sin que aparezcan singularidades; es decir el caso en el que se pasa de SSB a UES de manera continua, este cambio se da en un “tiempo” finito  $\tau_0 = \ln\left(\sqrt[3]{-\frac{\mu_0\gamma}{\mu^2}}\right)$ , una vez que se ha pasado este valor de  $\tau$  el escenario

**CAPÍTULO 5. EL LAGRANGIANO DE LA TEORÍA  $\lambda\phi_D^4$  COMO FUNCIONAL DE ENTROPIA**

5.2.  $\partial_\tau \mathcal{E} < 0$  (INVERSIÓN DEL PARÁMETRO  $\tau$ )

---

se mantiene en UES en el intervalo  $(\ln\left(\sqrt{\gamma\left(-\frac{\mu_0\gamma}{\mu^2}\right)}, \infty\right)$ .

### 5.2. $\partial_\tau \mathcal{E} < 0$ (Inversión del parámetro $\tau$ )

Como se mencionó anteriormente, los casos en que  $\partial_\tau \mathcal{E}$  es negativo también son de nuestro interés. Al plantear y resolver esta ecuación obtenemos:

$$\partial_\tau m^2 = -\mu(m^2)^{2n} \quad \Rightarrow \quad m^2(x, t) = [(2n - 1)(\mu\tau - \mu_0)]^{\frac{1}{1-2n}}, \quad (5.12)$$

y se obtienen gráficas similares a las de el caso con gradiente positivo, como era de esperarse, al invertir el parámetro  $\tau$ , nuevamente aparecen singularidades, que pueden ser removidas usando una reparametrización de  $\tau$  similar a la que se usó anteriormente; dicha reparametrización debe mantener el gradiente de la masa monotono. Una vez que obtengamos esta nueva solución, deberá existir continuidad entre las soluciones para  $\tau$  negativo y  $\tau$  positivo en  $\tau = 0$ .

Primero veamos que el planteamiento de la ecuación diferencial que involucra la reversión del parámetro  $\tau$  es de la siguiente forma:

$$\partial_\tau m^2 = -\mu^2 e^{-\gamma\tau} m^{2n}, \quad (5.13)$$

cuya solución es

$$m^2 = \left( (2n - 1) \left( \frac{-e^{-\tau\gamma} \mu^2}{\gamma} - u_0 \right) \right)^{\frac{1}{1-2n}}; \quad (5.14)$$

así las soluciones para  $\tau$  positivo y negativo quedan de la siguiente manera

$$m^2 = \begin{cases} \left( (2n - 1) \left( -\frac{e^{\tau\gamma} \mu^2}{\gamma} - u_0 \right) \right)^{\frac{1}{1-2n}} & \tau \text{ positivo} \\ \left( (2n - 1) \left( -\frac{e^{-\tau\gamma} \mu^2}{\gamma} - u_0 \right) \right)^{\frac{1}{1-2n}} & \tau \text{ negativo} \end{cases} \quad \gamma > 0. \quad (5.15)$$

De las soluciones podemos ver que mientras  $u_0$  sea mayor que cero las soluciones serán menor que cero cuando  $n > 0$  por lo que en ese caso no existirán singularidades; sin embargo, si  $u_0$  es menor que cero existirán singularidades en el caso en que la suma de los términos de cero. Para evitar la singularidad será necesario hacer;

$$\frac{\mu^2}{\gamma} - u_0 < 0, \quad (5.16)$$

$$\Rightarrow \mu^2 < u_0 \gamma. \quad (5.17)$$

Un vez que se obtuvo la solución para  $\tau$  negativo, se graficó el potencial y se obtuvieron resultados similares a los que se mostraron anteriormente, los cuales se muestran a continuación.

CAPÍTULO 5. EL LAGRANGIANO DE LA TEORÍA  $\lambda\phi_D^4$  COMO FUNCIONAL DE ENTROPÍA

5.2.  $\partial_\tau \mathcal{E} < 0$  (INVERSIÓN DEL PARÁMETRO  $\tau$ )

**i)**  $u_0 > 0$

**a)**  $n > 1, \gamma > 0$

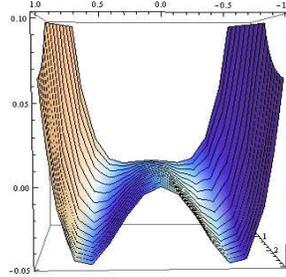


Figura 5.14:  $u_0 > 0$  a)  $n > 1, \gamma > 0$

El sistema presenta SSB en el intervalo  $(0, \infty)$

**b)**  $n < 0, \gamma > 0$

El sistema presenta UES en el intervalo  $(0, \infty)$

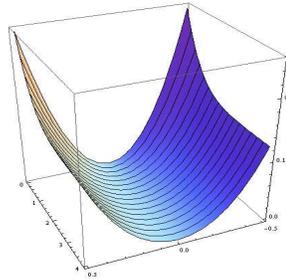


Figura 5.15:  $u_0 > 0$  b)  $n < 0, \gamma > 0$

**ii)**  $u_0 < 0$

**a)**  $n > 1, \gamma > 0$

Este caso es similar a *i) – b)*

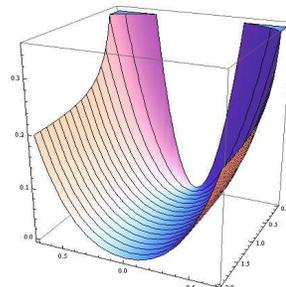


Figura 5.16:  $u_0 < 0$  a)  $n > 1, \gamma > 0$

CAPÍTULO 5. EL LAGRANGIANO DE LA TEORÍA  $\lambda\phi_D^4$  COMO FUNCIONAL DE ENTROPÍA

5.2.  $\partial_\tau \mathcal{E} < 0$  (INVERSIÓN DEL PARÁMETRO  $\tau$ )

**b)**  $n < 0, \gamma > 0$

Este caso es similar a *i) - a)*

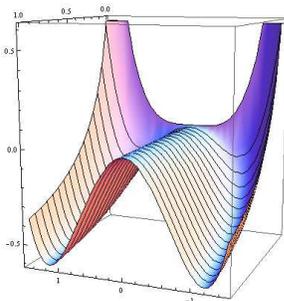


Figura 5.17:  $u_0 < 0$  b)  $n < 0, \gamma > 0$

**iii)**  $u_0 = 0$

**a)**  $n > 1, \gamma > 0$

Este caso es equivalente a *i) - a)*

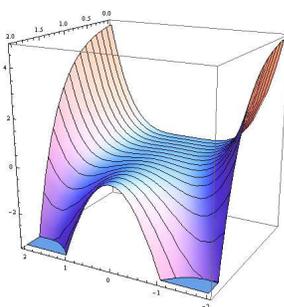


Figura 5.18:  $u_0 = 0$  a)  $n > 1, \gamma > 0$

**b)**  $n < 0, \gamma > 0$

Este caso es equivalente a *i) - b)*

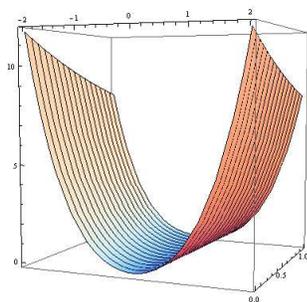


Figura 5.19:  $u_0 = 0$  b)  $n < 0, \gamma > 0$

iv)  $n = 0$

a)  $u_0 > 0, \gamma > 0$

Este caso es equivalente a  $i) - b)$

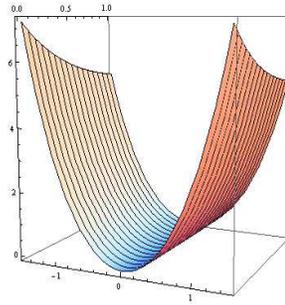


Figura 5.20:  $n = 0$  a)  $u_0 > 0, \gamma > 0$

b)  $u_0 < 0, \gamma > 0$

Este caso es equivalente a  $i) - a)$

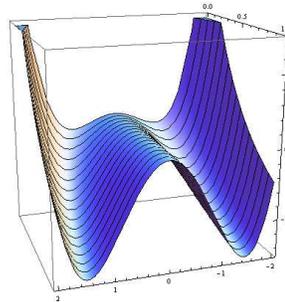


Figura 5.21:  $n = 0$  b)  $u_0 < 0, \gamma > 0$

c)  $u_0 = 0, \gamma > 0$

Este caso es equivalente a  $i) - b)$

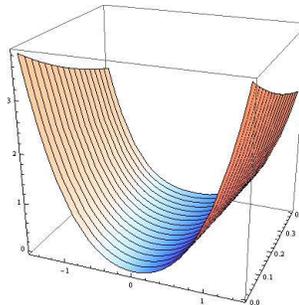


Figura 5.22:  $n = 0$  c)  $u_0 = 0, \gamma > 0$

Nuevamente se obtienen escenarios con SSB y UES separados uno del otro, de manera similar a los  $\tau$  positivos; para pasar de un escenario a otro, es necesario esperar un “tiempo” infinito o atravesar una singularidad.

### 5.3. $\lambda$ Variable

Como ya se mencionó, la monotonicidad de  $\mathcal{E}$  requiere que  $\partial_\tau m^2 \geq 0$ , y  $\partial_\tau \lambda \geq 0$ ; en el análisis anterior se supuso a  $\lambda_0$  constante y mayor que cero, sin embargo  $\partial\mathcal{E}$  requiere  $\partial\lambda > 0$ , por tanto, se plantea una ecuación diferencial similar a la que se dio para la masa; es decir,

$$\partial_\tau \lambda = \nu(\lambda)^{2l} \quad \Rightarrow \quad \lambda(x, \tau) = [(2l - 1)(-\nu\tau - \nu_0)]^{\frac{1}{1-2l}}; \quad (5.18)$$

en este caso  $\lambda$  solo puede ser positiva, al igual que su gradiente, por lo que, existen más restricciones sobre las constantes, y el único caso que se puede dar es cuando  $\nu > 0$ ,  $l < 0$ ,  $\nu_0 > 0$ , lo cual no altera cualitativamente el perfil del potencial. Por otra parte, el hecho de que  $\lambda$  sea siempre positiva evita la aparición de singularidades, además, existen varias posibilidades para la solución de  $\lambda$ , por ejemplo, de manera similar a la masa, se puede usar otra reparametrización, de lo que obtendríamos

$$\lambda = \left( (2l - 1) \left( \frac{-e^{\tau\alpha} \chi^2}{\alpha} - \nu_0 \right) \right)^{\frac{1}{1-2l}}. \quad (5.19)$$

Al usar esta expresión para  $\lambda$  en la gráfica del potencial no se observan cambios significativos, el caso interesante se da cuando se invierte el parámetro  $\tau$ ; en ese caso el gradiente de  $\lambda$  es negativo, y  $\lambda$  debe permanecer positivo, por lo que  $\lambda$  estará disminuyendo su valor en todo momento, lo cual da paso a un posible cambio de signo en  $\lambda$ . Sin embargo UES y SSB requieren que  $\lambda > 0$  por lo que el mínimo valor que puede adquirir  $\lambda$  es cero. Por tanto existe  $\tau_0 = 0$  dado por

$$-\tau_0 = \ln \left( \sqrt[\alpha]{\frac{-\nu_0 \alpha}{\chi^2}} \right), \quad \nu_0 < 0, \quad (5.20)$$

en el que  $\lambda$  se vuelve cero, y la teoría ya no es auto-interactuante.

## 5.4. Convergencia del gradiente

Debido a que el gradiente de la funcional es estrictamente positivo o negativo, es posible añadir términos para la masa estrictamente positivos o negativos, según sea el caso, por lo que resulta natural sustituir el gradiente para cada valor de  $n$  por la suma de todas las posibles valores de  $n$ . Es decir:

$$\partial_\tau m^2 = \mu_r (m^2)^r \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \mu_r (m^2)^r, \quad (5.21)$$

y de manera similar para  $\lambda$ . Al graficar esta serie obtenemos la figura 5.23.

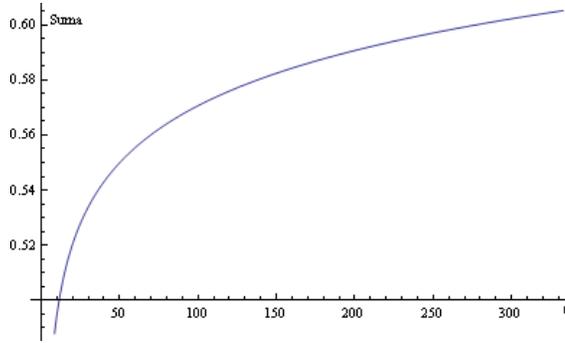


Figura 5.23:

Sin embargo esta suma no es convergente. Un análisis más cuidadoso del gradiente  $\partial_t m^2$ , indica que es necesario tomar en cuenta la dependencia de  $\mu$  en  $r$ , por lo que se propone

$$\partial_\tau m^2 r = \left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)^r \quad r = \pm 2, 4, 6\dots; \quad (5.22)$$

y se obtiene la solución:

$$\left((2r - 1)\left(-\frac{\tau}{\mu^{2r}} - \mu_0\right)\right)^{\frac{1}{1-2r}}. \quad (5.23)$$

El comportamiento de esta función cuando solo se deja variar a  $r$  esta dado en la figura 5.24.

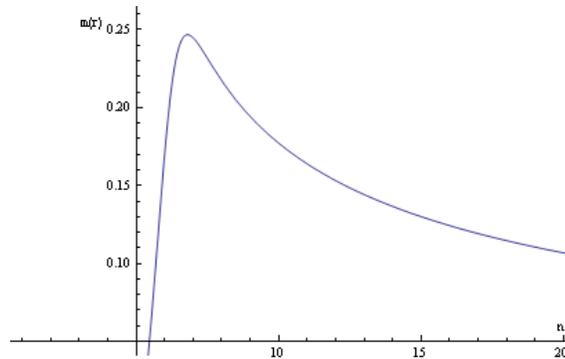


Figura 5.24:

**CAPÍTULO 5. EL LAGRANGIANO DE LA TEORÍA  $\lambda\phi_D^4$  COMO FUNCIONAL DE ENTROPIA**

**5.4. CONVERGENCIA DEL GRADIENTE**

Cabe mencionar que cada  $r$  en la expresión de  $m^2$  nos da un gradiente positivo o negativo según sea el caso, por lo que la suma de todas las posibles  $m^2$  corresponderán a algún gradiente positivo o negativo respectivamente; y dicha suma puede ser convergente bajo ciertas restricciones tanto para valores de  $r$  positivos como negativos. Podemos escribir

$$\partial_\tau f(m^2) = \sum_{r=0}^{r=\pm\infty} \beta_r (\mu m^2)^r; \quad (5.24)$$

al graficar la suma de potencias de  $m^2$  obtendremos lo siguiente: donde el eje vertical es el valor

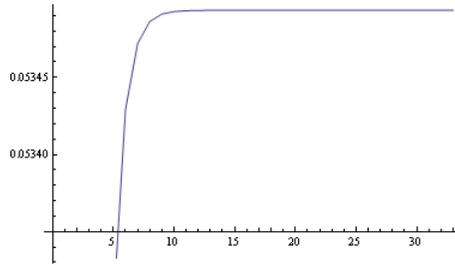


Figura 5.25:

de la suma de las potencias de  $r$  y el eje horizontal los posibles valores de  $r$ . Claramente se ve que esta suma es convergente. De manera similar a lo hecho anteriormente, podemos hacer una reparametrización de  $m^2$ , por ejemplo

$$\partial_t m^2 = \frac{1}{\mu^{2n}} e^{\gamma t} m^{2n} \quad (5.25)$$

y se obtienen resultados similares tanto para el comportamiento de  $m^2$  como para la suma de potencias de  $m^2$ .

## Capítulo 6

# Los flujos de parámetros como series infinitas y transiciones de fase

Para obtener un panorama general clásico de una transición de fase, tenga presente el diagrama de fase del agua; note que la principal característica de una transición de fase en el agua, es que al cruzar alguna de las fronteras, las propiedades del agua cambiarán abruptamente en respuesta a ligeros cambios en presión y/o temperatura; análogamente podemos definir una transición de fase como una singularidad en la energía libre como función de parámetros tales como temperatura, presión, campo magnético, composición química, etc. Algunos ejemplos de transición de fase son: la transición entre las fases ferromagnéticas y paramagnéticas de materiales magnéticos en el punto de Curie, los cambios en la estructura cristalográfica entre ferrita y austenita de hierro, la aparición de superconductividad en ciertos metales y cerámicas cuando se enfría por debajo de una temperatura crítica, la transición entre diferentes estructuras moleculares (polimorfos, alótropos o polyamorfos), especialmente de sólidos, tales como una estructura amorfa y una estructura de cristal, o la condensación cuántica de fluidos bosónicos (Bose -Einstein), la transición del helio líquido superfluido es un ejemplo de esto. [11]

Por otra parte Paul Ehrenfest clasificó transiciones de fase basándose en el comportamiento de la energía libre termodinámica como una función de otras variables termodinámicas. Bajo este esquema, las transiciones de fase fueron etiquetadas por la derivada más baja de la energía libre que es discontinua en la transición. Las transiciones de fase de primer orden presentan una discontinuidad en la primera derivada de la energía libre con respecto a alguna variable termodinámica. Las diversas transiciones de gas / sólido / líquido se clasifican como transiciones de primer orden, ya que implican un cambio discontinuo en la densidad, que es la primera derivada de la energía libre con respecto al potencial químico. Las transiciones de fase de segundo orden son continuas en la primera derivada (el parámetro de orden, que es la primera derivada de la energía libre con respecto al campo externo, es continua a través de la transición), pero presentan discontinuidad en una segunda derivada de la energía libre. Entre las transiciones de segundo orden se incluyen la transición de fase ferromagnética en materiales como el hierro, donde la magnetización, que es la primera derivada de la energía libre con respecto a la intensidad del campo magnético aplicado, aumenta continuamente desde cero a medida que se baja la temperatura por debajo de la temperatura de Curie. Bajo el esquema de clasificación de Ehrenfest, podría haber, en principio, tercero, cuarto, y transiciones de fase de orden superior.[11]

En este trabajo se usa el esquema de clasificación de Ehrenfest; y dado que en nuestro caso, el campo escalar se deforma dinámicamente a lo largo del  $\tau$ -gradiente, el funcional cuyo comportamiento determina la transición de fase debe incluir también la parte cinética, además del

## CAPÍTULO 6. LOS FLUJOS DE PARÁMETROS COMO SERIES INFINITAS Y TRANSICIONES DE FASE

---

término habitual asociado a la energía potencial. En el presente esquema basado en una funcional de entropía, los flujos gradiente más generales para los parámetros corresponderán a series infinitas:

$$a \frac{d}{d\tau} m^2 = \mu \sum_{n=0}^{\pm\infty} \beta_n \left( \frac{m^2}{\mu^2} \right)^n, \quad (6.1)$$

$$a \frac{d}{d\tau} \lambda = \nu \sum_{l=0}^{\pm\infty} \omega_n \left( \frac{\lambda}{\nu} \right)^l, \quad (6.2)$$

$$a \partial_\tau \phi = \sum_{r=1,3,5,\dots} \sigma_r \left( \square \phi + m^2 \phi + \frac{\lambda}{3!} \phi^3 \right)^r, \quad (6.3)$$

donde las constantes  $\mu, \nu, \beta_n, \omega_n$  y  $\sigma_r$  son introducidas convenientemente; si  $\tau$  es en efecto la escala de energía, entonces  $[\mu] = [m]$  y las  $\beta_n$  son constantes adimensionales, y similarmente para los otros flujos. En general los flujos son divergentes, sin embargo, bajo ciertas restricciones se pueden encontrar soluciones convergentes. Enfocamos nuestra atención en el flujo de masa (6.1), notando que los resultados funcionan en general para el flujo de  $\lambda$ . Note que la eq. (6.1) es separable; por tanto:

$$\int \frac{d\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)}{\sum_{n=0}^{\pm\infty} \beta_n \left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)^n} = a \frac{\tau}{\mu} + C, \quad (6.4)$$

donde  $C$  es una constante de integración; ahora estudiaremos las condiciones de integrabilidad de (6.4), y posteriormente la posible inversión para obtener la masa en función de  $\tau$ ; por lo tanto, si  $M\left(\frac{m^2}{\mu}, a\right)$  es la primitiva de la integral (6.4), y  $M^{-1}$  la inversa, entonces podemos expresar simbólicamente la masa como  $m^2 = M^{-1}(\tau, \mu, a, C)$ , donde  $C$  representa las posibles constantes de integración. Considerando una expresión similar para  $\lambda = \Lambda(\tau, \nu, a, C)$  podemos volver al punto de partida, el funcional 6.5

$$\mathcal{E}(\phi(x, \tau), m(\tau), \lambda(\tau)) = \int \left( \frac{1}{2} \partial^i \phi \partial_i \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{4!} \lambda \phi^4 \right) dx^n, \quad (6.5)$$

y volver a escribirlo como

$$\mathcal{E}(\phi(x, \tau), m(\tau), \lambda(\tau)) = \int \left( \frac{1}{2} \partial^i \phi \partial_i \phi - \frac{1}{2} M^{-1} \phi^2 - \frac{1}{4!} \Lambda^{-1} \phi^4 \right) dx^n, \quad (6.6)$$

este lagrangiano no distingue entre UES y SSB, por lo que podemos elegir el escenario en que ocurre SSB en  $\tau = 0$ ; en particular, este funcional puede describir versiones duales de la teoría, conectadas a lo largo de las trayectorias en el espacio de parámetros; este resultado será válido en el caso general de un campo escalar dinámico a lo largo de  $\tau$ . Debido a la positividad de las  $\beta_n$ , y del hecho de que  $n$  es par, las posibilidades de encontrar soluciones convergentes para el flujo de masa y las posibles transiciones de fase están restringidas a los siguiente casos:

- i)  $\beta_n = 0$  para  $n \leq -2$  y  $\beta_n$  identificado con los numeros de Euler  $E_n$  para  $n \geq 0$

La siguiente suma es identificada con la función sec

$$\sum_{n=0, \pm 2, \pm 4, \dots}^{\pm\infty} \beta_n \left( \frac{m^2}{\mu^2} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E_n}{n!} \left( \frac{m^2}{\mu^2} \right)^{2n} = \sec\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right), \quad \left| \frac{m^2}{\mu^2} \right| < \frac{\pi}{2}, \quad (6.7)$$

al integrar en (6.4) y luego invertir se obtiene

$$\frac{m^2}{\mu^2} = \arcsin\left(a \frac{\tau}{\mu} + C_1\right) + C_2, \quad (6.8)$$

## CAPÍTULO 6. LOS FLUJOS DE PARÁMETROS COMO SERIES INFINITAS Y TRANSICIONES DE FASE

---

con la restricción  $|\frac{m^2}{\mu^2}| < \frac{\pi}{2}$  proveniente de (6.7), de manera similar tenemos que  $|a\frac{\tau}{\mu} + C_1| < 1$ . Note que esta solución es suave y carece de singularidades; considere ahora el caso  $a = 1$  con las constantes  $C_1 < 0$ , y  $C_2 = 0$ , por lo que la ecuación (6.8) es de la forma de la figura (6.1).

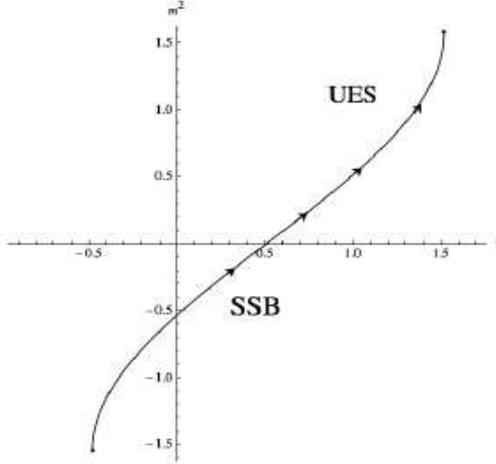


Figura 6.1: Debido a la restricción  $|\frac{m^2}{\mu^2}| < \frac{\pi}{2}$  la curva sólo admite desplazamientos rígidos horizontales, por tanto el sistema atraviesa los escenarios SSB - UES. En este caso el gradiente y sus derivadas son bien comportadas en el intervalo permitido para  $m^2$  y no existen transiciones de fase.

Con  $C_1 < 0$  y  $C_2 = 0$  tenemos que  $m^2(\tau = 0) < 0$ , que corresponde a un escenario de SSB, el cual se conserva en el intervalo  $\tau \in [0, \mu C_1]$ ; en  $\tau = \mu C_1$  la teoría no tiene masa, y más tarde tenemos  $m^2 > 0$  en el intervalo  $\tau \in (-\mu C_1, \mu C_1 + \mu)$ , que corresponde a un escenario UES con el siguiente comportamiento asintótico

$$\lim_{\tau \rightarrow \mu(1-C_1)} \left( \frac{m^2}{\mu^2} \right) = \frac{\pi}{2}; \quad (6.9)$$

la evolución del potencial corresponderá a la mostrada en la figura (5.4).

Considerando la propiedad  $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$ , se puede demostrar fácilmente que el caso  $a = -1$  corresponderá a la curva que describe el cambio de un escenario UES a un escenario de SSB, como ya se ha descrito anteriormente. Se debe tener en cuenta que, en este caso, las versiones duales de la teoría pueden corresponder a diferentes escenarios, por ejemplo, los escenarios de SSB en la región de baja energía, y de UES en la región de alta energía, tal como se describe por la figura 6.1. Estas versiones duales están necesariamente separadas por un escenario sin masa. Considerando la expansión

$$\frac{1}{\theta^2} \sec \theta = \frac{1}{\theta^2} \left( 1 + \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{5}{24}\theta^4 + \frac{61}{720}\theta^6 + \dots \right) = \frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{2} + \frac{5}{24}\theta^2 + \frac{61}{720}\theta^4 + \dots \quad (6.10)$$

que representa en relación a la expresión (6.4), una suma de la forma  $\sum_{n=-1}^{\infty} \beta_n \left( \frac{m^2}{\mu^2} \right)^n$ , con  $\theta = \frac{m^2}{\mu^2}$ , la cual es admisible como un flujo gradiente para la masa; este flujo gradiente diverge en  $m^2 = 0$ , por lo que representa una transición de fase de primera orden. Una vez que hemos hecho la integración, obtenemos una expresión bien comportada para la masa, sin embargo dicha expresión

**CAPÍTULO 6. LOS FLUJOS DE PARÁMETROS COMO SERIES INFINITAS Y TRANSICIONES DE FASE**

---

no es invertible;

$$\left(\frac{m^2}{\mu^2} - 2\right)\sin\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) + 2\frac{m^2}{\mu^2}\cos\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) = a\frac{\tau}{\mu} + C; \quad (6.11)$$

esta expresión puede ser considerada como una corrección de la expresión (6.8) hacia la criticalidad; la transición de fase generada por este flujo de gradiente se ilustra en la figura (6.3); esta figura representará cualitativamente todas las transiciones de fase generadas por los flujos gradiente de masa. El procedimiento se puede generalizar a un orden arbitrario al considerar la expansión  $\frac{1}{\theta^{2n}}\sec\theta$ , con  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ; por tanto,  $n$  determinará cómo serán las transiciones; en particular, para  $n = 0$  no habrá transición de fase. Regresando a la funcional (6.5), tenemos en general que  $M^{-1} = M^{-1}(\tau, n)$ , codifica la posibilidad de transiciones de fase, y de manera similar para el parámetro  $\Lambda^{-1}$ . Vale la pena observar que las descripciones duales de la teoría pueden corresponder a diferentes fases. El parámetro  $\lambda$  puede tener esencialmente la misma forma que (6.8), y su efecto se manifiesta, acelerando, reforzando o generando por sí mismo un cambio de fase en el caso de una masa estacionaria.

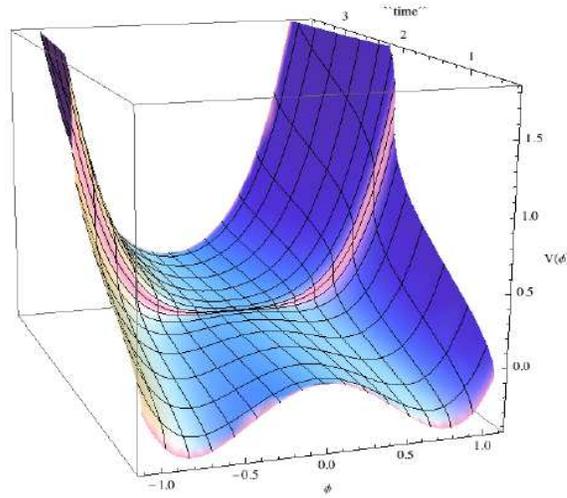


Figura 6.2: Transición de fase de primer orden del escenario SSB a UES ( $a = 1$ ); esta figura debe ser contrastada con la figura (5.4), que muestra una aparente transición de fase. Dado que el flujo de masa es reversible, el caso  $a = -1$  corresponderá a la reversión, el dominio de UES va al dominio SSB.

**ii)**  $\beta_n = 0$  para  $n \leq -2$  y  $\beta_n$  para  $\beta_n \geq 0$  identificado con los coeficientes de la expansión del *cosh*

La integración da como resultado  $\arctan(\sinh\frac{m^2}{\mu^2}) = a\frac{\tau}{\mu} + C$ , por tanto

$$\frac{m^2}{\mu^2} = \ln \left| \left( \tan\left(a\frac{\tau}{\mu} + C_1\right) + \sec\left(a\frac{\tau}{\mu} + C_1\right) + C_2 \right) \right|, \quad \left| a\frac{\tau}{\mu} + C_1 \right| < \frac{\pi}{2}, \quad (6.12)$$

la figura (6.3) muestra el comportamiento para  $C_2 < 0$ ,  $C_1 = 0$ ,  $a = 1$ . Por lo tanto,  $m^2(\tau = 0) < 0$ , corresponde a un escenario de SSB, que no es estable, ya que un tiempo después cambiará a un escenario de UES en un  $\tau$  finito; este último será estable, con

$$\lim_{|\tau \rightarrow \mu \frac{\pi}{2}|} \frac{m^2}{\mu^2} = \pm\infty; \quad (6.13)$$

**CAPÍTULO 6. LOS FLUJOS DE PARÁMETROS COMO SERIES INFINITAS Y TRANSICIONES DE FASE**  
**6.1. CASOS INTEGRABLES NO INVERTIBLES**

---

por lo tanto, la masa no está acotada, como en el caso anterior con el límite asintótico (6.9); debido a que este comportamiento asintótico, no es una opción para las constantes  $C_1$  y  $C_2$  para que un escenario de SSB sea estable en el intervalo completo (como en el caso anterior), debe ir hacia un escenario de UES en tiempo finito .

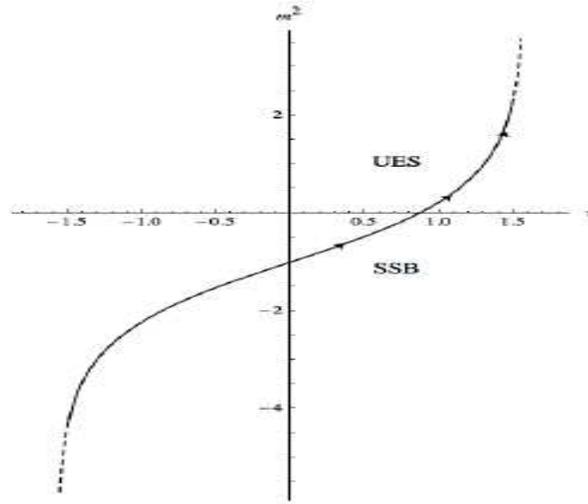


Figura 6.3:

En el caso de  $C_2 > 0$  y  $C_1 = 0$ , tenemos que  $m^2(\tau = 0) > 0$ , que corresponde a un escenario de UES, que es estable en el intervalo de  $\tau > 0$ . Por lo tanto, los casos con  $a = 1$  tienden a favorecer los escenarios UES. En los casos con  $a = -1$ , se intercambian los papeles de los escenarios UES y SSB. En el caso relacionado con la función  $\cosh$ , el cambio  $\frac{1}{\beta^{2n}} \cosh \theta$ , conduce a continuaciones analíticas de  $m^2$  a través de funciones poli-logarítmicas, que no garantizan una correspondencia uno a uno para  $m^2 = m^2(\tau)$ , y los resultados no son fácilmente interpretables. Otros ejemplos que involucran continuaciones analíticas serán considerados más adelante.

### 6.1. Casos integrables no invertibles

Los dos casos analizados anteriormente corresponden a las expresiones integrables, invertibles, y sin una transición de fase, ahora consideraremos casos integrables pero no necesariamente invertibles, y que manifestarán una transición de fase. Considere la expansión  $\frac{\csc x}{x} = \frac{1}{x} \left( \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7}{360}x^3 + \dots \right)$  y fijando  $\beta_n = 0$  para  $n \leq -4$  e identificando  $\beta_n$  para  $n \geq -2$  con los coeficientes de la expansión de arriba, obtenemos después de integrar

$$\operatorname{sen}\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) + C_1 - \left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)\cos\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) = a\frac{\tau}{\mu} + C, \quad \left| \frac{m^2}{\mu^2} \right| < \pi \quad (6.14)$$

que es no invertible; la dependencia de  $\tau$  en  $\frac{m^2}{\mu^2}$  se muestra en la figura (6.4) para  $a = 1$ . La línea continua muestra la región en la que la correspondencia es uno a uno y dónde es válida la restricción en  $\frac{m^2}{\mu^2}$ . Las flechas indican la dirección del gradiente de  $m^2$ , y la transición de un escenario de SSB a un escenario de UES.

Por otra parte, el gradiente (6.1) queda explícitamente  $a\frac{d}{d\tau}m^2 = \mu \csc\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)/\frac{m^2}{\mu^2}$  el cual diverge en  $m^2 = 0$  correspondiendo a un escenario sin masa, además induce una divergencia en el gradiente

**CAPÍTULO 6. LOS FLUJOS DE PARÁMETROS COMO SERIES INFINITAS Y TRANSICIONES DE FASE**  
**6.1. CASOS INTEGRABLES NO INVERTIBLES**

---

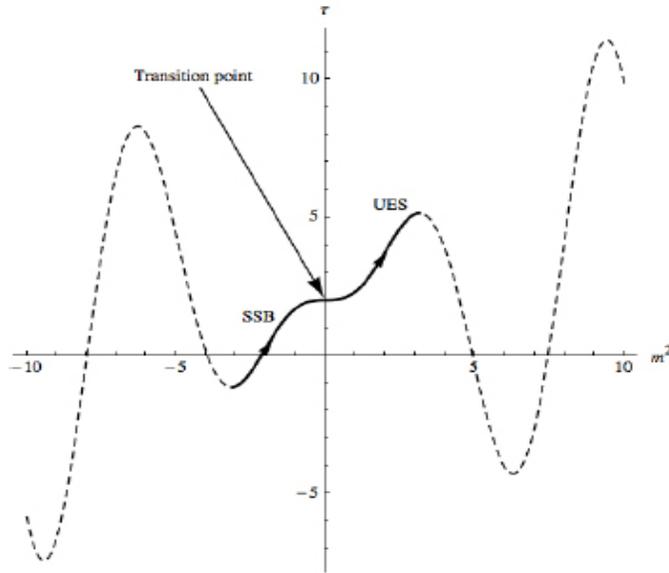


Figura 6.4:

(5.2) por lo que tenemos una transición de fase primer orden. De hecho, las derivadas de todos los órdenes divergen en el punto de transición; la expansión generalizada es dada en este caso por  $\frac{1}{\theta^{2n+1}} \text{csc}\theta$ , con  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  la figura (6.3) describe la transición de fase a nivel del potencial.

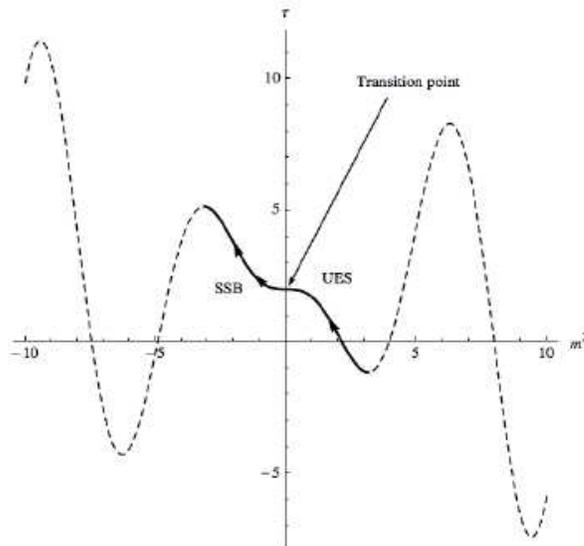


Figura 6.5: Reversión con  $a = -1$ , note que la reversión no significa regresar a través de la curva mostrada en la figura (6.4), dado que el gradiente debe cambiar de signo; se debe tener una transición de UES a SSB

## 6.2. Continuaciones analíticas para $m^2(\tau)$

En todos los casos anteriores se describen escenarios UES y SSB estables, y en el caso de transiciones entre ellos, el sistema no puede volver al escenario original; como veremos en esta sección, tal retorno a la situación original será posible sólo para las continuaciones analíticas de  $m^2$ .

Considere la función compleja  $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$ ; con  $z = x + iy$ ,  $|z| < \infty$  con la restricción de  $x = 0$ , la función se reduce a  $\cos iy = 1 + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{y^6}{6!} + \dots$  donde todos los coeficientes de la expansión son estrictamente positivos; si hacemos  $\beta_n = 0$  para  $n \leq 2$ , tenemos  $\sum_{n \geq 0} \beta_n \left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)^n = \cos i \frac{m^2}{\mu^2}$ , donde tenemos identificados  $\beta_n$  para  $n \geq 0$ , con la expansión de coeficientes mostrada anteriormente. Por lo tanto, la integración (6.4) conduce a una expresión compleja para  $m^2$ , donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes,

$$\frac{m^2}{\mu^2} = -2i \arctan[C_2 e^{i(a\frac{\tau}{\mu} + C_1) + i\frac{\pi}{2}}]; \quad (6.15)$$

ahora restringiendo  $C_2 \in \mathbb{R}$  se puede descomponer en las partes real e imaginaria

$$\frac{m^2}{\mu^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{C_2^2 + 2C_2 \sin(a\frac{\tau}{\mu} + C_1) + 1}{C_2^2 - 2C_2 \sin(a\frac{\tau}{\mu} + C_1) + 1} + i \left[ \pi \left( \frac{1}{2} - 2k \right) - \arctan \frac{2C_2 \cos(a\frac{\tau}{\mu} + C_1)}{1 - C_2^2} \right] \quad (6.16)$$

donde  $k$  es un número entero, y  $C_2^2 \neq 1$ . A pesar de su apariencia, ambas partes tienen esencialmente el mismo comportamiento cualitativo, que se muestra en la figura (6.6); el caso de  $\lambda$  variable es similar a los descritos anteriormente. Se debe tener en cuenta que con esta continuación analítica, el papel del parámetro  $a$  es secundario, ya que no tiene un efecto cualitativo en el comportamiento de  $m^2$ .

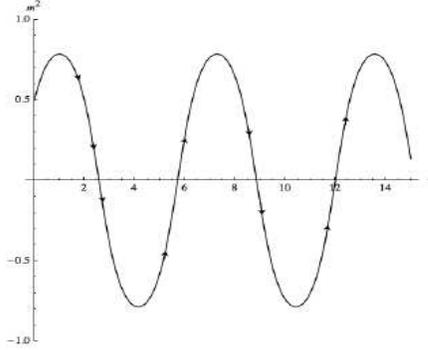


Figura 6.6: Parte real e imaginaria de  $m^2$ ; una elevación de la curva dará lugar a un escenario UES estable con  $Re(m^2) > 0$ , o  $Im(m^2) > 0$  en todo el intervalo, y de manera similar para el escenario de SSB. En esta figura las constantes se han elegido de tal de manera que las transiciones periódicas UES-SSB estén presentes; la figura (6.7) muestra estas transiciones en la evolución del potencial  $V(\phi)$ .

Generalizando la expansión a  $\frac{1}{y^n} \cos(iy)$ , con  $n = 0, 2, 4, \dots$  la criticalidad emerge a partir de  $n \geq 2$ , con el escenario sin masa como el punto de transición de fase UES-SSB, y cuando aparece la criticalidad, el comportamiento periódico mostrado en la figura (6.7) desaparece abruptamente, la figura (6.4) es representativa de tal transición. Las soluciones para  $m^2 = m^2(\tau, n)$ ,

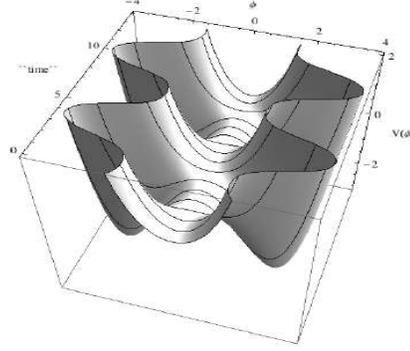


Figura 6.7: Deformaciones periódicas del potencial  $V(\phi)$  para las partes real e imaginarias de  $m^2$ ; si el potencial empieza en  $\tau = 0$  en un escenario UES, entonces regresará a este mismo escenario en un “tiempo finito” pero pasando por un escenario SSB, estas transiciones no son transiciones de fase como las mostradas en la figura (6.3).

están dadas por funciones poli-logarítmicas de orden  $n + 1$ . Existen otras funciones complejas que permiten continuaciones analíticas para  $m^2$ , pero que serán consideradas en trabajos futuros.

### 6.3. Otros casos

Veamos la expansión  $\frac{\tan x}{x} = \frac{1}{x}(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2}{15}x^5 + \dots)$ , con  $\beta_n = 0$  para  $n \leq 2$  y  $\beta_n$  para  $n \geq 0$  identificados con los coeficientes de la expansión anterior; sin embargo, notemos que no es integrable en el dominio real;

$$\int \frac{m^2}{\mu^2} \cot \frac{m^2}{\mu^2} d\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) = \frac{m^2}{\mu^2} \ln(1 - e^{(2i \frac{m^2}{\mu^2})}) - \frac{i}{2} [(\frac{m^2}{\mu^2})^2 + Li_2(e^{(2i \frac{m^2}{\mu^2})})] = a \frac{\tau}{\mu} + C, \quad (6.17)$$

donde  $Li_2$  es una función poli-logarítmica y  $|\frac{m^2}{\mu^2}| < \frac{\pi}{2}$ . En comparación con el caso anterior, no hay ninguna transición de fase de cualquier orden, ya que las derivadas de la masa de todos los órdenes (y por consiguiente de la funcional  $\mathcal{E}$ ) son bien comportadas en el dominio de la expansión.

Generalizando la expansión a  $\frac{1}{\theta^{2n+1}} \tan \theta$ , con  $n = 0, 1, 2, \dots$  la criticalidad emerge de  $n \geq 1$ , y el punto crítico es de nuevo el escenario sin masa, separando las fases UES y SSB. Considerando ahora la expansión  $\theta^{2n+1} \operatorname{arccoth} \theta = \theta^{2n+1} (\frac{1}{\theta} + \frac{1}{3\theta^3} + \frac{1}{5\theta^5} + \dots)$ , con  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ , y  $|\theta| > 1$ , permite describir el caso con  $\beta_n = 0$  para  $n \geq 0$  y  $\beta_n$  para  $n \leq -2$  identificado con la expansión de coeficientes. Esta expansión lleva a la expresión no integrable

$$\int \frac{(\frac{m^2}{\mu^2})^{-2n-1} d(\frac{m^2}{\mu^2})}{\operatorname{arccoth}(\frac{m^2}{\mu^2})} = 2 \int \frac{(\frac{m^2}{\mu^2})^{-2n-1} d(\frac{m^2}{\mu^2})}{\ln(\frac{\frac{m^2}{\mu^2} + 1}{1 - \frac{m^2}{\mu^2}})} = a \frac{\tau}{\mu} + C, \quad |\frac{m^2}{\mu^2}| > 1; \quad (6.18)$$

debido a las restricciones en los valores de  $m^2$ , el valor  $m^2 = 0$  no está permitido, y una transición entre escenarios SSB-UES no es posible, por lo que un escenario de UES en  $\tau = 0$ , es estable durante todo el intervalo y de manera similar para el caso de SSB; no hay criticalidad para ningún valor de  $n$ .

### 6.4. El flujo gradiente- $\lambda$ y transiciones de fase dobles

Un flujo gradiente- $\lambda$  puede conectar las versiones duales de la teoría a través de trayectorias en el espacio de parámetros; adicionalmente puede acelerar y/o reforzar una transición de fase

## CAPÍTULO 6. LOS FLUJOS DE PARÁMETROS COMO SERIES INFINITAS Y TRANSICIONES DE FASE

### 6.4. EL FLUJO GRADIENTE- $\lambda$ Y TRANSICIONES DE FASE DOBLES

inducida por un flujo de masa, siempre y cuando estén en fase. Sin embargo, este no es siempre el caso; consideramos en este capítulo las diversas situaciones con un parámetro  $\lambda$  no estacionario, primero en fase con el flujo de masa, y después fuera de fase.

#### 6.4.1. Flujos gradiente en fase

Considere la solución (6.11) para  $a = 1$ , que funciona como solución para flujos gradientes de la masa y el parámetro  $\lambda$ ; por otra parte, se supone que la constante  $C$  en el lado derecho es la misma para ambos flujos, por tanto, la evolución del par  $(m^2, \lambda)$  se encuentra en fase, por lo que uno puede adecuar el flujo, a fin de tener un escenario SSB en  $\tau = 0$ , como se ilustra en la figura (6.8). Dado que la evolución está en fase, el par  $(m^2, \lambda)$  alcanza el punto crítico  $(0, 0)$  al mismo tiempo, reforzando la transición de fase. Note que la fase resultante no es la que se muestra en la figura (6.3) con un parámetro  $\lambda$  fijo. En el punto de transición  $(m^2 = 0, \lambda = 0)$ , el potencial se anula  $V = 0$ , y es representado por una línea horizontal en la figura, en ese punto, el campo no tiene masa y es libre, y la función lagrangiana es reducida a la parte cinética. De esta manera, volvemos de nuevo al funcional (6.6), el cual tiene a este punto la posibilidad de transiciones de fase con flujos en fase. En este ejemplo se ha considerado la misma solución (6.11) para ambos flujos, sin embargo, un puede escoger, para el flujo- $\lambda$  la solución (6.14), por ejemplo, y luego adecuar los flujos; estas otras posibilidades conducirán a transiciones cualitativamente diferentes a las mostradas en la figura (6.8). En la siguiente subsección vamos a considerar un ejemplo de una transición de fase con flujos fuera de fase.

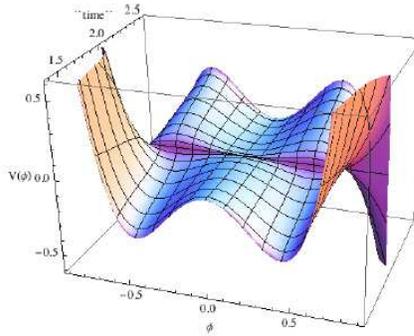


Figura 6.8: Una transición de primer orden con flujos en fase; la transición consiste en poner de cabeza el potencial relacionado con el escenario SSB. A diferencia de la fase original, la energía en la fase resultante no está acotada por abajo; otro efecto es la transición de dos estados de menor energía a un estado de menor energía. Respecto al signo de los parámetros, la transición es tal que  $(m^2 < 0, \lambda > 0) \rightarrow (m^2 = 0, \lambda = 0) \rightarrow (m^2 > 0, \lambda < 0)$ . Dado que los flujos son reversibles, el caso  $a = -1$  corresponde a la descripción inversa.

#### 6.4.2. Flujos gradiente fuera de fase

A lo largo de las mismas líneas, podemos considerar la solución (6.11) para  $a = 1$ , pero diferentes valores para la constante  $C$ , por lo que los flujos estarán fuera de fase. En la figura (6.9) la elección es tal que el flujo de masa genera una transición de fase, y un momento más tarde, el flujo  $\lambda$  genera una segunda transición de fase. En la figura (6.10), los papeles son intercambiados, de tal manera que el flujo de  $\lambda$  genere primero la transición de fase. Con el fin de comparar con el caso de los flujos en fase ilustrados en la figura (6.8), hemos elegido un escenario SSB en  $\tau = 0$ ; tenga en cuenta que en las tres figuras la fase resultante es la misma. Una vez que se han producido las

## CAPÍTULO 6. LOS FLUJOS DE PARÁMETROS COMO SERIES INFINITAS Y TRANSICIONES DE FASE

### 6.4. EL FLUJO GRADIENTE- $\lambda$ Y TRANSICIONES DE FASE DOBLES

dos transiciones de fase, la fase final es estable cuando  $\tau \rightarrow +\infty$ , y no existen más transiciones de fase, en general existirán tantas transiciones de fase como parámetros que definen la teoría. Para este punto, podemos incorporar las transiciones de fase de flujos gradiente fuera de fase a la funcional (6.6); en la siguiente sección desarrollamos el caso de la evolución del campo  $\phi$ , el único gradiente que se mantuvo estacionario a lo largo del gradiente  $\tau$  hasta este punto, y que finalmente lo haremos incorporar a la funcional (6.6).

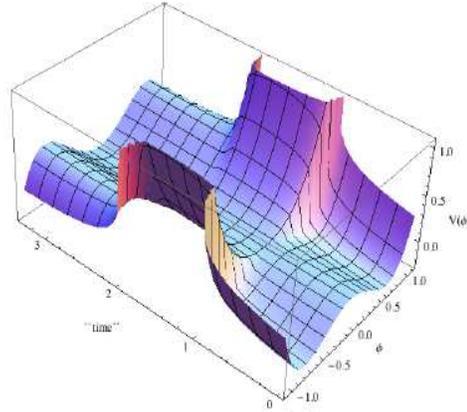


Figura 6.9: Transiciones de fase de primer orden con flujos fuera de fase. En la fase original y en la fase intermedia, la energía está acotada por abajo, a diferencia de la fase resultante; note que el punto cero de la energía es un máximo inestable en la primera fase, y un mínimo estable en la fase intermedia. El vacío transita de dos estados de menor energía en la primer fase, a un estado de mínima energía en las dos últimas fases. En relación con el signo de los parámetros, la transición es tal que  $(m^2 < 0, \lambda > 0) \rightarrow (m^2 = 0, \lambda > 0) \rightarrow (m^2 > 0, \lambda > 0) \rightarrow (m^2 > 0, \lambda = 0) \rightarrow (m^2 > 0, \lambda < 0)$ , donde los puntos de transición corresponden a los escenarios sin masa y libres.

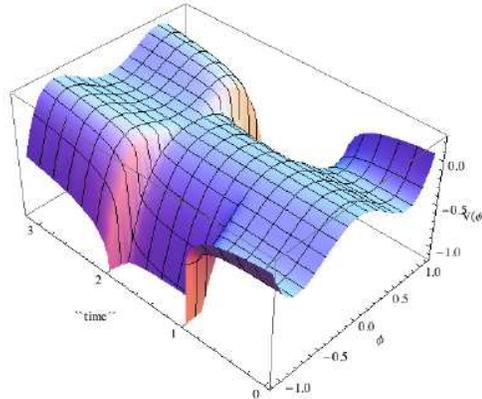


Figura 6.10: Comenzando en una fase SSB en  $\tau = 0$ , tenemos una transición de fase generada por el flujo- $\lambda$  y luego una segunda transición de fase generada por el flujo de masa, en el orden inverso descrito en la figura (6.9).

## Capítulo 7

# Difusión del campo $\phi$

Hasta este punto hemos aprovechado en el hecho de que los flujos-gradientes (6.1) y (6.2) para  $m^2$  están desacoplados, y son independientes del campo  $\phi(x, \tau)$ , que se mantuvo estacionario. Ahora regresamos al gradiente de (6.3), para el campo  $\phi$  que incluye explícitamente  $m^2(\tau)$ , y  $\lambda(\tau)$ . Como una ecuación de calor no lineal,  $a$  corresponderá a la constante de difusividad, y la masa y el término de autointeracción  $\lambda$ , corresponderán a los términos de la reacción. La ecuación de difusión no lineal juega un papel clave en un gran número de modelos de reacción y procesos de difusión como biología, química, genética y muchos otros. Utilizamos la literatura disponible sobre estas ecuaciones diferenciales, en particular, la referencia Polyanin. En este trabajo desarrollamos sólo el caso de una dimensión espacial; aunque uno puede pensar que sólo es de interés pedagógico, mostrará propiedades interesantes en el contexto presente. Además, algunos aspectos del caso unidimensional se pueden generalizar a cualquier dimensión en una manera directa.

### 7.1. Soluciones ondas-viajeras

Consideramos primero el caso  $a = 1$ , con  $m^2$  y  $\lambda$  fijos, explícitamente la ecuación queda de la siguiente manera

$$\partial_\tau \phi(x, t) = \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + m^2 \right) \phi(x, t) + \frac{\lambda}{3!} \phi^3(x, t); \quad (7.1)$$

esta ecuación admite diferentes soluciones, y consideramos primero las soluciones de ondas viajeras;

$$\phi(x, t) = \left[ bC_{vac} + Ce^{(-3\frac{m^2}{2}\tau + b\sqrt{\frac{m^2}{2}}x)} \right], \quad (7.2)$$

donde  $C_{vac} = \sqrt{-\frac{\lambda}{6m^2}}$ , es esencialmente la inversa de  $\phi_{vac}$ , la posición de los dos estados de menor energía en los escenarios de SSB;  $C$  es una constante arbitraria, y  $b = \pm 1$ , con  $b = 1$  para las ondas avanzadas, y  $b = -1$  para las ondas retrasadas. Las propiedades de la solución, dependen sensiblemente del signo de  $m^2$ .

#### 7.1.1. Caso SSB; $m^2 < 0$

Si escogemos  $m^2 < 0$ , para particularizar el análisis de los escenarios de SSB, entonces el factor para la coordenada espacial necesariamente es imaginario puro, con la masa taquiónica ocasionado por SSB; además, la constante de  $C_{vac}$  es real, por lo tanto, la existencia de ondas viajeras de reacción-difusión para el campo  $\phi$  implica necesariamente su continuación analítica a través de funciones armónicas en la coordenada  $x$ . Por lo tanto, escribimos el campo  $\phi$  en términos de

## CAPÍTULO 7. DIFUSIÓN DEL CAMPO $\phi$

### 7.1. SOLUCIONES ONDAS-VIAJERAS

partes real e imaginaria  $\phi = \varphi(x, \tau) + i\eta(x, \tau)$ , las cuales pueden ser determinadas a partir de la ecuación (7.2), la dependencia explícita de  $\varphi$  y  $\eta$  en las coordenadas  $(x, \tau)$  se muestra en las figuras (7.1) y (7.2). Para los valores de  $\tau$  lejos de las singularidades, la evolución debida a la difusión de los campos es como se esperaba, los picos decaen para grandes  $\tau$ . De esta manera, la función de Lagrange original (6.5) se convierte en una funcional analítica en el campo complejo  $\phi$  (no depende de  $\bar{\phi}$ ); por lo tanto, ya que un funcional analítico no puede alcanzar mínimos y/o máximos relativos (aunque los puntos silla son posibles), parece ser que los escenarios SSB se han perdido. Sin embargo, los dos escenarios con estados de mínima energía están presentes siempre en la dirección  $\varphi$ , pero no son mínimos relativos estables. Podemos ver esto de la siguiente manera; la lagrangiana (6.5) debe ser descompuesta en partes reales e imaginarias, y luego hay que considerar cada parte en el dominio real. El lagrangiano descompuesto queda de la siguiente manera:

$$\mathcal{E} = \int \frac{1}{2}(\partial_x \varphi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x \eta)^2 - V(\varphi, \eta) \quad (7.3)$$

$$+ i \int \eta \left[ \frac{1}{2} \square + \frac{1}{2} m^2 \varphi + \frac{\lambda}{3!} \varphi^3 \right] + \varphi \left[ \frac{1}{2} \square \eta + \frac{1}{2} m^2 \eta + \frac{\lambda}{3!} \eta^3 \right], \quad (7.4)$$

$$V(\varphi, \eta) = \frac{1}{2}(\varphi^2 - \eta^2) + \frac{\lambda}{4!}(\varphi^4 + \eta^4 - 6\varphi^2\eta^2); \quad (7.5)$$

en la parte real (7.5),  $V(\varphi, \eta)$  incluye los términos de masa para los campos (ambos tienen la misma masa), y los términos autointeractuantes  $\lambda\varphi^4$  y  $\lambda\eta^4$ , y el término de acoplamiento de la forma  $\varphi^2\eta^2$ . Además, de las expresiones explícitas para los campos  $(\varphi, \eta)$ , tenemos que  $\varphi(\tau, -x) = \varphi(\tau, x)$ ,  $\eta(\tau, -x) = -\eta(\tau, x)$ , por lo tanto, la parte imaginaria (7.4) es impar bajo  $x \rightarrow -x$ , y se anula de manera idéntica, ya que la integración es sobre todo el espacio,  $\int_{-\infty}^{\infty} dx$ . Por lo tanto, la lagrangiana real describe la dinámica de dos campos escalares interactuando entre sí, con la simetría  $\varphi \rightarrow -\varphi$ , y de forma independiente  $\eta \rightarrow -\eta$ . Además, bajo la condición  $\eta = 0$ , la parte real (7.3) se reduce a la función de Lagrange original (1) para un campo escalar real.

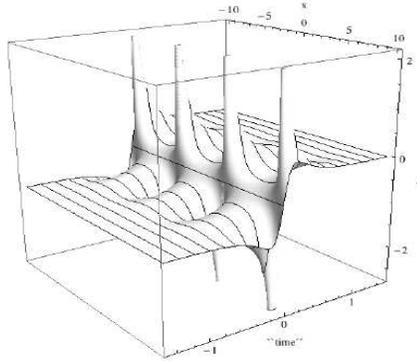


Figura 7.1: Parte real de la solución (24),  $\varphi = [C e^{(-3\frac{m^2}{2}\tau)} \cos(\sqrt{\frac{|m^2|}{2}}x) + b C_{vac}] / [C^2 e^{(-3m^2\tau)} + 2b C C_{vac} e^{(-3\frac{m^2}{2}\tau)} \cos(\sqrt{\frac{|m^2|}{2}}x) + C_{vac}^2]$ ; esta expresión diverge en dos valores del parámetro  $\tau$  y debido a la presencia de funciones armónicas las singularidades son periódicas en la dirección espacial. Los límites asintóticos son  $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \varphi(x, \tau) = b/C_{vac}$  (esencialmente  $\phi_{vac}$ ), y  $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \varphi(x, \tau) = 0$ . Las singularidades aparecen para  $\lambda \neq 0$  *i.e.* como un efecto de reacción.

Las singularidades que se muestran en las figuras (7.1) y (7.2) a nivel de los campos  $(\varphi, \eta)$  implicarán singularidades en el funcional (7.3), y todas sus derivadas respecto a  $\tau$ , representando transiciones de fase (de primer orden) obvias para la teoría; explícitamente tenemos que  $\partial_\tau \mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} dx [(\partial_\tau \eta)^2 - (\partial_\tau \varphi)^2]$ . Analizamos ahora los máximos, mínimos y puntos de silla para el potencial

**CAPÍTULO 7. DIFUSIÓN DEL CAMPO  $\phi$**   
**7.1. SOLUCIONES ONDAS-VIAJERAS**

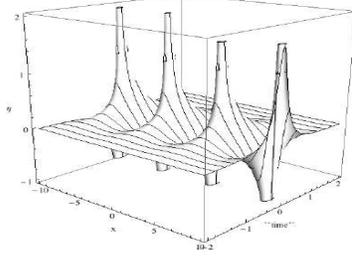


Figura 7.2: Parte imaginaria de la solución (24),  $\eta = Ce^{(-3\frac{m^2}{2}\tau)} \sin(b\sqrt{\frac{|m^2|}{2}}x) / [C^2e^{(-3m^2\tau)} + 2bCC_{vac}e^{-3\frac{m^2}{2}\tau} \cos(\sqrt{\frac{|m^2|}{2}}x) + C_{vac}^2]$ ; en este caso el campo diverge solo para un valore del parámetro  $\tau$ ; los límites asintóticos son  $\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \eta(x, \tau) = 0$

$V$ ; los puntos críticos ( $CP$ ), son  $CP(V) = \{\varphi = 0, \eta = 0\}; (\varphi = \pm\sqrt{3!(-\frac{m^2}{\lambda})}, \eta = 0)\}$ , y su matriz hessiana

$$\mathcal{H}(V) = \begin{pmatrix} m^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi^2 - \eta^2 & -\lambda\varphi\eta \\ -\lambda\varphi\eta & -m^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi^2 - \eta^2 \end{pmatrix}; \quad (7.6)$$

por lo tanto,  $\det\mathcal{H}(\varphi = 0, \eta = 0) = -m^4 < 0$ , y tenemos un punto silla. Del mismo modo,  $\det\mathcal{H}(\pm\sqrt{3!(-\frac{m^2}{\lambda})}, \eta = 0) = -8m^4 < 0$ , y obtenemos dos puntos de silla, el potencial  $V$  se muestra en la figura (7.3). En general, el determinante de  $H$  es un funcional estrictamente negativo de  $\tau$ ,  $\det(H) = -[m^2 + \frac{\lambda}{2}(\varphi^2, \eta^2)]^2 - \lambda^2\varphi^2\eta^2$ , y la traza es un invariante bajo el flujo de  $\tau$ ,  $Tr(H) = 0$ .

Como conclusión de esta sección, podemos decir que la deformación de la teoría a través de ondas viajeras genera una duplicación de los campos, y la versión deformada se pueden reducir a una esquema plenamente real, sin embargo, la aparición de un segundo campo  $\eta$  induce una inestabilidad en el vacío degenerado, ya que no existe un mínimo estable en torno al cual expandir la teoría. La duplicación de los campos conducirá inevitablemente a la duplicación tanto en las variables de campo en el espacio de fase, y en el espacio de Hilbert de estados; sin embargo, estos efectos de las deformaciones de la teoría en su formulación cuántica serán considerados en trabajos futuros.

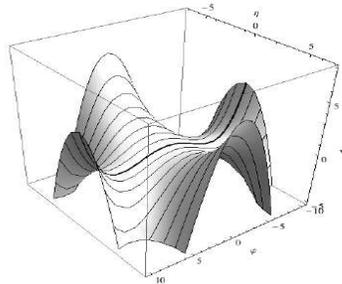


Figura 7.3: Configuración de  $V(\varphi, \eta)$  a  $\tau$  fijo, lejos de las singularidades descritas en las figuras (7.1) y(7.2), la configuración de  $V(\varphi, \eta = 0)$ , lo que puede ser considerado, para desplazamientos en la dirección  $\varphi$ , como la configuración habitual para el potencial con un máximo inestable, y dos mínimos estables; sin embargo, en la descripción presente, esos puntos críticos corresponden a puntos silla. Por lo tanto, allí no existe un vacío estable que pueda ser seleccionado para hacer una expansión alrededor de él.

### 7.1.2. Caso UES; $m^2 > 0$

En este caso, la continuación analítica para el campo  $\phi$  aparece por medio de la constante  $C_{vac} = \sqrt{-\frac{\lambda}{6m^2}}$ , que es imaginario puro; el factor para la coordenada espacial es ahora real, y por lo tanto hay un cambio drástico respecto al caso de SSB discutido anteriormente. Por simplicidad consideramos que la constante arbitraria  $C$  en la solución es real; el campo real ( $\varphi$ ), y la parte imaginaria del campo ( $\eta$ ) quedan de la siguiente manera

$$\varphi = (x, \tau) = C \frac{\exp(-\frac{3}{2}m^2\tau + b\sqrt{\frac{m^2}{2}}x)}{|C_{vac}|^2 + C^2 \exp(-3m^2\tau + 2b\sqrt{\frac{m^2}{2}}x)} \quad (7.7)$$

$$\eta = (x, \tau) = b \frac{|C_{vac}|}{|C_{vac}|^2 + C^2 \exp(-3m^2\tau + 2b\sqrt{\frac{m^2}{2}}x)} \quad (7.8)$$

con el límite asintótico  $\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \varphi(\tau, x) = 0$ ,  $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \eta(\tau, x) = 0$ ,  $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \eta(\tau, x) = \frac{b}{C_{vac}}$  en oposición con el caso anterior relacionada a los escenarios SSB, estas configuraciones de campo no muestran singularidades, por lo que no hay transiciones de fase. Por otra parte, otra diferencia importante es que en este caso la lagrangiana tendrá una parte imaginaria no nula, ya que en este caso el carácter impar bajo  $x \rightarrow -x$ , no está presente. Teniendo en cuenta la parte imaginaria (7.4), los términos de la forma  $\eta \square \varphi$  y  $\varphi \square \eta$  pueden ser considerados como los términos cinéticos, y por lo tanto tendremos un potencial que incluye autointeracción y términos de acoplamiento  $U(\varphi, \eta) \equiv \eta(\frac{1}{2}m^2\varphi + \frac{\lambda}{3!}\varphi^3) + \varphi(\frac{1}{2}m^2\eta - \frac{\lambda}{3!}\eta^3)$ .

Por lo tanto, las dos partes de la función de Lagrange describen la dinámica de dos campos escalares que interactúan uno con otro, en principio, en un escenario de UES; sin embargo, veremos que el escenario UES original ha sido perdido en algún sentido. La parte imaginaria no nula (7.4) tiene la simetría  $(\varphi, \eta) \rightarrow (-\varphi, -\eta)$ . Por otra parte, en virtud de la condición  $\eta = 0$ , la parte imaginaria (7.4) desaparece, y la parte real (7.3) se reduce al Lagrangiano (1) para un campo escalar real.

Analizamos ahora los máximos, mínimos y puntos de silla para el potencial  $V$  con  $m^2 > 0$ ; los  $CP$  son ahora,  $CP(V) = \{(\varphi = 0, \eta = 0); (\varphi = 0, \eta = \sqrt{3!(\frac{m^2}{\lambda})})\}$ , donde los roles de los campos  $\varphi$ , y  $\eta$  se han intercambiado respecto al caso  $m^2 < 0$  discutidos anteriormente; su matriz hessiana es dada por la expresión (7.6), y conduce de nuevo a tres puntos silla, el potencial se ilustra en la la figura (7.4). Físicamente el potencial mostrado en la figura (7.4), es equivalente al que se muestra en la figura (7.3); los potenciales pueden ser relacionados con un simple intercambio de los campos,  $\varphi \rightarrow \eta$ , además, note que el potencial  $V$  es invariante bajo la transformación  $(\varphi \rightarrow \eta, m^2 \rightarrow -m^2)$ . Por lo tanto, al nivel del potencial  $V$ , los escenarios SSB y UES no son distinguibles. La diferencia radica en la presencia de la parte imaginaria de la función de Lagrange para escenarios UES, en particular con un potencial adicional  $U$ .

Se puede demostrar que el potencial  $U$  tiene una matriz hessiana con las entradas dadas por  $\mathcal{H}_{11}(U) = -\mathcal{H}_{12}(V) = -\mathcal{H}_{22}(U)$ ,  $\mathcal{H}_{12}(U) = \mathcal{H}_{11}(V) = \mathcal{H}_{21}(U)$ ; por lo tanto, ambas matrices tienen el mismo determinante,  $\det \mathcal{H}_{11}(U) = \det \mathcal{H}_{11}(V)$ , y  $\mathcal{H}_{11}(U) = 0$ . A pesar de que los potenciales de  $U$ , y  $V$  parecen diferentes, ambos tienen los mismos puntos críticos  $CP(U) = CP(V)$ , y de este modo se puede demostrar que  $CP(U)$  corresponde también a puntos silla; el potencial se muestra en la figura (7.9).

Por lo general, la aparición de las contribuciones imaginarias al potencial pueden estar asociado directamente a inestabilidades, sin embargo, en este caso, la misma contribución real desarrolla inestabilidades de vacío. En la siguiente sección desarrollamos el caso de las soluciones auto-similares, en las que el escenario de SSB se mantiene bajo la evolución de  $\tau$ ; por lo tanto, un vacío degenerado estable está presente a lo largo de la deformación de la teoría.

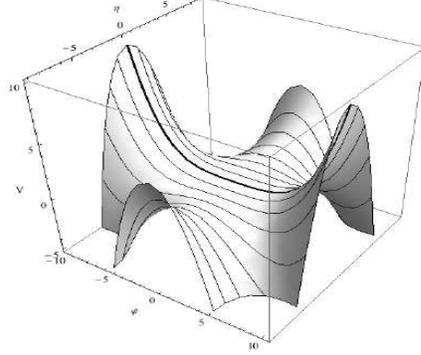


Figura 7.4: Configuración de  $V(\varphi, \eta)$  con  $\tau$  fijo, la línea más oscura representa la configuración de  $V(\varphi, \eta = 0)$ , la cual puede ser considerada para desplazamientos en la dirección  $\varphi$  como la configuración usual para el potencial con un mínimo estable, sin embargo; en la descripción presente ese punto crítico corresponde a un punto silla.

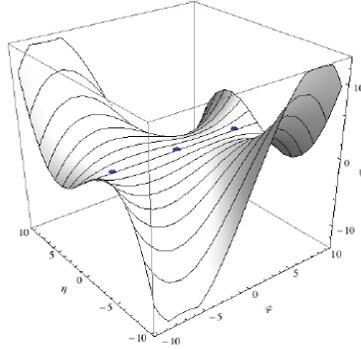


Figura 7.5: Configuración de  $U(\varphi, \eta)$  con  $\tau$  fijo, los tres puntos silla tienen  $\eta = 0$ , y  $U(\varphi, \eta = 0) = 0$ , condición que representa, de hecho, la línea completa que contiene los puntos.

## 7.2. Solitones; soluciones autosimilares

Una solución autosimilar puede ser encontrada para escenarios SSB con  $m^2 < 0$

$$\phi(x, t) = e^{\frac{3}{2}m^2\tau} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2|m^2|x + C_1}\right)\varphi(\xi), \quad (7.9)$$

$$\xi = e^{\frac{3}{2}m^2\tau} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2|m^2|x + C_1}\right) + C_2, \quad (7.10)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = 2\frac{\lambda}{m^2}\varphi^3, \quad (7.11)$$

donde la solución para la ecuación (7.11), puede ser expresada en términos de una integral elíptica

$$\xi = \pm \frac{\partial \varphi}{\sqrt{c_3^2 + \frac{\lambda}{m^2}\varphi^4}} = \pm \frac{1}{\sqrt{C_3}} \sqrt{\frac{|m^2|}{\lambda}} F\left[isinh^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{C_3} \frac{|m^2|}{\lambda}} \varphi\right) - 1\right] \quad (7.12)$$

donde, por razones de simplicidad se ha supuesto que  $C_3 > 0$ , para obtener una solución real; F corresponde a una función elíptica de primer clase. Con el fin de poner la función  $\varphi$  como una

**CAPÍTULO 7. DIFUSIÓN DEL CAMPO  $\phi$**   
**7.2. SOLITONES; SOLUCIONES AUTOSIMILARES**

---

función de  $\tau$ , consideramos que si  $G = F(J | m)$ , entonces la amplitud de Jacobi es la inversa de  $F; J = Am(G | m)$ , cuyas propiedades son bien conocidas. Por lo tanto,

$$\varphi(\xi) = \sqrt{C_3} \sin\left( Am\left[ b\sqrt{C_3} \frac{\lambda}{|m^2|} \xi - 1 \right] \right); \quad (7.13)$$

donde  $b = \pm 1$ ; una vez que la expresión anterior se sustituye en la ecuación (7.9), se obtiene la expresión completa para el campo  $\phi(x, \tau)$ , las figuras (7.6) y (7.7) ilustran vistas desde arriba de las configuraciones  $\phi(x, \tau)$  para  $b = 1$ , con la idea de tener una visualización completa de la periodicidad del patrón en la dirección espacial, y la auto-similitud para la reversión de  $\tau$ . La figura (7.6) muestra la configuración  $\phi(x_f, \tau)$ ; donde  $x_f$  es un punto del fondo plano. No existen

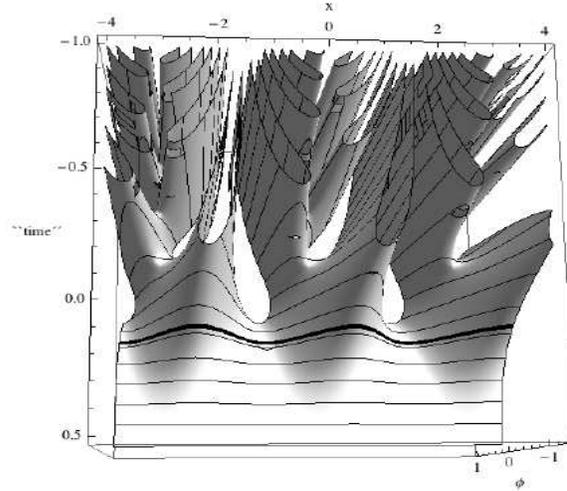


Figura 7.6: La línea oscura representa la configuración de los campos en  $\tau = 0$ ; tales configuraciones pueden ser identificadas con los puntos fijos relacionados con las soluciones de las ecuaciones clásicas de movimiento. Para  $\tau > 0$ , la evolución es difusiva con el efecto esperado sobre el campo, el cual es suavizado con el límite asintótico  $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \phi(x, \tau) = 0$ ; el campo es periódico en la dirección espacial debido a la presencia de las funciones armónicas. Para  $\tau < 0$ , se tiene un efecto dramático en la irreversibilidad de la evolución difusiva, la autosimilaridad comienza a manifestarse en este dominio, además las configuraciones de campo comienzan a mostrar patrones periódicos en la dirección de  $x$  para ciertos intervalos.

transiciones de fase de ningún orden, el campo  $\phi$  y sus derivadas se describen en términos de funciones bien comportadas, incluyendo la Amplitud de Jacobi y sus derivadas. Específicamente, la amplitud de Jacobi no tiene singularidades o divergencias, ahora, todas las derivadas de esta función pueden ser descritas en forma cerrada en términos de funciones de Jacobi, las cuales son también bien comportadas;  $\frac{\partial A_m(z|m)}{\partial z} = dn(z | m)$ ,  $\frac{\partial d_n(z|m)}{\partial z} = -msn(z | m)cn(z | m)$ ,  $\frac{\partial d_{sn}(z|m)}{\partial z} = dn(z | m)cn(z | m)$ ,  $\frac{\partial d_{cn}(z|m)}{\partial z} = -sn(z | m)dn(z | m)$ , por lo que las tres funciones de Jacobi  $dn, sn, cn$ , las cuales son bien comportadas en todo el intervalo, describen completamente las derivadas de todos los ordenes del campo dinámico, sin divergencias y singularidades.

Esta descripción de la deformación de la teoría basada en un campo que diverge conforme  $\tau \rightarrow \infty$ , con el par  $(m, \lambda)$  fijo, se puede transformar en una versión dual con un campo  $\phi$  acotado, y el par  $(m, \lambda)$  creciendo sin límite. Vamos a considerar el potencial de la ecuación (6.5), con la

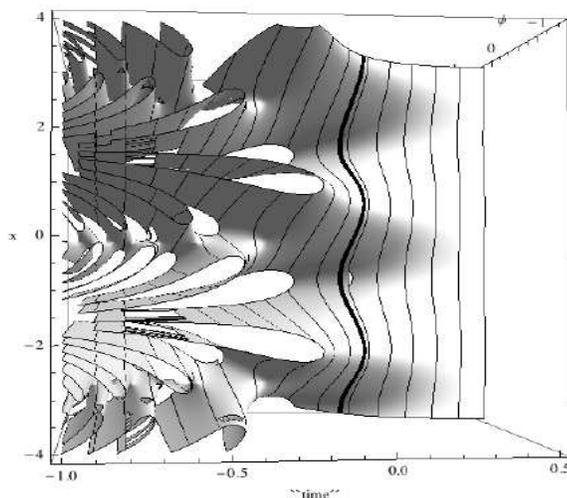


Figura 7.7: Esta figura representa una vista desde un ángulo distinto, respecto a la figura (7.6), la autosimilaridad en el dominio  $\tau < 0$  se manifiesta con la aparición de ramas con patrones de autosimilaridad, los cuales son replicados conforme  $\tau \rightarrow \infty$ . El fenómeno de bifurcación es “izquierdo” para  $b = 1$ , ya que la rama izquierda es la que se bifurca en dos ramas: la rama derecha generada en cada patrón, continúa hacia el infinito sin bifurcación; en particular, la primera rama generada en la evolución hacia atrás es derecho y corresponde a una rama envolvente para la formación de patrones de autosimilaridad para momentos posteriores. Del mismo modo, el caso con  $b = -1$  es derecho, por lo que el valor de  $b$  determina la *quiralidad* de la reversión.

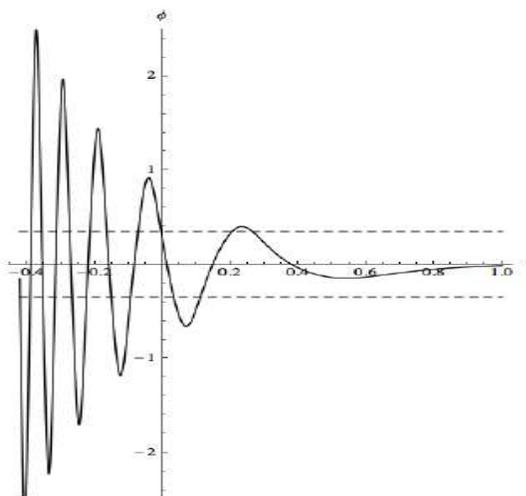


Figura 7.8: Esta figura complementa la descripción de las figuras de arriba, fijando un punto del espacio, y mostrando sólo la dependencia en  $\tau$  del campo; debido a la presencia del factor exponencial  $e^{(\frac{3}{2}m^2\tau)}$ , el cual se incrementa conforme  $\tau \rightarrow -\infty$ , con el límite asintótico  $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \phi(x, \tau) = \pm\infty$ ; además tenemos el límite  $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \phi(x, \tau) = 0$ , los bordes y agujeros mostrados en las figuras (7.6) y (7.7), no representan singularidades, representan los cortes de las líneas punteadas mostrados en esta figura

**CAPÍTULO 7. DIFUSIÓN DEL CAMPO  $\phi$**   
**7.2. SOLITONES; SOLUCIONES AUTOSIMILARES**

---

forma explícita del campo  $\phi$  dado en (7.9),

$$V(\phi m \lambda) = \frac{1}{2}[m^2 e^{3m^2 \tau} [\sin(\frac{1}{2} \sqrt{2 |m^2| x + C_1}) \varphi(\xi)]^2 + \frac{1}{4!} [\lambda e^{6m^2 \tau} [\sin(\frac{1}{2} \sqrt{2 |m^2| x + C_1}) \varphi(\xi)]^4] \quad (7.14)$$

donde el factor exponencial común ha sido absorbido completamente en el par  $(m, \lambda)$ , el cual tiene una dependencia efectiva en  $\tau$ ; note que el factor común no afecta la negatividad de  $m^2$ , y la positividad de  $\lambda$  (por lo tanto, no hay un cambio cualitativo, y siempre tenemos escenarios SSB), con el límite asintótico  $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} (m^2, \lambda)_{eff} = +\infty$ , correspondiente a una versión masiva y fuertemente autointeractuante de la teoría; además  $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} (m^2, \lambda)_{eff} = 0$ , corresponde a una versión libre y sin masa. El campo escalar tendrá también una configuración efectiva dada por  $\phi_{eff} \equiv \sqrt{C_3} \sin(\frac{1}{2} \sqrt{2 |m^2| x + C_1}) \varphi(\xi)$  donde la dependencia en  $\tau$  es a través de las expresiones (7.10), y (7.13); por lo tanto, al depender sólo en las funciones seno y coseno, la expresión efectiva para el campo ahora está acotada; la figura (7.8) ilustra el comportamiento del campo para un punto fijo. Desde la perspectiva de esta descripción dual, el carácter solitónico de esta solución es más clara, ya que mantiene su perfil cuando  $\tau \rightarrow \infty$ , y se tiene un auto-mantenimiento de la formación del patrón de ramificación descrito anteriormente. Por otra parte,

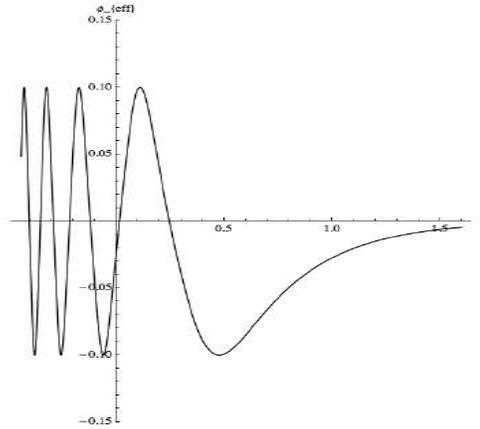


Figura 7.9: Esta figura debe ser comparada con su versión dual mostrada en la figura (7.8), la cual es divergente en el dominio  $\tau < 0$ ; en este caso tenemos el límite asintótico  $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \phi_{eff} = \pm \sqrt{C_3}$ , y  $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \phi_{eff} = 0$ ; estos límites deben ser complementados con sus límites asintóticos para el par  $(m^2, \lambda)_{eff}$  descritos arriba.

los dos estados de menor energía para el potencial (7.14) en esta versión dual, se localizan ahora en  $[\phi_{eff}]_{vac} = \pm \sqrt{-\frac{m^2}{\lambda}} e^{(-\frac{3}{2} m^2 \tau)}$ , con una altura dada por  $V_{vac} = -(m_{eff})^4 / \lambda_{eff} = -m^4 / \lambda$ , que es constante bajo la evolución. Por lo tanto, manteniendo fijo  $V_{vac}$ , tenemos el límite asintótico  $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} [\phi_{eff}]_{vac} = 0$ , y los dos mínimos se están acercando y tomará un tiempo infinito para que coincidan. Además,  $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} [\phi_{eff}]_{vac} = \pm \infty$ , y los mínimos se están alejando. En esta versión dual, los patrones de auto-similitud mostradas en las figuras (7.6) y (7.7) se mantienen, pero con los picos suprimidos, de acuerdo a la figura (7.8). En oposición al caso de las ondas viajeras, en este caso los dos estados de energía más bajos son estables bajo la  $\tau$ -deformación, por lo que la elección de un vacío (y la ruptura espontánea de la simetría) es posible para todo  $\tau$ . El caso de soluciones con una amplitud de Jacobi con argumento complejo se desarrollará en trabajos futuros, este caso necesariamente desarrollará la duplicación de los campos, y una formación de patrones de auto-similitud más complicada.

## Capítulo 8

# Conclusiones

En el presente trabajo se hizo uso de los conceptos como funcional de entropía; en este esquema los flujos gradiente más generales para los parámetros corresponden a series infinitas, y bajo ciertas condiciones encontramos soluciones convergentes, de donde se obtiene (6.6); este funcional describe versiones duales de la teoría, conectadas a lo largo las trayectorias en el espacio de parámetros; este resultado es válido en el caso general de un campo escalar dinámico a lo largo de  $\tau$ . Las soluciones convergentes para el flujo de masa y las posibles transiciones de fase están restringidas a los siguiente casos:  $\beta_n = 0$  para  $n \leq -2$  y  $\beta_n$  identificado con los números de Euler  $E_n$  para  $n \geq 0$ ,  $\beta_n = 0$  para  $n \leq -2$  y  $\beta_n$  para  $\beta_n \geq 0$  identificado con los coeficientes de la expansión del *cosh*; estos casos corresponden a las expresiones integrables, invertibles, y sin una transición de fase. Además están los casos que son integrables pero no invertibles y que manifiestan transiciones de fase de primer orden. En todos los casos anteriores se describieron escenarios UES y SSB estables, y en el caso de transiciones entre ellos, el sistema no puede volver al escenario original; ya que, tal retorno es posible sólo para las continuaciones analíticas de  $m^2$ .

El criterio que hemos utilizado para la construcción de los flujos de campos y parámetros es el ascenso y de descenso para una funcional de entropía, que se alcanzará sólo cuando las series infinitas sean tomadas en cuenta, en particular, la relacionada con el flujo gradiente (6.3). Los resultados presentados aquí, se han obtenido teniendo en cuenta sólo el término de orden más bajo en ese flujo gradiente; correcciones de orden superior deben ser considerados en analogía con la expansión de lazo en el esquema habitual del flujo del grupo de renormalización.

Por otra parte se tomó el gradiente de (6.3), para el campo  $\phi$  que incluye explícitamente  $m^2(\tau)$ , y  $\lambda(\tau)$  como una ecuación de calor no lineal, y desarrollamos sólo el caso de una dimensión espacial, esta ecuación admite diferentes soluciones; consideramos primero las soluciones de ondas viajeras; donde las propiedades de la solución, dependen sensiblemente del signo de  $m^2$ ; al escoger  $m^2 < 0$ , el factor para la coordenada espacial es imaginario puro, con la masa taquiónica ocasionada por SSB; además, la constante de  $C_{vac}$  es real, por lo tanto, la existencia de ondas viajeras de reacción-difusión para el campo  $\phi$  implican necesariamente su continuación analítica a través de funciones armónicas en la coordenada  $x$ . Por lo tanto, el campo  $\phi$  se puede escribir en términos de partes real e imaginaria  $\phi = \varphi(x, \tau) + i\eta(x, \tau)$ . Para los valores de  $\tau$  lejos de las singularidades, la evolución debida a la difusión hace que los picos decaigan para valores grandes de  $\tau$ . De esta manera, la función de Lagrange original (6.5) se convierte en una funcional analítica en el campo complejo  $\phi$ . La deformación de la teoría a través de ondas viajeras genera una duplicación de los campos, y la versión deformada se pueden reducir a una esquema plenamente real, sin embargo, la aparición de un segundo campo  $\eta$  induce una inestabilidad en el vacío degenerado, ya que no existe un mínimo estable en torno al cual expandir la teoría. En el caso  $m^2 > 0$ , en oposición con el caso anterior relacionado a los escenarios SSB, las configuraciones de campo no muestran singularidades, por lo que no hay transiciones de fase. Otra diferencia importante es que en este caso la lagrangiana tendrá una parte imaginaria no nula.

## CAPÍTULO 8. CONCLUSIONES

---

Además se pueden encontrar soluciones autosimilares, en estas no existen transiciones de fase de ningún orden, el campo  $\phi$  y sus derivadas se describen en términos de funciones bien comportadas, en oposición al caso de las ondas viajeras, en este caso los dos estados de energía más bajos son estables bajo la  $\tau$ -deformación, por lo que la elección de un vacío (y la ruptura espontánea de la simetría) es posible para todo  $\tau$ . El caso de soluciones con una amplitud de Jacobi con argumento complejo se desarrollará en trabajos futuros, este caso necesariamente desarrollará la duplicación de los campos, y una formación de patrones de auto-similitud más complicada.

Sin embargo, en el tratamiento desarrollado en este trabajo, se pueden considerar generalizaciones directas que merecen más exploración, y que pueden dar lugar a extensiones no triviales, es decir, los flujos gradiente (6.1) y (6.2) admiten series infinitas adicionales de potencias de segundo grado del campo dinámico  $\phi$ , de acuerdo con el flujo-gradiente del funcional (5.2); este acoplamiento entre los flujos gradiente dará lugar a un esquema donde el campo  $\phi$  jugará un papel clave en las transiciones de fase. Además, la formulación hamiltoniana, y la posterior cuantificación de la teoría basada en los resultados actuales se desarrollará en trabajos futuros. Los resultados obtenidos en esta tesis están reportados en la referencia [13].

# Capítulo 9

## Apéndice

### 9.1. Ecuación de difusión

La ecuación de difusión es una ecuación en derivadas parciales, y comúnmente se usa para describir procesos que exhiben un comportamiento de difusión como fluctuaciones de densidad en un material que se difunde. La ecuación de difusión puede deducirse a partir de la ecuación de continuidad; la cual expresa que el cambio de densidad en un volumen sólo puede deberse a un flujo entrante y/o saliente de materia, puesto que dentro del volumen la materia no puede crearse ni destruirse.

La ecuación del calor es de una importancia fundamental en numerosos y diversos campos de la ciencia. En estadística, la ecuación del calor está vinculada con el estudio del movimiento browniano a través de la ecuación de Fokker-Planck. La ecuación de difusión, es una versión más general de la ecuación del calor y puede ser escrita como;

$$\frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot (D(u(\mathbf{r}, t), r) \nabla u(\mathbf{r}, t)); \quad (9.1)$$

donde  $u(r, t)$  es la densidad del material difusor en la posición  $r = (x, y, z)$  al tiempo  $t$ .  $D(u(r, t), r)$  denota el coeficiente de difusión colectiva para la densidad  $u$  en la ubicación  $r$ . Si el coeficiente de difusión no depende de la densidad, es decir,  $D$  es constante, entonces la ecuación 9.1 se reduce a la siguiente ecuación lineal,

$$\frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D \nabla^2 u(\mathbf{r}, t). \quad (9.2)$$

La ecuación (9.2) se denomina ecuación de calor y como su nombre lo dice, describe la distribución del calor en una región determinada en el tiempo. La ecuación (9.2) se puede derivar de una manera directa a partir de la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla^2 \cdot \Gamma = 0, \quad (9.3)$$

donde  $\Gamma$  es el flujo del material difusor. La ecuación (2) se puede conseguir fácilmente a partir de la última ecuación cuando se combina con la primera ley de Fick fenomenológica, la cual supone que el flujo del material difusor en cualquier parte del sistema es proporcional al gradiente de densidad local

$$\Gamma = -D \nabla u(\mathbf{r}, t). \quad (9.4)$$

Considere la ecuación de difusión

$$\frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(\mathbf{r}, t)}{\partial x^2}, \quad (9.5)$$

en el intervalo  $[0, L]$  con la condición inicial,

$$u(\mathbf{x}, 0) = f(x) \quad \forall x \in [0, L]; \quad (9.6)$$

y condiciones de frontera de Dirichlet,

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \forall t > 0. \quad (9.7)$$

Vamos a tratar de encontrar una solución no trivial de (9.5) que satisfaga las condiciones de contorno ya mencionadas, utilizando separación de variables; es decir,

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (9.8)$$

sustituyendo en (9.5) obtenemos

$$\frac{1}{D} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}, \quad (9.9)$$

como el lado derecho sólo depende de  $x$  y el lado izquierdo sólo de  $t$ , implica que ambos lados son iguales a una constante  $\lambda$ . Por lo tanto, se puede volver a escribir la última ecuación como un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias;

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (9.10)$$

$$T''(t) + D\lambda T(t) = 0. \quad (9.11)$$

Consideremos la primera ecuación para  $X(x)$ ; teniendo en cuenta las condiciones de contorno (9.7) se obtiene

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0 \quad \Rightarrow X(0) = 0 \quad (9.12)$$

$$u(L, t) = X(L)T(t) = 0 \quad \Rightarrow X(L) = 0, \quad (9.13)$$

es decir, el problema de encontrar la solución de (9.5) se reduce a la solución de dos EDO lineales y la consideración de tres casos diferentes debidos a la constante  $\lambda$

1.  $\lambda < 0$

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}. \quad (9.14)$$

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno se obtiene  $C_1 = C_2 = 0$ , por tanto, para  $\lambda < 0$  sólo existe la solución trivial .

2.  $\lambda = 0$

$$X(x) = C_1 x + C_2. \quad (9.15)$$

Una vez más, debido a las condiciones de contorno, uno consigue sólo la solución trivial del problema, ( $C_1 = C_2 = 0$ ).

3.  $\lambda > 0$

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sen(\sqrt{\lambda}x). \quad (9.16)$$

Sustituyendo de las condiciones de contorno conduce a las siguientes ecuaciones para la constantes  $C_1$  y  $C_2$

$$X(0) = C_1 = 0 \quad (9.17)$$

$$X(L) = C_2 \sen(\sqrt{\lambda}L) = 0 \quad (9.18)$$

$$\Rightarrow \text{sen}(\sqrt{\lambda}L) = 0 \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.19)$$

Por tanto,

$$X(L) = C_n \text{sen}\left(\frac{\pi n}{L}x\right); \quad (9.20)$$

así, la segunda ecuación para la función  $T(t)$  toma la forma

$$T'(t) + D\left(\frac{\pi n}{L}\right)T(t) = 0 \quad (9.21)$$

$$\Rightarrow T(t) = B_n \exp\left(-D\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 t\right) \quad (9.22)$$

donde  $B_n$  es una constante. Finalmente la solución general de la ecuación (9.5 se puede escribir como:

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen}\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \exp\left(-D\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 t\right). \quad (9.23)$$

Para encontrar las constantes  $A_n$  se puede emplear la condición inicial (6); si escribimos la función  $f(x)$  como una serie de Fourier obtenemos,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \text{sen}\left(\frac{\pi n}{L}x\right) = \sum_n^{\infty} A_n \text{sen}\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \quad (9.24)$$

$$A_n = F_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(\xi) \text{sen}\left(\frac{\pi n}{L}\xi\right) d\xi, \quad (9.25)$$

por tanto la solución general de la ecuación (9.5) es [4],

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{L} \int_0^L f(\xi) \text{sen}\left(\frac{\pi n}{L}\xi\right) d\xi \right) \text{sen}\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \exp\left(-D\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 t\right). \quad (9.26)$$

### 9.1.1. Reversión de la ecuación del calor

Por otra parte existe otro tipo de problemas relacionados a la ecuación ordinaria del calor, en los cuales, los datos se especifican en algún tiempo  $t_f$  y la solución deseada es para  $t < t_f$ . Estos problemas aparecen comúnmente en la erosión, la degradación de imágenes debido a la atmósfera, o imágenes borrosas debido a fallas en los instrumentos ópticos. Estos problemas pueden interpretarse como un cambio de variable  $t \rightarrow -t$  lo cual convierte a la ecuación 1 en una ecuación del calor con una constante de difusión negativa.

Dado que la ecuación del calor hace una función más suave conforme se incrementa el tiempo, la ecuación del calor hacia atrás debe hacerla menos suave, así, es de esperar que el comportamiento para la ecuación del calor inversa será muy diferente que el comportamiento de la ecuación de calor ordinaria, además, de acuerdo con la segunda ley de la termodinámica, algunos procesos físicos son reversibles en el sentido de que el cambio de la dirección del tiempo no hace ninguna diferencia esencial, sin embargo, los procesos que involucran el azar generalmente ganan entropía con el tiempo y por lo tanto, son irreversibles. La Figura 9.1 muestra un ejemplo donde se ve que la curva a la izquierda se va suavizando lentamente en  $t = 0$ ; entonces se afila bruscamente a un pulso cuadrado en  $t = 2$ . Un poco más a la derecha hay una curva que se convierte en un pulso triangular en el mismo momento. Adicionalmente a la derecha, un pequeña oscilación inicial, apenas visible en  $t = 0$  crece en oscilaciones de considerable amplitud en  $t = 2$ . ¿Qué sucede para

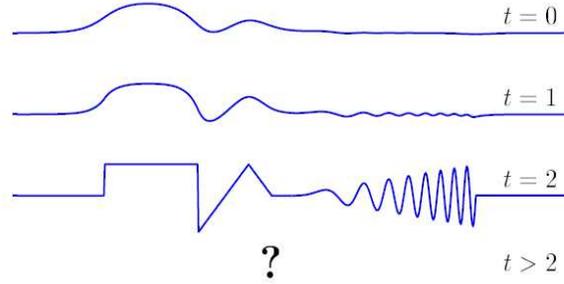


Figura 9.1: La reversión de la ecuación de calor generará una curva menos suave conforme pasa el tiempo

$t > 2$ ? Ciertamente, no hay una solución en el sentido ordinario, porque esto implica que la solución tenía que haber sido suave en el momento anterior, es decir en  $t = 2$ .

Entonces la ecuación de calor inversa ¿Es sólo una curiosidad matemática? Por supuesto que no. Esta ecuación del tipo “mal planteado” (*ill posed*) surge tan naturalmente como ya lo habíamos mencionado, en los problemas de mejoramiento de imágenes. De manera más general, surge cuando se desea deshacer los efectos de la difusión. Existe un floreciente campo de estudio de las ecuaciones tipo “mal planteado” y una técnica fundamental en este campo, es la regularización. Si un problema está “mal planteado”, la idea es atribuir ciertas condiciones adicionales que excluyen soluciones patológicas y convertirlo en uno “bien planteado” (*well posed*).

Los problemas que aparecen en situaciones prácticas son generalmente clasificados en dos; los problemas directos y problemas inversos. Los problemas inversos son aquellos en los que a uno le gustaría determinar las causas de un efecto deseado u observado. Una de las propiedades características de muchos de los problemas inversos es que son generalmente “mal planteados”, en el sentido de que una solución que dependen continuamente en los datos no existe. Esto está en contraste con los problemas directos, que son generalmente “bien planteados”. El concepto de *well posed* se formuló por primera vez por Hadamard en la década de 1920. Más específicamente, un problema se dice que es bien planteado si [10]

- Existe alguna solución
- La solución es única
- La solución depende continuamente de los datos

Si un problema no es “bien planteado” (*well posed*), entonces se dice que es “mal planteado” (*ill posed*).

El procedimiento que se usará (llamado cuasi-inversión) se asemeja a el uso de términos de viscosidad artificiales para suavizar las discontinuidades de choque en problemas de mecánica de fluidos [6]. Considere el sistema

$$\gamma \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad 0 < x < L \quad 0 < t < t_f \quad (9.27)$$

$$T(x, 0) = T_0(x) \quad (9.28)$$

$$T(0, t) = f(t) \quad (9.29)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, T) = g(t) \quad (9.30)$$

$$T(x, t_f) = T_1(x) \quad (9.31)$$

donde  $\gamma$  es una constante no negativa y  $T_1$  es una función arbitraria. Si  $\gamma$  es pequeño, entonces la ecuación (9.27) se parece mucho a la ecuación (9.5). De hecho algunos autores sugieren este sistema como un mejor modelo de conducción de calor, ya que no permite la transferencia instantánea de calor. Para  $\gamma > 0$ , la ecuación (9.27) es hiperbólica y tiene una solución parecida a la de ondas viajeras. Para  $\gamma$  pequeño el sistema, (9.27)-(9.31) se aproxima a la inversa real del sistema dado por (9.5). El sistema hiperbólico (9.27)-(9.31) implica sólo una variable espacial y es resuelta en el rectángulo  $0 < x < L$ ,  $0 < t < t_f$ . Si las funciones de las variables independientes se invierten, es decir, si  $x$  es considerada como la variable temporal y  $t$  como la variable espacial, entonces el sistema (9.27)-(9.31) es idéntico al siguiente:

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \quad 0 < \tau < L \quad 0 < \xi < t_f \quad (9.32)$$

$$u(\xi, 0) = f(\xi) \quad (9.33)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, 0) = g(\xi) \quad (9.34)$$

$$u(0, \tau) = T_0(\tau) \quad (9.35)$$

$$u(t_f, \tau) = T_1(\tau) \quad (9.36)$$

donde  $\xi$  se considera la variable de espacio y  $\tau$  la variable de tiempo. El sistema (9.32)-(9.36) es un problema convencional de valores iniciales y de contorno para una ecuación hiperbólica de segundo orden con coeficientes constantes. Tychonov y Samarski [6] utilizan la función de Riemann para obtener una solución de forma cerrada para este sistema, lo cual es análogo a la solución de D'Alembert para la ecuación de onda amortiguada; las cualidades de la existencia, unicidad y dependencia continua de los datos se obtienen de la solución. Por tanto, el sistema (9.32)-(9.36) representa un problema "bien planteado" (*well posed*). En resumen, el problema de conducción de calor inverso se puede aproximar por el sistema hiperbólico(9.27)-(9.31) si se ve como en el sistema (9.32)-(9.36), este sistema hiperbólico es "bien planteado" (*well posed*), por lo tanto, la naturaleza inestable e incompatibilidad de datos posibles son superados completamente. Otra ventaja de este procedimiento, es que la solución numérica del sistema de aproximación hiperbólica es eficiente y precisa, incluso para problemas no lineales.

## 9.2. Renormalización

Una de las complicaciones graves que se encuentran en la teoría cuántica de campos es el hecho de que la teoría es divergente. Cuando las correcciones de orden superior se calculan para QED o la teoría  $\lambda\phi^4$ , se observa que las integrales divergen en la región ultravioleta. Desde el nacimiento de la teoría cuántica de campos, varias generaciones de físicos han luchado para renormalizarla. Algunos físicos, desesperados por extraer información significativa de la teoría cuántica de campos, incluso especularon que la teoría era fundamentalmente enferma y debía ser desechada.

En retrospectiva, podemos ver que las diferencias encontradas en la teoría cuántica de campos eran, en cierto sentido, inevitables. En la transición de la mecánica cuántica a la teoría cuántica de campos, hemos hecho la transición de un número finito de grados de libertad a un número infinito. Debido a esto, hay que sumar continuamente durante un número infinito de modos internos de integración de lazo, dando lugar a divergencias. La naturaleza divergente de la teoría cuántica de campos, refleja el hecho de que la región ultravioleta es sensible al número infinito de grados de libertad de la teoría. Otra forma de ver esto es que los gráficos divergentes sondan las distancias extremadamente pequeñas del espacio-tiempo, o, equivalentemente, la región de momentos muy grandes. Debido a que casi no se sabe nada acerca de la naturaleza de la física a muy pequeñas distancias, estamos disfrazando nuestra ignorancia sobre esta región, cortando las integrales a pequeñas distancias.

Desde entonces, se han producido dos acontecimientos importantes en la teoría de renormalización. En primer lugar la renormalización de QED a través de la formulación covariante desarrollada por Schwinger, Tomonaga y Feynman. Este último puso de manifiesto que, al menos por las interacciones electromagnéticas, la teoría cuántica de campos era el formalismo correcto. Posteriormente, los físicos atacaron el problema de las interacciones fuertes y débiles a través de la teoría cuántica de campos, sólo para enfrentar los problemas más formidables de renormalización que estancaron el progreso durante varias décadas.

La segunda revolución fue la prueba de 't Hooft de que el rompimiento espontáneo de la teoría de Yang-Mills es renormalizable, lo que condujo a la aplicación con éxito de la teoría cuántica de campos a las interacciones débiles y abrió la puerta a la revolución de norma.

Ha habido muchas propuestas de renormalización hechas en la literatura, pero todas ellas comparten las mismas características físicas básicas. Aunque los detalles varían de un esquema a otro, la idea esencial es que existe un conjunto de parámetros físicos "simples" que son divergentes, tales como las constantes de acoplamiento y de las masas. Sin embargo, estos parámetros no son medibles. Las divergencias de estos parámetros se eligen de modo que cancelen los infinitos ultravioletas procedentes de las clases infinitas de diagramas de Feynman, que indagan sobre el comportamiento de la teoría a pequeñas distancias. Después de que estas divergencias han sido absorbidas por los parámetros, nos quedamos con los parámetros físicos, renormalizados, o "vestidos", que de hecho son medibles. Puesto que hay un número finito de tales parámetros físicos sólo se nos permite hacer un número finito de tales redefiniciones.

La teoría de renormalización, entonces, es un conjunto de reglas o prescripciones que, después de un número finito de redefiniciones, podemos hacer que la teoría sea finita a cualquier orden. (Sin embargo, si un número infinito de redefiniciones fuera requerido para hacer todos los órdenes finitos, cualquier teoría cuántica de campo podría ser "renormalizada". Por ejemplo, podríamos encontrar una regla para cancelar las diferencias para cada una de las clases infinitas de diagramas divergentes a menos que haya una regla bien definida que determine cómo esta resta es llevada a todos los órdenes, la teoría no está bien definida; es infinitamente ambigua). Debemos subrayar que, a pesar de las grandes características del programa de renormalización son fáciles de entender, los detalles pueden ser bastante complicados. Por ejemplo, la solución del problema de "superposición de divergencias" requiere análisis gráfico y combinatoria detallada y tal vez es la complicación más importante de la teoría de renormalización. Debido a estos detalles tediosos, ha habido varios errores en la literatura relativa a la teoría de renormalización. [1]

Consciente de estas complicaciones oscuras, que tienden a ocultar la relativamente simple esencia de la teoría de renormalización, se aborda el problema de la renormalización desde un punto de vista esquemático, hablaremos de los componentes básicos de la teoría de renormalización, que se producen en cuatro pasos esenciales; conteo de energía, regularización, contratérminos o regularización multiplicativa e inducción. [1]

### 1) Conteo de energía

Con sólo contar las energías de  $p$  en cualquier diagrama de Feynman, podemos decir, por grandes  $p$ , si la integral diverge calculando el grado de divergencia de ese diagrama: cada propagador de bosón contribuye  $p^{-2}$ , cada propagador del fermión contribuye  $p^{-1}$ , cada lazo contribuye a la integración de lazo con  $p^4$  y cada vértice con  $n$  derivadas contribuyen a lo sumo con  $n$  energías de  $p$ . Si la energía total de  $p$ , es decir, el grado de divergencia  $D$ , es 0 o positivo, entonces el diagrama diverge. Por simple conteo de energías, podemos calcular con bastante rapidez si ciertas teorías son irremediabilmente norenormalizables, o si pueden ser potencialmente renormalizables.

### 2) Regularización

La manipulación de las integrales divergentes no está bien definida, por lo que tenemos que cortar la integración sobre  $d^4p$ . Esto hace que cada diagrama se vuelva finito, orden por

orden, y nos permite reajustar la teoría de perturbaciones. Al final del cálculo, después de que hemos reordenado los diagramas para poner todos los términos divergentes en los parámetros físicos, dejamos que el punto de corte tienda a infinito. También hay que demostrar que la teoría resultante es independiente del método de regularización.

### 3) Contratérminos o renormalización multiplicativa

Dada una teoría divergentes que ha sido regularizada, podemos realizar manipulaciones formales en los diagramas de Feynman de cualquier orden. Entonces hay por lo menos dos maneras equivalentes en las que se puede renormalizar la teoría.

En primer lugar, está el método de renormalización multiplicativo, cuyos pioneros son Dyson y Ward. Se suma formalmente a través de una serie infinita de diagramas de Feynman con un número fijo de líneas externas. La suma divergente es reabsorbida en una redefinición de las constantes de acoplamiento de las masas en la teoría. Dado que las masas “desnudas” y constantes de acoplamiento “desnudas” no son medibles, podemos suponer que son divergentes y que se cancelan con las divergencias de diagramas de Feynman correspondientes, y por lo tanto, la teoría ha absorbido todas las divergencias en ese nivel.

En segundo lugar, existe el método de contratérminos, usado por primera vez por Bogoliubov, Parasiuk, Hepp, y Zimmerman (BPHZ), donde añadimos nuevos términos directamente a la acción de restar de los gráficos divergentes. Los coeficientes de estos contratérminos se eligen de manera que matan con precisión los diagramas divergentes. En una teoría renormalizable, sólo hay un número finito de contratérminos necesarios para hacer la teoría finita a cualquier orden. Además, estos contratérminos son proporcionales a los términos de la acción original. Sumando la acción original, con los contratérminos nos da una nueva normalización de las masas y las constantes de acoplamiento en la acción. Estos dos métodos son por lo tanto equivalentes, es decir, mediante la adición de contratérminos a la acción, que resumen, al final del cálculo, para dar un reescalamiento multiplicativo de los parámetros físicos que aparecen en la acción. Estos métodos nos dan criterios simples que son necesarios (pero no suficientes) para demostrar que una teoría es renormalizable:

a) El grado de divergencia  $D$  de cualquier diagrama debe ser una función sólo del número de patas externas; es decir, que debe permanecer constante si añadimos más bucles internos. Esto nos permite recoger todos los diagramas  $N$ -punto lazo en un solo término (Para las teorías súper renormalizables, el grado de divergencia en realidad disminuye si añadimos más lazos internos).

b) El número de clases de diagramas de  $N$  puntos divergentes debe ser finito. Estas divergencias se deben cancelar con de las divergencias que figuran dentro de los parámetros “desnudos”.

[1]

### 4) Inducción

El último paso en la prueba de renormalización es utilizar un argumento de inducción. Suponemos que la teoría es renormalizable al  $n$ -ésimo orden en la teoría de perturbaciones. Entonces escribimos una relación recursiva que nos permite generar el diagrama de orden  $n + 1$  en términos del diagrama de orden  $n$ . Probando que los diagramas de orden  $n + 1$  son todos finitos, podemos demostrar, utilizando renormalización multiplicativa o renormalización contratérmino, que toda la teoría de perturbación, orden por orden, es finita. Puesto que hay varias relaciones recursivas satisfechas por la teoría de campo (por ejemplo, ecuaciones Schwinger-Dyson, ecuaciones grupo de renormalización, etc), también hay una variedad de programas de renormalización. Sin embargo, todas las pruebas de inducción se basan en última instancia en el teorema de Weinberg (que establece que un diagrama de Feynman converge si el grado de divergencia del diagrama y todos sus subdiagramas son negativos).

### 9.2.1. Tipos de Renormalización

En base a simple conteo de energías de diagramas, podemos empezar a catalogar una amplia variedad de diferentes teorías de campo sobre la base de su renormalizabilidad. Agruparemos teorías cuánticas de campo en cuatro categorías distintas:

1. Teorías No renormalizables.
2. Teorías renormalizables.
3. Teorías Super-renormalizables.
4. Teorías finitas.

### 9.2.2. Teorías no renormalizables

El ejemplo más simple de una teoría no renormalizable es uno que tiene una constante de acoplamiento con dimensión negativa, como la teoría  $\phi^5$  en cuatro dimensiones. Para mantener la acción sin dimensiones, la constante de acoplamiento  $g$  debe tener dimensión  $-1$ . Ahora vamos a analizar el comportamiento de una función de  $N$  puntos. Si se inserta un vértice  $g\phi^5$  en la función de  $N$  puntos, esto aumenta el número de  $g$  en uno, disminuyendo la dimensión del diagrama. Esto debe ser compensado por un aumento en la energía total de  $k$  por 1, lo que aumenta la dimensión del diagrama, de tal manera que la dimensión total del diagrama sigue siendo el mismo. Mediante la inserción de un número arbitrario de vértices en la función de  $N$  puntos, podemos aumentar arbitrariamente la energía total de  $k$  y por lo tanto hacer que el diagrama sea arbitrariamente divergente. Las mismas observaciones se aplican para  $\phi^n$  para  $n > 4$  en cuatro dimensiones. (Debido a la presencia o ausencia de constantes de acoplamiento dimensionales, depende tan decisivamente de la dimensión del espacio-tiempo, nos daremos cuenta de que en diferentes espacios-tiempo el conjunto de teorías renormalizables y no renormalizables son muy diferentes.) Algunos ejemplos de teorías no renormalizables son:

1. Acciones no polinómicas

Estas acciones tienen un número infinito de términos en ellos, y por lo general se ven como  $\sum_{n=3}^{\infty} \phi^n$ . Necesariamente tienen constantes de acoplamiento con dimensión negativa, y por lo tanto no son renormalizables.

2. Gravedad

Gravedad cuántica tiene una constante de acoplamiento con dimensión negativa, ( $k^2 G_N$ , donde  $G_N$  es la constante de Newton, que tiene dimensión  $-2$ ). Esto significa que no podemos llevar a cabo el programa de renormalización estándar. También, una expansión de la energía en la constante de acoplamiento produce una teoría no polinomial. Por lo tanto, la gravedad cuántica no es renormalizable y es infinitamente ambigua.

3. Supergravity

Por los mismos argumentos, supergravedad también es no renormalizable. A pesar de que posee identidades de Ward altamente no triviales matan grandes clases de divergencias, el grupo de norma no es lo suficientemente grande como para matar a todas las divergencias.

4. Interacciones de cuatro fermiones

Estas acciones, como la acción de Fermi original o la acción Nambu-Jona-Lasinio, contienen términos como  $(\bar{\psi}\psi)^2$ . Por conteo de energías, sabemos que  $\psi$  tiene dimensiones de  $cm^{-\frac{3}{2}}$ , por lo que la acción de cuatro fermiones tiene dimensión 6. Esto requiere una constante de acoplamiento

con dimensión -2, por lo que la teoría es no renormalizable.

5.  $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi F_{\mu\nu}$

Este acoplamiento, que parece ser perfectamente bien definido e invariante de norma, no es renormalizable porque tiene dimensión 5, por lo que su constante de acoplamiento tiene dimensión 1.

### 9.2.3. Teorías Renormalizables

Las teorías renormalizables sólo constituyen un pequeño subconjunto de las posibles teorías cuánticas de campos. Tienen sólo un número finito de contratérminos. También tienen constantes de acoplamiento adimensionales, de modo que la dimensión de cada término de la función de Lagrange es  $cm^{-4}$ . Algunas teorías renormalizables bien conocidas incluyen:

1.  $\phi^4$

Esta es la más simple teoría renormalizable, se puede escribir en cuatro dimensiones. Debido a que  $\phi$  tiene dimensión 1, esta interacción tiene dimensión 4, y por lo tanto la constante de acoplamiento es adimensional. Esta teoría es un prototipo de acciones mucho más complicadas. (Sin embargo, se debe señalar que esta teoría, cuando se suman todos los órdenes, es probablemente una teoría libre.)

2. La teoría de Yukawa

La teoría de Yukawa tiene un acoplamiento entre fermiones y escalares dadas por:

$$\mathcal{L}g\psi\tau^\alpha\bar{\psi}\phi^a$$

donde  $\tau^\alpha$  es el generador de algún grupo de Lie, y  $g$  es adimensional

3. QED

No hay constantes dimensionales de acoplamiento, y, por argumentos de conteo de energías, necesitamos sólo un número finito de contratérminos.

5. Teoría de gauge no abelianas sin masa

Por conteo de energía, esta teoría es renormalizable.

### 9.2.4. Teorías Super-renormalizables

Las teorías Super-renormalizables convergen tan rápidamente que sólo hay un número finito de diagramas que divergen en toda la teoría de la perturbación. El grado de divergencia en realidad disminuye a medida que se añaden más bucles internos. Las teorías súper-renormalizables más simples tienen constantes de acoplamiento con dimensión positiva, tales como  $\phi^3$  en cuatro dimensiones. Repitiendo el argumento utilizado anteriormente, esto significa que el incremento de orden  $g$  de una función de  $N$  puntos, necesariamente debe disminuir el número de momento  $k$  que aparece en el integrando, de tal manera que la dimensión global del diagrama siga siendo la misma. Por lo tanto, como el orden del diagrama se incrementa, tarde o temprano el diagrama será convergente. Por lo tanto, sólo hay un número finito de gráficos divergentes en la teoría. Algunos ejemplos de teorías súper renormalizables incluyen:

1.  $\phi^3$

Esto es súper-renormalizable en cuatro dimensiones (pero la teoría no es buena, ya que no está limitada por abajo y el vacío no es estable).

2.  $\phi^4$

Esta es super-renormalizable en tres dimensiones, ya que tiene tres diagramas superficialmente divergentes, que contribuyen a la función de dos puntos.

3.  $P(\phi)$

$\phi$  tiene dimensión cero en dos dimensiones; podemos tener un polinomio arbitrario en la acción y aún así mantener la renormalizabilidad. La interacción  $P(\phi)$  produce sólo un número finito de divergencias, todas ellas debido a las auto-contracciones de las líneas en los diferentes vértices.

4.  $P(\phi)\bar{\psi}\psi$

También es súper-renormalizable en dos dimensiones.

### 9.2.5. Teorías finitas

Aunque Dirac fue uno de los creadores de la teoría cuántica de campos, no estaba satisfecho con el enfoque de renormalización, considerándolo artificial. Dirac, en sus últimos años, buscó una teoría en la que la renormalización no era necesaria en absoluto. El veredicto de Dirac sobre la teoría de renormalización fue: “Esto no es sólo matemáticas sensibles”. Matemáticas sensibles implica despreciar una cantidad cuando se vuelve muy pequeña, no despreciarla porque es infinitamente grande y no la quieres!”. En su lugar, Dirac creía que una nueva teoría se necesitaba en la que la renormalización fuera innecesaria. Hasta hace poco, se pensaba que el programa de Dirac era un callejón sin salida, que renormalización era inherente a cualquier teoría cuántica de campos. Sin embargo, debido a la introducción de la supersimetría, tenemos dos posibles tipos de teorías que son finitas para cualquier orden en la teoría de la perturbación:

1. Súper teoría de Yang-Mills

La supersimetría nos da nuevas restricciones entre las constantes de renormalización  $Z$  que no se encuentran en las teorías cuánticas ordinarias. De hecho, para  $S0(4)$  super teoría de Yang-Mills, se puede demostrar que estas restricciones son suficientes para garantizar que  $Z = 1$  para todas las constantes de renormalización a todos los órdenes de la teoría de perturbaciones. Además, en  $S0(2)$  la super teoría de Yang-Mills, junto a ciertas clases de materia supersimétrica, también es finita para todos los ordenes de la teoría de perturbaciones. A pesar de que estas súper teorías de Yang-Mills son poco interesantes desde el punto de vista de la fenomenología, el hecho de que la supersimetría es lo suficientemente potente como para hacer que ciertas clases de teorías cuánticas de campos sean finitas para todos los órdenes, es razón suficiente para estudiarlos.

2. Supercuerdas

La supersimetría también nos permite construir acciones mucho más potentes que la teoría súper Yang-Mills, como la teoría de las supercuerdas. La teoría de supercuerdas tiene dos propiedades importantes. En primer lugar, es finita para todos los ordenes de la teoría de perturbaciones y está libre de todas las anomalías. En segundo lugar, contiene la gravedad cuántica, así como todas las fuerzas conocidas que se encuentran en la naturaleza, como un subconjunto. El hecho de que la teoría de supercuerdas es el único candidato para una teoría finita de la gravedad cuántica es notable.

# Bibliografía

- [1] Michio Kaku, *Quantum field Theory (A modern introduction)*, New York, Oxford University Press (1993),
- [2] Walter Greiner, Joachim Reinhardt, *Field Quantization*, Verlag Berlin Heidelberg, Springer (1996).
- [3] A. Zee, *Quantum field theory in a nutshell*, Princeton, Princeton University Press (2003).
- [4] William E. Boyce, Richard C. DiPrima, *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, 4a ed. Mexico Lymusa Wiley 2003
- [5] Grisha Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, arXiv:math/0211159 [math.DG]
- [6] A. N. Tychonov, A. A. Samarski, *Partial differential equations of mathematical physics*, San Francisco (1964)
- [7] Roberto Cartas Fuentesvilla, *The Higgs mechanism and geometrical flows for two manifolds*, Enviado a Annals of Physics (2013)
- [8] E. Woolgar, *Some applications of Ricci flow in physics*, arXiv 0708.2144v3 (2007)
- [9] J.Gegenberg, G.Kunstatter, *Using string-inspired gravity to understand the Thurston conjecture*, IOP science 21, 1197-1207 (2004).
- [10] Thamban Nair M., *Ill-Posedness of Backward Heat Conduction Problem*, Chennai-600 036, INDIA,
- [11] Thomas Vojta., *Phases and phase transitions in disordered quantum systems*, arXiv:1301.7746
- [12] A.D. Polyanin, V. F. Zaitsev, *Handbook of non-linear Partial Differential Equations*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2004

- [13] Roberto Cartas Fuentevilla, Arturo Olvera S., *Deforming the theory  $\lambda\phi^4$  along the parameters and fields gradient flows*, Enviado a European Physics Journal C