

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN FÍSICA APLICADA

TÍTULO DE LA TESIS

Análisis de Medidas de Enredamiento cuántico usando varianzas e
incertidumbres

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN FÍSICA APLICADA

PRESENTA

JOSÉ DELFINO HUERTA MORALES

DIRECTORES DE TESIS

Dr. LUIS MANUEL ÁREVALO AGUÍLAR

PUEBLA, PUE.

SEPTIEMBRE 2014

Dedicatoria

Agradecimientos

Texto

Índice general

Resumen	IV
Introducción	VI
1. Principio de incertidumbre	1
1.1. Orígenes del principio de incertidumbre	2
1.2. Principio de incertidumbre	4
1.3. Derivación de la relación general de incertidumbre.	5
1.4. Relación de incertidumbre de Heisenberg	8
1.4.1. Posición-Momento	9
1.5. Problemas con las relaciones de incertidumbre estándar	9
1.5.1. La desviación estándar como una medida de anchura	10
1.6. La dependencia de la RGI con el estado.	14
1.7. Propuestas alternativas.	15
1.7.1. Anchura media de pico como otra medida de anchura	15
1.7.2. Relaciones de incertidumbre entrópicas.	18
Bibliografía	23
2. Enredamiento Cuántico	24
2.1. Mecánica Cuántica	24
2.2. Orígenes del enredamiento cuántico	27
2.2.1. Paradoja Einstein, Podolsky y Rosen (EPR)	28
2.2.2. Desigualdades de Bell	30
2.3. Un primer contacto con enredamiento cuántico	32
2.3.1. De mecánica clásica al límite cuántico de un divisor de haz	33
2.3.2. Mecánica cuántica del divisor de haz	34

2.4. Formalismo de los estados enredados	43
2.4.1. Operador de densidad	45
2.5. Estado enredado en términos del operador de densidad	55
2.6. Algunos ejemplos de estados enredados	56
2.6.1. Estado Singlete	56
2.6.2. Experimento de Hong, Ou, y Mandel: Interferencia de fotones	57
Bibliografía	61
3. Medidas de enredamiento usando varianzas e incertidumbres	62
3.1. Medidas de enredamiento.	63
3.2. Relaciones de incertidumbre locales como medida de enredo.	65
3.3. Cuantificación de enredo para un sistema de dos qubits.	67
Bibliografía	71
4. Estudio teórico de la medida de enredamiento, colectividad	72
4.1. Colectividad para estados ortogonales	72
4.2. Colectividad para estados coherentes	77
4.2.1. Estados coherentes	78
4.2.2. Generalización de la medida colectividad para estados coherentes	80
Bibliografía	86
5. Conclusiones	87

Resumen

La presente tesis es un trabajo de investigación sobre medidas de enredamiento cuántico particularmente las que tienen que ver con varianzas e incertidumbres. Se estudia esta línea de investigación sobre medidas de enredo, ya que, se buscan observables fáciles de implementar en laboratorio, en este sentido se usan las medidas de incertidumbre. El objetivo principal de la tesis es desarrollar la medida de enredamiento colectividad para estados ortogonales y proponer una generalización para estados coherentes. Tal medida colectividad se inspira en las relaciones de incertidumbre entrópicas. De tal forma, analizamos las relaciones de incertidumbre entrópicas basadas en las entropías de Shannon, una medida de incertidumbre que da solución a los problemas que tienen las relaciones de incertidumbre estándar. En este análisis se presenta una expresión cuantitativa satisfactoria del principio de incertidumbre, importante ya que basado en las relaciones de incertidumbre entrópicas se inspira la colectividad. Por lo anterior, se estudian los avances y discusiones concernientes al principio de incertidumbre, veremos que las relaciones más conocidas como es la relación de incertidumbre general expresado en términos del conmutador de dos operadores y la relación de incertidumbre de Heisenberg son relaciones débiles para representar el principio de incertidumbre ya que tienen limitantes importantes. La mayor de ellas tomar a la desviación estándar como una medida de incertidumbre. Se muestra con ejemplos dichos problemas. De igual manera, se lleva a cabo una revisión bibliográfica y estudio del arte del fenómeno de enredamiento cuántico. Con lo anterior se logra una base importante para continuar con el estudio del fenómeno que caracteriza a la mecánica cuántica.

Introducción

El Enredamiento Cuántico (EC), es considerado como la esencia misma de lo cuántico, es decir, las manifestaciones más profundas y caprichosas de la mecánica cuántica dan como resultado el fenómeno que fue llamado por primera vez, espeluznante acción a distancia. Un estado enredado consiste en correlaciones entre estados, demasiado fuertes como para ser representados en producto de estados cuánticos. Esta manifestación tan peculiar llamo la atención de la comunidad científica por el simple hecho de ser expresiones únicas y extrañas en el universo cuántico. Pero, a partir del surgimiento de las primeras ideas sobre la posible aplicación del fenómeno en el ámbito de la información, la atención se volvió mayúscula, dándole una prioridad sobresaliente al desarrollo de la teoría, que va encaminada al impulso de nuevas tecnologías tales como: tele transportación de la información, criptografía cuántica y procesadores cuánticos. Y es que, a lo largo de la historia la capacidad de procesamiento y envío de información ha sido una prioridad inequívoca por desarrollar. De tal forma, que tales aplicaciones del EC han centralizado el esfuerzo del mundo cuántico.

El objetivo de cualquier tarea que tenga que ver con EC, es estudiar estados enredados de los cuales se tenga pleno conocimiento del nivel de enredo y así realizar de mejor manera las investigaciones que convengan. Dicho lo anterior, una de las prioridades es el desarrollo de métodos de cuantificación de enredo. Para ello, se han propuesto diversas medidas de enredamiento, como por ejemplo: la medida geométrica de enredo, la negatividad o descomposición Schmidt. También, podemos mencionar los conocidos criterios de cuantificación: la entropía de Von Neuman y la concurrencia, esta última quizá la medida más conocida de enredo. En general, las propuestas para cuantificar el enredo son abundante, sin embargo, las mediciones del EC propuestas son difíciles de medir en un experimento físico. Un caso notable de

esto es la concurrencia que se define a partir del complejo conjugado del vector de estado, esto último imposible de realizar experimentalmente. De igual manera, podemos mencionar la matriz de densidad, como medida información. Sin embargo, determinar todos los elementos de la matriz es algo muy complicado de llevar a cabo experimentalmente. En consecuencia los intentos recientes para la medición experimental se basan en encontrar cantidades accesibles experimentalmente.

Una línea de investigación, sobre medidas de EC basadas únicamente en cantidades mensurables experimentalmente, es aquella que tienen que ver con incertidumbres cuánticas. Entonces, hablaremos de medidas de enredamiento usando varianzas e incertidumbre. Específicamente, trataremos con la medida de enredo Colectividad definida en función del producto de las proyecciones de estados separables con el estado cuántico a cuantificar. El concepto importante de la Colectividad, y por lo cual es objeto de estudio, es que dicha medida de enredo está basada en las relaciones de incertidumbre entrópicas. Por consiguiente, para llevar a cabo un estudio adecuado de esta medida de EC es necesario revisar el concepto de relaciones de incertidumbre.

Entonces, el concepto fundamental de la presente tesis no sólo se centraliza en medidas de enredamiento cuántico. También, es necesario un análisis del desarrollo, progreso e interpretación del principio de incertidumbre de Heisenberg en mecánica cuántica. Veremos que el estudio de las relaciones de incertidumbre que describen el nombrado principio juega un papel importante para el surgimiento de las relaciones de incertidumbre entrópicas base de nuestra medida de enredamiento. En consecuencia, se presenta un tratamiento extenso de las relaciones de incertidumbre, abarcando deficiencias y avances, útiles como base del actual trabajo de investigación.

El objetivo principal es, extender la colectividad para estados coherentes. Para ello, se lleva a cabo una revisión bibliográfica y estudio del arte del fenómeno de Enredamiento Cuántico (EC), primordialmente, en estudiar medidas de enredo con la característica principal de ser implementadas en el laboratorio. En este sentido se desarrolla la medida de EC, Colectividad, para estados ortogonales y se propone la generalización antes mencionada.

Para lograr lo antes expuesto, se presenta en el primer capítulo un desarrollo basto sobre las problemáticas de las relaciones de incertidumbre estándar,

habiendo antes afrontado los conceptos fundamentales de tal tema. Pero aún más importante se despliegan las posibles soluciones, una de ellas las relaciones de incertidumbre entrópicas base de la medida de enredo colectividad. Continuamos, con el capítulo 2, donde comenzamos con una pequeña introducción histórica del surgimiento y proceso de avance de este fenómeno en la mecánica cuántica, sin duda importante y necesaria para ingresar al estudio del mundo del enredo. Así mismo, describimos el fenómeno de EC con un ejemplo sencillo observando de manera espontánea las características únicas e implicaciones físicas de tal fenómeno. Pasando, al formalismo matemático del EC, se muestran ejemplos de algunos estados enredados. Posteriormente, en el capítulo 3 se presenta el estado del arte de las medidas de EC basadas en relaciones de incertidumbre. Lo anterior, como solución a la necesidad de caracterizar el enredo, por medio de medidas fáciles de implementar en el laboratorio. Para terminar, en el capítulo 4 se presenta el desarrollo de la medida de enredo colectividad y la propuesta de generalización para estados coherentes, considerando claro, una breve descripción de estos estados cuánticos semiclásicos. Finalizamos, el trabajo de investigación con algunas conclusiones y con las perspectivas del trabajo posible a realizar a futuro como continuidad de este tema de investigación.

**Análisis de Medidas de Enredamiento
Cuántico Usando Varianzas e Incertidumbres**

José Delfino Huerta Morales

Septiembre 2014

Capítulo 1

Principio de incertidumbre

El principio de incertidumbre consta de una serie de argumentos postuladas por el físico alemán Werner Heisenberg en 1927, de las cuales se desprenden las relaciones de incertidumbre que expresan matemáticamente dichos postulados. El principio de incertidumbre de Heisenberg afirma que no se puede determinar simultáneamente y con precisión arbitraria, ciertos pares de variables físicas, como pueden ser la posición y el momento. En palabras concretas, cuanto mayor certeza se busca en determinar la posición de una partícula menos se conoce su cantidad de movimiento lineal.

La medición siempre fue y ha sido un tema importante y polémico en el desarrollo de la mecánica cuántica. Se ha tratado de desarrollar una buena teoría de medición, llegando a importantes concepciones de lo que se puede observar y de lo que no. Estas discusiones, esclarecieron un poco el significado de la dualidad onda-partícula de la luz.

El desarrollo de la mecánica cuántica y del tema de la medición llevaron a Max Born a afirmar que los fotones son partículas, pero las estructuras que producen son ondas, es decir, el comportamiento de ellos en ciertos ejemplos en la naturaleza se refieren por probabilidades que crean interferencias como si fueran ondas. Estas ideas, y lo que implicaba sobre ellas llevaron a Werner Heisenberg colega de Max Born a profundizar en el tema e iniciar con lo que hoy se conoce como principio de incertidumbre.

Continuando, con las ideas de Born, Heisenberg planteó, como las partículas están asociadas con las probabilidades que crean interferencia. Entonces,

Principio de incertidumbre

1.1. Orígenes del principio de incertidumbre

lo mismo que ocurre en ondas, es imposible conocer tanto la cantidad del movimiento exacta como la posición exacta de cualquier partícula al mismo tiempo, estos son los inicios de lo que hoy se conoce como principio de incertidumbre de Heisenberg. Cabe mencionar, que los inicios del principio de incertidumbre concuerdan con la formulación de la interpretación de Copenhague o principio de complementariedad hecho importante que concluye con la interpretación hecha por Max Born, Niels Bohr y Werner Heisenberg sobre la dualidad de la luz. Por lo tanto el principio de complementariedad es adyacente al principio de incertidumbre enunciado por Heisenberg.

Como cualquier teoría su buen desarrollo y crecimiento se basa en la re-orientación surgida de los cuestionamientos y críticas sobre su validez y completas al mundo físico. Este es el desarrollo natural de una teoría científica, no siendo la excepción para el principio de incertidumbre como lo veremos en la estructura del presente capítulo. Primero se dará una descripción de los orígenes del principio de incertidumbre, es decir, como se fue desarrollando la teoría con el paso del tiempo dadas nuevas aportaciones de diferentes científicos de la época. Posteriormente, se presentan los puntos que conforman el principio de incertidumbre, los cuales representan el significado cualitativo de las relaciones. Continuamos, con la derivación matemática de la relación general de incertidumbre para así llegar al ejemplo más importante la relación de incertidumbre de Heisenberg. Finalmente, haciendo reverencia a lo dicho sobre el camino que sigue el desarrollo de cada ciencia, se concluye el capítulo describiendo los serios problemas que tenían las relaciones de incertidumbre conocidas hasta 1929, dando ejemplos de las limitaciones de dichas relaciones. Se concluye, con algunas propuestas alternativas para dar solución a las limitaciones de las relaciones de incertidumbre. Es así como se llega con el desarrollo de una nueva tendencia las relaciones de incertidumbres entrópicas, particularmente las entropías de Shannon que más tarde retomaremos.

1.1. Orígenes del principio de incertidumbre

El físico Werner Heisenberg de origen alemán es quien por primera vez introduce las relaciones de incertidumbre en uno de sus artículos publicado en 1927. Heisenberg considera varios experimentos a determinar la posición y el momento de una partícula, llegando a la conclusión que la mayor precisión de la posición es determinada con la menor presión en el momento y viceversa,

Principio de incertidumbre

1.1. Orígenes del principio de incertidumbre

esto lo expresó:

$$p_1 q_1 \sim h. \quad (1.1)$$

La ecuación anterior es la primera relación matemática conocida publicada por Heisenberg que describe una expresión cualitativa del principio de incertidumbre. Cabe mencionar que, en trabajos anteriores Heisenberg ya había contribuido al desarrollo de la mecánica cuántica publicando artículos sobre la llamada mecánica de matrices una versión de la mecánica cuántica hecha por Born, Jordan, Dirac junto con Heisenberg. Sin embargo, hasta el artículo publicado en 1927 es cuando introduce por primera vez la relación de indeterminación de Heisenberg hoy en día conocido como el principio de incertidumbre. Es importante señalar que en el mismo artículo Heisenberg también introduce una relación de incertidumbre para la energía y el tiempo:

$$E_1 t_1 \sim h. \quad (1.2)$$

Para conectar la relación cualitativa Ec. 1.1 con el formalismo matemático de la mecánica cuántica, Heisenberg consideró una amplitud de probabilidad Gaussiana de q_1 . Ahora la correspondiente amplitud de probabilidad de p_1 es encontrada con la transformada de Fourier y será también Gaussiana. Las anchuras de estas Gaussianas son inversamente proporcionales, así q_1 y p_1 representan anchos característicos de estas Gaussianas lo cual implica que:

$$p_1 q_1 = h. \quad (1.3)$$

En el mismo año Kennard generalizó estos resultados, proponiendo y probando la conocida relación:

$$\Delta p \Delta q \geq \frac{1}{2} \hbar, \quad (1.4)$$

donde Δ denota la desviación estándar y \hbar es la constante de Planck reducida.

Es Kennard quien por primera vez asigna una cantidad conocida, a las variables físicas que Heisenberg sólo introdujo como posición y momento. Al introducir la desviación estándar se toma en cuenta una medida de dispersión del paquete de onda Gaussiano, de tal forma que la desviación estándar está asociada con la varianza dada por:

$$(\Delta p)^2 = \langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle$$

$$(\Delta q)^2 = \langle (q - \langle q \rangle)^2 \rangle$$

Principio de incertidumbre

1.2. Principio de incertidumbre

En artículos posteriores publicados en 1929, Heisenberg considera la desigualdad 1.4 como la expresión matemática precisa del principio de incertidumbre dentro del formalismo de la mecánica cuántica. Así, la relación 1.4 usualmente es llamada la relación de Heisenberg. Finalmente en 1929 Robertson prueba la relación general.

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle AB - BA \rangle|. \quad (1.6)$$

Aquí, A y B son operadores Hermiticos arbitrarios y Δ nuevamente denota la desviación estándar. Robertson es el primero que enfatiza que la desviación estándar es una medida de incertidumbre cuántica apropiada. También define la incertidumbre ΔA como la raíz cuadrada de la desviación de A , es decir, toma a la desviación estándar como una medida de anchura de las Gaussianas que describen la amplitud de probabilidad en cada espacio. Es así como la expresión 1.6 se toma como la expresión del principio de incertidumbre estándar, aparentemente concluyendo con esta relación la historia sobre el principio de incertidumbre al caso de ser referida en obras posteriores y en casi todos los libros de texto como la relación exacta del principio.

Sin embargo, con el transcurso del tiempo se criticó severamente la afirmación de que la expresión 1.6 sea una relación adecuada y sobre todo completa para describir el principio de incertidumbre y los errores estadísticos de la medición pero esto lo trataremos más adelante.

1.2. Principio de incertidumbre

En los inicios de la mecánica cuántica, el principio de incertidumbre cualitativamente expresaba la perturbación irreducible de un sistema atómico por el acto de la medición, es decir, cuando nos proponemos medir ciertas variables en un sistema microscópico, resulta que la medida siempre acabará perturbando al propio sistema de medición, ya que sin importar cuál sea nuestro método de medición siempre interferirá y modificara al sistema introduciendo un error. Sin embargo usar el término "error" crea confusión de la incertidumbre cuántica y el concepto estadístico de las fluctuaciones aleatorias.

Es común argumentar que la famosa ecuación $\Delta p \Delta q \geq \frac{1}{2} \hbar$ es el principio de incertidumbre de Heisenberg. No obstante, técnicamente tal aseveración

Principio de incertidumbre

1.3. Derivación de la relación general de incertidumbre.

es errónea. Estrictamente, la anterior ecuación es la relación que pretende describir el concepto fundamental del principio de incertidumbre de Heisenberg.

El principio de incertidumbre suele describirse vagamente por una serie de argumentaciones negadas las cuales se mencionan a continuación.

- A. Es imposible preparar estados en los que esta simultáneamente bien localizados arbitrariamente la posición y el momento.
- B. Es imposible medir simultáneamente la posición y el momento
- C. Es imposible medir la posición sin inquietar el momento y viceversa.

Durante muchos años, no hubo consenso general sobre la validez o no del principio de incertidumbre debido a la característica negativa de los argumentos que componen el principio. Lo cual, lleva a limitaciones de las mediciones en mecánica cuántica.

Es hasta el año 2007 cuando se demuestra el contenido completo del principio de incertidumbre. Paul Busch, et al. [1]. Deducen que, el principio de incertidumbre comprende tres tipos de relaciones de incertidumbre conceptualmente distintos. Demuestran que la relación de incertidumbre no es sólo una condición suficiente sino también necesaria para la posibilidad de la medición conjunta de posición y el momento, para mayor análisis se puede analizar la referencia [1]. En este caso, para los objetivos de la tesis sólo mencionamos dicho trabajo. Ya que, para los fines necesarios del presente trabajo más adelante se trataran los problemas que tienen que ver exclusivamente con las relaciones de incertidumbre estándar.

1.3. Derivación de la relación general de incertidumbre.

En el acto de la medición, sabemos que para cualquier observable A , la dispersión de datos del experimento está dado por.

$$\Delta A = \hat{A} - \langle A \rangle. \quad (1.7)$$

Principio de incertidumbre

1.3. Derivación de la relación general de incertidumbre.

Recordemos que los observables son representados por operadores Hermiticos (\hat{A}). Se reproduce, que tanto se desvían los datos del valor promedio, esto comúnmente se conoce como el "desparramamiento" de datos. Sin embargo, al calcular el valor esperado de esta cantidad $\langle \Delta A \rangle$ claramente da cero. Lo cual lleva a definir la varianza.

$$\sigma^2 \equiv \langle (\Delta A)^2 \rangle. \quad (1.8)$$

Por lo tanto, para cualquier observable A , la varianza es,

$$\sigma_A^2 = \left\langle \left(\hat{A} - \langle A \rangle \right)^2 \right\rangle. \quad (1.9)$$

Esto es,

$$\sigma_A^2 = \left\langle \Psi \left| \left(\hat{A} - \langle A \rangle \right)^2 \Psi \right\rangle = \left\langle \left(\hat{A} - \langle A \rangle \right) \Psi \left| \left(\hat{A} - \langle A \rangle \right) \Psi \right\rangle = \langle f | f \rangle, \quad (1.10)$$

con $f = \left(\hat{A} - \langle A \rangle \right) \Psi$, del mismo modo para un observable B ,

$$\sigma_B^2 = \langle g | g \rangle \quad \text{con} \quad g = \left(\hat{B} - \langle B \rangle \right) \Psi. \quad (1.11)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \sigma_A^2 \sigma_B^2 &= \langle f | f \rangle \langle g | g \rangle \\ &= \left\langle \left(\hat{A} - \langle A \rangle \right) \Psi \left| \left(\hat{A} - \langle A \rangle \right) \Psi \right\rangle \left\langle \left(\hat{B} - \langle B \rangle \right) \Psi \left| \left(\hat{B} - \langle B \rangle \right) \Psi \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Sabemos por definición que el producto interno de 2 funciones es:

$$\langle f | g \rangle \equiv \int_a^b f(x)^* g(x) dx. \quad (1.13)$$

Entonces, la ecuación 1.12 queda:

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx \int_a^b |g(x)|^2 dx. \quad (1.14)$$

Principio de incertidumbre

1.3. Derivación de la relación general de incertidumbre.

Luego usamos la desigualdad de Schwarz

$$\left| \int_a^b f(x)^* g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx \int_a^b |g(x)|^2 dx} \quad (1.15)$$

Es válido usar la desigualdad de Schwarz ya que f y g son ambas funciones cuadrado-integrables. Aplicando la desigualdad,

$$\sigma_A \sigma_B \geq \left| \int_a^b f(x)^* g(x) dx \right|. \quad (1.16)$$

Tenemos

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq |\langle f|g \rangle|^2. \quad (1.17)$$

Ahora, para cualquier numero complejo z

$$|z|^2 = [\operatorname{Re} z]^2 + [\operatorname{Im} z]^2 \geq [\operatorname{Im} z]^2 \quad (1.18)$$

Pero, $\operatorname{Im} z = \frac{z - z^*}{2i}$. Entonces,

$$|z|^2 \geq \left(\frac{1}{2i} (z - z^*) \right)^2. \quad (1.19)$$

Para la Ec. 1.17 sea $z = \langle f|g \rangle$, así:

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq |\langle f|g \rangle|^2 \geq \left[\frac{1}{2i} (\langle f|g \rangle - \langle f|g \rangle^*) \right]^2. \quad (1.20)$$

Luego, $\langle f|g \rangle^* = \langle g|f \rangle$, entonces

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left[\frac{1}{2i} (\langle f|g \rangle - \langle g|f \rangle) \right]^2. \quad (1.21)$$

Aparte calculamos:

$$\begin{aligned} \langle f|g \rangle &= \left\langle \left(\hat{A} - \langle A \rangle \right) \Psi \left| \left(\hat{B} - \langle B \rangle \right) \Psi \right\rangle = \left\langle \Psi \left| \left(\hat{A} - \langle A \rangle \right) \left(\hat{B} - \langle B \rangle \right) \Psi \right\rangle \\ &= \langle \hat{A} \hat{B} \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Principio de incertidumbre

1.4. Relación de incertidumbre de Heisenberg

Recíprocamente,

$$\langle g|f\rangle = \langle \hat{B}\hat{A}\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle. \quad (1.23)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \langle f|g\rangle - \langle g|f\rangle &= \langle \hat{A}\hat{B}\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle - \langle \hat{B}\hat{A}\rangle + \langle A\rangle\langle B\rangle \\ &= \langle \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\rangle = \langle [\hat{A}, \hat{B}]\rangle. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Por lo tanto

$$\sigma_A^2\sigma_B^2 \geq \left[\frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}]\rangle \right]^2. \quad (1.25)$$

La ecuación anterior nos representa la relación general de incertidumbre llamada así por que está en términos de dos observables A y B cualesquiera. De hecho, tales observables que son representados por operadores Hermiticos pueden ser en particular cantidades tales como posición, momento, energía y tiempo; en generar las más conocidas relaciones de incertidumbre, a partir de calcular el correspondiente conmutador. Más adelante, veremos que la dependencia en la Ec. 1.25 con el conmutador y por lo tanto, con el sistema nos lleva a críticas severas sobre la afirmación de que tal expresión sea una relación adecuada y sobre todo completa para describir el principio de incertidumbre cuántica.

1.4. Relación de incertidumbre de Heisenberg

Considerando la relación de incertidumbre general (Ec. 1.25) podemos deducir relaciones de incertidumbre específicas tales de como la de Heisenberg. De hecho las primeras relaciones de incertidumbre propuestas por Heisenberg fueron la definida a partir de la posición y el momento.

Principio de incertidumbre

1.5. Problemas con las relaciones de incertidumbre estándar

1.4.1. Posición-Momento

Para este caso los observables serán $\hat{A} = q$ y $\hat{B} = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dq}$. Calculamos el conmutador

$$\begin{aligned} [q, p] f(q) &= q \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dq} f(q) - \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dq} (q f(q)) \\ &= \frac{\hbar}{i} \left(q \frac{df(q)}{dq} - q \frac{df(q)}{dq} - f(q) \right) \\ &= -\frac{\hbar}{i} f(q). \end{aligned} \tag{1.26}$$

Entonces, $[q, p] = -\frac{\hbar}{i} = i\hbar$. Por lo tanto, la ecuación 1.25 para el caso de posición y momento se reduce a:

$$\begin{aligned} \sigma_q^2 \sigma_p^2 &\geq \left[\frac{1}{2i} i\hbar \right]^2 \\ &\geq \left(\frac{\hbar}{2} \right)^2 \end{aligned} \tag{1.27}$$

Que en términos de la desviación estándar es la relación que se conoce como incertidumbre de Heisenberg.

$$\sigma_q \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{1.28}$$

1.5. Problemas con las relaciones de incertidumbre estándar

Desde su aparición, tanto la relación general de incertidumbre (Ec. 1.25) como la relación de Heisenberg (Ec. 1.28), hasta la fecha se han considerado como las relaciones de incertidumbre estándar (RIE), es decir, las relaciones que expresan adecuadamente el principio de incertidumbre. Sin embargo, con el transcurso del tiempo se ha criticado severamente la afirmación de que las RIE sean relaciones adecuadas y sobre todo completas para describir el principio de incertidumbre y los errores estadísticos de la medición.

La discusión se centra en dos aspectos. Primero, la relación 1.25 al estar en términos del conmutador de dos operadores A y B conlleva a una fuerte

Principio de incertidumbre

1.5. Problemas con las relaciones de incertidumbre estándar

dependencia con el estado del sistema, lo cual arroja bastantes limitaciones, más adelante se demostrará esto. Por otro lado, siendo el problema más grave, las RIE presentan un gran defecto en su dependencia con la desviación estándar como una medida de incertidumbre cuántica. Cabe mencionar, que aún en nuestros días bastante literatura y en general en el estudio de la física, se considera a las RIE como una expresión del principio de incertidumbre a pesar de los problemas que se tienen con dichas expresiones. Tal popularidad de las Ecs. 1.25 y 1.28 y apego a ellas quizás refleje una cierta vaguedad en la interpretación de la mecánica cuántica y el principio de incertidumbre. En los siguientes apartados se presentan y se demuestran los dos problemas.

1.5.1. La desviación estándar como una medida de anchura

En la teoría clásica, los errores de medición son causados por la influencia de varios factores perturbadores. Si además, las perturbaciones son causadas por factores independientes, el error que es la diferencia entre el valor verdadero y el valor medio sigue una distribución Gaussiana. Ahora, ya que, la desviación estándar es una medida apropiada de la propagación de una Gaussiana, entonces, también será apropiada como una estimación de la magnitud del error esperado. Sin embargo, sea señalado por muchos autores que el concepto cuántico de incertidumbre no está de acuerdo con el concepto clásico de errores. Ya que, en la teoría cuántica el resultado de las mediciones son ideales y en general impredecibles. La distribución de los resultados ideales está dada por el modulo al cuadrado de la función de onda del sistema, es decir, trataremos con distribuciones de probabilidad. En el siguiente ejemplo, se muestra claramente como la desviación estándar no puede ser una buena medida de incertidumbre. Demostraremos que al tomarla como medida de anchura ésta diverge.

Ejemplo de problema

Consideramos un haz de luz que se hace incidir en una pantalla con una rendija infinitamente larga de anchura $2a$. Consideramos el momento p y la coordenada de posición q perpendicular a la rendija. Como simple modelo

Principio de incertidumbre

1.5. Problemas con las relaciones de incertidumbre estándar

para la función de onda tomamos a $\psi(q)$ dado por:

$$\psi(q) = (2a)^{-1/2} \quad \text{Si } |q| \leq a \quad (1.29)$$

$$\psi(q) = 0 \quad \text{En otra parte}$$

En la Figura 1.1 [2], se presenta la distribución de la posición para la difracción de una rendija, siendo la función de onda descrita por la Ec. 1.29.

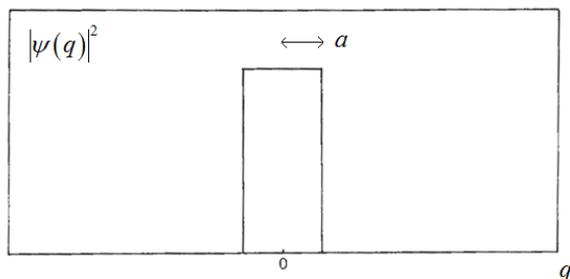


Figura 1.1: Distribución de la posición para la difracción de una rendija.

Recordamos que la función de onda en el espacio de momento es la transformada de Fourier de la función de onda en el espacio de posición. Entonces, calculamos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \phi(p) &= \mathcal{F}\{\psi(q)\} = (2\pi)^{-1/2} \int [\psi(q)]e^{ipq}dq \\ &= (2\pi)^{-1/2} \int_{-a}^a [(2a)^{-1/2}]e^{ipq}dq \\ &= \frac{1}{2(a\pi)^{1/2}} \frac{2i \sin(ap)}{ip} = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\sin(ap)}{ap}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Así, la función de onda en el espacio de momento es:

$$\phi(p) = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\sin(ap)}{ap}. \quad (1.31)$$

Al graficar el modulo al cuadrado de la Ec. 1.31 se encuentra la correspondiente distribución para el momento tal como se muestra en la Figura 1.2 [2].

Principio de incertidumbre

1.5. Problemas con las relaciones de incertidumbre estándar

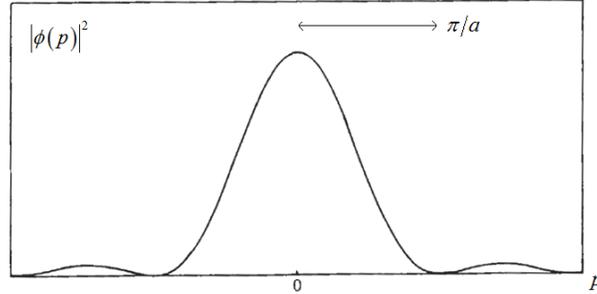


Figura 1.2: Distribución del momento para la difracción de una rendija.

Al comparar las gráficas de cada figura podemos observar la proporcionalidad inversa bien definida entre la anchura de la rendija ($\sim a$) y la anchura del pico central en el espacio momento ($\sim 1/a$). En principio, esto se podría tomar como prueba de la validez para este caso del principio de incertidumbre. Sin embargo, ya se ha discutido que en el concepto cuántico de incertidumbres, se tiene que considerar las distribuciones de probabilidad. De la tal forma, el principio de incertidumbre nos diría: si la distribución de probabilidad de $p(q)$ se comprime la distribución de probabilidad de $q(p)$ debe llegar a ser más amplio. No obstante, esta afirmación no se cumple para este ejemplo específico. En otras palabras, no se cumple la relación de Heisenberg.

$$\sigma_q \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Para ser más específicos, considerando que σ_q y σ_p nos representa la anchura de cada distribución. Vemos que, σ_q es del orden de a , entonces para que se cumpla el principio de incertidumbre σ_p debe ser del orden de $1/a$. Sin embargo, tal relación de la anchura de la distribución en el espacio momento no se cumple. Peor aún, demostraremos que diverge debido a las pequeñas contribuciones de las partes distantes de $\phi(p)$.

Prueba:

Necesitamos calcular la varianza en el espacio de momento. La cual, está definida de la siguiente manera:

$$\sigma_p^2 = \langle (\Delta p)^2 \rangle = \langle \phi | (\Delta p)^2 \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (\Delta p)^2 |\phi(p)|^2 dp. \quad (1.32)$$

Principio de incertidumbre

1.5. Problemas con las relaciones de incertidumbre estándar

También sabemos:

$$\sigma_p^2 = \langle (\Delta p)^2 \rangle = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2, \quad (1.33)$$

si el valor medio de p es cero, nos queda:

$$\langle (\Delta p)^2 \rangle = \langle p^2 \rangle \Rightarrow (\Delta p)^2 = p^2. \quad (1.34)$$

Por lo tanto, la varianza la vamos a calcular con la expresión:

$$\sigma_p^2 = \int_{-\infty}^{\infty} p^2 |\phi(p)|^2 dp. \quad (1.35)$$

Hacemos el cálculo

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} p^2 \left| \left(\frac{a}{\pi} \right)^{1/2} \frac{\sin(ap)}{ap} \right|^2 dp = \int_{-\infty}^{\infty} p^2 \left(\left(\frac{a}{\pi} \right)^{1/2} \frac{\sin(ap)}{ap} \right)^2 dp \\ &= \left(\frac{a}{\pi} \right) \int_{-\infty}^{\infty} p^2 \left(\frac{\sin(ap)}{ap} \right)^2 dp = \frac{1}{a\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(ap) dp \\ &= \frac{1}{a\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2ap) \right] dp = \frac{1}{a\pi} \left[\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t dp - \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t \cos(2ap) dp \right] \\ &= \frac{1}{2a\pi} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} t - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin(2at)}{2a} \Big|_{-t}^t \right] \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (1.36)$$

Hemos demostrado que la anchura de la distribución en el espacio momento diverge, esto debido a que se asigna un peso cada vez mayor a las partes distantes de la distribución $\phi(p)$. De hecho, conforme a el ancho en el espacio de posición aumente, en el espacio de momento la distribución de probabilidad se concentra surgiendo intervalos cada vez más pequeños provocando con estas pequeñas pero cada vez más contribuciones que σ_p cada vez sea más grande. En conclusión, no se cumple el principio de incertidumbre, debido a que se tienen un gran problema con la medida de anchura en el espacio de momento.

Entonces, la desviación estándar puede ser una buena medida para la propagación de una distribución Gaussiana. Sin embargo, no es una buena

Principio de incertidumbre

1.6. La dependencia de la RGI con el estado.

medida para la propagación o la anchura de una distribución en general. Aquí, es donde observamos la validez de la expresión “el concepto cuántico de incertidumbre no está de acuerdo con el concepto clásico de errores”. En el concepto clásico, nuestro error sigue una distribución Gaussiana para la cual podemos medir su anchura con la desviación estándar, que sin duda es una buena medida para la propagación de la distribución. Sin embargo, ésta medida de anchura no es válida en el concepto cuántico de incertidumbres ya que, ahora la distribución está dada por el modulo al cuadrado de la función de onda y tal distribución no siempre será Gaussiana. Así que, en este caso la desviación estándar no será una buena medida de anchura. De tal forma, tenemos que buscar una nueva medida de incertidumbre que nos mida correctamente cualquier distribución en general y así tener un correcto concepto cuántico de incertidumbre. Para encontrar finalmente, la relación apropiada para la incertidumbre cuántica

1.6. La dependencia de la RGI con el estado.

El otro problema tiene que ver con la relación general de incertidumbre (RGI), Ec. 1.25.

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left[\frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right]^2$$

Claramente, el lado derecho de la ecuación depende del estado del sistema. A causa de la dependencia con el conmutador entre dos operadores \hat{A} y \hat{B} . La limitación de dicha relación surge cuando el lado derecho de la relación llega a ser cero. Lo cual, ocurre cuando el operador \hat{A} o \hat{B} tiene eigenestado. Veamos:

Sea $|\psi\rangle$ eigenestado del operador \hat{A} entonces, la ecuación de eigenvalores es:

$$\hat{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle. \quad (1.37)$$

Dado que \hat{A} es operador auto adjunto $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$. Entonces

$$\langle\psi|\hat{A} = a\langle\psi|. \quad (1.38)$$

Entonces, al calcular el conmutador,

$$\begin{aligned} \langle \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \rangle &= \langle\psi|(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{A}\hat{B}|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{B}\hat{A}|\psi\rangle \\ &= a\langle\psi|\hat{B}|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{B}|\psi\rangle a = 0. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Principio de incertidumbre

1.7. Propuestas alternativas.

Por lo tanto, la dependencia de la Ec. 1.25 con el estado del sistema concluye que la relación general de incertidumbre no es adecuada ni completa. Se tiene que buscar opciones alternativas, como más adelante veremos lo son las relaciones de incertidumbre entrópicas.

1.7. Propuestas alternativas.

Con el fin, de dar solución a los problemas de las relaciones de incertidumbres estándar antes planteados. Primero, se define una nueva medida de anchura para la dispersión de la distribución de intensidad. Posteriormente, se presenta una mejor solución construyendo una medida de incertidumbre a partir de la teoría de probabilidades. Con esto se está asegurando que la nueva medida probabilista de incertidumbre no sufra las deficiencias de la desplazada desviación estándar. Con las entropías de Shannon como las nuevas medidas de incertidumbre se generan finalmente las relaciones de incertidumbre entrópicas, las cuales ya no tienen problemas como los tenían las RIE, siendo ahora relaciones completas.

1.7.1. Anchura media de pico como otra medida de anchura

Se ha especificado que la desviación estándar en el concepto cuántico de incertidumbres es una mala medida de anchura para la distribución en el espacio momento, y en general, en el espacio definido por la transformada de Fourier de la función de onda. Razón por la cual, se define una nueva medida de anchura.

Existe una relación general entre la anchura de una función y su transformada de Fourier que es esencial para el principio de incertidumbre. En lo que sigue, hablaremos de la anchura de la distribución de ϕ que corresponde al espacio de la transformada de Fourier de ψ . La relación tiene que ver con la estructura fina de la función ϕ y no con la anchura total W . Como estructura fina se refiere a la anchura media de pico ver Figura 1.4.

El principal problema, es el de encontrar una medida útil para la anchura de la estructura fina de una función de onda. Tal medida puede ser obtenida

Principio de incertidumbre

1.7. Propuestas alternativas.

considerando la función de auto correlación de la función original,

$$f(q') = \int \psi^*(q) \psi(q - q') dq. \quad (1.40)$$

Entonces, es posible definir la anchura media de los picos w_ψ de ψ como el valor más pequeño de w para el cual:

$$|f(w)| = \left| \int \psi^*(q) \psi(q - w) dq \right| = m, \quad (1.41)$$

el valor m es elegido positivo y menor que 1.

Para comprender mejor, veamos lo siguiente. $|f(w)|^2$ es la densidad de probabilidad de encontrar el estado desplazado $\psi(q - w)$ en el estado $\psi(q)$. En otras palabras, es la probabilidad de encontrar $\psi(q - w)$, con w pequeño, dentro de lo que llamamos anchura media de los picos. Esta definición, da buenos resultados para funciones con estructura en pico como el ejemplo de la doble rendija mencionado arriba.

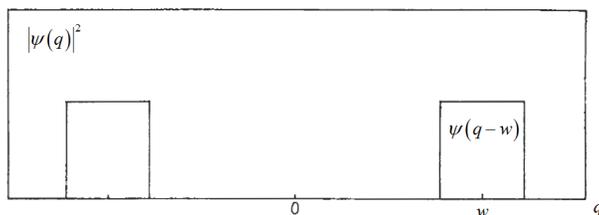


Figura 1.3: Densidad de probabilidad de encontrar el estado desplazado en el estado .

Finalmente, se puede generar una relación de incertidumbre definida en términos de la anchura total de una función de onda y la anchura media de los picos en el espacio que visualiza la transformada de Fourier de la función de onda, si y solo si, $m = 2N - 1$ [3]. Así, la relación de incertidumbre queda:

$$W_\psi w_\phi \geq C(N, m) \quad \text{Con } m \leq 2N - 1. \quad (1.42)$$

Específicamente, en el ejemplo donde se muestra el problema de tomar a la desviación estándar como una medida de anchura consideramos las cantidades posición-momento. Entonces, de manera particular podemos escribir la relación de incertidumbre como:

$$W_q w_p \geq C'(N, m). \quad (1.43)$$

Principio de incertidumbre

1.7. Propuestas alternativas.

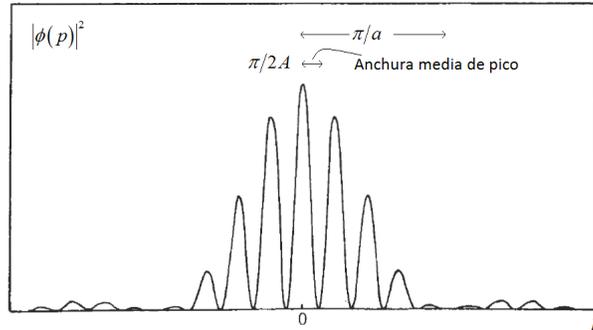


Figura 1.4: Anchura media de pico

Siendo:

$W_q \rightarrow$ Anchura total de la distribución en el espacio posición.

$w_p \rightarrow$ Anchura media de pico de la distribución en el espacio momento.

$C'(N, m) \rightarrow$ Es un número positivo que solo depende de N y m .

$N \rightarrow$ Tiene que ver con las fracciones existentes en la distribución de la posición.

En general, la ecuación 1.42 es válida para cualquier par de cantidades observables, no sólo para posición-momento.

De manera general, podemos concluir. Se ha resuelto el problema de tomar a la desviación estándar como una medida de anchura. Encontrando, la medida de anchura adecuada en el espacio de momento, y en general, en el espacio de la transformada de Fourier de la función de onda. Esta medida será la anchura de la estructura fina, es decir, la anchura media de pico obtenida a partir de una función de auto correlación de la función original. Finalmente, a partir de esta nueva y adecuada medida de anchura se propone una relación de incertidumbre alterna dada por la Ec. 1.42. Relación, válida para cualquier densidad de distribución en mecánica cuántica.

Principio de incertidumbre

1.7. Propuestas alternativas.

1.7.2. Relaciones de incertidumbre entrópicas.

En las últimas secciones hemos tratado los inconvenientes que tienen las relaciones de incertidumbre estándar (RIE). Exhibimos, el grave problema que se tiene al tomar a la desviación estándar como medida de anchura de la distribución de probabilidad. Lo cual muestra una errónea definición de la desviación estándar como medida de incertidumbre. También, probamos las limitaciones de la relación de incertidumbre general al depender del estado. Una solución a estos problemas tratada en la sección 1.7.1 fue proponer una nueva medida de anchura en lugar de la desviación estándar. Se tomó la anchura media de pico como la medida de distribución. Sin embargo, aún queda el problema de la relación de incertidumbre general y su dependencia con el estado del sistema.

Es aquí donde, se retoma la importancia de distinguir la diferencia entre el error de medición en mecánica clásica y el concepto cuántico de incertidumbres. Como ya se discutió, la distribución de los resultados de un experimento en mecánica cuántica, está dado por el modulo al cuadrado de la función de onda, es decir, se involucran distribuciones de probabilidad. Entonces, sería conveniente no sólo definir medidas de anchura de la dispersión de cierta distribución, sino que, profundizar más y construir una medida de incertidumbre a partir de la teoría de probabilidades. De esta forma, no se estará hablando vagamente de errores de medición. Al contrario, en base a la teoría de probabilidad, se estará hablando de una correcta definición de medida probabilística de incertidumbre, esto es, el correcto concepto cuántico de incertidumbre. Claramente, al encontrar una medida estadística de incertidumbre se podrá generar relaciones de incertidumbre que no sufran las deficiencias de las RIE.

En teoría de probabilidad, la noción de incertidumbre está dada por la cantidad principal de una variable aleatoria que da la magnitud incierta del promedio de los posibles resultados de un experimento aleatorio. Ahora, existen varias medidas de incertidumbre de una variable aleatoria en teoría de probabilidad [3], que se dividen en:

Medidas de momento, para la cual la incertidumbre de la variable aleatoria está dada por la dispersión de sus valores. Ciertamente, esta es la definición que se ha tomado para las RIE.

Principio de incertidumbre

1.7. Propuestas alternativas.

Y la otra clase, son las incertidumbres entrópicas que es un tipo de medida probabilística con la particularidad, que contienen sólo elementos de la distribución de probabilidad de una variable aleatoria, que es justamente lo que tenemos en mecánica cuántica. Por lo tanto, esta es la clase de medida probabilística que nos conviene. De tal modo, para definir relaciones de incertidumbre adecuadas y sobre todo completas consideraremos medidas de incertidumbre entrópicas.

Entropías de Shannon

Comenzamos, por construir la medida adecuada de incertidumbre U . Suponemos que entre más resultados alternativos tenga el experimento aleatorio, mayor es su incertidumbre. Entonces, cuando se realizan dos experimentos aleatorios con n y m los resultados simultáneos, la incertidumbre total de ambos experimentos está dada por la suma de las incertidumbres

$$U(q) = U(n) + U(m), \quad (1.44)$$

siendo $q = n \cdot m$ el número de resultados efectivos de ambos experimentos. La solución a la Ec. 1.45 está dada por:

$$U(n) = k \log n. \quad (1.45)$$

Que representa la primera medida de incertidumbre introducida por el ingeniero estadounidense Hartley quien la llamo "información". La Ec. 1.45 es válida siempre y cuando se cumpla el principio de probabilidades a priori, es decir, todos los resultados individuales del experimento aleatorio sean igualmente probables. De lo contrario, la Ec. 1.45 se generaliza

$$U = k \sum_{i=1}^n p_i \log (1/p_i). \quad (1.46)$$

La Ec. 1.46 es también una medida de incertidumbre demostrado por Shannon, cuando los resultados no son equiprobables. Para el caso particular, $k = 1$ la Ec. 1.46 recibe el nombre de entropía de Shannon que representa la medida probabilística más importante para una variable aleatoria.

Principio de incertidumbre

1.7. Propuestas alternativas.

Entonces, Para una variable aleatoria discreta \tilde{x} , su entropía de Shannon puede ser escrita de la forma:

$$S = - \sum_{i=1}^n P(x_i) \ln P(x_i). \quad (1.47)$$

Ahora bien, para definir la entropía de una variable aleatoria continua \tilde{x}_c . Se considera que la probabilidad de \tilde{x}_c asume valores en el intervalo $\langle x_i, x_i + \Delta x_i \rangle$, entonces $P(x_i) \approx p(\bar{x}_i) \Delta x$ donde \bar{x}_i es el i -ésimo elemento del intervalo. Así que, la entropía de Shannon para este caso es:

$$\begin{aligned} S(\tilde{x}_c) &\approx - \sum_{i=1}^n p(\bar{x}_i) \Delta x \log(p(\bar{x}_i) \Delta x) \\ &= - \sum_{i=1}^n p(\bar{x}_i) \log p(\bar{x}_i) \Delta x - \sum_{i=1}^n (p(\bar{x}_i) \Delta x) \log \Delta x. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Después de tomar intervalos infinitesimales se llega a la entropía de variables aleatorias continuas

$$S_c = - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log p(x) dx. \quad (1.49)$$

Recapitulando, las Ecs. 1.47 y 1.49 son las entropías de Shannon para variables aleatorias discretas y continuas respectivamente, que representan las medidas de incertidumbre correctas para describir el concepto cuántico de incertidumbres. Razón por la cual, si se hace referencia a las medidas de incertidumbre entrópicas es exactamente lo mismo que señalar las entropías de Shannon, es importante enfatizar esto para evitar posibles confusiones. Son las entropías de Shannon las que se usaran más adelante para generar las relaciones de incertidumbre entrópicas.

Examinemos brevemente ahora, los problemas que surgían al tomar a la desviación estándar como medida de incertidumbre ya no ocurren para las entropías de Shannon. Para probar esto, retomamos el ejemplo de la pantalla con una rendija de ancho $2a$. Se demostró que σ_p (desviación estándar) diverge. Ahora, considerando como medida de incertidumbre las entropías de Shannon demostraremos que es finita.

Principio de incertidumbre

1.7. Propuestas alternativas.

Evidentemente, tendremos que usar el caso continuo, es decir, la entropía de Shannon dada por la Ec. 1.49. Sabemos que la densidad de probabilidad para el momento es:

$$q(p) = |\phi(p)|^2, \quad (1.50)$$

con: $\phi(p) = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\sin(ap)}{ap}$. La función de onda en el espacio momento.

Por nomenclatura, se tomó $q(p)$, evidentemente en la Ec. 1.49 esto corresponde a $p(x)$, existiendo la correspondencia entre las variables $p \rightarrow x$. Entonces, el cálculo de la entropía es:

$$\begin{aligned} S_p &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a (\sin ap)^2}{\pi (ap)^2} \log \left(\frac{a (\sin ap)^2}{\pi (ap)^2} \right) dp \\ &= \log \left(\frac{\pi}{a} \right) + \frac{1}{\pi}, \end{aligned} \quad (1.51)$$

donde

$$I = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sin y)^2}{y^2} \log \frac{(\sin y)^2}{y^2} dy \approx 2. \quad (1.52)$$

Encontramos que la entropía del momento es finita y que además depende de la anchura a . Esto es una prueba convincente de la validez de las entropías de Shannon como medida de incertidumbre.

Relaciones de incertidumbre entrópicas

Las relaciones de incertidumbre entrópicas se construyen de la siguiente manera:

Consideremos el vector de estado $|\Psi\rangle$ contenido en el espacio de Hilbert \mathcal{H} . También consideremos dos observables A y B con eigenvectores $|a_i\rangle$ y $|b_i\rangle$ respectivamente. Entonces, la relación de incertidumbre entrópica estará representada por la suma de las entropías de los dos observables los cuales no conmuta, de tal manera que se cumpla la desigualdad.

$$S^A + S^B \geq S_{AB}, \quad (1.53)$$

Principio de incertidumbre

1.7. Propuestas alternativas.

donde

$$S^{(A)} = \sum_i |\langle \Psi | a_i \rangle|^2 \ln |\langle \Psi | a_i \rangle|^2, \quad (1.54)$$

$$S^{(B)} = \sum_j |\langle \Psi | b_j \rangle|^2 \ln |\langle \Psi | b_j \rangle|^2.$$

S_{AB} . Es una constante positiva que representa el límite inferior de la desigualdad 1.53 [4]. En el caso de variables aleatorias continuas, que correspondería por ejemplo a los observables $A = x \rightarrow$ posición y $B = p \rightarrow$ momento, considerando las funciones de onda $\psi(x)$ y $\phi(p)$. La relación de incertidumbre para este caso queda:

$$S^x + S^p \geq S_{xp}, \quad (1.55)$$

donde

$$S^{(x)} = - \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 \ln |\Psi(x)|^2 dx, \quad (1.56)$$

$$S^{(p)} = - \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(p)|^2 \ln |\phi(p)|^2 dp. \quad (1.57)$$

Las Ecs. 1.56 y 1.57 representan las entropías de la posición y el momento respectivamente. Y la Ec. 1.55 es la relación de incertidumbre entrópica alternativa a la relación de incertidumbre de Heisenberg, válida para cualquier densidad de probabilidad.

Para finalizar, la Ec. 1.53 representa la relación de incertidumbre entrópica definida en términos de las entropías de Shannon dadas por la Ec. 1.54. Esta relación de incertidumbre entrópica es válida para cualesquiera observables A y B que no conmuten, también dicha relación como ya se demostró es libre de cualquier deficiencia que tuviera las RIE. Por lo tanto, podemos concluir que la Ec. 1.53 es una relación de incertidumbre completa y adecuada.

Bibliografía

- [1] P. Busch, T. Heinonen, and P. Lahtu, *Physics. Reports*, **452**, 155-176 (2007).
- [2] J. Hilgevoord and J. B. M. Uffink, *Eur. J. Phys.*, **6**, 165-170 (1985).
- [3] V. Majernik and L. Richterek, *Eur. J. Phys.*, **18**, 79-89 (1997).
- [4] D. Deutsch, *Phys. Rev. Lett.*, **50**, 9 (1983).

Capítulo 2

Enredamiento Cuántico

En los inicios de la mecánica cuántica, los autores intelectuales del desarrollo de esta rama de la física seguramente jamás se imaginaron el gran impacto tecnológico y de conocimiento que tendría el mundo cuántico en la razón humana. Todo acompañado por un sin número de discusiones debido a discordancias entre los físicos de la época que hicieron posible tal desarrollo, y es que la mecánica cuántica desde sus inicios siempre ha sido una teoría llena de paradigmas y sorpresas por descubrir. Por ello, la importancia de iniciar este capítulo como un breve recuento del origen de esta fascinante disciplina, para después llegar con el surgimiento del fenómeno de enredamiento cuántico así como su desarrollo formal en la mecánica cuántica.

Del mismo modo que, empezaron a resolverse problemas gracias a la teoría cuántica antes no resueltos con la mecánica clásica, empezaron a surgir otros fenómenos cuyo comportamiento era desconocido y no entendido, originando nuevas preguntas por contestar que llamaron la atención de la comunidad científica. Entre estos fenómenos sobresale el que nos ocupa, el enredamiento cuántico. Siendo este la base del desarrollo de esta tesis.

2.1. Mecánica Cuántica

El físico alemán Max Planck es quien inicia la mecánica cuántica al resolver el problema de la radiación de cuerpo negro en el año 1900. El problema de la radiación de cuerpo negro o radiación térmica consistía en explicar por qué un cuerpo emitía radiación como consecuencia de su temperatura,

Enredamiento Cuántico

2.1. Mecánica Cuántica

para esa época los físicos trataban de explicar este fenómeno de radiación basándose en la teoría de ondas electromagnéticas ya que en el siglo XIX y principios del XX se tenía claro y era inobjetable que la luz era una onda electromagnética. Sin embargo, este problema no podía ser explicado basándose en el pensamiento clásico, los resultados experimentales no concordaban con las predicciones de dicha teoría. Tal problema, al parecer sin salida, ocasionó que muchos físicos desertaran en el intento por resolverlo pero no fue el caso de Max Planck quien continuó trabajando hasta poder explicarlo. Planck dio solución al problema olvidando que la energía que llegaba al cuerpo era continuo y pensando que dicha energía llegaba de forma discreta, en otras palabras Planck enunció la hipótesis que la radiación electromagnética es absorbida y emitida por la materia en forma de cuantos de luz, más tarde llamados fotones, fue el principio de la cuantificación de la energía. A pesar de que, con esta hipótesis el problema se solucionaba, el propio Planck no daba crédito a su hipótesis al punto de decir que sólo era un artificio matemático para resolver dicho problema, dejando en claro que no era una descripción correcta del comportamiento físico.

Fue Albert Einstein que apenas comenzaba su carrera prodigiosa como físico quien dio crédito a los trabajos de Planck, retomando estas ideas propuso que efectivamente la luz en ciertas circunstancias se comportaba como partículas cuya característica era que su energía estaba cuantificada. Posteriormente, basándose en esta teoría pudo explicar el efecto fotoeléctrico, un fenómeno descubierto por Heinrich Hertz en 1887 pero no explicado teóricamente hasta 1905 por Albert Einstein quien desarrolló y explicó de manera concluyente tal efecto a partir de la teoría de cuantos de Planck. Cabe destacar que el trabajo del efecto fotoeléctrico fue publicado por el físico alemán en el año de 1905, en el conocido *Annus Mirabilis* donde Einstein además de este artículo publicó tres más de gran relevancia en el mundo físico, y cuyo trabajo sobre el efecto fotoeléctrico lo llevo a ganar más tarde el premio nobel de física.

Después de Planck y Einstein continuó Niels Bohr en el desarrollo de la mecánica cuántica, quien basándose en las teorías del átomo de Rutherford, publicó su modelo atómico en 1913, introduciendo la teoría de las órbitas cuantificadas que consistía en el modelo, donde el átomo estaba conformado por un núcleo y electrones orbitando a ciertas distancias permitidas denominadas distancias discretas; además el número de electrones aumentaba en

Enredamiento Cuántico

2.1. Mecánica Cuántica

cada orbita desde el interior hacia el exterior.

Otro hecho importante en el desarrollo de la teoría cuántica fue el experimento hecho por el físico Arthur Compton en 1923 quien pudo explicar a partir de la teoría de cuantos el corrimiento en la longitud de onda de un fotón de rayos X al dispersarse en el choque con un electrón libre. Fenómeno denominado efecto Compton que nuevamente no era posible explicar desde el punto de vista de ondas electromagnéticas, tal experimento constituyó la demostración final de la naturaleza corpuscular de la luz tras los estudios de Planck sobre la radiación de cuerpo negro y la explicación de Albert Einstein del efecto fotoeléctrico. Los trabajos de Compton también lo llevaron a ganar el premio nobel en 1927.

Posterior al efecto Compton, el conocimiento sobre la radiación electromagnética cambio, entendiend y aceptando que la radiación tiene un comportamiento dual, es decir, un comportamiento ondulatorio y corpuscular. Así, continuo el paso de la mecánica cuántica con Louis De Broglie, quien en su tesis doctoral de 1924 propuso que la dualidad de la radiación debería ser aplicable a la materia, es decir, tanto el fotón como cualquier partícula de materia como un electrón tiene asociada una onda que gobierna su movimiento, surgió la idea de la existencia de ondas de materia. En su hipótesis De Broglie determinó una relación que asocia la descripción ondulatoria y la corpuscular, relacionó la característica más sobresaliente de una partícula como lo es el momento lineal $P = mv$ con el periodo espacial λ una característica inequívoca de una onda. Es así, como inicia el concepto de dualidad onda partícula que se refiere, en palabras dichas por De Broglie “Toda materia presenta características tanto ondulatorias como corpusculares comportándose de uno u otro modo dependiendo del experimento específico”.

No obstante, faltaba una teoría para conectar las ideas y aclarar como una onda podía actuar como partícula y viceversa y explicar así el misterio de la dualidad onda partícula. Es como llegamos, a 1925 con el físico Austriaco Erwin Schrödinger quien formuló una ecuación que lleva su nombre. La ecuación de Schrödinger es una ecuación de movimiento válida para las ondas de materia cuya existencia había propuesto De Broglie. Dicha ecuación, sentó las bases de la mecánica cuántica con la cual no sólo se demostraron todos los efectos cuánticos anteriores sino que dio lugar para nuevos experimentos cuánticos.

Enredamiento Cuántico

2.2. Orígenes del enredamiento cuántico

La teoría cuántica plantea más preguntas que respuestas, muchas de estas preguntas surgen con el experimento de la doble rendija, un experimento clave para explicar la dualidad onda partícula y entender el concepto fundamental de la mecánica cuántica. En este experimento surge el gran problema de la medición que se traduce en observar, se concluye, que cuando se mide con un dispositivo físico se interacciona con el sistema perturbando los resultados, sin embargo, mientras un objeto cuántico no interactúa con su entorno, por lo general, no tiene una posición definida, normalmente se distribuye en muchas posiciones, es lo que se denomina superposición cuántica, es como si un objeto cuántico pudiera hacer diferentes cosas o estar en diferentes lugares al mismo tiempo. Esta idea, considerada por muchos como una paradoja inquietó al mundo físico entre ellos a Schrödinger quien construyó un experimento Gedanken (experimento imaginario) para poder imaginarse este comportamiento perturbador de la mecánica cuántica. El famoso gato de Schrödinger es un experimento mental sobre las implicaciones de la superposición cuántica, que tenía como objetivo mostrar lo absurdo de las implicaciones de la teoría, pero que, por otro lado, creo más expectativa y estruendo aún a la fecha. Estas son las ideas perturbadoras que hacen a la mecánica cuántica tan intrigante.

Al igual que a Schrödinger a Einstein también le intrigo esta paradoja él creía que se podía entender todo si se descubriera una teoría más completa, para demostrarlo creó un nuevo experimento conocido como la paradoja EPR.

2.2. Orígenes del enredamiento cuántico

Hasta 1935 la comprensión conceptual de la teoría cuántica estaba dominada por las ideas de Niels Bohr, Max Born y Werner Heisenberg sobre la complementariedad y la visión de los problemas ya conocidos sobre la medición en el campo cuántico, observar un objeto cuántico involucra una interacción física con un dispositivo de medida clásico que da como resultado una perturbación incontrolable de ambos sistemas. Bohr junto con Born y Heisenberg formularon, en la interpretación de Copenhague lo que se conoce como el principio de complementariedad la cual dice que ambas descripciones la ondulatoria y la corpuscular son necesarias para comprender el mundo

Enredamiento Cuántico

2.2. Orígenes del enredamiento cuántico

cuántico. Estas ideas estaban centradas en la observación y medidas en el dominio cuántico, que además llevaron a Werner Heisenberg en 1927 a enunciar el principio de incertidumbre que desempeña un importante papel en el desarrollo de la mecánica cuántica. En cambio, Einstein expresaba un desacuerdo ante todos estos comportamientos de la mecánica cuántica, quien desde 1913 mantenía un encendido debate con Niels Bohr sobre las posibles contradicciones y errores existentes en la teoría, sin olvidar que existían otros físicos de la época que tampoco estaban de acuerdo con la situación de la teoría cuántica entre ellos Schrödinger, siendo Albert Einstein el crítico más notable. La inconformidad de Einstein estaba basada en la indeterminación de las predicciones cuánticas (problema de la medición), la no localidad de la teoría y las superposiciones de dos o más alternativas clásicamente excluyentes a lo que Einstein llamo **espeluznante acción a distancia**. Esto llevo al físico alemán a montar un experimento en colaboración con sus colegas B. Podolsky y N. Rosen que más tarde se convertiría en la paradoja EPR, para mostrar una posible incompleta teoría cuántica.

Después de que Einstein introdujera en 1935 el concepto de lo que llamo espeluznante acción a distancia, fue el físico Erwin Schrödinger quien denominó a este fenómeno en alemán como *Verschränkung*, traducido a la palabra inglesa como *entanglement*, en español *enredo* o *entrelazamiento*, de esta forma comenzó el desarrollo de las propiedades de aquellos estados de un sistema compuesto llamados, *estados enredados* o *entrelazados*.

2.2.1. Paradoja Einstein, Podolsky y Rosen (EPR)

En el ejemplar del 15 de mayo de 1935 de Physical Review, Albert Einstein apareció en un artículo con sus colegas Boris Podolsky y Nathan Rosen. El artículo se titula “*Can Quantum Mechanical Description Of Physical Reality Be Considered Complete?*” [1]. Este celebre artículo da inicio a un apasionante debate sobre la naturaleza de la descripción cuántica. Es el punto de partida, de muchos otros trabajos, continuando con uno más de Einstein, con las mismas ideas que el inicial hecho por Einstein, Podolsky y Rosen (para futuras referencias EPR), ordenadas un poco mejor con la sugerencia de Wolfgang Pauli. Posteriormente, David Bohm presentó una versión simplificada de la paradoja EPR, basada en observables de dos partículas con spin $1/2$ [2, 4]. Pasando a los trabajos de John S. Bell quien formuló el teorema de Bell y las desigualdades con el mismo nombre. Y finalmente, con los artícu-

Enredamiento Cuántico

2.2. Orígenes del enredamiento cuántico

los publicados por Alain Aspect, por mencionar los más emblemáticos que dieron forma, presentando y confirmando el comportamiento más caprichoso de la mecánica cuántica el enredo.

Para Einstein era inaceptable que la teoría cuántica tuviera predicciones en efectos no locales, es por ello que el objetivo principal de la paradoja EPR era mostrar que la idea de superposición cuántica y el fenómeno de espeluznante acción a distancia sólo eran pruebas que la mecánica cuántica carecía de realismo en el mundo físico siendo una teoría incompleta. El experimento planteado por EPR descrito en el artículo [1] y después en el publicado por Einstein con ideas de Pauli [3], consistió en tomar un par de partículas separadas por una gran distancia, luego existen dos observadores que toman cada una de las partículas, el primer observador mide la partícula A dándole así un estado que no tenía antes, el concepto clave es que al realizar la medición en A también se está determinando el estado de la partícula B gracias al enredamiento cuántico y al principio de incertidumbre. Para Einstein esto era imposible como era posible que medir algo en A afectara algo que está muy lejos. Es así como Einstein basa el desarrollo para la demostración en dos conceptos cruciales:

- Realidad física

Un elemento de la realidad física se refiere a que si una variable se puede predecir con certeza sin afectar el estado del sistema, entonces la misma variable corresponde a un elemento de la realidad física. Estas ideas están basadas en el principio de incertidumbre de Heisenberg estudiado en el capítulo anterior, el cual nos dice que el conocimiento de una de las variables llámese un observable, implica ignorancia sobre la otra.

- Teoría local

Una teoría local o también enunciado como principio de localidad es aquella que excluye la posibilidad de la acción a distancia, dicho en otros términos no es posible la conexión entre dos observables separados por una distancia considerable, ya que de haber algún tipo de conexión violaría la teoría relativista; nada viaja más rápido que la luz. Cabe aclarar que en estas instancias, Einstein ya había publicado sus artículos sobre relatividad especial en 1905.

Lo que Einstein y sus colegas intentaron mostrar es que dos observables en un estado enredado (comportamiento característico de la mecánica cuántica)

Enredamiento Cuántico

2.2. Orígenes del enredamiento cuántico

podrían pertenecer a la misma realidad física, esto implicaría que los observables tienen realidad simultánea y por lo tanto la realidad dada por la función de onda no es completa, ya que, de ser así la función de onda debería predecir valores concretos lo cual no ocurre. Concluyendo, que si la mecánica cuántica fuese local (como se supone debe ser toda teoría razonable) daría una descripción incompleta de la realidad física.

La paradoja EPR constituyó uno de los cuestionamientos más fuertes que recibió la Mecánica Cuántica, pero a la vez funcionó como un poderoso estimulante que llevó a la comunidad científica a profundizar en aspectos hasta el momento poco explorados y no del todo entendidos, pero que sin duda han sido el propulsor fundamental para el desarrollo de nuevas tecnologías.

2.2.2. Desigualdades de Bell

Después de la publicación de la paradoja EPR, David Bohm describió una versión simplificada en 1951 quien al final mostró que es posible construir una interpretación no local de la mecánica cuántica basada en una teoría alternativa local, completa y realista a la vez, denominada teoría de variables ocultas [4]. Esto implica, que dado la existencia de un considerable conjunto de evidencias experimentales a favor de la mecánica cuántica, una teoría de variables ocultas debería completar la descripción de la función de onda, reproduciendo los mismos resultados que la mecánica cuántica. Más tarde J. S. Bell demostró que ninguna teoría de variables ocultas es incompatible con la mecánica cuántica.

John Stewart Bell físico irlandés publicó un artículo en 1965 titulado “*On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox*” [5], en este trabajo mostró algunos rasgos particulares de la paradoja EPR, surgiendo con lo que se conoce hoy en día como el teorema de Bell. El físico irlandés diseñó un experimento para probar, lo que Einstein pensaba era imposible, mostró que el enredamiento no podía mostrarse con una teoría básica y sencilla. Cabe destacar que los experimentos de Bell coincidieron con el desarrollo del láser lo que hizo posible la realización de tales experimentos.

El teorema de Bell se basa en dos hipótesis: el determinismo y la localidad, afirmando que toda teoría de variables ocultas que sea determinista y local tiene necesariamente algunas predicciones incompatibles con la mecánica

Enredamiento Cuántico

2.2. Orígenes del enredamiento cuántico

cuántica en palabras claras a la incompatibilidad entre la mecánica cuántica y las variables ocultas locales se le conoce como teorema de Bell. Este resultado implica que las teorías deterministas locales de variables ocultas y la mecánica cuántica son mutuamente excluyentes, concluyendo que ninguna teoría determinista y local puede reproducir todos los resultados de la teoría cuántica. Del teorema de Bell se desprende la primera desigualdad a la cual posteriormente se han descrito múltiples generalizaciones y mejoras de la desigualdad original, colectivamente llamadas desigualdades de Bell. Por lo tanto las violaciones de las desigualdades de Bell por la mecánica cuántica son demostraciones del teorema.

Traduciendo estas conclusiones confusas de Bell, al asumir que ninguna teoría determinista local de variables ocultas es consistente con la mecánica cuántica, nos da a entender que la mecánica cuántica no necesariamente tiene que ser local, abriendo la posibilidad de tener variables desconocidas no locales que dan a conocer que el universo cuántico es no local, siendo válido pensar en fenómenos como el enredamiento cuántico.

La transición del pensamiento hacia el mundo del enredo concluyó con los trabajos de Alain Aspect, los cuales refutan y visualizan de manera clara el fenómeno más característico de la teoría cuántica. En el año de 1981 Alain Aspect publica junto con Philippe Grangier y Gerard Roger el primer artículo que da inicio a una serie de experimentos los cuales dan crédito al fenómeno cuántico. En el artículo publicado en 1981 [7], Aspect y sus colegas describen un experimento donde miden la correlación de polarización lineal de los fotones emitidos en una cascada atómica radiactiva de calcio, teniendo como resultado violaciones a las desigualdades de Bell. A este experimento le siguen otros dos realizados por los mismos autores quienes exponen los resultados en dos artículos, ambos publicados en 1982 [6, 8]. El resultado de estos dos últimos experimentos fue el mismo que el primero, violaciones a las desigualdades de Bell descartando todas las clases de teorías realistas locales. En términos generales, describen un experimento basado en la producción de pares de fotones mandados en direcciones opuestas de tal manera que al estar a cierta distancia el uno del otro medirlos al mismo instante, tomando en el experimento ciertas consideraciones para que las mediciones sean independientes del concepto de relatividad. Los resultados de las mediciones estaban estrechamente correlacionados, esto significa que cuando los fotones estaban a la distancia elegida los fotones se comportaban como un sólo objeto. Alain

Enredamiento Cuántico

2.3. Un primer contacto con enredamiento cuántico

Aspect concluye que para comprender el resultado del experimento tenemos que creer en la espeluznante acción a distancia.

Los experimentos de Alain Aspect establecieron que tales fenómenos cuánticos eran reales, difíciles de imaginarlos y encontrarles sentido, pero al final de cuentas posibles en el mundo cuántico. Se comprueba que, el universo cuántico se comporta de manera extraña, tan extraña como el gato de Schrödinger o el enredamiento cuántico. Es así, como se da paso a un universo totalmente nuevo y prometedor para el desarrollo de la teoría cuántica y la creación de nuevas tecnologías basada en la teoría del enredo.

Solo queda por aclarar que hasta el momento se ha optado por describir de manera rápida y un poco burda los hechos y las características más importantes de los trabajos que influyeron en el desarrollo de esta disciplina, sin profundizar en el tema, omitiendo ecuaciones, ya que el objetivo de este apartado es dar una idea del desarrollo del enredamiento cuántico al paso de los años. La falta de ahondamiento sobre el tema es justificable, ya que, el objetivo principal de esta tesis se encuentra basado en el concepto de enredamiento cuántico que en secciones posteriores se profundizará. Para un mejor entendimiento de cada tema, consultar las referencias señaladas aclarando que existen otros muchos artículos de los mismos autores y de otros más publicados en la misma época que ayudaron y fueron vitales para la discusión y desarrollo de tal disciplina.

2.3. Un primer contacto con enredamiento cuántico

El enredamiento cuántico es un fenómeno tan peculiar de la óptica cuántica que en principio se pensaría que es un comportamiento físico poco usual y por lo tanto, muy difícil de observar, lo que lleva a pensar inmediatamente que en igual medida es un fenómeno complicado de realizar y obtener en un laboratorio experimental. No obstante, en el presente capítulo se muestra que este fenómeno cuántico es más común de lo que uno pensaría y que existen varios ejemplos de estados enredados en el mundo físico, de igual forma se muestra que en algunos casos realizar un experimento físico para conseguir un estado enredado no es tan complicado como parece.

Enredamiento Cuántico

2.3. Un primer contacto con enredamiento cuántico

Aunque en muchos de los experimentos que tienen que ver con enredamiento cuántico se necesita de una diversidad de instrumentos ópticos complejos, que en su mayoría son desarrollados únicamente para tal arreglo experimental lo que implica que sean costosos de fabricar o conseguir. Se puede montar un experimento para lograr un estado enredado sin necesidad de tener este tipo de aparatos, un ejemplo muy sencillo se puede realizar con un instrumento tan cotidiano en el mundo óptico experimental como lo es el divisor de haz, el único problema para llevar acabo el experimento es tener la fuente de luz adecuada que nos genere el comportamiento no clásico, una que nos lleve al límite cuántico donde necesariamente tengamos que trabajar con el comportamiento corpuscular de la luz, es decir, lo lograremos con radiación de pocos fotones.

2.3.1. De mecánica clásica al límite cuántico de un divisor de haz

La mayoría de fuentes de luz conocidas irradian una considerable cantidad de energía, mediante los fenómenos de emisión espontánea y emisión estimulada. Por ejemplo, fuentes coherentes como los láseres generan radiación a partir de dos fenómenos; primero, al bombear un medio activo ocurre una inversión de población provocando un estado excitado, pero sabemos que la materia busca estar en su mínimo estado energético, por ende el estado excitado decae a un estado de energía más bajo, traduciendo la diferencia de energía entre los dos niveles energéticos en la emisión espontánea de un fotón que quedará atrapado en una cavidad resonante. Después, el fotón oscilando en la cavidad provoca la emisión de otro de igual frecuencia, este proceso se repite indefinidamente hasta lograr tener un haz de fotones denominado láser. Teniendo en cuenta, como se generó esta radiación es claro que se tiene una cantidad inimaginable de fotones irradiando de la fuente coherente. Por otro lado, las fuentes térmicas generan radiación sólo por emisión espontánea, es por ello que se consideran a este tipo de fuentes como incoherentes, sin embargo se sigue teniendo la característica de tener una cantidad inmensurable de fotones. Este es el campo de la mecánica clásica donde la luz es tratada y estudiada como una onda electromagnética. El comportamiento ondulatorio de la luz en mecánica clásica se ha estudiado considerablemente al punto de tener pleno conocimiento de fenómenos como interferencia y difracción. De

Enredamiento Cuántico

2.3. Un primer contacto con enredamiento cuántico

igual forma es bien conocido el comportamiento de una onda cuando está se hace incidir en un espejo o divisor de haz. Lo que no se tiene, es una buena comprensión para fuentes de luz que irradian pocos fotones teniendo el caso ideal de tener un sólo fotón, de tal forma que, para el caso de la incidencia de pocos fotones a un divisor de haz produce engañosamente bastantes resultados para los cuales se tendrá que cosiderar de manera inequívoca la naturaleza del fotón. La discusión sobre la dualidad onda-partícula de la luz que ha y sigue provocando discordancias y debates entre los físicos, ha dejado claro que en óptica cuántica el concepto de fotón es de vital importancia para el buen desarrollo de esta disciplina. Vale la pena señalar que, por ahora para los fines y objetivos de esta tesis no es posible profundizar más en tal discusión, bastara con distinguir el tipo de tratamiento que se debe considerar ya sea clásico para fuentes coherentes y térmicas que irradian una gran cantidad de fotones, o cuántico en el caso que tengamos pocos fotones.

2.3.2. Mecánica cuántica del divisor de haz

Un primer ejemplo y al parecer el caso más sencillo donde podemos obtener un estado enredado, es el experimento en el cual se hace incidir un único fotón (o pocos fotones) sobre un divisor de haz. Es pertinente comenzar con este ejemplo para que sea nuestro primer contacto con el fenómeno de enredamiento cuántico. Ya que, de manera espontánea nos encontraremos con un estado enredado, observando cuales son las características únicas para que se le defina con esté nombre. De igual forma, conoceremos la expresión matemática que describe esté estado antes de ver su formalismo.

Para nuestro primer contacto con un estado enredado se necesitan dos cosas, un divisor de haz y lo más importante una fuente que irradie pocos fotones denominada fuente antibunched. Tal fuente fue desarrollada por primera vez por los físicos Philippe Grangier, Gerard Roger y Alain Aspect, en el artículo “*Experimental Evidence for a Photon Anticorrelation Effect on a Beam splitter: A New Light on Single-Photon Interferences*” de 1986 [9], presenta dos experimentos, en uno de ellos muestra una fuerte anticorrelación en la detección de fotones en ambos lados de un divisor de haz. En el otro experimento usando el mismo esquema de detección y agregando en el montaje experimental dos espejos y otro divisor de haz observan interferencia.

Enredamiento Cuántico

2.3. Un primer contacto con enredamiento cuántico

Fuente de fotones antibunched

En el primer experimento, A. Aspect, P. Grangier y G. Roger, utilizan una cascada radiactiva de dos fotones [7], esto lo logran con átomos de calcio irradiados por luz láser que excita los átomos a un estado S. El estado S experimenta un decaimiento rápido al estado P emitiendo un fotón de frecuencia ν_1 . Posteriormente, el átomo se somete a otra rápida descomposición, esta vez al nivel más bajo emitiendo un segundo fotón con frecuencia ν_2 . Como se ilustra en la Figura 2.1.

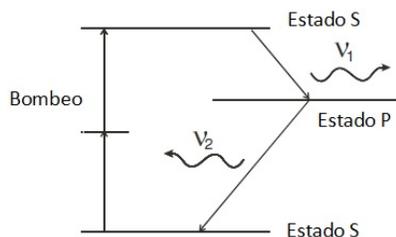


Figura 2.1: Diagrama de niveles de energía de una fuente de un sólo fotón para el experimento de Grangier. El bombeo es provocado por luz láser que excita a los átomos de calcio.

Los fotones para conservar su momento son emitidos en direcciones opuestas (ver Figura 2.2). El primer fotón de frecuencia ν_1 es detectado por PM_1 que activa un disparador para alertar a un conjunto de fotodetectores colocados en las salidas de un divisor de haz 50:50 (por sus siglas en ingles BS) en los que el segundo fotón de frecuencia ν_2 cae. El disparador le indica a los fotodetectores PM_r y PM_t esperar un fotón que emergerá del divisor de haz, a esto se le denomina compuerta, haciendo alusión que la detección del fotón ν_1 por PM_1 abre los fotodetectores en un intervalo de tiempo $w = 2\tau_s$, como si fuera una compuerta, momento en el que PM_r , PM_t podrán detectar. Los intervalos de tiempo entre las detecciones de ν_1 y ν_2 es dado según una ley exponencial correspondiente al decaimiento del estado intermedio P que tiene un tiempo de decaimiento efectivo $\tau_s = 4,7ns$ [7]. Este proceso elimina el posible ruido debido a los fotones que entran a los detectores de fuentes irrelevantes.

Al tener un sólo fotón incidiendo en el divisor de haz, se manifestará la naturaleza corpuscular del fotón, es decir, se comportará como una partícula

Enredamiento Cuántico

2.3. Un primer contacto con enredamiento cuántico

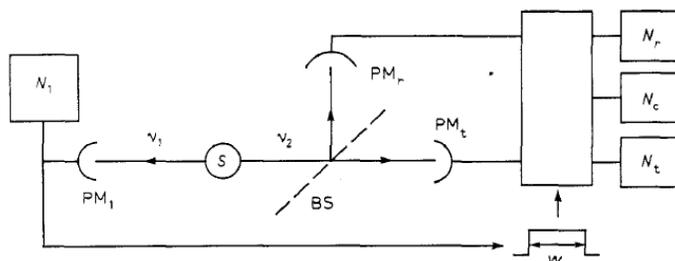


Figura 2.2: La detección del primer fotón produce una compuerta w durante la cual los fotodetectores PM_t y PM_r son activados.

con la misma probabilidad de que se transmita o se refleje que es justamente lo que obtuvo Grangier y sus colegas como resultado experimental, en el artículo reportan una fuerte anticorrelación en la detección de fotones en ambos lados del divisor de haz, esto es, el fotón que cae sobre el divisor de haz se refleja sobre el detector PM_r o se transmite a PM_t , nunca es detectado al mismo tiempo, de tal forma que no hay recuentos simultáneos. Obviamente el divisor de haz es un dispositivo pasivo que ni crea ni destruye fotones lo que implica que al no ver recuentos simultáneos en el experimento, se puede tomar como una indicación de que la fuente está realmente produciendo estados de fotón único.

Tratamiento cuántico del divisor de haz

Entonces, tenemos la fuente antibunched irradiando energía en el divisor de haz 50:50 que se considera sin pérdidas, el tratamiento común desde el punto de vista clásico nos lleva a las expresiones:

$$\varepsilon_2 = r\varepsilon_1 \quad y \quad \varepsilon_3 = t\varepsilon_1, \quad (2.1)$$

siendo ε_1 la amplitud compleja de un campo de luz clásico incidiendo sobre el divisor de haz con reflectancia compleja r y transmitancia compleja t . ε_2 y ε_3 son las amplitudes de los haces reflejado y transmitido respectivamente, como se muestra en la Figura 2.3.

Para un divisor de haz 50:50 es válido:

$$|r| = |t| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Enredamiento Cuántico

2.3. Un primer contacto con enredamiento cuántico

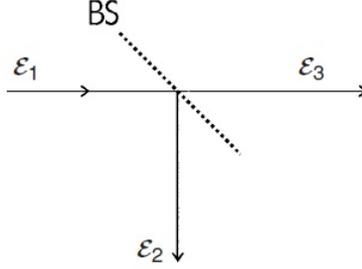


Figura 2.3: Descripción clásica del divisor de haz

Luego el divisor de haz se considera sin pérdidas, de tal forma que la intensidad del haz de entrada debe ser igual a la suma de las intensidades de los dos haces de salida:

$$|\varepsilon_1|^2 = |\varepsilon_2|^2 + |\varepsilon_3|^2, \quad (2.2)$$

lo que implica $|r|^2 + |t|^2 = 1$.

Lo anterior, es un tratamiento clásico bastante adecuado considerando a la luz como una onda, ya que, cualitativamente la Ec. 2.2 tiene sentido, expresando que la onda incidente al llegar al divisor de haz parte de su energía se refleja y parte se transmite en igual proporción.

Sin embargo, lo que necesitamos es un tratamiento cuántico por que tenemos una fuente de pocos fotones antibunched, entonces, basándonos en el desarrollo anterior podríamos tratar el divisor de haz en mecánica cuántica sustituyendo las amplitudes de campo complejo clásicas ε_i por un conjunto de operadores de aniquilación \hat{a}_i ($i = 1, 2, 3$) como se aprecia en la Figura 2.4. Análogamente a las expresiones de la Ec. 2.1, para el caso cuántico podemos representar [10]:

$$\hat{a}_2 = r\hat{a}_1 \quad y \quad \hat{a}_3 = t\hat{a}_1. \quad (2.3)$$

No obstante, los operadores de cada uno de los campos se suponen que satisfacen las relaciones de conmutación:

$$\left[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger \right] = \delta_{ij}, \quad \left[\hat{a}_i, \hat{a}_j \right] = 0 = \left[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger \right] \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.4)$$

Sabemos que el conmutador de dos operadores lineales \hat{A} y \hat{B} se define como:

$$\left[\hat{A}, \hat{B} \right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad (2.5)$$

Enredamiento Cuántico

2.3. Un primer contacto con enredamiento cuántico

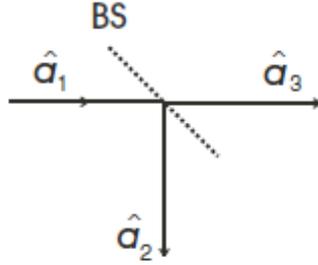


Figura 2.4: Descripción cuántica incorrecta de un divisor de haz

Pero es fácil ver que, de los operadores de la Ec. 2.3 obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} [\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger] &= \hat{a}_2 \hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 = r \hat{a}_1 r^* \hat{a}_1^\dagger - r^* \hat{a}_1^\dagger r \hat{a}_1 = r r^* \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger - r r^* \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \\ &= |r|^2 (\hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1) = |r|^2 [\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] = |r|^2 \neq 1, \end{aligned} \quad (2.6)$$

ya que $[\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] = 1$. Recíprocamente:

$$[\hat{a}_3, \hat{a}_3^\dagger] = |r|^2 [\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] = |r|^2 \neq 1. \quad (2.7)$$

También:

$$\begin{aligned} [\hat{a}_2, \hat{a}_3^\dagger] &= \hat{a}_2 \hat{a}_3^\dagger - \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_2 = r \hat{a}_1 t^* \hat{a}_1^\dagger - t^* \hat{a}_1^\dagger r \hat{a}_1 = r t^* \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger - r t^* \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \\ &= r t^* (\hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1) = r t^* [\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] = r t^* \neq 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Entonces, las transformaciones de la Ec. 2.3 no satisfacen las relaciones de conmutación y por lo tanto no pueden proporcionar la descripción correcta cuántica de un divisor de haz. Este problema se puede resolver identificando la siguiente diferencia, en el mundo clásico la otra cara de entrada del divisor de haz siendo vacío, el campo de entrada no tiene efectos en los rayos de salida. Sin embargo, en mecánica cuántica la cara no utilizada contiene un modo de campo cuantizado aunque sea en el estado vacío y como hemos visto repetidamente en el mundo cuántico el vacío conduce a importantes efectos físicos, no siendo la excepción para el divisor de haz. En la Figura 2.5

Enredamiento Cuántico

2.3. Un primer contacto con enredamiento cuántico

se indica todos los modos requeridos para una correcta descripción cuántica del divisor de haz, \hat{a}_0 representa el operador de campo del modo de entrada clásicamente vacante. También se indican dos conjuntos de transmitancias y reflectancias, permitiendo la posibilidad de un divisor de haz asimétrico.

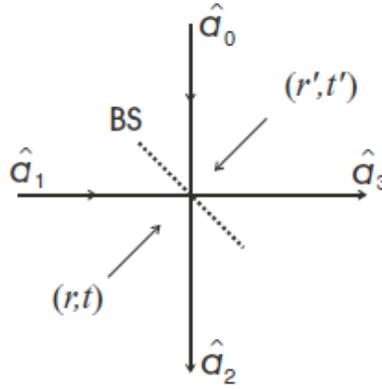


Figura 2.5: Descripción cuántica correcta de un divisor de haz

A continuación, se escriben las transformaciones del divisor de haz para los operadores de campo de salida como sigue:

$$\hat{a}_2 = r\hat{a}_1 + t'\hat{a}_0, \quad \hat{a}_3 = t\hat{a}_1 + r'\hat{a}_0. \quad (2.9)$$

Escribiéndolo de otra forma:

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t' & r \\ r' & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

El siguiente paso es verificar si las transformaciones de la Ec. 2.9 cumplen las relaciones de conmutación. Vemos:

$$\begin{aligned} [\hat{a}_3, \hat{a}_3^\dagger] &= (t\hat{a}_1 + r'\hat{a}_0) (t^*\hat{a}_1^\dagger + r'^*\hat{a}_0^\dagger) - (t^*\hat{a}_1^\dagger + r'^*\hat{a}_0^\dagger) (t\hat{a}_1 + r'\hat{a}_0) \\ &= |t|^2 [\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] + tr'^* [\hat{a}_1, \hat{a}_0^\dagger] + r't^* [\hat{a}_0, \hat{a}_1^\dagger] + |r'|^2 [\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger] \\ &= |t|^2 + |r'|^2 \\ \Rightarrow [\hat{a}_3, \hat{a}_3^\dagger] &= 1 \Leftrightarrow |t|^2 + |r'|^2 = 1. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Enredamiento Cuántico

2.3. Un primer contacto con enredamiento cuántico

Notar que: $[\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] = 1$ y $[\hat{a}_1, \hat{a}_0^\dagger] = [\hat{a}_0, \hat{a}_1^\dagger] = 0$. Ya que, son operadores de los campos iniciales y por ende son independientes.

Para otro caso:

$$\begin{aligned} [\hat{a}_2, \hat{a}_3^\dagger] &= t't^* [\hat{a}_0, \hat{a}_1^\dagger] + t'r'^* [\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger] + rt^* [\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] + rr'^* [\hat{a}_1, \hat{a}_0^\dagger] \\ &= t'r'^* + rt^* \\ \Rightarrow [\hat{a}_2, \hat{a}_3^\dagger] &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad t'r'^* + rt^* = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

También: $(t'r'^* + rt^*)^* = t'^*r' + r^*t = 0$. De manera similar se desarrolla para los otros conmutadores.

Se prueba que, las relaciones de conmutación dadas por la Ec. 2.4, son satisfechas siempre y cuando mantengan las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} |r'| = |r|, \quad |t'| = |t|, \quad |r|^2 + |t|^2 = 1, \\ r^*t' + r't^* = 0 \quad y \quad r^*t + r't'^* = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Estas relaciones son conocidas como las relaciones de reciprocidad. Cumpliendo estas relaciones podemos concluir que las transformaciones dadas en la Ec. 2.9 son correctas para la descripción cuántica del divisor de haz.

Sabemos que en mecánica cuántica existe un gran problema de medición, ya que, al medir interferimos con el sistema distorsionando los resultados, es por ello que se habla de valores esperados o probabilidades, en este caso el fotón al incidir en el divisor de haz 50:50 tendrá la misma probabilidad de transmitirse que de reflejarse. Partimos de una de las relaciones de la Ec. 2.13. $|r|^2 + |t|^2 = 1$. Como el divisor es 50:50, sin pérdidas.

$$\begin{aligned} \Rightarrow |r|^2 + |r|^2 &= 2|r|^2 = 1 \\ \Rightarrow |r|^2 &= \frac{1}{2} \\ \Rightarrow |r| = |t| &= \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Los desplazamientos de fase de la parte reflejada dependen de la construcción del divisor de haz. Si el divisor de haz está construido como una sola capa de dieléctrico, los haces reflejados difieren en fase por un factor $\exp(\pm i\frac{\pi}{2})$

Enredamiento Cuántico

2.3. Un primer contacto con enredamiento cuántico

de los transmitidos [10]. Para un divisor de haz 50:50 asumimos que el haz reflejado sufre un cambio de fase $\pi/2$, entonces el factor:

$$\begin{aligned} \exp\left(\pm i\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\frac{\pi}{2} \pm i \sin\frac{\pi}{2} = 0 \pm i(1) \\ &= i. \end{aligned}$$

De tal forma, la entrada y los modos de salida están relacionados según:

$$\begin{aligned} \hat{a}_2 &= r\hat{a}_1 + t'\hat{a}_0 \quad , & \hat{a}_3 &= t\hat{a}_1 + r'\hat{a}_0 \\ \hat{a}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(i)\hat{a}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(1)\hat{a}_0 \quad , & \hat{a}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1)\hat{a}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(i)\hat{a}_0 \\ \hat{a}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(i\hat{a}_1 + \hat{a}_0) \quad , & \hat{a}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1 + i\hat{a}_0). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Primer ejemplo de estado enredado

Partiendo de las relaciones de la Ec. 2.15, podemos conocer cuál es el estado de salida teniendo un sólo estado de entrada sobre el divisor de haz. Pero antes tenemos que describir el estado de entrada, para esto recordemos que en mecánica cuántica el estado de un sistema físico se representa de mejor manera en notación de Dirac por medio de kets y brats debido a que el espacio de estados en mecánica cuántica es un espacio vectorial complejo, cuya dimensión depende de las características del sistema físico en consideración. El ket denotado por $|\psi\rangle$ es un vector de estado definido en el espacio de Hilbert un espacio de dimensión infinita, que nos describe el estado del sistema. Particularmente el estado de número $|n\rangle$ es un eigenvector del operador de número $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$, si aplicamos el operador \hat{n} al eigenvector obtenemos la denominada ecuación de eigenvalores:

$$\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle. \quad (2.16)$$

Aquí, n es el número de fotones en el estado $|n\rangle$, es decir, es el eigenvalor del estado de número, por lo que cualquier superposición o cualquier mezcla estadística de tales estados, puede ser construida por la acción de n potencias del operador de creación en el vacío, considerando esto podemos construir los estados de entrada para el caso que nos ocupa en estos momentos, que es el de tener un único fotón incidiendo en uno de los puertos de entrada del

Enredamiento Cuántico

2.3. Un primer contacto con enredamiento cuántico

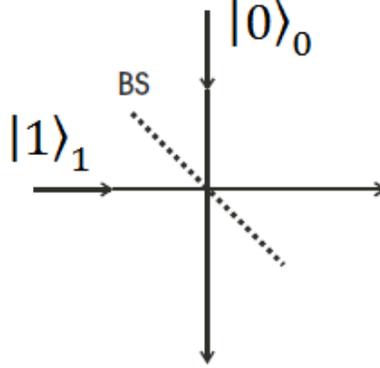


Figura 2.6: Estados de entrada sobre el divisor de haz 50:50

divisor de haz, mientras que en el otro puerto contiene vacío (ver Figura 2.6). Consideramos un sólo fotón en el estado de entrada $|0\rangle_0 |1\rangle_1$ sobre el divisor de haz como se muestra en la Figura 2.6, que podemos escribir como una potencia del operador de creación en el vacío como sigue:

$$|0\rangle_0 |1\rangle_1 = \hat{a}_1^\dagger |0\rangle_0 |0\rangle_1, \quad (2.17)$$

$|0\rangle_0$, nos representa el modo 0 de uno de los puertos de entrada teniendo cero fotones, mientras que en el modo 1 se tiene un sólo fotón representado por el estado $|1\rangle_1$. Es importante considerar que un vacío de entrada se transforma en un vacío de salida

$$|0\rangle_0 |0\rangle_1 \xrightarrow{BS} |0\rangle_2 |0\rangle_3. \quad (2.18)$$

Entonces, el estado de entrada $|0\rangle_0 |1\rangle_1$ al interactuar con el divisor de haz (BS), considerando la transformación de la Ec. 2.18 se tendrá como resultado

$$|0\rangle_0 |1\rangle_1 = \hat{a}_1^\dagger |0\rangle_0 |0\rangle_1 \xrightarrow{BS} \hat{a}_1^\dagger |0\rangle_2 |0\rangle_3. \quad (2.19)$$

Para el divisor de haz descrito por las relaciones cuánticas correctas de la Ec. 2.15 encontramos que:

$$\hat{a}_1^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(i\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_3^\dagger \right). \quad (2.20)$$

Enredamiento Cuántico

2.4. Formalismo de los estados enredados

Entonces, podemos escribir

$$\begin{aligned}
 |0\rangle_0 |1\rangle_1 &\xrightarrow{BS} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(i\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_3^\dagger \right) |0\rangle_2 |0\rangle_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(i\hat{a}_2^\dagger |0\rangle_2 |0\rangle_3 + \hat{a}_3^\dagger |0\rangle_2 |0\rangle_3 \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(i |1\rangle_2 |0\rangle_3 + |0\rangle_2 |1\rangle_3 \right). \tag{2.21}
 \end{aligned}$$

En resumen la Ec. 2.21 nos dice que, al tener como estado de entrada un sólo fotón incidiendo en uno de los puertos de entrada de un divisor de haz 50:50, tenemos a la salida del divisor de haz el siguiente estado:

$$|0\rangle_0 |1\rangle_1 \xrightarrow{BS} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(i |1\rangle_2 |0\rangle_3 + |0\rangle_2 |1\rangle_3 \right). \tag{2.22}$$

El lado derecho de la Ec. 2.22, cuantitativamente nos muestra que el fotón será detectado en el modo 2 o en el modo 3 pero de ninguna forma será detectado al mismo tiempo, teniendo así una fuerte anticorrelación como ocurría en los resultados del experimento de Grangier [9], mejor aún la expresión para el estado de salida (lado derecho de la Ec. 2.22) nos dice que tenemos que observar el estado total del sistema, ya que el resultado final será una superposición de los posibles resultados. En palabras concretas para conocer el estado de salida tenemos que considerar los dos posibles resultados, lo que sucede en un estado afecta al otro, un ejemplo, si detectamos el fotón en el modo 2 inmediatamente sabremos que en el modo 3 no existe ningún fotón y viceversa si detectamos el fotón en el modo 3 irremediamente sólo existirá vacío en el modo 2, matemáticamente podemos decir que el estado de salida no se puede escribir como un producto de estados individuales de los modos 2 y 3, a esto se le llama estado enredado.

2.4. Formalismo de los estados enredados

En mecánica cuántica, el vector de estado $|\psi\rangle$ transmite la máxima cantidad de información acerca de un estado permitido, entonces si tenemos $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ dos posibles estados cuánticos la superposición de estos estados también será un estado cuántico. Para ver esto imaginémos dos subsistemas ψ_1 y ψ_2 que están asociados en el espacio de estados \mathcal{H}_{ψ_1} y \mathcal{H}_{ψ_2} respectivamente, representando \mathcal{H} el espacio de Hilbert, notar que el sistema compuesto

Enredamiento Cuántico

2.4. Formalismo de los estados enredados

$\psi_1 + \psi_2$ se asocia al espacio del producto tensorial $\mathcal{H}_{\psi_1} \otimes \mathcal{H}_{\psi_2}$. Si realizamos una superposición de estados el sistema compuesto $\psi_1 + \psi_2$ lo podemos representar como [11, 12]:

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle. \quad (2.23)$$

Es decir, algunos vectores del estado del sistema compuesto se pueden descomponer en un producto tensorial de dos vectores donde: $|\psi_1\rangle$ describe el estado del subsistema ψ_1 y $|\psi_2\rangle$ describe el estado del subsistema ψ_2 .

Sin embargo, si los dos subsistemas no se preparan de forma independiente y en total aislamiento, en general tal descomposición es imposible. Por ejemplo, consideremos un sistema de dos partículas, por simplicidad supongamos que cada partícula puede estar en cualquiera de los dos estados $|\psi_1\rangle$ o $|\psi_2\rangle$, usando la notación:

$$\begin{aligned} &|\psi_1^{(1)}\rangle, && \text{Partícula 1 en el estado 1} \\ &|\psi_2^{(1)}\rangle, && \text{Partícula 1 en el estado 2} \\ &|\psi_1^{(2)}\rangle, && \text{Partícula 2 en el estado 1} \\ &|\psi_2^{(2)}\rangle, && \text{Partícula 2 en el estado 2} \end{aligned}$$

Considerando la siguiente superposición de estados:

$$|\psi\rangle = C_1 |\psi_1^{(1)}\rangle \otimes |\psi_2^{(2)}\rangle + C_2 |\psi_1^{(2)}\rangle \otimes |\psi_2^{(1)}\rangle, \quad (2.24)$$

donde:

$$|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1 \quad \text{con} \quad C_1, C_2 \neq 0.$$

Claramente en este caso no puede ser el vector de estado asignado al subsistema ψ_1 o ψ_2 , de tal forma que el vector de estado $|\psi\rangle$ no lo podemos definir con subsistemas individuales con estados definidos, sino más bien lo tenemos que ver como todo un sistema dado por la superposición de estados de la Ec. 2.24. Por esta característica peculiar llamemos a este estado **enredado**, representado en $|\psi\rangle$ toda la información del estado enredado. Un ejemplo de estado enredado es el dado por la Ec. 2.22:

$$|0\rangle_0 |1\rangle_1 \xrightarrow{BS} \frac{1}{\sqrt{2}} (i |1\rangle_2 |0\rangle_3 + |0\rangle_2 |1\rangle_3).$$

Enredamiento Cuántico

2.4. Formalismo de los estados enredados

Observemos primero que la estructura matemática es similar a la dada por la Ec. 2.24 (con la diferencia que en la Ec. 2.24 se ha introducido el símbolo de producto tensorial, símbolo que nos representa un operador bilineal necesario para un buen lenguaje matemático), luego los resultados experimentales descritos por el estado de salida de la Ec. 2.22 concuerdan con la definición de estado enredado dada a partir de la Ec. 2.24 ya que no podemos asignar al estado de entrada un producto de estados individuales, quedando como única opción tratar al estado de salida como todo un sistema, teniendo así un estado enredado.

La Ec. 2.24 nos representa en general un estado enredado de dos partículas teniendo dos subsistemas pero claramente esto puede ser extendido para sistemas de multipartículas definiendo el operador de densidad.

2.4.1. Operador de densidad

El operador de densidad denotado como $\hat{\rho}$ nos será útil para representar la información de sistemas de muchas partículas [13], pero falta señalar como es definido dicho operador para estados puros y para estados mixtos. Sabemos que para un ensamble puro los subsistemas son descritos por un único vector de estado. Y en los estados mixtos también llamado mezcla estadística, los subsistemas son descritos por diferentes vectores de estado.

Estados Puros

Por ahora definiremos al operador de densidad para un estado puro de manera un tanto arrogante. Más adelante para el caso de mezcla estadística se hará una definición más formal y un desarrollo completo del operador de densidad.

Consideremos un ensamble de estados puros (ver Figura 2.7), teniendo como característica principal que los subsistemas que componen el ensamble de estados son descritos por un único vector de estado $|\psi\rangle$.

Para el estado descrito por un único vector de estado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, el operador de densidad se define como un operador de proyección sobre el mismo estado:

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle\psi|. \quad (2.25)$$

Enredamiento Cuántico

2.4. Formalismo de los estados enredados

Ensamble de Estados Puros

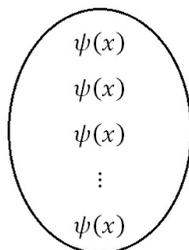


Figura 2.7: Diagrama del ensamble de Estados Puros

Queremos representar el estado enredado de la Ec. 2.24, en términos del operador de densidad y así tener una expresión general para un sistema de muchas partículas ahora no sabemos que tipo de estado es la Ec. 2.24: si puro o mixto. Hagamos el desarrollo para el operador de densidad definido en un estado puro y veamos que resultado nos da.

Para poder representar el estado enredado en términos del operador de densidad, es conveniente recordar la definición de traza de una matriz:

Definición 2.1. Sea A una matriz $n \times n$, la traza de A es la suma de los elementos de la diagonal principal:

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

La anterior definición es útil ya que si suponemos para la Ec. 2.24 que sólo uno de los subsistemas es observable y nosotros deseamos describir las propiedades de este subsistema independientemente del estado de los subsistemas no observables [11]. Podemos asignar el operador de densidad $\hat{\rho}^{(1)}$ y $\hat{\rho}^{(2)}$ a los subsistemas ψ_1 y ψ_2 , tomando la traza parcial del operador de densidad $\hat{\rho}$.

Así, para el caso del estado enredado de la Ec. 2.24 el operador de densidad para la partícula 1 es:

$$\hat{\rho}^{(1)} = \text{Tr}_2 \hat{\rho} = |C_1|^2 \left| \psi_1^{(1)} \right\rangle \left\langle \psi_1^{(1)} \right| + |C_2|^2 \left| \psi_2^{(1)} \right\rangle \left\langle \psi_2^{(1)} \right|. \quad (2.26)$$

Enredamiento Cuántico

2.4. Formalismo de los estados enredados

La expresión anterior tiene la forma de un estado mixto para la partícula 1, siempre y cuando $C_i \neq 0$, $i = 1, 2$. Similarmente, para la partícula 2:

$$\hat{\rho}^{(2)} = Tr_1 \hat{\rho} = |C_1|^2 |\psi_1^{(2)}\rangle \langle \psi_1^{(2)}| + |C_2|^2 |\psi_2^{(2)}\rangle \langle \psi_2^{(2)}| \quad (2.27)$$

Evidentemente, cuando una de las partículas se considera independiente de la otra, es en general un estado mixto. Observemos que las cantidades $\langle \psi_n^{(i)} | \hat{\rho} | \psi_n^{(i)} \rangle$, son los elementos de la diagonal principal de la matriz $\hat{\rho}$. Nuevamente se hace la aclaración que el desarrollo formal del operador de densidad, donde se demuestra lo dicho en esta parte se hace a continuación para el caso de mezcla estadística, siendo válido para este caso ya que como veremos los estados puros son un caso particular de la mezcla estadística. Para esta parte se concluye que las Ecs. 2.27 y 2.28 representan la traza del operador de densidad para el estado enredado de la Ec. 2.24, y que se puede generalizar sin ningún problema para el caso multi-partículas.

Lo que se ha visto hasta el momento es un ensamble de subsistemas cuánticos descritos por un vector de estado $|\psi\rangle$ que detalla toda la información acerca del estado enredado (ver Ec. 2.24), sin embargo, cada subsistema está descrito por vectores de estado distintos, lo cual indica que debemos hacer el desarrollo del operador de densidad para una mezcla estadística.

Estados mixtos o mezcla estadística

Para describir la información de la mezcla estadística se define el operador de densidad $\hat{\rho}$, el cual es un operador lineal definido en el espacio de Hilbert tal que:

$$\hat{\rho} = \sum_i |\psi_i\rangle P_i \langle \psi_i| = \sum_i P_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (2.28)$$

El operador de densidad $\hat{\rho}$ nos representa toda la información de la mezcla estadística, esta mezcla es un ensamble de sistemas cuánticos descritos por diferentes vectores de estado $|\psi_i\rangle$ y a los cuales se asocia su correspondiente probabilidad P_i de que el sistema se encuentra en el estado i – *esimo* del ensamble (ver Figura 2.8). Obviamente las probabilidades satisfacen las relaciones:

$$0 \leq P_i \leq 1, \quad \sum_i P_i = 1. \quad (2.29)$$

Enredamiento Cuántico

2.4. Formalismo de los estados enredados

Mezcla Estadística

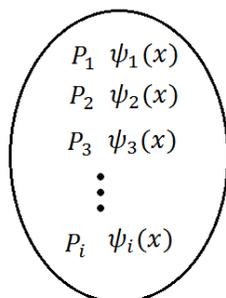


Figura 2.8: Diagrama del ensamble de Mezcla Estadística

Si observamos la Ec. 2.28, para el caso de estados puros las probabilidades son las mismas, ya que los sistemas del ensamble son representados por un único vector de estado teniendo la misma probabilidad para cada uno de ellos cumpliendo con las relaciones de la Ec. 2.29. Entonces, como la suma de estas probabilidades es igual a 1 y el vector de estado es el mismo, la Ec. 2.28 se reduce a:

$$\hat{\rho} = |\psi_j\rangle \langle \psi_j|.$$

Quedando el operador de densidad para estados puros como un operador de proyección sobre el mismo vector de estado concordando con la Ec. 2.25, entonces los estados puros son un caso particular de la mezcla estadística.

Notar que para el caso de mezcla estadística el operador de densidad dado por la Ec. 2.28 es la suma de los operadores de proyección sobre el ensamble, ponderado por las probabilidades de cada elemento del conjunto. Debido a esto, el operador de densidad es Hermítico como cualquier operador de proyección.

Los operadores Hermíticos tienen tres propiedades que son [14]:

1. Sus eigenvalores son reales
2. Sus eigenvectores son ortogonales
3. Sus eigenvectores forman una base

Enredamiento Cuántico

2.4. Formalismo de los estados enredados

Usemos la propiedad 3 del operador Hermítico de densidad $\hat{\rho}$, para introducir una base ortogonal:

$$\{|\varphi_n\rangle \quad n = 1, 2, 3, \dots, n', \dots\}, \quad (2.30)$$

donde $|\varphi_n\rangle$ son eigenvectores del operador de densidad y además forman una base ortogonal. Entonces, para el i -ésimo miembro del ensamble podemos escribir:

$$|\psi_j\rangle = \sum_n C_n |\varphi_n\rangle. \quad (2.31)$$

Para encontrar C_n , en el estado inicial vemos:

$$\langle\varphi_n|\psi_j\rangle = \sum_n C_n \langle\varphi_n|\varphi_n\rangle = \sum_n C_n \delta_{nn} \quad (2.32)$$

$$\Rightarrow \langle\varphi_n|\psi_j\rangle = C_n. \quad (2.33)$$

Por lo tanto, la Ec. 2.31 la podemos escribir como sigue:

$$|\psi_j\rangle = \sum_n \langle\varphi_n|\psi_j\rangle |\varphi_n\rangle = \sum_n |\varphi_n\rangle \langle\varphi_n|\psi_j\rangle. \quad (2.34)$$

En mecánica cuántica la ecuación anterior nos representa la información completa del sistema. De esta ecuación podemos obtener la relación de completitud (ver Ec. 2.35). Relación bastante útil en mecánica cuántica:

$$\begin{aligned} |\psi_i\rangle &= \sum_n |\varphi_n\rangle (\langle\varphi_n|\psi_i\rangle) \\ &= \left(\sum_n |\varphi_n\rangle \langle\varphi_n| \right) |\psi_i\rangle \\ \Rightarrow |\psi_i\rangle &= |\psi_i\rangle \Leftrightarrow \sum_n |\varphi_n\rangle \langle\varphi_n| = 1. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Así que, cada uno de los elementos de la base cumple la relación de completitud lo cual indica que es una base completa. Esto significa que al tomar todos los eigenvectores de la base completa ortogonal generan la matriz identidad. Ahora bien para el caso de la mezcla estadística el operador de densidad representa toda la información del sistema o ensamble, cuyo operador puede ser representado dentro de una matriz con los eigenvectores de su base ortogonal completa. A esta matriz se le llama matriz de densidad. Para encontrar

Enredamiento Cuántico

2.4. Formalismo de los estados enredados

los elementos de la matriz de densidad partimos de la definición del operador $\hat{\rho} = \sum_i P_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$, sabemos que para el i -ésimo miembro del ensamble, el vector de estado está dado por:

$$|\psi_i\rangle = \sum_n C_n |\varphi_n\rangle, \quad (2.36)$$

siendo $|\varphi_n\rangle$ un eigenvector de $\hat{\rho}$ tomado de su base. Luego en el espacio dual el ket pasa a bra, el operador pasa a su autoadjunto y el eigenvalor pasa a su complejo conjugado, esto es:

$$\langle \psi_i| = \sum_n C_n^* \langle \varphi_n|. \quad (2.37)$$

Para no confundir y considerando que los subíndices son mudos, cambiamos a la Ec. 2.36 los subíndices $n \rightarrow n'$, así:

$$|\psi_i\rangle = \sum_{n'} C_{n'} |\varphi_{n'}\rangle. \quad (2.38)$$

Vemos que tanto el bra $\langle \varphi_n|$ como el ket $|\varphi_{n'}\rangle$ son ambos eigenvectores del operador de densidad $\hat{\rho}$ tomados de la base dada por Ec. 2.30. Entonces, teniendo como soporte la afirmación anterior podemos hacer lo siguiente:

$$\langle \varphi_n | \hat{\rho} | \varphi_{n'} \rangle = \sum_i \langle \varphi_n | P_i | \varphi_{n'} \rangle \langle \psi_i | \varphi_{n'} \rangle = \sum_i P_i \langle \varphi_n | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \varphi_{n'} \rangle. \quad (2.39)$$

Lo que se hizo fue tomar la definición de $\hat{\rho}$ dada por la Ec. 2.28 y enclochar en ambos lados de la ecuación con los eigenvectores $\langle \varphi_n|$ y $|\varphi_{n'}\rangle$. Luego identificamos de la Ec. 2.39 lo siguiente:

$$C_n = \langle \varphi_n | \psi_i \rangle \quad y \quad C_{n'}^* = \langle \psi_i | \varphi_{n'} \rangle,$$

entonces:

$$\langle \varphi_n | \hat{\rho} | \varphi_{n'} \rangle = \sum_i P_i C_n C_{n'}^*. \quad (2.40)$$

Con esto encontramos los elementos de la matriz densidad que es justamente lo que representa la Ec. 2.40, el elemento matricial de $\hat{\rho}$ entre el eigenvector n y n' . Para visualizar esto aún mejor, y sobre todo para demostrar que la Ec. 2.40 representa los elementos matriciales encontramos la expresión para

Enredamiento Cuántico

2.4. Formalismo de los estados enredados

el valor de expectación de un observable \hat{A} , esto implica retomar el problema de la medición en mecánica cuántica.

Durante el desarrollo de la mecánica cuántica se ha concluido que las mediciones para experimentos en este campo, que son experimentos donde la interacción es a nivel microscópico como puede ser interacción en el núcleo de un átomo, interacciones de fotones con la materia etc. Deben ser de manera especulativa, es decir, hablaremos de probabilidades de que ocurran ciertos eventos ya que de lo contrario si medimos físicamente con un objeto de medición irremediamente interferimos con el sistema distorsionando los resultados. Esto se ve claramente en el siguiente ejemplo: A nivel macroscópico si queremos conocer la velocidad de un auto, en términos generales ya que no el caso de profundizar en los detalles, podemos medir con un sensor la velocidad, mandando un haz de luz hacia el carro que por las dimensiones del mismo no afectara su movimiento. Sin embargo, si esto lo hacemos a nivel microscópico, si mandamos un haz de luz contra un fónon para medir cierto parámetro de él claramente afectara el movimiento del fónon que queremos medir y al final si obtenemos un dato de medición este será del nuevo sistema no del sistema inicial. Es por ello, que hablamos de probabilidades en mecánica cuántica. Entonces, sea el observable \hat{A} el análogo a una medición en mecánica cuántica con la característica muy importante de que cualquier observable puede ser representado por un operador Hermitico. Ahora, como en mecánica cuántica al repetir un experimento siempre da resultados diferentes debido a que tomamos probabilidades, además, calculamos el promedio de estos resultados llamado valor de expectación o valor esperado del observable \hat{A} definido como [14]:

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \hat{A} \psi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A} |\psi(x)|^2 dx. \quad (2.41)$$

Representando, en $\psi(x)$ toda la información del sistema, la expresión anterior tiene sentido ya que la probabilidad se encuentra implícita, en el término:

$$|\psi(x)|,$$

que es la amplitud de probabilidad, cumpliendo que la suma de las probabi-

Enredamiento Cuántico

2.4. Formalismo de los estados enredados

lidades es igual a 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

En notación de Dirac el valor de expectación del observable \hat{A} para estados puros es:

$$\langle A \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle. \quad (2.42)$$

y para una mezcla estadística tenemos subconjuntos de valores de expectación, vemos la siguiente figura:

Mezcla Estadística

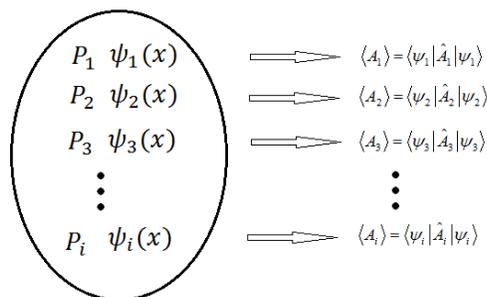


Figura 2.9: Valores de expectación

Entonces, sumamos para encontrar el valor de expectación de todo el sistema:

$$\langle A \rangle = \sum_i P_i \langle \psi_i | \hat{A} | \psi_i \rangle. \quad (2.43)$$

Multiplicamos por una constante usando las relaciones de completitud:

$$\sum_n |\varphi_n\rangle \langle \varphi_n| = 1 \quad y \quad \sum_m |\varphi_m\rangle \langle \varphi_m| = 1, \quad (2.44)$$

entonces:

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \sum_{i,n,m} P_i \langle \psi_i | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | \hat{A} | \varphi_m \rangle \langle \varphi_m | \psi_i \rangle \\ &= \sum_{i,n} P_i \langle \varphi_n | \hat{A} \rangle \sum_m |\varphi_m\rangle \langle \varphi_m | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \varphi_n \rangle, \end{aligned} \quad (2.45)$$

Enredamiento Cuántico

2.4. Formalismo de los estados enredados

Finalmente,

$$\langle A \rangle = \sum_n \langle \varphi_n | \hat{A} \sum_i P_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i | \varphi_n \rangle. \quad (2.46)$$

Identificamos al operador de densidad $\hat{\rho} = \sum_i P_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$. Por lo tanto:

$$\langle A \rangle = \sum_n \langle \varphi_n | \hat{A} \hat{\rho} | \varphi_n \rangle. \quad (2.47)$$

La Ec. 2.47 nos representa el valor esperado de un observable \hat{A} en una mezcla estadística que comparando con la Ec. 2.40 podemos concluir que las cantidades $\langle \varphi_n | \hat{\rho} | \varphi_{n'} \rangle$ forman los elementos de la matriz densidad, siendo para el caso de la Ec. 2.47 los elementos de la diagonal principal de la matriz. Ahora recordemos que la traza de una matriz se define como la suma de los elementos de la diagonal principal, entonces a partir de esta definición podemos identificar que la Ec. 2.47 se convierte en:

$$\langle A \rangle = Tr \left\{ \hat{A} \hat{\rho} \right\}. \quad (2.48)$$

Es decir, el valor esperado de \hat{A} en una mezcla estadística es la suma de los elementos de la diagonal de la matriz densidad multiplicada por el observable, en palabras concretas es la traza de los operadores Hermiticos $\hat{A} \hat{\rho}$.

Por último para que quede concluido el desarrollo correspondiente al operador de densidad para estados puros y mezcla estadística calculamos lo siguiente:

- Para mezcla estadística

Calculando la traza de la matriz densidad:

$$\begin{aligned} Tr \hat{\rho} &= \sum_n \langle \varphi_n | \hat{\rho} | \varphi_n \rangle = \sum_i \sum_n \langle \varphi_n | \psi_i \rangle P_i \langle \psi_i | \varphi_n \rangle \\ &= \sum_i \sum_n P_i \langle \varphi_n | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \varphi_n \rangle = \sum_i P_i = 1. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Ya vimos que, $\hat{\rho}$ es Hermitico, entonces los elementos de la diagonal $\langle \varphi_n | \hat{\rho} | \varphi_n \rangle$ deben ser reales y se deduce de la Ec. 2.49 que:

$$0 \leq \langle \varphi_n | \hat{\rho} | \varphi_n \rangle \leq 1 \quad (2.50)$$

Enredamiento Cuántico

2.4. Formalismo de los estados enredados

Consideremos ahora el cuadrado del operador de densidad:

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho} \cdot \hat{\rho} = \sum_i \sum_s P_i P_s |\psi_i\rangle \langle \psi_i | \psi_s\rangle \langle \psi_s| = \sum_i P_i |\psi_i\rangle \sum_s P_s \delta_{is} \langle \psi_s|, \quad (2.51)$$

si $j = s$, tenemos:

$$\hat{\rho}^2 = \sum_i P_i |\psi_i\rangle P_i \langle \psi_i| = \sum_i P_i^2 |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (2.52)$$

Por lo tanto, un primer resultado nos dice que en la mezcla estadística.

$$\hat{\rho}^2 \neq \hat{\rho}. \quad (2.53)$$

Tomando la traza:

$$\begin{aligned} Tr \hat{\rho}^2 &= \sum_n \langle \varphi_n | \hat{\rho}^2 | \varphi_n \rangle = \sum_n \sum_i \sum_j P_i P_j \langle \varphi_n | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \psi_j \rangle \langle \psi_j | \varphi_n \rangle \\ &= \sum_i \sum_j P_i P_j |\langle \psi_i | \psi_j \rangle|^2 \leq \left[\sum_i P_i \right]^2 = 1. \end{aligned} \quad (2.54)$$

- Para estados puros

Es inmediato obtener:

$$\hat{\rho}^2 = |\psi\rangle \langle \psi | \psi\rangle \langle \psi| = |\psi\rangle \langle \psi| = \hat{\rho}. \quad (2.55)$$

Es decir, el operador de densidad para un estado puro es idempotente. Por lo tanto:

$$Tr \hat{\rho}^2 = Tr \hat{\rho} = 1. \quad (2.56)$$

Así tenemos los siguientes criterios para estados puros y mixtos:

$$Tr \hat{\rho}^2 = 1 \quad \text{Para estado puro} \quad (2.57)$$

$$Tr \hat{\rho}^2 < 1 \quad \text{Para estado mixto.} \quad (2.58)$$

Con estos criterios podemos caracterizar el estado enredado de la Ec. 2.24 en términos del operador de densidad dado por las Ecs. 2.26 y 2.27, donde dijimos que los vectores de estado que describen a los subsistemas son distintos y por ende se debe tratar como un estado mixto o mezcla estadística entonces debemos usar el criterio $Tr[\hat{\rho}^{(2)}]^2 < 1$ que nos arroja la conclusión, que $|\psi\rangle$ es un estado enredado, como ya habíamos definido perfectamente para la Ec. 2.24.

Enredamiento Cuántico

2.5. Estado enredado en términos del operador de densidad

2.5. Estado enredado en términos del operador de densidad

Ahora que ya conocemos el operador de densidad para estados puros y mixtos podemos generalizar el resultado para el primer ejemplo de enredamiento cuántico dado por la Ec. 2.22, escribiendo la ecuación en términos del operador de densidad. Recordemos el estado enredado obtenido a partir de hacer incidir un único fotón sobre una de las entradas de un divisor de haz 50:50 es:

$$|0\rangle_0|1\rangle_1 \xrightarrow{BS} \frac{1}{\sqrt{2}} (i|1\rangle_2|0\rangle_3 + |0\rangle_2|1\rangle_3).$$

Tenemos, un único vector de estado que describe el comportamiento del fotón incidente, ya que tenemos un único fotón incidiendo al divisor, por lo mismo supongamos que es un estado puro. Usando la definición del operador de densidad para estado puro dada por la Ec. 2.25, que para este caso queda:

$$\hat{\rho}_{23} = (|0\rangle_0|1\rangle_1) ({}_0\langle 0|_1 \langle 1|). \quad (2.59)$$

Sustituimos, el vector de estado que describe el comportamiento total del sistema, esto es:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{23} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (i|1\rangle_2|0\rangle_3 + |0\rangle_2|1\rangle_3) \frac{1}{\sqrt{2}} (-i{}_2\langle 1|_3 \langle 0| + {}_2\langle 0|_3 \langle 1|) \\ &= \frac{1}{2} \{ |1\rangle_2|0\rangle_{32} \langle 1|_3 \langle 0| + |0\rangle_2|1\rangle_{32} \langle 0|_3 \langle 1| \} \\ &\quad + \frac{1}{2} \{ i|1\rangle_2|0\rangle_{32} \langle 0|_3 \langle 1| - i|0\rangle_2|1\rangle_{32} \langle 1|_3 \langle 0| \}. \end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos la traza parcial del operador de densidad, una expresión de gran ayuda si suponemos que solo es observable uno de los modos de salida. Por ejemplo, si no se tuviera ninguna medición del modo 3 el modo 2 puede ser descrito por la siguiente traza parcial:

$$\hat{\rho}_2 = Tr \hat{\rho}_{23} = \frac{1}{2} (|0\rangle_{22} \langle 0| + |1\rangle_{22} \langle 1|). \quad (2.60)$$

Esta ecuación, concuerda completamente con la expresión de la Ec. 2.27, que es la traza parcial del operador de densidad del tratamiento cuántico general. Además, el estado es un estado mixto o mezcla estadística ya que no hay términos en la diagonal de la forma $|0\rangle \langle 1|$ o $|1\rangle \langle 0|$. Por lo tanto, concluimos que la Ec. 2.60 es correcta describiendo al modo 2 del estado enredado.

Enredamiento Cuántico

2.6. Algunos ejemplos de estados enredados

2.6. Algunos ejemplos de estados enredados

A continuación se presentan dos ejemplos de enredamiento cuántico para reforzar la idea de este fenómeno. Ambos ejemplos son bastante ilustrativos e interesantes, siendo de los primeros ejemplos surgidos. Cabe destacar que, actualmente se trabaja en una infinidad de experimentos relacionados con el enredamiento cuántico, por diferentes causas primero para entender de mejor manera la rareza de este fenómeno y también para continuar con el desarrollo de nuevas tecnologías.

2.6.1. Estado Singlete

El estado Singlete es el estado enredado más famoso, originalmente fue descrito por Bohm como una versión simplificada de la paradoja Einstein, Podolsky y Rosen. Este estado está conformado por la superposición de dos partículas con spin $1/2$, partículas que se encuentran enredadas de forma tal que la suma total de momentos angulares del estado total es cero. Así, al estado enredado cuya configuración es de la forma:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2). \quad (2.61)$$

Se le denomina configuración Singlete o también conocido como Momento Angular Total Cero. Los kets $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$ representan estados de spin-up y spin-down respectivamente a lo largo de la dirección arbitraria (por ejemplo a lo largo del eje vertical z). Es un estado enredado por que no puede escribirse simplemente como un producto tensorial de dos estados correspondientes a las partículas por separado.

Para que quede completamente claro lo que es un estado enredado y uno no enredado, observamos la siguiente superposición de estados.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_1 \otimes (|\uparrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_2)). \quad (2.62)$$

En este caso el estado no está enredado ya que podemos descomponer en un producto tensorial dos vectores, $|\uparrow\rangle_1$ que describe un subsistema y $|\uparrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_2$ que describe a otro subsistema diferente del primero. Comparando estos últimos dos ejemplos podemos decir que un sistema enredado no puede ser factorizado en cualquiera de sus bases sobre un producto de estados de los 2 subsistemas.

Enredamiento Cuántico

2.6. Algunos ejemplos de estados enredados

2.6.2. Experimento de Hong, Ou, y Mandel: Interferencia de fotones

El segundo ejemplo es un caso muy ilustrativo del comportamiento de la mecánica cuántica, ya que como veremos no sólo se tiene como resultado un enredo, sino que también, sobresale la característica fundamental de un bosón cuya naturaleza describe a los fotones. Se trata de un experimento hecho por C. K. Hong, Z. Y. Ou y L. Mandel, quienes publicaron sus resultados en el artículo “*Measurement of Subpicosecond Time Intervals between Two Photons by Interference*” de 1987 [15]. El experimento llevado a cabo por L. Mandel et al. Consiste en hacer incidir fotones individuales sobre cada una de las entradas de un divisor de haz 50:50. Es importante notar la similitud de este experimento con el de P. Grangier et al. Antes mostrado y presentado como el primer ejemplo de enredamiento cuántico, donde solo se hacía incidir un único fotón sobre una de las entradas de un divisor de haz ilustrado por la Figura 2.6, en este caso la diferencia fundamental es que ahora se hace incidir fotones únicos por cada una de las entradas del divisor de haz como se observa en la siguiente figura:

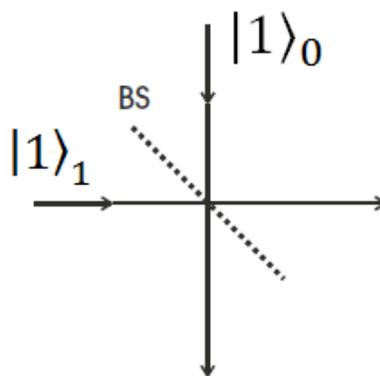


Figura 2.10: Estados de entrada en el experimento Hong, Ou y Mandel

Lo que haremos a continuación es hacer un tratamiento cuántico en términos de operadores de creación y de aniquilación similar al hecho sobre el experimento de P. Grangier, para así encontrar el estado final de salida del sistema para este caso. Si consideramos la situación donde fotones individuales están siendo simultáneamente inyectados en los dos puertos de entrada

Enredamiento Cuántico

2.6. Algunos ejemplos de estados enredados

del divisor de haz 50:50 claramente el estado inicial es:

$$|1\rangle_0|1\rangle_1 = \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1^\dagger |0\rangle_0 |0\rangle_1. \quad (2.63)$$

Siguiendo un procedimiento similar al caso del primer ejemplo, podemos encontrar las expresiones que describen al divisor de haz para este caso. Observemos que los modos de entrada y de salida son los mismos dados por la Ec. 2.15, ya que se utiliza un divisor de haz con las mismas características por lo tanto es la misma descripción cuántica ilustrada en la Figura 2.5. Entonces vemos que:

$$\hat{a}_0^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_2^\dagger + i\hat{a}_3^\dagger) \quad y \quad \hat{a}_1^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (i\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_3^\dagger). \quad (2.64)$$

Nuevamente, partimos de considerar que en el divisor de haz, un vacío de entrada resulta en un vacío de salida:

$$|0\rangle_0|0\rangle_1 \xrightarrow{BS} |0\rangle_2|0\rangle_3. \quad (2.65)$$

Entonces el estado de entrada $|1\rangle_0|1\rangle_1$, se transforma en el divisor de haz (BS), al siguiente estado de salida:

$$|1\rangle_0|1\rangle_1 = \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1^\dagger |0\rangle_0 |0\rangle_1 \xrightarrow{BS} \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1^\dagger |0\rangle_2 |0\rangle_3 \quad (2.66)$$

Considerando, la transformación de la Ec. 2.65. Ahora sustituyendo las expresiones para los operadores de creación \hat{a}_0^\dagger y \hat{a}_1^\dagger dadas por la Ec. 2.64 en la Ec. 2.66 obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} |1\rangle_0|1\rangle_1 &\xrightarrow{BS} \frac{1}{2} (\hat{a}_2^\dagger + i\hat{a}_3^\dagger) (i\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_3^\dagger) |0\rangle_2 |0\rangle_3 \\ &= \frac{1}{2} (i\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_3^\dagger - \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_2^\dagger + i\hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3^\dagger) |0\rangle_2 |0\rangle_3. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Ahora notemos que los fotones individuales que inciden en cada una de las entradas del divisor de haz no necesariamente tienen que ser descritos por la misma función de estado ya que en general provienen de diferentes fuentes. Por lo mismo es evidente que este caso se trata de una mezcla estadística y como sabemos en una mezcla estadística toda la información del ensamble puede ser representado en una matriz de densidad. Además también se puede tomar la traza de la matriz por si es observada sólo una de las salidas del

Enredamiento Cuántico

2.6. Algunos ejemplos de estados enredados

divisor de haz, así que por definición de la traza parcial se toman sólo los elementos de la diagonal. Considerando lo anterior la Ec. 2.67 se reduce a:

$$\begin{aligned} |1\rangle_0|1\rangle_1 &\xrightarrow{BS} \frac{i}{2} \left(\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3^\dagger \right) |0\rangle_2|0\rangle_3 \\ &= \frac{i}{2} \left(2\hat{a}_2^\dagger |0\rangle_2|0\rangle_3 + 2\hat{a}_3^\dagger |0\rangle_2|0\rangle_3 \right). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Entonces, se tiene el estado de salida:

$$|1\rangle_0|1\rangle_1 \xrightarrow{BS} \frac{i}{2} (|2\rangle_2|0\rangle_3 + |0\rangle_2|2\rangle_3). \quad (2.69)$$

Se obtiene, un estado enredado que describe completamente el comportamiento de los fotones. Distinguiamos, el enredo al observar que el estado de salida no puede ser descrito como un producto de estados individuales, ya que existe una anticorrelación en la detección de fotones. Claramente, la Ec. 2.69 tiene la misma estructura de la ecuación formal para un estado enredado dada por la Ec. 2.24. Ahora, al tener dos fotones incidiendo en el divisor de haz uno por cada entrada, hace aún más interesante el resultado, ya que, la anticorrelación en la detección implica que los fotones emergen juntos. De tal forma que, los foto detectores colocados en las salidas del divisor, de ninguna manera registran recuentos simultáneos. Esto significa que, los dos fotones que entran al divisor salen juntos ya sea por el modo 2 o por el modo 3 de ninguna manera saldrán por separado, ya que, esto implicaría tener recuentos simultáneos cosa que no ocurre. Por lo tanto, podemos concluir de la Ec. 2.69 que los fotones irremediamente salen en pares, hecho que concuerda con la descripción natural de un bosón.

Estos resultados fueron obtenidos experimentalmente por Hong, Ou y Mandel y reportados en su artículo de 1987. La interpretación de estos resultados se puede hacer a partir de la descripción de la naturaleza de un Bosón. Aunque, actualmente aún siguen habiendo discordancias sobre la verdadera naturaleza del fotón como la dualidad del mismo, se tiene a la fecha claro que los fotones son partículas elementales, sin masa, con spin entero capaces de transmitir energía. Estas particularidades, reconocen a los fotones dentro de la familia de bosones, cuya principal característica es que son partículas elementales portadoras de fuerza encargadas de la interacción entre fermiones que son las partículas elementales que componen la materia como el electrón. Los bosones son regidos por la estadística de Bose-Einstein, además, como

Enredamiento Cuántico

2.6. Algunos ejemplos de estados enredados

tienen spin entero no cumplen con el principio de exclusión de Pauli, esto significa que los fotones pueden estar en un mismo estado cuántico, esto concuerda perfectamente con los resultados experimentales de L. Mandel et al.

No obstante, aún después de justificar por qué los fotones salen en pares, aún falta comprender por qué estos estados son los únicos estados cuánticos permitidos en el experimento, es decir, los únicos resultados posibles, y porque no pensar en recuentos simultáneos. Para comprender y explicar lo anterior, la interpretación nuevamente se basa en la dualidad de los fotones, ya que la obtención simultánea de conteo en pares de fotones no es un resultado de la naturaleza como partícula del fotón, más bien es causada por la naturaleza ondulatoria del mismo, particularmente, por interferencia de fotones. Los resultados finales, del experimento son consecuencia de interferencia constructiva y destructiva entre los posibles estados permitidos. Así que, el proceso en el que ambos fotones se transmiten y el proceso donde ambos son reflejados se interpreta que interfieren destructivamente dejando fuera la posibilidad de tener recuentos simultáneos es por eso que nunca se obtienen estados de salida de la forma $|1\rangle_2 |1\rangle_3$. Existe, otra forma intuitiva de comprender estos resultados a partir de la regla de Feynman sobre el desarrollo de probabilidades.

Estos resultados siguen la esencia fundamental de la mecánica cuántica, descritos acertadamente por la paradoja del gato de Schrödinger, no sabemos que ocurre a ciencia exacta adentro y no lo vamos a saber porque no podemos observar físicamente, sólo nos restringimos a las probabilidades y en la evidencia, basado en los resultados empíricos, de que existen fenómenos como estos.

Bibliografía

- [1] A. Einstein, B. Podolky and N. Rosen, Phys. Rev., **47**, 777 (1935).
- [2] D. Bohm and Y Aharonov, Phys. Rev., **108**, 1070 (1957).
- [3] A. Einstein. Quantum mechanics and reality. Dialectica, p 320 (1948).
- [4] D. Bohm. Quantum Theory, Prentice Hall, New York (1951).
- [5] J. S. Bell, Physics, **1**, 195-200 (1965).
- [6] A. Aspect, P. Grangier and G. Roger, Phys. Rev. Lett., **49**, 1804 (1982).
- [7] A. Aspect, P. Grangier and G. Roger, Phys. Rev. Lett., **47**, 460 (1981).
- [8] A. Aspect, P. Grangier and G. Roger, Phys. Rev. Lett., **49**, 91 (1982).
- [9] P. Grangier, G. Roger and A. Aspect, Europhys. Lett., **1**, 173-179 (1986).
- [10] C. Gerry, and P. Knight, “Quantum mechanics of beam splitters”, Introductory Quantum Optics, pp 137-143 (2005).
- [11] A. Ekert and P. Knight, Am. J. Phys., **63**, 415 (1995).
- [12] C. Gerry, and P. Knight, “Entangled states”, Introductory Quantum Optics, pp 298-299 (2005).
- [13] C. Gerry, y P. Knight, “The density operator”, Introductory Quantum Optics, pp 294-297 (2005).
- [14] D. J. Griffiths, “Formalism”, Introduction to Quantum Mechanics, pp 93-118 (2005).
- [15] C. K. Hong, Z. Y. Ou and L. Mandel, Phys. Rev. Lett., **59**, 2044 (1987).

Capítulo 3

Medidas de enredamiento usando varianzas e incertidumbres

Desde su aparición en la mecánica cuántica el fenómeno de enredamiento cuántico ha sido objeto de innumerables discusiones, que con el paso de los años y de las investigaciones dicho fenómeno fue despertando aún más curiosidad y sobre salto. Sobre todo, a partir del surgimiento de las primeras ideas sobre la posible aplicación del fenómeno en el ámbito de la información. Y es que, la capacidad de comunicación y/o el envío de información ha sido una prioridad mayúscula. De tal manera, que existe una teoría exclusiva para este tópico.

La teoría de la información ha sido y seguirá siendo un tema muy importante por desarrollar. Por ello, el enredamiento se ha vuelto un recurso clave en la mecánica cuántica y en particular en la información cuántica. Como ya se mencionó el enredamiento ya era objeto de estudio y discusión a causa de su naturaleza tan peculiar, no comprendida desde el punto de vista del comportamiento razonable del mundo físico. Pero fue, hasta el surgimiento de las posibles aplicaciones del fenómeno cuando ganó mayor atención para su estudio. Aplicaciones como: tele transportación de la información, criptografía cuántica y procesadores cuánticos, han centralizado la atención de los ópticos cuánticos y llamado la atención de muchos más.

La idea es que un estado con mayor enredo es mejor que un estado de

Medidas de enredamiento usando varianzas e incertidumbres

3.1. Medidas de enredamiento.

menor enredo para lograr ciertas tareas. Con lo anterior, nos referimos a estar más cerca del objetivo, que es cristalizar las anteriores posibles aplicaciones. Por lo cual, surge el gran esfuerzo para desarrollar métodos de cuantificación del enredo. Como resultado, se busca clasificar los estados cuantitativamente dependiendo del nivel de enredo. El objetivo es claro, crear y estudiar estados enredados lo más posible caracterizados para realizar de mejor manera las investigaciones que convengan.

Es como llegamos a la parte central de este trabajo de investigación. Estudiar diversas medidas de enredamiento cuántico, sobre todo las pertenecientes a la clase, que en teoría son fáciles de implementar en el laboratorio. Se trata, de medidas de enredamiento basadas solamente en mediciones locales, es decir, cantidades observables con propiedades características. Específicamente, podemos pensar en límites de incertidumbre, por lo tanto englobaremos relaciones de incertidumbre locales y más adelante entrópicas.

Comenzamos, en lo que sigue de este capítulo, revisando el estado del arte sobre las medidas basadas en relaciones de incertidumbre locales. Ya que, más adelante, en el capítulo 4, nos enfocaremos en una sola medida de enredamiento también basada en relaciones de incertidumbre, para este caso entrópicas.

En las siguientes secciones damos una introducción al concepto básico de las medidas de enredamiento. En la sección 1, hablaremos en general de la importancia de las medidas fáciles de implementar en laboratorio sustentado por la dificultad que se tiene al querer medir la matriz de densidad completa. En la sección 2, se definen los límites para las relaciones de incertidumbre locales. Y finalmente, en la sección 3 se da un ejemplo del uso de las relaciones de incertidumbre locales para la detección de enredo en un sistema de dos qubits.

3.1. Medidas de enredamiento.

Existen diversas medidas de enredamiento cuántico, la gran mayoría de ellas usan el criterio más conocido para conocer la información de un sistema, la matriz de densidad o también llamado operador de densidad. En el capítulo 2 se presentó la matemática formar del operador de densidad, así como su

Medidas de enredamiento usando varianzas e incertidumbres

3.1. Medidas de enredamiento.

relación con el enredamiento cuántico. Sin embargo, no se explicó de manera particular la importancia de esta cantidad para el fenómeno de enredamiento. En lo que sigue, se presenta el significado físico que tiene la matriz de densidad como una medida de información y la gran utilidad que se le da para el caso de estados enredados.

La matriz de densidad contiene toda la información del sistema. En concreto, en un sistema Bi-partite el vector de onda que describe al sistema está dado por:

$$|\psi\rangle = \sum C_{j,k} |j\rangle \otimes |k\rangle \quad (3.1)$$

Entonces, la matriz de densidad para un estado puro es la siguiente:

$$\rho_{AB} = \sum_{jklm} \rho_{jklm} |j\rangle_A \langle l| \otimes |k\rangle_B \langle m| \quad (3.2)$$

Claramente, la información completa del sistema se encuentra distribuida en todos los elementos de la matriz, de tal forma que la Ec. 3.2 representa a todo el sistema sin pérdida de información. Por otro lado, las matrices reducidas, Ec. 3.3, nos proporcionan parte de la información del sistema total.

$$\rho_A = Tr_B \{\rho_{AB}\} = \sum_{jkl} \rho_{jklk} |j\rangle \langle l| \quad y \quad \rho_B = Tr_A \{\rho_{AB}\} = \sum_{jkm} \rho_{jkjm} |k\rangle \langle m| \quad (3.3)$$

Específicamente, la matriz reducida ρ_A nos proporciona toda la información del sistema A pero perdemos toda la información fuera de la diagonal del sistema B que corresponde a las coherencias del sistema. En algunos casos, cuando cierta información específica del sistema Bi-partite nos interesa, trazar la matriz de densidad es conveniente. Pero, en muchos otros casos las matrices reducidas no son suficientes para estudiar al sistema.

Por otra parte, donde sí se tiene una gran ventaja en el cálculo de matrices reducidas es para el caso de estados máximamente enredados. Teniendo en cuenta que, un estado máximamente enredado es una medida de la información que guarda el sistema. Cuando existe máximo enredo la información de todo el sistema está guardada en cada parte del él. Entonces, si medimos sólo un pedazo podemos obtener la mayor capacidad de información del sistema. Aquí es donde vemos la importancia y uso de las matrices reducidas. No es necesario para este caso calcular toda la matriz de densidad, es suficiente con

Medidas de enredamiento usando varianzas e incertidumbres

3.2. Relaciones de incertidumbre locales como medida de enredo.

calcular la matriz reducida para conocer la información completa, siempre y cuando se encuentre máximamente enredado.

Sin embargo, cuando no se tiene un estado máximamente enredado es necesario conocer la matriz de densidad completa. Ahora bien, determinar todos los elementos de la matriz de densidad no es cosa sencilla, requiere considerables esfuerzos experimentales. Por lo tanto, es conveniente buscar otras medidas de enredo más fáciles de implementar en el laboratorio. Se desea cuantificar el enredo mediante la observación de propiedades características del sistema. Un método eficiente puede ser, límites entre los estados enredados y los no enredados, tal límite puede ser definido por una serie de relaciones apropiadas de incertidumbre.

3.2. Relaciones de incertidumbre locales como medida de enredo.

Se demuestra, que existe un límite para el cual siguen ocurriendo los productos de estados cuánticos locales, es decir, estados separables. Este límite puede ser definido por una serie de relaciones apropiadas de incertidumbre. Que debido, a la naturaleza de ellas son llamadas relaciones de incertidumbre locales (RIL). Se demuestra, que violaciones a tales relaciones es una prueba de la generación de enredo.

Es necesario recordar que un estado separable como se mencionó en el capítulo 2, es aquel que puede ser representado por productos de estados cuánticos locales. Por ejemplo, para un sistema Bi-partite de dos qubits, un estado separable es descrito por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|1\rangle_A \otimes |0\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|1\rangle_A \otimes (|0\rangle_B + |1\rangle_B)]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

En concreto, la Ec. 3.4 representa el producto de estados cuánticos $|1\rangle$ y $|0\rangle + |1\rangle$ locales. El término local, se refiere a que describen en su totalidad al sistema A y sistema B .

Medidas de enredamiento usando varianzas e incertidumbres
3.2. Relaciones de incertidumbre locales como medida de enredo.

Entonces, los estados enredados ya descritos en el capítulo 2, son:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|1\rangle_A \otimes |0\rangle_B + |0\rangle_A \otimes |1\rangle_B]. \quad (3.5)$$

El ejemplo también corresponde a un sistema Bi-partite de dos qubits. La Ec. 3.5 representa correlaciones demasiado fuertes entre dos sistemas para ser representados como productos de estados cuánticos locales.

También, recordemos del capítulo 1 que el principio de incertidumbre afirma que no es posible predecir de forma simultánea cantidades observables del sistema. Ahora bien, la incertidumbre de cualquier observable \hat{A}_i para cualquier estado cuántico se define como la varianza estadística de los resultados de la medición

$$\delta A_i^2 = \langle \hat{A}_i^2 \rangle - \langle \hat{A}_i \rangle^2 \quad (3.6)$$

La varianza sólo puede ser cero si el estado es un eigenestado simultáneamente de todos los operadores \hat{A}_i . Si no existe tal eigenestado simultáneo debe haber un límite inferior $U > 0$ para la suma de las incertidumbres

$$\sum_i \delta A_i^2 \geq U_A. \quad (3.7)$$

De igual manera, el sistema cuántico B puede ser caracterizado por las propiedades del operador \hat{B} y con la relación suma de las incertidumbres

$$\sum_i \delta B_i^2 \geq U_B. \quad (3.8)$$

En general, las propiedades del operador $\hat{A}_i + \hat{B}_i$ definen un conjunto de propiedades comunes de los dos sistemas \hat{A}_i y \hat{B}_i que establecen las mediciones locales. Entonces, las incertidumbres de $\hat{A}_i + \hat{B}_i$ son iguales a la suma de las incertidumbres locales, esto es:

$$\delta(A_i + B_i)^2 = \delta A_i^2 + \delta B_i^2. \quad (3.9)$$

Como se mencionó, \hat{A}_i y \hat{B}_i establecen las mediciones locales. De tal forma, la Ec. 3.9 establece la relación de incertidumbre locales (RIL). Entonces, es posible definir el límite de correlación para el producto de estados locales. En otras palabras, la Ec. 3.9 es válida para

$$\hat{\rho} = \rho(A) \otimes \rho(B). \quad (3.10)$$

Medidas de enredamiento usando varianzas e incertidumbres

3.3. Cuantificación de enredo para un sistema de dos qubits.

Por lo tanto, el producto de estados cuánticos locales está limitado por la relación de incertidumbre:

$$\sum_i \delta(A_i + B_i)^2 \geq U_A + U_B. \quad (3.11)$$

En general, para mezclas de productos de estados el límite de incertidumbre también es válido, tal como lo argumenta Holger y Shigeki: "Las incertidumbres de una mezcla son siempre iguales o mayor que las incertidumbres promediadas de las componentes" [1]. Entonces, la relación 3.11 también es válida para mezcla de productos de estados, es decir, para cualquier,

$$\rho = \sum_m P_m \hat{\rho}_m(A) \otimes \hat{\rho}_m(B), \quad (3.12)$$

es válida la relación de incertidumbre:

$$\sum_i \delta(A_i + B_i)^2 \geq U_A + U_B. \quad (3.13)$$

Observemos que, cualquier violación a la relación 3.13 significaría que el estado cuántico no se puede separar en una mezcla de producto de estados. Sin embargo, los estados enredados describen correlaciones más precisas que los representados por la mezcla de producto de estados. De tal forma, que, los estados enredados si pueden violar los límites de incertidumbre. En conclusión, cualquier violación de las relaciones de incertidumbre locales (Ec. 3.13) es prueba inequívoca de la existencia de enredo.

Para ahondar en el interesante tema se recomienda revisar la referencia [1]. En el cual, los autores Holger y Shigeki a parte de definir los límites para las relaciones de incertidumbre locales, presentan claros ejemplos de las violaciones de estas relaciones y aplicaciones del enredamiento cuantificado en diversos sistemas.

3.3. Cuantificación de enredo para un sistema de dos qubits.

Después de definir las relaciones de incertidumbre locales (RIL) claramente se busca aplicar esta medida de enredo cuantizando él mismo para

Medidas de enredamiento usando varianzas e incertidumbres
3.3. Cuantificación de enredo para un sistema de dos qubits.

múltiples sistemas. Sin embargo, las RIL tienen algunas deficiencias, entre las que destaca no cuantificar el enredo de todos los estados puros. Como resultado surgen, las relaciones de incertidumbre locales modificadas que intentan deslindarse de dichos problemas. Prueba de ello, Kothe y Björk publican un artículo [2], donde buscan derivar una medida invariante bajo transformaciones unitarias locales y que además sea válida para cuantificar el enredo de todos los estados puros.

Para encontrar la relación que cumpla con las anteriores demandas. Se expande el lado izquierdo de la Ec. 3.13.

$$\sum_i \delta^2 (\hat{A}_i + \hat{B}_i) = \sum_i \delta^2 \hat{A}_i + \sum_i \delta^2 \hat{B}_i + 2 \sum_i C(\hat{A}_i, \hat{B}_i), \quad (3.14)$$

donde se ha definido el término covarianza:

$$C(\hat{A}_i, \hat{B}_i) = \langle \hat{A}_i \hat{B}_i \rangle - \langle \hat{A}_i \rangle \langle \hat{B}_i \rangle. \quad (3.15)$$

Ahora recordemos, cuando se definió el límite para la suma de las incertidumbres, tal límite era no trivial $U > 0$. Teniendo en cuenta esto, uno de los términos de la Ec. 3.15 tiene que ser menor que cero. Entonces, el término de covarianza se encuentra limitada de la siguiente manera:

$$- (\delta^2 \hat{A}_i + \delta^2 \hat{B}_i) \leq 2C(\hat{A}_i, \hat{B}_i) \leq \delta^2 \hat{A}_i + \delta^2 \hat{B}_i. \quad (3.16)$$

En vista de que, tantos estados separables como estados puros enredados pueden alcanzar ambos límites de la Ec. 3.16, para cualesquiera pares de observables \hat{A}_i y \hat{B}_i se tiene que considerar varias covarianzas para detectar enredamiento. Es así que, se propone una nueva medida de enredo en términos de la suma de todas las covarianzas posibles, ya que la información del enredo se encuentra en las covarianzas definidas en la Ec. 3.15. Kothe y Björk definen esta nueva cantidad para el caso especial de un sistema de dos qubits, de la forma:

$$G = \sum_{i,j=1}^3 C^2(\hat{\sigma}_i^A, \hat{\sigma}_i^B), \quad (3.17)$$

claramente como tratamos un sistema de dos qubits, usamos la base del grupo $SU(2)$ que corresponde a las matrices de Pauli, las cuales son:

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Medidas de enredamiento usando varianzas e incertidumbres
3.3. Cuantificación de enredo para un sistema de dos qubits.

En la Ec. 3.17, $\hat{\sigma}_i^A$ denota la i -ésima matriz de Pauli para el sistema A . Caso similar para el sistema B .

La matriz densidad en esta base es lógicamente,

$$\hat{\sigma}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entre las propiedades más importantes de las matrices de Pauli se encuentran:

$$\text{Tr}(\hat{\sigma}_i) = 0 \quad \text{Para } i = 1, 2, 3 \quad (3.19)$$

$$(\hat{\sigma}_i)^2 = \hat{\sigma}_0 \quad (3.20)$$

$$\text{Tr}(\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j) = 2\delta_{ij} \quad \text{Para } i, j = 0, \dots, 3 \quad (3.21)$$

Para la Ec. 3.17 se tiene:

$$C(\hat{\sigma}_i^A, \hat{\sigma}_i^B) = \langle \hat{\sigma}_i^A \otimes \hat{\sigma}_i^B \rangle - \langle \hat{\sigma}_i^A \otimes \hat{1}^B \rangle \langle \hat{1}^A \otimes \hat{\sigma}_i^B \rangle. \quad (3.22)$$

Que corresponde a las medidas que pueden ser llevadas a cabo para el sistema.

Lo importante de la nueva medida de enredo G que la hace una medida completa en comparación con las RIL es que G es invariante ante cualquier transformación unitaria. Y es que, la invariancia es consecuencia del hecho de que G puede ser escrita como:

$$G = 4\text{Tr} \{ (\hat{\rho} - \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B)^2 \}. \quad (3.23)$$

La Ec. 3.23 expresa que G se encuentra en términos de la distancia de la medida de la norma Hilbert-Schmidt [2]. Por otra parte, las transformaciones unitarias pueden ser vistas como rotaciones de los vectores de la base contenidos en el espacio de Hilbert. A su vez, una norma es invariante ante rotaciones de la base. Por consiguiente, G es invariante bajo cualquier transformación unitaria.

La nueva cantidad de enredo G definida por la Ec. 3.17 permite cuantificar el enredo para ciertos estados mixtos y para todos los estados puros. Lo anterior es probado por Kothe y Björk en su artículo. Para los fines de este apartado no es necesario hondar es estos casos. Sin embargo, si el lector

Medidas de enredamiento usando varianzas e incertidumbres

3.3. Cuantificación de enredo para un sistema de dos qubits.

así lo desea puede consultar la referencia [2] para mayor profundidad en el tema.

Podemos condensar lo dicho hasta aquí, se ha extendido el concepto de relaciones de incertidumbre locales para dos qubits, logrando cuantificar el enredo para estados puros y algunos estados mixtos. Por medio de una medida invariante ante transformaciones unitarias.

Cabe señalar que, lo presentado en este capítulo solo es una descripción general de las relaciones de incertidumbre locales y la extensión de ellas. Ya que, el objetivo como se dijo al principio del mismo es tener conocimiento de este tipo de medidas de enredamiento cuántico y del avance de ellas sin necesidad de profundizar en las mismas. Consideremos, que en el siguiente capítulo se desarrollara, ahora sí, de manera profunda y extensa la medida de enredamiento que funge como objeto principal del trabajo de investigación. Lo expuesto, sirve de sustento para el buen desarrollo de la medida de enredo Colectividad que justamente también está basada en relaciones de incertidumbre, en tal caso entrópicas.

Bibliografía

- [1] H. F. Hofmann and S. Takeuchi, Phys. Rev. A, **68**, 032103 (2003).
- [2] C. Kothe and G. Björk, Phys. Rev. A, **75**, 012336 (2007).

Capítulo 4

Estudio teórico de la medida de enredamiento, colectividad

Las propuestas para cuantificar el Enredamiento Cuántico (EC) son abundantes, sin embargo, las mediciones del EC propuestas son difíciles de medir en un experimento físico como ya se ha discutido en el capítulo anterior. Un caso notable de esto es la Concurrencia que se define a partir del complejo conjugado del vector de estado, esto último imposible de realizar experimentalmente. En consecuencia, los intentos recientes para la medición experimental se basan en encontrar cantidades accesibles experimentalmente. Como lo son, las medidas de enredo basadas en relaciones de incertidumbre locales. Sin embargo, tales límites estudiados en el capítulo 2 no son los únicos que pueden cuantificar el enredo basados en relaciones de incertidumbre.

Rudnicki et al. [1], definen una medida de EC que surge a partir de relaciones de incertidumbres entrópicas, llamada colectividad. La colectividad, definida como el producto de las proyecciones de estados separables sobre el estado a determinar, se relaciona directamente con cantidades mensurables. Lo cual implica, una medida de EC viable de implementar en laboratorio.

4.1. Colectividad para estados ortogonales

El enfoque usado para definir la Colectividad se inspira en las relaciones de incertidumbre entrópicas, las cuales se satisfacen para cualquier estado puro. Este enfoque conducirá a una prueba de EC colectivo simple. Obser-

Estudio teórico de la medida de enredamiento, colectividad

4.1. Colectividad para estados ortogonales

vando el ejemplo de la suma de las entropías de Shannon [1], se sugiere una medida de EC (para estados puros) por una función de las proyecciones, del estado analizado $|\Psi\rangle$ de un sistema compuesto, hacia estados puros separables mutuamente ortogonales.

El método que se propone puede ser formulado en un caso bastante general, del estado puro normalizado $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$, de un sistema compuesto por K subsistemas. Seleccionamos un conjunto de N estados separables de un sistema K – *qudit* esto es:

$$|\chi_j^{sep}\rangle = |a_j^A\rangle \otimes \cdots \otimes |a_j^K\rangle, \quad (4.1)$$

donde $|a_j^I\rangle \in \mathcal{H}^I$ con $j = 1, \dots, N$ y $I = A, \dots, K$.

Es claro que, consideramos al sistema compuesto elemento del espacio de Hilbert \mathcal{H} . Entonces, cada elemento pertenece al espacio de Hilbert K – *partite*, es decir:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}^K,$$

que además por simplicidad asumimos que todas las dimensiones son iguales.

A su vez, recordemos que el producto interior $\langle\Psi|\Psi_j\rangle$ representa la proyección de Ψ_j sobre Ψ . Entonces, basándonos en el conjunto de N estados separables se define la siguiente cantidad:

$$Y^{\text{máx}} [|\Psi\rangle] = \text{máx}_{|\chi^{sep}\rangle} \prod_{j=1}^N |\langle\Psi|\chi_j^{sep}\rangle|^2. \quad (4.2)$$

La Ec.4.2 representa el producto de las proyecciones en el conjunto de N estados separables, además, al tomar el máximo del producto, llamamos a esta cantidad colectividad máxima.. Notemos que son proyecciones de χ_j^{sep} sobre Ψ . Con la ecuación anterior (Ec.4.2) se está definiendo una prueba de enredamiento colectivo. De tal modo que, $Y [|\Psi\rangle]$ representa un estado enredado; especialmente al tener el máximo del producto, se trata del estado máximamente enredado.

$Y^{\text{máx}}$ Es el más grande de los estados máximamente enredados, para demostrarlo usamos calculo variacional, ya que buscamos el máximo sobre el

Estudio teórico de la medida de enredamiento, colectividad
4.1. Colectividad para estados ortogonales

estado normalizado $\langle \Psi | \Psi \rangle$ que funge como el espacio funcional. Entonces, usamos el método de multiplicadores de Lagrange, teniendo la ecuación variacional:

$$\frac{\delta}{\delta |\Psi\rangle} \left(\prod_{j=1}^N |\langle \Psi | \chi_j^{sep} \rangle|^2 - \lambda \langle \Psi | \Psi \rangle \right) = 0, \quad (4.3)$$

λ juega el rol de multiplicador de Lagrange asociado a la restricción de normalización. Al resolver la ecuación anterior obtenemos:

$$\prod_{j=1}^N |\langle \Psi | \chi_j^{sep} \rangle|^2 \sum_{i=1}^N (\langle \chi_i^{sep} | \Psi \rangle)^{-1} \langle \chi_i^{sep} | = \lambda \langle \Psi |. \quad (4.4)$$

Multiplicando la Ec. 4.4 por $|\Psi\rangle$ se encuentra λ ,

$$\lambda \langle \Psi | \Psi \rangle = \prod_{j=1}^N |\langle \Psi | \chi_j^{sep} \rangle|^2 \sum_{i=1}^N \frac{\langle \chi_i^{sep} | \Psi \rangle}{\langle \chi_i^{sep} | \Psi \rangle}. \quad (4.5)$$

Esto es,

$$\lambda = N \prod_{j=1}^N |\langle \Psi | \chi_j^{sep} \rangle|^2. \quad (4.6)$$

También la contracción de la Ec. 4.4 con $|\chi_m^{sep}\rangle$ conduce a:

$$\prod_{j=1}^N |\langle \Psi | \chi_j^{sep} \rangle|^2 \sum_{i=1}^N (\langle \chi_i^{sep} | \Psi \rangle)^{-1} \langle \chi_i^{sep} | \chi_m^{sep} \rangle = \lambda \langle \Psi | \chi_m^{sep} \rangle. \quad (4.7)$$

Sustituyendo el valor de λ dado en Ec. 4.6 tenemos:

$$\prod_{j=1}^N |\langle \Psi | \chi_j^{sep} \rangle|^2 \sum_{i=1}^N (\langle \chi_i^{sep} | \Psi \rangle)^{-1} \langle \chi_i^{sep} | \chi_m^{sep} \rangle = N \prod_{j=1}^N |\langle \Psi | \chi_j^{sep} \rangle|^2 \langle \Psi | \chi_m^{sep} \rangle. \quad (4.8)$$

Entonces

$$\sum_{i=1}^N (\langle \chi_i^{sep} | \Psi \rangle)^{-1} \delta_{i,m} = N \langle \Psi | \chi_m^{sep} \rangle. \quad (4.9)$$

Estudio teórico de la medida de enredamiento, colectividad
4.1. Colectividad para estados ortogonales

Consideramos que los estados puros ortonormales,

$$\langle \chi_i^{sep} | \chi_m^{sep} \rangle = \delta_{i,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = m \\ 0 & \text{si } i \neq m \end{cases} \quad (4.10)$$

Así, la Ec.4.9 queda:

$$(\langle \chi_m^{sep} | \Psi \rangle)^{-1} = N \langle \Psi | \chi_m^{sep} \rangle. \quad (4.11)$$

Finalmente, se encuentra,

$$\frac{1}{N} = \langle \chi_m^{sep} | \Psi \rangle \langle \Psi | \chi_m^{sep} \rangle. \quad (4.12)$$

Es decir,

$$|\langle \Psi | \chi_m^{sep} \rangle|^2 = \frac{1}{N}. \quad (4.13)$$

Por lo tanto,

$$\prod_{j=1}^N |\langle \Psi | \chi_j^{sep} \rangle|^2 = \prod_{j=1}^N \frac{1}{N} = N^{-N}. \quad (4.14)$$

Lo que hemos encontrado es el máximo del producto de las proyecciones que, es justamente el lado derecho de la Ec. 4.14. Hemos demostrado que

$$Y^{\max} [|\Psi\rangle] \leq \max_{|\chi^{sep}\rangle} \prod_{j=1}^N |\langle \Psi | \chi_j^{sep} \rangle|^2 = N^{-N}, \quad (4.15)$$

es el máximo o más grande de los estados máximamente enredados.

Finalmente, podemos escribir:

$$Y^{\max} [|\Psi\rangle] \leq N^{-N}. \quad (4.16)$$

Usando la variable auxiliar $Z^{\max} = -\ln Y^{\max}$, la relación para colectividad toma la forma:

$$Z^{\max} [|\Psi\rangle] = -\ln Y^{\max} [|\Psi\rangle] \geq -\ln N^{-N}. \quad (4.17)$$

Estudio teórico de la medida de enredamiento, colectividad
4.1. Colectividad para estados ortogonales

Entonces,

$$Z^{\text{máx}} [|\Psi\rangle] \geq N \ln N \quad (4.18)$$

Análogamente a la relación de incertidumbre entrópicas.

Ahora consideraremos el otro caso límite que es el mínimo de los estados máximamente enredados o el primer estado separable.

Para este caso consideraremos el estado separable,

$$|\Psi_{sep}\rangle = |\Psi_A\rangle \otimes \cdots \otimes |\Psi_K\rangle. \quad (4.19)$$

Entonces, tomamos las proyecciones de los eigenvalores de la base $|\chi_j^{sep}\rangle = |a_j^A\rangle \otimes \cdots \otimes |a_j^K\rangle$ sobre el estado separable, esto es:

$$\langle \Psi_{sep} | \chi_j^{sep} \rangle = \prod_{I=A}^K \langle \Psi_I | a_j^I \rangle = \langle \Psi_A | a_j^A \rangle \cdots \langle \Psi_K | a_j^K \rangle. \quad (4.20)$$

Observemos que, para cada valor del índice ($I = A, \dots, K$) podemos aplicar de forma independiente el resultado 4.14 obteniendo:

$$\prod_{j=1}^N |\langle \Psi_I | a_j^I \rangle|^2 \leq N^{-N}. \quad (4.21)$$

Así, para cualquier estado separable, tenemos:

$$\prod_{j=1}^N |\langle \Psi_{sep} | \chi_j^{sep} \rangle|^2 \leq \prod_{I=A}^K \max_{|\Psi_I\rangle} \prod_{j=1}^N |\langle \Psi_I | a_j^I \rangle|^2 = N^{-NK}. \quad (4.22)$$

Entonces, en este límite podemos concluir que se tendrá un estado separable $|\Psi_{sep}\rangle$ si se cumple la desigualdad

$$Y^{\text{máx}} [|\Psi_{sep}\rangle] \leq N^{-NK} \quad (4.23)$$

De lo contrario, tendremos estados enredados. Esto nos lleva a los criterios de separabilidad basados en la colectividad máxima.

$$Y^{\text{máx}} [|\Psi\rangle] > \alpha_{K,N} \Rightarrow |\Psi\rangle \rightarrow \text{Enredado} \quad (4.24)$$

Siendo $\alpha_{K,N} = N^{-NK}$ el parámetro de discriminación. Observamos que, el criterio nos queda en términos de cantidades mensurables como lo son:

$$N \rightarrow \text{Numero de estados y } K \rightarrow K - \text{qudit}$$

4.2. Colectividad para estados coherentes

Se ha discutido que en mecánica cuántica se describen fenómenos únicos y peculiares que no pueden ser explicados ni entendidos desde el punto de vista clásico. Ahora bien, en el límite entre la mecánica cuántica y la mecánica clásica existen ciertos estados que pueden caracterizar ambas disciplinas.

Los estados coherentes son los estados cuánticos del oscilador armónico más clásicos, es decir, la dinámica de los estados coherentes se asemeja al comportamiento de las oscilaciones de un oscilador armónico clásico. Entonces, los estados coherentes al ser estados cuánticos cuya evolución temporal sigue trayectorias clásicas, pueden describir fenómenos físicos que sigan la misma idea. Sirva de ejemplo, la física de un láser.

Como sabemos un haz láser es generado a partir de los fenómenos de inversión de población, emisión espontánea y emisión estimulada en una cavidad, entre otros procesos. Todos estos procesos pueden ser descritos en mecánica cuántica, siendo las características más importantes del haz láser las siguientes:

- Se tienen un número indefinido de fotones
- Se tiene fase definida
- El perfil de intensidad del haz sigue una distribución gaussiana.

Justamente, los estados coherentes son estados cuánticos continuos cuya fase está completamente definida que además como ya se mencionó, la evolución temporal de estos estados siguen trayectorias clásicas. Por lo tanto, sin ningún problema los estados coherentes pueden describir un láser.

Dicho lo anterior, los estados coherentes son de mucha utilidad para describir fenómenos cuánticos en el límite clásico. He aquí, la importancia de estos, como los estados cuánticos más clásicos. Por consiguiente, es conveniente desarrollar los fenómenos característicos de la mecánica cuántica para estos estados, siempre y cuando sea posible llevar a cabo lo anterior.

Estudio teórico de la medida de enredamiento, colectividad

4.2. Colectividad para estados coherentes

4.2.1. Estados coherentes

Los estados coherentes pueden ser definidos de varias formas entre las más conocidas son las siguientes [2]:

1. Son los eigenestados del operador de aniquilación
2. Son aquellos cuyos promedios de la posición, momento y energía siguen trayectorias clásicas.
3. Son desplazamientos en el vacío.
4. Son aquellos que minimizan el principio de incertidumbre.

Una de las definiciones más conocidas de los estados coherentes se enlista en primer lugar. La cual, matemáticamente se puede expresar como sigue:

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle. \quad (4.25)$$

Es decir, $|\alpha\rangle$ es un estado coherente cuyos eigenvalores α son complejos. Algunas propiedades de los estados coherentes se pueden obtener usando el operador de desplazamiento de Glauber representado a continuación,

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}} = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^*\hat{a}}. \quad (4.26)$$

Es claro que \hat{a}^\dagger y \hat{a} son los operadores de creación y aniquilación respectivamente. Y la segunda igualdad de la Ec. 4.26 se obtiene usando la fórmula de Baker Hausdorff. Haciendo uso de la definición 3, podemos generar el estado coherente $|\alpha\rangle$, aplicando el operador de desplazamiento en el vacío:

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^*\hat{a}} |0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} |0\rangle, \quad (4.27)$$

desarrollando la exponencial en serie de Taylor:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle. \quad (4.28)$$

Y considerando que cualquier estado de número se puede generar aplicando el operador de creación al estado base,

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle. \quad (4.29)$$

Estudio teórico de la medida de enredamiento, colectividad

4.2. Colectividad para estados coherentes

Finalmente, encontramos una expresión para los estados coherentes en términos de los estados de número,

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (4.30)$$

Con la Ec. 4.30 vamos a encontrar una de las propiedades más importantes como lo es el producto interior entre dos estados coherentes. Con ello, sabremos si los estados coherentes son ortogonales o no. Calculamos:

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}|\beta|^2\right] \exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right] \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\beta^{*n}\alpha^m}{\sqrt{n!m!}} \langle n|m\rangle. \quad (4.31)$$

Sabemos que los estados de número son orto normales, es decir:

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{Para } n = m \\ 0 & \text{Para } n \neq m \end{cases} \quad (4.32)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \langle\beta|\alpha\rangle &= \exp\left[-\frac{1}{2}|\beta|^2\right] \exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta^*\alpha)^n}{n!} \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)\right] \exp[\beta^*\alpha]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

La expresión anterior también se puede escribir de la siguiente forma:

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \exp\left[\frac{1}{2}(\beta^*\alpha - \beta\alpha^*)\right] \exp\left[-\frac{1}{2}|\beta - \alpha|^2\right]. \quad (4.34)$$

La ecuación anterior nos dice que los estados coherentes no son ortogonales. El producto interior entre dos de ellos está dado por la Ec. 4.33 o 4.34. Por lo tanto, es una base sobre completa, para este caso la relación de completos está dada por:

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle\alpha| d^2\alpha = 1. \quad (4.35)$$

No es una base ortogonal, cualquier estado coherente se sobrepone con otro.

Estudio teórico de la medida de enredamiento, colectividad
4.2. Colectividad para estados coherentes

Entre otras propiedades de los estados coherentes, una muy importante la observamos cuando calculamos las incertidumbres para la posición y el momento:

$$\langle \Delta \hat{q} \rangle = \sqrt{\langle \alpha | \hat{q}^2 | \alpha \rangle - \langle \alpha | \hat{q} | \alpha \rangle^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}. \quad (4.36)$$

Del mismo modo,

$$\langle \Delta \hat{p} \rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}. \quad (4.37)$$

Por lo tanto, el principio de incertidumbre de Heisenberg es:

$$\langle \Delta q \rangle \langle \Delta p \rangle = \frac{1}{2}. \quad (4.38)$$

Es decir, los estados coherentes minimizan el principio de incertidumbre.

4.2.2. Generalización de la medida colectividad para estados coherentes

En páginas pasadas se ha estudiado la medida de enredamiento, colectividad, para estados ortogonales como pueden ser los estados de número. A continuación, generalizaremos esta medida de enredo para estados coherentes los cuales no son ortogonales. Para este caso, se define la colectividad de igual manera, pero ahora se considera la expresión para el producto interior de dos estados coherentes. Para el caso de estados de número fue de gran ayuda la ortogonalidad de los mismos. Sin embargo, para este caso como ya vimos, los estados coherentes no son ortogonales, provocando que los cálculos sean un poco más complicados. Se sigue un desarrollo similar al caso anterior y se encuentra la expresión correspondiente para colectividad.

Comencemos por definir el estado separable $|\xi_j^{sep}\rangle$ para este caso:

$$|\xi_j^{sep}\rangle = |\alpha_j^A\rangle \otimes \cdots \otimes |\alpha_j^K\rangle, \quad (4.39)$$

con $|\alpha_j^I\rangle$ el estado coherente contenido en el espacio de Hilbert \mathcal{H}^I , recordemos $j = 1, \dots, N$ y $I = A, \dots, K$.

Estudio teórico de la medida de enredamiento, colectividad

4.2. Colectividad para estados coherentes

Como se ha dicho, en repetidas ocasiones el desarrollo es el mismo que el llevado a cabo en el apartado 4.1. Entonces, es claro que la cantidad colectividad la vamos a definir de la misma manera. Para estados coherentes la colectividad es definida en principio como el máximo del producto de las proyecciones de los estados separables $|\xi_j^{sep}\rangle$ sobre el estado Ψ , es decir:

$$CY^{\text{máx}} [|\Psi\rangle] = \text{máx}_{|\xi^{sep}\rangle} \prod_{j=1}^N |\langle \Psi | \xi_j^{sep} \rangle|^2. \quad (4.40)$$

Es el producto de las proyecciones en el conjunto de N estados separables. $CY^{\text{máx}}$ denota la colectividad máxima para estados coherentes. No olvidar que, $|\xi_j^{sep}\rangle$ está dado por la Ec. 4.39.

El siguiente paso es demostrar que $CY^{\text{máx}}$ es una cota superior de los estados máximamente enredados sobre el estado normalizado $\langle \Psi | \Psi \rangle$. Primero, damos solución a la ecuación variacional

$$\frac{\delta}{\delta |\Psi\rangle} \left(\prod_{j=1}^N |\langle \Psi | \xi_j^{sep} \rangle|^2 - \lambda \langle \Psi | \Psi \rangle \right) = 0. \quad (4.41)$$

En los siguientes pasos, se sigue exactamente el mismo desarrollo que para estados puros ortogonales. Así mismo, la solución a la ecuación anterior es:

$$\prod_{j=1}^N |\langle \Psi | \xi_j^{sep} \rangle|^2 \sum_{i=1}^N (\langle \xi_i^{sep} | \Psi \rangle)^{-1} \langle \xi_i^{sep} | = \lambda \langle \Psi |. \quad (4.42)$$

Se encuentra el multiplicador de Lagrange

$$\lambda = N \prod_{j=1}^N |\langle \Psi | \xi_j^{sep} \rangle|^2. \quad (4.43)$$

Luego, se contrae la Ec. 4.42 con $|\xi_m^{sep}\rangle$ obteniendo:

$$\prod_{j=1}^N |\langle \Psi | \xi_j^{sep} \rangle|^2 \sum_{i=1}^N (\langle \xi_i^{sep} | \Psi \rangle)^{-1} \langle \xi_i^{sep} | \xi_m^{sep} \rangle = \lambda \langle \Psi | \xi_m^{sep} \rangle. \quad (4.44)$$

Para este caso, los estados separables $|\xi_m^{sep}\rangle$ y $\langle \xi_i^{sep} |$ de acuerdo a la definición 4.39 están representados de la siguiente forma:

$$|\xi_m^{sep}\rangle = |\alpha_m^A\rangle \otimes \cdots \otimes |\alpha_m^K\rangle \quad Y \quad \langle \xi_i^{sep} | = \langle \alpha_i^A | \otimes \cdots \otimes \langle \alpha_i^K |. \quad (4.45)$$

Estudio teórico de la medida de enredamiento, colectividad
4.2. Colectividad para estados coherentes

Dado que, se encuentran en términos de estados coherentes, los cuales no son ortogonales, es decir, $\langle \xi_i^{sep} | \xi_m^{sep} \rangle \neq \delta_{im}$ irremediabilmente tenemos que considerar la expresión para el producto interior de dos estados coherentes Ec. 4.34. Encontramos aquí, la gran diferencia con el caso de los estados ortogonales, donde era válido usar el hecho $\langle \chi_i^{sep} | \chi_m^{sep} \rangle = \delta_{im}$.

Consideremos ahora

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \exp \left[\frac{1}{2} (\beta^* \alpha - \beta \alpha^*) \right] \exp \left[-\frac{1}{2} |\beta - \alpha|^2 \right]$$

Por lo tanto, el producto interior $\langle \xi_i^{sep} | \xi_m^{sep} \rangle$ queda:

$$\begin{aligned} \langle \xi_i^{sep} | \xi_m^{sep} \rangle &= \exp \left[\frac{1}{2} ((\alpha_i^A)^* \alpha_m^A - \alpha_i^A (\alpha_m^A)^*) \right] \exp \left[-\frac{1}{2} |\alpha_i^A - \alpha_m^A|^2 \right] \otimes \dots \\ &\dots \otimes \exp \left[\frac{1}{2} ((\alpha_i^K)^* \alpha_m^K - \alpha_i^K (\alpha_m^K)^*) \right] \exp \left[-\frac{1}{2} |\alpha_i^K - \alpha_m^K|^2 \right] \end{aligned} \quad (4.46)$$

Sustituyendo la ecuación anterior, el valor del multiplicador de Lagrange (Ec. 4.43) en la Ec. 4.44. Encontramos:

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^N |\langle \Psi | \xi_j^{sep} \rangle|^2 \sum_{i=1}^N (\langle \xi_i^{sep} | \Psi \rangle)^{-1} \exp \left[\frac{1}{2} ((\xi_i^{sep})^* \xi_m^{sep} - \xi_i^{sep} (\xi_m^{sep})^*) \right] * \\ \exp \left[-\frac{1}{2} |\xi_i^{sep} - \xi_m^{sep}|^2 \right] = N \prod_{j=1}^N |\langle \Psi | \xi_j^{sep} \rangle|^2 \langle \Psi | \xi_m^{sep} \rangle \end{aligned} \quad (4.47)$$

Finalmente, nos queda:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (\langle \xi_i^{sep} | \Psi \rangle)^{-1} \exp \left[\frac{1}{2} ((\xi_i^{sep})^* \xi_m^{sep} - \xi_i^{sep} (\xi_m^{sep})^*) \right] \exp \left[-\frac{1}{2} |\xi_i^{sep} - \xi_m^{sep}|^2 \right] \\ = N \langle \Psi | \xi_m^{sep} \rangle \end{aligned} \quad (4.48)$$

Definimos a la ecuación anterior como a_1

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{i=1}^N (\langle \xi_i^{sep} | \Psi \rangle)^{-1} \exp \left[\frac{1}{2} ((\xi_i^{sep})^* \xi_m^{sep} - \xi_i^{sep} (\xi_m^{sep})^*) \right] \exp \left[-\frac{1}{2} |\xi_i^{sep} - \xi_m^{sep}|^2 \right] \\ &= N \langle \Psi | \xi_m^{sep} \rangle. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Estudio teórico de la medida de enredamiento, colectividad
4.2. Colectividad para estados coherentes

Luego, al conjugado de a_1 lo definimos como a_2 . De tal modo queda

$$\begin{aligned} a_2 &= \sum_{i=1}^N (\langle \Psi | \xi_i^{sep} \rangle)^{-1} \exp \left[\frac{1}{2} ((\xi_i^{sep})^* \xi_m^{sep} - \xi_i^{sep} (\xi_m^{sep})^*) \right]^* \exp \left[-\frac{1}{2} |\xi_i^{sep} - \xi_m^{sep}|^2 \right]^* \\ &= N \langle \xi_m^{sep} | \Psi \rangle. \end{aligned} \quad (4.50)$$

El siguiente paso es realizar el producto a_1 por a_2 . Observar que ambas definiciones tienen dos igualdades. Convenientemente, tomamos la segunda igualdad de cada uno, sin olvidar la igualdad que depende de los estados separables y por lo tanto de los estados coherentes.

Entonces, por un lado el producto de estas dos últimas cantidades definidas nos queda:

$$a_1 a_2 = N^2 \langle \Psi | \xi_m^{sep} \rangle \langle \xi_m^{sep} | \Psi \rangle = N^2 |\langle \Psi | \xi_m^{sep} \rangle|^2. \quad (4.51)$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{N^2} = |\langle \Psi | \xi_m^{sep} \rangle|^2 \frac{1}{a_1} \frac{1}{a_2}. \quad (4.52)$$

Tomamos el producto en ambos lados de la ecuación anterior, esto nos lleva a:

$$\prod_{j=1}^N \frac{1}{N^2} = \prod_{j=1}^N |\langle \Psi | \xi_m^{sep} \rangle|^2 \frac{1}{a_1} \frac{1}{a_2}. \quad (4.53)$$

El lado izquierdo de la Ec. 4.53 puede ser escrito de forma compacta, si realizamos el cálculo del producto de los N productos separables elevados al cuadrado. Al final de cuentas tenemos:

$$\prod_{j=1}^N \frac{1}{N^2} = N^{-2N}. \quad (4.54)$$

De esta manera, la Ec. 4.53 puede ser escrita de la siguiente manera

$$N^{-2N} = \prod_{j=1}^N |\langle \Psi | \xi_m^{sep} \rangle|^2 \frac{1}{a_1} \frac{1}{a_2}. \quad (4.55)$$

Estudio teórico de la medida de enredamiento, colectividad
4.2. Colectividad para estados coherentes

Observemos, la Ec. 4.55 es justamente el producto de las proyecciones de los estados separables $|\xi_j^{sep}\rangle$ sobre Ψ , ponderadas por la cantidad $\frac{1}{a_1} \frac{1}{a_2}$ que dependen también de los estados separables. Por consiguiente, hemos logrado dos cosas. Primero, demostrar que $CY^{\text{máx}}$ es el más grande de los estados máximamente enredados. Ya que, hemos encontrado la cota superior N^{-2N} . En segunda instancia, hemos encontrado la expresión correcta para representar el máximo del producto de las proyecciones, la cual es:

$$\max_{|\xi^{sep}\rangle} \prod_{j=1}^N |\langle \Psi | \xi_j^{sep} \rangle|^2 \frac{1}{a_1} \frac{1}{a_2}. \quad (4.56)$$

Por lo tanto, la colectividad para estados coherentes es expresada por la siguiente ecuación:

$$CY^{\text{máx}} [|\Psi\rangle] \leq \max_{|\xi^{sep}\rangle} \prod_{j=1}^N |\langle \Psi | \xi_j^{sep} \rangle|^2 \frac{1}{a_1} \frac{1}{a_2}. \quad (4.57)$$

Y considerando, que $CY^{\text{máx}}$ es el estado máximamente enredado con cota superior N^{-2N} . Podemos representar a la colectividad como la siguiente igualdad:

$$CY^{\text{máx}} [|\Psi\rangle] \leq \max_{|\xi^{sep}\rangle} \prod_{j=1}^N |\langle \Psi | \xi_j^{sep} \rangle|^2 \frac{1}{a_1} \frac{1}{a_2} = N^{-2N}, \quad (4.58)$$

En particular, a_1 y a_2 representadas por las Ecs. 4.49 y 4.50 respectivamente. Nos representan la distancia entre los estados coherentes. Para ser más específicos, por ser una base no ortogonal cualquier estado coherente se sobrepone con otro. En consecuencia, a_1 y a_2 nos constituyen el grado en que se sobreponen los estados coherentes.

La Ec. 4.58 es a nuestro parecer una relación adecuada para la medida de enredamiento colectividad en el caso de estados coherentes. A salvedad, de estudiar a más detalle las expresiones 4.49 y 4.50 para a_1 y a_2 respectivamente. Lo anterior, por las posibles complicaciones que puedan surgir en representar tales definiciones. Es importante, no perder de vista el comportamiento y valides de las ecuaciones antes mencionadas, ya que representan un factor importante como lo es el grado en que se sobreponen los estados

Estudio teórico de la medida de enredamiento, colectividad

4.2. Colectividad para estados coherentes

coherentes.

Para concluir, con el desarrollo de esta media de enredamiento, retomemos la Ec. 4.34.

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \exp \left[\frac{1}{2} (\beta^* \alpha - \beta \alpha^*) \right] \exp \left[-\frac{1}{2} |\beta - \alpha|^2 \right].$$

El primer término es justamente una fase compleja, tal que:

$$|\langle \beta | \alpha \rangle|^2 = e^{-|\beta - \alpha|^2} \neq 0. \quad (4.59)$$

Es por ello, que los estados coherentes como ya habíamos enfatizado no son ortogonales. Queda claro, que si $|\beta - \alpha|^2$ es muy grande, entonces $|\langle \beta | \alpha \rangle|^2 = 0$, lo cual implicaría ortogonalidad. Dicho brevemente, los estados coherentes son casi ortogonales en el límite de que $|\beta - \alpha|^2$ sea muy grande.

Bibliografía

- [1] L. Rudnicki, P. Horodecki and K. Życzkowski, *Phys. Rev. Lett.*, **107**, 150502 (2011).
- [2] C. Gerry, and P. Knight, “Quantum coherence functions”, *Introductory Quantum Optics*, pp 115-134 (2005).

Capítulo 5

Conclusiones

Las conocidas relaciones de incertidumbre estándar tienen graves problemas que se traducen en deficiencias para poder expresar por completo y adecuadamente el principio de incertidumbre. La causa principal de su deficiencia es la errónea definición de la desviación estándar como una medida de incertidumbre. Para encontrar relaciones correctas y sobre todo completas se tiene que definir nuevas medidas de incertidumbre, provenientes de la teoría de probabilidades, en vista de que la distribución en mecánica cuántica estará dado por el modulo al cuadrado de la función de onda. Con lo anterior, se estará de acuerdo en el concepto cuántico de incertidumbres. Se obtiene, como medida de incertidumbre adecuada las entropías de Shannon con la cual se definió la relación de incertidumbre denominada entrópica que expresa correctamente el principio de incertidumbre. Se demostró, que esta nueva relación de incertidumbre entrópica está libre de deficiencias. Este desarrollo es importante porque de las relaciones de incertidumbre entrópicas se define la medida de enredamiento colectividad.

Antes de llegar, a la medida de enredamiento colectividad se evidencio la enorme ventaja de cuantificar el enredo con medidas basadas en incertidumbres y varianzas, ya que, de este modo se está asegurando que las cantidades posibles a medir sean observables que establezcan medidas locales fáciles de implementar en un laboratorio. Se discutió la enorme dificultad de tratar con medidas de información tales como la matriz de densidad, que si bien es una medida aceptable teóricamente cuya representación contienen la mayor información del estado enredado, es muy complicado obtener experimentalmente, debido a la complejidad de calcular cada una de sus componentes. Debido a

Conclusiones

todo lo anterior, queda perfectamente justificado el trabajo de investigación. Es muy importante desarrollar y seguir buscando medidas de enredamiento fáciles de implementar en un experimento científico. Se presentó la alternativa de definir límites de incertidumbre locales para estados separables, de tal forma que ningún estado cuántico no enredado puede superar estos límites, cualquier violación de las relaciones de incertidumbre locales es una prueba contundente de la existencia de enredo. La propuesta principal es la medida de enredo colectividad definida a partir de las relaciones de incertidumbre entrópicas.

Finalmente, como conclusiones principales, queda el desarrollo adecuado de la colectividad definida por el producto de estados separables con el estado del sistema, Esta medida de enredo, para el caso de estados ortogonales nos proporciona parámetros de medición del enredo en términos de cantidades mensurables como lo son el número de estados y el número de qubits. Dicho parámetro llamado de discriminación nos representa el límite entre un estado separable y un estado enredado, cuando el sistema estudiado se encuentra por encima del parámetro de discriminación se trata de un estado enredado. Mejor aún, se propone una expresión para colectividad en el caso de estados coherentes, considerando como diferencia fundamental la no ortogonalidad de estados. Se concluye que, esta generalización es importante, debido al gran impacto que tienen los estados coherentes para tratar fenómenos clásicos. En consecuencia, de la naturaleza de los estados cuánticos más clásicos conocidos como lo son los estados coherentes. En definitiva, el tratamiento de estos estados para la medida colectividad, pretende caracterizar experimentos semiclásicos con fenómenos con bastantes propiedades y aplicaciones prometedoras como el enredamiento cuántico.

Por ahora, la expresión propuesta de colectividad para estados coherentes (4.58) queda en términos del producto de las proyecciones de los estados separables coherentes y el estado del sistema, ponderadas por el grado de superposición de los estados coherentes. Específicamente, se habla de la distancia entre los estados, es decir, en términos de a_1 y a_2 dados por las Ec. 4.49 y 4.50 respectivamente. Para terminar, es importante resaltar que el presente trabajo queda abierto para futuras discusiones y mejoras, por ejemplo, falta por analizar las implicaciones que tiene la nueva definición de colectividad al depender del grado de superposición de los estados coherentes, determinar la validez o no de la misma. Por tal motivo, el trabajo de investigación con-

Conclusiones

cluye como una tarea bastante lucrativa y provechosa por todo lo estudiado y desarrollado quedando como base para futuros trabajos en esta fascinante disciplina, es el ingreso al mundo del enredo.