Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Electrodinámica Espinorial en Seis Dimensiones

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Alejandro Granados González

asesorado por

Dr. J. Jesús Toscano Chavéz

Puebla Pue.
Junio 2014

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Electrodinámica Espinorial en Seis Dimensiones

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Alejandro Granados González

asesorado por

Dr. J. Jesús Toscano Chavéz

Puebla Pue.
Junio 2014

Título: Electrodinámica Espinorial en Seis Dimensiones
Estudiante: Alejandro Granados González

COMITÉ

Dr. Gilberto Tavares Velasco
Presidente

Dr. Eric Martínez Pascual
Secretario

Dra. María Alicia López Osorio
Vocal

Dr. Alberto Escalante Hernández
Vocal

Dr. J. Jesús Toscano Chavéz
Asesor

Índice general

Agradecimientos

A mis padres que siempre han respetado mis decisiones tanto buenas como malas, lo cual me ha permitido crecer. Por su cariño incondicional en todo momento; sé que no ha sido fácil lidiar con mi carácter y sin embargo lo han hecho siempre con amor; nunca olviden que los quiero con todo mi corazón y que gracias a ustedes he llegado a donde estoy.

A mi tío Negro por todo tu apoyo, por ser un gran ejemplo a seguir y porque siempre has creído en mi sin ninguna necesidad de hacerlo. Por soportar mis errores y por tus regaños que me han hecho mejorar. Espero no haberte defraudado. A mi tía Gloria que siempre me ha escuchado cuando lo he necesitado, por ser un ejemplo de ecuanimidad y paciencia; espero sepas que eres una de mis personas favoritas. Los quiero mucho tíos.

A mi hermano por que sé que a pesar de nuestras muchas diferencias siempre me has ayudado en lo que te he pedido sin exigir nada a cambio.

Al Dr. Toscano porque sin duda ha marcado profundamente mi preparación académica con sus cursos y seminarios. Por aceptar ser mi asesor de tesis, por su tiempo, dedicación y sobre todo por su paciencia en la realización de este trabajo.

A los profesores de la facultad por compartir sus conocimientos, en especial a la Dra. Martha Palomino que siempre estuvo dispuesta a hablar por mi cuando se cerraban las materias; y al Dr. Gerardo Torres por tantos cursos de los cuales aprendí mucho de lo poco que ahora sé.

A mis compañeros: Lucero, Laura y Paula porque sin sus notas habría estado más perdido de lo normal; a Adriana porque tus comentarios y ayuda resultaron muy útiles al hacer este trabajo; al Flaco, Dark, Migue, Montse, Caro, Angie, Ochi, Hugo y Uli por aceptarme como su amigo y enseñarme que hay cosas por las que vale la pena luchar aunque parezcan causas perdidas (además de ensenãrme a jugar domino); a Juan, Arturo y Polo, tomar clases con ustedes fue un honor.

A Omar por ser mi compañero de clases más frecuente, por tantas tardes de estudio pero sobre todo por ser un gran amigo, incondicional y paciente. Me siento honrado con tu amistad Mago, gracias por todo.

A mis amigos de tantos años: Tello, Anna, Néstor y Jonathan, ustedes son la familia que yo he escogido, su amistad ha sido siempre una fuente de felicidad. Gracias porque se preocupan por mi, porque siempre están al pie del cañon y sobre todo porque siempre me han dicho lo que he tenido que escuchar aún cuando no sea de mi agrado.

A CONACYT por el apoyo económico a través del proyecto Correcciones radiativas y dimensiones extra.

Finalmente, a Stephania por caminar conmigo en todo momento, porque has decidido estar junto a mí con todo lo que ello implica, porque me alientas a ser mejor; no tengo ni las palabras ni la elocuencia suficiente para decirte todo lo que eres para mí. Muchas gracias amor.

Resumen

En este trabajo de tesis se estudian las estructuras de Lorentz y de norma presentes en la electrodinámica espinorial definida en 6 dimensiones. Se presenta un estudio completo de la representación espinorial del grupo de Lorentz en 6 dimensiones. Se compactifica la teoría y se obtiene la lagrangiana efectiva en 4 dimensiones. Se estudian los procesos de diagonalización que deben realizarse en los sectores de masa tanto de norma como espinorial. Se demuestra de manera explícita como opera el mecanismo de Higgs en este tipo de teorías mediante la existencia de seudo bosones de Goldstone. Se encuentra que los términos de masa para las excitaciones de Kaluza-Klein en el sector espinorial aparecen en forma complicada pero que es posible definirlos correctamente mediante una serie de transformaciones no triviales.

Introducción

Las implicaciones fenomenológicas de dimensiones extra sobre observables del modelo estándar (ME) de las interacciones fundamentales, han sido objeto de considerable interés en la literatura desde que Antoniadis [1], Arkani-Hamed, Dimopoulos y Dvali [2] argumentaron que dimensiones relativamente grandes podrían ser detectadas a la escala de TeVs. En la mayoría de los escenarios que han sido propuestos, nuestro espacio tridimensional es una 3-brana que está embebida en un espacio-tiempo D-dimensional que es conocido con el nombre de bulto. Por supuesto, si existen dimensiones adicionales, éstas deben ser más pequeñas que la distancias más pequeñas exploradas hasta la fecha por los experimentos, así que tales dimensiones extra deben estar compactificadas. Como resultado de la compactificación, los campos que se propagan en el bulto se pueden expresar cómo una serie de estados conocidos como torre de Kaluza-Klein (KK), con las excitaciones individuales de KK etiquetadas por modos númericos. Los campos del ME corresponden precisamente al modo cero. Por otra parte, es bien sabido que las teorías de norma en más de cuatro dimensiones no son renormalizables en el sentido de Dyson, así que deben ser reconocidas como teorías efectivas que surgen de una teoría más fundamental, como teoría de cuerdas. La naturaleza no renormalizable de teorías en más altas dimensiones surge del hecho de que éstas tienen constantes de acoplamiento con dimensiones. Aunque al nivel de la teoría 4-dimensional las constantes de acoplamiento son adimensionales y todas las interacciones tienen dimensión canónica menor o igual a 4, el carácter no renormalizable se manifiesta en sí mismo a través de la presencia de la multiplicidad infinita de los modos de KK, lo cual, en un proceso dado, da lugar a la presencia de sumas discretas que finalmente pueden diverger. En un artículo reciente [3], se investigó la estructura de norma y la cuantización de la teoría 4-dimensional que surge depués de compactificar e integrar una quinta coordenada en una teoría pura de Yang-Mills. En particular, se mostró que las funciones de Green del ME son renormalizables a orden de un lazo. Un estudio completo de la estructura del ME 5-dimensional ha sido realizado recientemente [4]. Más recientemente, se ha demostrado que el paso de la teoría gobernada por los grupos extendidos de Poincaré, $ISO(1, m-1)$, y de norma, $SU(N, \mathcal{M}^m)$, con $\mathcal{M}^m = \mathcal{M}^4 \times \mathcal{M}^n$ la variedad extendida del espacio-tiempo, a la teoría que resulta de integrar las n coordenadas compactas, la cual es gobernada por los grupos estándar $ISO(1,3)$ y $SU(N, \mathcal{M}^4)$, es dado por una transformación que es canónica en el sentido usual [5]. La generalización de teorías de Yang-Mills a espacios-tiempo planos con un número arbitrario n de dimensiones compactas extra ha sido completado muy recientemente en el artículo [6], el cual compactifica las coordenadas extra sobre la orbifold $\mathcal{N}^n = S^1/Z_2 \times \cdots \times S^1/Z_2$.

El objetivo central de esta tesis es estudiar la estructura de la representación espinorial del grupo de Lorentz en 6 dimensiones, determinando la forma explícita de las matrices de Dirac correspondientes. Otro objetivo importante es usar este conocimiento para construir la electrodinámica espinorial en 6 dimensiones, así como la posterior compactificación de las dos coordenadas extra y su integración para obtener la teoría efectiva 4-dimensional.

El contenido de la tesis se ha organizado de la siguiente manera. En el capítulo 1 se presenta una discusión elemental de los grupos ortogonales, unitarios y el grupo de Poincaré. En el Capítulo 2 se estudia las propiedades básicas de la electrodinámica espinorial. En el Capítulo 3 se presenta la contribución de esta tesis, la cual consiste en establecer las propiedades de la representación espinorial del grupo de Lorentz en 6 dimensiones con el fin de estudiar la electrodinámica espinorial con dos dimensiones compactas extra. Finalmente, en el capítulo 4 se presentan las conclusiones.

Capítulo 1

Simetrías Continuas

En el estudio de la física clásica es fácil encontrar ejemplos de simetrías, algo que no cambia mientras otros objetos sí lo hacen. Algunos ejemplos son las simetrías globales de Noether en una acción, las transformaciones sobre vectores que dejan el producto punto invariante y las transformaciones de norma en la teoría electromagnética. La idea de simetría juega un papel fundamental en el estudio de teorías de campo, ya sean clásicas o cuánticas [7, 8, 9, 14].

En este capítulo se dará un resumen de las matemáticas necesarias para describir estas simetrías mediante la *teoría de grupos*.

1.1. Conceptos fundamentales de la teoría de grupos

Sea G un conjunto con elementos g_i y una operación entre elementos $\cdot$ la cual llamaremos producto. Se dice que el conjunto G forma un grupo bajo el producto $\cdot$ si se cumplen las siguientes propiedades

1. **Cerradura** Si g_i y g_j pertenecen a G, entonces $g_i \cdot g_j$ pertenece a G.

2. **Asociatividad** Si g_i, g_j y g_k pertenecen a G, entonces $(g_i \cdot g_j) \cdot g_k = g_i \cdot (g_j \cdot g_k)$.

3. **Elemento Identidad** El conjunto G contiene un elemento e tal que $e \cdot g_i = g_i \cdot e = g_i$ para todo g_i en G.

4. **Elemento Inverso** Para todo g_i en G, existe un elemento g_i^{-1} en G tal que $g_i \cdot g_i^{-1} = g_i^{-1} \cdot g_i = e$.

Si además ocurre que $g_i \cdot g_j = g_j \cdot g_i$ se dice que el grupo es abeliano.

Existen muchas clases de grupos. Un grupo discreto tiene un número finito de elementos, sin embargo para el presente trabajo nos interesa estudiar los llamados *grupos de Lie*, tales como los grupos de Lorentz y de rotaciones, los cuales dependen de un conjunto de parámetros continuos.

1.2. Grupos ortogonales y unitarios

1.2.1. El grupo $O(N)$

Sea G el conjunto de las matrices ortogonales $N \times N$ el cual forma un grupo al cual denotamos como $O(N)$. Este grupo preserva la distancia, por lo que sus elementos son rotaciones en el espacio, donde la rotación esta definida por

$$x'^i = \mathcal{O}^{ij} x^j. \tag{1.1}$$

Las matrices $\mathcal{O}$ tienen en general N^2 componentes, pero no todas son independientes ya que la condición de ortogonalidad ($\mathcal{O}^T\mathcal{O} = I \Rightarrow \det \mathcal{O} = \pm 1$) introduce $\frac{1}{2}N(N+1)$ restricciones; si tomamos el conjunto de matrices ortogonales con determinante positivo, tenemos un subgrupo de $O(N)$ llamado grupo especial ortogonal de dimensión N denotado por $SO(N)$. Debido a la condición de ortogonalidad el número de parámetros independientes es $\frac{1}{2}N(N-1)$. Este es el número de parámetros y generadores de $SO(N)$.

Los elementos de este grupo los obtenemos de

$$\mathcal{O}(\theta) = e^{iT^a\theta^a} \qquad a = 1, 2, \cdots, \frac{1}{2}N(N-1), \tag{1.2}$$

donde $\theta = \left(\theta^1, \cdots, \theta^{\frac{1}{2}N(N-1)}\right)$ son los parámetros del grupo; además

$$T^a = \frac{1}{i}\left.\frac{d\mathcal{O}(\theta)}{d\theta^a}\right|_{\theta^a=0}, \tag{1.3}$$

son los generadores del grupo, que satisfacen el álgebra de Lie

$$\left[T^b, T^c\right] = if^{abc}T^a, \tag{1.4}$$

donde f^{abc} son sus constantes de estructura.

Si tomamos una rotación infinitesimal, de la ecuación (1.1) se tiene

$$x'^i = x^i + \omega^{ij}x^j \quad \text{con} \quad \omega^{ij} \quad \text{infinitesimal.}$$

De la condición de ortogonalidad podemos concluir que

$$\omega^{ij} = -\omega^{ji}, \tag{1.5}$$

es decir, ω^{ij} es totalmente antisimétrica. Las ω^{ij} tienen $\frac{1}{2}N(N-1)$ entradas independientes que es precisamente el número de parámetros del grupo.

Por otra parte se dice que las matrices $D(\theta)$ forman una representación del grupo si satisfacen la ley de multiplicación

$$D\left(\bar{\mathcal{O}}\right)D(\mathcal{O}) = D\left(\bar{\mathcal{O}}\mathcal{O}\right). \tag{1.6}$$

Consideremos entonces el producto

$$D(\mathcal{O})\,D(I+\omega)\,D^{-1}(\mathcal{O}) = D\left(\mathcal{O}(I+\omega)\,\mathcal{O}^{-1}\right). \tag{1.7}$$

Haciendo un desarrollo en serie a primer orden tenemos

$$D(\mathcal{O})\left[I + \frac{i}{2}\omega^{ij}M_{ij}\right]D^{-1}(\mathcal{O}) = I + \frac{i}{2}\left(\mathcal{O}\omega\mathcal{O}^{-1}\right)^{ij}M_{ij}, \tag{1.8}$$

donde M_{ij} son los generadores del grupo en esta representación. Siguiendo con el desarrollo anterior se muestra que

$$D(\mathcal{O})\,M_{ij}D^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}^{Tik}\mathcal{O}^{jl}M_{kl}, \tag{1.9}$$

es decir los generadores se transforman como 2-tensores. Para hallar el álgebra que satisfacen los generadores M supongamos que $D(\mathcal{O})$ es infinitesimal, entonces

$$\left[I + \frac{i}{2}\omega^{kl}M_{kl}\right]M_{ij}\left[I - \frac{i}{2}\omega^{kl}M_{kl}\right] = \left(\delta^{ik} + \omega^{ki}\right)\left(\delta^{jl} + \omega^{jl}\right)M_{kl}, \tag{1.10}$$

de donde

$$\left[M_{kl}, M_{ij}\right] = i\left(\delta_{jl}M_{ik} - \delta_{jk}M_{il} - \delta_{il}M_{kj} + \delta_{ik}M_{lj}\right). \tag{1.11}$$

La representación fundamental del grupo tiene dimensión N; la representación adjunta, tiene dimensión $\frac{1}{2}N(N-1)$. En esta última $(T_a)_{bc} = if_{abc}$.

1.2.2. Representación espinorial de $SO(N)$

En general existen tres tipos de representaciones de $SO(N)$

1. Tensoriales: Las cuales se transforman como el producto directo de vectores.
2. Espinoriales.
3. Producto directo de tensores con espinores.

En esta sección hablaremos de la representación espinorial, la cual consiste en introducir N objetos Γ^i, los cuales satisfacen

$$\left\{\Gamma^i, \Gamma^j\right\} = 2\delta^{ij}, \tag{1.12}$$

con $\{\ ,\ \}$ el anticonmutador. A la ecuación (1.12) se le conoce como *álgebra de Clifford.*

La representación espinorial de los generadores de $SO(N)$ se define como

$$M^{ij} = \frac{i}{4}\left[\Gamma^i, \Gamma^j\right], \tag{1.13}$$

la cual satisface la ecuación (1.11).

En general uno puede encontrar una representación espinorial de $SO(N)$ (supondremos N par) que es compleja y tiene dimensión $2^{\frac{N}{2}}$, la cual actúa sobre espinores de $2^{\frac{N}{2}}$ componentes

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \vdots \\ \Psi_{2^{\frac{N}{2}}} \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

En el caso de N par podemos construir una matriz Γ adicional definida por

$$\Gamma^{N+1} = i\Gamma^1\Gamma^2\cdots\Gamma^N, \tag{1.15}$$

que tiene las siguientes propiedades especiales

$$\left(\Gamma^{N+1}\right)^2 = \mathbb{I}, \tag{1.16}$$

$$\left\{\Gamma^{N+1}, \Gamma^i\right\} = 0, \tag{1.17}$$

y que es un escalar bajo una transformación $SO(N)$. En términos de esta matriz podemos definir los proyectores[1]

$$P_L = \frac{1}{2}\left(I - \Gamma^{N+1}\right), \tag{1.18}$$

$$P_R = \frac{1}{2}\left(I + \Gamma^{N+1}\right), \tag{1.19}$$

que cumplen

$$P_L^2 = P_L, \tag{1.20}$$

$$P_R^2 = P_R, \tag{1.21}$$

$$P_L + P_R = I, \tag{1.22}$$

$$P_L P_R = 0. \tag{1.23}$$

Los proyectores permiten definir dos espinores independientes

$$\Psi_L = P_L\Psi \quad \text{espinor izquierdo}, \tag{1.24}$$

$$\Psi_R = P_R\Psi \quad \text{espinor derecho}. \tag{1.25}$$

[1] P_L es llamado proyector izquierdo y P_R proyector derecho.

Cuando la dimensión del espacio es impar, esto es $SO\left(N+1\right)$ con N par, la dimensión de la representación sigue siendo $2^{\frac{N}{2}}$; sin embargo para completar el número $N+1$ de matrices Γ^{i} se debe incorporar Γ^{N+1} al conjunto N de las Γ^{i}, de tal manera que se cumpla el álgebra de Clifford de la ecuación (1.12). Los generadores se definen como en el caso de dimensión par, es decir, están definidos por la ecuación (1.66); solo que ahora tenemos $\frac{1}{2}\left(N+1\right)\left(N+1-1\right)=\frac{1}{2}N\left(N+1\right)$ generadores. En espacio de dimensión impar no existe quiralidad.

1.2.3. El grupo $SU\left(N\right)$

Los elementos de este grupo son las matrices unitarias $N\times N$ con determinante 1. Sea $\mathcal{U}\ \epsilon\ SU\left(N\right)$, el número de elementos independientes de $\mathcal{U}$ es dado por la condición de unitariedad las cual nos da N^{2} condiciones y $\det\mathcal{U}=1$ la cual nos da una condición; por lo tanto el número de componentes reales independientes es $2N^{2}-\left(N^{2}+1\right)=N^{2}-1$.

Toda matriz unitaria se puede escribir como la exponencial de una matriz hermítica, entonces los elementos de $SU\left(N\right)$ se pueden escribir como

$$\mathcal{U}\left(\alpha\right)=e^{i\alpha^{a}t^{a}},\qquad a=1,2,\cdots,N^{2}-1, \tag{1.26}$$

donde $\left(t^{a}\right)^{\dagger}=t^{a}$ son los generadores del grupo y α^{a} sus parámetros. El inverso es de $\mathcal{U}$ es

$$\mathcal{U}^{\dagger}=\left(e^{i\alpha^{a}t^{a}}\right)^{\dagger}=e^{-i\alpha^{a}t^{a}}. \tag{1.27}$$

Dado que $\det\mathcal{U}=1$ $\log\left(\det\mathcal{U}\right)=0$, usando la identidad $\log\left(\det\mathcal{U}\right)=Tr\log\mathcal{U}$, concluimos que

$$Tr\ t^{a}=0. \tag{1.28}$$

Entonces, t^{a} es un conjunto de $N^{2}-1$ matrices hermíticas de traza nula.

En la representación fundamental, los generadores se normalizan

$$Tr\left(t^{a}t^{b}\right)=\frac{1}{2}\delta^{ab}. \tag{1.29}$$

Además los generadores t^{a} satisfacen

$$\left[t^{a},t^{b}\right]=if^{abc}t^{c}, \tag{1.30}$$

que es el álgebra de Lie del grupo donde f^{abc} son las constantes de estructura del grupo, que son reales y totalmente antisimétricas.

La representación de dimensión N es la más baja del grupo y recibe el nombre de *representación fundamental*. Como ya se mencionó, los elementos del grupo son matrices unitarias de dimensión $N\times N$, las cuales actúan sobre N-pletes

$$\varphi=\begin{pmatrix}\varphi^{1}\\ \varphi^{2}\\ \vdots\\ \varphi^{N}\end{pmatrix}, \tag{1.31}$$

que se transforman como

$$\varphi'=\mathcal{U}\varphi. \tag{1.32}$$

Sean φ y χ dos N-pletes, entonces usando la definición de la transformación, el producto $\chi^{\dagger}\varphi$ es invariante bajo $SU\left(N\right)$.

1.3. Grupo de Poincaré

Las propiedades del espacio tiempo plano surgen de los siguientes postulados:

1. Las leyes de la física lucen igual en todos los marcos de referencia inerciales.

2. Existe una velocidad límite en la naturaleza, la cual tiene un valor absoluto c.

El primer postulado significa que las ecuaciones que representan las leyes físicas deben tener la misma forma en cualquier sistema de referencia, esto es, las ecuaciones deben ser covariantes. Las coordenadas de este espacio son denotadas por x^0, x^1, x^2 y x^3; donde $x^0 = ct$ y x^i con $i = 1, 2, 3$ son las coordenadas espaciales usuales. El 4-vector de posición se denota por

$$x^\alpha = \left(x^0, \mathbf{x}\right). \tag{1.33}$$

Nos interesa estudiar las propiedades de simetría de los sistemas físicos cuando en el 4-espacio se realizan cierto tipo de transformaciones.

Las transformaciones con sentido físico que pueden ser realizadas son las siguientes:

- **Rotaciones en el 3-espacio:** Son transformaciones ortogonales en los planos $x^1 - x^2$, $x^1 - x^3$ y $x^2 - x^3$.
- **Transformaciones puras de Lorentz:** También conocidas como *boosts*, son aquellas transformaciones que conectan marcos de referencia inerciales en movimiento relativo a lo largo de los ejes x^1, x^2 y x^3. Son transformaciones en los planos espacio-temporales $x^0 - x^1$, $x^0 - x^2$ y $x^0 - x^3$.
- **Traslaciones a lo largo de los 4 ejes**

El conjunto de rotaciones y boosts forma el llamado grupo de Lorentz denotado por $SO\,(1, 3)$, sus elementos son llamados *transformaciones de Lorentz* y suelen denotarse por Λ. El conjunto de las traslaciones forma un grupo llamado *grupo de traslaciones*, el cual es un grupo abeliano. Al producto semidirecto del grupo de Lorentz con el grupo de las traslaciones, se le conoce como *grupo de Poincaré* que es denotado por $ISO\,(1{,}3)$.

1.3.1. El grupo de Lorentz, $SO\,(1, 3)$

En el espacio-tiempo los puntos señalan eventos, es de interés físico la separación entre eventos dada por

$$s_{12}^2 = \left(x_1^0 - x_2^0\right) - |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2, \tag{1.34}$$

la cual es un invariante de Lorentz. Para dos eventos separados infinitesimalmente podemos escribir

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \left(dx^0\right)^2 - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2, \tag{1.35}$$

donde

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1.36}$$

es el tensor métrico.

La longitud $x^2 = x_\alpha x^\alpha$ es un invariante de Lorentz; usando esta condición y el hecho de que $x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\mu x^\mu$, se concluye que

$$\Lambda^T g \Lambda = g. \tag{1.37}$$

Se dice que Λ es una transformación de Lorentz si deja invariante al tensor métrico. Tomando el determinante a ambos lados de la ecuación (1.37) y utilizando las propiedades de los determinantes probamos que

$$\det \Lambda = \pm 1. \tag{1.38}$$

Por lo tanto las transformaciones de Lorentz tienen determinante ± 1, aquellas transformaciones con determinante positivo se llaman *transformaciones propias de Lorentz*, las transformaciones de Lorentz con determinante negativo son llamadas *transformaciones impropias de Lorentz* y son de la forma $\Lambda_p \Lambda$ ó $\Lambda_T \Lambda$ con Λ una transformación propia y

$$\Lambda_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g \rightarrow \text{reflexión espacial}, \tag{1.39}$$

$$\Lambda_T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -g \to \text{reflexión temporal.} \tag{1.40}$$

Las propiedades del grupo de Lorentz son dictadas por el álgebra que satisfacen sus generadores; para determinarlos necesitamos los 3 boosts y las 3 rotaciones. Las matrices que representan los 3 boosts son

$$\Lambda\left(\zeta_1\right) = \begin{pmatrix} \cosh\zeta_1 & -\operatorname{senh}\zeta_1 & 0 & 0 \\ -\operatorname{senh}\zeta_1 & \cosh\zeta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Boost a lo largo del eje } x^1, \tag{1.41}$$

$$\Lambda\left(\zeta_2\right) = \begin{pmatrix} \cosh\zeta_2 & 0 & -\operatorname{senh}\zeta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\operatorname{senh}\zeta_2 & 0 & \cosh\zeta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Boost a lo largo del eje } x^2, \tag{1.42}$$

$$\Lambda\left(\zeta_3\right) = \begin{pmatrix} \cosh\zeta_3 & 0 & 0 & -\operatorname{senh}\zeta_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{senh}\zeta_3 & 0 & 0 & \cosh\zeta_3 \end{pmatrix} \quad \text{Boost a lo largo del eje } x^3. \tag{1.43}$$

Las rotaciones son

$$\Lambda\left(\theta_1\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_1 & \operatorname{sen}\theta_1 \\ 0 & 0 & -\operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \quad \text{Rotación alrededor del eje } x^1, \tag{1.44}$$

$$\Lambda\left(\theta_2\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_2 & 0 & -\operatorname{sen}\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \quad \text{Rotación alrededor del eje } x^2, \tag{1.45}$$

$$\Lambda\left(\theta_3\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_3 & \operatorname{sen}\theta_3 & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Rotación alrededor del eje } x^3. \tag{1.46}$$

Los generadores están dados por

$$K_i = -i \left.\frac{d\Lambda\left(\zeta_i\right)}{d\zeta_i}\right|_{\zeta_i=0}, \tag{1.47}$$

$$J_i = -i \left.\frac{d\Lambda\left(\theta_i\right)}{d\theta_i}\right|_{\theta_i=0}. \tag{1.48}$$

Una transformación de Lorentz general está dada entonces por

$$\Lambda = e^{i\mathbf{J}\cdot\theta + i\mathbf{K}\cdot\zeta}. \tag{1.49}$$

Calculando los generadores se muestran las reglas de conmutación entre ellos

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k, \tag{1.50}$$

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k, \tag{1.51}$$

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k. \tag{1.52}$$

Para entender mejor la estructura del grupo de Lorentz consideremos las siguientes combinaciones lineales de los generadores

$$N_i^{\pm} = \frac{1}{2}\left(J_i \pm iK_i\right), \tag{1.53}$$

las cuales obedecen las siguientes reglas de conmutación

$$\left[N_i^+, N_j^+\right] = i\epsilon_{ijk}N_k^+, \tag{1.54}$$
$$\left[N_i^-, N_j^-\right] = i\epsilon_{ijk}N_k^-, \tag{1.55}$$
$$\left[N_i^+, N_j^-\right] = 0. \tag{1.56}$$

Esta combinación lineal de generadores nos revela que el grupo de Lorentz complexificado está formado por dos copias de $SU(2)$.

1.3.2. El álgebra de Poincaré

La transformación continua más general en el espacio tiempo es la llamada tansformación de Poincaré, la cual consta de una transformación de Lorentz más una traslación

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu, \tag{1.57}$$

con a^μ un 4-vector constante. Las transformaciones definidas por a^μ forman el grupo de las traslaciones.

Sea $D(\Lambda, a)$ una representación del grupo de Poincaré, entonces debe cumplirse la regla de composición

$$D\left(\bar{\Lambda}, \bar{a}\right) D(\Lambda, a) = D\left(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda}a + \bar{a}\right). \tag{1.58}$$

Si consideramos una transformación infinitesimal y utilizamos las condición de Lorentz (1.37) podemos probar que

$$\omega_{\rho\sigma} = -\omega_{\sigma\rho}, \tag{1.59}$$

entonces ω es antisimétrico, lo cual nos dice que tiene 6 componentes; además dado que ϵ es una traslación tiene 4 componentes. Por lo tanto el grupo de Poincaré tiene 10 parámetros reales.

Para una transformación infinitesimal D puede ser escrita como

$$D(1+\omega, \epsilon) = I + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - i\epsilon_\mu P^\mu, \tag{1.60}$$

donde $J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}$ dada la antisimetría de $\omega_{\mu\nu}$. $J^{\mu\nu}$ son los generadores del grupo de Lorentz y P^μ los generadores del grupo de las traslaciones. Mediante un cálculo directo se puede mostrar que ,bajo el grupo, J es un 2-tensor, es decir, $D(\Lambda, a) J^{\rho\sigma} D^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma J^{\mu\nu}$. Además P es un 1-tensor, esto es, $D(\Lambda, a) P^\rho D^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_\mu{}^\rho P^\mu$.

Deseamos encontrar el álgebra que satisfacen los generadores del grupo de Poincaré, para lo cual suponemos que las transformaciones D en $D(\Lambda, a) J^{\rho\sigma} D^{-1}(\Lambda, a)$ son también infinitesimales. Después de un poco de álgebra se tiene

$$i\left[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}\right] = g^{\rho\nu}J^{\mu\sigma} - g^{\rho\mu}J^{\nu\sigma} - g^{\sigma\mu}J^{\rho\nu} + g^{\sigma\nu}J^{\rho\mu}, \tag{1.61}$$
$$i\left[P^\mu, J^{\rho\sigma}\right] = g^{\mu\rho}P^\sigma - g^{\mu\sigma}P^\rho. \tag{1.62}$$

Ahora supongamos que las transformaciones D en $D(\Lambda, a) P^\rho D^{-1}(\Lambda, a)$ son de nuevo infinitesimales lo cual nos lleva a

$$\left[P^\mu, P^\rho\right] = 0. \tag{1.63}$$

Las ecuaciones (1.61), (1.62) y (1.63) conforman el álgera del grupo de Poincaré.

Algo importante de resaltar es que las ecuaciones anteriores se cumplirán en cualquier espacio tiempo con métrica de Minkowski, es decir las ecuaciones (1.61), (1.62) y (1.63) son el álgebra del grupo $ISO(1, m-1)$ cuando se permite que los indices tomen valores $0, 1, \cdots, m-1$.

1.3.3. Representación espinorial del grupo de Lorentz

Recordemos que por representación de grupo se entiende un conjunto de matrices $D(\Lambda)$ tal que satisfacen el producto del grupo

$$D(\Lambda) D\left(\bar{\Lambda}\right) = D\left(\Lambda\bar{\Lambda}\right), \tag{1.64}$$

donde $D(\Lambda) = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}}$, con $J^{\mu\nu}$ los generadores en esa representación. Queremos encontrar una representación espinorial para el grupo de Lorentz $SO(1,3)$, para ello se tratará el problema de manera general.

En la sección anterior obtuvimos el álgebra del grupo de Poincaré de donde encontramos que los generadores del grupo de Lorentz $J^{\mu\nu}$ deben satisfacer la ecuación (1.61); además se mencionó que esta relación se mantendría en un espacio-tiempo de dimensión arbitraria. En está sección hablaremos de la representación espinorial del grupo de Lorentz definido en un espacio de dimensión m (m par) que denotaremos como $SO(1,m-1)$, lo anterior lo haremos utlizando el álgebra de Clifford. Una álgebra de Clifford de dimensión m es un conjunto de m matrices Γ^M de tamaño $2^{\frac{m}{2}} \times 2^{\frac{m}{2}}$ que satisfacen

$$\left\{\Gamma^M, \Gamma^N\right\} = 2g^{MN}, \tag{1.65}$$

donde g es el tensor métrico. Se puede probar además que las matrices Γ^M se transforman como 1-tensores bajo el grupo de Lorentz.

Consideremos la matriz definida por

$$S^{MN} = \frac{i}{4}\left[\Gamma^M, \Gamma^N\right]. \tag{1.66}$$

Estos objetos cumplen

$$i\left[S^{MN}, S^{LK}\right] = g^{LN}S^{MK} - g^{LM}S^{NK} - g^{KM}S^{LN} + g^{KN}S^{LM}, \tag{1.67}$$

que es exactamente el álgebra de Lorentz (1.61), por lo que siempre y cuando nuestras matrices Γ^M satisfagan el álgebra de Clifford (1.65) seremos capaces de construir generadores de Lorentz $S^{\mu\nu}$ por medio de la ecuación (1.66)[2]. Esto reduce el problema de encontrar representaciones espinoriales del grupo de Lorentz en cualquier dimensión a encontrar soluciones para la ecuación (1.65). Estas representaciones actuarán sobre espinores complejos de dimensión $2^{\frac{m}{2}}$.

De manera similar al caso de $SO(N)$, podemos definir una matriz Γ^{m+1} (en caso de m par) que anticonmutará con las demás matrices y cuyo cuadrado será la matriz identidad, la cual nos ayudará a definir proyectores izquierdos y derechos que permitirán definir dos espinores independientes.

Soluciones al álgebra de Clifford

Hasta el momento hemos mencionado que el álgebra de Clifford sirve para construir representaciones espinoriales de $SO(N)$ o de $SO(1,m-1)$, pero nada se ha dicho acerca de sus soluciones. Para ello, considérense las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

El producto de Kronecker se define como

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}. \tag{1.68}$$

El cual satisface

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC \otimes BD). \tag{1.69}$$

Con lo anterior podemos encontrar un conjunto de matrices γ^μ para construir la representación espinorial del grupo $SO(1,3)$, el grupo de Lorentz usual[3]. Sean las matrices

$$\gamma^0 = \left(\sigma^3 \otimes \sigma^0\right) = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \gamma^i = i\left(\sigma^2 \otimes \sigma^i\right) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.70}$$

[2] Es común llamar $S^{\mu\nu}$ en lugar de $J^{\mu\nu}$ a los generadores de Lorentz en la representación espinorial.

[3] Cuando hablemos del grupo de Lorentz usual usaremos γ y ψ en lugar de Γ, Ψ lo cual será conveniente más adelante.

donde σ^0 es la matriz identidad 2×2 y σ^i son las matrices de Pauli. Aprovechando que las matrices de Pauli satisfacen el (álgebra de Clifford 1.12), esto es

$$\left\{\sigma^i, \sigma^j\right\} = 2\delta^{ij}, \tag{1.71}$$

y usando la propiedad (1.69) es fácil probar que nuestro conjunto de matrices γ^μ satisfacen el álgebra de Clifford y por lo tanto podemos definir una representación espinorial a través de ellas, a esta representación particular se le llama *representación de Dirac*. Es claro que la representación de Dirac no es la única representación espinorial del grupo de Lorentz, sin embargo, cualesquiera dos soluciones del álgebra de Clifford estarán relacionadas por una transformación de similaridad.

Recordemos que las representaciones espinoriales actúan sobre espinores complejos de dimensión $2^{\frac{N}{2}}$, en el caso del grupo de Lorentz $SO\left(1,3\right)$ los espinores tienen 4 componentes y se les conoce como biespinores, se denotan por

$$\psi\left(x\right) = \begin{pmatrix} \psi_1\left(x\right) \\ \psi_2\left(x\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{11}\left(x\right) \\ \psi_{12}\left(x\right) \\ \psi_{21}\left(x\right) \\ \psi_{22}\left(x\right) \end{pmatrix}, \tag{1.72}$$

y se transforman como

$$\psi'\left(x\right) = D\left(\Lambda\right)\psi = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}}\psi\left(x\right). \tag{1.73}$$

También recordemos que nuestro espacio es de dimensión par, por lo que existe quiralidad, es decir, existen espinores izquierdos y espinores derechos; para encontrarlos es necesario encontrar una matriz $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ que cumpla $\left\{\gamma^\mu, \gamma^5\right\} = 0$ y $\left(\gamma^5\right)^2 = \mathbb{I}$, con $\mathbb{I}$ la matriz identidad 4×4. En la representación de Dirac

$$\gamma^5 = \left(\sigma^1 \otimes \sigma^0\right) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^0 \\ \sigma^0 & 0 \end{pmatrix},$$

con lo cual podemos encontrar cuales son los espinores izquierdos y derechos

$$\psi_R = P_R\psi = \frac{1}{2}\left(1+\gamma^5\right)\psi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \psi_1+\psi_2 \\ \psi_1+\psi_2 \end{pmatrix}, \tag{1.74}$$

$$\psi_L = P_L\psi = \frac{1}{2}\left(1-\gamma^5\right)\psi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \psi_1-\psi_2 \\ \psi_1-\psi_2 \end{pmatrix}. \tag{1.75}$$

Para terminar este capítulo tratemos de encontrar un escalar a partir de ψ. Dado que nuestro espinor tiene entradas complejas y siguiendo la construcción de invariantes en $SO\left(N\right)$ uno pensaría que el escalar se contruiría como $\psi^\dagger\psi$. Pero veamos como se transforma este objeto,

$$\psi'^\dagger\psi' = \psi^\dagger D^\dagger\left(\Lambda\right)D\left(\Lambda\right)\psi, \tag{1.76}$$

lo cual indica que $\psi^\dagger\psi$ será un escalar de Lorentz siempre y cuando $D^\dagger\left(\Lambda\right)D\left(\Lambda\right) = 1$, lo cual sucederá sólo si todas nuestras matrices γ^μ son hermitinianas o antihermitianas, de modo que los generadores sean hermitianos; sin embargo es claro que nuestras matrices γ^μ no cumplen estas condiciones por lo que podemos concluir que el grupo de Lorentz no produce transformaciones unitarias, en otras palabras no podremos encontrar generadores del grupo de Lorentz hermitianos y en consecuencia $\psi^\dagger\psi$ no es un escalar.

Para definir un escalar de Lorentz notemos que del álgebra de Clifford se cumple que

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \quad \forall\ \mu. \tag{1.77}$$

Usando lo anterior se tiene que

$$S^{\mu\nu\dagger} = -\frac{i}{4}\gamma^0\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]\gamma^0 = -\gamma^0 S^{\mu\nu}\gamma^0, \tag{1.78}$$

y entonces

$$D^\dagger\left(\Lambda\right) = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu\dagger}} = \gamma^0 D^{-1}\left(\Lambda\right)\gamma^0. \tag{1.79}$$

Si definimos

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0, \tag{1.80}$$

es fácil probar que el escalar será $\bar{\psi}\psi$.

Capítulo 2

Electrodinámica Espinorial

En este capítulo estudiaremos la electrodinámica espinorial usual, construyendo densidades lagrangianas apropiadas que nos devuelvan las ecuaciones para los diferentes campos; además estudiaremos las constricciones de dichas teorías utilizando el algoritmo de Dirac [7, 10, 11, 14, 15].

2.1. La Teoría de Maxwell

El objetivo es encontrar una lagrangiana que nos devuelva las ecuaciones de Maxwell por medio de las ecuaciones de Lagrange para campos. Empecemos con las ecuaciones de Maxwell, las cuales se dividen en inhomogéneas que tienen un origen dinámico y homogéneas cuyo origen es geométrico. Las ecuaciones de Maxwell inhómogeneas son

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = J^0 \quad \text{Ley de Gauss,} \tag{2.1}$$
$$\nabla \times \mathbf{B} - \partial_0 \mathbf{E} = \mathbf{J} \quad \text{Ley de Ampère con corrección de Maxwell.} \tag{2.2}$$

Las ecuaciones homogéneas son

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_0 \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad \text{Ley de Faraday,} \tag{2.3}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{2.4}$$

Donde $J^0 = c\rho$, $x^0 = x_0 = ct$ y además absorbamos el factor $\frac{4\pi}{c}$ en J^0 y $\mathbf{J}$.

Los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ se pueden derivar de los llamados potencial vectorial y potencial escalar. Recordando que $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ y utilizándolo en la (ecuación 2.4) tenemos que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{2.5}$$

Sustituyendo la anterior en la ecuación (2.3) y recordando que $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$ concluimos que

$$\mathbf{E} = -\nabla A^0 - \partial_0 \mathbf{A}. \tag{2.6}$$

Bajo $SO(3)$ $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}$ y $\mathbf{J}$ son 1-tensores y A^0, J^0 son escalares.

Definimos los siguientes cuadrivectores

$$J^\alpha = \left(J^0, \mathbf{J}\right) \quad \text{cuadricorriente,} \tag{2.7}$$

$$A^\alpha = \left(A^0, \mathbf{A}\right) \quad \text{cuadripotencial.} \tag{2.8}$$

De modo que la ecuación de continuidad $\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ toma la siguiente forma covariante

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0. \tag{2.9}$$

Dado que no hay compañeros escalares para **E** y **B** no podemos formar más cuadrivectores; su naturaleza tensorial surge de las ecuaciones (2.5) y (2.6). Se puede ver que los campos eléctrico y magnético son las componentes de un tensor totalmente antisimétrico

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \tag{2.10}$$

Donde

$$E_i \to F^{i0}, \quad B_i \to -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{ik}.$$

A $F^{\mu\nu}$ se le conoce como tensor de campo electromagnético. Se define el tensor dual de $F_{\mu\nu}$ como

$$\widetilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, \tag{2.11}$$

con $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ el tensor de Levi-Civita en cuatro dimensiones. Donde

$$B_i \to \widetilde{F}^{i0}, \quad E_i \to -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\widetilde{F}^{jk}.$$

Forma Covariante de las Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas (ecuaciones (2.1) y (2.2)) se pueden resumir en

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu. \tag{2.12}$$

Por otra parte las ecuaciones homogéneas (ecuaciones (2.3) y (2.4)) surgen de

$$\partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\lambda F^{\mu\nu} = 0, \tag{2.13}$$

que también se pueden escribir como

$$\partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} = 0. \tag{2.14}$$

2.1.1. Transformaciones de Norma

Sea la transformación

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x), \tag{2.15}$$

con $\alpha(x)$ un escalar de Lorentz. Entonces es claro que el tensor de campo electromagnético es invariante bajo esta transformación, es decir, $F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$. Los campos **E** y **B** son invariantes bajo una transformación de norma. Por eso se dice que el campo electromagnético $A_\mu(x)$ es un campo de norma, es decir, está definido hasta una transformación de norma. Es el campo electromagnético $A_\mu(x)$ con el que caracterizaremos los grados de libertad de la teoría de Maxwell.

Como se mencionó al principio del capítulo, nos interesa construir una acción de la cual surjan las ecuaciones de Maxwell por medio del principio de Hamilton; esto es, buscamos una acción de la forma

$$S = \int d^4x \mathcal{L}\Big(A_\mu(x), \partial_\mu A_\nu(x)\Big), \tag{2.16}$$

la cual tendrá que ser invariante de Lorentz y de norma si queremos que las ecuaciones sean invariantes bajo estas transformaciones. Bajo una transformación de Lorentz

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \tag{2.17}$$

y recordando, de (1.38), que las transformaciones de Lorentz tienen determinante ± 1; tenemos que

$$d^4x' = |\det\Lambda| d^4x = d^4x, \tag{2.18}$$

de donde concluimos que la acción es invariante si lo es la lagrangiana $\mathcal{L}$.

Los objetos covariantes de Lorentz son

$$J'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu J_\nu, \tag{2.19}$$
$$A'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu A_\nu, \tag{2.20}$$
$$F'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta F_{\alpha\beta}. \tag{2.21}$$

Sin embargo bajo transformaciones de norma solo $F_{\mu\nu}$ es invariante. Se pueden construir los siguientes invariantes

- $A_\mu A^\mu$ Invariante de Lorentz, pero no de norma.
- $J_\mu A^\mu$ Invariante de Lorentz y de norma siempre y cuando J_μ se construya a partir del principio de norma de acoplamiento mínimo. J_μ caracteriza la interacción electromagnética.
- $F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu}$ Invariante de Lorentz y de norma, sin embargo este término se puede escribir como $\partial_\mu\left(\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}A_\nu F_{\alpha\beta}\right)$ que es un término de superficie que no contribuirá en las ecuaciones de movimiento.
- $\widetilde{F}_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu} \propto F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ con $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ invariante de Lorentz, de norma y par bajo paridad.

Una vez que encontramos los invariantes de Lorentz y de norma que se pueden construir, sea la lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu, \tag{2.22}$$

utilizando las ecuaciones de Lagrange para campos

$$\partial_\alpha\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\alpha A_\beta}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\beta},$$

nos llevan a

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = J^\beta.$$

Entonces, la lagrangiana de Maxwell (2.22), nos lleva a las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas. En ausencia de fuentes, $J^\alpha = 0$, se tiene la *Teoría pura de Maxwell*

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \Rightarrow \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 0. \tag{2.23}$$

2.1.2. Constricciones de Teoría de Maxwell

En esta sección estudiaremos las constricciones de la teoría pura de Maxwell dada por la ecuación (2.23). Si calculamos los momentos canónicos

$$\pi_\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}^\alpha}, \tag{2.24}$$

tenemos

$$\pi_\alpha = F_{\alpha 0}, \tag{2.25}$$

de donde, dada la antisimetría del tensor de Maxwell, la teoría está sujeta a constricciones ya que $F_{00} = 0$ y se tiene la constricción primaria

$$\Phi^{(1)} = \pi_0 \approx 0. \tag{2.26}$$

Para las componentes espaciales podemos despejar la velocidades

$$\dot{A}^i = \pi_i + \partial^i A^0. \tag{2.27}$$

La hamiltoniana primaria es

$$H^{(1)} = \int d^3x\mathcal{H}^{(1)}, \tag{2.28}$$

con

$$\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H} + \lambda \Phi^{(1)}, \tag{2.29}$$

donde

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi_i \pi_i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + \pi_i \partial^i A^0, \tag{2.30}$$

pero $\pi_i \partial_i A^0 = -A^0 \partial_i \pi_i + \partial_i \left(A^0 \pi_i\right)$, entonces

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi_i \pi_i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} - A^0 \partial^i \pi_i, \tag{2.31}$$

donde se ha omitido el término de superficie $\partial_i \left(A^0 \pi_i\right)$.

Aplicando la condición de consistencia sobre nuestra constricción

$$\dot{\Phi}^{(1)} = \left\{\Phi^{(1)}, H^{(1)}\right\} = \left\{\Phi^{(1)}(x), \int d^3y \left(\mathcal{H}(y) + \lambda \Phi^{(1)}(y)\right)\right\} \approx 0, \tag{2.32}$$

se tiene

$$\dot{\Phi}^{(1)} = \partial_i \pi_i \approx 0. \tag{2.33}$$

De donde no es posible determinar λ y además obtenemos una constricción secundaria

$$\Phi^{(2)} = \partial_i \pi_i \approx 0. \tag{2.34}$$

Para terminar, veamos la condición de consistencia para $\Phi^{(2)}$

$$\dot{\Phi}^{(2)} = \left\{\Phi^{(2)}, H^{(1)}\right\} = \left\{\Phi^{(2)}(x), \int d^3y \left(\mathcal{H}(y) + \lambda(y) \Phi^{(1)}(y)\right)\right\} \approx 0, \tag{2.35}$$

de donde

$$\dot{\Phi}^{(2)} = \partial_i \partial_j F_{ij} \approx 0. \tag{2.36}$$

Por lo que no hay más constricciones y λ permanece indeterminado.

De acuerdo con el algoritmo de Dirac, una función f del espacio fase es una cantidad de primera clase si sus paréntesis de Poisson con todas las constricciones son cero. Así f es de primera clase si

$$\{f, \Phi\} \approx 0 \quad \forall \Phi. \tag{2.37}$$

Se dice f es de segunda clase si al menos uno de sus paréntesis de Poisson con las constricciones no es cero. Tomando en cuenta la definición anterior es fácil probar que las constricciones $\Phi^{(1)}$ y $\Phi^{(2)}$ son de primera clase.

Dado que se tiene constricciones de primera clase, esta es una teoría de norma; lo cual se había demostrado antes de estudiar las constricciones.

2.2. El campo de Dirac

Como sabemos un estado arbitrario para una partícula de espín $\frac{1}{2}$ es descrito por dos números complejos, podemos describir estos estados por medio de un espinor de dos componentes

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \tag{2.38}$$

A principios del siglo XX Dirac buscó una ecuación que describiera a estas partículas, el quería una ecuación que fuera consistente con la ecuación de Klein-Gordon y además que solo contuviera derivadas de primer orden, lo cual presenta un problema, ya que si solo actúamos con ∂_μ sobre ψ, tendríamos un índice libre el cual tendría que ser contraído para que la teoría fuera relativista. Es claro que no podía contraer este índice con un cuadrivector a modo de tener $v^\mu \partial_\mu \psi$ ya que esta expresión tiene una dirección preferencial lo cual es inconsistente con los postulados de la relatividad especial. Dirac entonces buscó un operador diferencial que fuera una matriz 2×2 que actuaría sobre nuestro espinor de dos componentes, es decir, algo de la forma

$$\gamma^\mu\partial_\mu = \gamma^0\partial_0 + \gamma^1\partial_1 + \gamma^2\partial_2 + \gamma^3\partial_3. \tag{2.39}$$

La ecuación de movimiento sería

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi = 0. \tag{2.40}$$

El razonamiento de Dirac fue, que dada la ecuación (2.40), la ecuación de Klein-Gordon se obtendría al aplicar dos veces el operador $i\gamma^\mu\partial_\mu = m$, lo anterior se logra si la parte simétrica del producto $\gamma^\mu\gamma^\nu$ es igual al tensor métrico

$$\frac{1}{2}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu\right) = g^{\mu\nu}, \tag{2.41}$$

reconocemos lo anterior como el álgebra de Clifford (1.65) la cual sabemos construir y conocemos su relación con el grupo de Lorentz.

Dirac encontró que la ecuación (2.40) sería invariante relativista e implicaría la ecuación de Klein-Gordon siempre que las matrices γ^μ satisfagan el álgebra de Clifford (1.65). A la ecuación (2.40) se le conoce como ecuación de Dirac.

Para terminar tenemos que encontrar matrices γ^μ 2×2 que satisfagan la ecuación (1.65), sin embargo es imposible construir matrices 2×2 ó 3×3 que satisfagan la ecuación (1.65), la representación más pequeña que se puede encontrar es 4×4 lo que nos obligaría a que nuestro espinor tuviera 4 componentes en lugar de dos.

El motivo de que no existan representaciones de menor dimensión es profundo, recordemos que el grupo de Lorentz $SO(1,3)$ se puede representar como dos copias del grupo $SU(2)$, lo cual nos dice que existen espinores izquierdos y derechos, también recordemos que para encontrar una representación espinorial del grupo de Lorentz nos encontramos con el álgebra de Clifford que de manera similar surgió al intentar establecer una ecuación para los campos espinoriales que fuera invariante relativista . Que sea invariante relativista quiere decir que la teoría no debe cambiar bajo ninguna de las transformaciones de Lorentz, incluso las impropias. Dado que una de las transformaciones impropias de Lorentz es la reflexión espacial, una teoría que solo incluyera un espinor izquierdo o derecho no sería invariante ya que la reflexión espacial nos llevaría de un espinor izquierdo a uno derecho y vicecersa. Por lo anterior nuestra teoría debe tener tanto espinores izquierdos como derechos tal como se mencionó en el capítulo 1, entonces tenemos un espinor de la forma

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}, \tag{2.42}$$

donde ψ_1 y ψ_2 son espinores de dos componentes. Dado que en realidad necesitamos una representación 4×4 usaremos la ya estudiada representación de Dirac (1.70).

Construyamos una acción que nos devuelva la ecuación de Dirac que sea invariante de Lorentz y que además sea invariante bajo la transformación de norma

$$\psi \to e^{i\alpha}\psi, \tag{2.43}$$

donde $e^{i\alpha}$ es un elemento de $U(1)$ y α una constante.

Sabemos que los objetos $\bar{\psi}\psi$, $\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ son escalares de Lorentz, pero solo $\bar{\psi}\psi$ es invariante de norma. Sin embargo es fácil construir otro invariante de Lorentz y de norma multiplicando $\bar{\psi}$ con $\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ por la derecha, de modo que nuestros invariantes de norma y de Lorentz son $\bar{\psi}\psi$ y $\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$. Con lo anterior sea la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi. \tag{2.44}$$

Mediante el uso de las ecuaciones de Lagrange podemos probar que esta lagrangiana nos devuelve la ecuación de Dirac.

2.3. Electrodinámica Espinorial

Estamos listos para construir la lagrangiana de la electrodinámica espinorial, para esto consideremos el lagrangiano (2.44) el cual es invariante bajo la transformación de norma $\psi \to e^{i\alpha}\psi$ siempre y cuando el parámetro α de la transformación sea global. En esta sección estudiaremos que es lo que ocurre cuando permitimos que el parámetro α dependa del espacio tiempo

$$\alpha = \alpha\left(x^{\mu}\right), \tag{2.45}$$

y forcemos la lagrangiana a mantener su invarianza de norma bajo la transformación local. Si hacemos esta transformación de norma a la lagrangiana (2.44) obtendremos el término $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\partial_{\mu}\alpha\left(x\right)$; si deseamos que la lagrangiana sea invariante bajo la transformación, debemos encontrar la forma de cancelar este término sobrante. Para lo anterior sea A_{μ} un campo que transforma como

$$A_{\mu} \to A_{\mu} - \frac{1}{e}\partial_{\mu}\alpha\left(x\right), \tag{2.46}$$

bajo $U\left(1\right)$, donde e es una constante adimensional de proporcionalidad. Llamaremos al campo A_{μ} el campo de norma.

Para introducir el campo de norma a la lagrangiana introducimos la derivada covariante

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} + ieA_{\mu}, \tag{2.47}$$

con lo anterior nuestro lagrangiano toma la forma

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\left(i\not{D} - m\right)\psi, \tag{2.48}$$

donde $\not{D} = \gamma^{\mu}D_{\mu}$. Esta lagrangiana es invariante de Lorentz y de norma, por lo que al haber introducido el campo de norma hemos restaurado la simetría bajo transformaciones de $U\left(1\right)$ ya sean locales o globales. Sin embargo, aún tenemos un problema, ya que si queremos conocer la dinámica del campo de norma calcularíamos las ecuaciones de Lagrange para A_{μ} pero debido a que no hay derivadas de éste las ecuaciones de lagrange nos dirían que $\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi$ es cero, lo cual nos regresaría a la lagrangiana (2.44) que no es invariante bajo $U\left(1\right)$ local. Para solucionar este problema debemos incluir cierta dinámica para el campo de norma.

Para cualquier campo de norma A_{μ} el término cinético apropiado es

$$\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{2.49}$$

donde

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{e}\left[D_{\mu}, D_{\nu}\right], \tag{2.50}$$

y e es la misma constante de proporcionalidad introducida en la transformación del campo de norma. Dado que en este caso solo tenemos un campo de norma A_{μ} es fácil probar que

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}. \tag{2.51}$$

Entonces nuestro lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\left(i\not{D} - m\right)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{2.52}$$

que es invariante de Lorentz y de norma bajo el grupo $U\left(1\right)$.

Las ecuaciones de movimiento para (2.52) están dadas por las ecuaciones de Lagrange para los campos ψ, $\bar{\psi}$ y A_{μ}, las cuales no llevarían a las ecuaciones

$$\bar{\psi}\left(i\overleftarrow{\not{D}} + m\right) = 0, \tag{2.53}$$

$$\left(i\not{D} - m\right)\psi = 0, \tag{2.54}$$

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = e\bar{\psi}\gamma^{\nu}\psi. \tag{2.55}$$

2.3.1. Constricciones de la electrodinámica espinorial

En está sección estudiaremos las constricciones de la electrodinámica espinorial dada por la lagrangiana (2.52). Si calculamos los momentos canónico asociados a cada uno de los campos tenemos

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial \dot{A}^\mu} = F_{\mu 0} = \partial_i A_0 - \dot{A}_i, \tag{2.56}$$

$$\pi_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\bar{\psi}\gamma^0, \tag{2.57}$$

$$\pi_{\bar{\psi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = 0. \tag{2.58}$$

De donde obtenemos expresiones para $\dot{A}^i$ y tres constricciones primarias

$$\dot{A}^i = \pi_i + \partial^i A^0, \tag{2.59}$$

$$\Phi_1^{(1)} = \pi_0, \tag{2.60}$$

$$\Phi_2^{(1)} = \pi_\psi - i\bar{\psi}\gamma^0, \tag{2.61}$$

$$\Phi_3^{(1)} = \pi_{\bar{\psi}}. \tag{2.62}$$

Con lo anterior no es díficil construir la densidad hamiltoniana $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi_i^2 + A^0\left(\partial_i \pi_i + q\bar{\psi}\gamma^0\psi\right) + \frac{1}{4}F_{ij} - i\psi\gamma^j D_j\psi + m\bar{\psi}\psi, \tag{2.63}$$

donde se ha omitido el término de superficie $\partial_i\left(\pi_i A^0\right)$. La densidad hamiltoniana primaria tiene la forma

$$\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H} + \lambda^1\Phi_1^{(1)} + \lambda^2\Phi_2^{(1)} + \lambda^3\Phi_3^{(1)}. \tag{2.64}$$

Consideremos las condiciones de consistencia sobre las constricciones primarias

$$\dot{\Phi}_1^{(1)} = \left\{\Phi_1^{(1)}, H^{(1)}\right\} = \left\{\Phi_1^{(1)}(x), \int d^3y\left(\mathcal{H}(y) + \lambda^1\Phi_1^{(1)}(y) + \lambda^2\Phi_2^{(1)}(y) + \lambda^3\Phi_3^{(1)}(y)\right)\right\} \approx 0, \tag{2.65}$$

$$\dot{\Phi}_2^{(1)} = \left\{\Phi_2^{(1)}, H^{(1)}\right\} = \left\{\Phi_2^{(1)}(x), \int d^3y\left(\mathcal{H}(y) + \lambda^1\Phi_1^{(1)}(y) + \lambda^2\Phi_2^{(1)}(y) + \lambda^3\Phi_3^{(1)}(y)\right)\right\} \approx 0, \tag{2.66}$$

$$\dot{\Phi}_3^{(1)} = \left\{\Phi_3^{(1)}, H^{(1)}\right\} = \left\{\Phi_3^{(1)}(x), \int d^3y\left(\mathcal{H}(y) + \lambda^1\Phi_1^{(1)}(y) + \lambda^2\Phi_2^{(1)}(y) + \lambda^3\Phi_3^{(1)}(y)\right)\right\} \approx 0, \tag{2.67}$$

de donde

$$\dot{\Phi}_1^{(1)} = -q\bar{\psi}\gamma^0\psi - \partial_i\pi_i \approx 0, \tag{2.68}$$

$$\dot{\Phi}_2^{(1)} = -i\left(\partial_j - iqA_j\right)\bar{\psi}\gamma^j - q\bar{\psi}\gamma^0 A^0 - m\bar{\psi} + i\lambda^3\gamma^0 \approx 0, \tag{2.69}$$

$$\dot{\Phi}_3^{(1)} = i\left(\partial_j + iqA_j\right)\gamma^j\psi + q\gamma^0 A^0\psi - m\psi + i\lambda^2\gamma^0 \approx 0. \tag{2.70}$$

Las ecuaciones (2.69) y (2.70) nos permiten determinar λ^3 y λ^2 respectivamente, lo cual quiere decir que $\Phi_2^{(1)}$ y $\Phi_3^{(1)}$ son de segunda clase. La ecuación (2.68) no contiene λ y por tanto es una constricción, además $\Phi_1^{(1)}$ es de primera clase. Para la constricción secundaria $\Phi^{(2)}$ será conveniente elegir una expresión que difiere por una combinación de constricciones primarias de la ecuación (2.68) que es

$$\Phi^{(2)} = \partial_i\pi_i + q\bar{\psi}\gamma^0\psi + iq\left(\Phi_3^{(1)}\bar{\psi} - \Phi_2^{(1)}\psi\right) = \partial_i\pi_i + iq\left(\pi_{\bar{\psi}}\bar{\psi} - \pi_\psi\psi\right). \tag{2.71}$$

Siguiendo con el algoritmo de Dirac calculamos la condición de consistencia sobre la contricción secundaria

$$\dot{\Phi}^{(2)} = \left\{\Phi^{(2)}, H^{(1)}\right\} \approx 0, \tag{2.72}$$

de donde se puede ver que λ^1 permanecerá indeterminada y que no surgen constricciones nuevas. Nuestro conjunto de constricciones es

$$\Phi_1^{(1)} = \pi_0, \tag{2.73}$$

$$\Phi_2^{(1)} = \pi_\psi - i\bar{\psi}\gamma^0, \tag{2.74}$$

$$\Phi_3^{(1)} = \pi_{\bar{\psi}}, \tag{2.75}$$

$$\Phi^{(2)} = \partial_i \pi_i + iq\left(\pi_{\bar{\psi}}\bar{\psi} - \pi_\psi \psi\right). \tag{2.76}$$

Se puede verificar que el paréntesis de Poisson entre la constricción secundaria y todas las constricciones primarias es cero, por lo que concluimos que la constricción secundaria es de primera clase.

Podemos concluir diciendo que la electrodinámica espinorial es una teoría sujeta a constricciones de primera y segunda clase, por lo que es una teoría de norma como ya se había mencionado.

Capítulo 3

Electrodinámica espinorial en seis dimensiones

En este capítulo se presenta la principal contribución de esta tesis, la cual tiene por objetivo estudiar la estructura de la interacción electromagnética en un espacio tiempo de seis dimensiones, cuyas dimensiones extra están compactificadas.

3.1. El grupo de Poincaré en 6 dimensiones

Supondremos un espacio tiempo plano de dimensión m con n dimensiones extra; es decir una variedad de la forma $\mathcal{M}^m = \mathcal{M}^4 \times \mathcal{N}^n = \left\{\left(X^M\right)\right\} = \{(x^\mu, y^\alpha)\} = \{(x,y)\}$. Para denotar puntos de la subvariedad $\mathcal{N}^n$, también utilizaremos $x^{\bar{\mu}} \equiv X^{\alpha+4} = y^\alpha$ con $\alpha = 1, \cdots, n$ de modo que $\bar{\mu} = 5, 6, \cdots, n+4$.

Como sabemos el grupo de Poincaré $ISO\,(1, m-1)$ está definido a partir de sus generadores cuyo número es igual a $\frac{1}{2}m\,(m+1)$, donde m de éstos que denotaremos como P_M pertenecen al grupo de las traslaciones. Los $\frac{1}{2}m\,(m-1)$ generadores restantes se asocian con el grupo de Lorentz $SO\,(1, m-1)$ los cuales por el momento denotaremos como J_{MN}. Estos generadores satisfacen las siguientes reglas de conmutación [5]

$$[J_{MN}, J_{RS}] = i\left(g_{MN}J_{MS} - g_{MS}J_{NR} - g_{NR}J_{MS} + g_{NS}J_{MR}\right), \tag{3.1}$$
$$[J_{MN}, P_R] = i\left(g_{MR}P_N - g_{NR}P_M\right), \tag{3.2}$$
$$[P_M, P_N] = 0, \tag{3.3}$$

las cuales tienen dos subálgebras, que corresponden al grupo de Poincaré estándar $ISO\,(1,3)$ y al grupo especial ortogonal inhomogéneo $ISO\,(n)$. Para $ISO\,(1,3)$ se tiene el álgebra

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i\left(g_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} + g_{\nu\sigma}J_{\mu\rho}\right), \tag{3.4}$$
$$[J_{\mu\nu}, P_\rho] = i\left(g_{\mu\rho}P_\nu - g_{\nu\rho}P_\mu\right), \tag{3.5}$$
$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \tag{3.6}$$

y para $ISO\,(n)$

$$[J_{\bar{\mu}\bar{\nu}}, J_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}] = i\left(g_{\bar{\mu}\bar{\rho}}J_{\bar{\nu}\bar{\sigma}} - g_{\bar{\mu}\bar{\sigma}}J_{\bar{\nu}\bar{\rho}} - g_{\bar{\nu}\bar{\rho}}J_{\bar{\mu}\bar{\sigma}} + g_{\bar{\nu}\bar{\sigma}}J_{\bar{\mu}\bar{\rho}}\right), \tag{3.7}$$
$$[J_{\bar{\mu}\bar{\nu}}, P_{\bar{\rho}}] = i\left(g_{\bar{\mu}\bar{\rho}}P_{\bar{\nu}} - g_{\bar{\nu}\bar{\rho}}P_{\bar{\mu}}\right), \tag{3.8}$$
$$[P_{\bar{\mu}}, P_{\bar{\nu}}] = 0. \tag{3.9}$$

Para continuar necesitamos saber como transforman los campos bajo $ISO\,(1, m-1)$, para lo cual consideramos una transformación de Poincaré infinitesimal

$$X'_M = X_M + \omega_{MN}X^N + \epsilon_M, \tag{3.10}$$

donde ω y ϵ son los parámetros del grupo.

Veamos como transforman los campos de norma $\mathcal{A}_M$[1] bajo el grupo. Sabemos que

$$\mathcal{A}'_M(X) = \Lambda_{MN}\mathcal{A}^N\left(\Lambda^{-1}X\right), \tag{3.11}$$

haciendo la transformación infinitesimal

$$\mathcal{A}'_M(X) = [g_{MN} + \omega_{MN}]\left[\mathcal{A}^N(X) + \left(\omega_{PR}X^R + \epsilon_P\right)\partial^P\mathcal{A}^N(X)\right], \tag{3.12}$$

de donde después de un poco de álgebra obtenemos

$$\delta\mathcal{A}_M(X) = \left[\omega_{MN} + g_{MN}\left(\omega_{PR}X^R + \epsilon_P\right)\partial^P\right]\mathcal{A}^N(X), \tag{3.13}$$

bajo el grupo de Poincaré usual $ISO(1,3)$ se descompone en

$$\delta\mathcal{A}_\mu(X) = [\omega_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}(\omega_{\rho\sigma}x^\sigma + \epsilon_\rho)\partial^\rho]A^\nu(X), \tag{3.14}$$

$$\delta\mathcal{A}_{\bar{\mu}} = (\omega_{\mu\nu}x^\nu + \epsilon_\mu)\partial^\mu\mathcal{A}_{\bar{\mu}}(X), \tag{3.15}$$

de donde concluimos que $\mathcal{A}_\mu$ se transforma como vector y $\mathcal{A}_{\bar{\mu}}$ como un escalar.

Para nuestra teoría es necesario saber como se transforma un campo espinorial. Supongamos que m es par de modo que se puedan definir espinores izquierdos y derechos. Dado que m es par existen m matrices Γ^M de dimensión $2^{\frac{m}{2}} \times 2^{\frac{m}{2}}$ que satisfacen el álgebra de Clifford (1.65), una vez que encontramos las matrices Γ^M es posible representar al grupo de Lorentz por medio de los generadores definidos en (1.66). Recordemos que esta representación actúa sobre espinores Ψ de $2^{\frac{m}{2}}$ componentes y que transforma a los espinores como

$$\Psi'_A = (\Lambda_S)_{AB}\Psi_B, \tag{3.16}$$

con $\Lambda_S = e^{\frac{i}{2}\omega_{MN}S^{MN}}$ una transformación de Lorentz en la representación espinorial y donde $A = \alpha, \bar{\alpha}$, $\alpha = 1,2,3,4$ y $\bar{\alpha} = 5,6,\cdots,2^{\frac{m}{2}}$.

Haciendo la transformación (3.16) infinitesimal tenemos

$$\begin{aligned}\Psi'_A(X) &= \left[\mathbb{I} + \frac{i}{2}\omega_{MN}S^{MN}\right]_{AB}\Psi_B(X+\delta X)\\ &= \left[\delta_{AB} + \frac{i}{2}\omega_{MN}\left(S^{MN}\right)_{AB}\right]\left[\Psi_B(X) + \delta X^R\partial_R\Psi_B(X)\right],\end{aligned} \tag{3.17}$$

de donde

$$\delta\Psi_A(X) = \left[\frac{i}{2}\omega_{MN}\left(S^{MN}\right)_{AB} + \delta_{AB}\left(\omega^{MN}X_N + \epsilon^M\right)\partial_M\right]\Psi_B. \tag{3.18}$$

Nos interesa saber como se transforman las componentes Ψ_α y $\Psi_{\bar{\alpha}}$ del espinor Ψ_A bajo el grupo de Lorentz usual. Desarrollando (3.18) y restringiendo los generadores y parámetros al grupo $SO(1,3)$ se obtiene

$$\delta\Psi_\alpha(X) = \left[\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta}(\omega^{\mu\nu}X_\nu + \epsilon^\mu)\partial_\mu\right]\Psi_\beta + \left[\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_{\alpha\bar{\beta}}\right]\Psi_{\bar{\beta}}, \tag{3.19}$$

$$\delta\Psi_{\bar{\alpha}}(X) = \left[\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_{\bar{\alpha}\beta}\right]\Psi_\beta + \left[\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} + \delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\omega^{\mu\nu}X_\nu + \epsilon^\mu)\partial_\mu\right]\Psi_{\bar{\beta}}. \tag{3.20}$$

Observando estas ecuaciones notamos que los espinores Ψ_α, $\Psi_{\bar{\alpha}}$ se mezclarán bajo la transformación de Lorentz, a menos que seamos capaces de encontrar una representación en la cual los generadores cumplan $(S^{\mu\nu})_{\alpha\bar{\beta}} = (S^{\mu\nu})_{\bar{\alpha}\beta} = 0$.

[1]En este capítulo usaremos $\mathcal{A}$, $\mathcal{F}$ en lugar de A y F con la finalidad de diferenciarlos de la teoría usual.

3.2. Electrodinámica Espinorial en 6 dimensiones

Estamos listos para estudiar la electrodinámica espinorial en seis dimensiones, es decir, en un espacio tiempo plano seis dimensional. En este espacio, la teoría está gobernada por el grupo de Lorentz $SO(1,5)$, aquí $m = 6$ por lo que tendremos un conjunto de 6 matrices Γ de dimensión 8×8 con las cuales construiremos la representación espinorial del grupo. Esta representación actuará sobre espinores de 8 componentes que escribiremos como $\Psi(x,y)$. En lo que resta los índices M y N toman los valores $0,1,2,3,5,6$; los índices μ y ν toman los valores usuales y los índices $\bar{\mu}$ y $\bar{\nu}$ toman los valores $5,6$. Además usaremos $x = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$ para denotar las coordenadas usuales y usaremos $y = \left(y^1, y^2\right)$ para las coordenadas extras. En este trabajo se usará el tensor métrico

$$g_{MN} = diag(1,-1,-1,-1,-1,-1). \tag{3.21}$$

Lo primero que debemos hacer para construir nuestra lagrangiana es encontrar un conjunto de matrices Γ^M procurando que se cumpla $\left(S^{\mu\nu}\right)_{\alpha\bar{\beta}} = \left(S^{\mu\nu}\right)_{\bar{\alpha}\beta} = 0$ de modo que los espinores en nuestra teoría no se mezclen bajo una transformación del grupo de Lorentz $SO(1,3)$. Usando el producto de Kronecker definido por (1.68) sean

$$\Gamma^\mu = \left(\sigma^0 \otimes \gamma^\mu\right) = \begin{pmatrix} \gamma^\mu & 0 \\ 0 & \gamma^\mu \end{pmatrix}, \tag{3.22}$$

$$\Gamma^5 = \left(i\sigma^2 \otimes \gamma^5\right) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^5 \\ -\gamma^5 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.23}$$

$$\Gamma^6 = \left(i\sigma^1 \otimes \gamma^5\right) = \begin{pmatrix} 0 & i\gamma^5 \\ i\gamma^5 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.24}$$

Estas matrices Γ^M satisfacen el álgebra de Clifford (1.65). Notemos que al definir estas matrices no estamos especificando la representación de las matrices γ^μ, esto se debe a que nuestras matrices Γ^M cumplirán el álgebra de Clifford siempre que las matrices γ^μ lo hagan. Una vez que tenemos el conjunto de matrices podemos definir generadores $S_6^{MN} = \frac{i}{4}\left[\Gamma^M, \Gamma^N\right]$ a partir de ellas;[2] se puede probar que estos generadores cumplen

$$S_6^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} S_4^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & S_4^{\mu\nu} \end{pmatrix}, \tag{3.25}$$

con lo cual se cumple la condición $\left(S^{\mu\nu}\right)_{\alpha\bar{\beta}} = \left(S^{\mu\nu}\right)_{\bar{\alpha}\beta} = 0$, por lo que las componentes de nuestro espinor Ψ se transforman como

$$\delta\Psi_\alpha(X) = \left[\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\left(S^{\mu\nu}\right)_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta}\left(\omega^{\mu\nu}X_\nu + \epsilon^\mu\right)\partial_\mu\right]\Psi_\beta, \tag{3.26}$$

$$\delta\Psi_{\bar{\alpha}}(X) = \left[\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\left(S^{\mu\nu}\right)_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} + \delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\left(\omega^{\mu\nu}X_\nu + \epsilon^\mu\right)\partial_\mu\right]\Psi_{\bar{\beta}}. \tag{3.27}$$

Notamos que cada una de estas componentes se transforman de manera independiente bajo $SO(1,3)$, que es justamente lo que se buscaba. De este modo escribiremos

$$\Psi(x,y) = \begin{pmatrix} \psi(x,y) \\ \hat{\psi}(x,y) \end{pmatrix}, \tag{3.28}$$

donde ψ y $\hat{\psi}$ son biespinores bajo $SO(1,3)$. Estos generadores cumplen además

$$\left[S_6^{\mu\nu}, \Gamma^5\right] = 0, \tag{3.29}$$

$$\left[S_6^{\mu\nu}, \Gamma^6\right] = 0, \tag{3.30}$$

lo cual nos indica que Γ^5 y Γ^6 son escalares bajo $SO(1,3)$.

Dado que nuestro espacio es de dimensión par podemos definir Γ^7 tal que $\left\{\Gamma^7, \Gamma^M\right\} = 0$ y $(\Gamma^7)^2 = \mathbb{I}_8$. Sea

$$\Gamma^7 = -\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\Gamma^3\Gamma^5\Gamma^6 = \left(\sigma^3 \otimes \gamma^5\right) = \begin{pmatrix} \gamma^5 & 0 \\ 0 & -\gamma^5 \end{pmatrix}. \tag{3.31}$$

[2] $S_6^{\mu\nu}$ son los generadores del grupo $SO(1,5)$ mientras que $S_4^{\mu\nu}$ son los generadores del grupo $SO(1,3)$

La cual satisface las propiedades mencionadas, es escalar bajo $SO(1,3)$ y nos permite definir proyectores dados por las ecuaciones (1.18) y (1.19) con los cuales encontramos los espinores derechos e izquierdos. En nuestra representación

$$\Psi(x,y)_L = P_L\Psi(x,y) = \begin{pmatrix} \psi_L(x,y) \\ \hat{\psi}_R(x,y) \end{pmatrix}, \tag{3.32}$$

$$\Psi(x,y)_R = P_R\Psi(x,y) = \begin{pmatrix} \psi_R(x,y) \\ \hat{\psi}_L(x,y) \end{pmatrix}. \tag{3.33}$$

Una vez que conocemos nuestro conjunto de matrices Γ^M sea la lagrangiana invariante bajo $SO(1,5)$ y $U_6(1)$[3]

$$\mathcal{L}_{6D} = \bar{\Psi}(x,y)\left(i\not{D}_6 - m\right)\Psi(x,y) - \frac{1}{4}\mathcal{F}_{MN}(x,y)\mathcal{F}^{MN}(x,y), \tag{3.34}$$

con

$$\mathcal{F}_{MN}(x,y) = \partial_M\mathcal{A}_N(x,y) - \partial_N\mathcal{A}_M(x,y), \tag{3.35}$$

y

$$\not{D}_6 = \Gamma^M D_M, \tag{3.36}$$

$$D_M = \partial_M - e_6\mathcal{A}_M(x,y). \tag{3.37}$$

Donde e_6 es la constante de proporcionalidad definida por el grupo de norma. Se introduce el subíndice 6 en $\not{D}_6$ para no confundirla con $\not{D}$ de la teoría usual.

Tanto las ecuaciones de movimiento como las constricciones de está teoría son de la misma forma que en la teoría usual. Las ecuaciones de campo son

$$\left(i\not{D}_6 - m\right)\Psi(x,y) = 0, \tag{3.38}$$

$$\bar{\Psi}(x,y)\left(i\overleftarrow{\not{D}}_6 + m\right) = 0, \tag{3.39}$$

$$\partial_M\mathcal{F}^{MN}(x,y) = e_6\bar{\Psi}(x,y)\Gamma^M\Psi(x,y), \tag{3.40}$$

y el conjunto de constricciones es

$$\Phi_1^{(1)} = \Pi_0, \tag{3.41}$$

$$\Phi_2^{(1)} = \Pi_\Psi - i\bar{\Psi}\Gamma^0, \tag{3.42}$$

$$\Phi_3^{(1)} = \Pi_{\bar{\Psi}}, \tag{3.43}$$

$$\Phi^{(2)} = \partial_i\Pi_i + ie_6\left(\Pi_{\bar{\Psi}}\bar{\Psi} - \Pi_\Psi\Psi\right) \quad i = 1,\cdots,6 \tag{3.44}$$

donde de nueva cuenta $\Phi_1^{(1)}$, $\Phi^{(2)}$ son de primera clase y $\Phi_2^{(1)}$, $\Phi_3^{(1)}$ de segunda clase.

Antes de continuar hablaremos de las unidades de las componentes de esta lagrangiana. Dado que la acción debe ser un escalar la lagrangaiana tiene unidades de energía a la sexta potencia es decir $[\mathcal{L}] = E^6$ lo que nos dice

$$[\mathcal{F}_{MN}] = E^3, \tag{3.45}$$

$$[\mathcal{A}_M] = E^2, \tag{3.46}$$

$$[\Psi] = E^{\frac{5}{2}}, \tag{3.47}$$

$$[e_6] = E^{-1}, \tag{3.48}$$

acerca de las unidades de las demás componentes de nuestra lagrangiana.

Regresando al analisís estructural de nuestra teoría notemos que la curvatura es invariante bajo la transformación de norma

$$\mathcal{A}'_M(x,y) = \mathcal{A}_M(x,y) + \partial_M\alpha(x,y), \tag{3.49}$$

[3] El subíndice 6 indica que el parámetro del grupo tomará valores en un espacio 6-dimensional.

y que cumple

$$\mathcal{F}_{MN}(x,y)\mathcal{F}^{MN}(x,y)=\mathcal{F}_{\mu\nu}(x,y)\mathcal{F}^{\mu\nu}(x,y)+2\mathcal{F}_{\bar{\mu}\nu}(x,y)\mathcal{F}^{\bar{\mu}\nu}(x,y)+\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x,y)\mathcal{F}^{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x,y). \tag{3.50}$$

Usando las matrices Γ^M definidas y la propiedad (3.50) podemos escribir la lagrangiana 3.34 como

$$\mathcal{L}_{6D}=\mathcal{L}_{6D}^{D}+\mathcal{L}_{6D}^{M}, \tag{3.51}$$

con

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{6D}^{F}&=\bar{\psi}(x,y)\left(i\not{D}-m\right)\psi(x,y)+\bar{\hat{\psi}}(x,y)\left(i\not{D}-m\right)\hat{\psi}(x,y)\\&+i\bar{\psi}(x,y)\gamma^5D_5\hat{\psi}(x,y)-i\bar{\hat{\psi}}(x,y)\gamma^5D_5\psi(x,y)-\bar{\psi}(x,y)\gamma^5D_6\hat{\psi}(x,y)-\bar{\hat{\psi}}(x,y)\gamma^5D_6\psi(x,y),\end{aligned} \tag{3.52}$$

$$\mathcal{L}_{6D}^{M}=-\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}(x,y)\mathcal{F}^{\mu\nu}(x,y)-\frac{1}{2}\mathcal{F}_{\bar{\mu}\nu}(x,y)\mathcal{F}^{\bar{\mu}\nu}(x,y)-\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x,y)\mathcal{F}^{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x,y), \tag{3.53}$$

con $\not{D}=\gamma^\mu D_\mu$ la derivada usual en 4 dimensiones.

3.2.1. Compactificación

Supongamos que los campos espinoriales, los campos y parámetros de norma son periódicos en y, esto es

$$\psi(x,y+R)=\psi(x,y), \tag{3.54}$$
$$\hat{\psi}(x,y+R)=\hat{\psi}(x,y), \tag{3.55}$$
$$\mathcal{A}_M(x,y+R)=\mathcal{A}_M(x,y), \tag{3.56}$$
$$\alpha(x,y+R)=\alpha(x,y), \tag{3.57}$$

donde $R=(R_1,R_2)$. Queremos recuperar la teoría usual cuando $R_1,R_2\to 0$, para lo cual introducimos las siguientes condiciones de paridad

$$\psi(x,-y)=\psi(x,y), \tag{3.58}$$
$$\hat{\psi}(x,-y)=-\hat{\psi}(x,y), \tag{3.59}$$
$$\mathcal{A}_\mu(x,-y)=\mathcal{A}_\mu(x,y), \tag{3.60}$$
$$\mathcal{A}_{\bar{\mu}}(x,-y)=-\mathcal{A}_\mu(x,y), \tag{3.61}$$
$$\alpha(x,-y)=\alpha(x,y). \tag{3.62}$$

Las condiciones de periodicidad y de paridad sobre los campos de norma $\mathcal{A}_M$ implican las siguientes condiciones para las curvaturas

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(x,-y)=\mathcal{F}_{\mu\nu}(x,y), \tag{3.63}$$
$$\mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}(x,-y)=-\mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}(x,y), \tag{3.64}$$
$$\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x,-y)=\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x,y). \tag{3.65}$$

Estas propiedades de paridad significan que se ha introducido la orbifold $\left(S^1/Z_2\right)\times\left(S^1/Z_2\right)$. Esto se hizo porque de acuerdo a los datos experimentales, si existen dimensiones extra éstas deben ser más pequeñas que la distancia explorada, las dimensiones extra deben estar compactificadas.

Dada la periodicidad de los campos, podemos expresarlos en serie de Fourier con respecto a las coordenadas extra que sean consistentes con las propiedades de paridad establecidas, sean

$$\begin{aligned}\psi(x,y)&=\frac{1}{\sqrt{R_1R_2}}\psi^{(0,0)}(x)+\sum_{m_1=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\psi^{(m_1,0)}(x)\cos\left(2\pi\frac{m_1y^1}{R_1}\right)\\&+\sum_{m_2=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\psi^{(0,m_2)}(x)\cos 2\pi\left(\frac{m_2y^2}{R_2}\right)\\&+\sum_{m_1,m_2=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\psi^{(m_1,m_2)}(x)\cos 2\pi\left(\frac{m_1y^1}{R_1}+\frac{m_2y^2}{R^2}\right),\end{aligned} \tag{3.66}$$

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(x,y) &= \sum_{m_1=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\hat{\psi}^{(m_1,0)}(x)\sin\left(2\pi\frac{m_1y^1}{R_1}\right)\\ &+\sum_{m_2=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\hat{\psi}^{(0,m_2)}(x)\sin 2\pi\left(\frac{m_2y^2}{R_2}\right)\\ &+\sum_{m_1,m_2=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\hat{\psi}^{(m_1,m_2)}(x)\sin 2\pi\left(\frac{m_1y^1}{R_1}+\frac{m_2y^2}{R_2}\right), \qquad (3.67)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\mu(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{R_1R_2}}\mathcal{A}_\mu^{(0,0)}(x)+\sum_{m_1=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\mathcal{A}_\mu^{(m_1,0)}(x)\cos 2\pi\left(\frac{m_1y^1}{R_1}\right)\\ &+\sum_{m_2=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\mathcal{A}_\mu^{(0,m_2)}(x)\cos 2\pi\left(\frac{m_2y^2}{R_2}\right)\\ &+\sum_{m_1,m_2=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\mathcal{A}_\mu^{(m_1,m_2)}(x)\cos 2\pi\left(\frac{m_1y^1}{R_1}+\frac{m_2y^2}{R^2}\right), \qquad (3.68)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\bar{\mu}}(x,y) &= \sum_{m_1=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\mathcal{A}_{\bar{\mu}}^{(m_1,0)}(x)\sin 2\pi\left(\frac{m_1y^1}{R_1}\right)\\ &+\sum_{m_2=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\mathcal{A}_{\bar{\mu}}^{(0,m_2)}(x)\sin 2\pi\left(\frac{m_2y^2}{R_2}\right)\\ &+\sum_{m_1,m_2=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\mathcal{A}_{\bar{\mu}}^{(m_1,m_2)}(x)\sin 2\pi\left(\frac{m_1y^1}{R_1}+\frac{m_2y^2}{R_2}\right). \qquad (3.69)\end{aligned}$$

Para los parámetros de norma se tiene

$$\begin{aligned}\alpha(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{R_1R_2}}\alpha^{(0,0)}(x)+\sum_{m_1=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\alpha^{(m_1,0)}(x)\cos 2\pi\left(\frac{m_1y^1}{R_1}\right)\\ &+\sum_{m_2=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\alpha^{(0,m_2)}(x)\cos 2\pi\left(\frac{m_2y^2}{R_2}\right)\\ &+\sum_{m_1,m_2=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\alpha^{(m_1,m_2)}(x)\cos 2\pi\left(\frac{m_1y^1}{R_1}+\frac{m_2y^2}{R^2}\right). \qquad (3.70)\end{aligned}$$

Por otro lado, la periodicidad y las condiciones de paridad de las diferentes curvaturas implican

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mu\nu}(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{R_1R_2}}\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(0,0)}(x)+\sum_{m_1=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(m_1,0)}(x)\cos 2\pi\left(\frac{m_1y^1}{R_1}\right)\\ &+\sum_{m_2=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(0,m_2)}(x)\cos 2\pi\left(\frac{m_2y^2}{R_2}\right)\\ &+\sum_{m_1,m_2=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(m_1,m_2)}(x)\cos 2\pi\left(\frac{m_1y^1}{R_1}+\frac{m_2y^2}{R^2}\right), \qquad (3.71)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}(x,y) &= \sum_{m_1=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}^{(m_1,0)}(x)\sin 2\pi\left(\frac{m_1y^1}{R_1}\right)\\ &+\sum_{m_2=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}^{(0,m_2)}(x)\sin 2\pi\left(\frac{m_2y^2}{R_2}\right)\\ &+\sum_{m_1,m_2=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}^{(m_1,m_2)}(x)\sin 2\pi\left(\frac{m_1y^1}{R_1}+\frac{m_2y^2}{R_2}\right),\end{aligned}\tag{3.72}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{R_1R_2}}\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(0,0)}(x)+\sum_{m_1=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m_1,0)}(x)\cos 2\pi\left(\frac{m_1y^1}{R_1}\right)\\ &+\sum_{m_2=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(0,m_2)}(x)\cos 2\pi\left(\frac{m_2y^2}{R_2}\right)\\ &+\sum_{m_1,m_2=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m_1,m_2)}(x)\cos 2\pi\left(\frac{m_1y^1}{R_1}+\frac{m_2y^2}{R^2}\right).\end{aligned}\tag{3.73}$$

La lagrangiana efectiva 4-dimensional es dada por

$$\mathcal{L}_{4D}=\int_0^{R_1}dy^1\int_0^{R_2}dy^2\left(\mathcal{L}_{6D}^F+\mathcal{L}_{6D}^M\right).\tag{3.74}$$

El sector fermiónico se puede escribir en términos de espinores de $SO(1,3)$ como

$$\mathcal{L}_{4D}^F=\int_0^{R_1}dy^1\int_0^{R_2}dy^2\mathcal{L}_{6D}^F.\tag{3.75}$$

Si tomamos en cuenta que en la expresión (3.52), $\not{D}\psi$ es par, $\not{D}\hat{\psi}$ impar, $D_{\bar{\mu}}\hat{\psi}$ par y $D_{\bar{\mu}}\psi$ impar, las coordenadas compactas se pueden integrar para obtener

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{4D}^F &= i\bar{\psi}^{(0,0)}(x)\left(\not{D}\psi\right)^{(0,0)}(x)+\sum_{\underline{m_1},\underline{m_2}} i\Big[\bar{\psi}^{(\underline{m_1},\underline{m_2})}(x)\left(\not{D}\psi\right)^{(\underline{m_1},\underline{m_2})}(x)+\bar{\hat{\psi}}^{(\underline{m_1},\underline{m_2})}(x)\left(\not{D}\hat{\psi}\right)^{(\underline{m_1},\underline{m_2})}(x)\\ &+\bar{\psi}^{(\underline{m_1},\underline{m_2})}(x)\gamma_5\left(D_5\hat{\psi}\right)^{(\underline{m_1},\underline{m_2})}(x)-\bar{\hat{\psi}}^{(\underline{m_1},\underline{m_2})}(x)\gamma_5\left(D_5\psi\right)^{(\underline{m_1},\underline{m_2})}(x)\\ &-\bar{\psi}^{(\underline{m_1},\underline{m_2})}(x)\gamma_5\left(D_6\hat{\psi}\right)^{(\underline{m_1},\underline{m_2})}(x)-\bar{\hat{\psi}}^{(\underline{m_1},\underline{m_2})}(x)\gamma_5\left(D_6\psi\right)^{(\underline{m_1},\underline{m_2})}(x)\\ &-m\left(\bar{\psi}^{(\underline{m_1},\underline{m_2})}(x)\psi^{(\underline{m_1},\underline{m_2})}(x)+\bar{\hat{\psi}}^{(\underline{m_1},\underline{m_2})}(x)\hat{\psi}^{(\underline{m_1},\underline{m_2})}\right)(x)\Big]-m\bar{\psi}^{(0,0)}(x)\psi^{(0,0)}(x).\end{aligned}\tag{3.76}$$

Donde los objetos $\left(\not{D}\psi\right)^{(\underline{m_1},\underline{m_2})}$ deben ser determinados usando las propiedades de la serie de Fourier; por ejemplo

$$\left(\not{D}\psi\right)^{(0,0)}(x)=\not{D}^{(0,0)}\psi^{(0,0)}(x)-ie\sum_{\underline{m_1},\underline{m_2}}\not{\mathcal{A}}^{(\underline{m_1},\underline{m_2})}(x)\psi^{(\underline{m_1},\underline{m_2})}(x),\tag{3.77}$$

$$\left(\not{D}\psi\right)^{(\underline{m_1},\underline{m_2})}=\sum_{\underline{r_1},\underline{r_2}}\not{D}^{(\underline{m_1}\ \underline{m_2}\ \underline{r_1}\ \underline{r_2})}\psi^{(\underline{r_1}\ \underline{r_2})}(x)-ie\not{\mathcal{A}}^{(\underline{m_1},\underline{m_2})}(x)\psi^{(0,0)}(x),\tag{3.78}$$

donde

$$D_\mu^{(0,0)}=\partial_\mu-ie\mathcal{A}_\mu^{(0,0)}(x),\tag{3.79}$$

$$D_\mu^{(\underline{m_1}\ \underline{m_2}\ \underline{r_1}\ \underline{r_2})}=\delta^{\underline{m_1}\ \underline{r_1}}\delta^{\underline{m_2}\ \underline{r_2}}D_\mu^{(0,0)}-ie\sum_{\underline{k_1},\underline{k_2}}\sum_{\underline{r_1},\underline{r_2}}\Delta_{\underline{m_1}\ \underline{m_2}\ \underline{k_1}\ \underline{k_2}\ \underline{r_1}\ \underline{r_2}}\mathcal{A}_\mu^{(\underline{k_1},\underline{k_2})}(x),\tag{3.80}$$

con

$$\Delta_{\underline{m_1}\ \underline{m_2}\ \underline{k_1}\ \underline{k_2}\ \underline{r_1}\ \underline{r_2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\delta_{\underline{m_1},\underline{k_1}+\underline{r_1}} + \delta_{\underline{m_2},\underline{k_2}+\underline{r_2}} + \delta_{\underline{k_1},\underline{m_1}+\underline{r_1}} + \delta_{\underline{k_2},\underline{m_2}+\underline{r_2}} \\ + \delta_{\underline{r_1},\underline{k_1}+\underline{m_1}} + \delta_{\underline{r_2},\underline{k_2}+\underline{m_2}}\Big), \tag{3.81}$$

y donde notamos que $e = \frac{e_6}{\sqrt{R_1 R_2}}$ es una constante adimensional. En las ecuaciones (3.76) a (3.80) se ha utilizado la notación establecida en la referencia [6], la cual explicaremos a continuación. Las sumas $\sum_{\underline{m_1},\underline{m_2}}$ toman en cuenta todos las combinaciones de los modos de Fourier con excepción del modo (0,0), como ejemplo tomemos la expresión $\sum_{\underline{m_1},\underline{m_2}} \mathcal{A}^{(\underline{m_1},\underline{m_2})}\psi^{(\underline{m_1},\underline{m_2})}$ dada en la ecuación (3.78), tomando en cuenta lo antes mencionado la expresión anterior se puede expresar como

$$\sum_{\underline{m_1},\underline{m_2}} \mathcal{A}^{(\underline{m_1},\underline{m_2})}\psi^{(\underline{m_1},\underline{m_2})} = \sum_{m_1=1}^{\infty} \mathcal{A}^{(m_1,0)}\psi^{(m_1,0)} + \sum_{m_2=1}^{\infty} \mathcal{A}^{(0,m_2)}\psi^{(0,m_2)} \\ + \sum_{m_1,m_2=1}^{\infty} \mathcal{A}^{(m_1,m_2)}\psi^{(m_1,m_2)}. \tag{3.82}$$

Continuando notemos que en la ecuación (3.76) los modos cero coinciden con la teoría en cuatro dimensiones y que los modos exitados de los espinores ψ y $\hat{\psi}$ obedecen una especie de ecuación de Dirac; sin embargo no conocemos las masas de los modos exitados. Con lo anterior en mente nos centraremos en los términos de masa del sector fermiónico, el cual está dado por

$$\mathcal{L}_{4D}^{F_M} = \int_0^{R_1} dy^1 \int_0^{R_2} dy^2 \Big[i\Big(\bar{\psi}(x,y)\gamma^5\partial_5\hat{\psi}(x,y) - \bar{\hat{\psi}}(x,y)\gamma^5\partial_5\psi(x,y)\Big) \\ - \Big(\bar{\psi}(x,y)\gamma^5\partial_6\hat{\psi}(x,y) + \bar{\hat{\psi}}(x,y)\gamma^5\partial_6\psi(x,y)\Big) - m\Big(\bar{\psi}(x,y)\psi(x,y) + \bar{\hat{\psi}}(x,y)\hat{\psi}(x,y)\Big)\Big]. \tag{3.83}$$

Utilizando los desarrollos en serie de Fourier propuestos e integrando las coordenadas extra se obtiene

$$\mathcal{L}_{4D}^{F_M} = -m\psi^{(0,0)}(x)\psi^{(0,0)}(x) - \sum_{m_1=1}^{\infty}\begin{pmatrix}\bar{\psi}^{(m_1,0)}(x) & \bar{\hat{\psi}}^{(m_1,0)}(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & -iM_1\gamma^5 \\ -iM_1\gamma^5 & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi^{(m_1,0)}(x) \\ \hat{\psi}^{(m_1,0)}(x)\end{pmatrix} \\ - \sum_{m_2=1}^{\infty}\begin{pmatrix}\bar{\psi}^{(0,m_2)}(x) & \bar{\hat{\psi}}^{(0,m_2)}(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & -M_2\gamma^5 \\ M_2\gamma^5 & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi^{(0,m_2)}(x) \\ \hat{\psi}^{(0,m_2)}(x)\end{pmatrix} \\ - \sum_{m_1,m_2=1}^{\infty}\begin{pmatrix}\bar{\psi}^{(m_1,m_2)}(x) & \bar{\hat{\psi}}^{(m_1,m_2)}(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & -(M_2+iM_1)\gamma^5 \\ (M_2-iM_1)\gamma^5 & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi^{(m_1,m_2)}(x) \\ \hat{\psi}^{(m_1,m_2)}(x)\end{pmatrix}, \tag{3.84}$$

donde se han introducido las siguientes abreviaturas

$$M_1 \equiv 2\pi\left(\frac{m_1}{R_1}\right), \tag{3.85}$$

$$M_2 \equiv 2\pi\left(\frac{m_2}{R_2}\right). \tag{3.86}$$

La determinación de las masas físicas, que deben ser reales y positivas, requiere de la diagonalización de las matrices que aparecen en la ecuación (3.84), ya que tal como aparecen, las matrices no conducirán a eigenvalores reales y positivos; lo cual en principio significa que más de una transformación unitaria será necesaria.

Comencemos con la matriz de masa

$$\tilde{M}^1 \equiv \begin{pmatrix} m & -iM_1\gamma^5 \\ -iM_1\gamma^5 & m\end{pmatrix}, \tag{3.87}$$

e intentemos diagonalizarla, la ecuación característica nos lleva a los siguientes eigenvalores

$$m \pm iM_1. \tag{3.88}$$

Resolviendo la ecuación $\left(\tilde{M}^1 - \lambda I\right)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ los eigenvectores correspondientes conducen a la siguiente matriz unitaria

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & I \\ -\gamma^5 & \gamma^5 \end{pmatrix}. \tag{3.89}$$

Lo cual conduce a

$$\bar{M}^1 \equiv \gamma^0 U_1^\dagger \gamma^0 M^1 U_1 = \begin{pmatrix} 0 & m - iM_1 \\ m + iM_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.90}$$

donde las γ^0 aparecen de la multiplicación con los espinores.

Dado que la matriz $\bar{M}^1$ es antidiagonal intentaremos diagonalizarla, notemos que $\bar{M}^{1\dagger} = \bar{M}^1$ por lo que sus eigenvalores son reales

$$\pm\sqrt{m^2 + M_1^2}, \tag{3.91}$$

sin embargo sigue sin ser satisfactorio ya que una masa no puede ser negativa. Los eigenvectores correspondientes a la matriz $\bar{M}^1$ permiten construir la siguiente matriz unitaria

$$U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & I \\ \frac{m+iM_1}{\sqrt{m^2+M_1^2}} & -\frac{m+iM_1}{\sqrt{m^2+M_1^2}} \end{pmatrix}, \tag{3.92}$$

con lo cual definimos

$$\hat{M}^1 \equiv U_2^\dagger \bar{M}^1 U_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{m^2 + M_1^2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{m^2 + M_1^2} \end{pmatrix}. \tag{3.93}$$

Para obtener eigenvalores positivos sea la transformación quiral

$$\begin{pmatrix} \psi^{(m_1,0)}(x) \\ \hat{\psi}^{(m_1,0)}(x) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi^{(m_1,0)}(x) \\ \hat{\psi}^{(m_1,0)}(x) \end{pmatrix}, \tag{3.94}$$

con

$$U_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^5 \end{pmatrix}, \tag{3.95}$$

notemos que $U_3^\dagger = U_3$ y $U_3^\dagger U_3 = I$. Esta transformación conduce a

$$\gamma^0 U_3^\dagger \gamma^0 \hat{M}^1 U_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{m^2 + M_1^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{m^2 + M_1^2} \end{pmatrix}, \tag{3.96}$$

que es lo que se buscaba. Entonces la transformación unitaria completa consta de tres transformaciones unitarias sucesivas

$$\begin{pmatrix} \psi^{(m_1,0)}(x) \\ \hat{\psi}^{(m_1,0)}(x) \end{pmatrix} \to U^1 \begin{pmatrix} \psi^{(m_1,0)}(x) \\ \hat{\psi}^{(m_1,0)}(x) \end{pmatrix}, \tag{3.97}$$

donde

$$U^1 \equiv U_1 U_2 U_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + \frac{m+iM_1}{\sqrt{m^2+M_1^2}} & -\left(1 + \frac{m+iM_1}{\sqrt{m^2+M_1^2}}\right)\gamma^5 \\ -\left(1 - \frac{m+iM_1}{\sqrt{m^2+M_1^2}}\right)\gamma^5 & 1 - \frac{m+iM_1}{\sqrt{m^2+M_1^2}} \end{pmatrix}. \tag{3.98}$$

Con la matriz unitaria U^1 finalmente se obtiene

$$\gamma^0 U^{1\dagger} \gamma^0 M^1 U^1 = \begin{pmatrix} \sqrt{m^2 + M_1^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{m^2 + M_1^2} \end{pmatrix}, \tag{3.99}$$

con lo que se concluye que el espectro de masas es degenerado para $\psi^{(m_1,0)}$ y $\hat{\psi}^{(m_1,0)}$ y que tienen la misma masa, dada por

$$m_{\psi^{(m_1,0)}} = m_{\hat{\psi}^{(m_1,0)}} = \sqrt{m^2 + \left(2\pi\frac{m_1}{R_1}\right)^2}. \tag{3.100}$$

Se procede a diagonalizar la matriz

$$\tilde{M}^2 \equiv \begin{pmatrix} m & -M_2\gamma^5 \\ M_2\gamma^5 & m \end{pmatrix}. \tag{3.101}$$

La ecuación característica es identica a la encontrada para M^1, así que los eigenvalores son complejos y están dados por

$$m \pm iM_2, \tag{3.102}$$

que conducen a la siguiente matriz unitaria

$$U_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ -i\gamma^5 & i\gamma^5 \end{pmatrix}, \tag{3.103}$$

una vez realizada la transformación se encuentra

$$\bar{M}^2 \equiv \gamma^0 U_1^{'\dagger} \gamma^0 M^2 U_1' = \begin{pmatrix} 0 & m - iM_2 \\ m + iM_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.104}$$

Dado que la matriz cumple $\bar{M}^{2\dagger} = \bar{M}^2$ sus eigenvalores son reales

$$\pm\sqrt{m^2 + M_2^2}, \tag{3.105}$$

los cuales conducen a la matriz unitaria

$$U_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ \frac{m+iM_2}{\sqrt{m^2+M_2^2}} & -\frac{m+iM_2}{\sqrt{m^2+M_2^2}} \end{pmatrix}, \tag{3.106}$$

así que la matriz $\bar{M}_2$ es transformada

$$\hat{M}^2 \equiv U_2^{'\dagger} \bar{M}_2 U_2' = \begin{pmatrix} \sqrt{m^2 + M_2^2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{m^2 + M_2^2} \end{pmatrix}. \tag{3.107}$$

Como en el caso de M^1, hagamos una tercera transformación unitaria

$$\begin{pmatrix} \psi^{(0,m_2)}(x) \\ \hat{\psi}^{(0,m_2)}(x) \end{pmatrix} \to U_3 \begin{pmatrix} \psi^{(0,m_2)}(x) \\ \hat{\psi}^{(0,m_2)}(x) \end{pmatrix}, \tag{3.108}$$

con U_3 dada en la ecuación (3.95), con lo cual se tiene

$$\gamma^0 U_3^\dagger \gamma^0 \hat{M}^2 U_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{m^2 + M_2^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{m^2 + M_2^2} \end{pmatrix}. \tag{3.109}$$

La transformación completa será de nuevo el producto de tres matrices unitarias

$$U^2 \equiv U_1' U_2' U_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{m+iM_2}{\sqrt{m^2+M_2^2}} & 1 - \frac{m+iM_2}{\sqrt{m^2+M_2^2}} \\ -i\left(1 - \frac{m+iM_2}{\sqrt{m^2+M_2^2}}\right)\gamma^5 & -i\left(1 + \frac{m+iM_2}{\sqrt{m^2+M_2^2}}\right)\gamma^5 \end{pmatrix}, \tag{3.110}$$

que es similar a U^1. Los campos $\psi^{(0,m_2)}$ y $\hat{\psi}^{(0,m_2)}$ tienen la misma masa, la cual es de nuevo degenerada y está dada por

$$m_{\psi^{(0,m_2)}} = m_{\hat{\psi}^{(0,m_2)}} = \sqrt{m^2 + \left(2\pi\frac{m_2}{R_2}\right)^2}. \tag{3.111}$$

Finalmente se procede a diagonalizar la matriz dada por

$$\tilde{M}^{12} \equiv \begin{pmatrix} m & -i\left(M_1 - iM_2\right)\gamma^5 \\ -i\left(M_1 + iM_2\right)\gamma^5 & m \end{pmatrix}, \tag{3.112}$$

cuyos eigenvalores son

$$m \pm i\sqrt{M_1 + M_2}, \tag{3.113}$$

con los cuales encontramos la matriz unitaria

$$U_1^* = \begin{pmatrix} I & I \\ -\frac{M_1+iM_2}{\sqrt{M_1^2+M_2^2}}\gamma^5 & \frac{M_1+iM_2}{\sqrt{M_1^2+M_2^2}}\gamma^5 \end{pmatrix}, \tag{3.114}$$

la cual tiene el siguiente efecto sobre la matriz de masa

$$\bar{M}^{12} = \gamma^0 U_1^{*\dagger}\gamma^0 M^{12} U_1^* = \begin{pmatrix} 0 & m - i\sqrt{M_1^2 + M_2^2} \\ m + i\sqrt{M_1^2 + M_2^2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.115}$$

que tienen por eigenvalores

$$\pm\sqrt{m^2 + M_1^2 + M_2^2}, \tag{3.116}$$

los cuales permiten construir

$$U_2^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & I \\ \frac{m+i\sqrt{M_1^2+M_2^2}}{\sqrt{m^2+M_1^2+M_2^2}} & -\frac{m+i\sqrt{M_1^2+M_2^2}}{\sqrt{m^2+M_1^2+M_2^2}} \end{pmatrix}, \tag{3.117}$$

de donde

$$\hat{M}^{12} \equiv U_2^{*\dagger}\bar{M}^{12}U_2^* = \begin{pmatrix} \sqrt{m^2 + M_1^2 + M_2^2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{m^2 + M_1^2 + M_2^2} \end{pmatrix}, \tag{3.118}$$

de nuevo haciendo la transformación dada por la ecuación (3.95) tenemos

$$\gamma^0 U_3^\dagger \gamma^0 \hat{M}^{12} U_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{m^2 + M_1^2 + M_2^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{m^2 + M_1^2 + M_2^2} \end{pmatrix}, \tag{3.119}$$

y la transformación completa está dada por

$$U^{12} = U_1^* U_2^* U_3 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{m+i\sqrt{M_1^2+M_2^2}}{\sqrt{m^2+M_1^2+M_2^2}} & -\left(1 - \frac{m+i\sqrt{M_1^2+M_2^2}}{\sqrt{m^2+M_1^2+M_2^2}}\right)\gamma^5 \\ -\left(-1 - \frac{m+i\sqrt{M_1^2+M_2^2}}{\sqrt{m^2+M_1^2+M_2^2}}\right)\frac{M_1+iM_2}{\sqrt{M_1^2+M_2^2}}\gamma^5 & \left(1 + \frac{m+i\sqrt{M_1^2+M_2^2}}{\sqrt{m^2+M_1^2+M_2^2}}\right)\frac{M_1+iM_2}{\sqrt{M_1^2+M_2^2}} \end{pmatrix}. \tag{3.120}$$

Y como en los casos anteriores, las masas de los campos espinoriales excitados $\psi^{(m_1,m_2)}$ y $\hat{\psi}^{(m_1,m_2)}$ son degenerados e iguales

$$m_{\psi^{(m_1,m_2)}} = m_{\hat{\psi}^{(m_1,m_2)}} = \sqrt{m^2 + (2\pi)^2\left[\left(\frac{m_1}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{R_2}\right)^2\right]}. \tag{3.121}$$

Una vez que hemos encontrado las masas de los campos espinoriales excitados continuemos con la integral del sector de Maxwell $\mathcal{L}_{6D}^M$

$$\mathcal{L}_{4D}^M = \int_0^{R_1} dy^1 \int_0^{R_2} dy^2 \mathcal{L}_{6D}^M = \int_0^{R_1} dy^1 \int_0^{R_2} dy^2 \left(-\frac{1}{4}\mathcal{F}_{MN}(x,y)\mathcal{F}^{MN}(x,y)\right), \tag{3.122}$$

usando la ecuación (3.50)

$$\mathcal{L}_{4D}^M = \int_0^{R_1} dy^1 \int_0^{R_2} dy^2 \left(-\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}(x,y)\mathcal{F}^{\mu\nu}(x,y) - \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\bar{\mu}\nu}(x,y)\mathcal{F}^{\bar{\mu}\nu}(x,y) - \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x,y)\mathcal{F}^{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x,y)\right).$$

Utilizando los desarrollos en serie para las curvaturas y aprovechando la ortogonalidad de las funciones trigonométricas se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{4D}^{M} &= -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(0,0)}(x)\,\mathcal{F}^{\mu\nu(0,0)}(x) - \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(m_1,0)}(x)\,\mathcal{F}^{\mu\nu(m_1,0)}(x) - \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(0,m_2)}(x)\,\mathcal{F}^{\mu\nu(0,m_2)}(x)\\
&- \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(m_1,m_2)}(x)\,\mathcal{F}^{\mu\nu(m_1,m_2)}(x) - \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}^{(m_1,0)}(x)\,\mathcal{F}^{\mu\bar{\nu}(m_1,0)}(x) - \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}^{(0,m_2)}(x)\,\mathcal{F}^{\mu\bar{\nu}(0,m_2)}(x)\\
&- \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}^{(m_1,m_2)}(x)\,\mathcal{F}^{\mu\bar{\nu}(m_1,m_2)}(x) - \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(0,0)}(x)\,\mathcal{F}^{\bar{\mu}\bar{\nu}(0,0)}(x) - \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m_1,0)}(x)\,\mathcal{F}^{\bar{\mu}\bar{\nu}(m_1,0)}(x)\\
&- \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(0,m_2)}(x)\,\mathcal{F}^{\bar{\mu}\bar{\nu}(0,m_2)}(x) - \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m_1,m_2)}(x)\,\mathcal{F}^{\bar{\mu}\bar{\nu}(m_1,m_2)}(x)\,.
\end{aligned} \tag{3.123}$$

Necesitamos determinar la forma de los modos de las curvaturas en términos de los modos de los campos de norma. De la definición de las curvaturas dada en la ecuación (3.35) y los desarrollos en serie de Fourier para las curvaturas y para los campos se tiene que

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(0,0)}(x) = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^{(0,0)}(x) - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^{(0,0)}(x)\,, \tag{3.124}$$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(m_1,0)}(x) = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^{(m_1,0)}(x) - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^{(m_1,0)}(x)\,, \tag{3.125}$$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(0,m_2)}(x) = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^{(0,m_2)}(x) - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^{(0,m_2)}(x)\,, \tag{3.126}$$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(m_1,m_2)}(x) = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^{(m_1,m_2)}(x) - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^{(m_1,m_2)}(x)\,, \tag{3.127}$$

$$\mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}^{(m_1,0)}(x) = \partial_\mu \mathcal{A}_{\bar{\nu}}^{(m_1,0)}(x) + \frac{2\pi m_1}{R_1}\delta_{5\bar{\nu}}\mathcal{A}_\mu^{(m_1,0)}(x)\,, \tag{3.128}$$

$$\mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}^{(0,m_2)}(x) = \partial_\mu \mathcal{A}_{\bar{\nu}}^{(0,m_2)}(x) + \frac{2\pi m_2}{R_2}\delta_{6\bar{\nu}}\mathcal{A}_\mu^{(0,m_2)}(x)\,, \tag{3.129}$$

$$\mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}^{(m_1,m_2)}(x) = \partial_\mu \mathcal{A}_{\bar{\nu}}^{(m_1,m_2)}(x) + 2\pi\left(\frac{m_1}{R_1}\delta_{5\bar{\nu}} + \frac{m_2}{R_2}\delta_{6\bar{\nu}}\right)\mathcal{A}_\mu^{(m_1,m_2)}(x)\,, \tag{3.130}$$

$$\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(0,0)}(x) = 0, \tag{3.131}$$

$$\mathcal{F}_{56}^{(m_1,0)}(x) = \frac{2\pi m_1}{R_1}\mathcal{A}_6^{(m_1,0)}(x)\,, \tag{3.132}$$

$$\mathcal{F}_{56}^{(0,m_2)}(x) = -\frac{2\pi m_2}{R_2}\mathcal{A}_5^{(0,m_2)}(x)\,, \tag{3.133}$$

$$\mathcal{F}_{56}^{(m_1,m_2)}(x) = -\frac{2\pi m_1}{R_1}\mathcal{A}_6^{(m_1,m_2)}(x) - \frac{2\pi m_2}{R_2}\mathcal{A}_5^{(m_1,m_2)}(x)\,. \tag{3.134}$$

Note que no existe término de masa para $\mathcal{A}_5^{(m_1,0)}$ y $\mathcal{A}_6^{(0,m_2)}$. Considérese el término de masa dado por

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m_1,m_2)}(x)\,\mathcal{F}^{\bar{\mu}\bar{\nu}(m_1,m_2)}(x) = -\frac{1}{2}\mathcal{F}_{56}^{(m_1,m_2)}(x)\,\mathcal{F}^{56(m_1,m_2)}(x)\\
&= -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{2\pi m_1}{R_1}\right)^2\left(\mathcal{A}_6^{(m_1,m_2)}\right)^2(x) + 2\left(\frac{2\pi m_1}{R_1}\right)\left(\frac{2\pi m_2}{R_2}\right)\mathcal{A}_5^{(m_1,m_2)}(x)\,\mathcal{A}_6^{(m_1,m_2)}(x)\right.\\
&\left.+\left(\frac{2\pi m_2}{R_2}\right)^2\left(\mathcal{A}_5^{(m_1,m_2)}\right)^2(x)\right]\\
&= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathcal{A}_5^{(m_1,m_2)}(x) & \mathcal{A}_6^{(m_1,m_2)}(x)\end{pmatrix} M \begin{pmatrix}\mathcal{A}_5^{(m_1,m_2)}(x)\\ \mathcal{A}_6^{(m_1,m_2)}(x)\end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{3.135}$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} \left(\frac{2\pi m_2}{R_2}\right)^2 & \left(\frac{2\pi m_1}{R_1}\right)\left(\frac{2\pi m_2}{R_2}\right)\\ \left(\frac{2\pi m_1}{R_1}\right)\left(\frac{2\pi m_2}{R_2}\right) & \left(\frac{2\pi m_1}{R_1}\right)^2 \end{pmatrix}. \tag{3.136}$$

Diagonalizaremos la matriz M a modo de encontrar una combinación de los campos $\mathcal{A}_5^{(m_1,m_2)}$ y $\mathcal{A}_6^{(m_1,m_2)}$ que podamos eliminar de la teoría mediante una transformación de norma especial, de la cual hablaremos más adelante. La matriz que diagonaliza a M es

$$S=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}, \tag{3.137}$$

donde $\tan\theta=\frac{m_2R_1}{m_1R_2}$. Entonces

$$S^{\dagger}MS=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \left(\frac{2\pi m_1}{R_1}\right)^2+\left(\frac{2\pi m_2}{R_2}\right)^2\end{pmatrix}. \tag{3.138}$$

Por lo tanto, en términos de los campos rotados se tiene, denotando los campos físicos por $H^{(m_1,m_2)}$ y los seudobosones de Goldstone por $G^{(m_1,m_2)}$, que

$$\begin{pmatrix}\mathcal{A}_5^{(m_1,m_2)}(x)\\ \\ \mathcal{A}_6^{(m_1,m_2)}(x)\end{pmatrix}=S\begin{pmatrix}G^{(m_1,m_2)}(x)\\ \\ H^{(m_1,m_2)}(x)\end{pmatrix}, \tag{3.139}$$

entonces

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\bar\mu\bar\nu}^{(m_1,m_2)}(x)\,\mathcal{F}^{\bar\mu\bar\nu(m_1,m_2)}(x)&=-\frac{1}{2}\left(\mathcal{A}_5^{(m_1,m_2)}(x)\quad \mathcal{A}_6^{(m_1,m_2)}(x)\right)M\begin{pmatrix}\mathcal{A}_5^{(m_1,m_2)}(x)\\ \\ \mathcal{A}_6^{(m_1,m_2)}(x)\end{pmatrix}\\ &=-\frac{1}{2}\left(G^{(m_1,m_2)}(x)\quad H^{(m_1,m_2)}(x)\right)S^{\dagger}MS\begin{pmatrix}G^{(m_1,m_2)}(x)\\ \\ H^{(m_1,m_2)}(x)\end{pmatrix}\\ &=-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{2\pi m_1}{R_1}\right)^2+\left(\frac{2\pi m_2}{R_2}\right)^2\right]H^{(m_1,m_2)}(x)\,H^{(m_1,m_2)}(x).\end{aligned} \tag{3.140}$$

Recordemos además que $\mathcal{A}_5^{(m_1,0)}(x)$ y $\mathcal{A}_6^{(0,m_2)}(x)$ no poseen términos de masa, por lo que también se consideran como seudobosones de Goldstone. Tenemos entonces

$$\left.\begin{matrix}G^{(m_1,0)}\equiv\mathcal{A}_5^{(m_1,0)}\\ G^{(0,m_2)}\equiv\mathcal{A}_6^{(0,m_2)}\end{matrix}\right\}\text{ Seudobosones de Goldstone}\qquad \left.\begin{matrix}H^{(m_1,0)}\equiv\mathcal{A}_6^{(m_1,0)}\\ H^{(0,m_2)}\equiv\mathcal{A}_5^{(0,m_2)}\end{matrix}\right\}\text{ Escalares Físicos.}$$

Finalmente tenemos que en términos de campos eigenestados de masa, las curvaturas toman la forma

$$\mathcal{F}_{\mu5}^{(m_1,0)}(x)=\partial_\mu G^{(m_1,0)}(x)+\frac{2\pi m_1}{R_1}\mathcal{A}_\mu^{(m_1,0)}(x), \tag{3.141}$$

$$\mathcal{F}_{\mu6}^{(m_1,0)}(x)=\partial_\mu H^{(m_1,0)}(x), \tag{3.142}$$

$$\mathcal{F}_{\mu5}^{(0,m_2)}(x)=\partial_\mu H^{(0,m_2)}(x), \tag{3.143}$$

$$\mathcal{F}_{\mu5}^{(0,m_2)}(x)=\partial_\mu G^{(0,m_2)}(x)+\frac{2\pi m_2}{R_2}\mathcal{A}_\mu^{(0,m_2)}(x), \tag{3.144}$$

$$\mathcal{F}_{\mu5}^{(m_1,m_2)}(x)=\cos\theta\partial_\mu G^{(m_1,m_2)}(x)+\sin\theta\partial_\mu H^{(m_1,m_2)}(x)+\frac{2\pi m_1}{R_1}\mathcal{A}_\mu^{(m_1,m_2)}(x), \tag{3.145}$$

$$\mathcal{F}_{\mu6}^{(m_1,m_2)}(x)=-\sin\theta\partial_\mu G^{(m_1,m_2)}(x)+\cos\theta\partial_\mu H^{(m_1,m_2)}(x)+\frac{2\pi m_2}{R_2}\mathcal{A}_\mu^{(m_1,m_2)}(x), \tag{3.146}$$

$$\mathcal{F}_{56}^{(m_1,0)}(x)=\frac{2\pi m_1}{R_1}H^{(m_1,0)}(x), \tag{3.147}$$

$$\mathcal{F}_{56}^{(0,m_2)}(x)=-\frac{2\pi m_2}{R_2}H^{(0,m_2)}(x), \tag{3.148}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{56}^{(m_1,m_2)}(x)=&-\frac{2\pi m_1}{R_1}\left(-\sin\theta G^{(m_1,m_2)}(x)+\cos\theta H^{(m_1,m_2)}(x)\right)\\ &-\frac{2\pi m_2}{R_2}\left(\cos\theta G^{(m_1,m_2)}(x)+\sin\theta H^{(m_1,m_2)}(x)\right).\end{aligned} \tag{3.149}$$

Para continuar, recordemos que en nuestra teoría seis dimensional la curvatura es invariante bajo la transformación de norma (3.49), esto es

$$\delta \mathcal{F}_{MN}(x,y) = \mathcal{F}'_{MN}(x,y) - \mathcal{F}_{MN}(x,y) = 0. \tag{3.150}$$

Además, también de la ecuación (3.49) tenemos

$$\delta \mathcal{A}_M(x,y) = \partial_M \alpha(x,y), \tag{3.151}$$

de donde

$$\delta \mathcal{A}_\mu(x,y) = \partial_\mu \alpha(x,y), \tag{3.152}$$

$$\delta \mathcal{A}_{\bar{\mu}}(x,y) = \partial_{\bar{\mu}} \alpha(x,y). \tag{3.153}$$

Usando los desarrollos en serie de los campos $\mathcal{A}$ y del parámetro de norma α vemos que

$$\delta \mathcal{A}_\mu^{(0,0)}(x) = \partial_\mu \alpha^{(0,0)}(x), \tag{3.154}$$

$$\delta \mathcal{A}_\mu^{(m_1,0)}(x) = \partial_\mu \alpha^{(m_1,0)}(x), \tag{3.155}$$

$$\delta \mathcal{A}_\mu^{(0,m_2)}(x) = \partial_\mu \alpha^{(0,m_2)}(x), \tag{3.156}$$

$$\delta \mathcal{A}_\mu^{(m_1,m_2)}(x) = \partial_\mu \alpha^{(m_1,m_2)}(x), \tag{3.157}$$

$$\delta \mathcal{A}_{\bar{\mu}}^{(m_1,0)}(x) = -\frac{2\pi m_1}{R_1}\delta_{5\bar{\mu}} \alpha^{(m_1,0)}(x), \tag{3.158}$$

$$\delta \mathcal{A}_{\bar{\mu}}^{(0,m_2)}(x) = -\frac{2\pi m_2}{R_2}\delta_{6\bar{\mu}} \alpha^{(0,m_2)}(x), \tag{3.159}$$

$$\delta \mathcal{A}_{\bar{\mu}}^{(m_1,m_2)}(x) = -2\pi\left(\frac{m_1}{R_1}\delta 5\bar{\mu} + \frac{m_2}{R_2}\delta 6\bar{\mu}\right)\alpha^{(m_1,m_2)}(x). \tag{3.160}$$

Llamaremos *transformaciones de norma estándar* (SGT) a aquellas que surgen de hacer $\alpha^{(m_1,0)}(x) = 0$, $\alpha^{(0,m_2)}(x) = 0$ y $\alpha^{(m_1,m_2)}(x) = 0$. Bajo éstas $\mathcal{A}_\mu^{(0,0)}(x)$ es un campo de norma bajo el grupo estándar $U_4(1)$, mientras que el resto de los campos transforman como escalares. De modo similar definimos las *transformaciones de norma no estándar* (NSGT) haciendo $\alpha^{(0,0)}(x) = 0$. En este caso $\mathcal{A}_\mu^{(0,0)}(x)$ es un invariante, pero $\mathcal{A}_\mu^{(m_1,0)}(x)$, $\mathcal{A}_\mu^{(0,m_2)}(x)$ y $\mathcal{A}_\mu^{(m_1,m_2)}(x)$ se transforman como campos de norma abelianos.

Norma unitaria

La norma unitaria se define mediante una NSGT particular tal que los suedobosones de Goldstone sean mapeados a cero. Recordemos que los seudobosones de Goldstone son

$$\mathcal{A}_5^{(m_1,0)} \equiv G^{(m_1,0)},$$
$$\mathcal{A}_6^{(0,m_2)} \equiv G^{(0,m_2)},$$
$$\cos\theta \mathcal{A}_5^{(m_1,m_2)} - \operatorname{sen}\theta \mathcal{A}_6^{(m_1,m_2)} \equiv G^{(m_1,m_2)}.$$

Sean las NSGT

$$\alpha^{(m_1,0)}(x) = \frac{R_1}{2\pi m_1} G^{(m_1,0)}(x), \tag{3.161}$$

$$\alpha^{(0,m_2)}(x) = \frac{R_2}{2\pi m_2} G^{(0,m_2)}(x), \tag{3.162}$$

con estas transformaciones se logra que los suedobosones de Goldstone $G^{(m_1,0)}(x)$ y $G^{(0,m_2)}(x)$ sean mapeados a cero que es justamente lo que se desea; además con esta elección de norma los campos $\mathcal{A}_\mu^{(m_1,0)}(x)$ y $\mathcal{A}_\mu^{(0,m_2)}(x)$ se transforman como

$$\mathcal{A}_\mu'^{(m_1,0)}(x) = \mathcal{A}_\mu^{(m_1,0)}(x) + \left(\frac{R_1}{2\pi m_1}\right)\partial_\mu G^{(m_1,0)}(x), \tag{3.163}$$

$$\mathcal{A}_\mu'^{(0,m_2)}(x) = \mathcal{A}_\mu^{(0,m_2)}(x) + \left(\frac{R_2}{2\pi m_2}\right)\partial_\mu G^{(0,m_2)}(x). \tag{3.164}$$

Finalmente de las transformaciones

$$\delta_{ns}\mathcal{A}_5^{(m_1,m_2)}(x) = -2\pi\frac{m_1}{R_1}\alpha^{(m_1,m_2)}(x),$$

$$\delta_{ns}\mathcal{A}_6^{(m_1,m_2)}(x) = -2\pi\frac{m_2}{R_2}\alpha^{(m_1,m_2)}(x),$$

se tiene el sistema

$$\begin{aligned}\cos\theta\delta_{ns}G^{(m_1,m_2)}(x) + \sin\theta\delta_{ns}H^{(m_1,m_2)}(x) &= -\tfrac{2\pi m_1}{R_1}\alpha^{(m_1,m_2)}(x)\\ -\sin\theta\delta_{ns}G^{(m_1,m_2)}(x) + \cos\theta\delta_{ns}H^{(m_1,m_2)}(x) &= -\tfrac{2\pi m_2}{R_2}\alpha^{(m_1,m_2)}(x)\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema para $\delta_{ns}G^{(m_1,m_2)}(x)$ se obtiene

$$\alpha^{(m_1,m_2)}(x) = -\frac{1}{2\pi\left(\frac{m_2}{R_1}\sin\theta - \frac{m_1}{R_1}\cos\theta\right)}G^{(m_1,m_2)}(x), \tag{3.165}$$

de tal forma que el suedobosón $G^{(m_1,m_2)}(x)$ es mapeado a cero y el campo $\mathcal{A}_\mu^{(m_1,m_2)}(x)$ transforme como

$$\mathcal{A}_\mu'^{(m_1,m_2)}(x) = \mathcal{A}_\mu^{(m_1,m_2)}(x) - \frac{1}{2\pi\left(\frac{m_2}{R_1}\sin\theta - \frac{m_1}{R_1}\cos\theta\right)}\partial_\mu G^{(m_1,m_2)}(x). \tag{3.166}$$

Así que en esta norma los suedobosones de Goldstone $G^{(m_1,0)}(x)$, $G^{(0,m_2)}(x)$, $G^{(m_1,m_2)}(x)$ son claramente incorporados en la componente longitudinal de los campos masivos $\mathcal{A}_\mu'^{(m_1,0)}(x)$, $\mathcal{A}_\mu'^{(0,m_2)}(x)$, $\mathcal{A}_\mu'^{(m_1,m_2)}(x)$ respectivamente.

La lagrangiana en la norma unitaria se obtiene borrando los suedobosones de Goldstone en la lagrangiana original, de este modo, después de aplicar las transformaciones de norma concluimos que nuestra lagrangiana de Maxwell efectiva $\mathcal{L}_{4D}^M$ es

$$\mathcal{L}_{4D}^M = \mathcal{L}_M^{(0,0)} + \mathcal{L}_M^{(m_1,0)} + \mathcal{L}_M^{(0,m_2)} + \mathcal{L}_M^{(m_1,m_2)}, \tag{3.167}$$

con

$$\mathcal{L}_M^{(0,0)} = -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(0,0)}(x)\,\mathcal{F}^{\mu\nu(0,0)}(x), \tag{3.168}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_M^{(m_1,0)} &= -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(m_1,0)}(x)\,\mathcal{F}^{\mu\nu(m_1,0)}(x) + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu H^{(m_1,0)}(x)\right)\left(\partial^\mu H^{(m_1,0)}(x)\right)\\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi m_1}{R_1}\right)^2\mathcal{A}_\mu^{(m_1,0)}(x)\,\mathcal{A}^{\mu(m_1,0)}(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi m_1}{R_1}\right)^2 H^{(m_1,0)}(x)\,H^{(m_1,0)}(x),\end{aligned} \tag{3.169}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_M^{(0,m_2)} &= -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(0,m_2)}(x)\,\mathcal{F}^{\mu\nu(0,m_2)}(x) + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu H^{(0,m_2)}(x)\right)\left(\partial^\mu H^{(0,m_2)}(x)\right)\\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi m_2}{R_2}\right)^2\mathcal{A}_\mu^{(0,m_2)}(x)\,\mathcal{A}^{\mu(0,m_2)}(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi m_2}{R_2}\right)^2 H^{(0,m_2)}(x)\,H^{(0,m_2)}(x),\end{aligned} \tag{3.170}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_M^{(m_1,m_2)} &= -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(m_1,m_2)}(x)\,\mathcal{F}^{\mu\nu(m_1,m_2)}(x) + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu H^{(m_1,m_2)}(x)\right)\left(\partial^\mu H^{(m_1,m_2)}(x)\right)\\ &+ 2\pi\left[\frac{m_1}{R_1}\sin\theta + \frac{m_2}{R_2}\cos\theta\right]\mathcal{A}_\mu^{(m_1,m_2)}(x)\,\partial^\mu H^{(m_1,m_2)}(x)\\ &+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2\pi m_1}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m_2}{R_2}\right)^2\right]\mathcal{A}_\mu^{(m_1,m_2)}(x)\,\mathcal{A}^{\mu(m_1,m_2)}(x)\\ &- \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2\pi m_1}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{2\pi m_2}{R_2}\right)^2\right]H^{(m_1,m_2)}(x)\,H^{(m_1,m_2)}(x).\end{aligned} \tag{3.171}$$

De las expresiones $\mathcal{L}_M^{(m_1,0)}$, $\mathcal{L}_M^{(0,m_2)}$ y $\mathcal{L}_M^{(m_1,m_2)}$ notamos que las masas de los campos $\mathcal{A}_\mu^{(m_1,0)}$, $\mathcal{A}_\mu^{(0,m_2)}$ y $\mathcal{A}_\mu^{(m_1,m_2)}$ son $\frac{2\pi m_1}{R_1}$, $\frac{2\pi m_2}{R_2}$ y $2\pi\sqrt{\left(\frac{m_1}{R_1}\right)^2+\left(\frac{m_2}{R_2}\right)^2}$, respectivamente.

Finalmente nuestra lagrangiana efectiva se puede escribir como

$$\mathcal{L}_{4D} = \mathcal{L}_{4D}^F + \mathcal{L}_M^{(0,0)} + \mathcal{L}_M^{(m_1,0)} + \mathcal{L}_M^{(0,m_2)} + \mathcal{L}_M^{(m_1,m_2)}. \tag{3.172}$$

donde notamos que los modos ceros coinciden con la teoría usual.

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo de tesis se ha presentado una revisión elemental de las propiedades básicas de los grupos ortogonales, $SO(N)$, de los grupos unitarios, $SU(N)$, y de los grupos $SO(1,m-1)$. En este contexto, se estudiaron las propiedades básicas de espinores determininados por el grupo de Lorentz en seis dimensiones, $SO(1,5)$. La contribución de este trabajo de tesis consiste, además, en la formulación de la electrodinámica espinorial en seis dimensiones, asícomo en el estudio detallado de la teorí a efectiva que resulta de asumir que las dos dimensiones extra están compactificadas.

En lo que respecta a las propiedades elementales de los espinores en seis dimensiones, los principales resultados se pueden enumerar como sigue:

- **Representación.** Se introdujo una representación de las matrices de Dirac en 6 dimensiones, escrita en términos de las matrices correspondientes en 4 dimensiones, dada por

$$\Gamma^\mu = (\sigma^0 \otimes \gamma^\mu) = \begin{pmatrix} \gamma^\mu & 0 \\ 0 & \gamma^\mu \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

$$\Gamma^5 = (i\sigma^2 \otimes \gamma^5) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^5 \\ -\gamma^5 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

$$\Gamma^6 = (i\sigma^1 \otimes \gamma^5) = i\begin{pmatrix} 0 & \gamma^5 \\ \gamma^5 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Dado que el espacio tiene dimensión par, existe una matriz adicional, Γ^7, la cual permite definir quiralidad. Dicha matriz, la cual se transforma como un 0-tensor bajo $SO(1,5)$, pero es impar bajo la transformación de paridad, definida por $\Lambda_P = g$, es dada por

$$\Gamma^7 = -\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\Gamma^3\Gamma^5\Gamma^6 = \begin{pmatrix} \gamma^5 & 0 \\ 0 & -\gamma^5 \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

- **Generadores.** La representación anterior permite escribir los generadores del grupo $SO(1,5)$ que definen al subgrupo estándar $SO(1,3)$, en bloques diagonales como sigue:

$$S_6^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} S_4^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & S_4^{\mu\nu} \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

- **Espinores.** Esta descomposición diagonal de los generadores del grupo de Lorentz estándar nos permite descomponer el espinor de 8 componentes definido por $SO(1,5)$ como sigue,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \hat{\psi} \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

donde ψ y $\hat{\psi}$ son objetos de 4 componentes que se transforman en la representación espinorial de $SO(1,3)$.

- **Electrodinámica Espinorial.** En seis dimensiones, la electrodinámica espinorial que viene siendo la análoga de cuatro dimensiones, es dada por la siguiente lagrangiana,

$$\mathcal{L}_{6QED} = \bar{\Psi}(x,y)\left(\not{D} - m\right)\Psi(x,y) - \frac{1}{4}\mathcal{F}_{MN}(x,y)\mathcal{F}^{MN}(x,y)\,. \tag{4.7}$$

  Esta teoría es gobernada por los grupos $U_6(1)$ y $ISO(1,5)$.

En lo que respecta al proceso de compactificación y obtención de la teoría efectiva 4-dimensional, los resultados principales son:

- **Periodicidad y paridad.** Los objetos $\Psi(x,y)$ y $\mathcal{F}_{MN}(x,y)$ se transforman como espinor y 2-tensor bajo $SO(1,5)$, respectivamente, pero también se transforman covariantemente bajo el grupo de norma $U_6(1)$, el primero como una fase y el segundo como un escalar. En un primer paso, antes de la compactificación, dichos objetos se pueden descomponer en objetos que se transforman covariantemente bajo el grupo de Lorentz estándar $SO(1,3)$, como sigue:

$$\Psi(x,y) \to \psi(x,y),\, \hat{\psi}(x,y)\,, \tag{4.8}$$

  los cuales se transforman como espinores bajo $SO(1,3)$. Por otra parte, los campos de norma contienen los siguientes dos objetos

$$\mathcal{A}_M(x,y) \to \mathcal{A}_\mu(x,y),\, \mathcal{A}_{\bar{\mu}}(x,y)\,, \tag{4.9}$$

  los cuales se transforman como un 1-tensor y un 0-tensor bajo $SO(1,3)$. Lo anterior implica la siguiente descomposición de los tensores de curvatura

$$\mathcal{F}_{MN}(x,y) \to \mathcal{F}_{\mu\nu}(x,y),\, \mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}(x,y),\, \mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x,y), \tag{4.10}$$

  los cuales se transforman como un 2-tensor, un 1-tensor y un 0-tensor bajo $SO(1,3)$. Las propiedades de transformación bajo el grupo de norma $U_6(1)$ de estos nuevos objetos son las mismas que las de los objetos originales.

  Las coordenadas y^1 y y^2 se asumen compactificadas sobre la orbifold $S^1/Z_2 \times S^2/Z_2$. Esto permite asumir las siguientes propiedades de periodicidad y paridad de los campos

$$\begin{aligned} \Psi(x,y) &= \Psi(x,y+2\pi R)\,, && (4.11)\\ \mathcal{A}_M(x,y) &= \mathcal{A}_M(x,y+2\pi R) \Rightarrow \mathcal{F}_{MN}(x,y) = \mathcal{F}_{MN}(x,y+2\pi R)\,, && (4.12)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(x,-y) &= +\psi(x,y)\,, && (4.13)\\ \hat{\psi}(x,-y) &= -\hat{\psi}(x,y)\,, && (4.14)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\mu(x,-y) &= +\mathcal{A}_\mu(x,y) \Rightarrow \mathcal{F}_{\mu\nu}(x,-y) = +\mathcal{F}_{\mu\nu}(x,y)\,, && (4.15)\\ \mathcal{A}_{\bar{\mu}}(x,-y) &= -\mathcal{A}_{\bar{\mu}}(x,y) \Rightarrow \mathcal{F}_{\bar{\mu}\nu}(x,-y) = -\mathcal{F}_{\bar{\mu}\nu}(x,y),\, \mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x,-y) = +\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x,y)\,. && (4.16)\end{aligned}$$

- **Transformación de punto y teoría 4-dimensional.**

  La conexión entre la teoría gobernada por los grupos $U_6(1)$ y $ISO(1,5)$ y la teoría gobernada por los grupos estándar $U(1,\mathcal{M}^4)$ y $ISO(1,3)$ es dada a través de una transformación de punto, definida por series de Fourier pares e impares, que mapean objectos covariantes del primer par de grupos en objetos covariantes del segundo par de grupos. El mapeo es como sigue:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^a_M(x,y) \mapsto\quad & \left(A^{(0,0)a}_\mu(x), \{A^{(m_1,0)a}_\mu(x)\}, \{A^{(0,m_1)a}_\mu\}(x), \{A^{(m_1,m_2)a}_\mu(x)\}\right), \\ & \left(\{A^{(m_1,0)a}_{\bar{\mu}}(x)\}, \{A^{(0,m_1)a}_{\bar{\mu}}\}(x), \{A^{(m_1,m_2)a}_{\bar{\mu}}(x)\}\right)\,, && (4.17)\end{aligned}$$

donde las torres de KK $\{A_5^{(m_1,0)a}(x)\}$ son los pseudo bosones de Goldstone asociados a la torre de campos de norma $\{A_\mu^{(m_1,0)a}(x)\}$, la torre $\{A_6^{(0,m_2)a}(x)\}$ corresponde a los pseudo bosones de Goldstone asociados con la torre $\{A_\mu^{(0,m_2)a}(x)\}$, en tanto que una mezcla de las torres $\{A_5^{(m_1,m_2)a}(x)\}$ y $\{A_6^{(m_1,m_2)a}(x)\}$ define la torre de pseudo bosones de Goldstone de los campos de norma $\{A_\mu^{(m_1,m_2)a}(x)\}$. Además, existen tres torres de campos escalares físicos correspondientes a $\{A_6^{(m_1,0)a}(x)\}$, $\{A_5^{(0,m_2)a}(x)\}$ y una mezcla de las torres $\{A_5^{(m_1,m_2)a}(x)\}$ y $\{A_6^{(m_1,m_2)a}(x)\}$, con masas al cuadrado dadas, respectivamente, por $\left(\frac{2\pi m_1}{R_1}\right)^2$, $\left(\frac{2\pi m_2}{R_2}\right)^2$ y $\left(\frac{2\pi m_1}{R_1}\right)^2+\left(\frac{2\pi m_2}{R_2}\right)^2$.

- **Diagonalización.** El sector de norma Abeliano contiene dos campos escalares $\mathcal{A}_{\bar{\mu}}$, de los cuales uno es necesario para formar las componentes longitudinales de los modos masivos de KK $\mathcal{A}_\mu^{(\underline{m}_1,\underline{m}_2)}$, es decir, da lugar a seudo bosones de Goldstone que son campos escalares de masa cero; mientras que el otro campo escalar conduce a excitaciones de KK físicas asociadas con el campo electromagnético debido a su penetración en la variedad compacta. Sin embargo, la presencia de escalares con masa distinta de cero y de masa igual a cero no surge directamente, sino que hay que realizar un proceso de diagonalización. Se mostró explícitamente que, en efecto, esto es lo que ocurre, lo cual es una prueba no trivial de que el mecanismo de Higgs opera en la teoría.

  En el sector espinorial, surgen también términos de masa como consecuencia del proceso de compactificación. Si bien es cierto que la masa del modo cero, es decir, la masa de la partícula física, es fácilmente identificada en la teoría, lo mismo no ocurre con las excitaciones de KK, ya que en este caso la identificación de los términos de masa es sutil. Se demostró que dichos términos de masa pueden ser definidos de manera consistente mediante una serie de transformaciones de tipo unitario y quiral.

Bibliografía

[1] I. Antoniadis, Phys. Lett. **B246**, 377 (1990).

[2] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, Phys. Lett. B429, 263 (1998), [arXiv:hep-ph/9803315].

[3] H. Novales-Sánchez and J. J. Toscano, *Gauge invariance and quantization of Yang - Mills theories in extra dimensions*, Phys. Rev. D **82**, 116012 (2010), arXiv:1008.4638 [hep-ph].

[4] A. Cordero-Cid, M. Gómez-Bock, H. Novales-Sánchez, and J.J. Toscano, *The Standard Model with one universal extra dimension*, Pramana **80**, 369-412 (2013), e-Print: arXiv:1108.2926 [hep-ph].

[5] M. A. López-Osorio, E. Martínez-Pascual, H. Novales-Sánchez, and J. J. Toscano, *Hidden symmetries induced by a canonical transformation and gauge structure of compactified Yang-Mills theories*, Phys. Rev. D **88**, 036015 (2013), arXiv:1302.2981 [hep-ph].

[6] M. A. López-Osorio, E. Martínez-Pascual, H. Novales-Sánchez, and J. J. Toscano, *Yang-Mills theories with an arbitrary number of compactified extra dimensions*, arXiv:1402.5940 [hep-th] (por aparecer en Phys. Rev. D).

[7] Notas tomadas del curso *Temas Selectos de la Mecánica Clásica I*, impartido en la FCFM-BUAP por el Dr. J. Jesús Toscano Chávez en la primavera del 2012.

[8] Judith Castro Medina, *La teoría de Maxwell del rompimiento espontáneo de la simetría de Lorentz en 5 dimensiones*, Tesis de Licenciatura, BUAP, (2012).

[9] PIERRE, Ramond, *Group Theory A Physicist's Survey*, Londres, Cambridge (2010).

[10] K. Sundermeyer; *Constrained Dynamics with Applications to Yang-Mills Theory, General Relativity, Classical Spin, Dual String Model*, Springer (1982).

[11] D. M. Gitman, I. V. Tyutin, *Quantization of Fields with Constraints*, Springer (1990).

[12] I. Todorov, (2011) e-Print: arXiv:1106.3197

[13] H. Novales-Sánchez and J.J. Toscano, Phys.Rev. D **84**, 076010 (2011), e-Print: arXiv:1105.2765 [hep-ph].

[14] MATTHEW, Robinson; *Symmrety and the Standar Model*; Londres; Springer; 2011

[15] P. A. M. Dirac; *Lectures on quantum mechanics*, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University (1964)

[16] GRADSHTEYN, I.S.; RYZHIK, I.M.; *Table of Integrals, Series, and Products*; Septima edición; Estados Unidos de América; Academic Press; 2007; 1171 p.