



# Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

## Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

---

Análisis de las masas y mezclas del sabor de los neutrinos en el  
MDDH tipo III

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**Licenciada en Física**

por

Emma González Hernández

asesorada por

Dra. Olga Guadalupe Félix Beltrán (FCE-BUAP)  
Dr. José Enrique Barradas Guevara (FCFM-BUAP)

Puebla Pue.  
Julio del 2014





# Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

## Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

---

Análisis de las masas y mezclas del sabor de los neutrinos en el  
MDDH tipo III

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**Licenciada en Física**

por

Emma González Hernández

asesorada por

Dra. Olga Guadalupe Félix Beltrán (FCE-BUAP)  
Dr. José Enrique Barradas Guevara (FCFM-BUAP)

Puebla Pue.  
Julio del 2014



**Título:** Análisis de las masas y mezclas del sabor de los neutrinos en el MDDH tipo III

**Estudiante:**EMMA GONZÁLEZ HERNÁNDEZ

COMITÉ

---

Presidente

---

Secretario

---

Vocal

---

Dra. Olga Guadalupe Félix Beltrán (FCE-BUAP)  
Asesor

---

Dr. José Enrique Barradas Guevara (FCFM-BUAP)  
Asesor



# Índice general

Agradecimientos . . . . .	V
Resumen . . . . .	VII
Introducción . . . . .	1
<b>1. Modelo Estándar . . . . .</b>	<b>5</b>
1.1. Modelo Estándar . . . . .	5
1.2. Grupos de simetrías en la física de partículas . . . . .	9
1.3. Rompimiento Espontáneo de la Simetría . . . . .	10
1.4. Lagrangiana del Modelo Estándar . . . . .	11
<b>2. Modelo de Dos Dobletes de Higgs Tipo III . . . . .</b>	<b>15</b>
2.1. El Modelo de 1 doblete de Higgs (1HDM) . . . . .	15
2.2. Potencial de Higgs en el MDDH . . . . .	16
2.3. Lagrangiana de Yukawa para el MDDH . . . . .	20
<b>3. Física de Neutrinos en el ME y en el MDDH Tipo III . . . . .</b>	<b>23</b>
3.1. El Neutrino en el Modelo Estándar . . . . .	23
3.2. Neutrinos de Dirac y Majorana . . . . .	24
3.3. Representación de Dirac y Majorana . . . . .	25
3.4. Masa de Dirac y Masa de Majorana . . . . .	26
3.5. El Mecanismo See-Saw . . . . .	28
3.5.1. Mecanismo SeeSaw tipo-I . . . . .	31
3.6. Fuentes de Neutrinos . . . . .	32
3.7. Experimentos de Neutrinos . . . . .	35
3.8. El Problema de los Neutrinos Solares . . . . .	37
3.9. Formalismo General de Oscilaciones de Neutrinos . . . . .	38
3.9.1. Matriz de Masa $M$ . . . . .	42
3.10. Matriz de Mezclas de Neutrinos . . . . .	43
<b>4. Cálculo del Lagrangiano de Yukawa, Matrices de Masa y Mezcla de los Neutrinos en el MDDH Tipo III . . . . .</b>	<b>47</b>
4.1. Clasificación de Ceros de Textura . . . . .	47
4.2. Factorización de Fases . . . . .	49
4.3. Reparametrización de las Matrices de Masas . . . . .	53
4.4. Matriz Hermitiana . . . . .	55
4.5. Diagonalización de las Matrices de Masas . . . . .	63
4.6. Matrices de Mezcla. . . . .	65
4.7. Ángulos de mezcla . . . . .	70

<b>5. Conclusiones</b>	<b>73</b>
Apéndice 1: Diagonalización de las Matrices de Masa. . . . .	75

# Agradecimientos

A mis padres Marcos González Galindo y Elvira Hernández Cortes.  
Por el cariño y apoyo que siempre me han brindado.

A mis abuelos Antonio y Delfina.  
A mis hermanas Ary y Nancy.  
Por el cariño y comprensión

A la Dra. Olga Félix.  
A los Doctores Félix F. González y J. Enrique Barradas.  
Por los consejos y su ayuda.

A mis amigos Esperanza, Lizbeth, Maribel, Natalia, Yesica, Arturo, Francisco, Héctor, Javier y Santiago.  
Por su apoyo, amistad y comprensión.

Für Alle und Keinen.



# Resumen

En este trabajo de tesis nos interesa calcular y analizar las matrices de masas y mezclas de neutrinos en una extensión del Modelo Estándar de la Física de Partículas, así como las condiciones bajo las cuales se recuperan los resultados conocidos de la física de neutrinos que se encuentran fuera del Modelo Estándar. Este estudio lo haremos en el marco de una teoría extendida en el sector de Higgs considerando un campo isodoublet de Higgs adicional al Modelo Estándar, Modelo de Dos Dobletes de Higgs tipo III. Además, se considerarán las matrices de Yukawa con dos y cuatro ceros de textura. Se propone el análisis del lagrangiano de Yukawa leptónico, la inclusión de un lagrangiano de Majorana para dar masa a los neutrinos; calcular la matriz de masas correspondiente, la cual se diagonaliza considerando dos escenarios la jerarquía normal y la jerarquía invertida. Además, se calcula la matriz de mezclas del sabor de los neutrinos,  $V_{PMNS}$  así como las expresiones teóricas correspondientes a los ángulos de mezcla.



# Introducción

El Modelo Estándar (ME) de las interacciones electrodébiles y fuertes es una teoría de norma que proporciona un marco teórico consistente y bien definido en el cual se unifican las interacciones electromagnética, débil y fuerte, sin embargo, hay algunos aspectos que todavía no se resuelven como los que se mencionarán a continuación [1]. El grupo de norma  $G_{ME} = SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  de la teoría es un grupo semi simple local y no abeliano con bosones de norma  $G_i^\mu$  ( $i = 1, \dots, 8$ ),  $W_i^\mu$  ( $i = 1, 2, 3$ ) y  $B_i^\mu$  para los grupos  $SU(3)_C$ ,  $SU(2)_L$  y  $U(1)_Y$ , respectivamente.

En el ME los términos bilineales en los campos fermiónicos no son invariantes de norma y es por esto que no se pueden introducir términos de masa que tengan la simetría de norma ya señalada, este problema se soluciona agregando el mecanismo de Higgs del rompimiento espontáneo de la simetría de norma electrodébil  $G_{ED} = SU(2)_L \times U(1)_Y$ , el cual genera la dinámica que producirá las masas asociadas a los bosones de norma  $W^\pm$ ,  $Z^0$  y a los fermiones: seis quarks y tres leptones. En el sector de Higgs del ME se introduce un solo campo escalar  $\phi$  conocido como campo de Higgs; que es un singlete de  $SU(3)_C$  y doblete de  $SU(2)_L$ , el rompimiento espontáneo de la simetría se induce si el mínimo del potencial de Higgs se obtiene para valores de  $\phi$ , cuyo valor de expectación del vacío del campo en la teoría es diferente de cero,  $\langle \phi \rangle = v \neq 0$ . Así, las masas de los fermiones se obtienen de las interacciones de Yukawa formadas por los términos que acoplan el campo de Higgs con dos campos fermiónicos, obteniéndose la expresión para la masa de los fermiones  $m_f = \nu \lambda_f / \sqrt{2}$ , donde  $\lambda_f$  es un parámetro libre que se ajusta de los datos experimentales y se conoce como el acoplo de Yukawa del fermión  $f$ .

El 4 de Julio de 2012, los experimentos ATLAS y CMS en el LHC del CERN anunciaron que habían observaron una nueva partícula en la región de masa alrededor de 126 GeV. Esta partícula es consistente con el bosón de Higgs, pero tomará más trabajo para determinar si es o no es el bosón de Higgs predicho por el Modelo Estándar. El bosón de Higgs, tal como se propone en el modelo estándar, es la manifestación más simple del mecanismo Brout-Englert-Higgs. Otros tipos de bosones de Higgs se predicen por otras teorías que van más allá del Modelo Estándar. El 8 de Octubre de 2013, el premio Nobel de Física fue otorgado conjuntamente a François Englert y Peter Higgs por el descubrimiento teórico de un mecanismo que contribuye a nuestra comprensión del origen de la masa de las partículas subatómicas, y que recientemente se confirmó a través del descubrimiento de la partícula fundamental previsto, por los experimentos ATLAS y CMS en Gran Colisionador de Hadrones del CERN [2].

No hay una explicación para el patron de masas que se observa, el llamado enigma de las jerarquías de masas no se ha resuelto, este surge porque experimentalmente se observa que fermiones de la misma carga pero de diferentes generaciones o familias tienen una gran diferencia en sus masas, de tal manera que para obtener los valores correctos de las masas de los fermiones es necesario elegir de manera apropiada los parámetros de Yukawa. Esto hace que los valores de  $\lambda_f$  corran en un intervalo de  $O(10 - 6)$  para el electrón y  $O(1)$  para el quark top. Esta diferencia es tan grande que en una primera aproximación se pueden tomar como nulas las masas de las dos primeras familias. Los fermiones de la primera generación son muy ligeros comparados con la escala electrodébil,  $\nu = \sqrt{2}G_F^{-\frac{1}{2}} = 246$  GeV. Las masas de la segunda generación son también relativamente pequeñas. De los fermiones de la tercer generación, solo el quark top no es pequeño comparado con la escala electrodébil.

Otro problema que no está resuelto en el ME es la replicación de los fermiones, para explicar el espectro observado de partículas se introducen en el modelo tres generaciones o familias de fermiones sin que haya una razón teórica que explique por qué la naturaleza es así.

Sabemos de los experimentos que las interacciones débiles violan la simetría de conjugación de carga y paridad (CP), particularmente en los decaimientos de los mesones  $K^0$  [3] y  $B^0$  [4], y esto tampoco está completamente explicado en el ME. En este modelo la violación de CP se introduce agregando como parámetro libre adicional una fase compleja en la matriz de mezclas de los quarks para tres familias, llamada la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa o  $V_{CKM}$  [5]. La matriz de mezclas de los quarks  $V_{CKM}$  acopla campos de quark con diferentes sabores en la representación donde las matrices de masas de los quarks son diagonales. El desconocimiento de los elementos de la matriz de masas de los quarks se refleja en la ausencia de una relación funcional entre las masas de los quarks y los cuatro parámetros libres (tres ángulos de mezcla y la fase compleja que viola CP) con los que normalmente se parametriza la matriz de mezclas de los quarks  $V_{CKM}$  [6, 7].

En el ME tal como está formulado la matriz de mezclas de los leptones análoga, es la matriz unidad, ya que el Modelo Estándar se formuló para neutrinos de masa nula. Sin embargo, evidencia experimental reciente indica que en el sector leptónico hay física más allá del Modelo Estándar [8, 9]. En particular, el problema del déficit de los neutrinos solares [10] surge de la observación que el flujo medido de neutrino del electrón  $\nu_e$  en los experimentos donde se usan detectores con cloro [11, 12, 13] es sólo una fracción del flujo esperado de los cálculos de los modelos del Sol. Además, como los detectores utilizan sustancias diferentes, esto permite medir separadamente el flujo de neutrinos que participan en diferentes reacciones nucleares con umbrales de energía diferentes. El problema de los neutrinos atmosféricos se refiere al déficit detectado de neutrinos del muón. Los flujos de los neutrinos del electrón  $\nu_e$  y del muón  $\nu_\mu$  surgen de las interacciones de los rayos cósmicos con la atmósfera de la Tierra.

Todos estos experimentos de neutrinos han dejado establecido que los neutrinos se mezclan y que probablemente tienen masa. En el caso particular de los neutrinos sabemos por la evidencia experimental obtenida de Kamiokande, del experimento Troitsk y los resultados obtenidos en PSI y LEP que las cotas para las masas de los neutrinos son diferentes de cero,  $m_{\nu_e} < 460$  eV,  $m_{\nu_\mu} < 0.190$  MeV y  $m_{\nu_\tau} < 18.2$  MeV [14].

Estas cotas no nulas son la primera evidencia experimental de física nueva que muestra la necesidad de extender al Modelo Estándar. El sector de Yukawa de los leptones con neutrinos masivos es uno de los sectores menos conocidos hasta ahora. Esto se debe principalmente a que los neutrinos son difíciles de detectar porque sólo participan en la interacción electrodébil, su carga eléctrica es nula y su masa es muy pequeña. Si los neutrinos adquieren masa por el mecanismo de Higgs de manera análoga con el sector de quarks, con las masas dadas por el valor de expectación  $\nu$  entre estados del vacío del campo de Higgs y el acoplo de Yukawa correspondiente,

$$m_\nu = \frac{\nu}{\sqrt{2}} \lambda^\nu$$

El problema con las masas de los neutrinos  $m_\nu$  está en el hecho de que se requiere un acoplo de Yukawa muy pequeño  $\lambda^\nu < 10^{-10}$  para poder explicar la magnitud de las masas de los neutrinos  $m_\nu \approx 10$  eV, dado que el valor de expectación del doblete de Higgs es del orden de  $\nu = \sqrt{2} G_F^{-\frac{1}{2}} = 246$  GeV, y es este mismo valor de expectación del doblete de Higgs el que explica la magnitud de las masas de Dirac de los fermiones restantes del ME.

Sin embargo, en el Modelo Estándar tal como está ahora formulado no se pueden introducir términos de masa para los neutrinos debido a que en el modelo no hay una representación del grupo de norma donde podamos acomodar a los neutrinos derechos de tal modo que se puedan acoplar con sus correspondientes neutrinos izquierdos para formar términos de masa de Dirac.

Los términos de masa para los neutrinos se pueden clasificar en tres tipos de acuerdo al acoplamiento de los campos de quiralidad izquierda y derecha del neutrino con el campo de Higgs. En el Modelo Estándar una masa tipo Dirac es aquella que conecta componentes izquierdas  $\psi_L$  y derechas conjugadas  $\bar{\psi}_R = \psi_R^\dagger \gamma^0$  del mismo campo.

Para las partículas que portan cualquier número cuántico  $U(1)$ , como la carga electromagnética, una masa de Dirac es el único término de masa posible, ya que para preservar estos números cuánticos  $U(1)$  es necesario tener interacción partícula-antipartícula. Sin embargo, los neutrinos son una excepción a esta regla debido a que no tienen carga electromagnética es posible introducir otros tipos de términos de masa además de los términos de masa tipo Dirac. Estos otros términos de masa violan la conservación del número leptónico y en algunos casos  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , pero están permitidos por la invariancia de Lorentz.

Una masa de tipo Majorana es aquella que conecta componentes izquierdas  $\psi_L$  y derechas  $\psi_R$  de campos conjugados; podemos introducir dos masas de Majorana diferentes, el primer tipo acopla partícula con partícula, el segundo tipo de masa de Majorana, acopla antipartícula con antipartícula. Una teoría mixta que contenga masas de Dirac y Majorana simultáneamente se obtiene con la lagrangiana

$$\mathcal{L}_{DM} = M_D \bar{\psi}_L \psi_R + M_L \bar{\psi}_L^c \psi_L + M_R \bar{\psi}_R \psi_R + h.c.$$

donde  $M_D$  es la matriz de masa de Dirac,  $M_L$  y  $M_R$  son las matrices de masa de Majorana y  $\psi_{L,R}$  son espinores de Dirac de la forma  $\psi = \psi_L + \psi_R$ , con  $\psi_L$  la componente izquierda y  $\psi_R$  la componente derecha.

Una teoría que contenga masas de Majorana viola la conservación de cualquier número aditivo que porten los campos fermiónicos  $\psi$ , por ejemplo la carga eléctrica, así que todos los fermiones fundamentales, excepto los neutrinos, deben tener  $M_L = M_R = 0$ . Para neutrinos de Majorana se viola el número leptónico por dos unidades y pueden ocurrir los decaimientos doble beta o los decaimientos del Kaón [15] si ocurren estos decaimientos, esta será una evidencia experimental clara de que existen neutrinos con masa de Majorana. Hasta hoy las cotas experimentales para que ocurran estos procesos son nulas [16].

Si los eigenvalores de  $M_L$  son nulos o muy pequeños y si los eigenvalores de  $M_R$  son grandes comparados con los de  $M_D$  entonces el espectro de masas de los neutrinos se puede separar en un sector de neutrinos ligeros y un sector de neutrinos pesados. Este es el llamado mecanismo de *see-saw* que nos permite entender las masas pequeñas para los neutrinos que son del orden de eV.

En general la matriz de masas de los neutrinos  $M_\nu$  no es diagonal y es compleja, por lo que es necesario diagonalizarla al igual que a la matriz de masas de los leptones cargados  $M_l$ , dando origen a la matriz de mezclas de los neutrinos.

Es necesario hacer muchos más experimentos para medir de manera precisa todos los parámetros de la matriz de mezclas de los neutrinos, culminando con el descubrimiento y estudio de la violación leptónica de CP. Como un primer paso en esta dirección se estudian las transiciones de  $\nu_\mu$  a  $\nu_e$ , las cuales darían una medida del ángulo de mezcla leptónico  $\theta_{13}$ . En los experimentos donde se controla el flujo de neutrinos, por ejemplo, los rayos beta provenientes de núcleos radiativos podrían proporcionar un rayo muy puro de neutrinos del electrón o antineutrinos del electrón de unos cuantos cientos de MeV, lo cual permitiría hacer pruebas de violación de CP y T [17]. Por último, las fábricas almacenadoras de muones ofrecen la posibilidad de medir la violación de CP aún para valores muy pequeños de  $\theta_{13}$  [17].

Muchas teorías están a la expectativa de una nueva física más allá del Modelo Estándar que podría surgir a escalas de TeV, basadas en las carencias del ME. Una extensión ampliamente estudiada es aquella donde se añade otro doblete de Higgs, la cual es llamada el Modelo de Dos Dobletes de Higgs (MDDH) [18], donde se predice la existencia de tres bosones de Higgs neutros: ( $H^0$ ,  $h^0$ ,  $A^0$ ) los dos primeros escalares CP pares y el tercero CP impar, consideramos el caso de conservación CP; dos bosones de Higgs cargados ( $H^+$ ,  $H^-$ ).

Este modelo se presenta en tres tipos de acuerdo a la elección de los acoplamientos, bosones de Higgs-fermiones de la siguiente forma:

1. Tipo I: Uno solo dobletes de Higgs da masa a los quarks up y down.
2. Tipo II: La parte neutra de uno de los dobletes de Higgs se acopla solo a los quarks tipo up, mientras que la parte neutra del otro doblete de Higgs se acopla a los quarks tipo down.
3. Tipo III: ambos dobletes pueden generar las masas para el quark up y para el down simultáneamente.

Para dar masa a los neutrinos en el Modelo Estándar debemos extender el sector de leptones agregando la parte derecha de los neutrinos. Adicionalmente, podemos extender tanto el sector de Higgs como el sector leptónico. Para introducir los términos de masa de los neutrinos, primero se construyen por separado los términos de masa de Dirac y de Majorana, después se construye el término de masa híbrido donde se incluyen ambos tipos de masa, Dirac y Majorana, obtenido así el mecanismo de *seesaw* y la matriz de mezcla leptónica  $PMNS$ .

La matriz  $U_{PMNS}$  es la matriz de mezcla leptónica en las interacciones débiles, esta es una matriz unitaria de la forma

$$U_{PMNS} \equiv U_l^\dagger U_\nu. \quad (1)$$

Aunque, a menudo en la fenomenología de neutrinos se elige la base donde  $M_l = \text{diag}\{m_e, m_\mu, m_\tau\}$  con  $U_j = \mathbb{I}$  y  $U_{PMNS} = U_\nu$ , hay que tener en cuenta que tanto el sector de los leptones cargados como el de los neutrinos pueden, en general, contribuir a la mezcla de sabores de los leptones. En otras palabras,  $U_l$  y  $U_\nu$  por separado no son totalmente físicas, y solo su producto  $U_{PMNS} = U_l^\dagger U_\nu$  es una descripción física de la mezcla del sabor leptónico y la violación de CP a bajas energías.

Al igual que la matriz CKM, la matriz de mezclas leptónica PMNS puede ser parametrizada en términos de ángulos de rotación y fases asociadas a la violación de CP. Sin embargo, el número de fases no factorizables presentes en la matriz PMNS depende de si los neutrinos son de Dirac o Majorana.

En este trabajo de tesis nos interesa calcular y analizar las matrices de masas y mezclas de neutrinos en una extensión del Modelo Estándar de la Física de Partículas, así como las condiciones bajo las cuales se recuperan los resultados conocidos de la física de neutrinos que se encuentran fuera del Modelo Estándar. Este estudio lo haremos en el marco de una teoría extendida en el sector de Higgs considerando un campo isodoublete de Higgs adicional al Modelo Estándar, Modelo de Dos Dobletes de Higgs tipo III. Además, se considerarán las matrices de Yukawa con dos y cuatro ceros de textura. Se propone el análisis del lagrangiano de Yukawa leptónico, la inclusión de un lagrangiano de Majorana para dar masa a los neutrinos; calcular la matriz de masas correspondiente, la cual se diagonaliza para el análisis de la región del espacio de parámetros donde se encuentran valores de las masas de los neutrinos que coincidan con los intervalos experimentales reportados en la literatura. Además, se calcula la matriz de mezclas del sabor de los neutrinos.

La tesis está estructurada de la siguiente forma: En el capítulo 1 se da una introducción al Modelo Estándar, se describen los grupos de simetría en la física de partículas, se muestra la lagrangiana del ME y vemos el mecanismo de Higgs. En el capítulo 2 estudiamos el Modelo Estándar extendido en su sector de Higgs considerando dos campos isodoubletes de Higgs  $SU(2)$ , enfatizando el tipo III. En el capítulo 3 analizamos la masa de los neutrinos de Dirac y de Majorana, así como también hablamos del mecanismo it See-Saw y el formalismo general de oscilaciones de los neutrinos. En el capítulo 4 se analiza el sector Yukawa para matrices Yukawa con cuatro y seis ceros de textura, las matrices de masa y mezcla de los neutrinos en el MDDH tipo III. En el capítulo 5 presentamos los resultados obtenidos. En el capítulo 6 se muestran las conclusiones de los resultados.

# Capítulo 1

## Modelo Estándar

El sector electrodébil del Modelo Estándar (ME) fue propuesto con gran éxito por Glashow, Weinberg y Salam. En su modelo parten del supuesto de que dicho sector está inmerso en un grupo de simetría,  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , y usando el mecanismo de Higgs es posible explicar el origen de las masas de las partículas. Una consecuencia es que los neutrinos son partículas no masivas debido a que en el lagrangiano no existe un término masivo [19]. Esto es debido a que experimentalmente sólo se han observado neutrinos de una quiralidad bien definida, izquierda, y es necesario tener a los neutrinos de quiralidad derecha para poder identificar el término masivo. Sin embargo, las recientes observaciones de las oscilaciones de neutrinos requieren que estas partículas tengan una masa diferente de cero [19].

### 1.1. Modelo Estándar

El Modelo Estándar es una teoría de norma basada en el grupo de simetrías locales

$$G_{ME} = SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y, \quad (1.1)$$

que describe las interacciones fuerte, débil y electromagnética (con excepción de la gravedad) hasta las escalas que han sido exploradas, desde el radio de Hubble ( $10^{30}$  cm) hasta escalas del orden de  $10^{-16}$  cm mediante el intercambio de los correspondientes campos de espín 1 (bosones de norma): 8 gluones sin masa ( $g_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$ ) y 1 fotón ( $\gamma$ ) sin masa para las interacciones fuertes y electromagnéticas, respectivamente y 3 bosones masivos ( $W^\pm$  y  $Z^0$ ) para la interacción débil. El ME es una teoría no lineal <sup>1</sup> y contiene 19 parámetros libres:

- las constantes de acoplamiento de los grupos de norma,  $g_1$ ,  $g_2$  y  $g_3$ ,
- las masas de los bosones,  $m_W$ ,  $m_H$ ,  $m_Z$ ,
- las masas de los leptones,  $m_e$ ,  $m_\mu$ ,  $m_\tau$ ,
- la masa de los quarks,  $m_u$ ,  $m_d$ ,  $m_s$ ,  $m_c$ ,  $m_b$ ,  $m_t$ ,
- los parámetros de la matriz de Cabbibo-Kobayashi-Maskawa, [1].

De acuerdo con el Modelo Estándar, los *fermiones*, *leptones* y *quarks*, son partículas elementales, representaciones irreducibles del grupo de simetría de norma  $G_{ME}$ , es decir, no poseen estructura interna. Las partículas que tienen estructura interna se llaman *hadrones*, que están constituidas por quarks: *bariones* cuando están formadas por tres quarks o tres antiquarks, o *mesones* cuando están constituidas por un quark y un *antiquark*.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Toda teoría de campos de norma no abeliana es no lineal [20].

<sup>2</sup>Antiquark es la antipartícula del quark:  $q, \bar{q}$  [20]

El contenido de materia fermiónica consiste en tres familias de quarks y tres familias de leptones, clasificados en tres generaciones (sabores o familias), las cuales describimos a continuación:

- *Leptones*<sup>3</sup>:
  - Tipo up: neutrino del electrón ( $\nu_e$ ), neutrino del muón ( $\nu_\mu$ ) y neutrino del tau ( $\nu_\tau$ ), con carga eléctrica 0.
  - Tipo down: electrón ( $e^-$ ), muón ( $\mu^-$ ) y tau ( $\tau^-$ ), con carga eléctrica -1.
- *Quarks*: aparecen en tres posibles estados de *color* (convencionalmente rojo, verde y azul), por tanto, hay 18 quarks.
  - Tipo up: los quarks up ( $u$ ), charm ( $c$ ), top ( $t$ ), con carga eléctrica 2/3.
  - Tipo down: estos son los quarks down ( $d$ ), strange ( $s$ ), bottom ( $b$ ), con carga eléctrica -1/3.

Una característica peculiar de los quarks es que tienen carga eléctrica fraccionaria,  $(+2/3)e$  y  $(-1/3)e$ . Sin embargo, no se han detectado quarks libres, están siempre confinados formando hadrones, de tal modo que la suma algebraica de las cargas de los quarks que constituyen un determinado hadrón es siempre un múltiplo entero de  $e$  [20].

Los estados de helicidad son estados cuánticos característicos de las partículas fermiónicas, y a ellos se asocian los operadores de proyección  $P_L$  y  $P_R$ , dados por

$$P_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma^5) \quad (1.2)$$

donde  $\gamma^5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ , y  $\gamma_k$  son las matrices de Dirac. Estos operadores son hermíticos y proyectan espinores a estados de helicidad izquierda ( $P_L$ ) y derecha ( $P_R$ ). Un rasgo interesante de la interacción débil es su capacidad para distinguir la helicidad de los leptones y los quarks, pues los acoplamientos de los bosones de norma débiles a tales estados se llevan a cabo con distinta helicidad.

A cada partícula le corresponde una antipartícula<sup>4</sup>, existirían en total 12 leptones y 36 quarks. Cada familia está formada por dos partículas de espín 1/2,  $f$  y  $f'$ , con cargas eléctricas  $Q_f = Q_{f'} + 1$  en unidades de la carga del protón, y sus correspondientes antipartículas. En el Modelo Estándar los neutrinos tienen masas iguales a cero, por esa razón no tienen una componente de quiralidad derecha.

El Modelo Estándar es una teoría que identifica las partículas básicas y especifica cómo estas interactúan. En la naturaleza hay cuatro tipos de interacciones fundamentales: *gravitacional*, *electromagnética*, *fuerte*<sup>5</sup> y *débil*. Cada una de ellas es debida a una propiedad fundamental de la materia: *masa* (interacción gravitacional), *carga eléctrica* (interacción electromagnética), *color* (interacción fuerte) y *carga débil* (interacción débil). Así, hay también cuatro fuerzas fundamentales en la naturaleza: *fuerza gravitacional*, *fuerza electromagnética*, *fuerza nuclear fuerte* (*fuerza de color*<sup>6</sup>) y *fuerza nuclear débil*.

Las partículas mediadoras de fuerza descritas por el ME también tienen espín (al igual que las partículas de materia), pero en su caso, el valor del espín es 1, significando que todas las partículas mediadoras de fuerza son bosones. Consecuentemente, no siguen el principio de exclusión de Pauli. Los diversos tipos de partículas mediadoras de fuerza son:

---

<sup>3</sup>Siguen el principio de exclusión de Pauli de acuerdo con el teorema de la estadística del espín (estadística de Fermi) [21].

<sup>4</sup>De modo general, una antipartícula tiene la misma masa y el mismo espín que la partícula en cuestión, pero carga opuesta.

<sup>5</sup>La interacción fuerte puede ser dividida en *fundamental* y *residual*. La interacción fundamental es la propia interacción fuerte, la residual deriva de balances imperfectos de las atracciones y repulsiones entre los quarks que constituyen los hadrones [20].

<sup>6</sup>Así como la interacción fuerte puede ser distinguida entre *fundamental* y *residual*, la fuerza de color puede ser diferenciada en *fuerza color fuerte* y *fuerza color residual*, es decir, a cada interacción corresponde una fuerza, entonces, si la interacción fuerte puede ser interpretada como fundamental o residual, correspondientemente, se puede hablar de fuerza color fuerte y fuerza color residual.

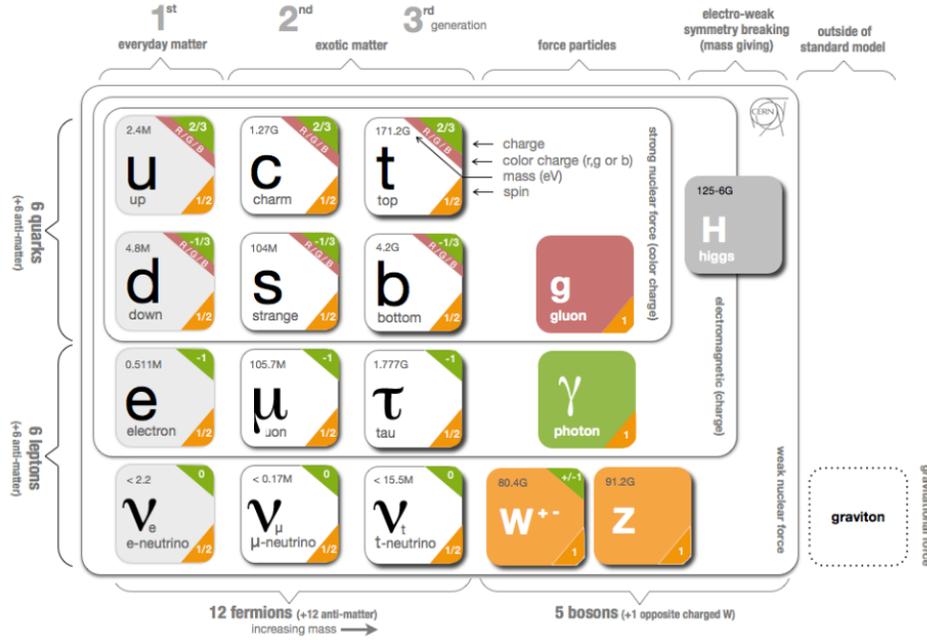


Figura 1.1: Modelo Estándar de las partículas elementales.

- 8 gluones  $g_\alpha$  que son los bosones de norma del grupo de color  $SU(3)_C$ .
- 4 bosones de norma  $W^\pm$ ,  $Z$  y  $\gamma$  que son las partículas portadoras de las interacciones electrodébiles  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ .

Las principales propiedades físicas de estos bosones de norma son: los gluones  $g_\alpha$  no tienen masa, son eléctricamente neutros, pero tienen carga de color. Como consecuencia de esto los gluones no solamente interactúan con los quarks sino también consigo mismos, es decir, son autointeractuantes. Los bosones  $W^\pm$  y  $Z$  son partículas masivas y también interactúan entre sí. El bosón  $Z$  es eléctricamente neutro, mientras que los bosones  $W^\pm$  tienen carga eléctrica de  $Q_{em} = \pm 1$ , respectivamente, finalmente el fotón  $\gamma$  es eléctricamente neutro y no es autointeractuante.

El conjunto de campos de norma del grupo  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  se divide en tres subgrupos:

1. Para  $SU(3)_C$  se le asocian ocho campos gluónicos  $G_\mu^a$ .
2. Para  $SU(2)_L$ <sup>7</sup> se le asocian tres campos electrodébiles  $W_\mu^i$ .
3. Para  $U(1)_Y$  se le asocia uno, el campo de hipercarga  $B_\mu$ .

Los campos se agrupan en multipletes (representaciones irreducibles) bajo las transformaciones de grupo (Tabla 1.1). Los quarks son triplete y los leptones son singletes bajo el grupo  $SU(3)_C$  de color. Bajo el grupo  $SU(2)_L$  las componentes levóricas (*left*) se transforman de manera diferente que las dextróginas (*right*): los campos izquierdos son dobletes y los derechos son singletes de isospín débil  $T$ . En índice  $Y$  se refiere a la hipercarga. La carga eléctrica, el isospín y la hipercarga de los campos están relacionados mediante  $Q = T_3 + Y$ . Las tres familias de quarks y leptones tienen las mismas propiedades (interacciones de norma), solo difieren en las masas

<sup>7</sup>Este es un grupo isomórfico a los cuaterniones de valor absoluto 1 y difeomórfico a una 3-esfera.

y en el número cuántico de *sabor* de sus campos.

Multipletes	$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$	I	II	III
Quarks	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6})$	$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$
	$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \frac{2}{3})$	$u_R$	$c_R$	$t_R$
	$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, -\frac{1}{3})$	$d_R$	$s_R$	$b_R$
Leptones	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$	$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$
	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1)$	$e_R$	$\mu_R$	$\tau_R$
	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)$	$\nu_{eR}$	$\nu_{\mu R}$	$\nu_{\tau R}$

Tabla 1.1: Multipletes de campos del ME.

Las generaciones de fermiones se denotan por  $\psi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , donde  $i$  es el índice de familia o sabor. Las familias se enumeran en orden jerárquico de acuerdo a la magnitud de su masa.

1. Entonces la primera familia está formada por los fermiones más ligeros:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

2. Segunda familia

$$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

3. Tercera familia

$$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

Los términos dentro de los paréntesis indican las propiedades de transformación para cada fermión bajo la acción de los grupos  $SU(3)_C$ ,  $SU(2)_L$  y  $U(1)_Y$ , respectivamente. Los fermiones derechos e izquierdos, en el contexto del Modelo Estándar, tienen distintas propiedades de transformación bajo la acción del grupo de norma  $G_{ME}$ , bajo la acción del grupo  $SU(2)_L$  los campos izquierdos y derechos se transforman como dobletes y singletes respectivamente. Los dobletes de  $SU(2)_L$  se representan como:

$$Q_{Li} = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{Li} \quad y \quad l_{Li} = \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_{Li} \tag{1.6}$$

y los singletes como

$$u_{Ri}, \quad d_{Ri} \quad y \quad l_{Ri}. \tag{1.7}$$

Los subíndices  $R$  y  $L$  denotan los eigenestados de quiralidad derecha e izquierda respectivamente, e  $i$  es el índice de familia o sabor. En el Modelo Estándar los neutrinos tienen masa igual a cero, por esa razón no tienen

una componente de quiralidad derecha. Los llamados neutrinos activos son aquellos que tienen interacciones débiles, por lo tanto residen en los dobletes leptónicos mientras que los neutrinos estériles son aquellos neutrinos que no tienen interacciones electrodébiles ni fuerte, sino solamente interacciones gravitacionales. Sus cargas o números cuánticos con respecto al grupo de norma del Modelo Estándar  $G_{ME}$  son  $(1, 1, 0)$ , es decir, los neutrinos estériles son singletes del grupo de norma del Modelo Estándar.

En física de partículas el concepto de simetría, es decir la invariabilidad de algo bajo una operación, es muy importante por el papel protagónico que juega en la descripción de las cuatro fuerzas fundamentales (de gravedad, electromagnética, débil y fuerte). Decimos que hay una simetría  $G$  cuando un sistema físico se mantiene invariante bajo la transformación dada por  $G$ , o equivalentemente cuando la Lagrangiana del sistema es invariante. A veces dicho conjunto  $G$  de simetrías independientes de un sistema genera una estructura algebraica de grupo, en tal caso se dice que hay un grupo de simetría; que veremos a continuación en la siguiente sección.

## 1.2. Grupos de simetrías en la física de partículas

Una simetría  $S$  existe en un sistema físico cuando este sistema es invariante bajo una transformación dada por  $S$ , esto es cuando el hamiltoniano del sistema es invariante, es decir:

$$SHS^\dagger = H \tag{1.8}$$

El conjunto de simetrías independientes de un sistema genera la estructura algebraica de un grupo, en este caso se dice que hay un grupo de simetría. Podemos clasificar las simetrías <sup>8</sup> de acuerdo al tipo de parámetros de transformaciones en simetrías discretas y continuas. Describimos a continuación estas simetrías.

- **SIMETRÍAS DISCRETAS:** Los parámetros toman valores discretos, las transformaciones discretas más relevantes en la física de partículas son la paridad ( $P$ ) <sup>9</sup>, la conjugación de la carga ( $C$ ) y la reversión temporal ( $T$ ). En general, la transformación dada por cualquier combinación de  $C$ ,  $P$  y  $T$  representa una simetría absoluta de la naturaleza. Se sabe que las interacciones electromagnéticas y las interacciones fuertes violan las simetrías  $P$ ,  $C$  y  $T$  separadamente; y las interacciones débiles pueden violar  $P$ ,  $C$  y  $PC$  [21, 22].
- **SIMETRÍAS CONTINUAS:** Los parámetros toman valores continuos, como por ejemplo:
  - *Simetrías Espacio-Temporales o simetrías externas*, son descritas por grupos tales como el grupo de Lorentz y el grupo de Poincaré; la traslación y rotación espaciales son los ejemplos más comunes de lo que es una simetría espacio-temporal. Estas transformaciones son consideradas como *transformaciones continuas*, ya que una transformación de este tipo puede realizarse a través de una serie de operaciones infinitesimales.
  - *Simetrías Internas*, las cuales actúan sobre los números cuánticos internos como: la simetría de isospín  $SU(2)_L$  o la simetría bariónica  $U(1)_B$  pertenecientes a grupos de Lie.

Hay dos tipos distintos de simetrías internas:

- *Simetrías globales:* los parámetros continuos de la transformación *no dependen de las coordenadas espacio-temporales* como por ejemplo la simetría de isospín  $SU(2)$ , la simetría de sabor  $SU(3)$ , la simetría bariónica  $U(1)_B$ .
- *Simetrías locales:* los parámetros continuos de la transformación *dependen de las coordenadas espacio temporales* como por ejemplo la simetría electromagnética  $U(1)_{EM}$ <sup>10</sup>, la simetría de hipercarga débil  $U(1)_Y$ , la simetría de isospín débil  $SU(2)_L$  y la simetría de color  $SU(3)_C$ .

---

<sup>8</sup>Cada transformación de simetría tiene sus propias representaciones irreducibles [21].

<sup>9</sup>Esta simetría es una transformación del grupo de simetría  $Z_2$  el cual contiene dos elementos [21].

<sup>10</sup>Objeto de estudio de la electrodinámica cuántica (QED) [1, 23].

### 1.3. Rompimiento Espontáneo de la Simetría

En el sector electrodébil del Modelo Estándar se tiene que los bosones intermediarios de las fuerzas son partículas masivas, lo cual tiene como consecuencia inmediata que el estado de vacío no sea invariante bajo el grupo de norma electrodébil  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , es decir, el hecho de que los bosones  $W^\pm$  y  $Z^0$  adquieran masa induce un rompimiento de la simetría de norma electrodébil, y así la teoría deja de ser renormalizable. Este problema se soluciona al introducir el sector de Higgs en el Modelo estándar. La lagrangiana correspondiente al sector de Higgs induce un rompimiento espontáneo de la simetría de norma electrodébil.

El fenómeno de rompimiento espontáneo de la simetría, en teoría cuántica de campos, se ve a partir del potencial de Higgs ec.(1.25); se induce la ruptura espontánea de simetría si el mínimo del potencial se obtiene para valores de  $\phi$  para estados del vacío no nulos. Buscamos el mínimo valor del campo denotado por  $\phi_0$  por lo que:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \phi} \right|_{\phi_0} = -\mu^2 \phi_0 + \lambda \phi_0^3 = \phi_0(-\mu^2 + \lambda \phi_0^2) = 0. \quad (1.9)$$

Para encontrar el estado de vacío es necesario minimizar el potencial  $V(\phi)$ , así tenemos dos casos:

1. Si  $-\mu^2 > 0$  ( $m^2 > 0$ ) esto es para partículas cuyas masas son reales, entonces:

$$-\mu^2 + \lambda \phi_0^2 > 0 \quad y \quad \phi_0 = 0. \quad (1.10)$$

2. Si  $-\mu^2 < 0$  ( $m^2 < 0$ ), esto es; las masas son imaginarias<sup>11</sup>, entonces:

$$-\mu^2 + \lambda \phi_0^2 = 0 \implies \phi_0 = \pm \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \equiv \pm v. \quad (1.11)$$

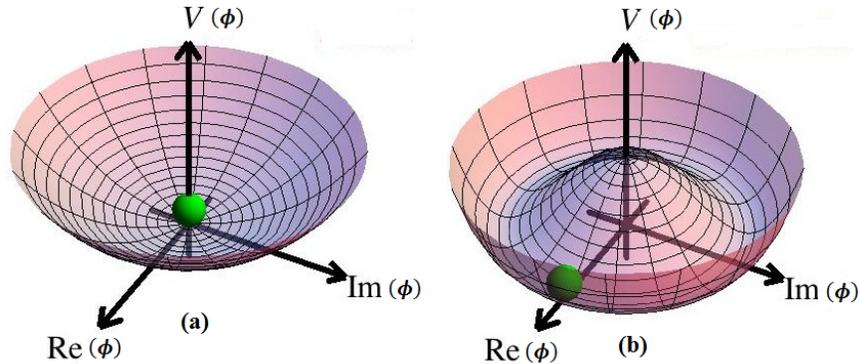


Figura 1.2: Potencial de Higgs para masas reales (a)  $-\mu^2 > 0$  e imaginarias (b)  $-\mu^2 < 0$ .

Notemos que el primer caso nos dice que el valor de espectación del vacío (VEV) para el campo de Higgs es 0, lo que intuitivamente nos dice la mecánica elemental, el segundo nos da un VEV distinto de cero que depende de los parámetros  $\mu$  y  $\lambda$ .

Aquí  $\phi$  es el campo de Higgs el cual tiene unidades de energía (GeV's) y dependiendo el número de campos que intervienen en el rompimiento espontáneo de la simetría es el modelo a utilizar.

Algunos modelos para el mecanismo de Higgs son:

<sup>11</sup>Las masas pertenecen a un espacio complejo distinto al real.

- **El Modelo Sigma Lineal.** Aquí se hace una generalización a  $n$  campos reales escalares de Higgs.
- **El 1HDM** Conocido como Modelo de un doblete de Higgs, en el cual se introduce un doblete de  $SU(2)$  con 2 campos escalares complejos de Higgs.
- **El THDM o 2HDM** Conocido como el modelo de dos dobletes de Higgs, donde se introducen dos dobletes de  $SU(2)$  con 2 campos escalares complejos cada uno, y el cual es el modelo en que nos basamos.
- **Modelos NHDM** Estos modelos son generalizaciones a  $N$  dobletes de Higgs.

## 1.4. Lagrangiana del Modelo Estándar

La Lagrangiana completa del Modelo Estándar, denotada por  $L_{ME}$ , es la Lagrangiana renormalizable más general consistente con el grupo de simetría de norma  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ . Dicha Lagrangiana  $L_{ME}$  está compuesta de cuatro diferente partes y se construye como la siguiente suma:

$$\mathcal{L}_{ME} = \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_Y + \mathcal{L}_H. \quad (1.12)$$

- El primer término es la **lagrangiana de Yang-Mills**.<sup>12</sup>

Tiene la propiedad de ser invariante bajo una transformación de norma local, describe a los grupos de norma del modelo estándar,  $SU(3)$  para el color,  $SU(2)$  para el isoespín y  $U(1)$  para la hipercarga.

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} \sum_{A=1}^8 G_{\mu\nu}^A G_a^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \sum_{a=1}^3 W_{\mu\nu}^a W_a^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu}^a B_a^{\mu\nu} \quad (1.13)$$

Los campos de fuerza de color están dados por

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_3 f^{ijk} G_\mu^i G_\nu^k \quad i, j, k = 1, \dots, 8 \quad (1.14)$$

$G_{\mu\nu}^a$  son los tensores de norma antisimétricos contruidos a partir de los ocho campos  $G_\mu^a(X)$  de los gluones, correspondientes a los ocho generadores de  $SU(3)$ ,  $f^{ijk}$  las constantes de estructura del grupo  $SU(3)$  y  $g_3$  la constante de acoplamiento al color. Los campos de fuerza de isoespín,

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g_2 \epsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (1.15)$$

con  $W_{\mu\nu}^a$  los tensores de norma antisimétricos contruidos a partir de los campos de norma  $W_\mu^a(X)$  correspondientes a los tres generadores de  $SU(2)$ ,  $\epsilon^{ijk}$  es la constante de estructura del grupo  $SU(2)$  que coincide con el tensor de Levi-Civita y  $g_2$  la constante de acoplamiento del grupo de isoespín. Finalmente, el campo de fuerza de hipercarga es

$$B_{\mu\nu}^a = \partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a \quad (1.16)$$

$B_{\mu\nu}^a$  son los tensores de norma antisimétricos contruidos a partir de los campos de norma  $B_\mu(X)$  asociados a  $U(1)$ .

- La segunda parte es la **lagrangiana fermiónica**.

---

<sup>12</sup>Una teoría que sea simultáneamente no-Abeliana y localmente invariante es conocida como una teoría de Yang-Mills [24]

Describe los campos fermiónicos y sus interacciones de norma. Los fermiones del modelo estándar pueden ser divididos en dos categorías: los quarks, que son tripletes bajo el grupo de norma de color y los leptones que no tienen color. Dentro de éstas categorías algunos se transforman como dobles de  $SU(2)$  y otros como singletes (en la representación de dos componentes de Weyl), donde  $\psi_L$  son los fermiones dobles izquierdos de  $SU(2)_L$ , estos son:

$$l_{Li} = \begin{pmatrix} \nu \\ l \end{pmatrix}_{Li}, \text{ con los } l \text{ los leptones } (e^-, \mu^-, \tau^-),$$

$$Q_{Li} = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{Li}, \text{ con } u \text{ los quarks tipo up } (u, c, t) \text{ y } d \text{ los quarks tipo down } (d, s, b).$$

$\psi_R$  son los correspondientes singletes derechos de  $SU(2)_L$ , estos son:

$$l_{Ri} = (e^-, \mu^-, \tau^-), \text{ singletes derechos de leptones,}$$

$$u_{Ri} = (u_R, c_R, t_R) \text{ y } d_{Ri} = (d_R, s_R, b_R), \text{ son los singletes derechos up y down del sector de quarks.}$$

El índice  $i$ , corre sobre las tres familias de fermiones quirales.

La lagrangiana fermiónica para todo campo fermiónico  $\psi$  esta dado de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}_F(\psi) = \sum_{\substack{\psi = l, q \\ k = L, R}} \bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi_k. \quad (1.17)$$

Con el fin de mantener la invariancia de norma de los términos cinéticos, bajo la acción del grupo de simetría de norma  $G_{ME}$ , la derivada covariante debe tener la forma:

$$D_\mu = \partial_\mu - i g_3 \frac{\lambda^a}{2} G_\mu^a - i g_2 \frac{\tau^i}{2} W_\mu^i - i g_1 \frac{Y}{2} B_\mu, \quad (1.18)$$

donde  $i = 1, 2, 3$  y  $a = 1, \dots, 8$ . Aquí  $G_\mu^a$  son los ocho campos de gluones,  $W_\mu^i$  son los tres bosones intermediarios de las interacciones débiles y  $B_\mu$  es el bosón de la hipercarga. Las matrices de Gell-Mann  $\lambda^a$  son los generadores del grupo de  $SU(3)_C$  de las interacciones fuertes, las matrices de Pauli  $\tau^i$  son los generadores de grupo  $SU(2)_L$  de las interacciones débiles; finalmente  $Y$  es el generador de carga del grupo  $U(1)_Y$ . Los constantes de acoplamiento son:  $g_1 = 2\sqrt{\alpha_1\pi} = \frac{e}{\cos\theta_w}$ ,  $g_2 = 2\sqrt{\alpha_2\pi} = 2^{5/4}M_W\sqrt{G_F}$ ,  $g_3 = g_s = 2\sqrt{\alpha_3\pi} \approx 2\sqrt{0.1\pi}$ .

- El tercer término es la **lagrangiana de Yukawa**.

Esta lagrangiana da las masas a los fermiones cuando los dobles de Higgs adquieren valor de expectación en el vacío (VEV). Como los neutrinos no tienen helicidad derecha, no tienen representación física en el sector de Yukawa [21]. La lagrangiana que describe la interacción de los bosones de Higgs y los fermiones está definida como:

$$\mathcal{L}_Y = -Y_{ij}^u \bar{\psi}_L^i \phi^c \psi_R^j - Y_{ij}^d \bar{\psi}_L^i \phi \psi_R^j + h.c., \quad (1.19)$$

donde  $\phi^c$  se transforma covariantemente bajo  $SU_L(2)$ , definido como:

$$\phi^c = i\tau_2 \phi^* = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

el isodoblete  $\phi^c$  a veces denotado  $\tilde{\phi}$  tiene hipercarga  $Y = 1$ ,  $\tau_2$  es la segunda matriz de Pauli,  $\phi^*$  el complejo conjugado del campo de Higgs.

Las matrices de Yukawa,  $Y_{ij}^u, Y_{ij}^d$ , son parámetros libres que definen los vértices y consecuentemente las reglas de Feynman de la lagrangiana, donde  $i, j$  son los índices de la familia. Esta lagrangiana es una cantidad invariante bajo el grupo de simetría  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , entonces la lagrangiana de Yukawa se puede escribir como:

$$\mathcal{L}_Y = -Y_{ij}^u \bar{Q}_L^i \phi^c u_R^j - Y_{ij}^d \bar{Q}_L^i \phi d_R^j - Y_{ij}^u \bar{l}_L^i \phi^c l_R^j - Y_{ij}^d \bar{l}_L^i \phi l_R^j + Lh.c., \quad (1.21)$$

denota la lagrangiana de Yukawa para los leptones y la lagrangiana de Yukawa para los quarks, los campos de Higgs pueden ser tantos como el modelo del mecanismo de Higgs lo permita, como por ejemplo para el MDDH se toman los dos dobletes de  $SU(2)$ . Por lo que podemos escribir la lagrangiana de Yukawa en la forma más general dada por:

$$\mathcal{L}_Y = - \sum_{a,k} Y_a^k \bar{\psi}_L^k \phi_a^r \psi_R^k + h.c., \quad (1.22)$$

donde  $k = l, u, d$  indica el tipo de fermión,  $a = 1, 2, 3, \dots, n$  donde  $n$  indica el número de campos de Higgs del modelo (para el MDDH  $n = 2$ ) y  $r$  indica que es el isodoblete del campo de Higgs  $\phi^c$  o el campo de Higgs  $\phi$  si los fermiones son del tipo up o down respectivamente.

- La última parte es la **lagrangiana de Higgs**.

El bosón de Higgs es una partícula prevista en 1964 por Peter Higgs<sup>13</sup>. En la interacción electrodébil existía una contradicción muy seria referente a las partículas  $W^+, W^-,$  y  $Z^0$ . El corto alcance de sus interacciones exigía masas relativamente elevadas. Sin embargo, la simetría de ésta teoría requiere que las masas sean nulas. Esta paradoja se supera si las masas de  $W^+, W^-,$  y  $Z^0$ , son proporcionadas por otras partículas que son los bosones de Higgs, mediante el llamado mecanismo de Higgs, el cual afirma que las partículas  $W$  y  $Z$  interactúan constantemente con campo de bosones de Higgs, lo que le proporciona masa. El mecanismo está considerado como el origen de las masas de todas las partículas elementales. Tanto las partículas  $W$  y  $Z$ , como el fotón son bosones sin masa propia. Los primeros muestran una enorme masa porque interactúan fuertemente con el campo de Higgs y el fotón no muestra ninguna masa porque no interactúa en absoluto con el campo de Higgs. El bosón de Higgs tiene espín cero, no posee carga eléctrica ni carga de color, por lo que no interacciona con el fotón ni con los gluones. Sin embargo, interacciona con todas las partículas del modelo que poseen masa: los quarks, los leptones cargados y los bosones  $W^+, W^-$  y  $Z^0$ .

La descripción de partículas libres bosónicas está descrita por la ecuación Klein-Gordon, que se obtiene del lagrangiano:

$$\mathcal{L}_{KG} = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi). \quad (1.23)$$

Introduciendo la derivada covariante  $D_\mu = \partial_\mu + ig_2 \frac{\tau^i}{2} W_\mu^i + ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu$  y el potencial  $V(\phi^\dagger \phi)$ , obtenemos el lagrangiano que contiene las interacciones del bosón de Higgs con los bosones de norma y los auto-acoplamientos de Higgs:

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi^\dagger \phi). \quad (1.24)$$

El potencial del campo de Higgs es invariante bajo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  y  $SU(3)_C$ , renormalizable<sup>14</sup> y contiene términos cuárticos en  $\phi$ :

$$V(\phi) = -\mu^2 (\phi^\dagger \phi) + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2, \quad (1.25)$$

---

<sup>13</sup>P. W. Higgs, Broken symmetries, massless particles and gauge fields.

<sup>14</sup>Esto es sin términos de la forma  $\phi^{2n}$  con  $n > 2$  lo cual no permite divergencias [25]

$\mu$  es un parámetro con unidades de masa y  $\lambda$  es el parámetro o constante de acoplamiento adimensional<sup>15</sup> tomado positivo para asegurar que  $V(\phi)$  esté acotado inferiormente, estos deben ser elegidos para que el potencial sea mínimo para un campo de Higgs no nulo.

A pesar de que el Modelo Estándar ha tenido mucho éxito describiendo la fenomenología de partículas elementales y no hay razón fundamental para asumir que el sector de Higgs debe de ser mínimo (con un solo doblete de Higgs). Consideremos la siguiente extensión más simple compatible con la invarianza de norma que es el Modelo de Dos Dobletes de Higgs (MDDH), que consiste en adicionar un segundo doblete de Higgs, con los mismos números cuánticos que el primero.

Motivaciones para introducir el segundo doblete de Higgs:

- Permite inducir violación implícita de conjugación de carga y paridad (ECPV).
- Aparece nueva fenomenología (aparecen bosones de Higgs cargados, FCNC).
- Viene de la jerarquía del acoplamiento de Yukawa en la tercera generación de quarks, la razón entre la masa de los quarks *top* y *bottom* es del orden de aproximadamente 37. En el Modelo Estándar, la masa de ambos quarks viene del mismo doblete de Higgs, consecuentemente, esto implica una jerarquía no natural entre sus correspondientes acoplamientos de Yukawa. Sin embargo, si el quark *bottom* recibe su masa de un doblete  $\phi_1$  y el quark *top* de otro doblete  $\phi_2$ , entonces la jerarquía de sus acoplamientos de Yukawa puede ser más natural si los parámetros libres de la teoría adquieren los valores apropiados.
- Algunos modelos tienen límites a bajas energías con un sector de Higgs no mínimo. Dos dobletes de Higgs son necesarios en un modelo supersimétrico y el llamado MDDH tipo II, tiene el mismo acoplamiento de Yukawa con el modelo mínimo estándar supersimétrico (MSSM). En particular si las partículas supersimétricas son suficientemente pesadas, el sector de Higgs del MSSM se vuelve un MDDH tipo II a bajas energías. El modelo supersimétrico, SUSY, con dos dobletes de Higgs puede proveer soluciones para algunos problemas del Modelo Estándar, como la masa de Higgs a muy altas escalas; la jerarquía de la escala de Planck y la electrodébil; la jerarquía de la masa en la familia fermiónica, la existencia de masa de neutrinos y oscilación de neutrinos.

---

<sup>15</sup>Por lo que la teoría es renormalizable, esto es; solo un número finito de amplitudes divergen [21].

## Capítulo 2

# Modelo de Dos Dobletes de Higgs Tipo III

Los modelos se clasifican en tres tipos de acuerdo a la elección de los acoplamientos, bosones de Higgs-fermiones de la siguiente forma:

1. Para el **MDDH-I** se considera que solo un doblete de Higgs genera las masas de todos los tipos de fermiones, tal como en el ME.
2. Para el **MDDH-II** cada doblete se acopla a un solo tipo de quarks por lo que FCNC no aparecen a nivel árbol. Este modelo es atractivo por que corresponde al sector de Higgs del Modelo Estándar Mínimo Supersimétrico (MSSM por siglas en inglés).
3. Para el **MDDH-III** uno considera todos los posibles acoplamientos entre los dobletes de Higgs y los fermiones en el sector de Yukawa así que podemos tener FCNC.

### 2.1. El Modelo de 1 doblete de Higgs (1HDM)

El modelo de un doblete de Higgs consiste de un campo  $\phi$  asignado a un doblete de  $SU(2)_L$ , con hipercarga asociada  $Y = 1$  de la forma :

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

donde  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$  son campos escalares reales. Así el potencial de Higgs dado en la ec.(1.25) es invariante bajo la transformación de norma:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}}{2}} \phi(x), \quad (2.2)$$

donde  $\vec{\tau}$  está formado por las matrices de Pauli y  $\vec{\alpha}$  es una función espacio-temporal. El mínimo del potencial de Higgs,  $V(\phi)$  para  $-\mu^2$ , es:

$$\langle 0 | \phi^\dagger \phi | 0 \rangle = \langle \phi^\dagger \phi \rangle_0 = \frac{v^2}{\sqrt{2}}, \quad \text{con } v \equiv \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \quad (2.3)$$

En función de los campos reales el término  $\phi^\dagger \phi$  tiene la forma:

$$\phi^\dagger \phi = \frac{1}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2) = \frac{v^2}{\sqrt{2}}. \quad (2.4)$$

Existe un número infinito de estados posibles de vacío, los cuales corresponden al número infinito de valores para los campos reales que satisfacen la relación dada en la ec.(2.3).

Al elegir una dirección particular en el espacio de isoespín,  $\phi_3 = v$ ,  $\phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = 0$ , el valor de expectación en el vacío de  $\phi$  toma la forma:

$$\langle \phi \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

se induce el rompimiento espontáneo de la simetría de norma, según el esquema

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}. \quad (2.6)$$

El potencial de Higgs del MDDH consiste en una generalización del modelo del potencial de Higgs con un doblete, aquí se introducen dos dobletes  $\phi_1, \phi_2$  de  $SU(2)_Y$ , con hipercarga  $Y = \pm 1$ .

Para este caso tendremos 8 campos escalares, 6 bosones de norma sin masa, el cual nos da un total de 14 grados de libertad, después de que opere el mecanismo de Higgs en los 8 campos escalares obtendremos 3 bosones de Goldstones ( $G^+, G^-, G^0$ ) y 5 campos reales, esto es; 5 campos de Higgs con espín cero ( $H^+, H^-, H^0, h^0, A^0$ ), donde dos son cargados y tres son neutros, además; ( $H^0, h^0$ ) son CP pares y ( $A^0$ ) es CP impar.

## 2.2. Potencial de Higgs en el MDDH

Introduzcamos un nuevo doblete de Higgs que es la réplica del primero, el sector de Higgs incluye dos dobletes de Higgs con el mismo número cuántico

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \phi_1^0 \end{pmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} \phi_2^+ \\ \phi_2^0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

con hipercarga  $Y = 1$ , después del rompimiento espontáneo de la simetría electrodébil, ambos dobletes pueden adquirir un Valor Esperado en el Vacío (VEV) de [18]:

$$\langle \phi_1 \rangle = \frac{v_1}{\sqrt{2}}, \quad \langle \phi_2 \rangle = \frac{v_2}{\sqrt{2}} e^{i\theta} \quad (2.8)$$

donde  $v_1$  y  $v_2$  son reales; es más conveniente parametrizar el doblete de la siguiente forma

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \frac{v_1 + \phi_1 + i\chi_1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} \phi_2^+ \\ \frac{v_2 e^{i\xi} + \phi_2 + i\chi_2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

El potencial de Higgs renormalizable para el modelo de dos dobletes complejos, compatible con invarianza de norma, es escrito introduciendo una base de operadores invariantes de norma hermitianos dados por:

$$\hat{A} = \phi_1^\dagger \phi_1, \quad (2.10)$$

$$\hat{B} = \phi_2^\dagger \phi_2, \quad (2.11)$$

$$\hat{C} = \frac{1}{2} (\phi_1^\dagger \phi_2 + \phi_2^\dagger \phi_1) = Re(\phi_1^\dagger \phi_2), \quad (2.12)$$

$$\hat{D} = -\frac{i}{2} (\phi_1^\dagger \phi_2 - \phi_2^\dagger \phi_1) = \text{Im}(\phi_1^\dagger \phi_2). \quad (2.13)$$

Podemos escribir el potencial de Higgs escribiendo todas las interacciones posibles bilineales y cuárticas compatibles con invarianza de norma de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} V(\phi_1, \phi_2) = & -\mu_1^2 \hat{A} - \mu_2^2 \hat{B} - \mu_3^2 \hat{C} - \mu_4^2 \hat{D} + \lambda'_1 \hat{A}^2 + \lambda'_2 \hat{B}^2 + \lambda'_3 \hat{C}^2 + \lambda'_4 \hat{D}^2 \\ & + \lambda'_5 \hat{A} \hat{B} + \lambda'_6 \hat{A} \hat{C} + \lambda'_7 \hat{B} \hat{C} + \lambda'_8 \hat{A} \hat{D} + \lambda'_9 \hat{B} \hat{D} + \lambda'_{10} \hat{C} \hat{D}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Donde  $\mu_1^2, \mu_2^2, \mu_3^2, \lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \lambda'_4, \lambda'_5, \lambda'_6, \lambda'_7, \lambda'_8, \lambda'_9, \lambda'_{10}$  son 13 parámetros reales y  $\mu_4^2$  es un parámetro complejo. Usando (2.10),(2.11),(2.12),(2.13) podemos escribir el potencial como:

$$\begin{aligned} V(\phi_1, \phi_2) = & -\mu_1^2 (\phi_1^\dagger \phi_1) - \mu_2^2 (\phi_2^\dagger \phi_2) - \frac{\mu_3^2}{2} (\phi_1^\dagger \phi_2 + \phi_2^\dagger \phi_1) + \frac{\mu_4^2}{2} (\phi_1^\dagger \phi_2 - \phi_2^\dagger \phi_1) \\ & + \lambda'_1 (\phi_1^\dagger \phi_1)^2 + \lambda'_2 (\phi_2^\dagger \phi_2)^2 + \frac{\lambda'_3}{4} (\phi_1^\dagger \phi_2 + \phi_2^\dagger \phi_1)^2 + \frac{\lambda'_4}{4} (\phi_1^\dagger \phi_2 - \phi_2^\dagger \phi_1)^2 \\ & + \lambda'_5 (\phi_1^\dagger \phi_1) (\phi_2^\dagger \phi_2) + \frac{\lambda'_6}{2} (\phi_1^\dagger \phi_1) (\phi_1^\dagger \phi_2 + \phi_2^\dagger \phi_1) + \frac{\lambda'_7}{2} (\phi_2^\dagger \phi_2) (\phi_1^\dagger \phi_2 + \phi_2^\dagger \phi_1) \\ & - \frac{i\lambda'_8}{2} (\phi_1^\dagger \phi_1) (\phi_1^\dagger \phi_2 - \phi_2^\dagger \phi_1) - \frac{i\lambda'_9}{2} (\phi_2^\dagger \phi_2) (\phi_1^\dagger \phi_2 - \phi_2^\dagger \phi_1) \\ & - \frac{i\lambda'_{10}}{2} (\phi_1^\dagger \phi_2 + \phi_2^\dagger \phi_1) (\phi_1^\dagger \phi_2 - \phi_2^\dagger \phi_1). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Expandiendo tenemos:

$$\begin{aligned} V(\phi_1, \phi_2) = & -\mu_1^2 (\phi_1^\dagger \phi_1) - \mu_2^2 (\phi_2^\dagger \phi_2) - \frac{\mu_3^2}{2} (\phi_1^\dagger \phi_2) - \frac{\mu_3^2}{2} (\phi_2^\dagger \phi_1) + \frac{\mu_4^2}{2} (\phi_1^\dagger \phi_2) + \frac{\mu_4^2}{2} (\phi_2^\dagger \phi_1) \\ & + \lambda'_1 (\phi_1^\dagger \phi_1)^2 + \lambda'_2 (\phi_2^\dagger \phi_2)^2 + \frac{\lambda'_3}{4} (\phi_1^\dagger \phi_2)^2 + \frac{\lambda'_3}{2} (\phi_1^\dagger \phi_2) (\phi_2^\dagger \phi_1) + \frac{\lambda'_3}{4} (\phi_2^\dagger \phi_1)^2 \\ & - \frac{\lambda'_4}{4} (\phi_1^\dagger \phi_2)^2 + \frac{\lambda'_4}{2} (\phi_1^\dagger \phi_2) (\phi_2^\dagger \phi_1) - \frac{\lambda'_4}{4} (\phi_2^\dagger \phi_1)^2 + \lambda'_5 (\phi_1^\dagger \phi_1) (\phi_2^\dagger \phi_2) + \frac{\lambda'_6}{2} (\phi_1^\dagger \phi_1) (\phi_1^\dagger \phi_2) \\ & + \frac{\lambda'_6}{2} (\phi_1^\dagger \phi_1) (\phi_2^\dagger \phi_1) + \frac{\lambda'_7}{2} (\phi_2^\dagger \phi_2) (\phi_1^\dagger \phi_2) + \frac{\lambda'_7}{2} (\phi_2^\dagger \phi_2) (\phi_2^\dagger \phi_1) - \frac{i\lambda'_8}{2} (\phi_1^\dagger \phi_1) (\phi_1^\dagger \phi_2) \\ & + \frac{i\lambda'_8}{2} (\phi_1^\dagger \phi_1) (\phi_2^\dagger \phi_1) - \frac{i\lambda'_9}{2} (\phi_2^\dagger \phi_2) (\phi_1^\dagger \phi_2) + \frac{i\lambda'_9}{2} (\phi_2^\dagger \phi_2) (\phi_2^\dagger \phi_1) - \frac{i\lambda'_{10}}{2} (\phi_1^\dagger \phi_2)^2 + \frac{i\lambda'_{10}}{2} (\phi_2^\dagger \phi_1)^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Luego agrupando términos podemos reescribir lo anterior como:

$$\begin{aligned}
 V(\phi_1, \phi_2) = & -\mu_1^2(\phi_1^\dagger\phi_1) - \mu_2^2(\phi_2^\dagger\phi_2) - \left[ \frac{\mu_3^2 - \mu_4^2}{2}(\phi_1^\dagger\phi_2) + \frac{\mu_3^2 + \mu_4^2}{2}(\phi_2^\dagger\phi_1) \right] \\
 & + \lambda'_1(\phi_1^\dagger\phi_1)^2 + \lambda'_2(\phi_2^\dagger\phi_2)^2 + \lambda'_5(\phi_1^\dagger\phi_1)(\phi_2^\dagger\phi_2) + \left[ \frac{\lambda'_3 + \lambda'_4}{2} \right] (\phi_1^\dagger\phi_2)(\phi_2^\dagger\phi_1) \\
 & + \left[ \frac{\lambda'_3 - \lambda'_4}{4} - \frac{i\lambda'_{10}}{2} \right] (\phi_1^\dagger\phi_2)^2 + \left[ \frac{\lambda'_3 - \lambda'_4}{4} + \frac{i\lambda'_{10}}{2} \right] (\phi_2^\dagger\phi_1)^2 \\
 & + \left[ \frac{\lambda'_6 - i\lambda'_8}{2} \right] (\phi_1^\dagger\phi_1)(\phi_1^\dagger\phi_2) + \left[ \frac{\lambda'_6 + i\lambda'_8}{2} \right] (\phi_1^\dagger\phi_1)(\phi_2^\dagger\phi_1) \\
 & + \left[ \frac{\lambda'_7 - i\lambda'_9}{2} \right] (\phi_2^\dagger\phi_2)(\phi_1^\dagger\phi_2) + \left[ \frac{\lambda'_7 + i\lambda'_9}{2} \right] (\phi_2^\dagger\phi_2)(\phi_2^\dagger\phi_1).
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Reparametrizando, esto es tomando los valores que se muestran en la tabla (2.1).

$\mu_1^2 = m_{11}^2$	$\mu_2^2 = m_{22}^2$
$\mu_{12}^2 = \frac{\mu_3^2 - \mu_4^2}{2}$	$(\mu_{12}^2)^* = \frac{\mu_3^2 + \mu_4^2}{2}$
$\lambda'_1 = \frac{\lambda_1}{2}$	$\lambda'_2 = \frac{\lambda_2}{2}$
$\lambda'_5 = \lambda_3$	$\frac{\lambda'_3 + \lambda'_4}{2} = \lambda_4$
$\frac{\lambda'_3 - \lambda'_4}{4} - \frac{i\lambda'_{10}}{2} = \frac{\lambda_5}{2}$	$\frac{\lambda'_3 - \lambda'_4}{4} + \frac{i\lambda'_{10}}{2} = \frac{\lambda_5^*}{2}$
$\frac{\lambda'_6 - i\lambda'_8}{2} = \lambda_6$	$\frac{\lambda'_6 + i\lambda'_8}{2} = \lambda_6^*$
$\frac{\lambda'_7 - i\lambda'_9}{2} = \lambda_7$	$\frac{\lambda'_7 + i\lambda'_9}{2} = \lambda_7^*$

Tabla 2.1: Valores de reparametrización.

El potencial de Higgs más general renormalizable, *i.e.* cuartico, se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 V(\phi_1, \phi_2) = & m_{11}^2 (\phi_1^\dagger\phi_1) + m_{22}^2 (\phi_2^\dagger\phi_2) - \left[ m_{12}^2 (\phi_1^\dagger\phi_2) + h.c. \right] \\
 & + \frac{\lambda_1}{2} (\phi_1^\dagger\phi_1)^2 + \frac{\lambda_2}{2} (\phi_2^\dagger\phi_2)^2 + \lambda_3 (\phi_1^\dagger\phi_1) (\phi_2^\dagger\phi_2) + \lambda_4 (\phi_1^\dagger\phi_2) (\phi_2^\dagger\phi_1) \\
 & + \left\{ \frac{\lambda_5}{2} (\phi_1^\dagger\phi_2)^2 + \left[ \lambda_6 (\phi_1^\dagger\phi_1) + \lambda_7 (\phi_2^\dagger\phi_2) \right] (\phi_1^\dagger\phi_2) + h.c. \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

donde *h.c.* significa el hermítico conjugado. Los parámetros  $m_{11}^2, m_{22}^2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  son reales. En general  $m_{12}^2, (m_{12}^2)^*, \lambda_5, \lambda_5^*, \lambda_6, \lambda_6^*, \lambda_7, \lambda_7^*$  son complejos. Entonces el potencial de Higgs en la ec.(2.18) depende de 6 parámetros reales y 4 parámetros complejos, es decir, un total de 14 grados de libertad. Sin embargo, la libertad para redefinir la base significa que en realidad sólo once grados de libertad son físicos [18].

Este potencial de Higgs tiene las siguientes propiedades:

1. Es renormalizable.
2. Es Hermítico  $V^\dagger = V$ .
3. Permite violación explícita de CP (ECPV), y sólo conserva CP explícitamente (ECPC o CPC), cuando  $m_{12}, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7$  son reales, esto es  $\mu_4, \lambda_8, \lambda_9, \lambda_{10} = 0$ .

**CAPÍTULO 2. MODELO DE DOS DOBLETES DE HIGGS TIPO III**  
**2.2. POTENCIAL DE HIGGS EN EL MDDH**

---

4. Si  $\lambda_6 = \lambda_7 = m_{12}^2 = 0$ , entonces  $V$  es invariante ante transformaciones  $\phi_1 \rightarrow \phi_1, \phi_2 \rightarrow -\phi_2$  ó  $\phi_2 \rightarrow \phi_2, \phi_1 \rightarrow -\phi_1$ , esto es  $V$  es simétrico bajo el grupo  $Z_2$  [26]. Entonces el potencial de Higgs resultante es:

$$V(\phi_1, \phi_2) = m_{11}^2 (\phi_1^\dagger \phi_1) + m_{22}^2 (\phi_2^\dagger \phi_2) + \frac{\lambda_1}{2} (\phi_1^\dagger \phi_1)^2 + \frac{\lambda_2}{2} (\phi_2^\dagger \phi_2)^2 + \lambda_3 (\phi_1^\dagger \phi_1) (\phi_2^\dagger \phi_2) + \lambda_4 (\phi_1^\dagger \phi_2) (\phi_2^\dagger \phi_1) + \left[ \frac{\lambda_5}{2} (\phi_1^\dagger \phi_2)^2 + h.c. \right] \quad (2.19)$$

Para el potencial, las masas y eigenestados de Higgs estan definidos en términos de los parámetros  $\mu_i$  y  $\lambda_i$ , consecuentemente dependen de la elección del potencial. Ahora, consideremos el caso de conservación CP para el VEV, en el caso del sector de Higgs, obtendremos dos escalares de CP par ( $H^0, h^0$ ), un escalar de CP impar ( $A^0$ ), dos bosones de Higgs cargados ( $H^+, H^-$  y los bosones de Goldstone ( $G^+, G^-, G^0$ ) correspondiente a ( $W^+, W^-, Z^0$ ) respectivamente. Los eigenestados de masa son obtenidos de la definición de los eigenestados de norma en (2.9), de las siguientes transformaciones,

$$\begin{pmatrix} G^+ \\ H^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \phi_2^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

$$\begin{pmatrix} H^0 \\ h^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1^+ \\ h_2^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

$$\begin{pmatrix} G^0 \\ A^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1^+ \\ g_2^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

donde:

$$\begin{aligned} (\phi_{1R}, \phi_{1I})^T &\rightarrow \phi_{1R} + i\phi_{1I} \equiv \phi_1^+, & (\phi_{2R}, \phi_{2I})^T &\equiv \phi_2^+, & \sin \beta &= \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, \\ (G_1, G_2)^T &\rightarrow G_1 + iG_2 \equiv G^+, & (H_1, H_2)^T &\equiv H^+, & \cos \beta &= \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, \end{aligned}$$

Las masas de Higgs y el ángulo de mezcla  $\alpha$  son:

$$M_{H^+}^2 = \mu_{22}^2 + \frac{1}{2} \lambda_3 v_1^2, \quad (2.23)$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\lambda_6 v_1^2}{(2\lambda_1 - \lambda_+) v_1^2 + \mu_2^2}, \quad \lambda_+ \equiv \frac{1}{2} (\lambda_3 + \lambda_5), \quad (2.24)$$

$$m_{H^0, h^0}^2 = \left( \lambda_1 + \frac{1}{2} \lambda_+ \right) v_1^2 - \frac{1}{2} \mu_2^2 \pm \sqrt{\left[ \left( \lambda_1 - \frac{1}{2} \lambda_+ \right) v_1^2 + \frac{1}{2} \mu_2^2 \right]^2 + \left( \frac{1}{2} \lambda_6 v_1^2 \right)^2}. \quad (2.25)$$

El primer valor corresponde a un bosón tipo Goldstone neutro y el segundo está asociado con el bosón de Higgs neutro pseudoescalar,

$$M_{G^0} = 0, \quad m_{A^0} = -\mu_{22}^2 + \frac{1}{2} (\lambda_4 + \lambda_4) v_1^2. \quad (2.26)$$

### 2.3. Lagrangiana de Yukawa para el MDDH

La lagrangiana de Yukawa es la responsable de dar los acoplamientos y vértices de los fermiones con los bosones de Higgs, dependiendo del modelo del potencial de Higgs, se obtendrán diferentes fenómenos físicos. Algunos modelos como 2HDM-I o 2HDM-II envuelven conservación de sabor, mientras que el modelo que trabajaremos 2HDM-III permite la presencia de interacciones escalares intercambiantes de sabor denotadas como (FCNC) a un nivel consistente con restricciones de baja energía, donde se requiere un cierto mecanismo para suprimirlas, por ejemplo uno puede imponer una cierta textura a los acoplamientos de Yukawa, los cuales predecirán un patrón de FCNC de los acoplamientos de Higgs.

A esta Lagrangiana la forman los términos que acoplan el campo de Higgs con los campos de los quarks y los leptones. En la representación de interacción, las interacciones de norma son diagonales y universales en el sentido de que son descritas por una constante de acoplamiento de norma por cada factor en  $G_{ME} : g_1, g_2, g_3$ . Por definición los eigenestados de interacción no tienen acoplamientos de norma entre fermiones de diferentes generaciones y las mezclas entre los fermiones de distinto sabor no están permitidas; sin embargo, el acoplamiento del campo de Higgs a fermiones no se sigue del principio de invariancia de norma, en consecuencia las interacciones de Yukawa no son diagonales en esta representación.

Por lo tanto, en la representación de interacción los acoplamientos de Yukawa involucran fermiones de diferentes generaciones, consecuentemente, los eigenestados de interacción se mezclan y no tienen masas definidas.

En el caso de tres o más familias, la Lagrangiana de Yukawa puede dar lugar a la violación de CP. Más aún, toda la violación de CP del Modelo Estándar Electro débil se origina en este sector. Una explicación de por qué la violación de CP se relaciona con los acoplamientos de Yukawa complejos,  $Y_{ij}$ , se puede ver de la hermiticidad de la Lagrangiana, ya que los diferentes términos para tres familias de fermiones se pueden asociar en pares de la forma<sup>1</sup>:

$$Y_{ij}\bar{\psi}_{Li}\phi\psi_{Rj} + Y_{ij}^*\bar{\psi}_{Rj}\phi^\dagger\psi_{Li}. \quad (2.27)$$

La acción del operador de CP intercambia los operadores

$$\bar{\psi}_{Li}\phi\psi_{Rj} \leftrightarrow \bar{\psi}_{Rj}\phi^\dagger\psi_{Li}. \quad (2.28)$$

pero deja los coeficientes  $Y_{ij}$  y  $Y_{ij}^*$  invariantes. Esto significa que CP es una simetría del sector de Yukawa del Modelo Estándar, si y sólo si,  $Y_{ij} = Y_{ij}^*$  con  $i \neq j$ . Entonces se viola CP en el Modelo Estándar, si y solo si [27]:

$$Y_{ij}^f \neq Y_{ij}^{*f} \quad y \quad \Im m \{ \det [Y^d Y^{d\dagger}, Y^u Y^{u\dagger}] \} \neq 0. \quad (2.29)$$

Es claro que esta explicación es correcta si se separa el mecanismo de violación de CP del mecanismo de Higgs del rompimiento espontáneo de la simetría de norma. Las interacciones de Yukawa son las fuentes de las masas de los fermiones y la única fuente de violación de CP del Modelo Estándar Electro débil.

Ahora, cuando la simetría de norma  $G_{ME}$  se rompe espontáneamente, las interacciones de Yukawa dan origen a los términos de masa de los fermiones, consideraremos que en el MDDH-III los dobletes de Higgs se acoplan en principio con las tres familias de quarks y leptones, asumiremos que las matrices de Yukawa son hermitianas y donde el potencial conserva CP. Tomando en cuenta que el valor de expectación en el vacío del campo de Higgs tienen la forma dada en la ec.(2.5), se obtiene que la Lagrangiana de Yukawa adquiere la forma:

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y^Q &= Y_{ij}^d \bar{Q}_{Li}^I \phi_1^I d_{Rj}^I + Y_{ij}^u \bar{Q}_{Li}^I \tilde{\phi}^I u_{Rj}^I + Y_{ij}^l \bar{l}_{Li}^I \tilde{\phi}^I e_{Rj}^I + h.c. \\ &= \bar{u}_L^I M_u u_R^I + \bar{d}_L^I M_d d_R^I + \bar{e}_L^I M_l e_R^I, \end{aligned} \quad (2.30)$$

---

<sup>1</sup>En esta expresión el índice  $i$  ó  $j$  repetido no implica suma.

donde  $M_f$  ( $f = u, d, l$ ) son las matrices de las masas de los quarks y los leptones cargados, mientras que

$$u = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} \tau \\ \mu \\ e \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

Las matrices de masa obtenidas de los acoplamientos de Yukawa, después del rompimiento de la simetría de norma, se definen como:

$$(M_f)_{ij} = Y_{ij}^f \frac{v}{\sqrt{2}}. \quad (2.32)$$

Las  $Y_{ij}^f$  son las matrices de los acoplamientos de Yukawa, las cuales para el Modelo Estándar son matrices complejas  $3 \times 3$ ,  $Q_{Li}$  denota los dobletes de quarks izquierdos y  $u_{Ri}^I, d_{Li}^I$  corresponden a los singletes derechos, donde el superíndice  $I$  indica los eigenestados en la representación de interacción (sabor), con el isodoblete  $\tilde{\phi} = i\tau_2\phi^*$  para  $\phi$  los dobletes de Higgs dados en la ec.(2.9) y  $\phi^*$  sus campos conjugados.

Por otra parte, el hecho de que las matrices de Yukawa sean complejas, tiene como consecuencia la violación de CP en el Modelo Estándar Electro débil. En otras palabras, las matrices  $M_u$  y  $M_d$  no conmutan y la parte imaginaria de su conmutador no es nula:

$$(M_f)_{ij} \neq (M_f^*)_{ij} \quad y \quad \Im m \left\{ \det \left[ M_d M_d^\dagger, M_u M_u^\dagger \right] \right\} \neq 0. \quad (2.33)$$

Para matrices de masa complejas, en el caso de matrices de masa hermitianas, CP se viola en el Modelo Estándar Electro débil, si y sólo si

$$\Im m \{ \det [M_d, M_u] \} \neq 0. \quad (2.34)$$

Por el momento únicamente se considera la parte de la Lagrangiana de Yukawa correspondiente al sector de los quarks. además, como se permiten las mezclas entre los quarks de diferente generación, las matrices de masa de los mismos no son diagonales en la base de interacciones, por consiguiente los eigenestados de interacción no tienen masas bien definidas, es decir, en la representación de interacción los fermiones, en general, no son eigenestados de masa. Por lo tanto, es necesario diagonalizar las matrices para encontrar los eigenestados de masa a través de las rotaciones ortogonales  $U_{L(R)}$  y  $V_{L(R)}$ , suponiendo que los quarks transforman de la representación de interacción a la representación de las masas, a través de la siguiente transformación:

$$u_{L(R)}^I = U_{L(R)}^\dagger u_{L(R)}, \quad (2.35)$$

$$d_{L(R)}^I = V_{L(R)}^\dagger d_{L(R)}, \quad (2.36)$$

donde  $d$  y  $u$  se refieren a los eigenestados de masa. En la literatura es común referirse a los campos en la representación de masas como *campos físicos*, ya que en esta representación los campos tienen una masa bien definida. Al reemplazar los campos transformados ecs.(2.35) en el lagrangiano (2.30) se obtiene:

$$- \mathcal{L}_Y^{masa} = \bar{u}_L M_u^{diag} u_R + \bar{d}_L M_d^{diag} d_R, \quad (2.37)$$

donde las  $M^{diag}$  son matrices de masa diagonales dadas por:

$$M_u^{diag} = U_L M_u U_R^{diag}, \quad (2.38)$$

$$M_d^{diag} = V_L M_d V_R^\dagger. \quad (2.39)$$

**CAPÍTULO 2. MODELO DE DOS DOBLETES DE HIGGS TIPO III**  
**2.3. LAGRANGIANA DE YUKAWA PARA EL MDDH**

---

En general, las matrices de masas de los quarks son matrices complejas de  $3 \times 3$  no Hermitianas, para encontrar a las matrices de transformación  $U_{L(R)}$  y  $V_{L(R)}$  que las diagonalizan, se usan las formas bilineales  $MM^\dagger$  y  $M^\dagger M$ , obteniendo:

$$\begin{aligned}
 U_L M_u M_u^\dagger U_L^\dagger &= U_L M_u U_R^\dagger U_R M_u^\dagger U_L^\dagger = (M_u^{diag})^2, \\
 U_R M_u^\dagger M_u U_R^\dagger &= U_R M_u^\dagger U_L^\dagger U_L M_u U_R^\dagger = (M_u^{diag})^2, \\
 V_L M_d M_d^\dagger V_L^\dagger &= V_L M_d V_R^\dagger V_R M_d^\dagger V_L^\dagger = (M_d^{diag})^2, \\
 V_R M_d^\dagger M_d V_R^\dagger &= V_R M_d^\dagger V_L^\dagger V_L M_d V_R^\dagger = (M_d^{diag})^2.
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

En conclusión, si se conoce la matriz de mezcla de los quarks se pueden conocer las matrices de transformación  $U_{L(R)}$  y  $V_{L(R)}$ .

## Capítulo 3

# Física de Neutrinos en el ME y en el MDDH Tipo III

La búsqueda de masa para el neutrino ha sido uno de los campos activos de la física de partículas y de la astrofísica, el ME impone un valor de masa idénticamente igual a cero, con base en resultados experimentales, tales como el descubrimiento de la violación de la simetría de paridad y de mediciones en decaimientos beta, cuyos experimentos no eran lo suficientemente sensibles a la posible masa del neutrino. Sin embargo, recientes evidencias experimentales demuestran que el neutrino tiene masa, aunque aún no se conoce su valor, únicamente se han determinado cotas máximas, abriendo paso para nuevas teorías más allá del ME en donde el neutrino pueda adquirir masa de forma natural. En el presente capítulo estudiamos algunas características del neutrino; inicialmente, exponemos el concepto de neutrino de Dirac y neutrino de Majorana, se mostrarán términos de masa para neutrinos, construidos en analogía al Modelo Estándar o como extensión al mismo; estos términos de masas nos llevan directamente al formalismo general de Oscilaciones de Neutrinos y a la mezcla de neutrinos, en donde se mostrará la forma de la matriz de mezcla y la violación de CP.

### 3.1. El Neutrino en el Modelo Estándar

Raymond Davies Jr recibió en el 2002 el premio Nobel de física por su gran trabajo pionero en la detección de neutrinos solares; junto a él, también fue premiado Masatoshi Koshiba, quien, junto a la colaboración SuperKamiokande, detectó el cambio de sabor en neutrinos atmosféricos, demostrando finalmente y después de tanto tiempo de espera, que *los neutrinos son masivos*. Este reconocimiento representa el interés que esta diminuta partícula ha generado a lo largo de los últimos treinta años en todos los campos de la física moderna, desde la física de partículas, pasando por la astrofísica hasta llegar a la cosmología.

La historia de los neutrinos y en general, de la interacción débil, se remonta al descubrimiento de la radiactividad por Becquerel, en 1896 y posteriormente a la medición del espectro del electrón emitido en dichos procesos radiactivos por Chadwick, en 1914. Es allí, al tratar de explicar el espectro continuo obtenido, (totalmente contrario a lo esperado), en 1929, donde nace el neutrino en manos de Pauli [28], representando “un intento desesperado para salvar la conservación de la energía en los decaimientos beta”. Esta partícula es neutra y con espín 1/2, tomando lugar únicamente en los procesos de interacción débil; inicialmente fue propuesta con un valor de masa nulo, y ha sido la determinación de un valor distinto de cero para su masa uno de los campos de la física teórica y experimental más activos en los últimos años. Fue Fermi [29] en 1934 quien construyó por primera vez una teoría del decaimiento beta en donde la presencia del neutrino explicaba efectivamente lo que Chadwick había observado algunos años atrás, abriendo paso a lo que finalmente se convertirá en el Modelo Estándar de partículas (ME). El neutrino fue descubierto experimentalmente por Reines y Cowan, al tiempo

en que se descubrió que en los procesos de decaimiento beta (interacción débil), la simetría de paridad no se conservaba, a partir de lo cual se construyó ME con neutrinos de quiralidad izquierda (Modelo Estándar mínimo).

El neutrino no sólo juega un papel de gran relevancia en la física de partículas. En la astrofísica también se hace presente a la hora de describir los procesos de producción de energía en el interior estelar, siendo el responsable de aproximadamente el 2% de la energía liberada por una estrella como el sol; también lo encontramos en el proceso más energético del universo: las explosiones de supernova, en la cual se genera una enorme cantidad de neutrinos electrónicos, los cuales intervienen directamente en estos procesos. La presencia de masa para esta partícula ha hecho que la cosmología gire sus ojos hacia ella, puesto que es, después del fotón, la partícula más abundante en todo el universo, y si es masivo, su contribución a la masa del universo no puede despreciarse, colocandolo como uno de los candidatos más opcionados para formar parte de la materia oscura.

Actualmente sabemos que en la naturaleza existen tres clases neutrinos activos  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ , y que la violación de la paridad en las interacciones débiles se debe a que los bosones portadores de esta interacción ( $W^\pm$ ) y ( $Z^0$ ) sólo se acoplan a las componentes de quiralidad izquierda de los campos fermiónicos, y no a que sólo existan neutrinos con quiralidad izquierda; esto ha impulsado la construcción de numerosos modelos situados más allá del ME en donde los neutrinos estén presentes con ambas quiralidades, lo que implicaría un valor distinto de cero para su masa.

### 3.2. Neutrinos de Dirac y Majorana

Los leptones cargados ( $e, \mu, \tau$ ) están descritos por un vector columna de cuatro componentes<sup>1</sup> al cual denominamos *espinor de Dirac*. Dos de sus componentes están relacionadas con los estados de energía positiva, con *espín arriba y abajo*, mientras que las dos restantes se relacionan con los mismos estados de espín, pero con valores de energías negativas; estas componentes pueden así mismo asociarse a las componentes de helicidad; así, para  $E > 0$ , tenemos estados  $\psi_L$  y  $\psi_R$ , mientras que para  $E < 0$  tenemos  $\psi_L^c$  y  $\psi_R^c$ .

Consideremos un electrón moviéndose en dirección  $x$  con respecto a nuestro sistema de referencia; además consideremos que el espín del electrón se halla orientado en el sentido contrario al del momentum, de tal forma que desde nuestro sistema de referencia, estamos viendo un estado de  $e_L$ ; ahora consideremos un observador viajando en la misma dirección que el electrón pero con velocidad mayor; este observador verá que el electrón se mueve hacia el origen de tal forma que en su sistema de referencia el espín y el momentum son paralelos, de modo que este observador ve una partícula de mano derecha; la pregunta es, ¿el segundo observador ve  $e_R$  o  $e_R^c$ ? la respuesta es inmediata, ya que lo que diferencia a un electrón de un antielectrón es la carga eléctrica, y ya que esta es un invariante de Lorentz (al cambiar de sistema de referencia no cambia el valor de la carga eléctrica), lo que el segundo observador ve es un estado  $e_R$ .

Consideremos el mismo ejemplo, pero en el caso del neutrino. A partir de la experiencia, sabemos que los neutrinos en la naturaleza se presentan como partículas izquierdas; si el neutrino tiene masa igual a cero, como es el caso del ME, la quiralidad es un invariante relativista. Por otro lado, si la masa es distinta de cero, es posible construir un sistema de referencia desde el cual el neutrino tenga ahora quiralidad derecha; sin embargo en este caso no podemos decir con certeza si este neutrino es  $\nu_R$  o  $\nu_R^c$ , ya que al no tener carga eléctrica, no podríamos distinguir entre un neutrino y un antineutrino.

De nuevo acudiendo a los experimentos, sabemos que en la naturaleza se encuentran antineutrinos derechos  $\nu_R^c$ ; así, si queremos hacer la analogía con el caso de un fermión cargado, debemos introducir los campos  $\nu_R$  y  $\nu_L^c$ , de tal forma que el segundo observador verá un campo  $\nu_R$  cuando nosotros vemos  $\nu_L$ , mientras

---

<sup>1</sup>Aunque en realidad no transforma como vector bajo transformaciones de Lorentz

que él verá  $\nu_L^c$  cuando nosotros vemos  $\nu_R^c$ . En este caso tenemos cuatro grados de libertad independientes, de tal forma que decimos que el neutrino es una partícula de Dirac. En el caso del neutrino, la partícula y la antipartícula tienen el mismo valor de carga eléctrica  $Q_\nu = 0$ . La única forma de diferenciar entre  $\nu$  y  $\nu^c$  es el número leptónico, el cual se halla asociado a una simetría global, tal como el electromagnetismo. Sin embargo, dicha simetría no involucra dinámica, como en el caso de  $U(1)_{em}$ ; por el contrario, es una consecuencia de la dinámica y de los campos involucrados en el Modelo Estándar. Si el número leptónico no se conserva, no hay ninguna razón por la cual los campos  $\nu_L$  y  $\nu_R^c$  no sean los mismos bajo una transformación de Lorentz. En otras palabras, cabe la posibilidad de que  $\nu_R = \nu_R^c$  y  $\nu_L = \nu_L^c$ , de tal forma que el espinor asociado al neutrino puede ser representado en términos de dos grados de libertad  $\nu_L$  y  $\nu_R^c$ . Esta posibilidad fue discutida por primera vez en 1937 por Majorana [30], y a este campo se le denomina campo de Majorana.

Lo anterior nos sugiere que al hacer un cambio de sistema de referencia de una partícula obtenemos su antipartícula, lo que parece ser contradictorio, puesto que la carga eléctrica es un invariante de Lorentz; sin embargo, los conceptos de partícula y antipartícula se están refiriendo a algún número cuántico conservado que logre distinguir entre estos dos estados; si tal cantidad no se conserva, una partícula puede ser igual a su antipartícula; esta es la definición cualitativa de un campo de Majorana:  $\nu = \nu^c$ .

Es clara la diferencia existente entre un campo de Majorana y un campo de Weyl; aunque ambos tienen dos grados de libertad, el neutrino de Weyl no posee masa, de tal forma que la quiralidad es un invariante relativista y no es posible encontrar el sistema de referencia en donde veamos un campo  $\nu_R$  ni un campo  $\nu_L^c$ . Por otra parte, el campo de Majorana es masivo, pero con la especial característica de que la partícula es indistinguible de la antipartícula, de tal forma que la parte transformada de  $\nu_L$  puede ser  $\nu_R$  o  $\nu_R^c$ , mientras que  $\nu_L$  es igual a  $\nu_R^c$ ; esta es la razón por la cual sólo las componentes  $\nu_L$  y  $\nu_R^c$  son suficientes, y lo que hace que el campo de Majorana tenga la mitad de grados de libertad de un campo de Dirac.

### 3.3. Representación de Dirac y Majorana

Veamos ahora cómo escribir la matriz de conjugación de carga; la forma de  $C$  depende de la representación que se esté usando; ya sea de Dirac, Majorana u otras. En la representación de Dirac, las matrices  $\gamma_\mu$  se toman como:

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

y la matriz conjugación de carga puede tomarse como:

$$C = i\gamma_2\gamma_0 = \begin{bmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

Por otra parte, en la representación de Majorana, las matrices de Dirac se escriben de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{bmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{bmatrix}, & \gamma^1 &= \begin{bmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{bmatrix}, \\ \gamma^2 &= \begin{bmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{bmatrix}, & \gamma^3 &= \begin{bmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

En esta representación, la matriz de conjugación de carga puede tomarse como:

$$C = \gamma^0 \quad (3.4)$$

en cuyo caso el campo conjugado puede ser escrito como:

$$\Psi^c(x) = \Psi(x)^* \quad (3.5)$$

ya que las matrices  $\gamma_\mu$  resultan ser imaginarias puras en esta representación. En ambas representaciones, la matriz de conjugación de carga satisface las siguientes relaciones:

$$C^\dagger = C^{-1}, \quad C^T = -C \quad (3.6)$$

### 3.4. Masa de Dirac y Masa de Majorana

La introducción de términos de masa para los neutrinos debe hacerse en modelos que trabajen como extensión del Modelo Estándar de partículas. El nuevo término responsable de generar las masas para los neutrinos deberá ser invariante de Lorentz y hermítico, lo cual restringe los posibles términos de masas a dos grupos [51]: en primer lugar encontramos términos de la forma  $\bar{\nu}\nu$  y  $\bar{\nu}^c\nu^c$ , el cual formaría el término de masa de Dirac, ya que estos productos son invariantes ante transformaciones globales asociadas a un número cuántico conservado; el segundo grupo está formado por los términos  $\bar{\nu}\nu^c$  y  $\bar{\nu}^c\nu$ , los cuales construirán el término de Majorana, el cual no es invariante ante transformaciones globales.

Los leptones cargados y los quarks son partículas de Dirac como consecuencia de la conservación de la carga eléctrica, es decir, obedecen una ecuación de Dirac y vienen descritos por espinores complejos de cuatro componentes. Como sabemos, el Modelo Estándar predice neutrinos no masivos, lo cual los hace bastante diferentes de otros fermiones como los leptones cargados o los quarks. Si los neutrinos no tienen masa podrían describirse alternativamente por dos espinores complejos de dos componentes, llamados espinores de Weyl.

Para analizar las masas de los neutrinos, empezaremos por analizar el lagrangiano de Dirac. Considere el caso de los campos libres sin interacciones; el lagrangiano tiene la forma

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left( i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m_D \right) \psi, \quad (3.7)$$

donde el primer término corresponde a la energía cinética de la partícula y el segundo término corresponde a la masa. El término que contiene la masa de Dirac es  $m_D\bar{\psi}\psi$  donde el término  $\bar{\psi}\psi$  es invariante de Lorentz y hermitiano. Si se pone la condición de que el lagrangiano sea hermitiano, entonces  $m_D$  debe ser real.

Supongamos ahora que tenemos dos espinores arbitrarios  $\psi$  y  $\phi$ , sabiendo que los operadores de proyección quirral son:

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \quad P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5), \quad (3.8)$$

y satisfacen:

$$P_L P_R = 0, \quad P_L + P_R = 1, \quad P_L^2 = P_L, \quad P_R^2 = P_R, \quad (3.9)$$

Entonces los espinores  $\psi$  y  $\phi$  cumplen las siguientes relaciones:

$$\bar{\psi}_L \phi_L = \bar{\psi}_R P_R P_L \phi = 0, \quad \bar{\psi}_R \phi_R = 0, \quad (3.10)$$

por consiguiente tenemos que:

$$\bar{\psi}\phi = (\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R)(\phi_L + \phi_R) = \bar{\psi}_L \phi_R + \bar{\psi}_R \phi_L. \quad (3.11)$$

De esta manera el término de masa de Dirac puede ser escrito en términos de sus componentes quirales como:

$$\mathcal{L} = m_D (\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L). \quad (3.12)$$

Aplicando éste resultado a los neutrinos, significa que es necesario tener tanto a los neutrinos de mano derecha como de mano izquierda para tener tales términos de masa. Pero en el modelo estándar solamente están presentes los neutrinos de mano izquierda.

Sin embargo existe otra manera de tener invariantes de Lorentz, si se incluye la conjugación de carga  $\psi^c$ , tenemos los siguientes invariantes:

$$\bar{\psi}^c \psi^c, \quad \bar{\psi} \psi^c \quad y \quad \bar{\psi}^c \psi \quad (3.13)$$

El término  $\bar{\psi}^c \psi^c$  es equivalente a  $\bar{\psi} \psi$ , por lo tanto es hermitiano también. Los términos  $\bar{\psi} \psi^c$  y  $\bar{\psi}^c \psi$ , son hermíticos conjugados, lo cual se puede observar de:

$$(\bar{\psi} \psi)^{\dagger} = (\psi^{\dagger} \gamma_0 \psi)^{\dagger} = \phi^{\dagger} \gamma_0 \psi = \bar{\phi} \psi \quad (3.14)$$

Para construir un campo masivo de Dirac son necesarios dos campos independientes de Weyl,  $\psi_L$  y  $\psi_R$ , junto con  $(\psi_L)^c = \psi_R^c$  y  $(\psi_R)^c = \psi_L^c$ . Esto da como resultado cuatro grados de libertad, para un campo de Majorana se tienen sólo dos grados de libertad,  $\psi_L$  y  $(\psi_L)^c = \psi_R^c$ .

Un neutrino de Dirac es descrito por un espinor de Dirac de la forma  $\nu = \nu_L + \nu_R$ , con  $\nu_L$  la componente izquierda y  $\nu_R$  la componente derecha. El término de masa para el neutrino de Dirac, en la base de sabor, proviene de las interacciones de Yukawa dadas como:

$$-\mathcal{L}_{\nu, Dirac} = \bar{\nu}_L^I Y_{\nu} \bar{\phi} \nu_R^I + h.c., \quad (3.15)$$

donde  $\bar{\phi} = i\sigma^2 \phi^*$ , con  $\phi$  el doblete de Higgs del Modelo Estándar, y  $l_L$  denota el doblete leptónico izquierdo. Después del rompimiento espontáneo de la simetría de norma, se obtiene,

$$-\mathcal{L}_{\nu, Dirac}^I = \bar{\nu}_L^I M_{\nu_D} \nu_R^I + h.c., \quad (3.16)$$

donde  $M_{\nu_D} = Y_{\nu} \langle \phi \rangle$  con  $\langle \phi \rangle \approx 246$  Gev es el valor de expectación en el vacío del bosón de Higgs. Suponiendo que los neutrinos transforman de la representación de interacción (sabor) a la representación de las masas, a través de la siguiente transformación:

$$\nu_L^I = V^{\dagger} \nu_L, \quad \nu_R^I = U^{\dagger} \nu_R, \quad (3.17)$$

donde los  $\nu^I$  se refieren a los eigenestados de masa, la Lagrangiana de la ec.(3.16) toma la forma:

$$-\mathcal{L}_{\nu, Dirac} = \bar{\nu}_L V M_{\nu_D} U^{\dagger} \nu_R + h.c. \quad (3.18)$$

La matriz de masas puede ser diagonalizada por la transformación biunitaria,

$$V M_{\nu_D} U^{\dagger} = M_{\nu_D}^{diag}, \quad (3.19)$$

donde  $M_{\nu_D}^{diag} = diag\{m_1, m_2, m_3\}$  con  $m_i$  las masas de los neutrinos (para  $i = 1, 2, 3$ ). Así la Lagrangiana dada en la ec.(3.18) toma la forma:

$$-\mathcal{L}_{\nu, Dirac} = \bar{\nu}_L M_{\nu_D}^{diag} \nu_R + h.c. \quad (3.20)$$

El espinor de Dirac da como resultado,

$$\nu = \nu_L + \nu_R = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

satisface  $P_L \nu = \nu_L$ ,  $P_R \nu = \nu_R$  y describe los eigenestados de masa de los tres neutrinos de Dirac. Entonces, el término de masa de Dirac de los neutrinos es:

$$-\mathcal{L}_{\nu, Dirac} = \bar{\nu} M_{\nu_D}^{diag} \nu = \sum_{i=1}^3 m_i \bar{\nu}_i \nu_i. \quad (3.22)$$

Podemos escribir otro término masivo que es hermitiano e invariante de Lorentz, a este término se le conoce como el término de masa de Majorana y está dado por:

$$-\mathcal{L}_{Majorana} = \frac{1}{2} \bar{\nu}_L^I M_{\nu_L} (\nu_L^I)^c + h.c., \quad (3.23)$$

el factor  $1/2$  en  $\mathcal{L}_{Majorana}$  permite obtener la ecuación de Dirac de los neutrinos masivos de Majorana. La matriz de masas  $M_{\nu_L}$  debe ser simétrica, el término de masa es un escalar de Lorentz. Al suponer que los neutrinos se transforman de la representación de interacción (sabor) a la representación de las masas a través de la siguiente transformación:

$$\nu_L^I = V^\dagger \nu_L, \quad (\nu_L^I)^c = C \bar{\nu}_L, \quad (3.24)$$

entonces el término de masa de Majorana toma la forma:

$$-\mathcal{L}_{Majorana} = \frac{1}{2} \bar{\nu}_L V M_{\nu_L} V^T (\nu_L)^c + h.c., \quad (3.25)$$

la matriz simétrica  $M_{\nu_L}$  puede ser diagonalizada por una matriz unitaria a través de la transformación,

$$V M_{\nu_L} V^T = M_{\nu_L}^{diag}, \quad (3.26)$$

donde  $M_{\nu_L}^{diag} = diag\{m_1, m_2, m_3\}$ , con  $m_i$  la masa de los neutrinos (para  $i = 1, 2, 3$ ). Así, la ec.(3.25) toma la forma:

$$-\mathcal{L}_{Majorana} = \frac{1}{2} \bar{\nu}_L M_{\nu_L}^{diag} (\nu_L)^c + h.c., \quad (3.27)$$

y el campo de Majorana es:

$$\nu = \nu_L + (\nu_L)^c = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

el cual satisface la condición de Majorana  $(\nu)^c = \nu$ , describe los eigenestados de masa de los tres neutrinos de Majorana. Así, se tiene que,

$$-\mathcal{L}_{Majorana} = \frac{1}{2} \bar{\nu} M_{\nu_L}^{diag} \nu + h.c. = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i \bar{\nu}_i \nu_i. \quad (3.29)$$

Actualmente no se ha podido determinar si los Neutrinos son partículas de Dirac o Majorana, por eso la Lagrangiana de masa más general para los neutrinos es aquella que incluya tanto términos de Dirac como de Majorana. A continuación se construye el término de masa híbrido, a partir del cual se obtiene el mecanismo del seesaw, el cual genera las masas pequeñas para los neutrinos.

### 3.5. El Mecanismo See-Saw

El descubrimiento de las oscilaciones de neutrinos ha sido uno de los resultados experimentales más importantes de los últimos años en el ámbito de la Física de Partículas, y pueden explicarse cuando se introduce una masa para los neutrinos. Si los neutrinos tienen masa, los auto estados de masa son, en general, combinaciones lineales de los autoestados de la interacción débil, también llamados autoestados de sabor.

Como consecuencia de esta mezcla, los neutrinos pueden ser detectados con un sabor diferente de aquel con que fueron producidos, fenómeno que se conoce como oscilación de neutrinos.

Uno de los mecanismos para dar masa a los neutrinos es el llamado “seesaw” tipo I, consiste en añadir al Modelo Estándar tres leptones neutros pesados (uno por cada familia), que se mezclan con los neutrinos ligeros. Tras la ruptura espontánea de la simetría electrodébil, aparece un término de masa para los neutrinos ligeros.

El campo de neutrinos derecho  $\nu_R$  y su contraparte  $(\nu_R)^c$  también pueden formar un término de masa de Majorana. Por lo tanto, es posible escribir la siguiente Lagrangiana de masa híbrida para neutrino en términos de los campos  $\nu_L$ ,  $\nu_R$ ,  $(\nu_L)^c$  y  $(\nu_R)^c$ , que es el término de masa más general del neutrino, para  $n$  sabores de neutrinos izquierdos y derechos. En dicho término se incluye la masa del neutrino de Dirac,  $M_{\nu_D}$ , la masa del neutrino de Majorana para los neutrinos derechos,  $M_{\nu_R}$ , y la masa de Majorana para los neutrinos izquierdos,  $M_{\nu_L}$ . Este término de masa híbrido del neutrino, puede ser escrito como:

$$-\mathcal{L}_m = \frac{1}{2}\nu_L^T C M_{\nu_L} \nu_L + \bar{\nu}_L M_{\nu_D}^* \nu_R + \frac{1}{2}\nu_R^T C M_{\nu_R}^* \nu_R + h.c., \quad (3.30)$$

donde  $M_{\nu_L}$  y  $M_{\nu_R}$  son matrices simétricas complejas de  $n \times n$ , mientras que  $M_{\nu_D}$  es una matriz compleja de  $n \times n^2$ . El término de masa dado en la ec.(3.30) puede ser escrito en la forma,

$$-\mathcal{L}_m = \frac{1}{2}n_L^T C \mathcal{M} n_L, \quad (3.31)$$

donde  $n_L = (\nu_L, (\nu_R)^c)^T = (\nu_L, \nu_L^c)^T$  es el vector de  $2n$  campos izquierdos,  $C$  es el operador de conjugación de carga y  $\mathcal{M}$  es una matriz de  $2n \times 2n$ , la cual tiene la siguiente forma:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} M_{\nu_L} & M_{\nu_D} \\ M_{\nu_D}^T & M_{\nu_R} \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

En el caso límite de no tener masas de Majorana para los neutrinos ( $M_{\nu_L} = M_{\nu_R} = 0$ ) se recupera el caso de tener solamente masas de Dirac, y por consiguiente, la matriz de masas dada en la ec.(3.32) toma la forma,

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & M_{\nu_D} \\ M_{\nu_D}^T & 0 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

Esta matriz corresponde a la conservación del número leptónico,  $L_{\nu_L} + L_{\nu_R}$ , el cual puede ser identificado con el número leptónico total  $L$ . En otras palabras, requerir ( $M_{\nu_L} = M_{\nu_R} = 0$ ) es equivalente a imponer sobre el modelo una simetría global  $U(1)$ , dicha simetría tiene como consecuencia inmediata la conservación del número leptónico total  $L$ .

Al observar la matriz de masas de la ec.(3.32) se puede concluir que, en general, dicha matriz es simétrica compleja, por lo que se diagonaliza a través de la transformación:

$$U^T \mathcal{M} U = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}, \quad (3.34)$$

donde  $U$  es una matriz unitaria de  $2n \times 2n$  y  $\lambda_{1,2}$  son matrices de  $n \times n$ , correspondientes a los eigenvalores de la matriz  $\mathcal{M}$ . Con ayuda de la matriz dada en la ec.(3.34) se busca diagonalizar por bloques a la matriz  $\mathcal{M}$ ,

---

<sup>2</sup>Las matrices de masas de los neutrinos de Dirac y los neutrinos derechos de Majorana se introducen a través de sus complejos conjugados. Lo anterior se hace con ayuda de las relaciones,  $(\nu_R^T C M^* \nu_R)^\dagger = (\nu^c)_L^T C M (\nu^c)_L$  y  $\bar{\nu}_R M \nu_L = (\nu^c)_L^T C M \nu_L = \nu_L^T C M^T (\nu^c)_L$

esto con el fin de desacoplar los grados de libertad de los neutrinos ligeros y los pesados. Los eigenvalores de la matriz dada en la ec.(3.32) son:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( M_{\nu_R} + M_{\nu_L} \right) \mp \frac{1}{2} M_{\nu_R} \sqrt{\left( \mathbb{I} - M_{\nu_R}^{-1} M_{\nu_L} \right)^2 + 4 M_{\nu_R}^{-1} M_{\nu_D} M_{\nu_R}^{-1} M_{\nu_D}^T} \quad (3.35)$$

La matriz unitaria  $U$  que diagonaliza a la matriz compleja  $\mathcal{M}$  se construye como:

$$U = (|1\rangle, |2\rangle). \quad (3.36)$$

En forma explícita,  $U$  está dado como:

$$U = \begin{pmatrix} N_1^{-1} & -N_2^{-1} \left( \lambda_1 - M_{\nu_L} \right)^\dagger \left( M_{\nu_D}^{-1} \right)^\dagger \\ N_1^{-1} M_{\nu_D}^{-1} \left( \lambda_1 - M_{\nu_L} \right) & N_2^{-1} \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

donde

$$N_1^2 = \mathbb{I} + \left( \lambda_1 - M_{\nu_L} \right)^\dagger \left( M_{\nu_D}^{-1} \right)^\dagger M_{\nu_D}^{-1} \left( \lambda_1 - M_{\nu_L} \right) \quad (3.38)$$

y

$$N_2^2 = \mathbb{I} + \left( M_{\nu_D}^{-1} \right) \left( \lambda_1 - M_{\nu_L} \right) \left( \lambda_1 - M_{\nu_L} \right)^\dagger \left( M_{\nu_D}^{-1} \right)^\dagger \quad (3.39)$$

El término de masa híbrido del neutrino, ec.(3.30), proporciona los ingredientes necesarios de un mecanismo dinámico para interpretar por qué los tres neutrinos conocidos tienen masas distintas de cero, pero pequeña. El punto clave es que las escalas de masa de  $M_{\nu_L}$ ,  $M_{\nu_D}$  y  $M_{\nu_R}$  pueden tener una jerarquía muy pronunciada.

- Primero,  $M_{\nu_D} \sim \langle \phi \rangle \approx 174 \text{ GeV}$ , es naturalmente caracterizados por la escala de rompimiento de la simetría electrodébil.
- En segundo lugar,  $M_{\nu_L} \ll \langle \phi \rangle$  satisface el criterio de naturalidad de 't Hooft, ya que este término de masa de Majorana viola la conservación del número leptónico.
- En tercer lugar,  $M_{\nu_R} \gg \langle \phi \rangle$  es natural de esperarse ya que los neutrinos derechos son singlet es de  $SU(2)_L$  y así sus términos de masas no están sujetos a la escala de rompimiento de la simetría electrodébil.

La jerarquía

$$M_{\nu_R} \gg M_{\nu_D} \gg M_{\nu_L} \quad (3.40)$$

permiten hacer aproximaciones confiables en la obtención de la matriz de masas efectiva para los tres neutrinos activos ( $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ ). Este caso límite en la literatura es conocido como el *Mecanismo seesaw*, el cual proporciona una explicación simple y atractiva para la masa pequeña de los neutrinos. El mecanismo del seesaw relaciona el valor pequeño de la masa de los neutrinos activos con la existencia de una escala de masa muy grande. Aunque el mecanismo del seesaw es más natural en el contexto de teorías de gran unificación GUT's o modelos de simetrías izquierda-derechas, este opera muy bien en la extensión mínima del Modelo Estándar donde se introducen los neutrinos derechos (neutrinos estériles)  $\nu_R$ . Los neutrinos derechos son singletes electrodébiles, por consiguiente su masa no está protegida por la simetría electrodébil. Así, se puede esperar que  $M_{\nu_R}$  sea muy grande.

Ahora, cada uno de los eigenvalores de la ec.(3.35), toman la forma:

$$\lambda_1 \approx M_{\nu_L} - M_{\nu_D} M_{\nu_R}^{-1} M_{\nu_D}^T \equiv \widetilde{M}_{\nu_L}, \quad (3.41)$$

$$\lambda_2 \approx M_{\nu_R} + M_{\nu_D} M_{\nu_R}^{-1} M_{\nu_D}^T \approx M_{\nu_R}, \quad (3.42)$$

y la matriz unitaria  $U$  es

$$U = \begin{pmatrix} \mathbb{I} - \frac{1}{2} M_{\nu_D}^* M_{\nu_R}^{*-1} M_{\nu_R}^{-1} M_{\nu_D}^T & M_{\nu_D}^* M_{\nu_R}^{*-1} \\ -M_{\nu_R}^{-1} M_{\nu_D}^T & \mathbb{I} - \frac{1}{2} M_{\nu_R}^{-1} M_{\nu_D}^T M_{\nu_D}^* M_{\nu_R}^{*-1} \end{pmatrix}, \quad (3.43)$$

Finalmente, la transformación de la ec.(3.34) se reescribe como:

$$U^T M U \approx \text{diag}\{\widetilde{M}_{\nu_L}, M_{\nu_R}\}. \quad (3.44)$$

La diagonalización de la matriz de masas efectiva  $\widetilde{M}_{\nu_L}$  da como resultado  $n$  neutrinos de Majorana ligeros, los cuales son predominantemente compuestos de los neutrinos usuales  $\nu_L$  (activos) y de la mezcla pequeña de los neutrinos derechos y los neutrinos de Dirac; al diagonalizar la matriz  $M_{\nu_R}$  se producen  $n$  neutrinos de Majorana pesados, los cuales son compuestos principalmente de los neutrinos derechos  $\nu_R$ .

En resumen, el resultado de la ec.(3.41) es conocido como el mecanismo seesaw tipo (I+II) que es la matriz de masas efectiva de los neutrinos activos. La escala pequeña de la masa de  $\widetilde{M}_{\nu_L}$  se atribuye a la escala pequeña de la masa  $M_{\nu_L}$  y a la escala de masas grandes de la  $M_{\nu_R}$ . Existen dos límites:

- Si  $M_{\nu_L} \rightarrow 0$  de la ec.(3.41), uno se queda con el mecanismo del seesaw canónico o tipo-I:  
 $\widetilde{M}_{\nu_L} \approx -M_{\nu_D} M_{\nu_R}^{-1} M_{\nu_D}^T$ .
- Si  $M_{\nu_L}$  está presente en la ec.(3.41), uno se queda con el mecanismo seesaw tipo-II:  
 $\widetilde{M}_{\nu_L} \approx M_{\nu_L} - M_{\nu_D} M_{\nu_R}^{-1} M_{\nu_D}^T$ . El mecanismo del seesaw tipo-II requiere que el bosón de Higgs sea representado por tripletes.

### 3.5.1. Mecanismo SeeSaw tipo-I

El mecanismo de Higgs, al menos en su forma más simple, prohíbe las masas de Majorana del tipo  $\nu_L^c M_{\nu_L} \nu_L$ , donde se involucran al neutrino izquierdo  $\nu_L$  y su conjugado  $\nu_L^c$ , pero permite los términos de masa donde sólo se involucren los neutrinos derechos  $\nu_R$  y su conjugado  $\nu_R^c$ . De hecho, al igual que  $M_{\nu_L}$  debe ser cero en el Modelo Estándar,  $M_{\nu_R}$  puede ser arbitrariamente grande. La razón es esencialmente que los neutrinos izquierdos  $\nu_L$  toman parte en las interacciones débiles con los bosones de norma  $W^\pm$  y  $Z$ , y si fueran muy pesados perturbaría la teoría. Pero como los neutrinos derechos  $\nu_R$  son singletes del grupo de simetría electrodébil, estos no toman parte en las interacciones débiles, por consiguiente la masa  $M_{\nu_R}$  puede ser arbitrariamente grande.

Entonces, en virtud de lo anterior, se considera que  $M_{\nu_L} = 0$  y en la aproximación  $M_{\nu_R} \gg M_{\nu_D}$ , la matriz de masas efectiva para los neutrinos activos toma la forma del mecanismo de seesaw tipo-I:

$$\widetilde{M}_{\nu_L} \approx -M_{\nu_D} M_{\nu_R}^{-1} M_{\nu_D}^T. \quad (3.45)$$

A partir de la ec.(3.45) podemos observar que la matriz de masas efectiva de los neutrinos izquierdos  $\widetilde{M}_{\nu_L}$ , es naturalmente suprimida por la escla pesada de la matriz de masas de loos neutrinos derechos,  $M_{\nu_R}$ .

Por ejemplo, si tomamos  $M_{\nu_D} = M_W = 80\text{Gev}$ , y de las oscilaciones de los neutrinos solares se considera que los valores más probables para la masa de los neutrinos izquierdos son del orden  $\widetilde{M}_{\nu_L} \propto 10^{-3}\text{eV}$ , se obtiene que, al invertir el mecanismo del seesaw, la masa de los neutrinos derechos de Majorana es del ordel de la escala de Gran Unificación,  $M_{\nu_R} \propto 10^{16}\text{GeV}$ . Las masas de los neutrinos atmosféricos requieren una masa para los neutrinos derechos por debajo de la escala GUT.

El hecho de que los neutrinos sean partículas masivas tiene como consecuencia que la matriz de mezclas del sabor para los leptones no sea trivial.

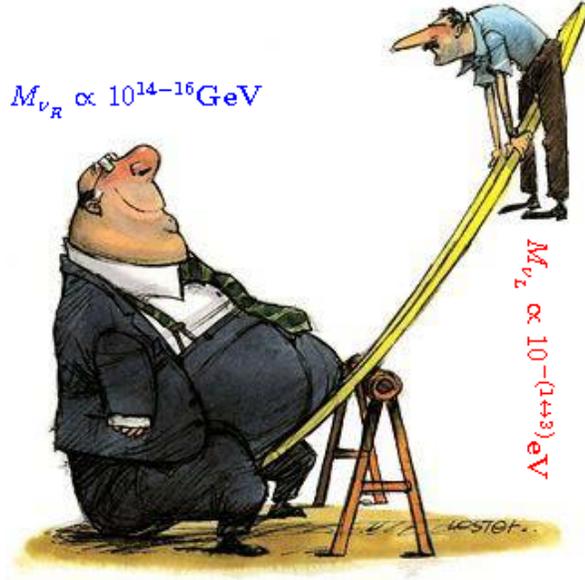


Figura 3.1: Mecanismo See-saw Tipo I

### 3.6. Fuentes de Neutrinos

La existencia del neutrino fue propuesta en 1930 por el físico Wolfgang Pauli para compensar la aparente pérdida de energía y momento lineal en la desintegración  $\beta$  de los neutrones según la siguiente ecuación:



Wolfgang Pauli interpretó que tanto la masa como la energía serían conservadas si una partícula hipotética denominada «neutrino» participase en la desintegración incorporando las cantidades perdidas. Existen tres tipos de neutrinos asociados a cada una de las familias leptónicas (o sabores): neutrino electrónico ( $\nu_e$ ), neutrino muónico ( $\nu_\mu$ ) y neutrino tauónico ( $\nu_\tau$ ) más sus respectivas antipartículas.

Podemos clasificar a los neutrinos debido al proceso de producción del decaimiento  $\beta$ :

#### 1. Geoneutrinos

Son aquellos que surgen de la desintegración  $\beta$  en los isótopos radiactivos que encontramos en el interior de la tierra. En particular la desintegración del  $^{238}\text{U}$ ,  $^{232}\text{Th}$  y  $^{40}\text{K}$ . Dada su procedencia, la detección de estas partículas nos proporciona información del interior de nuestro planeta. La primera señal de geoneutrinos fue detectada en el 2005 por el experimento KamLAND, y se espera en un futuro, construir detectores que mejoren la medición este tipo de neutrinos.

#### 2. Neutrinos Solares

La producción de energía de una estrella ubicada en la secuencia principal del diagrama *Hertzprung-Russell*<sup>3</sup> se hace por medio de la transformación de hidrógeno en helio ( $^4\text{He}$ ). El sol es una estrella enana de vida media tipo G2, cuya composición química está dominada por la presencia de hidrógeno en un 98 %

<sup>3</sup>Diagrama en el que se representa el eje Y con la magnitud absoluta (o distancia), mientras que el eje X representa la clasificación espectral (o temperatura superficial) de las estrellas. La gran mayoría de las estrellas caen en una región denominada secuencia principal. La ubicación de una estrella en dicho diagrama nos informa acerca de su distancia a la tierra, su magnitud visual, su temperatura superficial, su composición química, y si pertenece a la secuencia principal, su masa y su radio.

y el helio en un 1,5%, dejando la fracción restante asociada a elementos más pesados [31]. La producción de energía en una estrella está mediada por dos procesos: la cadena protón-protón (p – p) y el ciclo del carbono (CNO); que la estrella use un proceso en vez de otro depende fuertemente de sus propiedades internas, tales como la temperatura en el núcleo y su masa total; es así que para estrellas con  $M < 1,5M_{\odot}$ , la cadena p – p proporciona la mayor cantidad de energía, mientras que para estrellas con masas mayores, el ciclo del carbono es el responsable de la mayoría de la energía producida en el interior estelar; en estrellas como el sol, ambos procesos colaboran en la elaboración de energía solar, pero debido a su composición química, la mayor parte de esta energía está acreditada a la cadena p – p. La producción de energía en el sol está acompañada de la emisión de neutrinos electrónicos; el efecto neto de ambas cadenas puede ser esquematizado de la siguiente forma:



en donde la cantidad  $Q$  corresponde a la energía liberada

$$Q = 4m_p + 2m_e - m_{{}^4He} = 23,73 \text{ Mev} \quad (3.48)$$

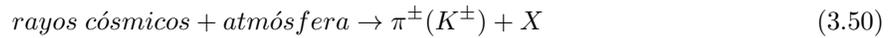
, con  $m_{{}^4He}$  correspondiente a la masa del núcleo de  ${}^4He$ , dada por:

$$m_{{}^4He} = 2m_p + 2m_n - E_{{}^4He}^{lig} \quad (3.49)$$

en donde  $E_{{}^4He}^{lig} = 28,296 \text{ Mev}$ , es la energía de ligadura del  ${}^4He$ ; esto nos muestra que por cada 26,7 MeV de energía producida en el sol, se producen dos neutrinos electrónicos. La mayor parte de la energía emitida por el sol sale en forma de fotones (98%), mientras que el restante de energía ( $\approx 2\%$ ) es emitida en forma de neutrinos.

### 3. Neutrinos Atmosféricos

Los neutrinos atmosféricos son neutrinos muónicos y tauónicos junto con sus antineutrinos producidos en las cascadas de partículas generadas por la interacción de rayos cósmicos con las partículas de la atmósfera terrestre. De forma resumida, la producción de neutrinos atmosféricos puede ser descrita en tres pasos; inicialmente, los rayos cósmicos entran en la atmósfera terrestre con energías del orden de los GeV, interactuando con los núcleos de los átomos suspendidos en la atmósfera produciendo piones y kaones cargados, ya sea de forma directa o por medio de partícula mediadoras:



En el segundo paso, las partículas producidas en la anterior reacción decaen generando neutrinos y antineutrinos de la forma:

$$\begin{aligned} \pi^{+} &\rightarrow \mu^{+} + \nu_{\mu} \\ \pi^{-} &\rightarrow \mu^{-} + \bar{\nu}_{\mu} \\ K^{+} &\rightarrow \mu^{+} + \nu_{\mu} \\ K^{-} &\rightarrow \mu^{-} + \bar{\nu}_{\mu} \end{aligned} \quad (3.51)$$

En el tercer paso, el flujo de neutrinos muónicos es intensificado por el decaimiento del muón:

$$\begin{aligned} \mu^{+} &\rightarrow e^{+} + \nu_e + \bar{\nu}_{\mu} \\ \mu^{-} &\rightarrow e^{-} + \bar{\nu}_e + \nu_{\mu} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Un vistazo a estas reacciones nos muestra que se esperarí obtener en total dos neutrinos (antineutrinos) muónicos por cada neutrino (antineutrinos) electrónico. Sin embargo, el cálculo del flujo de neutrinos no es tan fácil; es necesario tener en cuenta los tiempos de vida media y la energía de los piones y los

kaones, junto con el espectro de energía de los rayos cósmicos generadores de la cascada de partículas, entre otras cosas. Las características del flujo de neutrinos atmosféricos son principalmente consecuencia del mecanismo de producción; en particular, los cálculos de flujo se reduce a una dimensión, teniendo en cuenta la pérdida de energía en el aire, en especial, de los muones producidos en la ec.(3.51). Algunas características de este flujo son:

- El espectro de los neutrinos (antineutrinos) muónicos es de la forma  $E_{\nu\mu}^{-3}$  para energías comprendidas en el rango  $1 \leq E_{\nu\mu} \leq 10^3$  GeV, mientras que el flujo de neutrinos (antineutrinos) electrónicos decrece como  $E_{\nu e}^{-3,5}$  en el mismo rango de energía [32].
- Para un valor fijo de la energía del neutrino  $E_\nu$ , la mayor contribución en el flujo proviene de las partículas pertenecientes a los rayos cósmicos con energías del orden  $E_{rc} \approx 10 \times E_\nu$ .
- De las reacciones anteriormente descritas, se observa que:

$$R \equiv \frac{\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu}{\nu_e + \bar{\nu}_e} \approx 2. \quad (3.53)$$

Sin embargo, los muones con energías menores a 1 GeV producidos en la reacción de la ec.(3.51) llegan a la superficie de la tierra antes de decaer, de modo que el flujo de neutrinos, tanto electrónicos como muónicos se ve reducido.

- El flujo de neutrinos atmosféricos depende fuertemente del ángulo de incidencia de los rayos cósmicos primarios (asumiendo que la dirección de los neutrinos atmosféricos es aproximadamente igual a la dirección de los rayos cósmicos); para un experimento en especial, esta dependencia se expresa a través del azimut  $\phi$  y el ángulo del zenit (altura)  $\theta$ ; esta dependencia en la dirección del flujo es causada esencialmente por la variación en la densidad de la atmósfera con respecto a  $\theta$  y a los efectos del campo magnético terrestre sobre los rayos cósmicos. Experimentos como Kamiokande y SuperKamiokande también están destinados a la detección de neutrinos atmosféricos; en los flujos observados se hallan también discrepancias en comparación a los flujos esperados, en lo que se conoce como *la anomalía de neutrinos atmosféricos*.

La discrepancia entre el flujo de neutrinos atmosféricos predicho y el observado se convierte en pieza clave a la hora de atacar el problema de los neutrinos solares, puesto que ambos déficits deben estar relacionados con el posible cambio de sabor de los neutrinos durante su propagación en la atmósfera terrestre, y no con el modelo solar o con las predicciones de flujos de neutrinos atmosféricos.

#### 4. Neutrinos de Supernova

A medida que las estrellas evolucionan, van quemando su hidrógeno en helio, el helio en carbono y el carbono en oxígeno; en este proceso, la liberación de energía mantiene a la estrella estable, evitando que colapse bajo su propio peso; a medida que se van creando nuevos elementos, estos se van depositando en el núcleo estelar; si la masa de la estrella oscila entre 5 y 10 masas solares, el oxígeno puede ser usado para producir silicio, y si la masa es aún mayor, el silicio puede ser usado para construir hierro, estado que es alcanzado para estrellas con masas mayores que  $15M_\odot$ . La cantidad de hierro en el núcleo aumenta de tal forma que se sobrepasa el límite de Chandrasekhar, correspondiente a  $\approx 1,44M_\odot$ , en cuyo estado, el gas interestelar se hace degenerado y la presión de Fermi<sup>4</sup> se hace insuficiente para soportar la fuerza gravitacional, de modo que el núcleo comienza a colapsar lentamente, generando un aumento en su presión interna y su temperatura. Ya que el hierro posee un núcleo estable, no es posible lograr fácilmente su fusión, de modo que la estrella se queda sin fuente de energía que evite el colapso; en vez de ser fusionado el hierro, éste se desintegra de la forma:




---

<sup>4</sup>Presión de degeneración producida por los electrones en el núcleo; al estar en un estado de máximo confinamiento, la separación media entre cada electrón  $\Delta x$  es muy pequeña, lo cual implica que su valor momentum sea considerablemente alto, de acuerdo al principio de indeterminación de Heisenberg.

con  $Q = 124,4$  MeV. Puesto que en esta reacción, en vez de generarse energía, se absorbe, el proceso del colapso se intensifica, haciendo que la temperatura en el interior estelar aumente, generando ahora que los protones reabsorban electrones generando neutrinos y antineutrinos,



mecanismo que colabora aún más en el colapso, haciendo que la densidad y la temperatura en el núcleo aumenten de tal forma que el colapso se detenga por corto tiempo debido únicamente a la repulsión nuclear; dicha detención en el colapso produce una onda de choque que viaja hacia el exterior del núcleo haciendo que las regiones exteriores de la estrella sean expulsadas en una explosión de supernova, mientras que el remanente del núcleo se ha convertido en una estrella de neutrones con unos cuantos kilómetros de radio.

A medida que ocurre el colapso, se generan más neutrinos mediante reacciones de la forma  $e^- + e^+ \rightarrow \nu_l + \bar{\nu}_l$ ,  $n + p \rightarrow n + p + \nu_l + \bar{\nu}_l$ , entre otros, generando una región esférica alrededor del núcleo en la cual los neutrinos permanecen confinados, instantes antes de ser emitidos. Ya que a medida que el núcleo se contrae, éste se halla mucho más ligado gravitacionalmente, la liberación de energía tiene un componente extra; la energía liberada es:

$$\Delta E = E_{grav}^{estrella} - E_{grav}^{nucleo} = \left[ -\frac{GM^2}{R} \right]_{est} - \left[ -\frac{GM^2}{R} \right]_{nuc} \quad (3.56)$$

Ya que el radio de la estrella es mucho mayor que el radio del núcleo, la energía liberada está dominada por el segundo término de la expresión de la ec.(refestrella), de modo que la energía liberada es aproximadamente:

$$\Delta E \approx \frac{GM_{nuc}^2}{R_{nuc}} = 5,2 \times 10^{53} \left( \frac{10Km}{R_{nuc}} \right) \left( \frac{M_{nuc}}{1,4M_{\odot}} \right)^2 \quad (3.57)$$

La cantidad de energía liberada en forma de energía cinética del material expulsado, de radiación electromagnética y en forma gavitacional representan tan solo el 0,1% de la energía total liberada, de modo que el 99% restante es expulsado de la estrella en forma de neutrinos, lo cual convierte a estas partículas en materia de gran relevancia a la hora de estudiar este tipo de procesos astrofísicos.

En 1987 se registró un evento de supernova, en la nube Mayor de Magallanes, a unos 170.000 años luz, justo un año después de la entrada en operación del Kamiokande; los eventos registrados en este experimento han generado información acerca de las cotas máximas para la masa del neutrino electrónico, con  $m_{\nu_e} \leq 15\text{eV}$  [33].

La anterior descripción de algunas fuentes de neutrinos en la naturaleza y los experimentos enfocados a su detección demuestra la necesidad de incorporar nuevas características a esta partícula. La evidencia más importante corresponde a la existencia de masa, a través de la cual el mecanismo de oscilación de neutrinos puede resolver muchas de las preguntas nacidas a partir de la observación.

### 3.7. Experimentos de Neutrinos

La primera observación experimental del neutrino interactuando con la materia fué hecha por Frederick Reines, Clyde Cowan, Jr. y colaboradores en 1956, en la planta de Savannah River en Carolina del Sur. La fuente de neutrinos era un reactor nuclear (de hecho se producen antineutrinos procedentes de la desintegración beta) [34].

### Experimentos de neutrinos solares

Los detectores de neutrinos solares se pueden clasificar en dos tipos, según el método que utilicen para la detección; por un lado encontramos detectores radioquímicos, cuyo mecanismo consiste en la detección de átomos radiactivos producidos por neutrinos solares interactuando con el blanco; los elementos más usados como blanco en este tipo de experimentos es el cloro y el galio. El cloro, por su gran número de propiedades físico-químicas, gran abundancia y su bajo precio, cualidades que comparte con el galio. La reacción básica que utilizan estos experimentos consiste en un decaimiento beta inverso, entre los montajes radio-químicos encontramos a Homestake, GALLEX y SAGE.

Por otra parte, encontramos detectores de tiempo real, en donde los eventos de neutrino electrónico son detectados por medio de procesos de dispersión elástica y registrados a medida que ocurre el evento. Estos montajes poseen la ventaja de poder determinar la fuente del neutrino incidente, tanto como su energía. Entre este tipo de experimentos encontramos a Kamiokande, SuperKamiokande y SNO. Por lo general, estos montajes se construyen en minas abandonadas, a una profundidad tal que se pueda asegurar que la mayoría de partículas que en él inciden son neutrinos. Ya que la probabilidad de que el neutrino interactúe con la materia es muy baja, es necesario tener como blanco una enorme cantidad de material, ya sea cloro, galio o agua pesada, de modo que esta baja probabilidad de interacción sea compensada por un alto número de elementos como blanco.

El número esperado de eventos de neutrino electrónico depende de cada experimento; suponiendo que a los neutrinos no les pasa nada en su camino desde el sol a la tierra, el número de eventos es determinado a partir del Modelo Estándar y del Modelo Solar Estándar es:

$$R_k^{Th} = \sum_r \Phi_\nu \int dE_\nu X_r(E_\nu) \sigma_{e,i}(E_\nu) \quad (3.58)$$

donde  $\sigma_{e,i}(E_\nu)$  es la sección eficaz de la interacción de neutrino electrónico con el elemento del blanco perteneciente al experimento  $k$ . Cada experimento es sensible a neutrinos producidos en distintas cadenas; esta sensibilidad la impone la energía umbral, la cual actúa como un límite cinemático para el cual las reacciones en los distintos detectores pueden o no realizarse.

Experimento	Registrados	Esperados	Registrados/Esperados
Homestake	$2,65 \pm 0,23$	$7,7^{+1,2}_{-1,0}$	$0,33^{+0,06}_{-0,05}$
GALLEX	$78,8 \pm 8$	$129^{+8}_{-6}$	$0,60 \pm 0,07$
SAGE	$67 \pm 8$	$129^{+8}_{-6}$	$0,62 \pm 0,07$
Kamiokande	$2,80 \pm 0,38$	$5,15^{+1,0}_{-0,7}$	$0,54 \pm 0,07$
SuperKamiokande	$2,44^{+0,10}_{-0,09}$	$5,15^{+1,0}_{-0,7}$	$0,47^{+0,07}_{-0,09}$

Tabla 3.1: Comparación entre los resultados esperados y registrados para los experimentos más importantes de neutrinos solares. El flujo para GALLEX, SAGE y Homestake esta dado en SNU, mientras que el flujo de K y SK vienen en unidades de  $10^6 \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$  [35].

### Otros experimentos

Los experimentos anteriormente descritos son los más importantes en cuanto a detección de neutrinos solares; sin embargo, estos no son los únicos. Además de estos, encontramos los que se muestran en la tabla (3.3), donde

Experimento	Ubicación	Profund. [Km]	Blanco	Masa [Tonel.]	$E_{um}$ [MeV]	Sensib.
Homestake	Dakota S, EE.UU	1,61	$C_2Cl_4$	615	0,814	$^8B, ^7Be$
GALLEX	Gran Sasso, Italia	3,30	$^{119}Ga$	30	0,233	Todos
SAGE	Baksan, Rusia	1,41	$^{119}Ga$	30	0,233	Todos
Kamiokande	Kamioka, Japón	2,36	$H_2O$	3000	7,5	$^8B$
Superkamiokande	Kamioka, Japón	2,36	$H_2O$	45000	6,5	$^8B$
SNO	Sudbury, Canada	2,26	$D_2O$	30000	6,75	$^8B$

Tabla 3.2: Algunas características físicas de los experimentos más importantes [36].

la notación para la Sensibilidad correspondiente es: neutrino solar (S), los neutrinos solares de baja energía (LS), neutrino Reactor (R), neutrino Terrestre (T), neutrino Atmosférico (ATM), Acelerador neutrino (AC), neutrino rayos cósmicos (CR), neutrinos de supernova (SN), neutrino de baja energía supernova (LSN), neutrino de núcleos galácticos activos (AGN), Pulsar neutrino (PUL) y para el Tipo de Reacción es: Dispersión elástica (ES), corriente neutra (NC), corriente cargada (CC), doble desintegración beta (BB).

### 3.8. El Problema de los Neutrinos Solares

Después de revisar los experimentos y los resultados por ellos arrojados, es claro que existe una diferencia entre el flujo de neutrinos solares esperados y los neutrinos solares detectados; podemos decir algunas cosas sobre los resultados; primero, el flujo observado es menor al esperado en un factor que oscila entre el 30% y el 60%. Segundo, ya que el déficit no es el mismo para todos los experimentos, es posible que el efecto de supresión en el flujo dependa de la energía. Inicialmente fue el experimento de Homestake el que demostró que existía un déficit en el flujo de neutrinos solares; con el tiempo, más experimentos entraron en acción revelando que este déficit no era exclusivo de Homestake; por el contrario, los nuevos montajes median, en distintas proporciones, flujos de neutrinos menores a los esperados según lo determinado por los cálculos hechos usando el Modelo Estándar de partículas y el Modelo Solar Estándar (MSE); inicialmente se pensó que la solución se hallaba en el Modelo Solar Estándar, lo que se denominó como la *solución astrofísica*. La otra posible solución sería darle al neutrino nuevas propiedades nunca antes vistas, entre las que encontramos la masa.

El MSE es un modelo robusto; su objetivo es reconstruir, a partir de algunos parámetros de entrada, las condiciones actuales del sol. Entre los parámetros de entrada encontramos las abundancias químicas, las ecuaciones de estado y las reacciones nucleares responsables de la producción de energía (cadena p – p y CNO). La construcción del MSE está basada en cuatro principios:

- El sol es un cuerpo gaseoso en equilibrio hidrostático: la fuerza gravitacional ejercida sobre la estrella por su propia masa es compensada por el gradiente de la presión (del gas y de radiación).
- El transporte de energía en el interior solar se hace a través de fotones o de procesos convectivos.
- La producción de energía en el interior solar se debe solamente a las reacciones nucleares de la cadena p – p y el ciclo CNO.
- Las variaciones en la abundancia de elementos en el interior solar se deben únicamente a las reacciones nucleares.

La heliosismología en el MSE [36] se encarga de determinar algunas características interiores del sol mediante la observación de movimientos en su superficie; en este campo del MSE, se determina, entre otros parámetros, la velocidad del sonido en las distintas capas del sol; satélites como el SOHO han observado y determinado dichas velocidades en la superficie solar, mostrando como los cálculos del MSE coinciden en una muy buena aproximación a los valores medidos. La heliosismología es uno de los grandes soportes observacionales del MSE, mostrando así que este modelo está lejos de tener una falla interna que reproduzca erróneamente el flujo de neutrinos solares.

Si el problema no es el Modelo Solar Estándar, es posible que el neutrino posea nuevas propiedades que el Modelo Estándar no ha considerado; la más inmediata es la masa; si el neutrino tiene masa, puede ocurrir mezcla entre las tres familias de leptones del ME; en especial, tendríamos mezcla entre las tres familias de neutrinos activos  $\nu_l$  ( $l = e, \mu, \tau$ ), con lo cual los neutrinos que se producen en el interior solar tendrían una evolución complementamente distinta desde su producción hasta su detección, en lo que se conoce como *oscilación de neutrinos*; este efecto consiste esencialmente en un cambio de sabor, por ejemplo, de neutrino electrónico a neutrino muónico (o tauónico), debido a que los neutrinos que participan en la interacción débil ya no son autoestados de energía, si no combinación lineal de estos autoestados con masa definida, de modo que la probabilidad de que un neutrino electrónico permanezca en este estado variaría con el tiempo. Esta posible explicación fue inicialmente propuesta por Pontecorvo y Gribov en 1969 e independientemente por Wolfenstein en 1978. Además de esta explicación, en la década de los sesenta se propusieron un variado número de soluciones, entre las cuales se proponía una sobreabundancia de  ${}^3\text{He}$  en el interior solar, variaciones seculares en la luminosidad, la existencia de un momento magnético para el neutrino (de modo que podría ser afectado por el campo magnético solar) y decaimiento del neutrino, entre muchos otros [24].

### 3.9. Formalismo General de Oscilaciones de Neutrinos

La consecuencia inmediata de la existencia de neutrinos masivos es la oscilación de neutrinos, correspondiente a un fenómeno cuántico que se refiere al cambio de sabor de los neutrinos presentes en el ME, en cuyo caso los estados de interacción presentes no son iguales a los autoestados de energía, sino a una combinación lineal de éstos últimos. Inicialmente, la oscilación de neutrinos fue introducida por Pontecorvo hacia finales de los años cincuenta [37]; para esa época, se consideró posible una transición en el vacío de la forma *neutrino*  $\rightarrow$  *antineutrino*, similar a lo que sucede en el sistema  $K^0 - \bar{K}^0$  [38, 39]. Sin embargo, ya que estos dos estados poseen helicidades opuestas, este tipo de transiciones están prohibidas, puesto que no conservaría el momento angular. Posteriormente, a principios de los años sesenta, Naki, Nakagawa y Sakata [40] propusieron que el neutrino electrónico podría eventualmente convertirse en neutrino muónico, introduciendo la mezcla de neutrinos. Las sucesivas propuestas que surgieron alrededor del neutrino y sus posibles cambios de sabor fueron de inmediato aplicadas al problema de los neutrinos solares, en especial, enfocados a reproducir, mediante este mecanismo, los datos obtenidos por R. Davies en Homestake, el cual fue uno de los pocos experimentos que funcionara antes de la entrada en acción de SK(SuperKamiokande), SNO (Sudbury Neutrino Observatory), y los experimentos de galio. Actualmente, las oscilaciones de neutrinos se hallan en el mejor lugar a la hora de buscar explicaciones para el déficit de neutrinos solares; en el proceso, los resultados arrojados por los distintos experimentos son usados para determinar nuevas características del neutrino, como su masa y la existencia de un neutrino estéril, entre otras. En este capítulo inicialmente se desarrollará todo el formalismo de oscilaciones de neutrinos [36].

De acuerdo con el modelo estándar de las interacciones electrodébiles (SM) de Weinberg-Salam-Glashow, los leptones se encuentran agrupados en tres familias o sabores, denominados

$$\begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

y las correspondientes familias de antileptones. Las familias se caracterizan por los números leptónicos individuales  $L_\alpha$  (número del electrón  $L_e$ , número del muón  $L_\mu$ , número del tauón  $L_\tau$ ) de tal modo que:

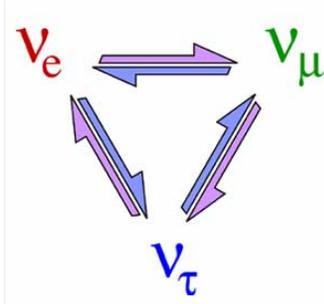


Figura 3.2: El cambio periódico de sabor del neutrino de un tipo a otro se conoce como oscilación de neutrino.

$$\begin{aligned} L_\alpha(\nu_\beta) &= \delta_{\alpha\beta} \quad \text{para neutrinos} \\ L_\alpha(\bar{\nu}_\beta) &= -\delta_{\alpha\beta} \quad \text{para antineutrinos.} \end{aligned} \quad (3.60)$$

Las oscilaciones de neutrinos, es decir, las transiciones periódicas  $\nu_\alpha \rightleftharpoons \nu_\beta$  entre los diferentes tipos de sabores de neutrinos dependen del tiempo, y las condiciones necesarias para que ocurran tales oscilaciones son:

1. Las diferencias de masas  $m_{\nu_\alpha}^2 - m_{\nu_\beta}^2$  no son todas cero, lo que implica que no todos los neutrinos son no masivos.
2. Los números leptónicos individuales  $L_\alpha$  no son estrictamente conservados.

En este último caso los autoestados  $L_\alpha|\nu_\alpha\rangle$ , llamados *autoestados de sabor* en general, no son autoestados del operador de masa  $M$ , es decir,  $\langle\nu_\alpha|M|\nu_\beta\rangle \neq 0$  para  $\alpha \neq \beta$ . Más bien son superposiciones lineales de autoestados de masa no degenerados  $|\nu_i\rangle$  con  $\langle\nu_i|M|\nu_j\rangle = m_i\delta_{ij}$  y  $m_i^2 - m_j^2 \neq 0$  para  $i \neq j$ . Las oscilaciones de neutrinos o *mezcla* de sabores de neutrinos  $\nu_\alpha \rightleftharpoons \nu_\beta$  pueden ocurrir entonces debido a que  $\langle\nu_\alpha|M|\nu_\beta\rangle$  es diferente de cero para  $\alpha \neq \beta$ . Las dos condiciones listadas arriba son las mínimas extensiones al modelo electrodébil estándar (SM).

Por otro lado, los  $n$  autoestados de sabor  $|\nu_\alpha\rangle$  (es decir,  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, \dots$ ) y los  $n$  autoestados de masa, también llamados autoestados físicos  $|\nu_i\rangle$  (es decir,  $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$ ) son relacionados por una transformación unitaria  $U$  llamada *matriz de mezcla*, la cual es análoga a la matriz de Cabbibo-Kobayashi-Maskawa para el sector de quarks. En el SM, todos los neutrinos son no masivos, en cuyo caso la matriz  $U$  no tiene significado físico. Por lo tanto, al introducir la matriz de mezcla, estamos suponiendo implícitamente que al menos uno de los neutrinos tiene *masa no nula*:

$$\begin{aligned} |\nu_\alpha\rangle &= \sum_i U_{\alpha i} |\nu_i\rangle \leftrightarrow |\nu_i\rangle \\ &= \sum_\alpha U_{i\alpha}^\dagger |\nu_\alpha\rangle \\ &= \sum_\alpha U_{\alpha i}^* |\nu_\alpha\rangle, \end{aligned} \quad (3.61)$$

con

$$U^\dagger U = U U^\dagger = 1, \quad (3.62)$$

es decir

$$\sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* = \delta_{\alpha\beta}, \quad \sum_{\alpha} U_{\alpha i} U_{\alpha j}^* = \delta_{ij}. \quad (3.63)$$

Para antineutrinos tenemos que reemplazar  $U_{\alpha i}$  por  $U_{\alpha i}^*$ , es decir,

$$|\bar{\nu}_{\alpha}\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* |\bar{\nu}_i\rangle. \quad (3.64)$$

El número de parámetros de una matriz unitaria  $n \times n$  es de  $n^2$  y las  $2n - 1$  fases relativas de los  $2n$  estados de neutrinos, pueden redefinirse de tal modo que se dejen  $(n-1)^2$  parámetros independientes izquierdos. Por esto es conveniente tomar los  $\frac{1}{2n}(n-1)$  “*ángulos de mezcla débiles*” de una rotación  $n$ -dimensional y las  $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$  las “*fases que violan CP*”. Al ser autoestados de la matriz de masa, los estados  $|\nu_i\rangle$  son estacionarios, es decir, tienen dependencia temporal

$$|\nu_i(t)\rangle = e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle, \quad (3.65)$$

con

$$E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} \approx p + \frac{1}{2} \frac{m_i^2}{p} \approx E + \frac{1}{2} \frac{m_i^2}{E}, \quad (3.66)$$

y

$$m_i \ll E_i,$$

donde  $E \approx p$  es la energía total del neutrino y supondremos que los neutrinos son estables. Así, un estado de sabor puro  $|\nu_{\alpha}\rangle = \sum_i U_{\alpha i} |\nu_i\rangle$  al tiempo  $t = 0$ , evolucionará con el tiempo es el estado

$$\begin{aligned} |\nu\rangle &= \sum_i U_{\alpha i} e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle \\ &= \sum_{i,\beta} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-iE_i t} |\nu_{\beta}\rangle. \end{aligned} \quad (3.67)$$

La dependencia temporal en la *amplitud de transición* para el cambio del sabor  $\nu_{\alpha}$  al sabor es  $\nu_{\beta}$  es

$$\begin{aligned} A(\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}; t) \equiv \langle \nu_{\beta} | \nu(t) \rangle &= \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-iE_i t} \\ &= \sum_{i,j} U_{\alpha i} \cdot \delta_{i,j} e^{-iE_i t} \cdot (U^{\dagger})_{j,\beta} \\ &= (U \cdot D \cdot U^{\dagger})_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.68)$$

con

$$D_{i,j} = \delta_{i,j} e^{-iE_i t} \quad (\text{matriz diagonal}). \quad (3.69)$$

Se obtiene una expresión equivalente de la amplitud de transición, insertando la Ec.(3.66) en la Ec. (3.68) y extrayendo un factor de fase global  $e^{-iE t}$ :

$$\begin{aligned} A'(\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}; t) &= \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-i \frac{m_i^2}{2E} t} \\ &= \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-i \frac{m_i^2}{2} \frac{L}{E}} \\ &= A(\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}; t), \end{aligned} \quad (3.70)$$

**CAPÍTULO 3. FÍSICA DE NEUTRINOS EN EL ME Y EN EL MDDH TIPO III**  
**3.9. FORMALISMO GENERAL DE OSCILACIONES DE NEUTRINOS**

---

donde  $L = ct$  ( $c = 1$ ) es la distancia del detector, en el cual se observa  $\nu_\beta$  desde la fuente  $\nu_\alpha$ . Para una  $j$  fija seleccionada arbitrariamente obtenemos una tercera expresión de la amplitud de transición:

$$\begin{aligned}
 A''(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) &= e^{-iE_j t} \cdot A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) \\
 &= \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-i(E_i - E_j)t} \\
 &= \delta_{\alpha\beta} + \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* \left[ e^{-i(E_i - E_j)t} - 1 \right] \\
 &= \delta_{\alpha\beta} + \sum_{i \neq j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* \left[ e^{-i\Delta_{ij}} - 1 \right], \tag{3.71}
 \end{aligned}$$

con

$$\Delta_{ij} = (E_i - E_j)t = \frac{\delta m_{ij}^2}{2} \cdot \frac{L}{E} \tag{3.72}$$

donde

$$\delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2. \tag{3.73}$$

En la Ec. (3.71) se utilizó la relación de unitariedad de la Ec. (3.63). De esta forma las amplitudes de transición son dadas por los  $(n-1)^2$  parámetros independientes de la matriz unitaria (la cual determina las amplitudes de las oscilaciones) y las  $n-1$  diferencias de las masa elevadas al cuadrado (lo cual determina la frecuencia de las oscilaciones), es decir, por los  $n(n-1)$  parámetros reales. Si  $CP$  se conserva en las oscilaciones de neutrinos, desaparecen todas las fases que violan  $CP$  y las  $U_{\alpha i}$  son reales, es decir  $U$  es una matriz ortogonal ( $U^{-1} = U^T$ ) con  $\frac{1}{2}n(n-1)$  parámetros. Entonces, el número de parámetros para las amplitudes de transición son  $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$ .

La *probabilidad de transición* se obtiene elevando al cuadrado el módulo de las amplitudes de la Ec.(3.68):

$$\begin{aligned}
 P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) &= \left| \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-iE_i t} \right|^2 \\
 &= \sum_i |U_{\alpha i} U_{\beta i}^*|^2 + 2\Re \sum_{i>j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} e^{-i\Delta_{ij}}. \tag{3.74}
 \end{aligned}$$

Aquí el segundo término describe la dependencia temporal (o espacial) de las oscilaciones de los neutrinos y el primer término es la probabilidad de transición promedio, promediada sobre el tiempo (distancia) o energía:

$$\begin{aligned}
 \langle P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) \rangle &= \sum_i |U_{\alpha i} U_{\beta i}^*|^2 \\
 &= \sum_i |U_{\alpha i}^* U_{\beta i}|^2 \\
 &= \langle P(\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha) \rangle. \tag{3.75}
 \end{aligned}$$

Midiendo las probabilidades promedio obtenemos únicamente información sobre los parámetros de la matriz de mezcla, pero no sobre las diferencias de las masas elevadas al cuadrado. Se puede mostrar de la relación de unitariedad  $\sum_i |U_{\alpha i}|^2 = 1$  que  $\langle P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha) \rangle = \sum_i |U_{\alpha i}|^4$  es mínima si todas las  $|U_{\alpha i}| = |U_\alpha|$  son iguales. Usando la relación de unitariedad (3.63) la probabilidad puede escribirse también como:

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) = \delta_{\alpha\beta} + 2\Re \sum_{i>j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} \left[ e^{-i\Delta_{ij}} - 1 \right]. \tag{3.76}$$

**CAPÍTULO 3. FÍSICA DE NEUTRINOS EN EL ME Y EN EL MDDH TIPO III**  
**3.9. FORMALISMO GENERAL DE OSCILACIONES DE NEUTRINOS**

---

Para  $t = 0$ , es decir,  $\Delta_{ij} = 0$  tenemos por supuesto  $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; 0) = \delta_{\alpha\beta}$ . Además,  $\sum_\beta P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) = 1$  debido a (3.63). Si se conserva  $CP$  ( $U_{\alpha i}$  es real), las Ecs. (3.74) y (3.76) se reducen a:

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) &= \sum_i U_{\alpha i}^2 U_{\beta i}^2 + 2 \sum_{i>j} U_{\alpha i} U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j} \cos \Delta_{ij} \\ &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i>j} U_{\alpha i} U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j} \sin^2 \left( \frac{\Delta_{ij}}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.77)$$

Para el caso  $n > 2$  las fórmulas de las probabilidades de transición son más bien complicadas. Sin embargo el formalismo se simplifica fuertemente en el caso de que todas las masas de los neutrinos estén bien separadas una de otra (*hipótesis de jerarquía de masas*), es decir,  $|m_i^2 - m_j^2| \ll |m_i^2 - m_k^2|$  para  $i, j \neq k$ . En éste caso  $\frac{L}{E}$  en la Ec.(3.72) se incrementa desde cero de tal modo que  $\Delta_{ij} \ll \Delta_{ik} = \Delta$  para  $i, j \neq k$ , únicamente ocurren oscilaciones debido a que  $\Delta \neq 0$  (*oscilaciones principales*); todas las otras  $\Delta_{ij} \approx 0$  y los paréntesis cuadrados en las Ecs.(3.71) y (3.76) desaparecen. De esta manera, para las oscilaciones principales tenemos:

$$\begin{aligned} A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) &= \delta_{\alpha\beta} + (e^{-i\Delta} - 1) \sum_{i \neq j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* \\ &= \delta_{\alpha\beta} + (e^{-i\Delta} - 1) [\delta_{\alpha\beta} - U_{\alpha k} U_{\beta k}^*] \\ &= e^{-i\Delta} [\delta_{\alpha\beta} - U_{\alpha k} U_{\beta k}^*] + U_{\alpha k} U_{\beta k}^*. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Elevando al cuadrado el módulo de  $A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t)$  se obtiene:

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) &= \delta_{\alpha\beta} + 2\Re [(e^{-i\Delta} - 1) \cdot U_{\alpha k}^* U_{\beta k} \cdot (\delta_{\alpha\beta} - U_{\alpha k} U_{\beta k}^*)] \\ &= P(\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha; t). \end{aligned} \quad (3.79)$$

De esta forma

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha) = 1 - 4 \cdot (|U_{\alpha k}|^2 - |U_{\alpha k}|^4) \cdot \sin^2 \left( \frac{\Delta}{2} \right), \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta \neq \nu_\alpha) &= 4 \cdot |U_{\alpha k}|^2 |U_{\beta k}|^2 \cdot \sin^2 \left( \frac{\Delta}{2} \right) \\ &= P(\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha \neq \nu_\beta). \end{aligned} \quad (3.81)$$

### 3.9.1. Matriz de Masa $M$

Puesto que los estados  $|\nu_i\rangle$  tienen masas definidas  $m_i$ ,  $M$  es diagonal en la representación  $|\nu_i\rangle$ :

$$\langle \nu_i | M | \nu_j \rangle = m_i \delta_{ij}. \quad (3.82)$$

En la representación  $|\nu_\alpha\rangle$  la matriz de masa tiene los elementos

$$\begin{aligned} \langle \nu_\beta | M | \nu_\alpha \rangle &= \sum_{i,j} \langle \nu_\beta | \nu_i \rangle \langle \nu_i | M | \nu_j \rangle \langle \nu_j | \nu_\alpha \rangle \\ &= \sum_i m_i U_{\alpha i}^* U_{\beta i}, \end{aligned} \quad (3.83)$$

en donde  $\langle \nu_\beta | \nu_i \rangle = U_{\beta i}^*$ ,  $\langle \nu_i | M | \nu_j \rangle = m_i \delta_{ij}$  y  $\langle \nu_j | \nu_\alpha \rangle = U_{\alpha j}$ . Si todas las masas  $m_i$  son iguales  $m_i = m$  (completa degeneración), entonces  $\langle \nu_\beta | M | \nu_\alpha \rangle = m \delta_{\alpha\beta}$  por la propiedad de unitariedad (3.63) y no son posibles las transiciones  $\nu_\alpha \rightleftharpoons \nu_\beta$ . Las masas de los autoestados de sabor  $|\nu_\alpha\rangle$  son valores de expectación del operador de masa, es decir, promedios ponderados de las masas  $m_i$ :

$$m_\alpha \equiv \langle \nu_\alpha | M | \nu_\alpha \rangle = \sum_i |U_{\alpha i}|^2 \cdot m_i, \quad (3.84)$$

con  $\sum_\alpha m_\alpha = \sum_i m_i$  por la unitariedad (invarianza de la traza), donde  $|U_{\alpha i}|^2$  es la probabilidad de descubrir el estado  $|\nu_i\rangle$  en  $|\nu_\alpha\rangle$ .

### 3.10. Matriz de Mezclas de Neutrinos

Todos los términos de masa vistos anteriormente nos conducen a la mezcla de neutrinos, en la cual, los neutrinos partícipes de la interacción débil se escriben ahora como combinación lineal de estados de neutrinos con masa definida, ya sean neutrinos de Dirac o neutrinos de Majorana. Para el caso en el cual sólo encontramos tres estados activos, cada uno asociado a una familia del ME, la mezcla de neutrinos se escribe como:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}_L \quad (3.85)$$

Si los neutrinos tienen masas no degeneradas, en general es imposible encontrar una base de estados en la que coincidan los eigenestados de sabor y de masa, tanto para leptones cargados como para los neutrinos. En otras palabras, es de esperar que se manifieste el fenómeno de la mezcla del sabor entre los tres leptones cargados y los tres neutrinos, en completa analogía al fenómeno de la mezcla del sabor de los quarks. Si existen fases complejas inamovibles en las interacciones de Yukawa, es de esperarse que aparezca la violación de CP.

Independientemente del origen dinámico de la masa pequeña de los neutrinos, se puede hablar de la mezcla de sabor leptónico, teniendo en cuenta a los términos de masa de los leptones cargados y los neutrinos de Majorana a bajas energías, a través de la Lagrangiana [27]:

$$\mathcal{L}_{Lepton}^I = -\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{l}_L^I \gamma^\mu \nu_L^I W_\mu - \frac{1}{2} \bar{\nu}_R^I M_{\nu L} \nu_L^I - \bar{l}_R^I M_L l_L^I. \quad (3.86)$$

El fenómeno de la mezcla de sabor leptónico surge de un desajuste entre las diagonalizaciones de  $M_l$  y  $M_{\nu L}$  en una base arbitraria. Cuando las matrices de masas de los neutrinos y los leptones cargados se diagonalizan a través de las transformaciones:

$$M_{\nu L} = U_L^* M_{\nu L}^{diag} U_L^\dagger, \quad (3.87)$$

$$M_l = V_L M_l^{diag} U_l^\dagger, \quad (3.88)$$

donde  $M_{\nu L}^{diag} = diag\{m_{\nu 1}, m_{\nu 2}, m_{\nu 3}\}$ ;  $M_l^{diag} = diag\{m_e, m_\mu, m_\tau\}$  con  $m_{\nu i}$  y  $m_j$  ( $i = 1, 2, 3$ ) y ( $j = e, \mu, \tau$ ) la masa de los neutrinos izquierdos de Majorana y la masa de los leptones cargados, respectivamente. Además,  $V_l$ ,  $U_l$  y  $U_\nu$  son matrices unitarias de  $3 \times 3$ .

Si se supone que los leptones cargados y los neutrinos izquierdos de Majorana pasan de la representación de interacción a la representación de las masas, a través de las siguientes transformaciones:

$$l_L^I = U_l l_L, \quad l_R^I = V_l l_R, \quad \nu_L^I = U_\nu \nu_L, \quad (3.89)$$

entonces, al sustituir las ecuaciones (3.87), (3.88) y (3.89) en la Lagrangiana  $\mathcal{L}_{Lepton}$  se obtiene:

$$\mathcal{L}_{Lepton} = -\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{l}_L\gamma^\mu U_{PMNS}\nu_L W_\mu - \frac{1}{2}\bar{\nu}_R^c M_{\nu L}^{diag}\nu_L - \bar{l}_R M_l^{diag}l_L, \quad (3.90)$$

donde la matriz unitaria es:

$$V_{PMNS} \equiv U_l^\dagger U_\nu. \quad (3.91)$$

La matriz  $V_{PMNS}$  es la matriz de mezcla leptónica en las interacciones débiles. Aunque, a menudo en la fenomenología de neutrinos se elige la base donde  $M_l = \text{diag}\{m_e, m_\mu, m_\tau\}$  con  $U_j = \mathbb{I}$  y  $V_{PMNS} = U_\nu$ , hay que tener en cuenta que tanto el sector de los leptones cargados como el de los neutrinos pueden, en general, contribuir a la mezcla de sabores de los leptones. En otras palabras,  $U_l$  y  $U_\nu$  por separado no son totalmente físicas, y solo su producto  $V_{PMNS} = U_l^\dagger U_\nu$  es una descripción física de la mezcla del sabor leptónico y la violación de CP a bajas energías.

Al igual que la matriz CKM, la matriz de mezclas leptónica PMNS puede ser parametrizada en términos de ángulos de rotación y fases asociadas a la violación de CP. Sin embargo, el número de fases no factorizables presentes en la matriz PMNS depende de si los neutrinos son de Dirac o Majorana.

**CAPÍTULO 3. FÍSICA DE NEUTRINOS EN EL ME Y EN EL MDDH TIPO III**  
**3.10. MATRIZ DE MEZCLAS DE NEUTRINOS**

Experimento	Tipo	Sensibilidad	Tipo de Reacción	Tipo de Detector	Límite de Energía	Ubicación y Operación
ANTARES	$\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$	ATM, CR, AGN, PUL				Mar Mediterráneo, Francia; 2006-
ARIANNA	$\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$	S, CR, AGN				Plataforma de hielo Ross, Antártida; Futuro
BDUNT (NT-200+)	$\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$	S, ATM, LS, AGN, PUL	CC, NC	Cherenkov	$\sim 10$ GeV	Lago Baikal, Rusia; 1993-
BOREXINO	$\nu_e$	LS	ES	Centelleo	250 – 665 KeV	Gran Sasso Italia; May 2007-
CLEAN	$\nu_e$	LS, SN, WIMP	ES	Centelleo		Futuro
Daya Bay	$\bar{\nu}_e$	R	CC	Centelleo	1.8 MeV	Daya Bay, China; 2011-
Double Chooz	$\bar{\nu}_e$	R	CC	Centelleo	1.8 MeV	Chooz, Francia; 2011-
EXO-200			BB			WIPP, Nuevo Mexico; 2009-
GALLEX	$\nu_e$	LS	CC	Radioquímica	233.2 KeV	Gran Sasso, Italy; 1991 – 1997
GNO	$\nu_e$	LS	CC	Radioquímica	233.2 KeV	Gran Sasso, Italy; Mayo 1998-Enero 2002
HALO	$\nu_e$	SN	CC, NC	De alto Z	$\sim 10$ MeV	Creighton Mine, Ontario; 2012-
HERON	$\nu_e$	LS	NC	Excitación rotacional	1 GeV	Futuro
HOMESTAKE-CHLORINE	$\nu_e$	S	CC	Radioquímica	814 KeV	Mina Homestake, Dakota del Sur; 1967 – 1998
HOMESTAKE-IODINE	$\nu_e$	S	ES, CC	Radioquímica	789 KeV	Mina Homestake, Dakota del Sur; Futuro
ICARUS	$\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$	S, ATM, GSN	ES	Cherenkov	5.9 MeV	Gran Sasso, Italia; 1993-
IceCube	$\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$	S, ATM, CR	ES	Cherenkov	$\sim 10$ MeV	Polo Sur, la Antártida; 2006-
India-based Neutrino Observatory	$\nu_\mu$	ATM	CC, NC	Elementos de detección activa de RPC	$\sim 0.6$ GeV	Theni, Tamil Nadu, India; 2018(funcionamiento)
Kamiokaande	$\nu_\mu$	S, ATM	ES	Cherenkov	7.5 MeV	Kamioka, Japón; 1986-1995
KamLAND	$\bar{\nu}_e$	R	CC	Centelleo	1.8 MeV	Kamioka, Japón; 2002-
KM3Net	$\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$	S, ATM, CR, SN, AGN, PUL		Cherenkov		Mar Mediterráneo; 2014-
LAGUNA						Futuro
LBNE						Mina Homestake (Dakota del Sur); Futuro
LENS	$\nu_e$	LS	CC	Centelleo	120 KeV	
Majorana Demonstrator	$\bar{\nu}_e$		BB			
MicroBooNE	$\nu_e, \nu_\mu$	AC, SN	ES, CC, NC	Semiconducto	2039 GeV	Mina Homestake, Dakota del Sur; 1993-
MINERvA	$\nu_\mu$	AC	CC, NC	TPC		Illinois, EE.UU.; 2014
MimBooNE	$\nu_e, \nu_\mu$	AC	CC	Centelleo	$\sim 0.5$ GeV	Illinois, USA; 2009-
MINOS	$\nu_e, \nu_\mu$	AC, ATM	CC, NC	Cherenkov	$\sim 100$ KeV	Illinois, USA; 2002-
MINOS+	$\nu_e, \nu_\mu$	AC, ATM	CC, NC	Centelleo	$\sim 0.5$ GeV	Illinois y Minnesota, Estados Unidos; 2005-2012
NEMO Experiment	$\nu_e$	LS, LSN	CC, NC	Centelleo	$\sim 0.5$ GeV	Illinois y Minnesota, Estados Unidos; 2013-
MOON			CC	Centelleo	168 KeV	Fréjus Túnel de carretera, Italia / Francia; 2003-
NEMO Telescope						Washington, EE.UU.; 1993-
NEVOD	$\nu_\mu$	ATM, CR	CC	Cherenkov	$\sim 2$ GeV	Mar Mediterráneo, Italia; 2007-
NOVA	$\nu_e, \nu_\mu$	AC	CC, NC	Centelleo	$\sim 0.1$ GeV	Moscú, Rusia; 1993-
OPERA	$\nu_\tau$	AC	CC	Emulsión Nuclear	$\sim 1.0$ GeV	Illinois y Minnesota, Estados Unidos; 2011-
RENO	$\bar{\nu}_e$	R	CC	Centelleo	1.8 MeV	LNGS ( Italia ) y el CERN; 2008-
SAGE	$\nu_e$	LS	CC, NC	Centelleo	233, 2 GeV	Corea del Sur; 2011-
SaBooNE	$\nu_\mu$	AC	CC, NC	Radioquímica	$\sim 100$ KeV	Balsam Valley, Rusia; 1990 – 2006
SNO	$\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$	S, ATM, GSN	CC, NC, ES	Centelleo	3.5 MeV	Illinois, EE.UU.; 2007 – 2008
SNO+	$\nu_e$	S, LS, R, T, SN, LSN	ES, BB	Cherenkov	$\leq 1$ MeV	Creighton Mina, Ontario; 1999 – 2006
Super-K	$\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$	S, ATM, GSN	ES, CC	Cherenkov		Creighton Mina, Ontario; 2014-
UNO	$\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$	S, ATM, GSN, RSN	ES	Cherenkov		Kamioka, Japón; 1996-
						Henderson Mina, Colorado; Futuro

Tabla 3.3: Lista de experimentos de neutrinos.



## Capítulo 4

# Cálculo del Lagrangiano de Yukawa, Matrices de Masa y Mezcla de los Neutrinos en el MDDH Tipo III

En física de partículas, un enfoque fenomenológico y teóricamente significativo para reducir el número de parámetros en el Modelo Estándar es la imposición de ceros de textura o de simetrías del sabor. Además, algunos ceros de textura se puede obtener a partir de una simetría del sabor [27].

En este trabajo, los ceros de textura en una matriz se cuenta de la siguiente manera: dos ceros de textura fuera de la diagonal cuenta como un cero, mientras que uno sobre la diagonal cuenta como un cero. Pero en la literatura se dice que una matriz de masas tiene el doble de ceros de textura que el número obtenido con la regla anterior. Esto es así, porque en la literatura normalmente se hace un tratamiento en paralelo de las matrices de masas, es decir, las matrices de masas de ambos sectores de los quarks (quarks tipo  $u$  y tipo  $d$ ) o leptones (leptones cargados y neutrinos izquierdos) contienen la misma cantidad de ceros de textura. Por lo cual, el número total de ceros de textura en una matriz de masas es la suma de los ceros de textura procedentes de las dos matrices de masas en el sector de los quarks (quarks tipo  $u$  y tipo  $d$ ) o leptones (leptones cargados y neutrinos izquierdos). Por lo tanto, para evitar la confusión en la nomenclatura de las matrices se adopta la siguiente convención:

- Se contará el número de ceros de textura en una matriz con la regla anteriormente enunciada. Así, cuando se haga referencia a una matriz de masas, se hará con el número exacto de ceros que esta contenga.
- Cuando se trabaje con la matriz de mezclas de los leptones  $U_{PMNS}$ , se tendrá que especificar el número total de ceros de textura presentes en la matriz de masas del sector leptónico.

### 4.1. Clasificación de Ceros de Textura

La clasificación de las matrices de masas con ceros de textura, se hace a través de las clases de similitud. Las clases de similitud se definen como sigue:

Dadas dos matrices  $M$  y  $M'$  se dice que  $M$  es semejante a  $M'$  si existe una matriz invertible  $T$  para la cual

$$M' = TMT^{-1} \quad \text{o} \quad M' = T^{-1}MT. \quad (4.1)$$

Las clases de equivalencia asociadas a semejanza se llaman clases de similitud. Otra forma de ver las clases de similitud es que las matrices que satisfacen la transformación de semejanza, ec.(4.1), tienen los mismos

**CAPÍTULO 4. CÁLCULO DEL LAGRANGIANO DE YUKAWA, MATRICES DE MASA Y  
MEZCLA DE LOS NEUTRINOS EN EL MDDH TIPO III**  
4.1. CLASIFICACIÓN DE CEROS DE TEXTURA

---

invariantes: traza y  $\chi$ , es decir,

$$\text{Tr}\{M\} = \text{Tr}\{M'\}, \quad \det\{M\} = \det\{M'\} \quad \text{y} \quad \chi' = \chi, \quad (4.2)$$

donde el invariante  $\chi$  se define como:

$$\chi \equiv \frac{1}{2} (\text{Tr}\{M^2\} - \text{Tr}\{M\}^2). \quad (4.3)$$

Por lo tanto, todas las matrices que componen a una clase de similitud tienen los mismos eigenvalores, ya que todos tienen el mismo polinomio característico, dado por:

$$\lambda_i^3 - \text{Tr}\{M\}\lambda_i^2 - \chi\lambda_i - \det\{M\} = 0 \quad (4.4)$$

La forma más general de la matriz de masas  $3 \times 3$ , simétrica y Hermitiana, es:

$$M^s = \begin{pmatrix} g & a & e \\ a & b & c \\ e & c & d \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M^h = \begin{pmatrix} g & a & e \\ a^* & b & c \\ e^* & c^* & d \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

donde sólo seis de los nueve elementos de estas matrices son independientes uno del otro. Por lo tanto, en cierto sentido, la transformación de semejanza de la ec.(4.1) realiza la permutación de los seis elementos independientes en las nueve entradas de las matrices. Pero si quiere preservar los invariantes de la ec.(4.2) y (4.3), los elementos de la diagonal sólo pueden intercambiarse las posiciones sobre la diagonal, mientras que los elementos fuera de la diagonal sólo pueden intercambiar posiciones fuera de la diagonal. En consecuencia, se puede concluir que todas estas operaciones se reducen a las permutaciones de tres objetos.

Las matrices de masas hermitianas, en general, se pueden diagonalizar a través de la siguiente transformación de similitud:

$$UMU^\dagger = M^{diag}, \quad (4.6)$$

donde  $M^{diag}$  es una matriz diagonal cuyos elementos son los eigenvalores de la matriz  $M$  y  $U$  es una matriz unitaria, la cual se construye con los eigenvectores complejos de  $M$ . Los eigenvalores de una matriz hermitiana son reales, por lo cual inmediatamente pueden ser asociados con las masas de las partículas involucradas.

Por otro lado, las matrices de masas simétricas complejas tienen eigenvalores complejos, los cuales no pueden ser asociados directamente con las masas de las partículas involucradas. Así que se tiene que encontrar la manera de hacer una vinculación entre los eigenvalores de la matriz y las masas de las partículas. Una manera para relacionar los eigenvalores de una matriz no hermitiana con las masas de las partículas es a través del teorema de descomposición en valores singulares (SVD, por sus siglas en inglés). Dicho teorema dice:

*Toda matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$  admite una descomposición en valores singulares. Además, los valores singulares están determinados de forma única y, si  $A$  es cuadrada y sus valores singulares son todos distintos, entonces los vectores singulares están también determinados de forma única salvo el producto por un número complejo de módulo 1.*

Por otro lado, de las propiedades de los valores singulares de una matriz se tiene que: *Los valores singulares de  $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$  distintos de cero son las raíces cuadradas positivas de los valores propios distintos de cero de  $A^\dagger A$  y también de los de  $AA^\dagger$ . Además están determinados de forma única.*

Ahora, para diagonalizar a la matriz de masas de los neutrinos izquierdos de Majorana, la cual, en general, es simétrica compleja, se necesita construir las formas bilineales

$$M_{\nu_L} M_{\nu_L}^\dagger \quad \text{y} \quad M_{\nu_L}^\dagger M_{\nu_L}, \quad (4.7)$$

las cuales pueden ser diagonalizadas a través de las siguientes transformaciones:

$$U_R^\dagger M_{\nu_L}^\dagger M_{\nu_L} U_R = \text{diag}\{m_{\nu_1}^{s2}, m_{\nu_2}^{s2}, m_{\nu_3}^{s2}\}, \quad (4.8)$$

$$U_L^\dagger M_{\nu_L} M_{\nu_L}^\dagger U_L = \text{diag}\{m_{\nu_1}^{s2}, m_{\nu_2}^{s2}, m_{\nu_3}^{s2}\},$$

donde las  $m_{\nu_j}^s$ , con  $j = 1, 2, 3$ , son los valores singulares de la matriz  $M_{\nu_L}$ . Así, con ayuda de la simetría de la matriz  $M_{\nu_L}$  y las transformaciones de la ec.(4.8), la matriz de masa de los neutrinos izquierdos de Majorana puede ser diagonalizada por la transformación:

$$U_\nu^\dagger M_{\nu_L} U_\nu^* = \text{diag}\{m_{\nu_1}^s, m_{\nu_2}^s, m_{\nu_3}^s\}, \quad (4.9)$$

donde  $U_\nu \equiv U_L$  es una matriz unitaria. Entonces, los valores singulares de la matriz  $M_{\nu_L}$  pueden ser asociados directamente con las masas de los neutrinos ligeros.

## 4.2. Factorización de Fases

Para este trabajo consideramos  $M_{\nu_D}$  la matriz de masas de los neutrinos de Dirac hermitiana con dos ceros de textura de la forma:

$$M_{\nu_D} = \begin{pmatrix} 0 & C & 0 \\ C^* & \tilde{B} & B \\ 0 & B^* & A \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

con  $M_{\nu_D}^T$  la matriz transpuesta de  $M_{\nu_D}$ :

$$M_{\nu_D}^T = \begin{pmatrix} 0 & C^* & 0 \\ C & \tilde{B} & B^* \\ 0 & B & A \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

y  $M_{\nu_R}$  las matrices de masas de los neutrinos derechos de Majorana simétricas de la forma:

$$\begin{aligned} M_{i1} &= \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ c & \tilde{b} & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}, & M_{i2} &= \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ c & 0 & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}, \\ M_{i3} &= \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ c & \tilde{b} & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, & M_{i4} &= \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde  $i = u, d, e, \nu_R$ .

Las matrices inversas dadas en la ecuación (4.12), son:

$$\begin{aligned} M_{i1}^{-1} &= \begin{pmatrix} -\frac{a\tilde{b}-b^2}{ac^2} & \frac{1}{c} & -\frac{b}{ac} \\ \frac{1}{c} & 0 & 0 \\ -\frac{b}{ac} & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, & M_{i2}^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{b^2}{ac^2} & \frac{1}{c} & -\frac{b}{ac} \\ \frac{1}{c} & 0 & 0 \\ -\frac{b}{ac} & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \\ M_{i3}^{-1} &= \begin{pmatrix} -\frac{\tilde{b}}{c^2} & \frac{1}{c} & 0 \\ \frac{1}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, & M_{i4}^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c} & 0 \\ \frac{1}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Consideramos a los neutrinos izquierdos como partículas de Majorana, donde adquieren su masa pequeña a través del mecanismo see saw tipo I como:

$$M_{\nu_L} = M_{\nu_D} M_{\nu_R}^{-1} M_{\nu_D}^T. \quad (4.14)$$

Sustituyendo las matrices de las ecuaciones (4.10), (4.11) y (4.13) en (4.14) respectivamente, tenemos:

$$M_{j1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{cc^*}{c} & 0 \\ \frac{cc^*}{c} & \left(-\frac{bB}{ac} - \frac{(a\tilde{b}-b^2)C^*}{ac^2} + \frac{\tilde{B}}{c}\right) C^* + \frac{\tilde{B}C^*}{c} + B\left(\frac{B}{a} - \frac{bC^*}{ac}\right) & \frac{B^*C^*}{c} + A\left(\frac{B}{a} - \frac{bC^*}{ac}\right) \\ 0 & \frac{AB}{a} + \left(\frac{B^*}{c} - \frac{Ab}{ac}\right) C^* & \frac{A^2}{a} \end{pmatrix},$$

$$M_{j2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{cc^*}{c} & 0 \\ \frac{cc^*}{c} & \left(\frac{C^*b^2}{ac^2} - \frac{Bb}{ac} + \frac{\tilde{B}}{c}\right) C^* + \frac{\tilde{B}C^*}{c} + B\left(\frac{B}{a} - \frac{bC^*}{ac}\right) & \frac{B^*C^*}{c} + A\left(\frac{B}{a} - \frac{bC^*}{ac}\right) \\ 0 & \frac{AB}{a} + \left(\frac{B^*}{c} - \frac{Ab}{ac}\right) C^* & \frac{A^2}{a} \end{pmatrix},$$

$$M_{j3} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{cc^*}{c} & 0 \\ \frac{cc^*}{c} & \frac{B^2}{a} + \frac{\tilde{B}C^*}{c} + C^*\left(\frac{\tilde{B}}{c} - \frac{\tilde{b}C^*}{c^2}\right) & \frac{AB}{a} + \frac{B^*C^*}{c} \\ 0 & \frac{AB}{a} + \frac{B^*C^*}{c} & \frac{A^2}{a} \end{pmatrix},$$

$$M_{j4} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{cc^*}{c} & 0 \\ \frac{cc^*}{c} & \frac{B^2}{a} + \frac{2\tilde{B}C^*}{c} & \frac{AB}{a} + \frac{B^*C^*}{c} \\ 0 & \frac{AB}{a} + \frac{B^*C^*}{c} & \frac{A^2}{a} \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

donde  $j = \nu_L$ .

- Ahora tomando la matriz de masa *hermitiana* de la ec. (4.10), la podemos reescribir factorizando la fase como:

$$M_{\nu_D} = P^\dagger \bar{M}_{\nu_D} P \quad (4.16)$$

donde  $\bar{M}_{\nu_D}$  esta dada en forma polar,

$$\bar{M}_{\nu_D} = \begin{pmatrix} 0 & |C|e^{i\theta_C} & 0 \\ |C|e^{-i\theta_C} & \tilde{B} & |B|e^{i\theta_B} \\ 0 & |B|e^{-i\theta_B} & A \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

y  $P$  es una matriz diagonal de fases,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\eta_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\eta_2} \end{pmatrix}, \quad P^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\eta_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\eta_2} \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

entonces sustituyendo las ecuaciones (4.17) y (4.18) en (4.16) tenemos,

$$M_{\nu_D} = \begin{pmatrix} 0 & |C|e^{i(\theta_C+\eta_1)} & 0 \\ |C|e^{-i(\theta_C+\eta_1)} & \tilde{B} & |B|e^{i(\theta_B+\eta_2-\eta_1)} \\ 0 & |B|e^{-i(\theta_B+\eta_2-\eta_1)} & A \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

de la ec. (4.19) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

- $\theta_C + \eta_1 = 0$ , si sólo si,  $\eta_1 = -\theta_C$ , por lo tanto,  $e^{i(\theta_C+\eta_1)} = 1$
- $\theta_B + \eta_2 - \eta_1 = 0$ , entonces  $\theta_B + \eta_2 + \theta_C = 0$ , si sólo si,  $\eta_2 = -(\theta_C + \theta_B)$ , por lo tanto,  $e^{i(\theta_B+\eta_2-\eta_1)} = 1$ .

Así la matriz de masas hermitiana de la ec. (4.19) tiene la forma:

$$M_{\nu_D} = \begin{pmatrix} 0 & |C| & 0 \\ |C| & \tilde{B} & |B| \\ 0 & |B| & A \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

donde los invariantes de la matriz de la ecuación (4.20) son:

$$Tr\{M_{\nu_D}\} = A + \tilde{B}, \quad Det\{M_{\nu_D}\} = -A|C|^2, \quad (4.21)$$

$$\chi = \frac{1}{2} \left( Tr\{M_{\nu_D}^2\} - Tr\{M_{\nu_D}\}^2 \right) = -A\tilde{B} + |B|^2 + |C|^2, \quad (4.22)$$

y el polinomio característico esta dado por:

$$\lambda\mathbb{I} - M_{\nu_D} = \begin{pmatrix} \lambda & -|C| & 0 \\ -|C| & \lambda - \tilde{B} & -|B| \\ 0 & -|B| & \lambda - A \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

donde el determinante es,

$$\begin{aligned} Det\{\lambda\mathbb{I} - M_{\nu_D}\} &= A|C|^2 + A\tilde{B}\lambda - A\lambda^2 - \lambda|\tilde{B}|^2 - \lambda|C|^2 - \tilde{B}\lambda^2 + \lambda^3 \\ &= \lambda \left( A\tilde{B} - |\tilde{B}|^2 - |C|^2 \right) + A|C|^2 - \lambda^2 \left( A + \tilde{B} \right) + \lambda^3 \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde  $\mathbb{I}$  es la matriz identidad.

- Tomando la matriz de masa *simétrica* más general ( $M_{i1}$ ) dada en la ec. (4.12) como:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & C & 0 \\ C & \tilde{B} & B \\ 0 & B & A \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

la podemos reescribir factorizando la fase,

$$M = Q\bar{M}Q \quad (4.26)$$

donde  $\bar{M}$  esta dada en forma polar,

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} 0 & |C|e^{i\theta_C} & 0 \\ |C|e^{i\theta_C} & |\tilde{B}|e^{i\theta_B} & |B|e^{i\theta_B} \\ 0 & |B|e^{i\theta_B} & |A|e^{i\theta_A} \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

y  $Q$  es una matriz diagonal de fases,

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\eta_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\eta_2} \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

entonces sustituyendo las ecuaciones (4.27) y (4.28) en (4.26),

$$M = \begin{pmatrix} 0 & |C|e^{i(\theta_C-\eta_1)} & 0 \\ |C|e^{i(\theta_C-\eta_1)} & |\tilde{B}|e^{i(\theta_B-2\eta_1)} & |B|e^{i(\theta_B-\eta_1-\eta_2)} \\ 0 & |B|e^{i(\theta_B-\eta_1-\eta_2)} & |A|e^{i(\theta_A-2\eta_2)} \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

de la ec. (4.29) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

- $\theta_C - \eta_1 = 0$ , si sólo si,  $\eta_1 = \theta_C$ , por lo tanto,  $e^{i(\theta_C+\eta_1)} = 1$
- $\theta_B - \eta_1 - \eta_2 = 0$ , entonces  $\theta_B - \theta_C - \eta_2 = 0$ , si sólo si,  $\eta_2 = (-\theta_B + \theta_C)$ , por lo tanto,  $e^{i(\theta_B-\eta_1-\eta_2)} = 1$ .
- $\theta_A - 2\eta_2 = 0$ , si sólo si,  $\theta_A = 2\eta_2$ , por lo tanto,  $e^{i(\theta_A-2\eta_2)} = 1$ .
- $\theta_B - 2\eta_1 = 0$ , si sólo si,  $\theta_B = 2\eta_1$ , por lo tanto,  $e^{i(\theta_B-2\eta_1)} = 1$ .

Así la matriz de masas simétrica de la ec. (4.29) tiene la forma:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & |C| & 0 \\ |C| & |\tilde{B}| & |B| \\ 0 & |B| & |A| \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

donde los invariantes de la matriz de la ecuación (4.30) son:

$$Tr\{M\} = |A| + |\tilde{B}|, \quad Det\{M\} = -|A||C|^2, \quad (4.31)$$

$$\chi = \frac{1}{2}(Tr\{M^2\} - Tr\{M\}^2) = -|A||\tilde{B}| + |B|^2 + |C|^2. \quad (4.32)$$

el polinomio característico esta dado por:

$$\lambda\mathbb{I} - M = \begin{pmatrix} \lambda & -|C| & 0 \\ -|C| & \lambda - |\tilde{B}| & -|B| \\ 0 & -|B| & \lambda - |A| \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

y el determinante es

$$\begin{aligned} \text{Det}\{\lambda\mathbb{I} - M\} &= |A||C|^2 + |A||\tilde{B}|\lambda - |A|\lambda^2 - \lambda|\tilde{B}|^2 - \lambda|C|^2 - |\tilde{B}|\lambda^2 + \lambda^3 \\ &= \lambda \left( |A||\tilde{B}| - |\tilde{B}|^2 - |C|^2 \right) + |A||C|^2 - \lambda^2 \left( |A| + |\tilde{B}| \right) + \lambda^3 \end{aligned} \quad (4.34)$$

Debido a que las matrices de masas de las ecuaciones (4.12) forman parte de la misma clase de equivalencia, estan relacionadas entre sí, a través de la relación de similitud,  $M' = TMT^{-1}$ , por lo tanto tienen los mismos invariantes y los mismos eigenvalores, ya que todos los elementos de una clase de equivalencia tienen la misma información física.

### 4.3. Reparametrización de las Matrices de Masas

La reparametrización de la matriz simétrica real  $\bar{M}$ , en términos de sus eigenvalores se hace con ayuda de los invariantes de la matriz, para esto se tiene en cuenta que la matriz  $\bar{M}$  puede ser diagonalizada por una matriz ortogonal real  $U$ , a través de la transformación de similitud. Para la matriz de masa hermitiana,

$$U\bar{M}_{\nu_D}U^\dagger = M_{diag} \quad (4.35)$$

donde  $M_{diag}$  es una matriz diagonal de la forma,

$$M_{diag} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

y sus invariantes son:

$$\text{Det}\{M_{diag}\} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3, \quad (4.37)$$

$$\text{Tr}\{M_{diag}\} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad (4.38)$$

$$\chi = \frac{1}{2} (\text{Tr}\{M_{diag}^2\} - \text{Tr}\{M_{diag}\}^2) = -\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1(\lambda_2\lambda_3), \quad (4.39)$$

entonces por las propiedades de la traza se tiene,

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{M_{diag}\} &= \text{Tr}\{UM_{\nu_D}U^\dagger\}, \\ &= \text{Tr}\{U^\dagger UM_{\nu_D}\}, \\ &= \text{Tr}\{M_{\nu_D}\}, \\ \therefore \text{Tr}\{M_{\nu_D}\} &= \text{Tr}\{M_{diag}\}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

por las ecuaciones (4.21) y (4.38),

$$\begin{aligned} A + \tilde{B} &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ \Rightarrow \tilde{B} &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - A, \end{aligned} \quad (4.41)$$

por las propiedades del determinante se tiene,

$$\begin{aligned}
 Det\{M_{diag}\} &= Det\{UM_{\nu_D}U^\dagger\}, \\
 &= Det\{U\}Det\{M_{\nu_D}\}Det\{U^\dagger\}, \\
 &= Det\{U\}Det\{U^\dagger\}Det\{M_{\nu_D}\}, \\
 &= Det\{UU^\dagger\}Det\{M_{\nu_D}\}, \\
 &= Det\{1\}Det\{M_{\nu_D}\}, \\
 &= Det\{M_{\nu_D}\}, \\
 \therefore Det\{M_{\nu_D}\} &= Det\{M_{diag}\}, \tag{4.42}
 \end{aligned}$$

por las ecuaciones (4.21) y (4.37),

$$\begin{aligned}
 -A|C|^2 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\
 \Rightarrow |C| &= \sqrt{\frac{-\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{A}} \tag{4.43}
 \end{aligned}$$

y sustituyendo los valores de las ecuaciones (4.22) y (4.39),

$$\begin{aligned}
 -A\tilde{B} + |B|^2 + |C|^2 &= -\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1(\lambda_2\lambda_3), \\
 \Rightarrow |B|^2 &= -\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1(\lambda_2\lambda_3) + A\tilde{B} - |C|^2, \\
 \Rightarrow |B|^2 &= -\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1(\lambda_2\lambda_3) - \left(\frac{-\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{A}\right) + A(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), \\
 \Rightarrow |B|^2 &= \sqrt{\frac{(\lambda_3 - A)(A - \lambda_1)(A - \lambda_2)}{A}} \tag{4.44}
 \end{aligned}$$

o Para la matriz de masa simetrica,

$$UMU^\dagger = M_{diag} \tag{4.45}$$

donde  $M_{diag}$  esta dada en la ec. (4.36) y sus invariantes estan dados por las ecuaciones , (4.37), (4.38) y (4.39), entonces por las propiedades de la traza se tiene,

$$\begin{aligned}
 Tr\{M_{diag}\} &= Tr\{UMU^\dagger\}, \\
 &= Tr\{U^\dagger UM\}, \\
 &= Tr\{M\}, \\
 \therefore Tr\{M\} &= Tr\{M_{diag}\}, \tag{4.46}
 \end{aligned}$$

por las ecuaciones (4.31) y (4.38),

$$\begin{aligned}
 |A| + |\tilde{B}| &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\
 \Rightarrow |\tilde{B}| &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - |A|, \tag{4.47}
 \end{aligned}$$

por las propiedades del determinante se tiene,

$$\begin{aligned}
 \text{Det}\{M_{diag}\} &= \text{Det}\{UMU^\dagger\}, \\
 &= \text{Det}\{U\}\text{Det}\{M\}\text{Det}\{U^\dagger\}, \\
 &= \text{Det}\{U\}\text{Det}\{U^\dagger\}\text{Det}\{M\}, \\
 &= \text{Det}\{UU^\dagger\}\text{Det}\{M\}, \\
 &= \text{Det}\{1\}\text{Det}\{M\}, \\
 &= \text{Det}\{M\}, \\
 \therefore \text{Det}\{M\} &= \text{Det}\{M_{diag}\},
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

por las ecuaciones (4.31) y (4.37),

$$\begin{aligned}
 -|A||C|^2 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\
 \Rightarrow |C| &= \sqrt{\frac{-\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{|A|}}
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

y sustituyendo los valores de las ecuaciones (4.32) y (4.39),

$$\begin{aligned}
 -|A||\tilde{B}| + |B|^2 + |C|^2 &= -\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1(\lambda_2\lambda_3), \\
 \Rightarrow |B|^2 &= -\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1(\lambda_2\lambda_3) + |A||\tilde{B}| - |C|^2, \\
 \Rightarrow |B|^2 &= -\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1(\lambda_2\lambda_3) - \left(\frac{-\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{|A|}\right) + |A|(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), \\
 \Rightarrow |B|^2 &= \sqrt{\frac{(\lambda_3 - |A|)(|A| - \lambda_1)(|A| - \lambda_2)}{|A|}}
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

## 4.4. Matriz Hermitiana

◦ Para una *jerarquía normal (hermitiana)* ( $\lambda_{i3} > \lambda_{i2} > \lambda_{i1}$ ).

$$\tilde{B}_i = \lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \lambda_{i3} - A_i \tag{4.51}$$

$$|C_i|^2 = -\frac{\lambda_{i1}\lambda_{i2}\lambda_{i3}}{A_i} \tag{4.52}$$

$$|B_i|^2 = \frac{(\lambda_{i3} - A_i)(A_i - \lambda_{i1})(A_i - \lambda_{i2})}{A_i} \tag{4.53}$$

Tomando  $\lambda_{i1} = -|\lambda_{i1}|$  se tiene que las ecuaciones (4.51), (4.52) y (4.53) ahora son:

$$\tilde{B}_i = -|\lambda_{i1}| + \lambda_{i2} + \lambda_{i3} - A_i \tag{4.54}$$

$$|C_i| = \sqrt{\frac{|\lambda_{i1}|\lambda_{i2}\lambda_{i3}}{A_i}} \tag{4.55}$$

$$|B_i| = \sqrt{\frac{(\lambda_{i3} - A_i)(A_i + |\lambda_{i1}|)(A_i - \lambda_{i2})}{A_i}} \tag{4.56}$$

De la ecuación (4.56) para que  $|B_i| > 0$  vemos que  $\lambda_{i3} > A_i$  y  $A_i > \lambda_{i2}$ , entonces  $\lambda_{i3} > A_i > \lambda_{i2}$ .

Tomando  $\lambda_{i2} = -|\lambda_{i2}|$  se tiene que las ecuaciones (4.51), (4.52) y (4.53) ahora son:

$$\tilde{B}_i = \lambda_{i1} - |\lambda_{i2}| + \lambda_{i3} - A_i \quad (4.57)$$

$$|C_i| = \sqrt{\frac{\lambda_{i1}|\lambda_{i2}|\lambda_{i3}}{A_i}} \quad (4.58)$$

$$|B_i| = \sqrt{\frac{(\lambda_{i3} - A_i)(A_i - \lambda_{i1})(A_i + |\lambda_{i2}|)}{A_i}} \quad (4.59)$$

De la ecuación (4.59) para que  $|B_i| > 0$  vemos que  $\lambda_{i3} > A_i$  y  $A_i > \lambda_{i1}$ , entonces  $\lambda_{i3} > A_i > \lambda_{i1}$ .

Tomando  $\lambda_{i3} = -|\lambda_{i3}|$  se tiene que las ecuaciones (4.51), (4.52) y (4.53) ahora son:

$$\tilde{B}_i = \lambda_{i1} + \lambda_{i2} - |\lambda_{i3}| - A_i \quad (4.60)$$

$$|C_i| = \sqrt{\frac{\lambda_{i1}\lambda_{i2}|\lambda_{i3}|}{A_i}} \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} |B_i| &= \sqrt{\frac{(-|\lambda_{i3}| - A_i)(A_i - \lambda_{i1})(A_i - \lambda_{i2})}{A_i}} \\ &= \sqrt{\frac{-(|\lambda_{i3}| + A_i)(A_i - \lambda_{i1})(A_i - \lambda_{i2})}{A_i}} \\ &= \sqrt{\frac{(|\lambda_{i3}| + A_i)(A_i - \lambda_{i1})(\lambda_{i2} - A_i)}{A_i}} \end{aligned} \quad (4.62)$$

De la ecuación (4.62) para que  $|B_i| > 0$  vemos que  $A_i > \lambda_{i1}$  y  $\lambda_{i2} > A_i$ , entonces  $\lambda_{i2} > A_i > \lambda_{i1}$ .

Entonces tenemos para una *jerarquía normal* ( $\lambda_{i3} > \lambda_{i2} > \lambda_{i1}$ ):

$$\lambda_{i1} = -|\lambda_{i1}|, \quad \lambda_{i3} > A_i > \lambda_{i2}, \quad (4.63)$$

$$\lambda_{i2} = -|\lambda_{i2}|, \quad \lambda_{i3} > A_i > \lambda_{i1}, \quad (4.64)$$

$$\lambda_{i3} = -|\lambda_{i3}|, \quad \lambda_{i2} > A_i > \lambda_{i1}, \quad (4.65)$$

Para leptones cargados:  $\lambda_{i1} = m_e$ ,  $\lambda_{i2} = m_\mu$ ,  $\lambda_{i3} = m_\tau$ .

Tomamos  $\lambda_{i2} = -|\lambda_{i2}|$  ya que contiene todos los valores de  $\lambda_{i3} > \lambda_{i2} > \lambda_{i1}$ , tenemos  $m_\mu = -|m_\mu|$ . Entonces  $\lambda_{i3} > A_i > \lambda_{i1}$ .

Ahora tomando los valores para los leptones cargados tenemos:

$$m_\tau > A_l > m_e$$

$$\Rightarrow 1 > a_l > \tilde{m}_e$$

donde

$$a_l = \frac{A_l}{m_\tau} \quad y \quad \tilde{m}_e = \frac{m_e}{m_\tau}$$

La jerarquía normal del espectro de masa (energía) de los neutrinos es la que correspondería al paralelismo con la masa de los leptones y quarks observados:  $\lambda_{i1} = m_{\nu_1}$ ,  $\lambda_{i2} = m_{\nu_2}$ ,  $\lambda_{i3} = m_{\nu_3}$ , entonces:

$$\begin{aligned} m_{\nu_3} &> A_i > m_{\nu_1} \\ \Rightarrow 1 &> a_i > \tilde{m}_{\nu_1} \end{aligned}$$

donde

$$a_i = \frac{A_i}{m_{\nu_3}} \quad y \quad \tilde{m}_{\nu_1} = \frac{m_{\nu_1}}{m_\tau},$$

Normalizando con respecto al eigenvalor más grande  $\lambda_{i2} = -|\lambda_{i2}|$ , para una jerarquía normal, se tiene:

$$\begin{aligned} |C_i| &= \sqrt{\frac{\lambda_{i1} |\lambda_{i2}| \lambda_{i3} \lambda_{i3}^3}{A_i \lambda_{i3}^3}} \\ &= \sqrt{\frac{\frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{i3}} \frac{|\lambda_{i2}|}{\lambda_{i3}} \frac{\lambda_{i3}}{\lambda_{i3}}}{\frac{A_i}{\lambda_{i3}}} \lambda_{i3}^2} \\ &= \lambda_{i3} \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_{i1} \tilde{\lambda}_{i2}}{a_i}} \end{aligned} \tag{4.66}$$

donde

$$\tilde{\lambda}_{i1} = \frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{i3}}, \quad \tilde{\lambda}_{i2} = \frac{|\lambda_{i2}|}{\lambda_{i3}}, \quad a_i = \frac{A_i}{\lambda_{i3}}, \tag{4.67}$$

sea

$$c_i = \frac{|C_i|}{\lambda_{i3}}, \quad \Rightarrow c_i = \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_{i1} \tilde{\lambda}_{i2}}{a_i}}, \tag{4.68}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_i &= (\lambda_{i1} - |\lambda_{i2}| + \lambda_{i3} - A_i) \left( \frac{\lambda_{i3}}{\lambda_{i3}} \right) \\ &= \left( \frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{i3}} - \frac{|\lambda_{i2}|}{\lambda_{i3}} + \frac{\lambda_{i3}}{\lambda_{i3}} - \frac{A_i}{\lambda_{i3}} \right) \lambda_{i3} \\ &= (\tilde{\lambda}_{i1} - \tilde{\lambda}_{i2} + 1 - a_i) \lambda_{i3}, \end{aligned} \tag{4.69}$$

sea

$$\tilde{b}_i = \frac{\tilde{B}_i}{\lambda_{i3}}, \quad \Rightarrow \tilde{b}_i = (\tilde{\lambda}_{i1} - \tilde{\lambda}_{i2} + 1 - a_i) \tag{4.70}$$

$$\begin{aligned} |B_i| &= \sqrt{\frac{(\lambda_{i3} - A_i)(A_i - \lambda_{i1})(A_i + |\lambda_{i2}|) \lambda_{i3}^3}{A_i \lambda_{i3}^3}} \\ &= \sqrt{\frac{\left( \frac{\lambda_{i3} - A_i}{\lambda_{i3}} \right) \left( \frac{A_i - \lambda_{i1}}{\lambda_{i3}} \right) \left( \frac{A_i + |\lambda_{i2}|}{\lambda_{i3}} \right)}{\frac{A_i}{\lambda_{i3}}} \lambda_{i3}^2} \\ &= \lambda_{i3} \sqrt{\frac{(1 - a_i)(a_i - \tilde{\lambda}_{i1})(a_i + \tilde{\lambda}_{i2})}{a_i}}, \end{aligned} \tag{4.71}$$

sea

$$b_i = \frac{|B_i|}{\lambda_{i3}}, \quad \Rightarrow b_i = \sqrt{\frac{(1 - a_i)(a_i - \tilde{\lambda}_{i1})(a_i + \tilde{\lambda}_{i2})}{a_i}}, \quad (4.72)$$

Tomando la matriz hermitiana en su forma polar y sustituyendo las ecuaciones (4.67), (4.68), (4.70) y (4.72) tenemos:

$$\begin{aligned} M_i &= \begin{pmatrix} 0 & |C_i| & 0 \\ |C_i| & \tilde{B}_i & |B_i| \\ 0 & |B_i| & A_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & c_i \lambda_{i3} & 0 \\ c_i \lambda_{i3} & \tilde{b}_i \lambda_{i3} & b_i \lambda_{i3} \\ 0 & b_i \lambda_{i3} & a_i \lambda_{i3} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.73)$$

sea

$$\tilde{M}_i = \frac{M_i}{\lambda_{i3}}, \quad \Rightarrow \tilde{M}_i = \begin{pmatrix} 0 & c_i & 0 \\ c_i & \tilde{b}_i & b_i \\ 0 & b_i & a_i \end{pmatrix}. \quad (4.74)$$

- Para una *jerarquía normal* ( $\lambda_{i3} > \lambda_{i2} > \lambda_{i1}$ ) con  $\lambda_{i2} = -|\lambda_{i2}|$  el rango de valores permitidos para el parámetro  $a_i$  es:

$$\lambda_{i3} > A_i > \lambda_{i1} \quad \Rightarrow 1 > \frac{A_i}{\lambda_{i3}} > \frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{i3}}, \quad \Rightarrow 1 > a_i > \tilde{\lambda}_{i1} \quad (4.75)$$

Suponiendo un ansantz jerarquico, es decir, la partícula más pesada se coloca en el elemento (3, 3) de la matriz de masa

$$UM_iU^\dagger = \text{diag}\{\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \lambda_{i3}\} \quad (4.76)$$

$$\begin{aligned} M_i &= U^\dagger \text{diag}\{\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \lambda_{i3}\}U \\ &= \lambda_{i1}|1\rangle\langle 1| + \lambda_{i2}|2\rangle\langle 2| + \lambda_{i3}|3\rangle\langle 3| \end{aligned} \quad (4.77)$$

donde  $U = (|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle)$  entonces se supone que el parámetro  $a_i$  esta muy cerca del 1, por lo tanto se puede definir  $a_i \equiv 1 - \delta_i$ . Entonces, sustituyendo los valores de la ecuaciones las ecuaciones (4.67), (4.68), (4.70) y (4.72) en (4.74), se tiene:

$$\begin{aligned}
 \widetilde{M}_i &= \begin{pmatrix} 0 & c_i & 0 \\ c_i & \widetilde{b}_i & b_i \\ 0 & b_i & a_i \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\widetilde{\lambda}_{i1}\widetilde{\lambda}_{i2}}{a_i}} & 0 \\ \sqrt{\frac{\widetilde{\lambda}_{i1}\widetilde{\lambda}_{i2}}{a_i}} & (\widetilde{\lambda}_{i1} - \widetilde{\lambda}_{i2} + 1 - a_i) & \sqrt{\frac{(1-a_i)(a_i-\widetilde{\lambda}_{i1})(a_i+\widetilde{\lambda}_{i2})}{a_i}} \\ 0 & \sqrt{\frac{(1-a_i)(a_i-\widetilde{\lambda}_{i1})(a_i+\widetilde{\lambda}_{i2})}{a_i}} & a_i \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\widetilde{\lambda}_{i1}\widetilde{\lambda}_{i2}}{1-\delta_i}} & 0 \\ \sqrt{\frac{\widetilde{\lambda}_{i1}\widetilde{\lambda}_{i2}}{1-\delta_i}} & (\widetilde{\lambda}_{i1} - \widetilde{\lambda}_{i2} + \delta_i) & \sqrt{\frac{(\delta_i)(1-\delta_i-\widetilde{\lambda}_{i1})(1-\delta_i+\widetilde{\lambda}_{i2})}{1-\delta_i}} \\ 0 & \sqrt{\frac{(\delta_i)(1-\delta_i-\widetilde{\lambda}_{i1})(1-\delta_i+\widetilde{\lambda}_{i2})}{1-\delta_i}} & 1 - \delta_i \end{pmatrix} \quad (4.78)
 \end{aligned}$$

entonces

$$\widetilde{M}_i = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\widetilde{\lambda}_{i1}\widetilde{\lambda}_{i2}}{1-\delta_i}} & 0 \\ \sqrt{\frac{\widetilde{\lambda}_{i1}\widetilde{\lambda}_{i2}}{1-\delta_i}} & \widetilde{\lambda}_{i1} - \widetilde{\lambda}_{i2} + \delta_i & \sqrt{\frac{\delta_i}{1-\delta_i} f_{i1} f_{i2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{\delta_i}{1-\delta_i} f_{i1} f_{i2}} & 1 - \delta_i \end{pmatrix} \quad (4.79)$$

donde

$$f_{i1} = (1 - \delta_i - \widetilde{\lambda}_{i1}) \quad (4.80)$$

$$f_{i2} = (1 - \delta_i - \widetilde{\lambda}_{i2}) \quad (4.81)$$

Ahora tomando la ecuación (4.75) y sustituyendo el parámetro  $a_i$  se tiene  $1 > a_i > \widetilde{\lambda}_{i1}$ , entonces  $1 > 1 - \delta_i > \widetilde{\lambda}_{i1}$  de aquí vemos que  $1 > 1 - \delta_i$ , entonces  $\delta_i > 0$  y  $1 - \delta_i > \widetilde{\lambda}_{i1}$ , entonces  $1 - \widetilde{\lambda}_{i1} > \delta_i$ , por lo tanto  $1 - \widetilde{\lambda}_{i1} > \delta_i > 0$ .

○ Para una *jerarquía invertida* ( $\lambda_{i2} > \lambda_{i1} > \lambda_{i3}$ ).

$$\widetilde{B}_i = \lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \lambda_{i3} - A_i \quad (4.82)$$

$$|C_i|^2 = -\frac{\lambda_{i1}\lambda_{i2}\lambda_{i3}}{A_i} \quad (4.83)$$

$$|B_i|^2 = \frac{(A_i - \lambda_{i3})(A_i - \lambda_{i1})(\lambda_{i2} - A_i)}{A_i}. \quad (4.84)$$

Tomando  $\lambda_{i1} = -|\lambda_{i1}|$  se tiene que las ecuaciones (4.82), (4.83) y (4.84) ahora son:

$$\tilde{B}_i = -|\lambda_{i1}| + \lambda_{i2} + \lambda_{i3} - A_i, \quad (4.85)$$

$$|C_i| = \sqrt{\frac{|\lambda_{i1}|\lambda_{i2}\lambda_{i3}}{A_i}}, \quad (4.86)$$

$$|B_i| = \sqrt{\frac{(A_i - \lambda_{i3})(A_i + |\lambda_{i1}|)(\lambda_{i2} - A_i)}{A_i}}, \quad (4.87)$$

De la ecuación (4.87) para que  $|B_i| > 0$  vemos que  $A_i > \lambda_{i3}$  y  $\lambda_{i2} > A_i$ , entonces  $\lambda_{i2} > A_i > \lambda_{i3}$

Tomando  $\lambda_{i2} = -|\lambda_{i2}|$  se tiene que las ecuaciones (4.82), (4.83) y (4.84) ahora son:

$$\tilde{B}_i = \lambda_{i1} - |\lambda_{i2}| + \lambda_{i3} - A_i \quad (4.88)$$

$$|C_i| = \sqrt{\frac{\lambda_{i1}|\lambda_{i2}|\lambda_{i3}}{A_i}} \quad (4.89)$$

$$\begin{aligned} |B_i| &= \sqrt{\frac{(A_i - \lambda_{i3})(A_i - \lambda_{i1})(-|\lambda_{i2}| - A_i)}{A_i}} \\ &= \sqrt{\frac{(A_i - \lambda_{i3})(A_i - \lambda_{i1})(|\lambda_{i2}| + A_i)}{A_i}} \\ &= \sqrt{\frac{(A_i - \lambda_{i3})(\lambda_{i1} - A_i)(|\lambda_{i2}| + A_i)}{A_i}} \end{aligned} \quad (4.90)$$

De la ecuación (4.90) para que  $|B_i| > 0$  vemos que  $A_i > \lambda_{i3}$  y  $\lambda_{i1} > A_i$ , entonces  $\lambda_{i1} > A_i > \lambda_{i3}$ . Tomando  $\lambda_{i3} = -|\lambda_{i3}|$  se tiene que las ecuaciones (4.82), (4.83), (4.84) ahora son:

$$\tilde{B}_i = \lambda_{i1} + \lambda_{i2} - |\lambda_{i3}| - A_i \quad (4.91)$$

$$|C_i| = \sqrt{\frac{\lambda_{i1}\lambda_{i2}|\lambda_{i3}|}{A_i}} \quad (4.92)$$

$$|B_i| = \sqrt{\frac{(A_i + |\lambda_{i3}|)(A_i - \lambda_{i1})(\lambda_{i2} - A_i)}{A_i}} \quad (4.93)$$

De la ecuación (4.93) para que  $|B_i| > 0$  vemos que  $A_i > \lambda_{i1}$  y  $\lambda_{i2} > A_i$ , entonces  $\lambda_{i2} > A_i > \lambda_{i1}$ .

Entonces para una jerarquía invertida  $\lambda_{i2} > \lambda_{i1} > \lambda_{i3}$ , tenemos:

$$\lambda_{i1} = -|\lambda_{i1}|, \quad \lambda_{i2} > A_i > \lambda_{i3} \quad (4.94)$$

$$\lambda_{i2} = -|\lambda_{i2}|, \quad \lambda_{i1} > A_i > \lambda_{i3} \quad (4.95)$$

$$\lambda_{i3} = -|\lambda_{i3}|, \quad \lambda_{i2} > A_i > \lambda_{i1} \quad (4.96)$$

$$(4.97)$$

Para los neutrinos tenemos:  $\lambda_{i1} = m_{\nu_1}$ ,  $\lambda_{i2} = m_{\nu_2}$ ,  $\lambda_{i3} = m_{\nu_3}$ , tomando  $\lambda_{i1} = -|\lambda_{i1}|$  ya que contiene todos los valores de  $\lambda_{i2} > \lambda_{i1} > \lambda_{i3}$ , tenemos  $m_{\nu_1} = -|m_{\nu_1}|$ , entonces  $\lambda_{i2} > A_i > \lambda_{i3}$ .

Ahora, tomando los valores para los neutrinos en la jerarquía invertida, se tiene  $m_{\nu_2} > A_l > m_{\nu_3}$ , entonces  $1 > a_l > \tilde{m}_{\nu_3}$ , donde  $a_l = \frac{A_l}{m_{\nu_2}}$  y  $\tilde{m}_{\nu_3} = \frac{m_{\nu_3}}{m_{\nu_2}}$ .

Normalizando con respecto al eigenvalor más grande  $\lambda_{i1} = -|\lambda_{i1}|$ , para una jerarquía invertida, se tiene:

$$\begin{aligned}
 |C_i| &= \sqrt{\frac{|\lambda_{i1}| \lambda_{i2} \lambda_{i3} \lambda_{i2}^3}{A_i \lambda_{i2}^3}} \\
 &= \sqrt{\frac{\frac{|\lambda_{i1}|}{\lambda_{i2}} \frac{\lambda_{i2}}{\lambda_{i2}} \frac{\lambda_{i3}}{\lambda_{i2}}}{\frac{A_i}{\lambda_{i2}}} \lambda_{i2}^2} \\
 &= \lambda_{i2} \sqrt{\frac{\widehat{\lambda}_{i1} \widehat{\lambda}_{i3}}{a_i}}
 \end{aligned} \tag{4.98}$$

donde

$$\widehat{\lambda}_{i1} = \frac{|\lambda_{i1}|}{\lambda_{i2}}, \quad \widehat{\lambda}_{i3} = \frac{\lambda_{i3}}{\lambda_{i2}}, \quad a_i = \frac{A_i}{\lambda_{i2}} \tag{4.99}$$

sea

$$c_i = \frac{|C_i|}{\lambda_{i2}}, \quad \Rightarrow c_i = \sqrt{\frac{\widehat{\lambda}_{i1} \widehat{\lambda}_{i3}}{a_i}} \tag{4.100}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{B}_i &= (-|\lambda_{i1}| + \lambda_{i2} + \lambda_{i3} - A_i) \left( \frac{\lambda_{i2}}{\lambda_{i2}} \right) \\
 &= \left( \frac{-|\lambda_{i1}|}{\lambda_{i2}} + \frac{\lambda_{i2}}{\lambda_{i2}} + \frac{\lambda_{i3}}{\lambda_{i2}} - \frac{A_i}{\lambda_{i2}} \right) \lambda_{i2}
 \end{aligned} \tag{4.101}$$

$$= (-\widehat{\lambda}_{i1} + 1 + \widehat{\lambda}_{i3} - a_i) \lambda_{i2} \tag{4.102}$$

$$\tag{4.103}$$

sea

$$\tilde{b}_i = \frac{\tilde{B}_i}{\lambda_{i2}}, \quad \Rightarrow \tilde{b}_i = (-\widehat{\lambda}_{i1} + \widehat{\lambda}_{i3} + 1 - a_i) \tag{4.104}$$

$$\begin{aligned}
 |B_i| &= \sqrt{\frac{(A_i - \lambda_{i3})(A_i + |\lambda_{i1}|)(\lambda_{i2} - A_i) \lambda_{i2}^3}{A_i \lambda_{i2}^3}} \\
 &= \sqrt{\frac{\left( \frac{A_i - \lambda_{i3}}{\lambda_{i2}} \right) \left( \frac{A_i + |\lambda_{i1}|}{\lambda_{i2}} \right) \left( \frac{\lambda_{i2} - A_i}{\lambda_{i2}} \right)}{\frac{A_i}{\lambda_{i2}}} \lambda_{i2}^2} \\
 &= \lambda_{i2} \sqrt{\frac{(a_i - \widehat{\lambda}_{i3})(a_i + \widehat{\lambda}_{i1})(1 - a_i)}{a_i}},
 \end{aligned} \tag{4.105}$$

sea

$$b_i = \frac{|B_i|}{\lambda_{i2}}, \quad \Rightarrow b_i = \sqrt{\frac{(a_i - \widehat{\lambda}_{i3})(a_i + \widehat{\lambda}_{i1})(1 - a_i)}{a_i}} \quad (4.106)$$

Tomando la matriz hermitiana en su forma polar y sustituyendo las ecuaciones (4.109), (4.100), (4.104) y (4.106) tenemos:

$$\begin{aligned} \widehat{M}_i &= \begin{pmatrix} 0 & |C_i| & 0 \\ |C_i| & \widetilde{B}_i & |B_i| \\ 0 & |B_i| & A_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & c_i \lambda_{i2} & 0 \\ c_i \lambda_{i2} & \widetilde{b}_i \lambda_{i2} & b_i \lambda_{i2} \\ 0 & b_i \lambda_{i2} & a_i \lambda_{i2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.107)$$

sea

$$\widehat{M}_i = \frac{M_i}{\lambda_{i2}}, \quad \Rightarrow \widehat{M}_i = \begin{pmatrix} 0 & c_i & 0 \\ c_i & \widetilde{b}_i & b_i \\ 0 & b_i & a_i \end{pmatrix} \quad (4.108)$$

- Para una *jerarquía invertida* ( $\lambda_{i2} > \lambda_{i1} > \lambda_{i3}$ ) con  $\lambda_{i1} = -|\lambda_{i1}|$  el rango de valores permitidos para el parámetro  $a_i$  es:

$$\lambda_{i2} > A_i > \lambda_{i3} \quad \Rightarrow 1 > \frac{A_i}{\lambda_{i2}} > \frac{\lambda_{i3}}{\lambda_{i2}}, \quad \Rightarrow 1 > a_i > \widehat{\lambda}_{i3} \quad (4.109)$$

Suponiendo un ansantz jerarquico, es decir, la partícula más pesada se coloca en el elemento (3, 3) de la matriz de masa

$$UM_iU^\dagger = \text{diag}\{\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \lambda_{i3}\} \quad (4.110)$$

donde

$$\begin{aligned} M_i &= U^\dagger \text{diag}\{\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \lambda_{i3}\}U \\ &= \lambda_{i1}|1\rangle\langle 1| + \lambda_{i2}|2\rangle\langle 2| + \lambda_{i3}|3\rangle\langle 3| \end{aligned} \quad (4.111)$$

y  $U = (|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle)$  entonces se supone que el parámetro  $a$  esta muy cerca del 1, por lo tanto se puede definir  $a_i \equiv 1 - \widehat{\delta}_i$ . Entonces, sustituyendo los valores de la ecuaciones (4.99), (4.100), (4.104)

y (4.106), se tiene:

$$\begin{aligned}
 \widehat{M}_i &= \begin{pmatrix} 0 & c_i & 0 \\ c_i & \widetilde{b}_i & b_i \\ 0 & b_i & a_i \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\widehat{\lambda}_{i1}\widehat{\lambda}_{i3}}{a_i}} & 0 \\ \sqrt{\frac{\widehat{\lambda}_{i1}\widehat{\lambda}_{i3}}{a_i}} & (-\widehat{\lambda}_{i1} + \widehat{\lambda}_{i3} + 1 - a_i) & \sqrt{\frac{(a_i\widehat{\lambda}_{i3})(a_i + \widehat{\lambda}_{i1})(1 - a_i)}{a_i}} \\ 0 & \sqrt{\frac{(a_i - \widehat{\lambda}_{i3})(a_i + \widehat{\lambda}_{i1})(1 - a_i)}{a_i}} & a_i \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\widehat{\lambda}_{i1}\widehat{\lambda}_{i3}}{1 - \widehat{\delta}_i}} & 0 \\ \sqrt{\frac{\widehat{\lambda}_{i1}\widehat{\lambda}_{i3}}{1 - \widehat{\delta}_i}} & (-\widehat{\lambda}_{i1} + \widehat{\lambda}_{i3} + \widehat{\delta}_i) & \sqrt{\frac{(1 - \widehat{\delta}_i - \widehat{\lambda}_{i3})(1 - \widehat{\delta}_i + \widehat{\lambda}_{i1})(\widehat{\delta}_i)}{1 - \widehat{\delta}_i}} \\ 0 & \sqrt{\frac{(1 - \widehat{\delta}_i - \widehat{\lambda}_{i3})(1 - \widehat{\delta}_i + \widehat{\lambda}_{i1})(\widehat{\delta}_i)}{1 - \widehat{\delta}_i}} & 1 - \widehat{\delta}_i \end{pmatrix} \quad (4.112)
 \end{aligned}$$

entonces

$$\widehat{M}_i = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\widehat{\lambda}_{i1}\widehat{\lambda}_{i3}}{1 - \widehat{\delta}_i}} & 0 \\ \sqrt{\frac{\widehat{\lambda}_{i1}\widehat{\lambda}_{i3}}{1 - \widehat{\delta}_i}} & -\widehat{\lambda}_{i1} + \widehat{\lambda}_{i3} + \widehat{\delta}_i & \sqrt{\frac{\widehat{\delta}_i}{1 - \widehat{\delta}_i}} \widehat{f}_{i1}\widehat{f}_{i3} \\ 0 & \sqrt{\frac{\widehat{\delta}_i}{1 - \widehat{\delta}_i}} \widehat{f}_{i1}\widehat{f}_{i3} & 1 - \widehat{\delta}_i \end{pmatrix} \quad (4.113)$$

donde

$$\widehat{f}_{i1} = (1 - \widehat{\delta}_i - \widehat{\lambda}_{i1}) \quad (4.114)$$

$$\widehat{f}_{i3} = (1 - \widehat{\delta}_i - \widehat{\lambda}_{i3}) \quad (4.115)$$

Ahora tomando la ecuación (4.109) y sustituyendo el parámetro  $a_i$  se tiene  $1 > a_i > \widehat{\lambda}_{i3}$ , entonces  $1 > 1 - \widehat{\delta}_i > \widehat{\lambda}_{i3}$ , de aquí vemos que  $1 > 1 - \widehat{\delta}_i$ , entonces  $\widehat{\delta}_i > 0$  y  $1 - \widehat{\delta}_i > \widehat{\lambda}_{i3}$ , entonces  $1 - \widehat{\lambda}_{i3} > \widehat{\delta}_i$ , por lo tanto  $1 - \widehat{\lambda}_{i3} > \widehat{\delta}_i > 0$ .

## 4.5. Diagonalización de las Matrices de Masas

Los eigenvectores de la matriz  $M$  tienen la forma:

$$|M_i\rangle = \begin{pmatrix} (\xi_i - M_{22})M_{13} + M_{12}M_{23} \\ (\xi_i - M_{11})M_{23} + M_{21}M_{13} \\ (\xi_i - M_{22})(\xi_i - M_{11}) - M_{12}M_{21} \end{pmatrix} \quad (4.116)$$

**CAPÍTULO 4. CÁLCULO DEL LAGRANGIANO DE YUKAWA, MATRICES DE MASA Y  
MEZCLA DE LOS NEUTRINOS EN EL MDDH TIPO III**  
4.5. DIAGONALIZACIÓN DE LAS MATRICES DE MASAS

---

Los eigenvectores  $|M_i\rangle$  de la ecuación (4.116), no están normalizados, por ello es necesario reescribirlos en la forma:

$$|M_i\rangle = \frac{1}{N_i} \begin{pmatrix} (\xi_i - M_{22})M_{13} + M_{12}M_{23} \\ (\xi_i - M_{11})M_{23} + M_{21}M_{13} \\ (\xi_i - M_{22})(\xi_i - M_{11}) - M_{12}M_{21} \end{pmatrix} \quad (4.117)$$

donde  $N_i$  es la constante de normalización,

$$N_i^2 = \langle M_i|M_i\rangle \quad (4.118)$$

◦ Tomando la matriz para una *jerarquía normal* ( $\lambda_{i3} > \lambda_{i2} > \lambda_{i1}$ ):

$$\tilde{M}_i = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_{i1}\tilde{\lambda}_{i2}}{1-\delta_i}} & 0 \\ \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_{i1}\tilde{\lambda}_{i2}}{1-\delta_i}} & \tilde{\lambda}_{i1} - \tilde{\lambda}_{i2} + \delta & \sqrt{\frac{\delta_i}{1-\delta_i}f_{i1}f_{i2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{\delta_i}{1-\delta_i}f_{i1}f_{i2}} & 1 - \delta_i \end{pmatrix} \quad (4.119)$$

Donde la matriz ortogonal real es:

$$O_i = \left( |\tilde{M}_{i1}\rangle, -|\tilde{M}_{i2}\rangle, |\tilde{M}_{i3}\rangle \right), \quad (4.120)$$

se tiene,

$$O_i = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_{i2}f_{i1}}{D_{i1}}} & -\sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_{i1}f_{i2}}{D_{i2}}} & \sqrt{\frac{\delta_i\tilde{\lambda}_{i1}\tilde{\lambda}_{i2}}{D_{i3}}} \\ \sqrt{\frac{(1-\delta_i)\tilde{\lambda}_{i1}f_{i1}}{D_{i1}}} & \sqrt{\frac{(1-\delta_i)\tilde{\lambda}_{i2}f_{i2}}{D_{i2}}} & \sqrt{\frac{(1-\delta_i)\delta_i}{D_{i3}}} \\ -\sqrt{\frac{\delta_i\tilde{\lambda}_{i1}f_{i2}}{D_{i1}}} & -\sqrt{\frac{\delta_i\tilde{\lambda}_{i2}f_{i1}}{D_{i2}}} & \sqrt{\frac{f_{i1}f_{i2}}{D_{i3}}} \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} f_{i1} &= (1 - \delta_i - \tilde{\lambda}_{i1}), \\ f_{i2} &= (1 - \delta_i + \tilde{\lambda}_{i2}), \\ D_{i1} &= (1 - \delta_i)(1 - \tilde{\lambda}_{i1})(\tilde{\lambda}_{i1} + \tilde{\lambda}_{i2}), \\ D_{i2} &= (1 - \delta_i)(1 + \tilde{\lambda}_{i2})(\tilde{\lambda}_{i1} + \tilde{\lambda}_{i2}), \\ D_{i3} &= (1 - \delta_i)(1 - \tilde{\lambda}_{i1})(1 + \tilde{\lambda}_{i2}). \end{aligned} \quad (4.121)$$

◦ Tomando la matriz para una *jerarquía invertida* ( $\lambda_{i2} > \lambda_{i1} > \lambda_{i3}$ ):

$$\widehat{M}_i = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\widehat{\lambda}_{i1}\widehat{\lambda}_{i3}}{1-\widehat{\delta}_i}} & 0 \\ \sqrt{\frac{\widehat{\lambda}_{i1}\widehat{\lambda}_{i3}}{1-\widehat{\delta}_i}} & -\widehat{\lambda}_{i1} + \widehat{\lambda}_{i3} + \widehat{\delta}_i & \sqrt{\frac{\widehat{\delta}_i}{1-\widehat{\delta}_i}} \widehat{f}_{i1} \widehat{f}_{i3} \\ 0 & \sqrt{\frac{\widehat{\delta}_i}{1-\widehat{\delta}_i}} \widehat{f}_{i1} \widehat{f}_{i3} & 1 - \widehat{\delta}_i \end{pmatrix}$$

Donde la matriz ortogonal real es:

$$\widehat{O}_i = \left( -|\widehat{M}_{i1}\rangle, |\widehat{M}_{i2}\rangle, |\widehat{M}_{i3}\rangle \right), \quad (4.122)$$

se tiene,

$$\widehat{O}_i = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\widehat{\lambda}_{i3}\widehat{f}_{i1}}{\widehat{D}_{i1}}} & \sqrt{\frac{\widehat{\lambda}_{i1}\widehat{\lambda}_{i3}\widehat{\delta}_i}{\widehat{D}_{i2}}} & \sqrt{\frac{\widehat{\lambda}_{i1}\widehat{\lambda}_{i3}}{\widehat{D}_{i3}}} \\ \sqrt{\frac{(1-\widehat{\delta}_i)\widehat{\lambda}_{i1}\widehat{f}_{i1}}{\widehat{D}_{i1}}} & \sqrt{\frac{(1-\widehat{\delta}_i)\widehat{\delta}_i}{\widehat{D}_{i2}}} & \sqrt{\frac{(1-\widehat{\delta}_i)\widehat{\lambda}_{i3}\widehat{f}_{i3}}{\widehat{D}_{i3}}} \\ -\sqrt{\frac{\widehat{\delta}_i\widehat{\lambda}_{i1}\widehat{f}_{i3}}{\widehat{D}_{i1}}} & \sqrt{\frac{\widehat{f}_{i1}\widehat{f}_{i3}}{\widehat{D}_{i2}}} & -\sqrt{\frac{\widehat{\delta}_i\widehat{\lambda}_{i3}\widehat{f}_{i1}}{\widehat{D}_{i3}}} \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} \widehat{f}_{i1} &= (1 - \widehat{\delta}_i + \widehat{\lambda}_{i1}), \\ \widehat{f}_{i3} &= (1 - \widehat{\delta}_i - \widehat{\lambda}_{i3}), \\ \widehat{D}_{i1} &= (1 - \widehat{\delta}_i) (1 + \widehat{\lambda}_{i1}) (\widehat{\lambda}_{i1} + \widehat{\lambda}_{i3}), \\ \widehat{D}_{i2} &= (1 - \widehat{\delta}_i) (1 + \widehat{\lambda}_{i1}) (1 - \widehat{\lambda}_{i3}), \\ \widehat{D}_{i3} &= (1 - \widehat{\delta}_i) (1 - \widehat{\lambda}_{i3}) (\widehat{\lambda}_{i1} + \widehat{\lambda}_{i3}). \end{aligned} \quad (4.123)$$

## 4.6. Matrices de Mezcla.

En esta sección determinamos la matriz de mezcla del sabor  $V_{PMNS}$  en términos de las razones de las masas de los fermiones.

### Matrices de Mezcla como funciones de las Masas.

La matriz de mezcla del sabor de los quarks,  $V_{CKM}$ , surge de la falta de correspondencia entre la diagonalización de las matrices de masa de los quarks tipo- $u$  y tipo- $d$ , y esta definida como:

$$V_{CKM} = U_u U_d^\dagger \quad (4.124)$$

**CAPÍTULO 4. CÁLCULO DEL LAGRANGIANO DE YUKAWA, MATRICES DE MASA Y  
MEZCLA DE LOS NEUTRINOS EN EL MDDH TIPO III**  
4.6. MATRICES DE MEZCLA.

---

donde las matrices unitarias  $U_u$  y  $U_d^\dagger$  diagonalizan a las matrices de masa de los quarks tipo- $u$  y tipo- $d$ , respectivamente, y pueden ser escritas en forma polar como:

$$U_{u,d} = \mathbf{O}_{u,d}^T P_{u,d} \quad (4.125)$$

donde  $P_{u,d}$  es la matriz diagonal de fases, la matriz de mezclas de los quarks puede ser escrita como:

$$V_{CKM} = \mathbf{O}_u^T P^{u-d} \mathbf{O}_d \quad (4.126)$$

entonces la matriz de mezclas de los quarks toma la forma:

$$V_{CKM}^{th} = \begin{pmatrix} V_{ud}^{th} & V_{us}^{th} & V_{ub}^{th} \\ V_{td}^{th} & V_{ts}^{th} & V_{tb}^{th} \end{pmatrix} \quad (4.127)$$

La matriz de mezcla del sabor de los leptones,  $V_{PMNS}$ , surge de la falta de correspondencia entre la diagonalización de las matrices de masa de los leptones cargados y los neutrinos izquierdos, y esta definida como:

$$V_{PMNS} = U_l^\dagger U_\nu \quad (4.128)$$

donde

$$U_{\nu,l} = P_{\nu,l} \mathbf{O}_{\nu,l} \quad (4.129)$$

y  $P$  es la matriz diagonal de fases,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\eta_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\eta_2} \end{pmatrix}, \quad (4.130)$$

la matriz de mezclas de los leptones puede ser escrita como:

$$V_{PMNS} = \mathbf{O}_l^T P^{\nu-l} \mathbf{O}_\nu K \quad (4.131)$$

donde  $\mathbf{O}_{\nu,l}$  son las matrices ortogonales reales, entonces la matriz de mezclas de los leptones toma la forma:

$$V_{PMNS}^{th} = \begin{pmatrix} V_{e1}^{th} & V_{e2}^{th} & V_{e3}^{th} \\ V_{\mu1}^{th} & V_{\mu2}^{th} & V_{\mu3}^{th} \\ V_{\tau1}^{th} & V_{\tau2}^{th} & V_{\tau3}^{th} \end{pmatrix} \quad (4.132)$$

◦ Para una *jerarquía normal* ( $\lambda_{i3} > \lambda_{i2} > \lambda_{i1}$ ):

Tomamos la matriz ortogonal real:

$$\mathbf{O}_i = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_{i2} f_{i1}}{D_{i1}}} & -\sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_{i1} f_{i2}}{D_{i2}}} & \sqrt{\frac{\delta_i \tilde{\lambda}_{i1} \tilde{\lambda}_{i2}}{D_{i3}}} \\ \sqrt{\frac{(1-\delta_i) \tilde{\lambda}_{i1} f_{i1}}{D_{i1}}} & \sqrt{\frac{(1-\delta_i) \tilde{\lambda}_{i2} f_{i2}}{D_{i2}}} & \sqrt{\frac{(1-\delta_i) \delta_i}{D_{i3}}} \\ -\sqrt{\frac{\delta_i \tilde{\lambda}_{i1} f_{i2}}{D_{i1}}} & -\sqrt{\frac{\delta_i \tilde{\lambda}_{i2} f_{i1}}{D_{i2}}} & \sqrt{\frac{f_{i1} f_{i2}}{D_{i3}}} \end{pmatrix},$$

donde sustituimos los siguientes valores en las matrices ortogonales :

$$\mathbf{O}_\nu = \begin{cases} \tilde{\lambda}_{i1} & \Rightarrow \tilde{m}_{\nu_1} \\ \tilde{\lambda}_{i2} & \Rightarrow \tilde{m}_{\nu_2} \end{cases} \quad \text{y} \quad \mathbf{O}_l^T = \begin{cases} \tilde{\lambda}_{i1} & \Rightarrow \tilde{\lambda}_{e1} \Rightarrow \tilde{m}_e \\ \tilde{\lambda}_{i2} & \Rightarrow \tilde{\lambda}_{e2} \Rightarrow \tilde{m}_\nu, \end{cases} \quad (4.133)$$

$$\mathbf{O}_\nu = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_2} f_{m\nu_1}}{D_{m\nu_1}}} & -\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu_1} f_{m\nu_2}}{D_{m\nu_2}}} & \sqrt{\frac{\delta_\nu \tilde{m}_{\nu_1} \tilde{m}_{\nu_2}}{D_{m\nu_3}}} \\ \sqrt{\frac{(1-\delta_\nu) \tilde{m}_{\nu_1} f_{m\nu_1}}{D_{m\nu_1}}} & \sqrt{\frac{(1-\delta_\nu) \tilde{m}_{\nu_2} f_{m\nu_2}}{D_{m\nu_2}}} & \sqrt{\frac{(1-\delta_\nu) \delta_\nu}{D_{m\nu_3}}} \\ -\sqrt{\frac{\delta_\nu \tilde{m}_{\nu_1} f_{m\nu_2}}{D_{m\nu_1}}} & -\sqrt{\frac{\delta_\nu \tilde{m}_{\nu_2} f_{m\nu_1}}{D_{m\nu_2}}} & \sqrt{\frac{f_{m\nu_1} f_{m\nu_2}}{D_{m\nu_3}}} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{O}_l^T = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\tilde{m}_\mu f_{m_e}}{D_{m_e}}} & \sqrt{\frac{(1-\delta_l) \tilde{m}_e f_{m_e}}{D_{m_e}}} & -\sqrt{\frac{\delta_l \tilde{m}_e f_{m_\mu}}{D_{m_e}}} \\ -\sqrt{\frac{\tilde{m}_e f_{m_\mu}}{D_{m_\mu}}} & \sqrt{\frac{(1-\delta_l) \tilde{m}_\mu f_{m_\mu}}{D_{m_\mu}}} & -\sqrt{\frac{\delta_l \tilde{m}_\mu f_{m_e}}{D_{m_\mu}}} \\ \sqrt{\frac{\delta_l \tilde{m}_e \tilde{m}_\nu}{D_{e_3}}} & \sqrt{\frac{(1-\delta_l) \delta_l}{D_{e_3}}} & \sqrt{\frac{f_{m_e} f_{m_\mu}}{D_{e_3}}} \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} f_{m\nu_1} &= (1 - \delta_\nu - \tilde{m}_{\nu_1}), \\ f_{m\nu_2} &= (1 - \delta_\nu + \tilde{m}_{\nu_2}), \\ D_{m\nu_1} &= (1 - \delta_\nu) (1 - \tilde{m}_{\nu_1}) (\tilde{m}_{\nu_1} + \tilde{m}_{\nu_2}), \\ D_{m\nu_2} &= (1 - \delta_\nu) (1 + \tilde{m}_{\nu_2}) (\tilde{m}_{\nu_1} + \tilde{m}_{\nu_2}), \\ D_{m\nu_3} &= (1 - \delta_\nu) (1 - \tilde{m}_{\nu_1}) (1 + \tilde{m}_{\nu_2}), \end{aligned} \quad (4.134)$$

$$\begin{aligned} f_{m_e} &= (1 - \delta_l - \tilde{m}_e), \\ f_{m_\mu} &= (1 - \delta_l + \tilde{m}_\mu), \\ D_{m_{m_e}} &= (1 - \delta_l) (1 - \tilde{m}_e) (\tilde{m}_e + \tilde{m}_\mu), \\ D_{m_{m_\mu}} &= (1 - \delta_l) (1 + \tilde{m}_\mu) (\tilde{m}_e + \tilde{m}_\mu), \\ D_{m_{e_3}} &= (1 - \delta_l) (1 - \tilde{m}_e) (1 + \tilde{m}_\mu) \end{aligned} \quad (4.135)$$

y la matriz diagonal de fases,

$$P^{(\nu-l)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\eta_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\eta_2} \end{pmatrix}, \quad (4.136)$$

haciendo el producto de  $\mathbf{O}_l^T P^{(\nu-l)}$  tenemos,

$$\mathbf{O}_l^T P^{(\nu-l)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\tilde{m}_\mu f_{m_e}}{D_{m_e}}} & \sqrt{\frac{(1-\delta_l)\tilde{m}_e f_{m_e}}{D_{m_e}}} e^{i\eta_1} & -\sqrt{\frac{\delta_l \tilde{m}_e f_{m_\mu}}{D_{m_e}}} e^{i\eta_2} \\ -\sqrt{\frac{\tilde{m}_e f_{m_\mu}}{D_{m_\mu}}} & \sqrt{\frac{(1-\delta_l)\tilde{m}_\mu f_{m_\mu}}{D_{m_\mu}}} e^{i\eta_1} & -\sqrt{\frac{\delta_l \tilde{m}_\mu f_{m_e}}{D_{m_\mu}}} e^{i\eta_2} \\ \sqrt{\frac{\delta_l \tilde{m}_e \tilde{m}_\nu}{D_{e_3}}} & \sqrt{\frac{(1-\delta_l)\delta_l}{D_{e_3}}} e^{i\eta_1} & \sqrt{\frac{f_{m_e} f_{m_\mu}}{D_{e_3}}} e^{i\eta_2} \end{pmatrix},$$

por las ecuaciones (4.131) y (4.132) tenemos que los elementos de la matriz  $V_{PMNS}^{th}$  son:

$$\begin{aligned} V_{e1}^{th} &= \sqrt{\frac{\tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu 2} f_{m_e} f_{m_{\nu 1}}}{D_{m_e} D_{m_{\nu 1}}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e \tilde{m}_{\nu 1}}{D_{m_e} D_{m_{\nu 1}}}} \left( \sqrt{(1-\delta_l)(1-\delta_\nu)} f_{m_e} f_{m_{\nu 1}} e^{i\eta_1} + \sqrt{\delta_l \delta_\nu} f_{m_\mu} f_{m_{\nu 2}} e^{i\eta_2} \right), \\ V_{e2}^{th} &= -\sqrt{\frac{\tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu 1} f_{m_e} f_{m_{\nu 2}}}{D_{m_e} D_{m_{\nu 2}}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e \tilde{m}_{\nu 2}}{D_{m_e} D_{m_{\nu 2}}}} \left( \sqrt{(1-\delta_l)(1-\delta_\nu)} f_{m_e} f_{m_{\nu 2}} e^{i\eta_1} + \sqrt{\delta_l \delta_\nu} f_{m_\mu} f_{m_{\nu 1}} e^{i\eta_2} \right), \\ V_{e3}^{th} &= \sqrt{\frac{\delta_\nu \tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu 1} \tilde{m}_{\nu 2} f_{m_e}}{D_{m_e} D_{m_{\nu 3}}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{D_{m_e} D_{m_{\nu 3}}}} \left( \sqrt{(1-\delta_l)(1-\delta_\nu)} \delta_\nu f_{m_e} e^{i\eta_1} + \sqrt{\delta_l} f_{m_\mu} f_{m_{\nu 1}} f_{m_{\nu 2}} e^{i\eta_2} \right), \\ V_{\mu 1}^{th} &= -\sqrt{\frac{\tilde{m}_e \tilde{m}_{\nu 2} f_{m_\mu} f_{m_{\nu 1}}}{D_{m_\mu} D_{m_{\nu 1}}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu 1}}{D_{m_\mu} D_{m_{\nu 1}}}} \left( \sqrt{(1-\delta_l)(1-\delta_\nu)} f_{m_\mu} f_{m_{\nu 1}} e^{i\eta_1} + \sqrt{\delta_l \delta_\nu} f_{m_e} f_{m_{\nu 2}} e^{i\eta_2} \right), \\ V_{\mu 2}^{th} &= \sqrt{\frac{\tilde{m}_e \tilde{m}_{\nu 1} f_{m_\mu} f_{m_{\nu 2}}}{D_{m_\mu} D_{m_{\nu 2}}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu 2}}{D_{m_\mu} D_{m_{\nu 2}}}} \left( \sqrt{(1-\delta_l)(1-\delta_\nu)} f_{m_\mu} f_{m_{\nu 2}} e^{i\eta_1} + \sqrt{\delta_l \delta_\nu} f_{m_e} f_{m_{\nu 1}} e^{i\eta_2} \right), \\ V_{\mu 3}^{th} &= -\sqrt{\frac{\delta_\nu \tilde{m}_e \tilde{m}_{\nu 1} \tilde{m}_{\nu 2} f_{m_\mu}}{D_{m_\mu} D_{m_{\nu 3}}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_\mu}{D_{m_\mu} D_{m_{\nu 3}}}} \left( \sqrt{(1-\delta_l)(1-\delta_\nu)} \delta_\nu f_{m_\mu} e^{i\eta_1} - \sqrt{\delta_l} f_{m_e} f_{m_{\nu 1}} f_{m_{\nu 2}} e^{i\eta_2} \right), \\ V_{\tau 1}^{th} &= \sqrt{\frac{\delta_l \tilde{m}_e \tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu 2} f_{m_{\nu 1}}}{D_{e_3} D_{m_{\nu 1}}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{D_{e_3} D_{m_{\nu 1}}}} \left( \sqrt{\delta_l (1-\delta_l)(1-\delta_\nu)} f_{m_{\nu 1}} e^{i\eta_1} + \sqrt{\delta_\nu} f_{m_e} f_{m_\mu} f_{m_{\nu 2}} e^{i\eta_2} \right), \\ V_{\tau 2}^{th} &= -\sqrt{\frac{\delta_l \tilde{m}_e \tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu 1} f_{m_{\nu 2}}}{D_{e_3} D_{m_{\nu 2}}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 2}}{D_{e_3} D_{m_{\nu 2}}}} \left( \sqrt{\delta_l (1-\delta_l)(1-\delta_\nu)} f_{m_{\nu 2}} e^{i\eta_1} - \sqrt{\delta_\nu} f_{m_e} f_{m_\mu} f_{m_{\nu 1}} e^{i\eta_2} \right), \\ V_{\tau 3}^{th} &= \sqrt{\frac{\delta_l \delta_\nu \tilde{m}_e \tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu 1} \tilde{m}_{\nu 2}}{D_{e_3} D_{m_{\nu 3}}}} + \sqrt{\frac{1}{D_{e_3} D_{m_{\nu 3}}}} \left( \sqrt{\delta_l \delta_\nu (1-\delta_l)(1-\delta_\nu)} e^{i\eta_1} + \sqrt{f_{m_e} f_{m_\mu} f_{m_{\nu 1}} f_{m_{\nu 2}}} e^{i\eta_2} \right) \end{aligned} \quad (4.137)$$

◦ Para una *jerarquía invertida* ( $\lambda_{i2} > \lambda_{i1} > \lambda_{i3}$ ):

$$\widehat{V}_{PMNS} = \mathbf{O}_l^T P^{(\nu-l)} \widehat{\mathbf{O}}_\nu K \quad (4.138)$$

donde  $\mathbf{O}_l$  y  $\widehat{\mathbf{O}}_\nu$  son las matrices ortogonales reales, entonces la matriz de mezclas de los leptones para la *jerarquía invertida* toma la forma:

$$\widehat{V}_{PMNS}^{th} = \begin{pmatrix} \widehat{V}_{e1}^{th} & \widehat{V}_{e2}^{th} & \widehat{V}_{e3}^{th} \\ \widehat{V}_{\mu 1}^{th} & \widehat{V}_{\mu 2}^{th} & \widehat{V}_{\mu 3}^{th} \\ \widehat{V}_{\tau 1}^{th} & \widehat{V}_{\tau 2}^{th} & \widehat{V}_{\tau 3}^{th} \end{pmatrix} \quad (4.139)$$

Tomamos la matriz ortogonal real:

$$\hat{\mathbf{O}}_i = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\hat{\lambda}_{i3}\hat{f}_{i1}}{\hat{D}_{i1}}} & \sqrt{\frac{\hat{\lambda}_{i1}\hat{\lambda}_{i3}\hat{\delta}_i}{\hat{D}_{i2}}} & \sqrt{\frac{\hat{\lambda}_{i1}\hat{\lambda}_{i3}}{\hat{D}_{i3}}} \\ \sqrt{\frac{(1-\hat{\delta}_i)\hat{\lambda}_{i1}\hat{f}_{i1}}{\hat{D}_{i1}}} & \sqrt{\frac{(1-\hat{\delta}_i)\hat{\delta}_i}{\hat{D}_{i2}}} & \sqrt{\frac{(1-\hat{\delta}_i)\hat{\lambda}_{i3}\hat{f}_{i3}}{\hat{D}_{i3}}} \\ -\sqrt{\frac{\hat{\delta}_i\hat{\lambda}_{i1}\hat{f}_{i3}}{\hat{D}_{i1}}} & \sqrt{\frac{\hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3}}{\hat{D}_{i2}}} & -\sqrt{\frac{\hat{\delta}_i\hat{\lambda}_{i3}\hat{f}_{i1}}{\hat{D}_{i3}}} \end{pmatrix},$$

donde sustituimos los siguientes valores en las matrices ortogonales :

$$\hat{\mathbf{O}}_\nu = \begin{cases} \hat{\lambda}_{i3} & \Rightarrow \hat{m}_{\nu 3} \\ \hat{\lambda}_{i1} & \Rightarrow \hat{m}_{\nu 1} \end{cases} \quad \text{y} \quad \mathbf{O}_l^T = \begin{cases} \tilde{\lambda}_{i1} & \Rightarrow \tilde{\lambda}_{e1} \Rightarrow \tilde{m}_e \\ \tilde{\lambda}_{i2} & \Rightarrow \tilde{\lambda}_{e2} \Rightarrow \tilde{m}_\nu, \end{cases} \quad (4.140)$$

$$\hat{\mathbf{O}}_\nu = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\hat{m}_\nu \hat{f}_{m\nu 1}}{\hat{D}_{m\nu 1}}} & \sqrt{\frac{\hat{\delta}_\nu \hat{m}_{\nu 1} \hat{m}_{\nu 3}}{\hat{D}_{m\nu 2}}} & \sqrt{\frac{\hat{m}_{\nu 1} \hat{m}_{\nu 3}}{\hat{D}_{m\nu 3}}} \\ \sqrt{\frac{(1-\hat{\delta}_\nu)\hat{m}_{\nu 1} \hat{f}_{m\nu 1}}{\hat{D}_{m\nu 1}}} & \sqrt{\frac{\hat{\delta}_\nu(1-\hat{\delta}_\nu)}{\hat{D}_{m\nu 2}}} & \sqrt{\frac{(1-\hat{\delta}_\nu)\hat{m}_{\nu 3} \hat{f}_{m\nu 3}}{\hat{D}_{m\nu 3}}} \\ -\sqrt{\frac{\hat{\delta}_\nu \hat{m}_{\nu 1} \hat{f}_{m\nu 3}}{\hat{D}_{m\nu 1}}} & \sqrt{\frac{\hat{f}_{m\nu 1} \hat{f}_{m\nu 3}}{\hat{D}_{m\nu 2}}} & -\sqrt{\frac{\hat{\delta}_\nu \hat{m}_{\nu 3} \hat{f}_{m\nu 1}}{\hat{D}_{m\nu 3}}} \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{f}_{m\nu 1} &= (1 - \hat{\delta}_\nu + \hat{m}_{\nu 1}), \\ \hat{f}_{m\nu 3} &= (1 - \hat{\delta}_\nu - \hat{m}_{\nu 3}), \\ \hat{D}_{m\nu 1} &= (1 - \hat{\delta}_\nu)(1 + \hat{m}_{\nu 1})(\hat{m}_{\nu 1} + \hat{m}_{\nu 3}), \\ \hat{D}_{m\nu 2} &= (1 - \hat{\delta}_\nu)(1 + \hat{m}_{\nu 1})(1 - \hat{m}_{\nu 3}), \\ \hat{D}_{m\nu 3} &= (1 - \hat{\delta}_\nu)(1 - \hat{m}_{\nu 3})(\hat{m}_{\nu 1} + \hat{m}_{\nu 3}), \end{aligned} \quad (4.141)$$

tomamos la matriz ortogonal real dada en la ecuación (4.134) y sus valores correspondientes de la ec. (4.135), la matriz diagonal de fases (4.136) y el producto de  $\mathbf{O}_l^T P^{(\nu-l)}$  de la ec. (4.137), entonces por la ecuación (4.139) tenemos que los elementos de la matriz  $V_{PMNS}^{th}$  son:

$$\begin{aligned}
 \widehat{V}_{e1}^{th} &= -\sqrt{\frac{\widetilde{m}_\mu \widetilde{m}_{\nu 3} f_{m_e} \widetilde{f}_{m_{\nu 1}}}{D_{m_e} D_{m_{\nu 1}}}} + \sqrt{\frac{\widetilde{m}_e \widetilde{m}_{\nu 1}}{D_{m_e} D_{m_{\nu 1}}}} \left( \sqrt{(1-\delta_l)(1-\widehat{\delta}_\nu) f_{m_e} \widetilde{f}_{m_{\nu 1}}} e^{i\eta_1} + \sqrt{\delta_l \widehat{\delta}_\nu f_{m_\mu} \widetilde{f}_{m_{\nu 3}}} e^{i\eta_2} \right), \\
 \widehat{V}_{e2}^{th} &= \sqrt{\frac{\widehat{\delta}_\nu \widetilde{m}_\mu \widetilde{m}_{\nu 1} \widetilde{m}_{\nu 3} f_{m_e}}{D_{m_e} D_{m_{\nu 2}}}} + \sqrt{\frac{\widetilde{m}_e}{D_{m_e} D_{m_{\nu 2}}}} \left( \sqrt{(1-\delta_l)(1-\widehat{\delta}_\nu) \widehat{\delta}_\nu f_{m_e}} e^{i\eta_1} - \sqrt{\delta_l f_{m_\mu} \widetilde{f}_{m_{\nu 1}} \widetilde{f}_{m_{\nu 3}}} e^{i\eta_2} \right), \\
 \widehat{V}_{e3}^{th} &= \sqrt{\frac{\widetilde{m}_\mu \widetilde{m}_{\nu 1} \widetilde{m}_{\nu 3} f_{m_e}}{D_{m_e} D_{m_{\nu 3}}}} + \sqrt{\frac{\widetilde{m}_e \widetilde{m}_{\nu 3}}{D_{m_e} D_{m_{\nu 3}}}} \left( \sqrt{(1-\delta_l)(1-\widehat{\delta}_\nu) f_{m_e} \widetilde{f}_{m_{\nu 3}}} e^{i\eta_1} + \sqrt{\delta_l \widehat{\delta}_\nu f_{m_\mu} \widetilde{f}_{m_{\nu 1}} f_{m_{\nu 2}}} e^{i\eta_2} \right), \\
 \widehat{V}_{\mu 1}^{th} &= \sqrt{\frac{\widetilde{m}_e \widetilde{m}_{\nu 3} f_{m_\mu} \widetilde{f}_{m_{\nu 1}}}{D_{m_\mu} D_{m_{\nu 1}}}} + \sqrt{\frac{\widetilde{m}_\mu \widetilde{m}_{\nu 1}}{D_{m_\mu} D_{m_{\nu 1}}}} \left( \sqrt{(1-\delta_l)(1-\widehat{\delta}_\nu) f_{m_\mu} \widetilde{f}_{m_{\nu 1}}} e^{i\eta_1} + \sqrt{\delta_l \widehat{\delta}_\nu f_{m_e} \widetilde{f}_{m_{\nu 3}}} e^{i\eta_2} \right), \\
 \widehat{V}_{\mu 2}^{th} &= -\sqrt{\frac{\widehat{\delta}_\nu \widetilde{m}_e \widetilde{m}_{\nu 1} \widetilde{m}_{\nu 3} f_{m_\mu}}{D_{m_\mu} D_{m_{\nu 2}}}} + \sqrt{\frac{\widetilde{m}_\mu}{D_{m_\mu} D_{m_{\nu 2}}}} \left( \sqrt{(1-\delta_l)(1-\widehat{\delta}_\nu) \widehat{\delta}_\nu f_{m_\mu}} e^{i\eta_1} + \sqrt{\delta_l f_{m_e} \widetilde{f}_{m_{\nu 1}} \widetilde{f}_{m_{\nu 3}}} e^{i\eta_2} \right), \\
 \widehat{V}_{\mu 3}^{th} &= -\sqrt{\frac{\widetilde{m}_e \widetilde{m}_{\nu 1} \widetilde{m}_{\nu 3} f_{m_\mu}}{D_{m_\mu} D_{m_{\nu 3}}}} + \sqrt{\frac{\widetilde{m}_\mu \widetilde{m}_{\nu 3}}{D_{m_\mu} D_{m_{\nu 3}}}} \left( \sqrt{(1-\delta_l)(1-\widehat{\delta}_\nu) f_{m_\mu} f_{m_{\nu 3}}} e^{i\eta_1} + \sqrt{\delta_l \widehat{\delta}_\nu f_{m_e} \widetilde{f}_{m_{\nu 1}}} e^{i\eta_2} \right), \\
 \widehat{V}_{\tau 1}^{th} &= -\sqrt{\frac{\delta_l \widetilde{m}_e \widetilde{m}_\mu \widetilde{m}_{\nu 3} \widetilde{f}_{m_{\nu 1}}}{D_{e_3} D_{m_{\nu 1}}}} + \sqrt{\frac{\widetilde{m}_{\nu 1}}{D_{e_3} D_{m_{\nu 1}}}} \left( \sqrt{\delta_l (1-\delta_l)(1-\widehat{\delta}_\nu) \widetilde{f}_{m_{\nu 1}}} e^{i\eta_1} - \sqrt{\widehat{\delta}_\nu f_{m_e} f_{m_\mu} \widetilde{f}_{m_{\nu 3}}} e^{i\eta_2} \right), \\
 \widehat{V}_{\tau 2}^{th} &= \sqrt{\frac{\delta_l \widehat{\delta}_\nu \widetilde{m}_e \widetilde{m}_\mu \widetilde{m}_{\nu 1} \widetilde{m}_{\nu 3}}{D_{e_3} D_{m_{\nu 2}}}} + \sqrt{\frac{1}{D_{e_3} D_{m_{\nu 2}}}} \left( \sqrt{\delta_l (1-\delta_l)(1-\widehat{\delta}_\nu) \widehat{\delta}_\nu} e^{i\eta_1} + \sqrt{f_{m_e} f_{m_\mu} \widetilde{f}_{m_{\nu 1}} \widetilde{f}_{m_{\nu 3}}} e^{i\eta_2} \right), \\
 \widehat{V}_{\tau 3}^{th} &= \sqrt{\frac{\delta_l \widetilde{m}_e \widetilde{m}_\mu \widetilde{m}_{\nu 1} \widetilde{m}_{\nu 3}}{D_{e_3} D_{m_{\nu 3}}}} + \sqrt{\frac{\widetilde{m}_{\nu 3}}{D_{e_3} D_{m_{\nu 3}}}} \left( \sqrt{\delta_l (1-\delta_l)(1-\widehat{\delta}_\nu) f_{m_{\nu 3}}} e^{i\eta_1} - \sqrt{\widehat{\delta}_\nu f_{m_e} f_{m_\mu} \widetilde{f}_{m_{\nu 1}}} e^{i\eta_2} \right)
 \end{aligned} \tag{4.142}$$

## 4.7. Ángulos de mezcla

La representación estándar de la matriz  $V_{PMNS}$  está dada como

$$\begin{aligned}
 V_{e2} &= \cos \theta_{13} \sin \theta_{12}, \\
 V_{\mu 3} &= \cos \theta_{13} \sin \theta_{23}, \\
 V_{e3} &= \sin \theta_{13} e^{i\delta},
 \end{aligned} \tag{4.143}$$

con el resto de los elementos iguales a uno. Los cuadrados de los elementos de la matriz PMNS dan el contenido de fracción de sabor, esto es,  $|V_{e2}|^2$  es la fracción de  $\nu_2$  con  $\nu_e$ .

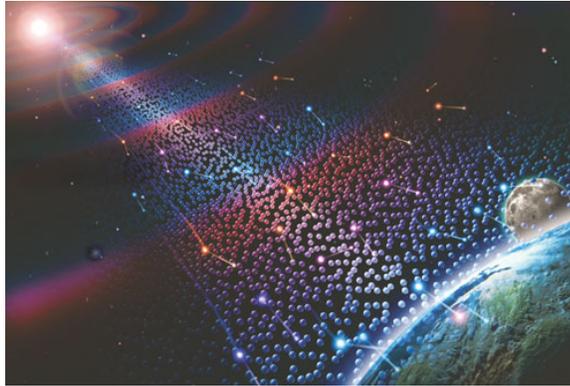


Figura 4.1: Neutrinos.

Alternativamente, los ángulos de mezcla están relacionados con las magnitudes de las entradas de la matriz de mezclas como

$$\sin^2 \theta_{13}^l \equiv |V_{e3}|^2, \quad \sin^2 \theta_{12}^l \equiv \frac{|V_{e2}|^2}{1-|V_{e3}|^2} \approx |V_{e2}|^2, \quad \sin^2 \theta_{23}^l \equiv \frac{|V_{\mu 3}|^2}{1-|V_{e3}|^2} \approx |V_{\mu 3}|^2. \quad (4.144)$$

Para una jerarquía normal y usando los elementos que dimos en la ec. (4.137) tenemos

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_{12}^{lh} &\approx \left| -\sqrt{\frac{\tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu 1} f_{m_e} f_{m_{\nu 2}}}{D_{m_e} D_{m_{\nu 2}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e \tilde{m}_{\nu 2}}{D_{m_e} D_{m_{\nu 2}}} (\sqrt{(1-\delta_l)(1-\delta_\nu)} f_{m_e} f_{m_{\nu 2}} e^{i\eta_1} + \sqrt{\delta_l \delta_\nu} f_{m_\mu} f_{m_{\nu 1}} e^{i\eta_2})} \right|^2, \\ \sin^2 \theta_{13}^{lh} &\approx \left| \sqrt{\frac{\delta_\nu \tilde{m}_\mu \tilde{m}_{\nu 1} \tilde{m}_{\nu 2} f_{m_e}}{D_{m_e} D_{m_{\nu 3}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{D_{m_e} D_{m_{\nu 3}}} (\sqrt{(1-\delta_l)(1-\delta_\nu)} \delta_\nu f_{m_e} e^{i\eta_1} + \sqrt{\delta_l} f_{m_\mu} f_{m_{\nu 1}} f_{m_{\nu 2}} e^{i\eta_2})} \right|^2, \\ \sin^2 \theta_{23}^{lh} &\approx \left| -\sqrt{\frac{\delta_\nu \tilde{m}_e \tilde{m}_{\nu 1} \tilde{m}_{\nu 2} f_{m_\mu}}{D_{m_\mu} D_{m_{\nu 3}}} + \sqrt{\frac{\tilde{m}_\mu}{D_{m_\mu} D_{m_{\nu 3}}} (\sqrt{(1-\delta_l)(1-\delta_\nu)} \delta_\nu f_{m_\mu} e^{i\eta_1} - \sqrt{\delta_l} f_{m_e} f_{m_{\nu 1}} f_{m_{\nu 2}} e^{i\eta_2})} \right|^2. \end{aligned} \quad (4.145)$$

Los valores para las masas de los leptones cargados son [53]:

$$\begin{aligned} m_e &= 0.510998928 \pm 0.000000011 \text{ MeV} \\ m_\mu &= 105.6583715 \pm 0.00000035 \text{ MeV} \\ m_\tau &= 1776.82 \pm 0.16 \text{ MeV} , \end{aligned}$$

Los siguientes valores se obtienen a través de los análisis de datos basado en el esquema de mezcla 3-neutrino se describe en la revisión "masa del neutrino, mezcla y oscilaciones" por K. Nakamura y S.T Petcov [53]:

$$\begin{aligned} \sin^2(2\theta_{12}) &= 0.857 \pm 0.024, \\ \Delta_{21}^2 &= (7.50 \pm 0.20) \times 10^{-5} eV^2, \\ \sin^2(2\theta_{23}) &> 0.95, \\ \sin^2(2\theta_{32}) &= (2.32_{-0.08}^{+0.12}) \times 10^{-3} eV^2, \\ \sin^2(2\theta_{13}) &= 0.95 \pm 0.010 \end{aligned} \quad (4.146)$$

Los parámetros son  $\delta_l$ ,  $\delta_\nu$ ,  $\eta_1$  y  $\eta_2$ . El siguiente paso del análisis es realizar un ajuste  $\chi^2$  que nos permita calcular y analizar los valores de estos parámetros que den el mejor ajuste de nuestra  $V_{PMNS}^{lh}$  con la  $V_{PMNS}^{exp}$ , así como de los ángulos de mezcla, a diferentes niveles de confianza.



## Capítulo 5

# Conclusiones

Aunque sumamente exitoso en lo que a sus predicciones fenomenológicas se refiere, el modelo estándar de las interacciones electrodébiles parece incompleto desde un punto de vista teórico. En su forma actual no es capaz de predecir las masas de los fermiones (leptones y quarks) ni de explicar porqué hay varias familias de tales partículas.

El estudio de las propiedades de los neutrinos ha jugado un rol esencial en la caracterización de las interacciones débiles y podría aportar nuevos ingredientes para el desarrollo de futuras teorías de las partículas elementales. Entre los aspectos de la física de los neutrinos que permanecen aún sin ser dilucidados, cabe mencionarse la cuestión de si sus masas son o no diferentes de cero, y en tal caso, si los estados creados en los procesos débiles ( $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ ) son combinaciones lineales de otros estados ( $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ ) con masas definidas.

Uno de los fenómenos más interesantes que se presenta cuando existe mezcla entre neutrinos masivos, son las llamadas oscilaciones de neutrinos, es decir, transformaciones periódicas de neutrinos de un sabor en otro. Debido a su interacción con la materia, neutrinos con distintos sabores tienen índices de refracción diferentes. Ello hace que, en general, las oscilaciones se vean afectadas por las propiedades del medio a través del cual los neutrinos se propagan.

El hecho de que el neutrino aparezca con una sola de sus proyecciones de quiralidad se basa solamente en un hecho experimental: la violación de la simetría de paridad en las interacciones débiles, lo cual es consecuencia de que los bosones portadores de dicha interacción sólo se acoplan a las componentes de quiralidad izquierda de los campos fermiónicos; junto a esto, el carácter neutro del neutrino hace que sea posible elaborar una teoría con cualquiera de sus proyecciones de quiralidad, y se escoge la izquierda para reproducir la experiencia. Sin embargo, es posible extender el ME a un modelo mucho más general, en donde ambas proyecciones de quiralidad estén presentes en la teoría, permitiendo, entre otras cosas, que el neutrino adquiera masa.

En el marco teórico del Modelo de Dos Dobletes de Higgs se demostró que se puede realizar un tratamiento unificado para las matrices de masa de todos los fermiones en la teoría, al introducir la parte derecha de los neutrinos como un singlete bajo la acción del grupo de norma del Modelo Estándar, y al considerar que los neutrinos activos  $\nu_i$  ( $i = e; \mu; \tau$ ) son partículas de Majorana. En dicho tratamiento las matrices de masa son representadas con una matriz genérica con dos ceros de textura.

En este trabajo de tesis se demostró que al extender el Modelo Estándar, se obtiene un tratamiento

unificado de las matrices de masa de los quarks y leptones, en el cual los neutrinos izquierdos adquieren masa a través del mecanismo see saw tipo I. En este escenario, las matrices de masa de los fermiones de Dirac tienen la misma forma genérica (hermitiana) con dos ceros de textura y una jerarquía normal en el espectro de masa. Por consiguiente, la matriz de masa de los neutrinos de Majorana también tiene dos ceros de textura, pero es una matriz simétrica compleja. De este modo, una vez que se determinaron las matrices de masa de los neutrinos, se dedujeron expresiones teóricas para los elementos de la matriz de mezcla PMNS.

La matriz de mezclas leptónica PMNS se parametrizó en términos de  $\tilde{m}_{\nu_i}$  ( $i = 1, 2$ ),  $\delta_l$ ,  $\delta_\nu$  y dos parámetros  $\eta_l$ ,  $\eta_\nu$ :

$$V_{PMNS}(\tilde{m}_{\nu_i}, \eta_l, \eta_\nu, \delta_l, \delta_\nu)$$

# Apéndice 1: Diagonalización de las Matrices de Masa.

Los eigenvectores  $|M_i\rangle$  normalizados, son de la forma:

$$|M_i\rangle = \frac{1}{N_i} \begin{pmatrix} (\xi_i - M_{22})M_{13} + M_{12}M_{23} \\ (\xi_i - M_{11})M_{23} + M_{21}M_{13} \\ (\xi_i - M_{22})(\xi_i - M_{11}) - M_{12}M_{21} \end{pmatrix} \quad (1)$$

donde  $N_i$  es la constante de normalización,

$$N_i^2 = \langle M_i | M_i \rangle$$

◦ Tomando la matriz para una *jerarquía normal* ( $\lambda_3 > \lambda_2 > \lambda_1$ ):

$$\tilde{M}_i = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_{i1}\tilde{\lambda}_{i2}}{1-\delta_i}} & 0 \\ \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_{i1}\tilde{\lambda}_{i2}}{1-\delta_i}} & \tilde{\lambda}_{i1} - \tilde{\lambda}_{i2} + \delta_i & \sqrt{\frac{\delta_i}{1-\delta_i}f_{i1}f_{i2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{\delta_i}{1-\delta_i}f_{i1}f_{i2}} & 1 - \delta_i \end{pmatrix}$$

Donde la matriz ortogonal real es:

$$O_i = \left( |\tilde{M}_{i1}\rangle, -|\tilde{M}_{i2}\rangle, |\tilde{M}_{i3}\rangle \right), \quad (2)$$

Entonces de la ecuación (1) y sustituyendo los elementos de la matriz de la ecuación (2) tenemos que para el eigenvector  $|\tilde{M}_{i1}\rangle$  se tiene:

$$\begin{aligned}
 |\tilde{M}_{i1}\rangle &= \frac{1}{N_{i1}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\tilde{\lambda}_{i1}\tilde{\lambda}_{i2}\delta_i f_{i1}f_{i2}}}{1-\delta_i} \\ \tilde{\lambda}_{i1}\sqrt{\frac{\delta_i}{1-\delta_i}}f_{i1}f_{i2} \\ \tilde{\lambda}_{i1}(\tilde{\lambda}_{i2}-\delta_i) - \frac{\tilde{\lambda}_{i1}\tilde{\lambda}_{i2}}{1-\delta_i} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{N_{i1}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\tilde{\lambda}_{i1}\tilde{\lambda}_{i2}\delta_i f_{i1}f_{i2}}}{1-\delta_i} \\ \tilde{\lambda}_{i1}\sqrt{\frac{\delta_i}{1-\delta_i}}f_{i1}f_{i2} \\ -\frac{\delta_i\tilde{\lambda}_{i1}f_{i2}}{1-\delta_i} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 N_{i1}^2 &= \langle \tilde{M}_{i1} | \tilde{M}_{i1} \rangle \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\tilde{\lambda}_{i1}\tilde{\lambda}_{i2}\delta_i f_{i1}f_{i2}}}{1-\delta_i} & \tilde{\lambda}_{i1}\sqrt{\frac{\delta_i}{1-\delta_i}}f_{i1}f_{i2} & -\frac{\delta_i\tilde{\lambda}_{i1}f_{i2}}{1-\delta_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\tilde{\lambda}_{i1}\tilde{\lambda}_{i2}\delta_i f_{i1}f_{i2}}}{1-\delta_i} \\ \tilde{\lambda}_{i1}\sqrt{\frac{\delta_i}{1-\delta_i}}f_{i1}f_{i2} \\ -\frac{\delta_i\tilde{\lambda}_{i1}f_{i2}}{1-\delta_i} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\tilde{\lambda}_{i1}f_{i2}}{(1-\delta_i)^2} \left( \delta_i\tilde{\lambda}_{i2}f_{i1} + (1-\delta_i)\delta_i\tilde{\lambda}_{i1}f_{i1} + \delta_i^2\tilde{\lambda}_{i1}f_{i2} \right)
 \end{aligned}$$

sustituyendo los valores dados en las ecuaciones

$$f_{i1} = (1 - \delta_i - \tilde{\lambda}_{i1}) \quad (3)$$

$$f_{i2} = (1 - \delta_i + \tilde{\lambda}_{i2}) \quad (4)$$

entonces

$$\begin{aligned}
 N_{i1}^2 &= \frac{\tilde{\lambda}_{i1}f_{i2}}{(1-\delta_i)^2} \left[ \delta_i\tilde{\lambda}_{i2} (1 - \delta_i - \tilde{\lambda}_{i1}) + (1 - \delta_i)\delta_i\tilde{\lambda}_{i1} (1 - \delta_i - \tilde{\lambda}_{i1}) + \delta_i^2\tilde{\lambda}_{i1} (1 - \delta_i + \tilde{\lambda}_{i2}) \right] \\
 &= \frac{\delta_i\tilde{\lambda}_{i1}f_{i2}}{(1-\delta_i)} \left[ \tilde{\lambda}_{i1} + \tilde{\lambda}_{i2} - \tilde{\lambda}_{i1}^2 - \tilde{\lambda}_{i1}\tilde{\lambda}_{i2} \right] \\
 &= \frac{\delta_i\tilde{\lambda}_{i1}f_{i2}}{(1-\delta_i)} (1 - \tilde{\lambda}_{i1}) (\tilde{\lambda}_{i1} + \tilde{\lambda}_{i2})
 \end{aligned}$$

Por lo que finalmente se tiene para el eigenvector  $|\tilde{M}_{i1}\rangle$  :

$$|\tilde{M}_{i1}\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_{i2}f_{i1}}{(1-\delta_i)(1-\tilde{\lambda}_{i1})(\tilde{\lambda}_{i1}+\tilde{\lambda}_{i2})}} \\ \sqrt{\frac{(1-\delta_i)\tilde{\lambda}_{i1}f_{i1}}{(1-\delta_i)(1-\tilde{\lambda}_{i1})(\tilde{\lambda}_{i1}+\tilde{\lambda}_{i2})}} \\ -\sqrt{\frac{\delta_i\tilde{\lambda}_{i1}f_{i2}}{(1-\delta_i)(1-\tilde{\lambda}_{i1})(\tilde{\lambda}_{i1}+\tilde{\lambda}_{i2})}} \end{pmatrix}$$

Para el eigenvector  $|\tilde{M}_{i2}\rangle$  tenemos:

$$\begin{aligned} |\tilde{M}_{i2}\rangle &= \frac{1}{N_{i2}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\tilde{\lambda}_{i1}\tilde{\lambda}_{i2}\delta_i f_{i1}f_{i2}}}{1-\delta_i} \\ -\tilde{\lambda}_{i2}\sqrt{\frac{\delta_i}{1-\delta_i}f_{i1}f_{i2}} \\ -\tilde{\lambda}_{i2}(\tilde{\lambda}_{i1} + \delta_i) - \frac{\tilde{\lambda}_{i1}\tilde{\lambda}_{i2}}{1-\delta_i} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{N_{i2}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\tilde{\lambda}_{i1}\tilde{\lambda}_{i2}\delta_i f_{i1}f_{i2}}}{1-\delta_i} \\ -\tilde{\lambda}_{i2}\sqrt{\frac{\delta_i}{1-\delta_i}f_{i1}f_{i2}} \\ \frac{\delta_i\tilde{\lambda}_{i2}f_{i1}}{1-\delta_i} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

donde

$$N_{i2}^2 = \langle \tilde{M}_{i2} | \tilde{M}_{i2} \rangle$$

$$\begin{aligned} &= \left( \frac{\sqrt{\tilde{\lambda}_{i1}\tilde{\lambda}_{i2}\delta_i f_{i1}f_{i2}}}{1-\delta_i} \quad -\tilde{\lambda}_{i2}\sqrt{\frac{\delta_i}{1-\delta_i}f_{i1}f_{i2}} \quad \frac{\delta_i\tilde{\lambda}_{i2}f_{i1}}{1-\delta_i} \right) \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\tilde{\lambda}_{i1}\tilde{\lambda}_{i2}\delta_i f_{i1}f_{i2}}}{1-\delta_i} \\ -\tilde{\lambda}_{i2}\sqrt{\frac{\delta_i}{1-\delta_i}f_{i1}f_{i2}} \\ \frac{\delta_i\tilde{\lambda}_{i2}f_{i1}}{1-\delta_i} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\tilde{\lambda}_{i2}f_{i1}}{(1-\delta_i)^2} \left( \delta\tilde{\lambda}_{i1}f_{i2} + (1-\delta_i)\delta_i\tilde{\lambda}_{i2}f_{i2} + \delta_i^2\tilde{\lambda}_{i2}f_{i1} \right) \end{aligned}$$

sustituyendo los valores dados en las ecuaciones (3) y (4)  
entonces

$$\begin{aligned}
 N_{i2}^2 &= \frac{\tilde{\lambda}_{i2} f_{i1}}{(1-\delta_i)^2} \left[ \delta_i \tilde{\lambda}_{i1} (1 - \delta_i + \tilde{\lambda}_{i2}) + \delta_i \tilde{\lambda}_{i2} (1 - \delta_i + \tilde{\lambda}_{i2}) - \delta_i^2 \tilde{\lambda}_{i2} (1 - \delta_i + \tilde{\lambda}_{i2}) + \delta_i^2 \tilde{\lambda}_{i2} (1 - \delta_i - \tilde{\lambda}_{i1}) \right] \\
 &= \frac{\delta_i \tilde{\lambda}_{i2} f_{i1}}{(1-\delta_i)} \left[ \tilde{\lambda}_{i1} + \tilde{\lambda}_{i2} + \tilde{\lambda}_{i2}^2 + \tilde{\lambda}_{i1} \tilde{\lambda}_{i2} \right] \\
 &= \frac{\delta_i \tilde{\lambda}_{i2} f_{i1}}{(1-\delta_i)} (1 + \tilde{\lambda}_{i2}) (\tilde{\lambda}_{i1} + \tilde{\lambda}_{i2})
 \end{aligned}$$

Entonces  $|\tilde{M}_{i2}\rangle$  :

$$|\tilde{M}_{i2}\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_{i1} f_{i2}}{(1-\delta_i)(1+\tilde{\lambda}_{i2})(\tilde{\lambda}_{i1}+\tilde{\lambda}_{i2})}} \\ -\sqrt{\frac{(1-\delta_i)\tilde{\lambda}_{i2} f_{i2}}{(1-\delta_i)(1+\tilde{\lambda}_{i2})(\tilde{\lambda}_{i1}+\tilde{\lambda}_{i2})}} \\ \sqrt{\frac{\delta_i \tilde{\lambda}_{i2} f_{i1}}{(1-\delta_i)(1+\tilde{\lambda}_{i2})(\tilde{\lambda}_{i1}+\tilde{\lambda}_{i2})}} \end{pmatrix}$$

Por lo que finalmente se tiene para el eigenvector  $-|\tilde{M}_{i2}\rangle$  :

$$-|\tilde{M}_{i2}\rangle = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_{i1} f_{i2}}{(1-\delta_i)(1+\tilde{\lambda}_{i2})(\tilde{\lambda}_{i1}+\tilde{\lambda}_{i2})}} \\ \sqrt{\frac{(1-\delta_i)\tilde{\lambda}_{i2} f_{i2}}{(1-\delta_i)(1+\tilde{\lambda}_{i2})(\tilde{\lambda}_{i1}+\tilde{\lambda}_{i2})}} \\ -\sqrt{\frac{\delta_i \tilde{\lambda}_{i2} f_{i1}}{(1-\delta_i)(1+\tilde{\lambda}_{i2})(\tilde{\lambda}_{i1}+\tilde{\lambda}_{i2})}} \end{pmatrix}$$

Para el eigenvector  $|\tilde{M}_{i3}\rangle$  se tiene:

$$\begin{aligned}
 |\tilde{M}_{i3}\rangle &= \frac{1}{N_{i3}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\tilde{\lambda}_{i1} \tilde{\lambda}_{i2} \delta_i f_{i1} f_{i2}}}{1-\delta_i} \\ 1 \sqrt{\frac{\delta_i}{1-\delta_i} f_{i1} f_{i2}} \\ 1(1 - \tilde{\lambda}_{i1} + \tilde{\lambda}_{i2} - \delta_i) - \frac{\tilde{\lambda}_{i1} \tilde{\lambda}_{i2}}{1-\delta_i} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{N_{i3}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\tilde{\lambda}_{i1} \tilde{\lambda}_{i2} \delta_i f_{i1} f_{i2}}}{1-\delta_i} \\ \sqrt{\frac{\delta_i}{1-\delta_i} f_{i1} f_{i2}} \\ \frac{f_{i1} f_{i2}}{1-\delta_i} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

donde

$$N_{i3}^2 = \langle \tilde{M}_{i3} | \tilde{M}_{i3} \rangle$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_{i1}\tilde{\lambda}_{i2}\delta_i f_{i1}f_{i2}}{1-\delta_i}} & \sqrt{\frac{\delta_i}{1-\delta_i}} f_{i1}f_{i2} & \frac{f_{i1}f_{i2}}{1-\delta_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_{i1}\tilde{\lambda}_{i2}\delta_i f_{i1}f_{i2}}{1-\delta_i}} \\ \sqrt{\frac{\delta_i}{1-\delta_i}} f_{i1}f_{i2} \\ \frac{f_{i1}f_{i2}}{1-\delta_i} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{f_{i1}f_{i2}}{(1-\delta_i)^2} \left( \delta_i \tilde{\lambda}_{i1} \tilde{\lambda}_{i2} + (1-\delta_i)\delta + f_{i1}f_{i2} \right)
 \end{aligned}$$

sustituyendo los valores dados en las ecuaciones (3) y (4) entonces

$$\begin{aligned}
 N_{i3}^2 &= \frac{f_{i1}f_{i2}}{(1-\delta_i)^2} \left[ \delta_i \tilde{\lambda}_{i1} \tilde{\lambda}_{i2} + (1-\delta_i)\delta_i + (1-\delta_i - \tilde{\lambda}_{i1}) (1-\delta_i + \tilde{\lambda}_{i2}) \right] \\
 &= \frac{f_{i1}f_{i2}}{(1-\delta_i)} \left[ 1 + \tilde{\lambda}_{i2} - \tilde{\lambda}_{i1} - \tilde{\lambda}_{i1} \tilde{\lambda}_{i2} \right] \\
 &= \frac{f_{i1}f_{i2}}{(1-\delta_i)} (1 - \tilde{\lambda}_{i1}) (1 + \tilde{\lambda}_{i2})
 \end{aligned}$$

Por lo que finalmente se tiene para el eigenvector  $|\tilde{M}_{i3}\rangle$  :

$$|\tilde{M}_{i3}\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\delta_i \tilde{\lambda}_{i1} \tilde{\lambda}_{i2}}{(1-\delta_i)(1-\tilde{\lambda}_{i1})(1+\tilde{\lambda}_{i2})}} \\ \sqrt{\frac{(1-\delta_i)\delta_i}{(1-\delta_i)(1-\tilde{\lambda}_{i1})(1+\tilde{\lambda}_{i2})}} \\ \sqrt{\frac{f_{i1}f_{i2}}{(1-\delta_i)(1-\tilde{\lambda}_{i1})(1+\tilde{\lambda}_{i2})}} \end{pmatrix}$$

Entonces para una jerarquía normal, por la ecuación (2) la matriz ortogonal es:

$$O_i = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_{i2}f_{i1}}{D_{i1}}} & -\sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_{i1}f_{i2}}{D_{i2}}} & \sqrt{\frac{\delta_i \tilde{\lambda}_{i1} \tilde{\lambda}_{i2}}{D_{i3}}} \\ \sqrt{\frac{(1-\delta_i)\tilde{\lambda}_{i1}f_{i1}}{D_{i1}}} & \sqrt{\frac{(1-\delta_i)\tilde{\lambda}_{i2}f_{i2}}{D_{i2}}} & \sqrt{\frac{(1-\delta_i)\delta_i}{D_{i3}}} \\ -\sqrt{\frac{\delta_i \tilde{\lambda}_{i1}f_{i2}}{D_{i1}}} & -\sqrt{\frac{\delta_i \tilde{\lambda}_{i2}f_{i1}}{D_{i2}}} & \sqrt{\frac{f_{i1}f_{i2}}{D_{i3}}} \end{pmatrix}$$

donde

$$D_{i1} = (1-\delta_i) (1 - \tilde{\lambda}_{i1}) (\tilde{\lambda}_{i1} + \tilde{\lambda}_{i2}) \quad (5)$$

$$D_{i2} = (1-\delta_i) (1 + \tilde{\lambda}_{i2}) (\tilde{\lambda}_{i1} + \tilde{\lambda}_{i2}) \quad (6)$$

$$D_{i3} = (1-\delta_i) (1 - \tilde{\lambda}_{i1}) (1 + \tilde{\lambda}_{i2}) \quad (7)$$

◦ Ahora tomando la matriz para una *jerarquía invertida* ( $\lambda_{i2} > \lambda_{i1} > \lambda_{i3}$ ):

$$\hat{M}_i = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\hat{\lambda}_{i1}\hat{\lambda}_{i3}}{1-\hat{\delta}_i}} & 0 \\ \sqrt{\frac{\hat{\lambda}_{i1}\hat{\lambda}_{i3}}{1-\hat{\delta}_i}} & -\hat{\lambda}_{i1} + \hat{\lambda}_{i3} + \hat{\delta}_i & \sqrt{\frac{\hat{\delta}_i}{1-\hat{\delta}_i}}\hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3} \\ 0 & \sqrt{\frac{\hat{\delta}_i}{1-\hat{\delta}_i}}\hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3} & 1 - \hat{\delta}_i \end{pmatrix}$$

Donde la matriz ortogonal real es:

$$\hat{O}_i = \left( -|\hat{M}_{i1}\rangle, |\hat{M}_{i2}\rangle, |\hat{M}_{i3}\rangle \right), \quad (8)$$

Entonces de la ecuación (1) y sustituyendo los elementos de la matriz de la ecuación (8) tenemos que para el eigenvector  $|\hat{M}_{i1}\rangle$  se tiene:

$$\begin{aligned} |\hat{M}_{i1}\rangle &= \frac{1}{\hat{N}_{i1}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\hat{\lambda}_{i1}\hat{\lambda}_{i3}\hat{\delta}_i\hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3}}}{1-\hat{\delta}_i} \\ -\hat{\lambda}_{i1}\sqrt{\frac{\hat{\delta}_i}{1-\hat{\delta}_i}}\hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3} \\ -\hat{\lambda}_{i1}(-\hat{\lambda}_{i3} - \hat{\delta}_i) - \frac{\hat{\lambda}_{i1}\hat{\lambda}_{i3}}{1-\hat{\delta}_i} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\hat{N}_{i1}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\hat{\lambda}_{i1}\hat{\lambda}_{i3}\hat{\delta}_i\hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3}}}{1-\hat{\delta}_i} \\ -\hat{\lambda}_{i1}\sqrt{\frac{\hat{\delta}_i}{1-\hat{\delta}_i}}\hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3} \\ \frac{\hat{\delta}_i\hat{\lambda}_{i1}\hat{f}_{i3}}{1-\hat{\delta}_i} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

donde

$$\hat{N}_{i1}^2 = \langle \hat{M}_{i1} | \hat{M}_{i1} \rangle$$

$$\begin{aligned} &= \left( \frac{\sqrt{\hat{\lambda}_{i1}\hat{\lambda}_{i3}\hat{\delta}_i\hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3}}}{1-\hat{\delta}_i} \quad -\hat{\lambda}_{i1}\sqrt{\frac{\hat{\delta}_i}{1-\hat{\delta}_i}}\hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3} \quad \frac{\hat{\delta}_i\hat{\lambda}_{i1}\hat{f}_{i3}}{1-\hat{\delta}_i} \right) \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\hat{\lambda}_{i1}\hat{\lambda}_{i3}\hat{\delta}_i\hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3}}}{1-\hat{\delta}_i} \\ -\hat{\lambda}_{i1}\sqrt{\frac{\hat{\delta}_i}{1-\hat{\delta}_i}}\hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3} \\ \frac{\hat{\delta}_i\hat{\lambda}_{i1}\hat{f}_{i3}}{1-\hat{\delta}_i} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hat{\lambda}_{i1}\hat{f}_{i3}}{(1-\hat{\delta}_i)^2} \left( \hat{\delta}_i\hat{\lambda}_{i3}\hat{f}_{i1} + (1-\hat{\delta}_i)\hat{\delta}_i\hat{\lambda}_{i1}\hat{f}_{i1} + \hat{\delta}_i^2\hat{\lambda}_{i1}\hat{f}_{i3} \right) \end{aligned}$$

sustituyendo los valores dados en las ecuaciones

$$\hat{f}_{i1} = (1 - \hat{\delta}_i + \hat{\lambda}_{i1}) \quad (9)$$

$$\hat{f}_{i3} = (1 - \hat{\delta}_i - \hat{\lambda}_{i3}) \quad (10)$$

entonces

$$\begin{aligned} \hat{N}_{i1}^2 &= \frac{\hat{\lambda}_{i1}\hat{f}_{i3}}{(1-\hat{\delta}_i)^2} \left[ \hat{\delta}_i\hat{\lambda}_{i3} (1 - \hat{\delta}_i + \hat{\lambda}_{i1}) + \hat{\delta}_i\hat{\lambda}_{i1} (1 - \hat{\delta}_i + \hat{\lambda}_{i1}) - \hat{\delta}_i^2\hat{\lambda}_{i1} (1 - \hat{\delta}_i + \hat{\lambda}_{i1}) + \hat{\delta}_i^2\hat{\lambda}_{i1} (1 - \hat{\delta}_i - \hat{\lambda}_{i3}) \right] \\ &= \frac{\hat{\delta}_i\hat{\lambda}_{i1}\hat{f}_{i3}}{(1-\hat{\delta}_i)} \left[ \hat{\lambda}_{i1} + \hat{\lambda}_{i3} + \hat{\lambda}_{i1}^2 + \hat{\lambda}_{i1}\hat{\lambda}_{i3} \right] \\ &= \frac{\hat{\delta}_i\hat{\lambda}_{i1}\hat{f}_{i3}}{(1-\hat{\delta}_i)} (1 + \hat{\lambda}_{i1}) (\hat{\lambda}_{i1} + \hat{\lambda}_{i3}) \end{aligned}$$

entonces  $|\hat{M}_{i1}\rangle$ :

$$|\hat{M}_{i1}\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\hat{\lambda}_{i3}\hat{f}_{i1}}{(1-\hat{\delta}_i)(1+\hat{\lambda}_{i1})(\hat{\lambda}_{i1}+\hat{\lambda}_{i3})}} \\ -\sqrt{\frac{(1-\hat{\delta}_i)\hat{\lambda}_{i1}\hat{f}_{i1}}{(1-\hat{\delta}_i)(1+\hat{\lambda}_{i1})(\hat{\lambda}_{i1}+\hat{\lambda}_{i3})}} \\ \sqrt{\frac{\hat{\delta}_i\hat{\lambda}_{i1}\hat{f}_{i3}}{(1-\hat{\delta}_i)(1+\hat{\lambda}_{i1})(\hat{\lambda}_{i1}+\hat{\lambda}_{i3})}} \end{pmatrix}$$

Por lo que finalmente se tiene para el eigenvector  $-|\hat{M}_{i1}\rangle$ :

$$-|\hat{M}_{i1}\rangle = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\hat{\lambda}_{i3}\hat{f}_{i1}}{(1-\hat{\delta}_i)(1+\hat{\lambda}_{i1})(\hat{\lambda}_{i1}+\hat{\lambda}_{i3})}} \\ \sqrt{\frac{(1-\hat{\delta}_i)\hat{\lambda}_{i1}\hat{f}_{i1}}{(1-\hat{\delta}_i)(1+\hat{\lambda}_{i1})(\hat{\lambda}_{i1}+\hat{\lambda}_{i3})}} \\ -\sqrt{\frac{\hat{\delta}_i\hat{\lambda}_{i1}\hat{f}_{i3}}{(1-\hat{\delta}_i)(1+\hat{\lambda}_{i1})(\hat{\lambda}_{i1}+\hat{\lambda}_{i3})}} \end{pmatrix}$$

Para el eigenvector  $|\hat{M}_{i2}\rangle$  se tiene:

$$\begin{aligned}
 |\hat{M}_{i2}\rangle &= \frac{1}{\hat{N}_{i2}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\hat{\lambda}_{i1}\hat{\lambda}_{i3}\hat{\delta}_i\hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3}}}{1-\hat{\delta}_i} \\ 1\sqrt{\frac{\hat{\delta}_i}{1-\hat{\delta}_i}\hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3}} \\ 1(1+\hat{\lambda}_{i1}-\hat{\lambda}_{i3}-\hat{\delta}_i)-\frac{\hat{\lambda}_{i1}\hat{\lambda}_{i3}}{1-\hat{\delta}_i} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\hat{N}_{i2}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\hat{\lambda}_{i1}\hat{\lambda}_{i3}\hat{\delta}_i\hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3}}}{1-\hat{\delta}_i} \\ \sqrt{\frac{\hat{\delta}_i}{1-\hat{\delta}_i}\hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3}} \\ \frac{\hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3}}{1-\hat{\delta}_i} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

donde

$$\hat{N}_{i2}^2 = \langle \hat{M}_{i2} | \hat{M}_{i2} \rangle$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\hat{\lambda}_{i1}\hat{\lambda}_{i3}\hat{\delta}_i\hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3}}}{1-\hat{\delta}_i} & \sqrt{\frac{\hat{\delta}_i}{1-\hat{\delta}_i}\hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3}} & \frac{\hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3}}{1-\hat{\delta}_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\hat{\lambda}_{i1}\hat{\lambda}_{i3}\hat{\delta}_i\hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3}}}{1-\hat{\delta}_i} \\ \sqrt{\frac{\hat{\delta}_i}{1-\hat{\delta}_i}\hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3}} \\ \frac{\hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3}}{1-\hat{\delta}_i} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3}}{(1-\hat{\delta}_i)^2} \left( \hat{\delta}_i\hat{\lambda}_{i1}\hat{\lambda}_{i3} + (1-\hat{\delta}_i)\hat{\delta}_i + \hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3} \right)
 \end{aligned}$$

sustituyendo los valores dados en las ecuaciones (9) y (10) entonces

$$\begin{aligned}
 \hat{N}_{i2}^2 &= \frac{\hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3}}{(1-\hat{\delta}_i)^2} \left[ \hat{\delta}_i\hat{\lambda}_{i1}\hat{\lambda}_{i3} + (1-\hat{\delta}_i)\hat{\delta}_i + (1-\hat{\delta}_i+\hat{\lambda}_{i1})(1-\hat{\delta}_i-\hat{\lambda}_{i3}) \right] \\
 &= \frac{\hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3}}{(1-\hat{\delta}_i)} \left[ 1 + \hat{\lambda}_{i1} - \hat{\lambda}_{i3} - \hat{\lambda}_{i1}\hat{\lambda}_{i3} \right] \\
 &= \frac{\hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3}}{(1-\hat{\delta}_i)} \left( 1 + \hat{\lambda}_{i1} \right) \left( 1 - \hat{\lambda}_{i3} \right)
 \end{aligned}$$

Por lo que finalmente se tiene para el eigenvector  $|\hat{M}_{i2}\rangle$  :

$$|\hat{M}_{i2}\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\hat{\delta}_i \hat{\lambda}_{i1} \hat{\lambda}_{i3}}{(1-\hat{\delta}_i)(1+\hat{\lambda}_{i1})(1-\hat{\lambda}_{i3})}} \\ \sqrt{\frac{(1-\hat{\delta}_i)\hat{\delta}_i}{(1-\hat{\delta}_i)(1+\hat{\lambda}_{i1})(1-\hat{\lambda}_{i3})}} \\ \sqrt{\frac{\hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3}}{(1-\hat{\delta}_i)}(1+\hat{\lambda}_{i1})(1-\hat{\lambda}_{i3})} \end{pmatrix}$$

Para el eigenvector  $|\hat{M}_{i3}\rangle$  tenemos:

$$\begin{aligned} |\hat{M}_{i3}\rangle &= \frac{1}{\hat{N}_{i3}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\hat{\lambda}_{i1}\hat{\lambda}_{i3}\hat{\delta}_i\hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3}}}{1-\hat{\delta}_i} \\ \hat{\lambda}_{i3}\sqrt{\frac{\hat{\delta}_i}{1-\hat{\delta}_i}\hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3}} \\ \hat{\lambda}_{i3}(\hat{\lambda}_{i1}-\hat{\delta}_i) - \frac{\hat{\lambda}_{i1}\hat{\lambda}_{i3}}{1-\hat{\delta}_i} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\hat{N}_{i3}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\hat{\lambda}_{i1}\hat{\lambda}_{i3}\hat{\delta}_i\hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3}}}{1-\hat{\delta}_i} \\ \hat{\lambda}_{i3}\sqrt{\frac{\hat{\delta}_i}{1-\hat{\delta}_i}\hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3}} \\ -\frac{\hat{\delta}_i\hat{\lambda}_{i3}\hat{f}_{i1}}{1-\hat{\delta}_i} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

donde

$$\hat{N}_{i3}^2 = \langle \hat{M}_{i3} | \hat{M}_{i3} \rangle$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\hat{\lambda}_{i1}\hat{\lambda}_{i3}\hat{\delta}_i\hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3}}}{1-\hat{\delta}_i} & -\hat{\lambda}_{i3}\sqrt{\frac{\hat{\delta}_i}{1-\hat{\delta}_i}\hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3}} & -\frac{\hat{\delta}_i\hat{\lambda}_{i3}\hat{f}_{i1}}{1-\hat{\delta}_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\hat{\lambda}_{i1}\hat{\lambda}_{i3}\hat{\delta}_i\hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3}}}{1-\hat{\delta}_i} \\ \hat{\lambda}_{i3}\sqrt{\frac{\hat{\delta}_i}{1-\hat{\delta}_i}\hat{f}_{i1}\hat{f}_{i3}} \\ -\frac{\hat{\delta}_i\hat{\lambda}_{i3}\hat{f}_{i1}}{1-\hat{\delta}_i} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hat{\delta}_i\hat{\lambda}_{i3}\hat{f}_{i1}}{(1-\hat{\delta}_i)^2} \left( \hat{\lambda}_{i1}\hat{f}_{i3} + (1-\hat{\delta}_i)\hat{\lambda}_{i3}\hat{f}_{i3} + \hat{\delta}_i\hat{\lambda}_{i3}\hat{f}_{i1} \right) \end{aligned}$$

sustituyendo los valores dados en las ecuaciones (9) y (10)  
entonces

$$\begin{aligned}
 \hat{N}_{i3}^2 &= \frac{\hat{\delta}_i \hat{\lambda}_{i3} \hat{f}_{i1}}{(1 - \hat{\delta}_i)^2} \left[ \hat{\lambda}_{i1} (1 - \hat{\delta}_i - \hat{\lambda}_{i3}) + (1 - \hat{\delta}_i) \hat{\lambda}_{i3} \hat{f}_{i3} + \hat{\delta}_i \hat{\lambda}_{i3} (1 - \hat{\delta}_i + \hat{\lambda}_{i1}) \right] \\
 &= \frac{\hat{\delta}_i \hat{\lambda}_{i3} \hat{f}_{i1}}{(1 - \hat{\delta}_i)} \left[ \hat{\lambda}_{i1} + \hat{\lambda}_{i3} - \hat{\lambda}_{i3}^2 - \hat{\lambda}_{i1} \hat{\lambda}_{i3} \right] \\
 &= \frac{\hat{\delta}_i \hat{\lambda}_{i3} \hat{f}_{i1}}{(1 - \hat{\delta}_i)} (1 - \hat{\lambda}_{i3}) (\hat{\lambda}_{i1} + \hat{\lambda}_{i3})
 \end{aligned}$$

Entonces  $|\hat{M}_{i3}\rangle$  :

$$|\hat{M}_{i3}\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\hat{\lambda}_{i1} \hat{f}_{i3}}{(1 - \hat{\delta}_i)(1 - \hat{\lambda}_{i3})(\hat{\lambda}_{i1} + \hat{\lambda}_{i3})}} \\ \sqrt{\frac{(1 - \hat{\delta}_i) \hat{\lambda}_{i3} \hat{f}_{i3}}{(1 - \hat{\delta}_i)(1 - \hat{\lambda}_{i3})(\hat{\lambda}_{i1} + \hat{\lambda}_{i3})}} \\ -\sqrt{\frac{\hat{\delta}_i \hat{\lambda}_{i3} \hat{f}_{i1}}{(1 - \hat{\delta}_i)(1 - \hat{\lambda}_{i3})(\hat{\lambda}_{i1} + \hat{\lambda}_{i3})}} \end{pmatrix}$$

Entonces para una jerarquía invertida, por la ecuación (8) la matriz ortogonal es:

$$\hat{O}_i = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\hat{\lambda}_{i3} \hat{f}_{i1}}{\hat{D}_{i1}}} & \sqrt{\frac{\hat{\lambda}_{i1} \hat{\lambda}_{i3} \hat{\delta}_i}{\hat{D}_{i2}}} & \sqrt{\frac{\hat{\lambda}_{i1} \hat{\lambda}_{i3}}{\hat{D}_{i3}}} \\ \sqrt{\frac{(1 - \hat{\delta}_i) \hat{\lambda}_{i1} \hat{f}_{i1}}{\hat{D}_{i1}}} & \sqrt{\frac{(1 - \hat{\delta}_i) \hat{\delta}_i}{\hat{D}_{i2}}} & \sqrt{\frac{(1 - \hat{\delta}_i) \hat{\lambda}_{i3} \hat{f}_{i3}}{\hat{D}_{i3}}} \\ -\sqrt{\frac{\hat{\delta}_i \hat{\lambda}_{i1} \hat{f}_{i3}}{\hat{D}_{i1}}} & \sqrt{\frac{\hat{f}_{i1} \hat{f}_{i3}}{\hat{D}_{i2}}} & -\sqrt{\frac{\hat{\delta}_i \hat{\lambda}_{i3} \hat{f}_{i1}}{\hat{D}_{i3}}} \end{pmatrix}$$

donde

$$\hat{D}_{i1} = (1 - \hat{\delta}_i) (1 + \hat{\lambda}_{i1}) (\hat{\lambda}_{i1} + \hat{\lambda}_{i3}) \quad (11)$$

$$\hat{D}_{i2} = (1 - \hat{\delta}_i) (1 + \hat{\lambda}_{i1}) (1 - \hat{\lambda}_{i3}) \quad (12)$$

$$\hat{D}_{i3} = (1 - \hat{\delta}_i) (1 - \hat{\lambda}_{i3}) (\hat{\lambda}_{i1} + \hat{\lambda}_{i3}) \quad (13)$$

# Bibliografía

- [1] W. N. Cottingham and D. A. Greenwood, *An Introduction to the Standard Model of Particle Physics*, Cambridge University Press, (2007).
- [2] <http://home.web.cern.ch/topics/higgs-boson>.
- [3] J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch y R. Turlay, *Evidense for the  $2\pi$  Decay of the  $K^0$  Meson*, Physical Review Letters 13, 138 (1964); G. D. Barr *et al.* (NA31 Collaboration), Phys. Lett. B. 317, 233 (1993); KTeV Collaboration, Phys. Rev. Lett. 83, 22 (1999); V. Fanti *et al.* (NA48 Collaboration), Phys. Lett. B. 465, 335 (1999).
- [4] A. Abashian *et al.*, (Belle Collaboration), Phys. Rev. Lett. 86, 2509 (2001); B. Aubert *et al.* (BaBar Collaboration), Phys. Rev. Lett. 87, 091801 (2001); T.E. Coan *et al.* (CLEO Collaboration), Phys. Rev. Lett. 86, 5661 (2001).
- [5] The Particle Data Group, Eur. Phys. J. C 15, 1 (2000).
- [6] M. Kobayashi y T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. 49, 652 (1973).
- [7] L. Wolfenstein, Phys. Rev. Lett. 51, 1945 (1983).
- [8] Bilenky, S.M. Phys. Part. Nucl. 44,(2013) 1-46.
- [9] R. Mohapatra y P.B. Pal., *Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics*, World Scientific Lecture Notes in Physics Tomo 72, World Scientific Publishing, Singapore, Third Edition (2004).
- [10] J. N. Bahcall, Astrophysics J. 467 (1996) 475.
- [11] B. T. Cleveland *et al.*, Nucl. Phys. B (Proc Suppl.), 31, 47 (1995).
- [12] R. Davis, Prog. Part. Nucl. Phys., 32, 13 (1994).
- [13] R. Davis Jr. (Homestake Collaboration), Prog. Part. Nucl. Phys., 32, 13 (1994); Y. Fukuda *et al.* (Kamiokande Collaboration), Phys. Rev. Lett. 77 1683 (1996); Y. Fukuda *et al.* (SuperKamiokande Collaboration), Phys. Rev. Lett. 81, 1158 (1998), Erratum 81, 4279 (1998); W. Hampel *et al.* (GALLEX Collaboration), Phys. Lett. B 388, 384 (1996); W. Hampel *et al.* (Gallex Collaboration), Phys. Lett. B 447, 127 (1999); Abdurashitov *et al.* (SAGE Collaboration), Phys. Rev. Lett. 77, 4708 (1996).
- [14] J. Beringer *et al.*, (Particle Data Group), Phys. Rev. D 86, 010001 (2012).
- [15] C. Athanassopoulos, Phys. Rev. Lett. 75, 2650 (1995).
- [16] J. Beringer *et al.*, (Particle Data Group), Phys. Rev. D 86, 010001 (2012).
- [17] Kamiokande K. S. Hirata *et al.*, Phys. Lett. B 205, 416 (1998); Phys. Lett B 280, 145 (1992).
- [18] G. C. Branco, P. M. Ferreira, L. Lavoura, M. N. Rebelo, Marc Sher y Joo P. Silva, *Theory and Phenomenology of Two-Higgs-Doublet Models*, arXiv:1106.0034v3 [hep-ph] 19 Dec (2011).
- [19] Roger José Hernández Pinto, *Un modelo de norma para neutrinos derechos como materia oscura*, Tesis de Maestría, IPN, México, (2007).
- [20] M. Antonio Moreira, *El Modelo Estándar de la física de partículas*, <http://www.if.ufrgs.br/moreira/modeloestandar.pdf>.

- [21] Héctor Bello Martínez, *Implicaciones de las texturas de Yukawa en el decaimiento de bosones de Higgs neutros en el THDM-III*, Tesis de Maestría, BUAP, (2012).
- [22] Javier Rubio Peña, *Física de Neutrinos*, <http://www.ft.uam.es/personal/rubio/notas.html>.
- [23] F. Halzen y A. D. Martin, *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*, (1984).
- [24] N. Quintero y F. Molina *A brief description of Gauge Theories*, (2009).
- [25] Michael E. Peskin and Dan B. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, (1995).
- [26] Maria Krawczyk, *Testing Higgs sector of 2HDM*, arXiv:hep-ph/0512371.
- [27] Félix Francisco González Canalez, *Simetría Permutacional  $S_3$ : Sabor y Ceros de Textura*, Tesis de Doctorado, UNAM, (2012).
- [28] W. Pauli Open Letter to Radiactive Persons, (1930).
- [29] E. Z. Fermi Phys. 88, 161, (1934).
- [30] E. Majorana Nouvo Cimento 14, 170, (1937).
- [31] S. Chandrasekhar, *An introduction to the study of stellar structure*, Dover Publications Inc., (1967).
- [32] F. Boehm, P. Vogel *Physics of Massive Neutrinos*, Cambridge University Press. (1992).
- [33] R. Mohapatra, Pal P. *Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics*, World Scientific Publishing Co. (1991).
- [34] <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/particles/neutrino.html>
- [35] J. N. Bahcall, S. Basu, Pinsonneault M. H., Rev. Mod. Phys. 66. 885, (1992).
- [36] J.N. Bahcall, *Neutrino Astrophysics*, Cambridge University Press. (1989).
- [37] B. Pontecorvo, Sov. Phys. JETP 6, 429, (1958).
- [38] W. Greiner, B. Müller, *Gauge Theory of Weak Interactions*, Springer Verlag. (1989).
- [39] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, John Wiley Sons, INC. (1987).
- [40] Z. Maki, M. Nakagawa, S. Sakata Prog. Theor. Phys. 28, 870, (1962).
- [41] T. Teubner, *The Standard Model*, <http://www.stfc.ac.uk/ppd/resources/pdf/standardmodel09.pdf>
- [42] José Ignacio Illana, *El Modelo Estándar y su Fenomenología*, Universidad de Granada, (2007)
- [43] Leonardo Balart Vergara *Teorías de Gauge*, Universidad Católica de Chile, (2010).
- [44] Carlos A. Morgan Cruz, Antonio Rivasplata Mendoza, Pablo Aguilar Marín, *Partículas constructoras del universo: una comparación de las predicciones del Modelo Estándar y Modelo 3-3-1*, Tesis de Maestría, (2013).
- [45] Mesala Efraín Palencia Ramírez, *Mecanismos para generar masas en Física de Partículas*, Guatemala, (2007).
- [46] Shainen M. Davidson and Heather E. Logan, *Dirac neutrinos from a second Higgs doublet*, <http://arxiv.org/pdf/0906.3335v2.pdf>, (2009).
- [47] Jorge Martín Ortega, *Mezclas y masas de neutrinos de Dirac en el límite de simetría  $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$* , (2007).
- [48] Andrés Balaguera Antolínez. *Oscilación de Neutrinos*, Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional de Colombia, (2002).
- [49] Davidson and H. E. Haber, Phys. Rev. D 72 (2005) 035004 [Erratum ibid. 72 (2005) 099902] [hep-ph/0504050]. [http://arxiv.org/PS\\_cache/hep-ph/pdf/0512/0512371v1.pdf](http://arxiv.org/PS_cache/hep-ph/pdf/0512/0512371v1.pdf).
- [50] A. Cárcamo, R. Martínez, F. Ochoa, *Ansatz de Masas de fermiones*, Revista colombiana de Física, (2006).
- [51] F. Boehm, P. Vogel *Physics of Massive Neutrinos*, Cambridge University Press, (1992).
- [52] R.N. Mohapatra and A.Y. Smirnov *Neutrino Mass and New Physics*, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 2006.56:569-628, (2006).

- [53] J. Beringer *et al.* (Particle Data Group), PRD86, 010001 (2012) and 2013 partial update for the 2014 edition.