

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Luz atrapada en una estructura construida con
metamateriales

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Esperanza Juárez Pérez

asesorada por

Dra. Martha Palomino Ovando

Puebla , Pue. ,
Abril de 2014.

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Luz atrapada en una estructura construida con
metamateriales

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Esperanza Juárez Pérez

asesorada por

Dra. Martha Palomino Ovando

Puebla, Pue.,
Abril de 2014.

Índice general

| | |
|---|------------|
| Resumen | VII |
| Introducción | IX |
| 1. METAMATERIALES | 1 |
| 1.1. Definición y características de un metamaterial | 1 |
| 1.1.1. Definición e historia | 1 |
| 1.1.2. Propiedades | 2 |
| 1.2. Aplicaciones | 4 |
| 1.3. Tipos de metamateriales | 5 |
| 1.3.1. Dieléctricos artificiales | 5 |
| 1.3.2. Materiales magnéticos artificiales | 6 |
| 1.3.3. Materiales quirales | 6 |
| 1.3.4. Materiales con recubrimiento | 7 |
| 1.4. Modelo de Gupta | 7 |
| 2. DESARROLLO TEORICO | 9 |
| 2.1. Ecuaciones de Maxwell | 9 |
| 2.1.1. Fundamentos de las ecuaciones de Maxwell | 10 |
| 2.1.2. Obtención de las ecuaciones de Maxwell | 13 |
| 2.2. Método de la matriz de transferencia | 15 |
| 2.2.1. Ecuación de onda | 15 |
| 2.2.2. Polarización P (Polarización Transversal Magnética) | 16 |
| 2.2.3. Polarización S (Polarización Transversal Eléctrica) | 20 |
| 2.3. Cálculo de tiempo de fase | 23 |
| 3. RESULTADOS | 27 |
| 3.1. Espectros de transmisión | 28 |
| 3.2. Tiempos de fase | 31 |
| Conclusiones | 35 |

Índice de figuras

| | | |
|------|---|----|
| 1.1. | El agua con índice de refracción negativo si se introduce un popote se vería doblar en dirección contraria a la norma | 3 |
| 1.2. | Efecto Doppler en (a) un material convencional y (b) un material izquierdo | 4 |
| 1.3. | El teléfono móvil de la figura (a) (modelo BL40 de la marca LG) fue el primer dispositivo de este tipo en integrar una antena basada en metamateriales (modelo MTM-C de la empresa norteamericana Rayspan) (b). Esta tecnología permite reducir a una quinta parte el tamaño de antena que sería necesario en caso de utilizar tecnología convencional de antenas impresas. | 5 |
| 1.4. | Rayos de luz atravesando objetos invisibles. | 7 |
| 1.5. | Grafica de $\epsilon(\omega)$ y $\mu(\omega)$ modelo de Gupta | 8 |
| 2.1. | Dispositivo de Faraday | 10 |
| 2.2. | Fenómeno de inducción | 11 |
| 2.3. | Ley de Ampere | 12 |
| 2.4. | Líneas de fuerza de \vec{B} | 13 |
| 2.5. | Polarización P | 17 |
| 2.6. | Onda incidiendo en la red | 18 |
| 2.7. | Polarización S | 21 |
| 3.1. | Forma que van a tener las multicapas a) caso periódico y b) caso no periódico | 27 |
| 3.2. | Comparación de espectros de transmisión entre estructuras periódicas y aquellas donde la capa de metamaterial se incrementa, en la figura para ambos casos $n=6$, $db=2$ cm, a) caso periódico $da=2.25$ cm; b) caso no periódico $di=1$ cm y $df=4$ cm | 28 |
| 3.3. | Comparación entre los espectros de transmisión entre estructuras multicapas donde en un caso el ancho de los metamateriales va cambiando y en el otro caso se mantiene constante para esta figura $n=8$, $db=2$ cm; a) caso periódico $da= 2.31$ cm b) caso no periódico $di = 1$ cm , $df = 4$ cm | 29 |
| 3.4. | Espectros de transmisión para estructuras multicapas de metamateriales y dieléctricos, en un caso el ancho de los metamateriales va cambiando y en el otro caso se mantiene constante para esta figura $n=8$, $db=2$ cm; a) caso periódico $da= 2.46$ cm b) caso no periódico $di = 0.5$ cm , $df = 5$ cm | 29 |
| 3.5. | Espectro de transmisión para estructuras multicapas de metamateriales y dieléctricos, en un caso el ancho de los metamateriales va cambiando y en el otro caso se mantiene constante para esta figura $n=10$, $db=2$ cm; a) caso periódico $da= 2.35$ cm b) caso no periódico $di = 1$ cm , $df = 4$ cm | 30 |

- 3.6. Espectro de transmisión para estructuras multicapas de metamateriales y dieléctricos, en un caso el ancho de los metamateriales va cambiando y en el otro caso se mantiene constante para esta figura se tiene $n=8$, $db=3\text{cm}$; a) caso periódico $da=2.31\text{cm}$ b) caso no periódico $di=1\text{cm}$, $df=4\text{cm}$ 30
- 3.7. Tiempo de fase para las estructuras periódicas y no periódicas, para ambos $n=6$, $db=2\text{cm}$, a) caso periódico $da=2.25\text{cm}$; b) caso no periódico $di=1\text{cm}$ y $df=4\text{cm}$. Para esta estructura se va a obtener un tiempo en el vacío de $0,849\text{ns}$ 31
- 3.8. Tiempo de fase para las estructuras periódicas y no periódicas, para ambos $n=8$, $db=2\text{cm}$; a) caso periódico $da=2.31\text{cm}$ b) caso no periódico $di=1\text{cm}$, $df=4\text{cm}$. Para esta estructura se va a obtener un tiempo en el vacío de $1,14\text{ns}$ 32
- 3.9. Tiempo de fase para las estructuras periódicas y no periódicas, para ambos $n=8$, $db=2\text{cm}$; a) caso periódico $da=2.46\text{cm}$ b) caso no periódico $di=0.5\text{cm}$, $df=5\text{cm}$. Para esta estructura se va a obtener un tiempo en el vacío de $1,18\text{ns}$ 32
- 3.10. Tiempo de fase para las estructuras periódicas y no periódicas, para ambos $n=10$, $db=2\text{cm}$; a) caso periódico $da=2.35\text{cm}$ b) caso no periódico $di=1\text{cm}$, $df=4\text{cm}$. Para esta estructura se va a obtener un tiempo en el vacío de $1,44\text{ns}$ 33

Resumen

Se ha mostrado recientemente en la literatura que la luz puede ser retardada en una estructura de capas alternadas de dieléctricos y metales, donde el ancho de la película del metal crece regularmente, y se cumple la condición $\varepsilon_a d_a + \varepsilon_b d_b = 0$, donde d_a y d_b representan los anchos de las películas del metal y del dieléctrico respectivamente y ε_a y ε_b las permitividades dieléctricas correspondientes, esta ecuación puede cumplirse ya que para ciertos rangos de frecuencia en los metales la permitividad puede ser negativa, en este trabajo se analizarán estructuras para $n_a d_a + n_b d_b = 0$, donde n_a y n_b son los índices de refracción de los materiales, para cumplir con esta ecuación es necesario que uno de los índices de refracción sea negativo, esto sólo es posible cuando se tienen estructuras donde uno de los componentes es un metamaterial, se estudiará la propagación de luz en una estructura donde se alternan capas de dieléctricos y metamateriales las películas de metamateriales crecen de una capa a otra, se calculará el tiempo de tránsito con el fin de determinar si la luz sufre un retardo en estas estructuras y se harán las comparaciones con el caso periódico.

Introducción

Desde el principio de los tiempos la humanidad no hubiera subsistido, de no haber tenido la habilidad de fabricar herramientas. Así la civilización se ha desarrollado a medida que se han dominado las propiedades de los materiales.

Al principio la luz solo era algo que diferenciaba el día de la noche, pero ahora después de muchos milenios ya se sabe mucho acerca de este tema. En la actualidad se ha llegado a saber que con ayuda de la luz y una lente se pueda ver incluso los átomos. Para poder trabajar con la luz se tuvo que dejar de lado a los materiales creados por la naturaleza, y se tuvieron que inventar nuevos materiales: los metamateriales, estos son materiales creados de forma artificial, en laboratorios, a partir de materiales naturales.

Cuando la luz llega a un objeto, una parte se refleja. Pero otra parte puede penetrar en él y, al hacerlo, choca con los átomos que lo componen y se desvía. Existe una magnitud física llamada índice de refracción, que indica cuánto se desvía la luz al atravesar un material. Este índice sale de dividir la velocidad de la luz en el vacío por la velocidad de la luz dentro del material. En el vacío, la luz no choca con nada por lo que alcanza su velocidad máxima, mientras que, dentro de cualquier material, la luz será frenada por los millones de átomos que lo componen y su velocidad será menor que en el vacío, para la luz visible, el índice de refracción de cualquier material es siempre positivo y mayor que 1. Así que para poder controlar la luz se tendría que manipular el índice de refracción de los materiales.

Hace aproximadamente unos 50 años, el físico ruso Víctor Veselago [1] especuló con la posibilidad de crear materiales con índice de refracción negativo, lo cual en un inicio solo resultó ser una curiosidad científica, pero fue hasta inicios de la década pasada cuando el inglés John Pendry, se le ocurrió una manera de lograrlo [2]. Los materiales de índice negativo (NIM por sus siglas en inglés), también se denominan como materiales izquierdos (LHM por sus siglas en inglés), pueden tener simultáneamente para un mismo rango de frecuencias la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética negativas por lo que se les asocia un índice de refracción también negativo. Los NIM no existen en la naturaleza, por lo que deben ser fabricados artificialmente, y hasta ahora ha sido posible crearlos con estas características en rangos de frecuencia de las microondas e infrarrojo [3]

Estos nuevos materiales han atraído recientemente mucha atención debido a sus aplicaciones sin precedentes, por ejemplo en la actualidad, las Fuerzas Armadas de distintos países dedican importantes esfuerzos de investigación y recursos económicos para conseguir reducir la detectabilidad de sus plataformas frente a los sensores utilizados

por el oponente, con el objetivo de aumentar sus probabilidades de supervivencia en los escenarios de operaciones. Esta reducción de detectabilidad se plasma en distintas estrategias de reducción en todas sus variantes: radar, infrarroja, visible, acústica, etc. Entre las aplicaciones más revolucionarias y futuristas podrían señalarse la protección de las ciudades contra los efectos de los terremotos, utilizando estructuras basadas en el concepto de metamaterial para desviar las ondas mecánicas sísmicas causadas por el movimiento de tierras. Utilizando metamateriales se observa un efecto interesante y es conocido como la inversión de efecto doppler tal que la frecuencia de las ondas disminuye en lugar de aumentar al acercarse la fuente. Uno de los primeros ámbitos donde se empezó a aplicar con éxito las tecnologías de metamateriales fue el de los dispositivos y componentes que forman parte de los sistemas de RF: antenas, filtros, amplificadores, etc. La introducción de las técnicas de metamateriales en el diseño de estos componentes ha permitido obtener importantes mejoras en dichos dispositivos, así como desarrollar nuevos tipos de componentes. Los sistemas de radiofrecuencia constituyen, una parte esencial de los equipos y plataformas militares, proporcionando capacidades militares consideradas críticas: comunicaciones tácticas inalámbricas, detección a larga distancia de objetivos y vigilancia 24h mediante radar, guiado de proyectiles, obtención de inteligencia, etc. En los próximos años se espera que los sistemas de RF sigan desempeñando un papel de primer orden en los distintos escenarios operativos, mejorando las capacidades actuales y proporcionando nuevas capacidades (como, por ejemplo, las armas de energía dirigida de radiofrecuencia) [4] .

La diferencia principal entre los materiales y metamateriales es que en los primeros sus propiedades dependen de su composición, es decir, que dependen de los átomos y moléculas que los forman. En cambio las propiedades de los metamateriales dependen más de su estructura que de su composición, así que dependiendo de la distribución de los materiales que conforman a un metamaterial, será el comportamiento de la luz cuando los atravieza.

Los metamateriales tienen propiedades ópticas fascinantes, ya que pueden retrasar la luz hasta pararla. Se ha logrado por primera vez atrapar la luz de un arcoíris en el rango de frecuencias visible, de 457 a 633 nm [5]. Este nuevo dispositivo fue fabricado por los físicos de las universidades de Towson y Purdue, EEUU, que consta de una lente convexa de cristal recubierta de ambos lados con una película de oro. La luz es almacenada en la capa de aire que queda en medio. En estos lugares se almacena la luz (momentáneamente), la posición donde se almacena la luz depende de su color. De esta forma se lograría parar la luz de un arcoíris y atraparlo en el dispositivo.

Otros dispositivos que han dado pauta a la posibilidad de detener la luz son cristales fotónicos unidimensionales contruidos con capas alternadas de metales y dieléctricos en donde la luz puede ser atrapada gracias al cambio de signo de la constante dieléctrica en la interface metal–dieléctrica, donde los espesores de las losas metálicas aumentan linealmente y cumplen con la condición $\epsilon_a d_a + \epsilon_b d_b = 0$ donde d_a y d_b representan los anchos de las películas del metal y del dieléctrico respectivamente y ϵ_a , ϵ_b las permitividades dieléctricas correspondientes. La diferencia de grosores de los periodos del metal ofrecen diferentes longitudes de onda de corte. Cuando se construye una estructura de este tipo

donde los grosores del metal aumentan linealmente, la luz de diferentes longitudes de onda se localiza en diversas posiciones en el espacio. Esto es conocido como el *arcoíris atrapado* de almacenamiento de la luz [5]. Como una extensión a este fenómeno resulta un objeto interesante de estudio la construcción de un cristal fotónico unidimensional compuestos de capas alternadas de dieléctricos y metamateriales, dado que los metamateriales tienen la característica de que para ciertas regiones de frecuencia el índice de refracción es negativo es posible que se cumpla con la condición $n_a d_a + n_b d_b = 0$ siendo n_a y n_b los índices de refracción de los dos medios.

En esta tesis se pretende determinar el retraso que tiene la luz en una estructura de metamaterial-dieléctrico, esto es, se analizará bajo que circunstancias es posible atrapar la luz. Para ello se calculará mediante el método de la fase estacionaria el tiempo de tránsito de la luz, en la estructura periódica de capas alternadas de metamaterial y dieléctrico y se harán las comparaciones con estructuras dieléctrico-metálicas, por otra parte se analizarán los casos periodicos, con aquellas estructuras donde la capa de metamaterial crece uniformemente.

Para lograr estos objetivos la tesis se desarrolla de la siguiente manera: en el primer capítulo se describen los metamateriales, su estructura, composición, propiedades y aplicaciones. En el segundo capítulo se presenta el desarrollo teórico que lleva a establecer las ecuaciones que determinarán los tiempos de tránsito, esto es, partiendo de las ecuaciones de Maxwell se construye la matriz de transferencia que nos permite calcular los coeficientes de transmisión y reflexión, necesarios para los cálculos del tiempo de fase. En el tercer capítulo se presentan los resultados así como su discusión, finalmente se dan como capítulos aparte las conclusiones y la bibliografía.

Capítulo 1

METAMATERIALES

1.1. Definición y características de un metamaterial

1.1.1. Definición e historia

Los metamateriales son también conocidos como: materiales izquierdos ó materiales de índice de refracción negativo. El término de metamaterial fue creado por Rodger M. Walson de la Universidad de Texas en Austin en 1999[6]. El prefijo *meta* ($\mu\xi\tau\alpha$ en griego) significa "más allá", así que en este sentido el nombre "Metamateriales" significa los sistemas que están más allá de los materiales convencionales. La palabra "*Metamaterial*" apareció por primera vez en la literatura en 2000 cuando Smith publicó su artículo semanal sobre un material estructurado con permeabilidad y permitividad negativa en el rango de frecuencias de las microondas [8].

J. B. Pendry fue el primero en teorizar una forma práctica de hacer un metamaterial izquierdo (LHM). Izquierdo en este contexto significa un material en el que la *regla de la mano derecha* no es obedecida, lo que permite que una onda electromagnética transmita energía (con una velocidad de grupo) en la dirección opuesta a su velocidad de fase. La idea inicial de J. B. Pendry, era que una distribución de cables metálicos alineados a lo largo de la dirección de propagación de la onda dan lugar a una permitividad efectiva negativa ($\varepsilon < 0$). Sin embargo, existen materiales naturales (como Ferroeléctricos) con permitividad negativa: el reto era construir un material que tuviera para el mismo rango de frecuencias una permeabilidad negativa ($\mu < 0$). En 1999, Pendry demostró que un anillo (en **C**) con el eje a lo largo de la dirección de propagación podría proporcionar esa permeabilidad negativa. De esa manera, una distribución periódica de esos cables y anillos podía dar lugar a un índice de refracción efectivo negativo [10] [11].

Los metamateriales se definen en sentido amplio como estructuras artificiales, homogéneas desde el punto de vista electromagnético, que exhiben propiedades físicas que no están presentes en la naturaleza. Según el Instituto Europeo Virtual para Materiales Electromagnéticos Artificiales y Metamateriales son *una disposición artificial de elementos estructurales, diseñada para conseguir propiedades electromagnéticas ventajosas e inusuales*. Sólo se pueden obtener artificialmente en laboratorios por medio de una serie de métodos de fabricación y se caracterizan por tener unas propiedades macroscópicas

CAPÍTULO 1. METAMATERIALES

1.1. DEFINICIÓN Y CARACTERÍSTICAS DE UN METAMATERIAL

distintas a las de sus materiales constituyentes básicos, las cuales dependen de su estructura, normalmente ordenada, y poco de su composición [4].

Los metamateriales poseen capacidades extraordinarias para desviar las ondas electromagnéticas. Mientras que todos los materiales encontrados en la naturaleza tienen un índice de refracción positivo (el índice de refracción es una medida de cuánto se desvían las ondas electromagnéticas al pasar de un medio a otro), los metamateriales presentan un índice de refracción negativo, lo que implica que las ondas incidentes se desvíen hacia el otro lado de la perpendicular a la superficie *normal* que separa los medios. Por este motivo, también se les denomina como materiales *izquierdos*. Esto se debe a que los metamateriales tienen simultáneamente una permitividad eléctrica (ϵ) y una permeabilidad magnética (μ) negativas, por lo que el índice de refracción, n , toma un valor negativo [4].

1.1.2. Propiedades

Un metamaterial cumple con varias propiedades electromagnéticas inusuales, estas propiedades provienen del diseño y de la forma en la que se distribuyen y estructuran los componentes con los que se realiza el metamaterial. Las propiedades de los metamateriales son principalmente debido a la arquitectura celular. Se pueden diseñar materiales con características no observadas en los materiales que existen en la naturaleza, esto a partir de que las celdas unitarias que definan su estructura tengan propiedades específicas de tal manera que den una respuesta efectiva. Este es la mayor ventaja de los metamateriales[6].

Refracción negativa: Ley de Snell inversa. La respuesta electromagnética de un material se caracteriza por los parámetros macroscópicos que provienen de una respuesta efectiva dada por la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética. Valores negativos en ambos parámetros para un determinado rango de frecuencias producen un índice de refracción negativo.

El cambio de signo en el índice de refracción afecta de manera directa a la ley de Snell. Este fenómeno, supone la intervención de dos medios distintos. El ángulo de refracción (ley de Snell de refracción) se invierte con respecto a la situación convencional cuando una onda electromagnética cruza la interfase entre dos medios que poseen signos opuestos en sus índices de refracción. El ángulo de reflexión, por otra parte, permanece inalterado, ya que sólo afecta la propagación dentro de un medio.

Una expresión general de la ley de Snell teniendo en cuenta la existencia de medios con índices negativos se puede escribir como:

$$s_1|n_1| \cos \theta_1 = s_2|n_2| \cos \theta_2 \quad (1.1)$$

en la que los subíndices numéricos hacen referencia a cada uno de los distintos medios, s representa el signo del tipo de medio y θ los ángulos de incidencia y refracción (los índices numéricos se asignan dependiendo de la relación del medio con el sentido de propagación de la onda). Para dar una idea más gráfica del comportamiento de un material izquierdo,

CAPÍTULO 1. METAMATERIALES

1.1. DEFINICIÓN Y CARACTERÍSTICAS DE UN METAMATERIAL

se podría decir que si el agua tuviese un índice de refracción negativo, un pez que estuviese nadando, parecería estar haciéndolo en el aire por encima de la superficie del agua. En la figura 1.1 vemos otro ejemplo de cómo se vería un objeto al introducirlo en agua que tuviera un índice de refracción negativo [4] [3].

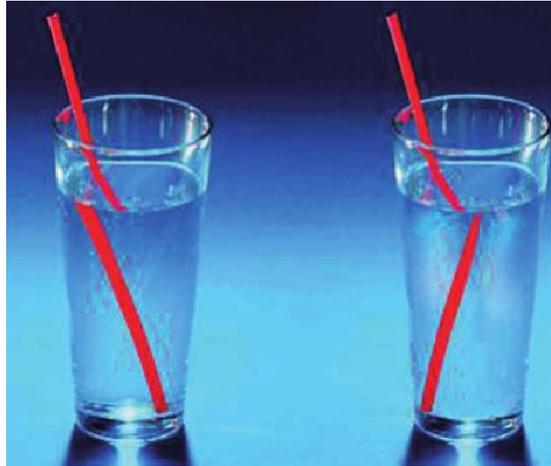


Figura 1.1: El agua con índice de refracción negativo si se introduce un popote se vería doblar en dirección contraria a la norma

Inversión del efecto Doppler: El efecto Doppler es el cambio aparente en la frecuencia de una onda que percibe un observador que se encuentra en movimiento relativo con respecto a la fuente de dicha onda. El observador distingue los cambios de frecuencia fijando una referencia de fase definida. La frecuencia percibida por el observador se puede expresar como $\vec{w} = \vec{w}_0 + \vec{k}\vec{v}$, siendo w_0 la frecuencia real, \vec{k} el vector de onda y \vec{v} la velocidad de la fuente con respecto al detector. El signo de la velocidad es positivo cuando la fuente se aproxima al observador. En este caso, dado que el vector de onda posee la misma dirección y sentido, la frecuencia percibida es más alta. Lo contrario sucede cuando la fuente se aleja del observador.

Sin embargo, cuando las ondas se propagan a través de un medio que posee un índice de refracción negativo, el vector de onda cambia su signo con respecto a la situación considerada normal, alterando el resultado percibido por parte del observador. Es decir, los vectores de onda y velocidad son antiparalelos cuando la fuente se aproxima al observador. La figura 1.2 ilustra la diferencia existente entre ambos casos. Los metamateriales exhiben esta propiedad de invertir el efecto Doppler como consecuencia del cambio de signo relativo que se produce entre el vector de propagación y el vector de onda [4].

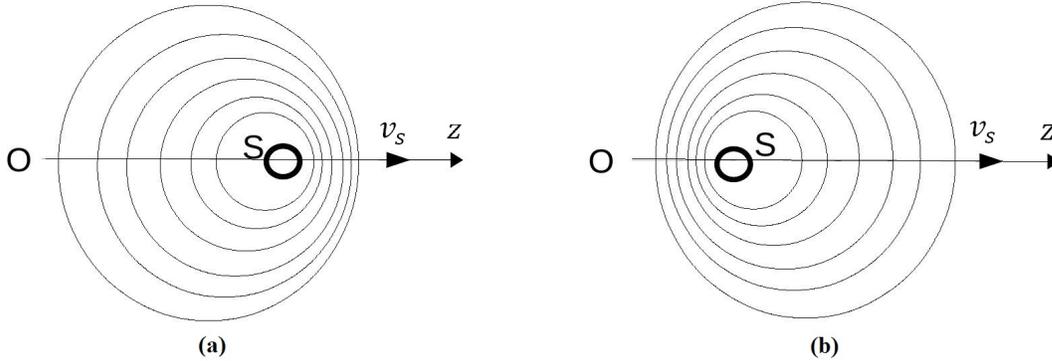


Figura 1.2: Efecto Doppler en (a) un material convencional y (b) un material izquierdo

Inversión del efecto Cherenkov: La radiación Cherenkov es la radiación proveniente de la energía electromagnética emitida por una partícula cargada que cruza un aislante a una velocidad más grande que la correspondiente a la velocidad de la luz en el medio. Esta radiación electromagnética se emite dentro de un cono, con ángulos de salida originados en la partícula cargada. El ángulo del cono α corresponde a la condición de fotones emitidos que interfieren constructivamente, y puede determinarse mediante la relación $\cos \alpha = \frac{1}{\beta}$, donde β es la velocidad de la partícula normalizada por la velocidad de la luz en el vacío y n es el índice de refracción. Dado que el ángulo de salida depende del signo del índice de refracción, el uso de metamateriales puede invertir el resultado. Concretamente, la radiación Cherenkov viaja hacia atrás (en sentido contrario a la dirección de propagación) en un medio o material de índice negativo.

El fenómeno de radiación Cherenkov es similar al fenómeno de fugas de radiación presente en algunos tipos de antenas [4].

Una característica adicional importante en metamateriales es su homogeneidad a gran escala. Este problema está conectado con el hecho de que las propiedades electromagnéticas de los medios de comunicación en general se asignan con referencia a una determinada frecuencia de la radiación electromagnética [9].

1.2. Aplicaciones

A tan solo 12 años de haberse creado los primeros metamateriales, su campo de investigación y aplicación ha crecido rápidamente, con la participación de investigadores en diversas disciplinas como la física básica, la óptica, ciencia de materiales, la mecánica y la ingeniería eléctrica. No olvidando que estos surgen del campo del electromagnetismo [8].

Una de las aplicaciones más conocida es el uso de los metamateriales como medios para crear la invisibilidad, este efecto se logra al refractar la luz en otra dirección lo que tiene como consecuencia el no ser visto.

En la óptica una aplicación atractiva es crear una superlente, que puede ser ampliamente utilizada en el tratamiento de imágenes médicas de super-resolución, formación de imágenes ópticas. La primer superlente fue creada en el 2004 para el régimen de las microondas, y mostró tener una resolución tres veces mejor que el límite de difracción. Más tarde, Fang propuso las primeras superlentes ópticas usando una película delgada de plata lo que rompe el límite de difracción y de esta manera es posible producir una super-resolución de imágenes [6] [7].

Los metamateriales prometen no sólo mejorar las prestaciones de un gran número de dispositivos y sistemas en los campos de la electrónica y de la optoelectrónica, sino introducir cambios verdaderamente revolucionarios en un gran número de sectores relacionados con estas tecnologías. De esta manera los metamateriales se diseñan teóricamente para controlar el camino de propagación de todo tipo de ondas (principalmente electromagnéticas, pero también acústicas, sísmicas, etc.). Los metamateriales ya están siendo utilizados en teléfonos móviles como el representado en la figura 1.3. Otras aplicaciones como la invisibilidad se encuentran todavía lejos del alcance de la tecnología actual, siendo necesarios grandes avances en el área de la nanotecnología para conseguir fabricar metamateriales con las características requeridas. En la actualidad, la investigación sobre los efectos de la invisibilidad u ocultamiento de objetos con metamateriales es extraordinariamente intensa debido a las posibles aplicaciones de estos [4].



Figura 1.3: El teléfono móvil de la figura (a) (modelo BL40 de la marca LG) fue el primer dispositivo de este tipo en integrar una antena basada en metamateriales (modelo MTM-C de la empresa norteamericana Rayspan) (b). Esta tecnología permite reducir a una quinta parte el tamaño de antena que sería necesario en caso de utilizar tecnología convencional de antenas impresas.

1.3. Tipos de metamateriales

1.3.1. Dieléctricos artificiales

Los dieléctricos artificiales son estructuras heterogéneas construidas a una escala de una determinada longitud de onda de tal manera que se pueda controlar la permitividad efectiva de la macroestructura. Winston E. Kock demostró experimentalmente que un arreglo de placas metálicas planas, con periodicidad espacial $p \geq \frac{\lambda}{2}$, podría formar el patrón del haz de una antena en el mismo sentido que una lente dieléctrica homogénea

CAPÍTULO 1. METAMATERIALES

1.3. TIPOS DE METAMATERIALES

cuyo índice de refracción n sea menor que la unidad: $0 \leq n \leq 1$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2p}\right)^2} \quad (1.2)$$

Este resultado se obtiene teniendo en cuenta que cuando un campo eléctrico E es paralelo a las placas, el modo fundamental de la guía de ondas paralela a las placas tiene una velocidad de fase mayor que la velocidad de la luz en el vacío. Desde que se trabaja con dispositivos en el rango de longitudes de onda milimétricas y centimétricas, la investigación de dieléctricos artificiales en las microondas y frecuencias de radio ha aumentado [4].

1.3.2. Materiales magnéticos artificiales

La permitividad eléctrica ε de un dispositivo se puede controlar mediante la elección del material en función de la frecuencia de excitación ω . Por ejemplo, los cristales de silicio exhiben permitividades positivas a frecuencias ópticas y se utilizan en una amplia variedad de dispositivos, como microscopios ópticos, telescopios o simplemente lentes de gafas comerciales. Los metales nobles, que se comportan como gases de electrones libres, tienen una permitividad negativa a frecuencias de excitación debajo de su frecuencia intrínseca eléctrica de plasma ω_{pe} . Para obtener permitividad negativa sin que se tengan pérdidas de transmisión de potencia elevadas a través de metales opacos, varios grupos de investigación utilizan arreglos de hilos finos.

Mientras que los compuestos eléctricamente sensibles son relativamente fáciles de encontrar, los materiales magnéticos con permeabilidad magnética μ que se encuentran en la naturaleza son mucho más raros y consisten esencialmente en ferritas (materiales ferromagnéticos) excitados a una frecuencia de plasma magnética ω_{pm} . Además, no se conocen materiales con propiedades magnéticas en frecuencias de terahertz o mayores. Por este motivo, obtener materiales con la permeabilidad magnética a altas frecuencias es muy complicado y requiere estructuras diseñadas específicamente para generar una respuesta magnética. En el libro *Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena* de John Pendry sugirió el uso de resonadores de anillos abiertos (Split Rings Resonators SRRs), básicamente de tamaño de longitudes de onda electromagnéticas del orden de milímetros, para generar una permeabilidad magnética efectiva. En estas estructuras, cuando el campo electromagnético incidente tiene una polarización perpendicular al plano del arreglo de anillos, se inducen corrientes resonantes en lazo que emulan a un dipolo magnético [2] [4].

1.3.3. Materiales quirales

En los materiales quirales la geometría de la estructura interna produce una respuesta macroscópica y se observa la rotación de la polarización del vector de propagación. Los materiales con una importante capacidad de rotación o dicroísmo circular se utilizan para la fabricación de dispositivos optoelectrónicos, como polarizadores circulares en aplicaciones como la fotografía. Las estructuras giroscópicas en los materiales quirales se están investigando como otra alternativa para obtener materiales NRI (negative refractive index). La quiralidad se obtiene mediante estructuras helicoidales y geometrías retorcidas.

Se han demostrado pequeños valores NRI en las microondas mediante materiales quirales basados en estructuras helicoidales. También se ha realizado el mismo experimento con estructuras más pequeñas en el visible y el infrarrojo, y en estas longitudes de onda se ha demostrado una significativa polarización circular pero no se ha obtenido refracción negativa [4].

1.3.4. Materiales con recubrimiento

Los materiales con recubrimiento se investigaron en las décadas de los 80 y de los 90 y se concluyó teóricamente que los objetos invisibles no pueden existir. No se consideraron otras opciones hasta que aparecieron dos artículos en la revista Science en 2006, lo que implicó que se reabrieran las investigaciones. Ambos artículos explicaban de una manera similar cómo hacer un objeto invisible a la luz incidente: el objeto debe tener un índice de refracción con un gradiente de distribución de tal manera que todos los rayos incidentes sean guiados alrededor de su superficie y recuperen su trazado original en el otro extremo. La figura 1.4 muestra un objeto al que se le ha puesto un recubrimiento de metamaterial que produce una desviación de la luz de tal suerte que el objeto en el centro no se le puede ver [4].

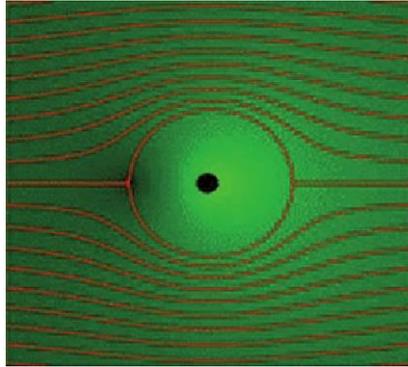


Figura 1.4: Rayos de luz atravesando objetos invisibles.

1.4. Modelo de Gupta

Las propiedades inusuales de las ondas electromagnéticas en un medio capaz de poseer simultáneamente constante dieléctrica negativa ϵ y la permeabilidad magnética negativa μ fueron descubiertos por Veselago a finales de los sesenta. Estos medios son referidos como materiales de mano izquierda LH.

A continuación se muestra el modelo de Gupta que está descrito por las siguientes ecuaciones, este modelo se deriva de los modelos propuestos por Pendry .

$$\epsilon(\omega) = \frac{(\omega^2 - \omega_p^2)}{\omega^2}, \quad \mu(\omega) = \frac{(\omega^2 - \omega_b^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)} \quad (1.3)$$

donde $\omega_p = 2\pi 12GHz$, $\omega_b = 2\pi 6GHz$, $\omega_0 = 2\pi 4GHz$. El índice de refracción será positivo para $\omega > \omega_p$ y negativo para $\omega_0 < \omega < \omega_b$. En otros rangos de ω , el índice de refracción

CAPÍTULO 1. METAMATERIALES

1.4. MODELO DE GUPTA

será puramente imaginario y las ondas correspondientes representan modos evanescentes. La figura 1.5 muestra la permeabilidad magnética y la permitividad eléctrica de acuerdo al modelo usado por Gupta, se observa el pequeño rango de frecuencias en donde ambas funciones son negativas [12] [13] [14].

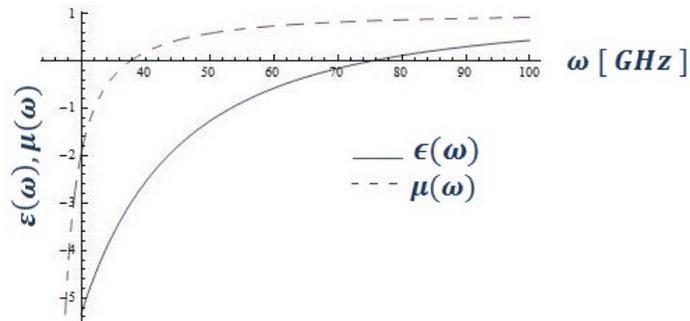


Figura 1.5: Grafica de $\epsilon(\omega)$ y $\mu(\omega)$ modelo de Gupta .

Capítulo 2

DESARROLLO TEORICO

2.1. Ecuaciones de Maxwell

La Teoría Electromagnética del físico escocés James Clerk Maxwell (1831-1879) es una de las obras intelectuales más importantes en la historia de las ciencias. Su aparición se inicia en 1861 (*On Physical Lines of Force*) y se completa en un tercer trabajo en 1865 (*A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*). Para esta época ya se conocían varias leyes individuales sobre el comportamiento de la electricidad y el magnetismo, pero no se tenía una teoría formal que explicara los fenómenos de naturaleza electromagnética.

Maxwell supo seleccionar cuatro fenómenos básicos fundamentales como principios, con los cuales armó un modelo físico matemático capaz de explicar la totalidad de las leyes en esa disciplina y predecir fenómenos desconocidos. Esta teoría es considerada el nacimiento de la Física Moderna y las consecuencias incidieron en todas las ramas de la física, además de conformar un modelo completo para los fenómenos clásicos del electromagnetismo, explicó la óptica ondulatoria y, en parte, la naturaleza de la luz. Predijo la existencia de ondas electromagnéticas y demostró que el campo es un ente físico real e independiente de la materia.

Cabe señalar que la Teoría de Relatividad Especial está implícita en las ecuaciones de Maxwell pues ellas se cumplen con rigor en todos los sistemas inerciales, lo que permite deducir naturalmente las Transformaciones de Lorentz como relaciones únicas de transformación de coordenadas entre sistemas inerciales.

La formulación moderna del electromagnetismo fue elaborada en 1884 por el científico Oliver Heaviside (1850-1925), para lo cual estructuró el análisis vectorial y replanteó la formulación de Maxwell, llevándola a la forma que trata la bibliografía actual mediante ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

CAPÍTULO 2. DESARROLLO TEORICO

2.1. ECUACIONES DE MAXWELL

2.1.1. Fundamentos de las ecuaciones de Maxwell

Los cuatro fenómenos básicos tomados como postulados del electromagnetismo son:

1. Ley de Faraday sobre la fuerza electromotriz inducida

Esta ley fue descubierta por Michael Faraday en 1831, quien se desempeñaba como encargado del pañol del laboratorio (ordenanza) de la *Royal Institution* de Inglaterra, usando un diseño muy simple, como muestra la figura:

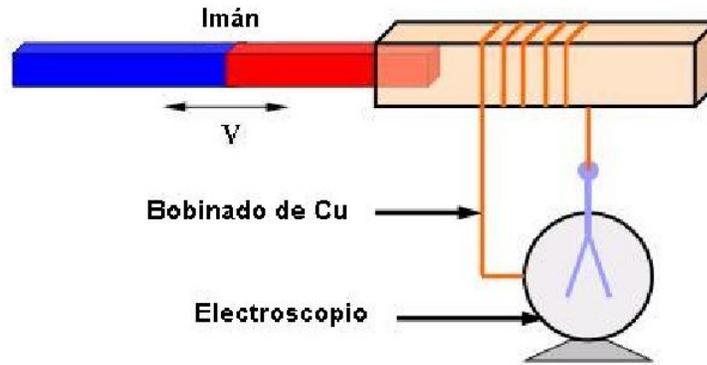


Figura 2.1: Dispositivo de Faraday

Al mover el imán dentro del cartón, que tenía enrollado un alambre de cobre, las láminas metálicas del electroscopio se abrían, indicando la acumulación de cargas eléctricas en ambas hojuelas como consecuencia de una corriente eléctrica por el alambre de cobre, simultánea con el movimiento. Esto indica que en el conductor de cobre existe un campo eléctrico, condición que sólo se cumple cuando hay movimiento relativo entre el imán y el conductor.

De esta manera Faraday descubrió que la electricidad y el magnetismo se relacionaban funcionalmente si los campos eran variables en el tiempo. La forma matemática de la ley de Faraday es:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} \quad (2.1)$$

El primer miembro (circulación del campo eléctrico) es la definición de la denominada fuerza electromotriz inducida en el conductor, siendo C la curva definida por el alambre de cobre. El segundo miembro es la variación temporal (debida al movimiento del imán) del flujo magnético a través de la superficie que tiene por borde a la curva C.

2. Ley de Gauss-Faraday sobre inducción eléctrica

Los experimentos de inducción eléctrica realizados por Faraday (antes del año 1831) mostraron que si una carga Q es encerrada por un recipiente conductor inicialmente neutro, pero sin establecer contacto directo con el cuerpo cargado (ver figura 2.2), el recipiente conductor reordena sus cargas (fenómeno de inducción) de tal manera que las superficies interior y exterior del recipiente quedan cargadas con signo opuesto.

CAPÍTULO 2. DESARROLLO TEORICO

2.1. ECUACIONES DE MAXWELL

La carga total inducida en cada superficie resulta de magnitud exactamente igual a la de la carga encerrada.

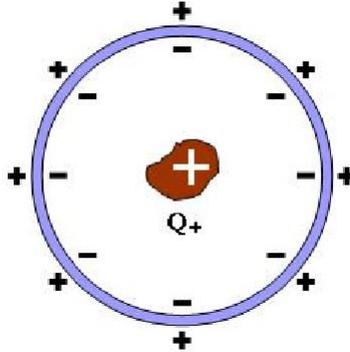


Figura 2.2: Fenómeno de inducción

Los variados experimentos de Faraday sobre inducción permitieron comprender que los medios conductores poseen una cantidad inmensa de cargas libres en su interior que pueden reordenarse, y mostraron que la carga neta de un conductor permanece constante ante fenómenos inductivos, confirmando la conservación de la carga. Así como también se verificó que para cuerpos en reposo el interior de los conductores es neutro, sin campo eléctrico, aún en presencia de cuerpos externos cargados.

La expresión matemática de esta ley fue dada por Gauss y reformulada por Heaviside con la actual forma vectorial, utilizando el campo de *inducción* \vec{D} , que fuera definido y medido por Faraday, cuyo módulo en un punto cualquiera del espacio representa la densidad de carga inducida máxima que podría obtenerse si se pusiera una plaquita metálica (transversal al campo).

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{a} = \int \int \int_V \rho dV \quad (2.2)$$

El primer miembro es el flujo del campo \vec{D} a través de cualquier superficie que encierre la carga Q , mientras que el segundo miembro representa la carga total encerrada.

3. La ley de Ampere

Hasta el año 1820 se pensaba que la electricidad y el magnetismo eran fenómenos no relacionados. En una conferencia que daba el dinamarqués Oersted (para conseguir fondos para sus proyectos), justamente mientras intentaba mostrar dicha independencia, posó una brújula sobre un conductor con corriente provocando que la aguja se orientara de manera transversal al conductor. Así, de casualidad, descubrió que una corriente eléctrica está rodeada por un campo magnético (ver figura 2.3).

CAPÍTULO 2. DESARROLLO TEORICO
2.1. ECUACIONES DE MAXWELL

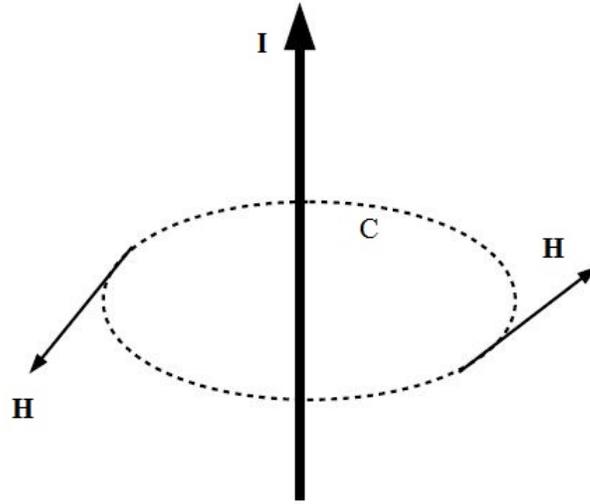


Figura 2.3: Ley de Ampere

Luego, Oersted repitió el experimento ante sus alumnos y, aunque no logró dar una explicación satisfactoria, lo publicó. Fue el físico matemático francés A. Ampere (1775-1836) quien interpretó y dio la expresión matemática del fenómeno (que lleva su nombre), además de proponer a las corrientes como única *causa* del magnetismo, propuesta conocida como la Hipótesis de Ampere.

Hoy se sabe que las corrientes eléctricas y el campo magnético asociado no son causa y efecto ya que ambos, corriente y campo, aparecen simultáneamente con el movimiento de cargas. Matemáticamente la ley de Ampere se expresa:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = I \quad (2.3)$$

El primer miembro es la circulación de \vec{H} , siendo C cualquier curva cerrada que rodee a la corriente I. Esta ley es válida sólo para corrientes constantes. La ley de Ampere puede ser expresada usando el vector densidad de corriente, cuya relación con la corriente está dada por:

$$I = \int \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a} \quad (2.4)$$

Siendo S la sección del conductor donde circula la corriente. Dado que el contorno C de la ley de Ampere encierra la corriente y que fuera del conductor el vector \vec{J} es nulo (notar que \vec{J} no depende del tiempo), podemos extender el recinto de integración hasta el borde C, quedando:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a} \quad (2.5)$$

CAPÍTULO 2. DESARROLLO TEORICO

2.1. ECUACIONES DE MAXWELL

4. No existencia de monopolos magnéticos

La experiencia mostró que no existen polos magnéticos aislados. Si un imán se parte al medio se obtienen dos imanes de menor intensidad. Esto muestra una particular propiedad del campo magnético (\vec{B}), cuyas líneas de fuerza son necesariamente cerradas pues no tienen ni fuentes ni sumideros.

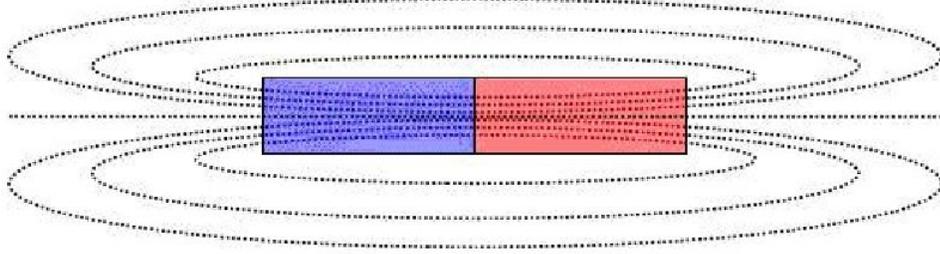


Figura 2.4: Líneas de fuerza de \vec{B}

2.1.2. Obtención de las ecuaciones de Maxwell

Dado que las expresiones anteriores están dadas por integrales y no son válidas en un punto ya que describen un fenómeno extenso, por lo cual no siempre es posible encontrar una relación funcional válida punto a punto entre las magnitudes que intervienen en una ecuación integral.

Así que para pasar estas ecuaciones a su forma diferencial se hace uso del procedimiento que realizó Heaviside utilizando dos teoremas del análisis vectorial:

- Teorema de Gauss

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{a} = \int \int \int_V \nabla \cdot \vec{A} \cdot dV \quad (2.6)$$

- Teorema de Stokes

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int \int_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{a} \quad (2.7)$$

Así que partiendo de la Ley de Faraday sobre la fuerza electromotriz inducida, usando el Teorema de Stokes y realizando los cálculos apropiados se obtiene la primera ecuación de Maxwell.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.8)$$

Esta ecuación muestra que en un punto cualquiera pueden coexistir \vec{E} y \vec{B} , con sus formas funcionales relacionadas por la ecuación dada.

CAPÍTULO 2. DESARROLLO TEORICO

2.1. ECUACIONES DE MAXWELL

Ahora partiendo de la ley de Gauss-Faraday sobre inducción eléctrica y usando el teorema de Gauss se obtiene la segunda ecuación de Maxwell.

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.9)$$

Esta ley escalar nos indica que las fuentes del campo \vec{D} son las cargas positivas y los sumideros las cargas negativas. El campo eléctrico asociado a una carga nace en ella (si es positiva) o muere en ella (si es negativa).

Para obtener la tercera ecuación de Maxwell se parte de la ley de Ampere y se usa el teorema de Stokes y la segunda ecuación de Maxwell obteniendo:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.10)$$

Finalmente para obtener la cuarta ecuación de Maxwell se acepta que las líneas de fuerza del campo magnético son cerradas, hecho verificado experimentalmente, la expresión matemática es inmediata pues el campo magnético \vec{B} no tiene fuentes ni sumideros. En consecuencia, su divergencia es nula.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.11)$$

En resumen las cuatro ecuaciones de Maxwell, descritas por Heaviside, son consideradas los Principios de la Teoría Electromagnética, que corresponden a cuatro fenómenos básicos que no tienen demostración teórica. Es importante recalcar que de estas ecuaciones se deducen todas las leyes conocidas del electromagnetismo, conformando una teoría clásica completa [15][16].

Ellas son:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde:

E: Campo eléctrico existente en el espacio, debido a las cargas

B: Campo de inducción magnética, debido a las corrientes

H: Campo magnético que resume los efectos magnéticos de la materia

D: Campo de desplazamiento que resume los efectos eléctricos de la materia

J: Densidad de corriente eléctrica

ρ : Densidad de carga eléctrica

con

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (2.13)$$

y

μ : permeabilidad magnética

ϵ : permitividad eléctrica

2.2. Método de la matriz de transferencia

La forma en que una onda se propaga al atravesar una interfase obedece a la ley de refracción, y el cálculo de la transmisión y la reflexión de dicha onda se resuelve aplicando las Ecuaciones de Maxwell y las condiciones de frontera en forma adecuada, dado que se va a estudiar una superred compuesta de dos tipos de materiales, para calcular los coeficientes de transmisión ó reflexión, se va hacer uso de el método de la matriz de transferencia (MT Matriz de Transferencia), se hará el desarrollo para dos casos, cuando la luz incide sobre las interfaces con polarización Transversal Magnética (TM o polarización P) y cuando la radiación incide con polarización transversal eléctrica (TE o polarización S).

El Metodo de MT permite relacionar el campo eléctrico (magnético) a lo largo de toda la estructura, donde ésta se construye repitiendo una celda unitaria n veces, el Método de MT se realizará para dos casos especiales de polarización conocidas como Polarización P y Polarización S para hallar los coeficientes de transmisión y reflexión.

2.2.1. Ecuación de onda

Partiendo de la Ecuaciones de Maxwell para un medio isotrópico $\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E}$, con permeabilidad $\mu=1$ medio no magnetico y suponiendo que no existen cargas o corrientes libres externas en la región de interés es decir que se toma $\rho=0$ y $\mathbf{J}=0$. Así que en este caso las Ecuaciones de Maxwell (Ecuaciones 2.12) nos quedan como sigue:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.14)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.15)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.16)$$

$$\nabla \times \vec{B} = -\frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.17)$$

Combinando las cuatro ecuaciones mencionadas anteriormente se va a obtener la ecuación de onda. Ahora aplicando el rotacional a la ecuación 2.16 se obtiene que.

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \nabla \times \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.18)$$

recordando que $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ entonces se tiene que:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - (\nabla \cdot \nabla)\vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} \quad (2.19)$$

CAPÍTULO 2. DESARROLLO TEORICO

2.2. MÉTODO DE LA MATRIZ DE TRANSFERENCIA

reemplazando la ultima parte de la igualdad anterior en la ecuación (2.18) y sustituyendo (2.17) se obtiene:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.20)$$

se define $v^2 = \frac{c^2}{\mu\epsilon}$ para obtener finalmente la ecuación de onda

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.21)$$

Las soluciones a esta ecuación son de la forma

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \quad (2.22)$$

donde $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon\mu$

Esta es la ecuación de onda para el campo eléctrico en un medio lineal, homogéneo e isotrópico. Análogamente se obtiene la ecuación de onda para el campo magnético aplicando el rotacional a la ecuación (2.17)

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.23)$$

con soluciones de la forma

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \quad (2.24)$$

2.2.2. Polarización P (Polarización Transversal Magnética)

Se considera la propagación de ondas en una superred creciendo en en dirección z y las capas son paralelas al plano xy , con periodicidad en una dimensión formada por un medio dieléctrico homogéneo alternandose con metamaterial que va creciendo exponencialmente a una unidad, libre de cargas y corriente donde no hay carga ni corrientes sobre la superficie ($\rho = 0$ y $\mathbf{J} = 0$), con incidencia normal, como se muestra acontinuación.[17][18]

CAPÍTULO 2. DESARROLLO TEORICO
2.2. MÉTODO DE LA MATRIZ DE TRANSFERENCIA

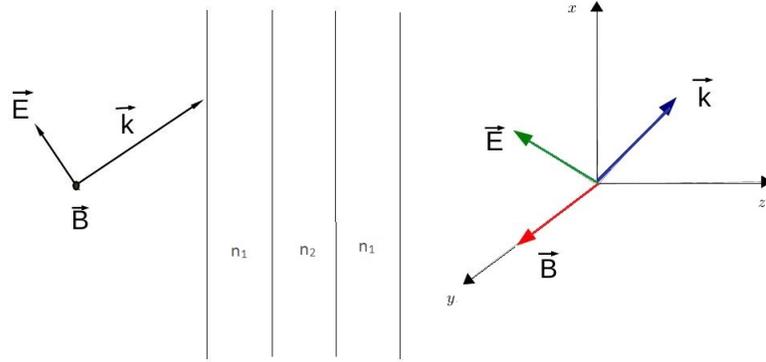


Figura 2.5: Polarización P

de la figura es facil ver que:

$$\vec{k} = (k_x, 0, k_z) \quad (2.25)$$

$$\vec{E} = (E_x, 0, E_z) \quad (2.26)$$

$$\vec{B} = (0, B_y, 0) \quad (2.27)$$

Las ecuaciones del campo eléctrico y del campo magnético quedan de la siguiente forma:

$$\vec{E} = E_x e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{i} + E_z e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{k} \quad (2.28)$$

$$\vec{B} = B e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{j}$$

para relacionar las componentes del campo eléctrico \mathbf{E} se tiene que

$$\nabla \cdot \vec{E} = ik_x E_x e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} + ik_z E_z e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} = E_x e^{iA} + E_z e^{iA} = 0 \quad (2.29)$$

Ahora se calcula la amplitud del campo eléctrico \mathbf{E}

$$\nabla \cdot \vec{E} = ik_x E_x e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} + ik_z E_z e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} = 0 \quad (2.30)$$

entonces

$$ie^{i(k_x + k_z z - \omega t)} [k_x E_x + k_z E_z] = 0 \quad (2.31)$$

así que se obtiene

$$E_z = -\frac{k_x}{k_z} E_x \quad (2.32)$$

Se calcula la amplitud del campo magnético \mathbf{B} usando. Aplicando el rotacional se tiene

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x e^{iA} & 0 & E_z e^{iA} \end{vmatrix} = -\hat{j} [ik_x E_z e^{iA} - ik_z E_x e^{iA}] \quad (2.33)$$

ahora realizando

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \hat{j} \frac{i}{c} \omega B_y e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (2.34)$$

CAPÍTULO 2. DESARROLLO TEORICO
2.2. MÉTODO DE LA MATRIZ DE TRANSFERENCIA

igualando las ecuaciones (2.33) y (2.34)

$$k_z E_x - k_x E_z = \frac{\omega}{c} B_y \quad (2.35)$$

sustituyendo la ecuación (2.32) se obtiene que

$$E_x \left(\frac{k_z^2 + k_x^2}{k_z} \right) = \frac{\omega}{c} B_y \quad (2.36)$$

Recordando que $k^2 = k_x^2 + k_z^2 = \frac{\mu\epsilon\omega^2}{c^2}$ donde $\mu = 1$, entonces

$$B_y = \frac{\omega\epsilon}{ck_z} E_x \quad (2.37)$$

Se define la impedancia como

$$Y = \frac{\omega\epsilon}{ck_z} \quad (2.38)$$

entonces

$$B_y = Y E_x \quad (2.39)$$

las condiciones de frontera que satisfacen los campos en la interfase son:

$$E_{x+} = E_{x-} \quad y \quad B_{x+} = B_{x-} \quad (2.40)$$

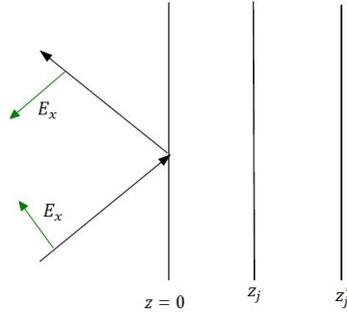


Figura 2.6: Onda incidiendo en la red

Las componentes de las ondas incidentes son :

$$E_{xj} = A_{1j} e^{ik_{zj} z_j} - A_{2j} e^{-ik_{zj} z_j} \quad (2.41)$$

$$B_{yj} = Y_j E_{xj} = Y_j (A_{1j} e^{ik_{zj} z_j} + A_{2j} e^{-ik_{zj} z_j})$$

Se puede escribir de forma matricial

CAPÍTULO 2. DESARROLLO TEORICO
2.2. MÉTODO DE LA MATRIZ DE TRANSFERENCIA

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_{xj} \\ B_{yj} \end{pmatrix}_{z_j} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ Y_j & Y_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{xj} \\ YE_{xj} \end{pmatrix}_{z_j} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ Y_j & Y_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1j}e^{ik_{zj}z_j} \\ A_{2j}e^{-ik_{zj}z_j} \end{pmatrix}_{z_j} \\ &= B_j \begin{pmatrix} e^{ik_{zj}(z_j-z'_j)} & 0 \\ 0 & e^{-ik_{zj}(z_j-z'_j)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1j}e^{ik_{zj}z'_j} \\ A_{2j}e^{-ik_{zj}z'_j} \end{pmatrix}_{z_j} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Llamamos B_j a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ Y & Y \end{pmatrix}_{z_j}$ y, a $d = z_j - z'_j$, se define

$$T(d) = \begin{pmatrix} e^{ik_{zj}d} & 0 \\ 0 & e^{-ik_{zj}d} \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

entonces

$$\begin{pmatrix} E_{xj} \\ YE_{xj} \end{pmatrix}_{z_j} = B_j T(d) \begin{pmatrix} A_{1j}e^{ik_{zj}z'_j} \\ A_{2j}e^{-ik_{zj}z'_j} \end{pmatrix}_{z_j} \quad (2.44)$$

Por otro lado para la frontera en z'_j que es la j -ésima capa se tiene que:

$$\begin{pmatrix} E_{xj} \\ YE_{xj} \end{pmatrix}_{z'_j} = B_j \begin{pmatrix} A_{1j}e^{ik_{zj}z'_j} \\ A_{2j}e^{-ik_{zj}z'_j} \end{pmatrix}_{z_j} \quad (2.45)$$

despejando de la ecuación (2.45) y sustituyendo en (2.44) se obtiene que.

$$\begin{pmatrix} E_{xj} \\ YE_{xj} \end{pmatrix}_{z_j} = B_j T(d) B_j^{-1} \begin{pmatrix} E_{xj} \\ YE_{xj} \end{pmatrix}_{z'_j} \quad (2.46)$$

Ahora se define la matriz $m_j = B_j T(d) B_j^{-1}$ donde m_j es llamada la matriz de transferencia en cada capa. Después de realizar las operaciones correspondientes calculando B_j^{-1} se encuentra que:

$$m_j = \begin{pmatrix} \cos(k_{zj}d) & \frac{i}{Y_j} \sin k_{zj}d \\ iY_j \sin k_{zj}d & \cos k_{zj}d \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

Esta matriz relaciona los campos eléctrico y magnético de la onda incidente entre capas, finalmente la matriz que relaciona la amplitud de la onda incidente con las ondas reflejada y transmitida M resulta del producto de todas las matrices m_j de cada una de las capas por lo que se tiene $M = m_N m_{N-1} \dots m_j \dots m_1$; esto es:

$$\begin{pmatrix} E_{xN} \\ YE_{xN} \end{pmatrix}_{z_n} = M \begin{pmatrix} E_{x0} \\ YE_{x0} \end{pmatrix}_{z=0} \quad (2.48)$$

CAPÍTULO 2. DESARROLLO TEORICO

2.2. MÉTODO DE LA MATRIZ DE TRANSFERENCIA

Para obtener los coeficientes de reflexión y transmisión se considera que la onda incidente esta normalizada, es decir que $A_1 = 1$ y $A_2 = r$ para $z=0$, de las ecuaciones 2.41 obtenemos:

$$E_{x_0}(0) = 1 - r \quad (2.49)$$

$$B_{y_0}(0) = Y_0 E_x = Y_0(1 + r) \quad (2.50)$$

En $z = L$, donde L es la longitud total de la estructura $A_1 = t$ y $A_2 = 0$

$$E_{x_{N+1}}(L) = te^{ik_{z_{N+1}}L} \quad (2.51)$$

$$B_{y_{N+1}}(L) = Y_{N+1}te^{ik_{z_{N+1}}L} \quad (2.52)$$

Sustituyendo en la ecuación 2.48 se tiene la relación matricial :

$$\begin{pmatrix} te^{ik_{N+1}L} \\ tY_{N+1}e^{ik_{N+1}L} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 1 - r \\ Y_0(1 + r) \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

De donde se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$te^{ik_{N+1}L} = m_{11}(1 - r) + m_{12}Y_0(1 + r) \quad (2.54)$$

$$tY_{N+1}e^{ik_{N+1}L} = m_{21}(1 - r) + m_{22}Y_0(1 + r) \quad (2.55)$$

Cuyas soluciones son:

$$t = \frac{(m_{11} - m_{12}Y_0)(m_{21} + m_{22}Y_0) - (m_{11} + m_{12}Y_0)(m_{21} - m_{22}Y_0)}{e^{ik_{N+1}L}[(m_{11} - m_{12}Y_0)Y_{N+1} - (m_{21} - m_{22}Y_0)]} \quad (2.56)$$

$$r = \frac{(m_{11} + m_{12}Y_0)Y_{N+1} - (m_{21} + m_{22}Y_0)}{(m_{11} - m_{12}Y_0)Y_{N+1} - (m_{21} - m_{22}Y_0)} \quad (2.57)$$

Donde t y r son los coeficientes de reflexión y transmisión respectivamente.

2.2.3. Polarizacion S (Polarización Transversal Eléctrica)

Se analiza ahora la propagación de la luz sobre el mismo medio con polarización transversal eléctrica.[17][18]

CAPÍTULO 2. DESARROLLO TEORICO
2.2. MÉTODO DE LA MATRIZ DE TRANSFERENCIA

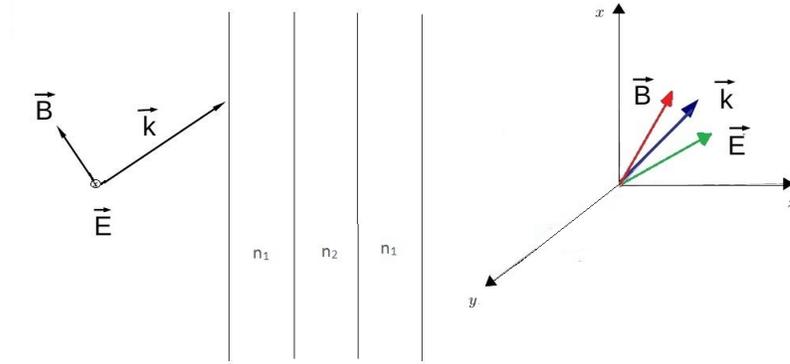


Figura 2.7: Polarización S

Ahora se considera la polarización transversal eléctrica, donde los vectores están dados por:

$$\vec{E} = (0, -E_y, 0) \quad (2.58)$$

$$\vec{B} = (B_x, 0, B_z) \quad (2.59)$$

$$\vec{k} = (k_x, 0, k_z) \quad (2.60)$$

se observa que

$$k = k_x^2 + k_z^2 \quad (2.61)$$

Las ecuaciones del campo eléctrico y magnético estan dadas por:

$$\vec{E} = E_y e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{j} \quad (2.62)$$

$$\vec{B} = B_x e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{i} + B_z e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{k} \quad (2.63)$$

Análogamente realizando las operaciones que se mostraron en la seccion 2.2 se encuentra que:

$$B_z = -\frac{B_x k_x}{k_z} \quad (2.64)$$

Aplicando el rotacional a \vec{B} y realizando operaciones similares y mediante el uso de la ecuación (2.17) se llega a :

$$B_x = Y E_y \quad (2.65)$$

Donde $Y = \frac{k_z c}{\omega \mu}$ es la impedancia.

Una onda incidente se tienen las siguientes componentes tangenciales:

CAPÍTULO 2. DESARROLLO TEORICO
2.2. MÉTODO DE LA MATRIZ DE TRANSFERENCIA

$$E_y = -A_1 e^{ik_z z} - A_2 e^{-ik_z z} \quad (2.66)$$

$$B_x = Y(A_1 e^{ik_z z} - A_2 e^{-ik_z z}) \quad (2.67)$$

Expresado en forma matricial :

$$\begin{pmatrix} E_y \\ B_x \end{pmatrix}_{z_j} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ Y_j & -Y_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 e^{ik_z z} \\ A_2 e^{-ik_z z} \end{pmatrix}_{z_j} = B_j \begin{pmatrix} A_1 e^{ik_z z} \\ A_2 e^{-ik_z z} \end{pmatrix}_{z_j} \quad (2.68)$$

$$(2.69)$$

con

$$B_j = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ Y_j & -Y_j \end{pmatrix}$$

que puede escribirse como :

$$\begin{pmatrix} E_{yj} \\ B_{xj} \end{pmatrix}_{z_j} = B_j \begin{pmatrix} e^{ik_z(z_j - z'_j)} & 0 \\ 0 & e^{-ik_z(z_j - z'_j)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 e^{ik_z z'_j} \\ A_2 e^{-ik_z z'_j} \end{pmatrix}_{z'_j} \quad (2.70)$$

sea

$$d = z_j - z'_j \text{ y}$$

$$T(d) = \begin{pmatrix} e^{ik_z d} & 0 \\ 0 & e^{-ik_z d} \end{pmatrix}$$

Para la frontera en la j-ésima capa se tiene:

$$\begin{pmatrix} E_{yj} \\ B_{xj} \end{pmatrix}_{z'_j} = B_j \begin{pmatrix} A_1 e^{ik_z z'_j} \\ A_2 e^{-ik_z z'_j} \end{pmatrix}_{z'_j} \quad (2.71)$$

De donde obtenemos:

$$\begin{pmatrix} E_{yj} \\ B_{xj} \end{pmatrix}_{z_j} = B_j T(d) B_j^{-1} \begin{pmatrix} E_{yj} \\ B_{xj} \end{pmatrix}_{z'_j} \quad (2.72)$$

se encuentra que la matriz de transferencia es :

$$m_j = \begin{pmatrix} \cos(k_z d) & -\frac{i}{Y_j} \sin k_z d \\ -iY_j \sin k_z d & \cos k_z d \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

Para el arreglo completo de N capas se tiene la siguiente relación:

$$\begin{pmatrix} E_{yn} \\ B_{xn} \end{pmatrix}_{z_N} = M \begin{pmatrix} E_{y1} \\ B_{x1} \end{pmatrix}_{z_0} \quad (2.74)$$

CAPÍTULO 2. DESARROLLO TEORICO

2.3. CÁLCULO DE TIEMPO DE FASE

Siguiendo la hipótesis de que la onda incidente está normalizada para $z = 0$ tenemos que $A_1 = 1$ y $A_2 = r$, entonces para la onda incidente y reflejada :

$$E_y(0) = -1 - r \quad (2.75)$$

$$B_x(0) = Y_0(1 - r) \quad (2.76)$$

Para la onda transmitida $z = n + 1$, y $A_1 = t$ y $A_2 = 0$

$$E_y(L) = -te^{ik_{N+1}L} \quad (2.77)$$

$$B_x(L) = Y_{N+1}te^{ik_{N+1}L} \quad (2.78)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.74) se obtiene:

$$\begin{pmatrix} -te^{ik_{N+1}L} \\ Y_{N+1}te^{ik_{N+1}L} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} -1 - r \\ Y_0(1 - r) \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$-te^{ik_{N+1}L} = -m_{11}(1 + r) + m_{12}Y_0(1 + r) \quad (2.80)$$

$$Y_{N+1}te^{ik_{N+1}L} = -m_{21}(1 + r) + m_{22}Y_0(1 + r)$$

resolviendo el sistema de ecuaciones se llega a las soluciones t y r coeficientes de transmisión y reflexión respectivamente:

$$t = \frac{(m_{11} + m_{12}Y_0)(m_{22}Y_0 - m_{21}) - (m_{12}Y_0 - m_{11})(m_{21}Y_0 + m_{22})}{(m_{11} + m_{12}Y_0)Y_{N+1}e^{ik_{N+1}L} + (m_{21} + m_{22})e^{ik_{N+1}L}} \quad (2.81)$$

$$r = \frac{(m_{12}Y_0 - m_{11})Y_{N+1} + (m_{22}Y_0 - m_{21})}{(m_{12}Y_0 + m_{11})Y_{N+1} - (m_{22}Y_0 + m_{21})} \quad (2.82)$$

2.3. Cálculo de tiempo de fase

El tiempo fase es el tiempo que tarda el paquete de onda en atravesar una región del espacio. Este se obtiene a partir de un análisis de la fase de la función que describe un paquete de ondas incidente.

En varios casos se representa a una partícula a través de un paquete de onda, y el tiempo de fase de los paquetes incidente, reflejado y transmitido se les asocia como los tiempos de incidencia, reflexión y transmisión.

Los paquetes de onda se obtienen dependiendo de la energía E que tenga la partícula, parte del paquete se refleja y otra parte se penetra en la región y emerge en el otro lado como otro paquete de onda. Como condición inicial se pone una partícula incidente a la

CAPÍTULO 2. DESARROLLO TEORICO
2.3. CÁLCULO DE TIEMPO DE FASE

izquierda sobre el eje z de la estructura $\bar{z} = -l$ y este se propaga hacia la derecha con velocidad de grupo (\bar{v}). Para representar a esta partícula, desde el punto de vista de la mecánica cuántica, se considera un paquete de onda con distribución de probabilidad de impulso $|\phi(k)|^2$, así como una distribución de probabilidad espacial $|\psi(z)|^2$, Alrededor de la media de valores $\bar{k} = \frac{m\bar{v}}{\hbar}$. El paquete de onda llegara a $z = 0$ en $t_0 = \frac{l}{\bar{v}}$.

Una vez que el paquete de onda inicial $\psi(z) = \psi(z, 0)$ es definido, se puede obtener la distribución de impulso mediante una transformada de fourier.

$$\psi(z) = \psi(z, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{k_0} dk \phi(k) e^{ikz} \quad (2.83)$$

de modo que

$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} \psi(z) dz \quad (2.84)$$

Para fines prácticos se considera inicialmente un paquete de onda gaussiano centrado en $z = -l$

$$\psi(z) = \left(\frac{2}{\pi z_0^2} \right)^{\frac{1}{4}} e^{i\bar{k}(z+l)} e^{-\frac{(z+l)^2}{z_0^2}} \quad (2.85)$$

que corresponde a la distribución de impulso centrado en \bar{k}

$$\phi(k) = g(k - \bar{k}) e^{ikl} = \frac{1}{(2\pi\sigma_k^2)^{\frac{1}{4}}} e^{ikl} e^{-\frac{(k-\bar{k})^2}{4\sigma_k^2}} \quad (2.86)$$

con $\sigma_k^2 = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2$ y $\langle k \rangle = \bar{k}$

La ecuación (2.85) representa un paquete de onda gaussiano centrado en $z = -l$ a $t = 0$ y la ecuación (2.86) representa la función de distribución del paquete de onda incidente en el espacio de los vectores de onda, mientras que para los paquetes de onda reflejado y transmitido son las siguientes :

$$\phi_r(k) = |r\phi(k)| \quad (2.87)$$

$$\phi_t(k) = |t\phi(k)| \quad (2.88)$$

dada la función

$$g(k - \bar{k}) = \frac{1}{(2\pi\sigma_k^2)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{(k-\bar{k})^2}{4\sigma_k^2}} \quad (2.89)$$

La función de distribución de paquete de onda incidente, reflejado y transmitido espacial son:

CAPÍTULO 2. DESARROLLO TEORICO
2.3. CÁLCULO DE TIEMPO DE FASE

$$\psi(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(k - \bar{k}) e^{i[k(z+l) - wt]} dk \quad (2.90)$$

$$\psi_r(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} rg(k - \bar{k}) e^{-i[k(z+l) + wt]} dk \quad (2.91)$$

$$\psi_t(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} tg(k - \bar{k}) e^{i[k(z+l) - wt]} dk \quad (2.92)$$

donde r y t son los coeficientes de reflexión y transmisión.

Los paquetes de onda incidente, reflejado y transmitido son.

$$\Psi(z, t) = a \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} |\psi(z, t)| \right]^2 \quad (2.93)$$

$$\Psi_r(z, t) = a \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} |\psi_r(z, t)| \right]^2 \quad (2.94)$$

$$\Psi_t(z, t) = a \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} |\psi_t(z, t)| \right]^2 \quad (2.95)$$

donde a es el periodo de la estructura.

El tiempo de fase se calcula con el método de fase estacionaria propuesto por Zohta [19] [20]. El tiempo de fase se obtiene aplicando la ecuación de Zohta,

$$\tau = \frac{d}{v} + \frac{\partial}{\partial \omega} \tan^{-1} \frac{Im(T)}{Re(T)} \quad (2.96)$$

donde T es la amplitud de transmisión asociada a la onda, d es el ancho de la estructura y v es la velocidad de grupo asociada al paquete la cual aproximamos con la relación $v = \omega/k$

Al término

$$t_d = \frac{\partial}{\partial \omega} \tan^{-1} \frac{Im(T)}{Re(T)} \quad (2.97)$$

Zohta lo define como tiempo de retardo. [13] [21] [22] [23] [24]

Capítulo 3

RESULTADOS

Los resultados que se van a mostrar a continuación serán obtenidos utilizando un sistema de multicapas donde la celda unitaria está formada por una capa de metamaterial que está descrita con el modelo de Gupta y una capa de aire como dieléctrico, al construir la superred el ancho del dieléctrico se mantiene constante, en tanto que el ancho de la capa del metamaterial se va incrementando en una unidad de tal manera que la n -ésima capa tiene un ancho de espesor $b + n$ (ver figura 3.1), el medio de incidencia y transmisión es el aire. Un sistema como este hace que se retenga la luz para algunas frecuencias, para ello se calculará la transmisión de la luz a través de la estructura mediante el método de la matriz de transferencia descrito en el capítulo 2, y se calculará el tiempo de tránsito mediante el método de fase estacionaria descrito por el modelo de Zhota. Estos resultados se compararan con una estructura periódica donde se alternan metamaterial y dieléctrico pero el metamaterial se va a mantener constante.

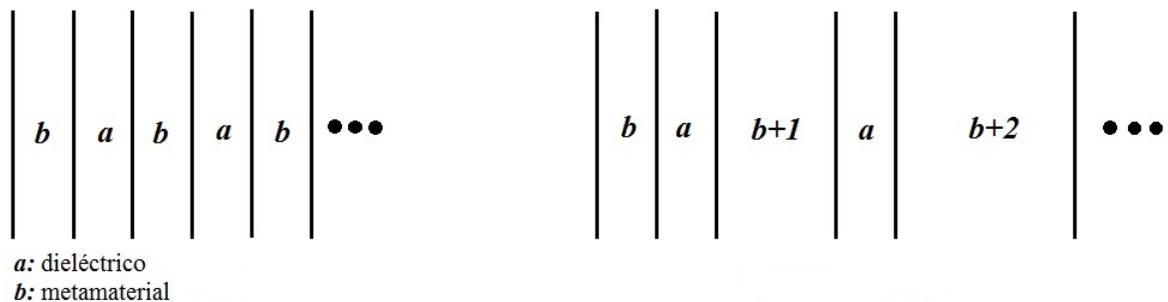


Figura 3.1: Forma que van a tener las multicapas a) caso periódico y b) caso no periódico

3.1. Espectros de transmisión

En esta sección se muestran espectros de transmisión para estructuras descritas de acuerdo a la figura 3.1, los anchos de los materiales se eligen de tal manera que se cumpla la condición $\omega d/2\pi c \approx 1$ donde ω debe estar en el rango donde existe la respuesta metamaterial. A continuación se muestra una serie de gráficas donde se comparan los espectros de transmisión para estructuras periódicas donde el ancho del dieléctrico y del metamaterial es constante con aquellas estructuras donde la capa de metamaterial va creciendo en una unidad, las estructuras están hechas de tal forma que se cumple en ambos casos la condición de que la cantidad de dieléctrico y metamaterial son iguales para los dos tipos de estructura. En la descripción de cada gráfica el número de capas se denota por la letra **(n)**, el espesor de las capas de metamaterial para el caso periódico se denotan con **(da)**, y en el caso en que vará el ancho del metamaterial, el espesor inicial se denota por **(di)**, el espesor final del metamaterial **(df)** y el espesor de la capa de dieléctrico por **(db)**, el cual es el mismo en toda la estructura.

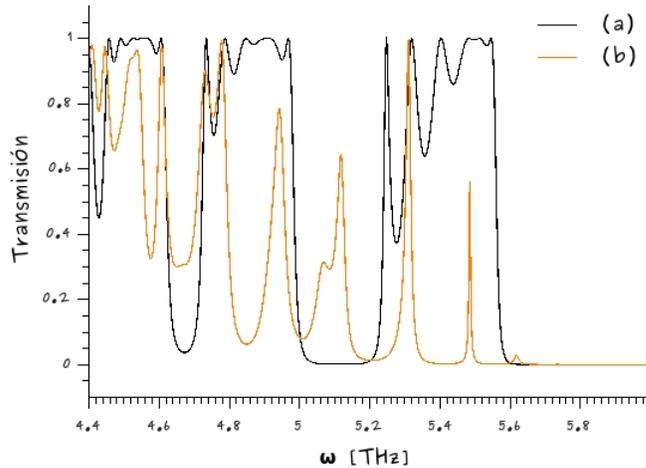


Figura 3.2: Comparación de espectros de transmisión entre estructuras periódicas y aquellas donde la capa de metamaterial se incrementa, en la figura para ambos casos $n=6$, $db=2$ cm, a) caso periódico $da=2.25$ cm; b) caso no periódico $di=1$ cm y $df=4$ cm

CAPÍTULO 3. RESULTADOS
3.1. ESPECTROS DE TRANSMISIÓN

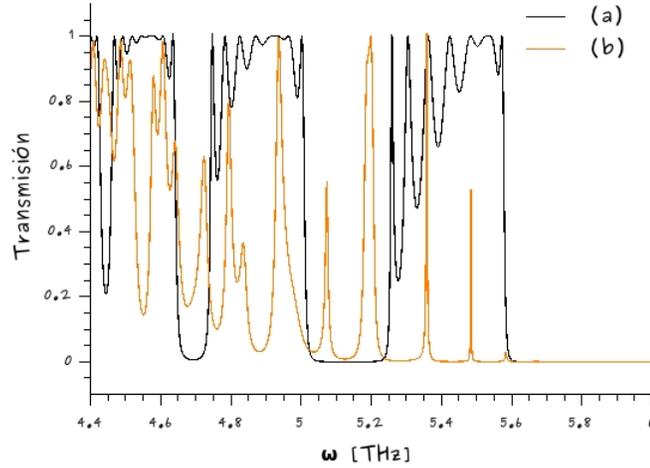


Figura 3.3: Comparación entre los espectros de transmisión entre estructuras multicapas donde en un caso el ancho de los metamateriales va cambiando y en el otro caso se mantiene constante para esta figura $n=8$, $db=2$ cm; a) caso periódico $da= 2.31$ cm b) caso no periódico $di = 1$ cm , $df = 4$ cm

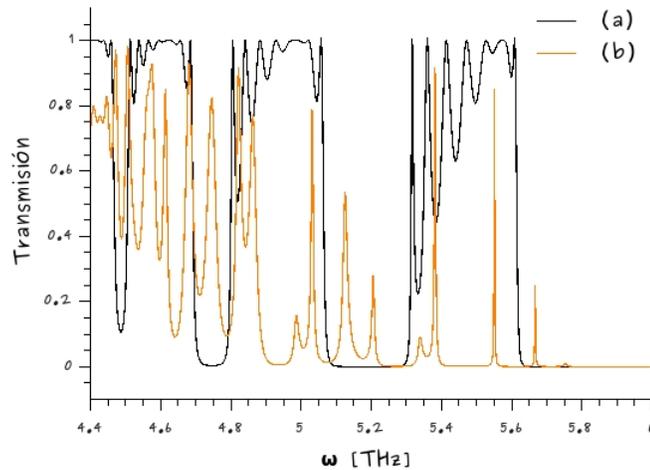


Figura 3.4: Espectros de transmisión para estructuras multicapas de metamateriales y dieléctricos, en un caso el ancho de los metamateriales va cambiando y en el otro caso se mantiene constante para esta figura $n=8$, $db=2$ cm; a) caso periódico $da= 2.46$ cm b) caso no periódico $di = 0.5$ cm , $df = 5$ cm

CAPÍTULO 3. RESULTADOS

3.1. ESPECTROS DE TRANSMISIÓN

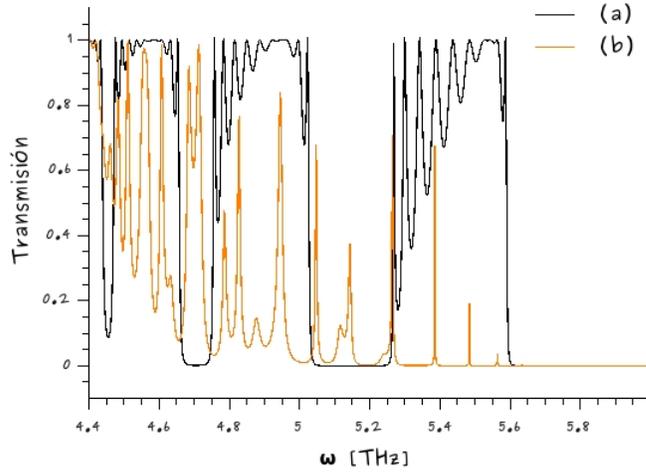


Figura 3.5: Espectro de transmisión para estructuras multicapas de metamateriales y dieléctricos, en un caso el ancho de los metamateriales va cambiando y en el otro caso se mantiene constante para esta figura $n=10$, $db=2$ cm; a) caso periódico $d_a=2.35$ cm b) caso no periódico $d_i=1$ cm , $d_f=4$ cm

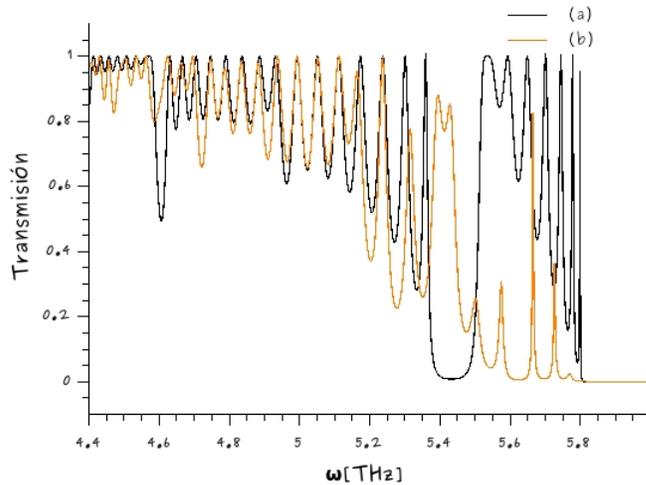


Figura 3.6: Espectro de transmisión para estructuras multicapas de metamateriales y dieléctricos, en un caso el ancho de los metamateriales va cambiando y en el otro caso se mantiene constante para esta figura se tiene $n=8$, $db=3$ cm; a) caso periódico $d_a=2.31$ cm b) caso no periódico $d_i=1$ cm, $d_f=4$ cm

Al analizar las gráficas de las figura 3.2 a la 3.5 se observa que las resonancias de Fabry-Perot se incrementan con el aumento de número de capas en ambos casos tanto el periódico como el no periódico, al incrementar el número de capas los espectros de transmisión coinciden a bajas frecuencias, sin embargo al rededor de las frecuencias donde se cumple la condición $n_1 d_m + n_2 d_d = 0$ donde d_m es el ancho de la cantidad total de metamaterial y d_d es la cantidad total de dieléctrico, los espectros de transmisión difieren uno del otro considerablemente, así mismo los gaps no quedan bien definidos en los casos no periódicos.

3.2. Tiempos de fase

En las siguientes gráficas se muestran los tiempos de fase calculados mediante la ecuación (2.96) donde nuevamente se comparan las curvas obtenidas para los casos periódico y no periódico, cabe mencionar que en las gráficas mostradas en cada figura la cantidad de metamaterial y dieléctrico que atraviesan las ondas electromagnéticas son iguales, esto es, si la estructura no repercutiese, el tiempo de tránsito de las ondas electromagnéticas para cada caso deberían ser los mismos. Al igual que en la sección anterior en la descripción de cada gráfica se da el número de capas (n), el espesor de las capas de metamaterial para el caso periódico se denotan con (da), el espesor inicial del metamaterial (di), espesor final del metamaterial (df) y el espesor de la segunda capa que es el dielectrico (db), también se adiciona a cada gráfica el tiempo que tardaría la luz en atravesar si estuviera en el vacío para una estructura de dieléctrico.

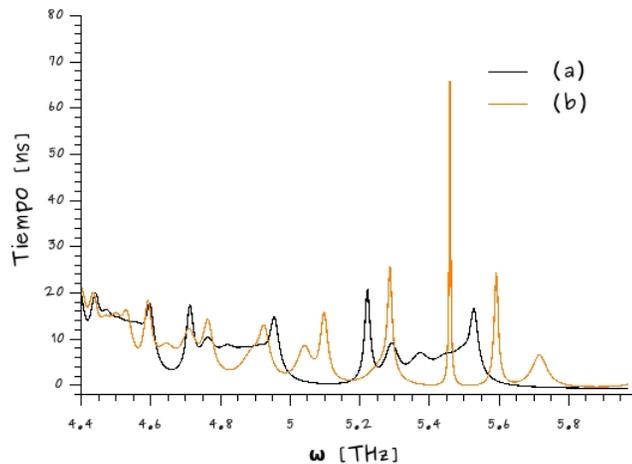


Figura 3.7: Tiempo de fase para las estructuras periódicas y no periódicas, para ambos $n=6$, $db=2$ cm, a) caso periódico $da=2.25$ cm; b) caso no periódico $di=1$ cm y $df=4$ cm. Para esta estructura se va a obtener un tiempo en el vacío de $0,849ns$

CAPÍTULO 3. RESULTADOS
3.2. TIEMPOS DE FASE

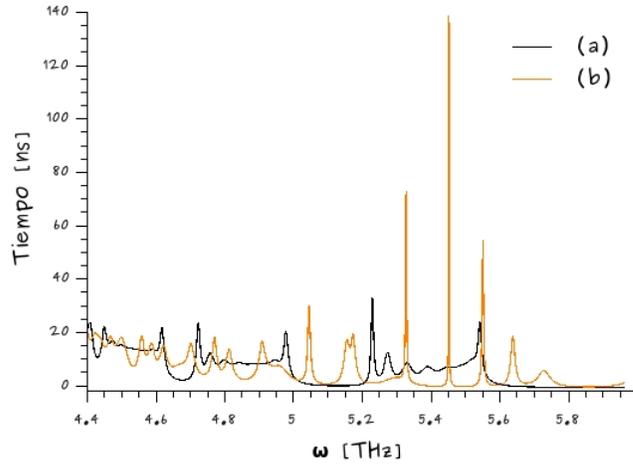


Figura 3.8: Tiempo de fase para las estructuras periódicas y no periódicas, para ambos $n=8$, $db=2$ cm; a) caso periódico $d_a= 2.31$ cm b) caso no periódico $d_i = 1$ cm , $d_f = 4$ cm. Para esta estructura se va a obtener un tiempo en el vacío de $1,14ns$

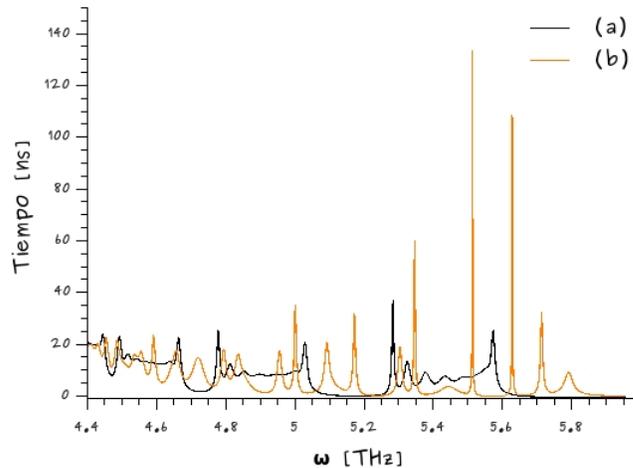


Figura 3.9: Tiempo de fase para las estructuras periódicas y no periódicas, para ambos $n=8$, $db=2$ cm; a) caso periódico $d_a= 2.46$ cm b) caso no periódico $d_i = 0.5$ cm , $d_f = 5$ cm. Para esta estructura se va a obtener un tiempo en el vacío de $1,18ns$

CAPÍTULO 3. RESULTADOS
3.2. TIEMPOS DE FASE

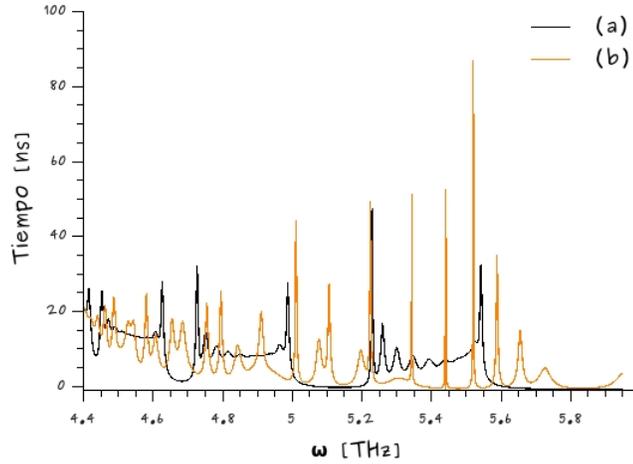


Figura 3.10: Tiempo de fase para las estructuras periódicas y no periódicas, para ambos $n=10$, $db=2$ cm; a) caso periódico $d_a=2.35$ cm b) caso no periódico $d_i=1$ cm, $d_f=4$ cm. Para esta estructura se va a obtener un tiempo en el vacío de $1,44ns$

En correspondencia con las curvas de transmisión las gráficas del tiempo de fase, muestran similares comportamientos, los tiempos de retardo en las regiones de baja transmisión tienden a cero, en tanto que las resonancias de Fabry-Perot implican tiempos grandes de transmisión, el resultado interesante que se observa en todas las curvas es que para las estructuras no periódicas los tiempos de retardo para algunas frecuencias son muy grandes comparadas con el caso periódico, por ejemplo en la figura 3.6 para una frecuencia de 5.48 GHz el tiempo de tránsito de la estructura periódica es 10 veces mayor que el tiempo de tránsito de la estructura periódica, por citar otro ejemplo en la figura 3.8 para una frecuencia de 5.55 GHz, el tiempo para el caso periódico es de 7.8 ns en tanto que en el caso no periódico es de 140 ns, 20 veces mayor el tiempo de tránsito. Por otra parte en las regiones cercanas al gap cero, esto es, donde se cumple la condición $n_1d_m + n_2d_d = 0$ los tiempos de transmisión son reducidos incluso negativos, como ocurre en los gaps de Bragg.

Conclusiones

En esta tesis se ha estudiado el tiempo que le toma a la luz atravesar una estructura construida con capas alternadas de dieléctricos y metamateriales, esto es, se trata de cristales fotónicos unidimensionales, para ello se revisaron algunos principios de la teoría electromagnética, partiendo de las ecuaciones de Maxwell y mediante el uso de la matriz de transferencia es posible calcular los coeficientes de transmisión y reflexión de la luz, posteriormente usando el método de Zhota para el cálculo del tiempo de fase, se encontró el tiempo que le toma a la luz atravesar la estructura. Los cristales fotónicos discutidos en este trabajo fueron hechos a base de alternar dieléctricos y metamateriales en donde el ancho de las capas del metamaterial va creciendo a lo largo de la estructura, la motivación surgió a raíz de resultados publicados donde se encuentra que en cristales fotónicos de capas alternadas de dieléctricos y metales, cuando el ancho de metal crece en la estructura, se ha encontrado que la luz queda atrapada momentáneamente en el cristal fotónico y esto ocurre cerca de la región de frecuencia donde se cumple la condición $\epsilon_a d_a + \epsilon_b d_b = 0$. En el caso de los metamateriales se estudió este comportamiento donde se cumple la condición $n_a d_a + n_b d_b = 0$ efecto sólo observable en metamateriales porque sólo estos pueden tener un índice de refracción negativo. Con el fin de comparar el efecto que produce el crecimiento sucesivo de las capas de metamaterial, se hicieron comparaciones con cristales fotónicos donde la estructura es periódica, esto es, el ancho de las capas de metamaterial y de dieléctrico se mantienen constantes. Las comparaciones fueron hechas entre estructuras periódicas y estructuras donde el ancho del metamaterial se va incrementando, con la condición de que la cantidad total de metamaterial y dieléctrico sea la misma para los dos casos. Los resultados observados fueron los siguientes:

- Los espectros de transmisión muestran una regularidad para el caso periódico aun en la región de frecuencias donde se cumple la condición $n_a d_a + n_b d_b = 0$ a diferencia de los espectros de transmisión del caso no periódico que reducen la transmisión cerca de las frecuencias del gap cero, como puede verse en las figuras 3.2 a 3.5. Al parecer el rompimiento de la periodicidad, genera estados localizados, en estas frecuencias la transmisión es reducida.
- Las resonancias de Fabry Perot son similares para ambos tipos de estructuras periódicas o no periódicas, incluso en la medida que el número de capas se incrementa, estas tienden a coincidir en regiones fuera del gap cero esto puede verse en la figura 3.5. En tanto que para frecuencias cercanas al gap cero la diferencia de los espectros

de transmisión se hace más evidente.

- Si se parte del hecho que las estructuras mostradas en las figuras 3.6 a 3.9 contienen la misma cantidad de dieléctrico y de metamaterial, esperaríamos resultados similares al medir el tiempo de tránsito, sin embargo se puede observar que mientras en las regiones de baja frecuencia los tiempos de fase coinciden, en la medida que se acercan a frecuencia correspondientes al gap cero los tiempos de fase de la estructura no periódica se reducen, llegando a valores incluso negativos, este resultado puede ser atribuido a una reducción de la amplitud de transmisión, tal como ocurre en los gaps de Bragg, y que ha sido ampliamente discutido en la literatura.
- En el rango de frecuencias cercanas al gap cero, existen tiempos de fase muy grandes comparados con el caso periódico, incluso son mayores hasta en dos órdenes de magnitud, para estos valores se puede decir que la luz se detiene momentáneamente, generando un efecto similar al reportado en las redes construidas a base de metales y dieléctricos donde se habla del arcoíris atrapado. Se puede decir que los metamateriales también son factibles de atrapar la luz.

Bibliografía

- [1] V. Veselago, *Electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ* , Sov. Phys. Usp., Vol.10, 509, 1968.
- [2] J. Pendry; A. Holden; D. Robbins; W. Stewart, *Magnetism from Conductors and Enhanced Nonlinear Phenomena*, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. 47, 2075, 1999.
- [3] G. Eleftheriades; K. Balmain, *Negative-Refractive Metamaterials: Fundamental Principle and Applications*, John Wiley and Sons, Inc., Hoboken , New Jersey, 2005
- [4] *09 Monografías del SOPT: Los metamateriales y sus aplicaciones en defensa*, 075-11-024-3, marzo 2011
- [5] K. Tsakmakidis; A. Boardman; O. Hess, *Trapped rainbow storage of light in metamaterials*”, *Nature*, Vol 459 Noviembre 2005
- [6] T. Jun Cui; D. Smith; R. Liu, *Metamaterials: Theory, Design and Applications*, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2009
- [7] F. Perez; I. Solis; M. Palomino, *Elastic superlattices with simultaneously negative effective mass density and shear modulus*, Journal of Applied Physics, ISSN: 0021-8979, 113, 093508, (2013)
- [8] W. Cai; V. Sholaev, *Optical Metamaterials: Fundamentals and Applications*, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2010
- [9] A. Sihvola, *Metamaterials; A Personal View*, Radioengineering Vol 18 No. 2 June 2009
- [10] G. Stekolschik, *Los metamateriales: Luz obediente*, Tecnología Exacta mente, Año 18 No. 48, septiembre 2011

- [11] J. Pendry; A. Halden; D. Robbins; W. Stewart, *Magnetism from Conductors and Enhanced Nonlinear Phenomena*, 0018-9480/99, IEEE Vol. 47 No. 11, noviembre 1999
v
- [12] S. Dutta Gupta, R. Arum; G. Agarwal, *Subluminal to superluminal propagation in a left-handed medium*, 10.1103/PhysRevB.69.113104, marzo 2004
- [13] H. K. Ramírez *Estudio de efectos de absorción en la propagación de ondas electromagnéticas en medios estratificados que contienen metamateriales*, DOCTORADO EN FÍSICA APLICADA (FCFM-BUAP), 9 de diciembre de 2011.
- [14] H. Kinto; M. Palomino; F. Ramos, *Photonic modes in dispersive and lossy superlattices containing negative-index materials*, Progress In Electromagnetics Research-PIER B, Vol. 35, 133-149, (2011) ISSN, 1559-8985 EMW Publishing, dirección electrónica de la revista: <http://www.jpier.org/PIERB/pier.php?paper=11062911>
- [15] J. David Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd edition, John Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey, 1999
- [16] P. Gómez; E. Gonzáles, *Las ecuaciones de Maxwell*, Creative commons, 2012
- [17] O. J. Bressan, *Ondas*, The General Secretarial of the organization of America States Washintong D.C., 1975
- [18] R. K. Wangsness, *Campos Electromagnéticos*, LIMUSAS.A. de C.V. Grupo Noriega Editores Balderas 95, México D.F., 1998
- [19] Y. Zohta, *Solid State Commun*, Vol 73, 845, 1990
- [20] Y. Zohta, *Phys, Rev. B*41, 7879, 1990
- [21] G. O. Mendoza, *Tiempo de retardo en estructuras periódicas construidas con metamateriales*, LICENCIATURA EN FÍSICA (FCFM-BUAP), 29 de agosto de 2007
- [22] C. Aguilar; M. Palomino, *Transmisión de paquetes de ondas electromagnéticas a través de estructuras periódicas con respuesta óptica no lineal*, Superficies y Vacío 17(2), 9-14, junio 2004

- [23] V. de Aquino; V. Aguilera; M. Goto; H. Iwamoto, *Tunneling time through a rectangular barrier*, Physical Review Vol 58 Num. 6, diciembre 1998
- [24] C. Aguilar; M. Palomino; F. RAmos, *Transit time of electromagnetic Gaussian packets traversing non linear, periodic layered systems*, Optical Material, 29, 1667-1671. (2007). ISSN: 0925-3467