

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

---

Estudio básico de las propiedades térmicas de las estrellas

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**Licenciado en Física**

por

Yesica Yazmín Escobar Ortega

asesorada por

Dr. J. Noé F. Herrera Pacheco

Puebla Pue.  
ABRIL 2014



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

---

Estudio básico de las propiedades térmicas de las estrellas

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**Licenciado en Física**

por

Yesica Yazmín Escobar Ortega

asesorada por

Dr. J. Noé F. Herrera Pacheco

Puebla Pue.  
ABRIL 2014



**Título:** Estudio básico de las propiedades térmicas de las estrellas  
**Estudiante:** YESICA YAZMÍN ESCOBAR ORTEGA

COMITÉ

---

Dr. Óscar Mario Martínez Bravo  
Presidente

---

Dr. Eduardo González Jiménez  
Secretario

---

Dr. Alexandra Deriabina  
Vocal

---

M. en C. Pedro Tolentino Eslava  
Suplente

---

Suplente



# Índice general

Resumen	VII
Introducción	IX
<b>1. Elementos básicos de astronomía y astrofísica</b>	<b>1</b>
1.1. Historia mínima de la astronomía . . . . .	1
1.2. Movimientos estelares . . . . .	2
1.3. Flujo radiante . . . . .	4
1.4. Radiación de cuerpo negro . . . . .	4
1.5. Relación entre luminosidad y temperatura . . . . .	5
1.6. Función de Planck . . . . .	6
1.7. Diagrama Hertzsprung-Russell observacional . . . . .	7
1.8. El espectro electromagnético . . . . .	8
1.8.1. Espectros astronómicos . . . . .	8
1.9. Leyes de Kirchoff . . . . .	9
1.10. Estructura estelar . . . . .	9
1.10.1. Equilibrio hidrostático . . . . .	10
1.10.2. Generación de energía . . . . .	12
1.10.3. La fusión de hidrógeno en helio . . . . .	12
1.10.4. Flujo de energía . . . . .	14
1.10.5. Ecuaciones básicas que definen la estructura estelar . . . . .	15
<b>2. Ecuaciones de evolución estelar</b>	<b>17</b>
2.1. Modelo físico para una estrella . . . . .	17
2.2. Ecuación de energía . . . . .	18
2.3. Ecuación de movimiento . . . . .	21
2.4. El teorema del virial . . . . .	23
2.5. Energía total de una estrella . . . . .	25
2.6. Escalas de tiempo de la evolución estelar . . . . .	26
2.6.1. Escala dinámica de tiempo . . . . .	27
2.6.2. Escala térmica de tiempo . . . . .	28
<b>3. Un modelo mecánico para el Sol</b>	<b>31</b>
3.1. Procesos politrópicos . . . . .	31
3.2. Variaciones de temperatura, entropía y calor . . . . .	34
3.3. Un modelo para el Sol . . . . .	35

3.3.1. Estudio cualitativo del Sol por medio de un modelo mecánico	36
3.3.2. El balance de energía y entropía . . . . .	39
<b>4. Estimación de la Radiación Solar Superficial con Redes Neuronales Artificiales</b>	<b>41</b>
4.1. Redes Neuronales . . . . .	43
4.2. Construcción de redes neuronales . . . . .	43
4.2.1. Aplicando ANN con Matlab . . . . .	44
<b>5. Conclusiones</b>	<b>51</b>
<b>A. Modelos físicos para la transferencia de calor</b>	<b>53</b>
A.1. Conducción . . . . .	53
A.2. Convección . . . . .	54
A.3. Radiación . . . . .	56
A.4. Resistencia térmica . . . . .	58
<b>B. Teoría de la transferencia de calor por Radiación</b>	<b>59</b>
B.1. Conceptos fundamentales . . . . .	59
B.2. Intensidad de la radiación . . . . .	61
B.2.1. Emisión, Irradiación y Radiosidad . . . . .	61
<b>C. Redes Neuronales Artificiales: una visión general</b>	<b>65</b>
C.1. Neuronas biológicas . . . . .	65
C.2. Neuronas Artificiales . . . . .	66
C.3. Redes neuronales artificiales . . . . .	67
C.3.1. Funcionamiento de las redes neuronales . . . . .	67
C.3.2. Tipos de redes neuronales . . . . .	68
C.3.3. Entrenamiento de la red neuronal . . . . .	69
C.3.4. Estandarización de los datos . . . . .	69
C.3.5. Simulación . . . . .	69
C.4. Simulación en Matlab para crear ANN . . . . .	69

# Índice de figuras

1.1.	Componentes transversales y radiales del movimiento heliocéntrico de una estrella. . . . .	3
1.2.	Espectros de cuerpo negro de tres objetos con temperaturas distintas. . . . .	5
1.3.	Diagrama HR que relaciona la magnitud absoluta con la temperatura superficial para 22000 estrellas del catálogo de Hiparco y 1000 estrellas del catálogo de Gliese. . . . .	7
1.4.	Diagrama de una onda electromagnética. . . . .	8
1.5.	Espectro electromagnético. . . . .	9
1.6.	Equilibrio de masas sobre una capa delgada esférica dentro de una estrella. . . . .	11
1.7.	Diagrama esquemático de la cadena protón-protón. . . . .	13
1.8.	Diagrama esquemático de la cadena CNO. . . . .	14
2.1.	Cáscara esférica dentro de una estrella, el calor fluye en sentido radial. . . . .	19
2.2.	Elemento de volumen cilíndrico dentro de una estrella. . . . .	21
3.1.	Modelo mecánico para el Sol. La posición de equilibrio del pistón (determina el volumen de la estrella) depende de la energía interna del gas. Cuando se proporciona energía interna (y entropía) al gas, el émbolo se mueve hacia la derecha, el volumen aumenta y la temperatura disminuye. . . . .	36
3.2.	Curva $p - V$ de nuestro gas junto con una serie de isotermas. Cuando se recorre la curva politrópica de menor a mayor volumen, se observa que cruza las isotermas de mayor a menor temperatura, de este hecho se puede decir que: <i>cuando se suministra calor al gas su temperatura disminuye</i> . . . . .	38
3.3.	Curva $p - V$ del gas que modela la estrella junto con una familia de adiabáticas. Se observa que cuando se sigue la curva $p - V$ de nuestro modelo solar, se cruzan las curvas de entropía constante, lo cual indica el aumento de entropía. Por ello cuando suministramos entropía, el volumen del gas incrementa. Ya que el suministro de entropía está relacionado con un suministro de calor se puede concluir que: <i>cuando el calor es suministrado al gas, su volumen incrementa</i> . . . . .	38
4.1.	Datos para los días del mes de mayo de 2003. . . . .	45
4.2.	Red neuronal usando la notación de MATLAB. . . . .	46
4.3.	Simulación de la red neuronal sin entrenamiento. Los datos de entrada se han normalizado. . . . .	46
4.4.	Entrenamiento de la red. En este gráfico se muestra el número de iteraciones y el error asociado a cada una de ellas. Después de 132 iteraciones el error asociado (0.0018) se mantiene constante. . . . .	47
4.5.	Respuesta de la red entrenada. . . . .	47
4.6.	Datos para los días del mes de enero de 2006. . . . .	48

4.7.	Respuesta de la red entrenada. . . . .	48
A.1.	Asociación de la transferencia de calor por conducción con la difusión de energía debida a la actividad molecular. . . . .	54
A.2.	Esquema de velocidades y temperaturas de la capa límite en la transferencia de calor por convección. . . . .	55
A.3.	Intercambio de radiación: (a) en la superficie, y (b) entre una superficie y sus alrededores. . . . .	56
B.1.	Proceso de emisión; (a) Fenómeno volumétrico. (b) Fenómeno superficial. . . . .	60
B.2.	Radiación emitida por una superficie: (a) Distribución espectral, (b) Distribución direccional. . . . .	60
B.3.	Naturaleza direccional de la radiación. (a) Emisión de radiación desde un área diferencial $dA_1$ en un ángulo sólido $d\omega$ subtendido por $dA_n$ en un punto sobre $dA_1$ . (b) Sistema de coordenadas esféricas. (c) Definición de ángulo sólido. . . . .	61
C.1.	Esquema de una neurona biológica individual. . . . .	65
C.2.	Esquema simplificado de una red neuronal. . . . .	66
C.3.	Esquema simplificado de múltiples entradas en una neurona artificial ( <i>Perceptrón</i> ). . . . .	66
C.4.	Ejemplo de una red neuronal con 4 capas. . . . .	68
C.5.	Código MATLAB para estimar la radiación solar difusa por medio de una red neuronal artificial. . . . .	70

# Resumen

El estudio teórico de la evolución estelar lleva a la formulación matemática de las ecuaciones de calor, en especial del intercambio energético por radiación. En la literatura se considera una estrella como un objeto que satisface dos cosas: está ligado por su autogravedad y radía energía proporcionada por una fuente interna. El requisito de la autogravedad trae como consecuencia que una estrella pueda modelarse como una esfera, hecha en su mayor parte de hidrógeno y helio. La fuente de radiación interna puede ser la energía liberada por las reacciones de fusión nuclear que se llevan a efecto en el interior estelar, o bien, la energía potencial gravitacional liberada durante la contracción o colapso. El hecho de que las estrellas liberan su energía interna implica que deben evolucionar, es decir, experimentar cambios en su estructura y composición química. La energía se transporta desde el centro, donde es generada, hacia la superficie. El transporte puede ser mediante conducción, convección o radiación, o bien, una combinación de éstas. El flujo de energía determina el gradiente radial de temperatura dentro de la estrella. En las estrellas masivas, el transporte de energía es principalmente por radiación y depende de la opacidad del material estelar a la radiación. La opacidad es una función conocida de la temperatura, la densidad y el estado de ionización del gas estelar que se obtiene de la física cuántica y atómica.

La radiación puede ser considerada como un gas de fotones, donde cada partícula lleva un cuanto de energía  $h\nu$ , proporcional a la frecuencia  $\nu$  de la onda electromagnética asociada y al momento  $h\nu/c$ , donde  $h$  es la constante de Planck y  $c$  es la velocidad de la luz. Esta mezcla de gases hace que la estrella esté gobernada por frecuentes colisiones entre las partículas, iones, electrones y fotones. Dichas colisiones conducen a un estado de equilibrio termodinámico, el cual es caracterizado por la temperatura, indicativo de la distribución de energía de las partículas.

En esta tesis se hace una breve revisión de la teoría de la evolución estelar así como de los modos de transferencia de calor, en particular se estudia en detalle la teoría de la transferencia radiativa. Se presenta un modelo mecánico que explica de manera cualitativa los procesos de estabilidad solar. También se hace modelación computacional para la radiación solar incidente sobre diferentes regiones de la tierra.



# Introducción

El entender y explicar la existencia de la tierra, los planetas y en especial la de las estrellas y su evolución, ha sido uno de los problemas de mayor interés para el ser humano. Por ello, la motivación para hacer esta investigación surge de la inquietud por entender los mecanismos que se llevan a cabo dentro de los interiores estelares y los modelos que describen su comportamiento.

El propósito general de esta investigación consiste en encontrar los métodos necesarios que permitan describir la evolución de las estrellas partiendo de modelos basados en el gas ideal y asumiendo condiciones de equilibrio termodinámico. Si bien, el estudio de la evolución estelar resulta ser un tema complejo, es posible abordar su estudio sin recurrir a la solución de las ecuaciones diferenciales que describen este proceso. El análisis de la evolución estelar también se puede hacer de manera cualitativa o bien, por medio de datos empíricos que permitan modelar su comportamiento.

En el primer capítulo presentamos una compilación de temas introductorios en astronomía y astrofísica, dicha revisión permite tener un panorama general de esta rama de la investigación. En el capítulo 2 se introduce el concepto físico de estrella con el objetivo de proponer un modelo teórico que permita, explicar, entender y predecir su evolución, así como analizar las ecuaciones que modelan las estrellas desde el punto de vista mecánico y térmico. Se discuten las ecuaciones que modelan la evolución de las estrellas, tomando como hipótesis de trabajo condiciones de equilibrio local, lo cual permitirá el cálculo de propiedades termodinámicas en términos de la temperatura, la densidad y la composición. Se modela un sistema físico donde se aproxima la radiación de los interiores estelares con el modelo de radiación de un cuerpo negro. El estudio de los modos de transferencia de calor permitirá tener una visión general de los fenómenos combinados que ocurren dentro de una estrella, para complementar la información sobre las ecuaciones de calor en el apéndice A se hace una revisión de los modelos físicos que estudian la naturaleza del tránsito de energía en un sistema y la rapidez con que ésta se produce. En el apéndice B se presenta una introducción a la teoría de la transferencia radiativa, ya que ésta es la que predomina en las estrellas. Todas las superficies con temperatura finita emiten energía en forma de ondas electromagnéticas, en ausencia de un medio, existe una transferencia de calor por radiación entre dos superficies a diferentes temperaturas.

En el capítulo 3 se presenta un modelo solar que permite estudiar de manera cualitativa los fenómenos de autorregulación que ocurren en el Sol, así como las relaciones

termodinámicas que describen su comportamiento.

Finalmente, en el capítulo 4 se presenta el uso de Redes Neuronales Artificiales para ajustar los datos de radiación solar obtenidos sobre la superficie terrestre en diferentes puntos de rastreo, el apéndice C contiene detalles de la modelación computacional realizada.

# Capítulo 1

## Elementos básicos de astronomía y astrofísica

Con el objetivo de conocer los temas básicos que se estudian en astronomía y astrofísica, así como relacionarse con la terminología elemental de esta rama de la investigación, hemos realizado una compilación de temas introductorios de astronomía y astrofísica. Entre los temas a tratar se encuentran sistemas de coordenadas, métodos para medir distancias entre objetos estelares, parámetros observables fundamentales (por ejemplo, relación entre luminosidad y temperatura), radiación de cuerpo negro, generación de energía, estructura y evolución estelar, entre otros.

### 1.1. Historia mínima de la astronomía

La astronomía es una de las ciencias más antiguas, ya que civilizaciones como la babilónica, egipcia y maya observaron el cielo de manera sistemática y documentaron los movimientos de los planetas en el cielo, además de construir calendarios para las temporadas de siembra y cosecha. La civilización griega fue la primera en intentar explicar los fenómenos celestes por medio de las matemáticas. Filósofos y matemáticos como Pitágoras, Platón, Aristóteles y Ptolomeo creían en un modelo geocéntrico en donde el Sol, la Luna, los planetas y las estrellas giraban en órbitas circulares y con velocidad uniforme alrededor de la Tierra, este modelo fue utilizado por astrónomos y pensadores religiosos hasta el siglo XVI. Durante la época del renacimiento la forma de pensamiento se modificó, adoptando como mejor modelo aquel que era más sencillo y requería menos suposiciones y modificaciones para explicar las observaciones. Nicolás Copérnico (1473-1543) planteó y discutió el modelo heliocéntrico en su obra *De revolutionibus orbium caelestium* que se publicó justo antes de su muerte en 1543. La teoría de Copérnico establecía que la Tierra giraba sobre sí misma una vez al día, y que una vez al año daba una vuelta completa alrededor del Sol. Además afirmaba que la Tierra, en su movimiento rotatorio, se inclinaba sobre su eje, sin embargo, aún mantenía algunos principios de la antigua cosmología, como la idea de las esferas dentro de las cuales se encontraban los planetas y la esfera exterior donde estaban inmóviles las estrellas. Tycho Brahe (1546-1601) realizó observaciones más precisas y detalladas de los planetas y estrellas. Detalló el brillantamiento y atenuación de la estrella que ahora se conoce como

# CAPÍTULO 1. ELEMENTOS BÁSICOS DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA

## 1.2. MOVIMIENTOS ESTELARES

---

Supernova de Tycho, ésta fue una de las primeras evidencias del nacimiento, cambio y muerte en los objetos celestes. En 1609 Galileo Galilei (1564-1642) observó por primera vez el cielo con un telescopio y descubrió un gran número de estrellas poco brillantes para ser observadas a simple vista, también observó los cráteres de la Luna y manchas en el Sol, descubrió cuatro lunas girando alrededor del planeta Júpiter, encontrando así, que no todos los movimientos de los objetos celestes son alrededor de la Tierra, también documentó las fases de Venus. Otras figuras importantes que contribuyeron de forma significativa en el estudio y comprensión de los objetos celestes antes de la época moderna son Johannes Kepler (1571-1630) por sus leyes del movimiento planetario, Isaac Newton (1642-1727) por su teoría de la gravedad, Pierre Simon Laplace (1749-1827) por su teoría del origen del sistema solar, William Herschel (1738-1822) por sus observaciones de las estrellas binarias y Joseph Fraunhofer (1787-1826) por su descripción del espectro solar, entre otros [1].

El conocimiento actual es el resultado de todos los descubrimientos anteriores. Hoy se estima que las estrellas y los planetas son objetos distintos, también aceptamos que nuestro Sol es una estrella entre aproximadamente  $10^{11}$  en nuestra galaxia y que nuestra galaxia es una de  $10^{10}$  en el universo observable. Sabemos que las estrellas nacen, evolucionan y mueren. Se forman de nubes de gas y pueden tener masas de entre 0.01 y 100 veces la masa de nuestro Sol, pueden estar aisladas, en sistemas binarios o cúmulos globulares. También se ha detectado además de polvo, material entre las estrellas compuesto de gas molecular, atómico e ionizado. Sabemos que existen objetos exóticos como las estrellas de neutrones y los hoyos negros. No estamos restringidos a realizar observaciones en el espectro visible, también es posible estudiarlo en otras longitudes de onda, desde las de radio hasta las de la radiación  $\gamma$ , más adelante veremos el espectro electromagnético [2].

Para el estudio de los cuerpos celestes, la astronomía trata la medición de posiciones, movimientos y características observables de estrellas, planetas, galaxias, y demás objetos celestes, mientras que la astrofísica se ocupa de estudiar la naturaleza física de estos objetos y los fenómenos relacionados.

## 1.2. Movimientos estelares

En 1718 el astrónomo Edmund Halley descubrió que tres estrellas habían cambiado sus posiciones relativas al fondo de estrellas débiles lejanas comparado con sus posiciones indicadas por Hiparco dos mil años atrás. Halley concluyó que estas estrellas estaban en movimiento [3].

CAPÍTULO 1. ELEMENTOS BÁSICOS DE ASTRONOMÍA Y  
ASTROFÍSICA  
1.2. MOVIMIENTOS ESTELARES

---

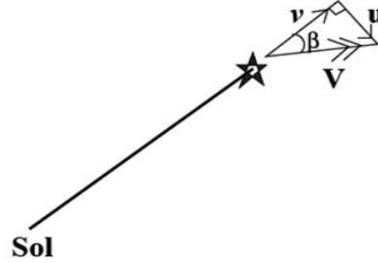


Figura 1.1: Componentes transversales y radiales del movimiento heliocéntrico de una estrella.

La velocidad heliocéntrica de una estrella se puede descomponer en una componente transversal, es decir, perpendicular a la línea de visión, y una componente radial, a lo largo de la línea de visión. Si  $u$  es la componente transversal y  $v$  es la componente radial de la velocidad heliocéntrica  $V$  de una estrella cuyo movimiento hace un ángulo  $\beta$  con la línea de visión, entonces

$$\begin{aligned} v &= V \cos \beta \\ u &= V \sin \beta \end{aligned} \tag{1.1}$$

La velocidad radial  $v$ , de la estrella se detecta mediante corrimientos Doppler de líneas espectrales. Es positiva si la estrella se aleja del Sol y negativa si el movimiento es hacia el Sol. La velocidad transversal  $u$ , de la estrella se detecta como un cambio en la posición esperada de la estrella en la esfera celeste y se conoce como el movimiento propio. Se define el movimiento propio de una estrella como el cambio angular en su dirección heliocéntrica en la esfera celeste debido a su velocidad espacial relativa al Sol.

En 1842 Christian Doppler mostró que conforme una fuente de sonido se mueve en un medio, la longitud de onda es comprimida cuando se mueve hacia el observador y es mayor cuando la fuente se aleja del observador. Esto se conoce como el *efecto Doppler* y se aplica también para la luz. Si una fuente que emite luz se mueve relativamente a un observador, la diferencia entre la longitud de onda observada  $\lambda_{obs}$ , y la longitud de onda de laboratorio  $\lambda_0$ , se relaciona con la velocidad radial  $v$ , de la fuente mediante

$$\frac{\lambda_{obs} - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c} \tag{1.2}$$

Si la fuente se mueve a velocidades cercanas a la velocidad de la luz, hay que tomar en cuenta efectos relativistas y el cambio en la longitud de onda observada es

**CAPÍTULO 1. ELEMENTOS BÁSICOS DE ASTRONOMÍA Y  
ASTROFÍSICA**  
**1.3. FLUJO RADIANTE**

---

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} - 1 \quad (1.3)$$

donde  $\Delta\lambda/\lambda_0 = z$  se conoce como parámetro de corrimiento al rojo, debido a que valores mayores de  $z$  indican velocidades radiales de alejamiento mayores. Si  $\lambda_{obs} < \lambda_0$ , entonces  $z$  es negativa y tenemos un corrimiento al azul, la velocidad radial es hacia el observador [4].

### 1.3. Flujo radiante

Los fotómetros son instrumentos utilizados para medir el flujo radiante  $F$ , esto es la cantidad de energía de luz de todas las longitudes de onda que atraviesa por unidad de área del detector orientado perpendicularmente a la dirección de viaje de la luz por unidad de tiempo. Es decir, el número de erg ( $1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$ ) de energía de luz estelar que llega a  $1 \text{ cm}^2$  de un detector que apunta hacia la estrella.

El flujo radiante depende de la *luminosidad intrínseca* (energía emitida por la estrella por segundo) y la distancia hacia el observador.

Por ejemplo, una estrella de luminosidad  $L$ , está rodeada por un cascarón esférico de radio  $r$ . Suponiendo que no hay absorción de luz en el camino entre la estrella y el cascarón, entonces el flujo radiante  $F$ , a la distancia  $r$  de la estrella es

$$F = \frac{L}{4\pi r^2} \quad (1.4)$$

esto nos da la *ley de cuadrados inversos para la luz* [2].

### 1.4. Radiación de cuerpo negro

La relación entre el color de la luz emitida por un objeto y su temperatura fue notada por primera vez en 1792 por el ceramista Thomas Wedgwood [5]. Los hornos que utilizaba para fabricar la cerámica adquirían un tono rojizo a la misma temperatura, independientemente de su forma, tamaño y construcción. Hoy sabemos que conforme un objeto se calienta, su color pasa de rojo, a amarillo y finalmente blanco cuando está a temperatura más alta. Cualquier objeto con temperatura arriba de cero absoluto emite luz de todas las longitudes de onda con eficiencias distintas. Un emisor ideal (o radiador) es un objeto que absorbe toda la energía de la luz incidente sobre su superficie y la irradia con un espectro característico. Debido a que un emisor ideal no refleja la luz, se le conoce como un *cuerpo negro*, y la radiación que emite se llama *radiación de cuerpo negro*. Las estrellas y los planetas son cuerpos negros en primera aproximación [6].

**CAPÍTULO 1. ELEMENTOS BÁSICOS DE ASTRONOMÍA Y  
ASTROFÍSICA**  
**1.5. RELACIÓN ENTRE LUMINOSIDAD Y TEMPERATURA**

---

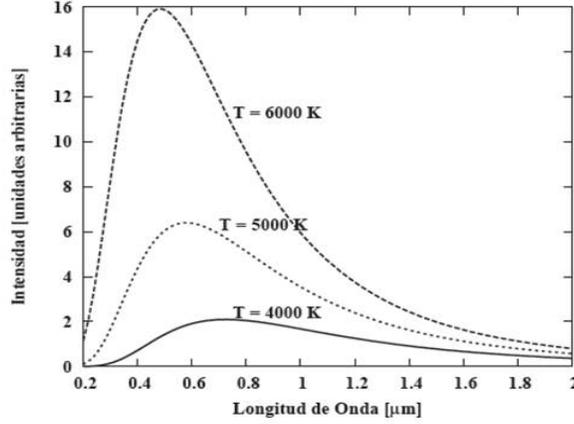


Figura 1.2: Espectros de cuerpo negro de tres objetos con temperaturas distintas.

Un cuerpo negro con temperatura  $T$  emite un espectro continuo, es decir, la intensidad es una función suave de longitud de onda o frecuencia. El espectro de cuerpo negro tiene un máximo en su intensidad en alguna longitud de onda en particular,  $\lambda_{max}$ , esta longitud de onda es más pequeña para objetos de temperatura mayor.

La relación entre  $\lambda_{max}$  y  $T$  se llama *ley de desplazamiento de Wien* y se escribe como [7]:

$$\lambda_{max} = \frac{0,290}{T} \text{cm} \quad (1.5)$$

### 1.5. Relación entre luminosidad y temperatura

En 1879, los experimentos realizados por el físico Josef Stefan mostraron que la luminosidad de un cuerpo negro de área superficial  $A$  y temperatura  $T$  está dada por [5].

$$L = A\sigma T^4 \quad (1.6)$$

La misma relación fue encontrada cinco años después por su alumno Ludwig Boltzmann. Esta relación se conoce ahora como la ecuación de Stefan-Boltzmann y la constante  $\sigma$  se llama constante de Stefan-Boltzmann, tiene un valor de  $\sigma = 6,67 \times 10^{-5} \text{ergs}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{K}^{-4}$ .

Para una estrella de radio  $R_*$ , el área superficial  $A = 4\pi R_*^2$  y la luminosidad está dada por

$$L_* = 4\pi R_*^2 \sigma T_{ef}^4 \quad (1.7)$$

CAPÍTULO 1. ELEMENTOS BÁSICOS DE ASTRONOMÍA Y  
ASTROFÍSICA  
1.6. FUNCIÓN DE PLANCK

---

Las estrellas no son cuerpos negros perfectos, ésta ecuación define la temperatura efectiva  $T_{ef}$  de la superficie estelar [2].

### 1.6. Función de Planck

El 1900, el físico Max Planck encontró una fórmula empírica que describe el espectro de cuerpo negro en función de la longitud de onda,

$$B_{\lambda}(T) = \frac{\frac{a}{\lambda^5}}{e^{\frac{b}{\lambda T}} - 1} \quad (1.8)$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes que se evalúan en términos de la constante de Planck  $h = 6,626 \times 10^{-27} \text{ erg s}$ , dando

$$B_{\lambda}(T) = \frac{\frac{2hc^2}{\lambda^5}}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \quad (1.9)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz. También se puede expresar en función de la frecuencia

$$B_{\lambda}(T) = \frac{\frac{2h\nu^3}{c^2}}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (1.10)$$

La ley de desplazamiento de Wien viene de encontrar la  $\lambda$  que satisface

$$\frac{dB_{\lambda}}{d\lambda} = 0 \quad (1.11)$$

En el límite cuando  $\lambda \gg hc/kT$ , se encuentra que

$$B_{\lambda}(T) \simeq \frac{2ckT}{\lambda^4} \quad (1.12)$$

conocida como la *ley de Rayleigh-Jeans*, ésta es una buena aproximación cuando  $\lambda$  es grande, por ejemplo en la región de longitudes de onda de radio del espectro electromagnético.

Mientras que en el límite  $\lambda \ll hc/kT$

$$B_{\lambda}(T) \simeq \frac{2hc^2}{\lambda^5} e^{\frac{-hc}{\lambda kT}} \quad (1.13)$$

es la *ley de Wien*, que es una buena aproximación cuando  $\lambda$  es pequeña [2].

# CAPÍTULO 1. ELEMENTOS BÁSICOS DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA

## 1.7. DIAGRAMA HERTZSPRUNG-RUSSELL OBSERVACIONAL

### 1.7. Diagrama Hertzsprung-Russell observacional

Las estrellas son aproximadamente cuerpos negros, lo cual significa que su color depende de su temperatura. Las estrellas rojas tienen temperatura baja y las estrellas blanco-azules presentan temperaturas altas. En 1911, el astrónomo aficionado danés Hertzsprung y el astrónomo estadounidense Russell mostraron de manera independiente que hay una relación entre los índices de colores de las estrellas y sus magnitudes absolutas. Para las estrellas de la vecindad solar, el diagrama Hertzsprung-Russell (HR) grafica magnitud absoluta en función de índice de color (temperatura).

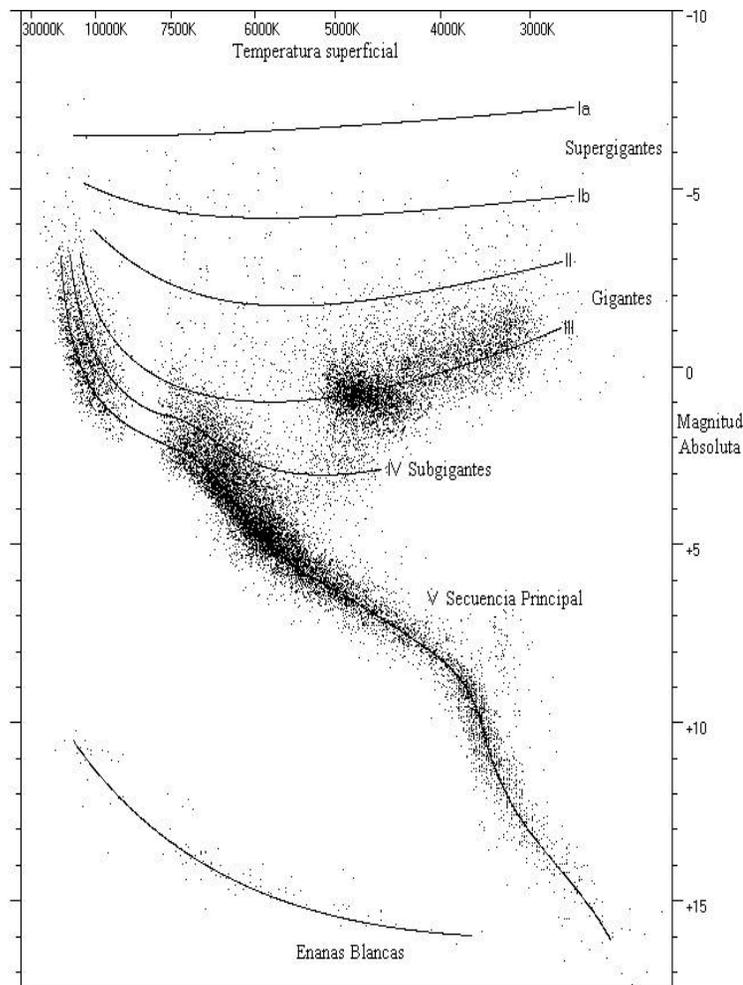


Figura 1.3: Diagrama HR que relaciona la magnitud absoluta con la temperatura superficial para 22000 estrellas del catálogo de Hiparco y 1000 estrellas del catálogo de Gliese.

De este diagrama se observa que la mayoría de las estrellas ocupa una franja diagonal, llamada *Secuencia Principal*. Las estrellas en la parte superior derecha del diagrama son más luminosas que las estrellas de la Secuencia Principal a la misma temperatura. La ecuación de Stefan-Boltzmann, nos dice que los radios de estas estrellas deben ser más grandes, y por eso estas estrellas se llaman *Gigantes Rojas*. De manera similar, las

# CAPÍTULO 1. ELEMENTOS BÁSICOS DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA

## 1.8. EL ESPECTRO ELECTROMAGNÉTICO

---

estrellas en la parte inferior izquierda del diagrama son menos luminosas que las estrellas de la Secuencia Principal a la misma temperatura y por lo tanto deben tener radios menores, estas estrellas se llaman *Enanas Blancas*.

Las gigantes y enanas deben tener estructuras internas muy diferentes a las estrellas de la Secuencia Principal porque no tienen la misma relación temperatura-luminosidad. Es necesario conocer las masas de las estrellas para entender su estructura y física interna.

### 1.8. El espectro electromagnético

La naturaleza fundamental de la luz se ha discutido durante siglos. Hay dos modelos principales: el modelo corpuscular (propuesto por Newton en 1666) y el modelo ondulatorio (propuesto por Huygens en 1678). Ambos modelos pueden explicar fenómenos como la reflexión y la refracción de la luz. James Clerk Maxwell (1831–1879) reconoció que la luz es una onda electromagnética que consta de un campo eléctrico oscilatorio,  $\vec{E}$ , y un campo magnético oscilatorio perpendicular,  $\vec{B}$ . Una onda electromagnética tiene cuatro propiedades fundamentales: velocidad constante de propagación  $c$ , en el vacío, dirección de propagación, longitud de onda y direcciones de polarización (dirección del vector  $\vec{E}$ ).

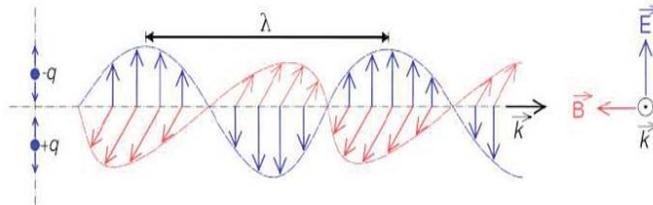


Figura 1.4: Diagrama de una onda electromagnética.

#### 1.8.1. Espectros astronómicos

La luz de una estrella está compuesta de toda una gama de longitudes de onda (luz blanca). Se puede separar la luz blanca en las diferentes longitudes de onda por pasarla por un prisma. La propiedad dispersiva de los prismas es utilizada en la astronomía para analizar la composición de la luz de las estrellas, conocido como el análisis espectral. El espectro resultante cae sobre un CCD (dispositivo de carga acoplada). Al observar una estrella se ve un continuo con líneas oscuras sobrepuestas. Estas líneas ocurren a longitudes de onda bien definidas y son el resultado de la absorción de la luz de la estrella por átomos de su misma atmósfera. Sin embargo, no toda la luz emitida por una fuente llega a la superficie terrestre. La atmósfera terrestre absorbe luz de diferentes frecuencias en diferentes cantidades. Las moléculas de ozono ( $O_3$ ), oxígeno ( $O_2$ ), vapor de agua ( $H_2O$ ) y bióxido de carbono ( $CO_2$ ), son las que principalmente absorben luz, particularmente a frecuencias infrarrojas [8].

**CAPÍTULO 1. ELEMENTOS BÁSICOS DE ASTRONOMÍA Y  
ASTROFÍSICA**  
**1.9. LEYES DE KIRCHOFF**

---

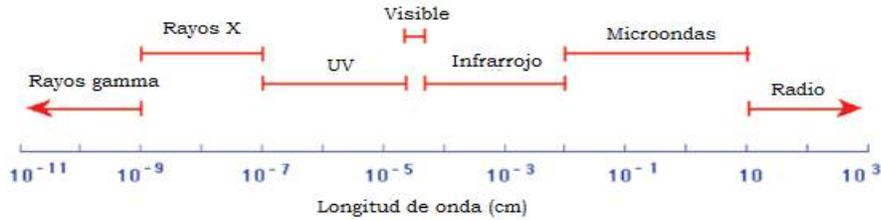


Figura 1.5: Espectro electromagnético.

### 1.9. Leyes de Kirchoff

1. Un gas a temperatura muy alta y denso, o un objeto sólido caliente, emite un espectro continuo sin líneas espectrales. Este espectro corresponde al espectro continuo de un cuerpo negro.
2. Un gas a temperatura muy alta y difuso emite líneas de emisión brillantes. Estas líneas de emisión se producen cuando un electrón hace una transición de un nivel alto a un nivel bajo dentro de un átomo o ión.
3. Un gas a temperatura muy baja y difuso delante de una fuente de un espectro continuo produce líneas de absorción oscuras en el espectro continuo. Los electrones de los átomos e iones del gas a temperatura baja y difuso pueden absorber fotones del espectro continuo a longitudes de onda determinadas para realizar una transición desde un nivel bajo a un nivel más alto dentro del átomo o ión.

Esta última es la situación que corresponde a una estrella. El gas caliente y denso es la estrella que emite un espectro como un cuerpo negro. El gas frío y difuso es la atmósfera que rodea la estrella [9].

### 1.10. Estructura estelar

Una estrella es un objeto que satisface las siguientes características: está ligado por su *autogravedad* y radía energía proporcionada por una fuente interna.

El requisito de la autogravedad trae como consecuencia que una estrella es una esfera, debido a que la gravedad es una fuerza esféricamente simétrica. La fuente de radiación interna puede ser la energía liberada por las reacciones de fusión en el interior estelar, o bien, la energía potencial gravitacional liberada durante la contracción o colapso del objeto.

El hecho de que las estrellas liberan su energía interna implica que deben evolucionar, es decir, experimentar cambios en su estructura y su composición química. Cuando una estrella muere no puede cumplir con alguno de los requisitos básicos. Por ejemplo, cuando se acaba el reservorio de combustible en el núcleo de la estrella, se acaban las reacciones nucleares y la estrella empieza a enfriarse. Algunas estrellas estallan como supernovas,

# CAPÍTULO 1. ELEMENTOS BÁSICOS DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA

## 1.10. ESTRUCTURA ESTELAR

---

rompiendo la condición de autogravedad.

Podemos construir un modelo de la estructura interna de una estrella, suponiendo algunas condiciones [10]:

- **Aislamiento.** Una estrella se considera como un objeto aislado debido a que la distancia entre estrellas generalmente es mucho mayor que el radio estelar en cualquier fase de su vida.
- **Composición química uniforme inicial.** Se supone que una estrella nace con una masa dada y una composición química homogénea que es la de su nube molecular natal. Esta composición química depende de la época en la cual se formó la estrella y su ubicación en la galaxia, generalmente las estrellas más cercanas al centro de la galaxia tienen mayor metalicidad. En general, la composición química de las estrellas consta de 70 % de H (hidrógeno) por masa, 25 – 30 % de He (helio) y cantidades menores de los elementos más pesados (C, N, O, Ne, S, Si y Fe). Las capas superficiales de las estrellas son las menos afectadas por la evolución estelar, la cual ocurre principalmente en el núcleo de la estrella. Por lo tanto, las abundancias químicas en la superficie de la estrella son las más representativas de la composición química inicial.
- **Simetría esférica.** La condición de autogravedad implica que las estrellas deben ser esféricas. Solamente hay desviaciones de la esfericidad debido a una rotación rápida de la estrella, o campos magnéticos muy fuertes. La suposición de simetría esférica quiere decir que las variaciones en las cantidades físicas, como son la densidad, la presión y la temperatura son radiales, es decir, estas cantidades son uniformes en una superficie esférica de radio  $r$  y podemos despreciar variaciones en las coordenadas angulares.

Si la masa de una estrella es  $M^*$  y su radio es  $R^*$ , se define la masa estelar interior a radio  $r$  ( $0 \leq r \leq R^*$ ) por

$$m(r) = \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr' \quad (1.14)$$

en donde  $4\pi r'^2 dr'$  es el elemento de volumen de una cáscara delgada de grosor  $dr'$  que se encuentra a distancia  $r'$  del centro estelar y que tiene densidad  $\rho(r')$ . La densidad de material estelar no es constante, disminuye desde el centro hacia afuera, las densidades en los núcleos de las estrellas son de orden  $\rho_n \sim 100 \text{ g cm}^{-3}$ , mientras que las densidades en la superficie son de orden  $\rho_n \sim 10^{-6} \text{ g cm}^{-3}$ .

### 1.10.1. Equilibrio hidrostático

El gradiente radial de la presión debe balancear la fuerza debido a la gravedad a todos los puntos interiores de la estrella, porque al contrario la estrella se expande o se contrae.

**CAPÍTULO 1. ELEMENTOS BÁSICOS DE ASTRONOMÍA Y  
ASTROFÍSICA**  
**1.10. ESTRUCTURA ESTELAR**

---

Esta condición de equilibrio se llama *equilibrio hidrostático*.

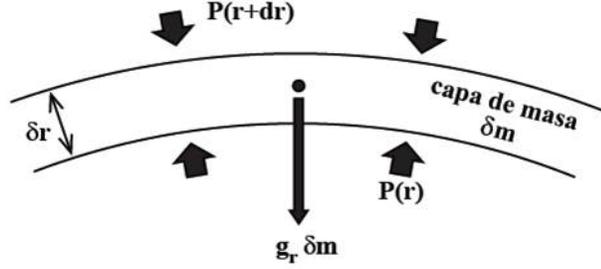


Figura 1.6: Equilibrio de masas sobre una capa delgada esférica dentro de una estrella.

Si consideramos una cáscara esférica de masa  $\delta m$  a radio  $r$  del centro de la estrella, la fuerza de gravedad que actúa sobre esta cáscara es

$$g_r \delta m = -\frac{Gm(r)}{r^2} \delta m \quad (1.15)$$

donde  $g_r$  es la aceleración debido a la gravedad de toda la masa interior a  $r$  y  $G = 6,67384 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} = 6,67384 \times 10^{-11} \text{ N (m/kg)}^2$  es la constante de gravedad.

Las fuerzas debido a la presión en la superficie interior y exterior que actúa sobre la cáscara son  $4\pi r^2 P(r)$  y  $4\pi (r + dr)^2 P(r + dr)$  respectivamente, por lo tanto, equilibrando las fuerzas en dirección radial obtenemos

$$4\pi((r + dr)^2 P(r + dr) - r^2 P(r)) = -\frac{Gm(r)}{r^2} \delta m \quad (1.16)$$

Además el elemento de masa  $\delta m = 4\pi r^2 \rho(r) \delta r$ , entonces

$$4\pi((r + dr)^2 P(r + dr) - r^2 P(r)) = -4\pi Gm(r) \rho(r) \delta r \quad (1.17)$$

En el límite  $\delta r \rightarrow dr \rightarrow 0$ , obtenemos la *ecuación de equilibrio hidrostático*

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \quad (1.18)$$

en donde  $r$  es ahora una variable dependiente de  $m$  [6].

CAPÍTULO 1. ELEMENTOS BÁSICOS DE ASTRONOMÍA Y  
ASTROFÍSICA  
1.10. ESTRUCTURA ESTELAR

---

### 1.10.2. Generación de energía

La energía se genera en el centro de la estrella por las reacciones de fusión nuclear y es transportada hacia la superficie. El flujo de energía (energía por unidad tiempo) a través de una esfera de radio  $r$  es la luminosidad  $L(r)$ . La luminosidad total de la estrella  $L_*$ , corresponde al valor en la superficie,  $L_* = L(R_*)$ . El gradiente de la luminosidad con respecto al radio es

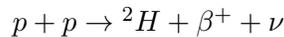
$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon \quad (1.19)$$

donde  $\epsilon$  es la tasa de generación de energía por unidad masa y es una función conocida de  $\rho$ ,  $T$  y de la composición química.

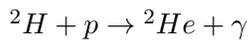
### 1.10.3. La fusión de hidrógeno en helio

Hay dos maneras de fusionar hidrógeno en helio:

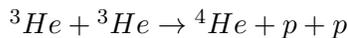
- **Cadena protón-protón.** Funciona para temperaturas en el núcleo menores a  $18 \times 10^6 K$ . El primer paso es la fusión de dos núcleos de hidrógeno (protones) para formar un núcleo de deuterio (isótopo de hidrógeno con un neutrón,  $^2\text{H}$ ) liberando un positrón ( $\beta^+$ ) y un neutrino ( $\nu$ ).



Este proceso tarda alrededor de  $10^9$  años. Luego un núcleo de deuterio se fusiona con otro protón para formar un isótopo de helio ( $^3\text{He}$ ) liberando un fotón (rayo  $\gamma$ ). Este proceso tarda sólo un segundo.



Finalmente, dos núcleos de helio  $^3\text{He}$  se fusionan para formar un núcleo de  $^4\text{He}$  liberando dos protones. Este proceso tarda alrededor de  $10^6$  años.



El proceso neto ha sido la conversión de 4 protones (núcleos de hidrógeno) en un núcleo de helio. Además, para cada núcleo de  $^4\text{He}$  formado se libera energía en forma de: 2 fotones de rayos  $\gamma$ , 2 neutrinos, 2 positrones que colisionan con electrones cercanos liberando 2 fotones de rayos  $\gamma$  y energía cinética (calor) del núcleo de  $^4\text{He}$  final y los 2 protones que salen de la cadena protón-protón.

**CAPÍTULO 1. ELEMENTOS BÁSICOS DE ASTRONOMÍA Y  
ASTROFÍSICA**  
**1.10. ESTRUCTURA ESTELAR**

---

La tasa de generación de energía de la cadena protón-protón es  $\epsilon \propto T^4$ .

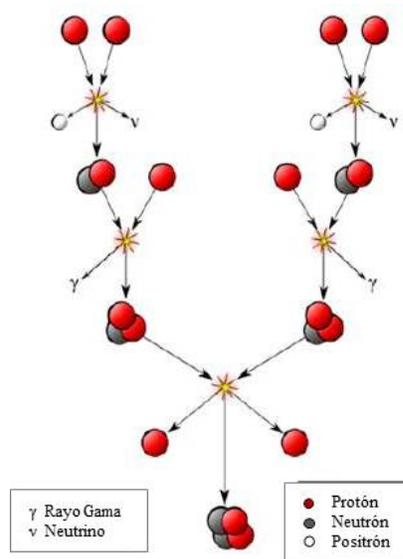
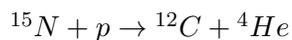
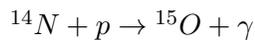
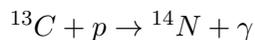
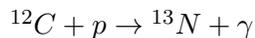


Figura 1.7: Diagrama esquemático de la cadena protón-protón.

- **Ciclo CNO.** Funciona para temperaturas en el núcleo estelar mayores a  $18 \times 10^6 K$ . Este ciclo consta de 6 partes los cuales se pueden resumir de la siguiente forma:



Empezando con un núcleo de  $^{12}\text{C}$  (carbono) en el primer paso, agregamos 4 protones en los pasos 1, 3, 4 y 6 y terminamos con un núcleo de  $^{12}\text{C}$ , junto con el núcleo de  $^4\text{He}$ . Pasando por varios isótopos de carbono, nitrógeno y oxígeno. El resultado neto es la conversión de 4 protones en un núcleo de helio  $^4\text{He}$  con la liberación de energía en forma de fotones de rayos  $\gamma$ , neutrinos y positrones. Debido a que el  $^{12}\text{C}$  no es destruido por el proceso, se dice que juega el papel de catalizador para la

**CAPÍTULO 1. ELEMENTOS BÁSICOS DE ASTRONOMÍA Y  
ASTROFÍSICA**  
**1.10. ESTRUCTURA ESTELAR**

---

reacción nuclear.

La fuerza repulsiva de las cargas positivas entre un protón y un núcleo de carbono (6 protones) o nitrógeno (7 protones) es muy grande y por esto los protones tienen que estar moviéndose muy rápido. Ésta es la razón por la cual el ciclo CNO ocurre a temperaturas mayores que la cadena protón-protón. Los primeros pasos en el ciclo CNO ocurren en tiempos mucho más cortos que el primer paso en la cadena protón-protón, y por lo tanto el ciclo CNO puede volverse la fuente dominante de fusión de hidrógeno en estrellas cuyas temperaturas centrales son un poco más altas que la del Sol [11].

La tasa de generación de energía en el ciclo CNO es  $\epsilon \propto T^{18}$ .

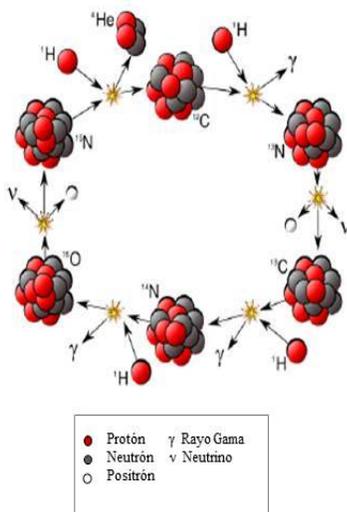


Figura 1.8: Diagrama esquemático de la cadena CNO.

#### 1.10.4. Flujo de energía

La energía se transporta desde el centro de la estrella, donde es generada, hacia la superficie. El transporte puede ser mediante conducción, convección o radiación, o bien una combinación de éstas. El flujo de energía determina el gradiente radial de temperatura dentro de la estrella. En las estrellas masivas (mayores a ocho masas solares), el transporte de energía es principalmente por radiación, y depende de la opacidad del material estelar a la radiación. La opacidad se escribe  $\kappa$  y es una función conocida de la temperatura, la densidad y el estado de ionización del gas estelar que se obtiene de la física cuántica y atómica. En las estrellas como el Sol, la convección es el mecanismo de transporte de energía más importante. La convección consta de un movimiento macroscópico de masa que lleva al transporte eficiente de calor y el mezclado de material desde los radios interiores hacia radios mayores de la estrella. La conducción solamente es un mecanismo importante de transporte de energía en las enanas blancas [12].

### 1.10.5. Ecuaciones básicas que definen la estructura estelar

La estructura estelar se puede representar por cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias, para la masa, la ecuación de equilibrio hidrostático, la ecuación para la producción de energía y la ecuación para el transporte de energía. Es conveniente escribir las ecuaciones en términos de la coordenada de masa  $m$ , en vez de la coordenada radial  $r$ .

Tales ecuaciones son:

$$\frac{dm}{dr} = \rho(r)4\pi r^2 \quad (1.20)$$

$$\frac{dP}{dr} = -\rho(r)G\frac{m(r)}{r^2} \quad (1.21)$$

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \varepsilon(r) \quad (1.22)$$

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{rad} = -\frac{3\rho(r)\kappa(r)L(r)}{4ac[T(r)]^3 4\pi r^2} \quad (1.23)$$

donde la distribución de masa  $\rho(r)$  y presión  $P(r)$  dentro de la estrella son sólo función de la distancia  $r$  al centro de la estrella. La luminosidad  $L(r)$  se define como la energía total que fluye por unidad de tiempo hacia el exterior de una esfera de radio  $r$  dentro de la estrella. Llamamos  $\varepsilon(r)$  a la densidad de energía liberada en  $r$ . La ecuación (1.22) implica que fuera del núcleo no se genera energía, por lo que la luminosidad es constante. Por otro lado, si el mecanismo que controla la transferencia de calor es la difusión de radiación, el gradiente de temperaturas está dado por (1.23), ésta ecuación es una buena aproximación en la que se están despreciando los efectos de transmisión de calor por convección y se está suponiendo que la estrella tiene simetría esférica y se mantiene en equilibrio.

El problema de la evolución estelar se reduce a hallar la solución de este sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:  $P(r)$ ,  $m(r)$ ,  $T(r)$  y  $L(r)$ . Para encontrarla necesitamos cuatro ecuaciones de frontera de las cuales dos son obvias:  $m(0) = 0$  y  $L(0) = 0$ , pero las otras dos dependen del modelo estelar que usemos. La solución de las ecuaciones mencionadas requiere mucha pericia en el trabajo numérico ya que se tiene problema con la unicidad de las soluciones pues como se dijo dependen de las condiciones de frontera.

Con el fin de entender el concepto físico de estrella se analizarán las ecuaciones que modelan las estrellas desde el punto de vista mecánico y térmico tomando como hipótesis de trabajo condiciones de equilibrio local.



## Capítulo 2

# Ecuaciones de evolución estelar

Con el propósito de definir el concepto físico de estrella y proponer un modelo teórico para explicar, entender y predecir su evolución, así como analizar las ecuaciones que modelan la evolución de las estrellas desde el punto de vista mecánico y térmico, realizamos un estudio básico de la estructura estelar y discutimos las ecuaciones que modelan la evolución de las estrellas, se toma como hipótesis de trabajo condiciones de equilibrio local, lo que constituye una gran simplificación, ya que permite el cálculo de propiedades termodinámicas en términos de la temperatura, la densidad y la composición, ya que las estrellas presentan cambios desde el centro hasta la superficie. Se modela un sistema físico donde se aproxima la radiación de los interiores estelares con el modelo de radiación de un cuerpo negro. Se estudian las escalas de tiempo características para cada proceso (mecánico y térmico).

### 2.1. Modelo físico para una estrella

Una estrella es una esfera gaseosa radiante, hecha principalmente de hidrógeno y helio. La radiación puede ser considerada como un gas de fotones, donde cada partícula transporta un cuanto de energía  $h\nu$ , donde  $h = 6,63 \times 10^{-34} Js$  es la constante de Planck [7] y  $\nu$  es la frecuencia de la onda electromagnética asociada, además de un momento  $h\nu/c$ , con  $c$  la velocidad de la luz. Las frecuentes colisiones entre las partículas dentro de una estrella conducen eventualmente a un estado de equilibrio termodinámico, el cual está caracterizado por una temperatura. Cuando la distancia promedio que han viajado las partículas entre colisiones –camino libre medio– es mucho más pequeño que las dimensiones del sistema, el equilibrio termodinámico se alcanza localmente y el sistema puede asumir diferentes temperaturas en diferentes puntos, esto se describe por medio de una distribución de temperaturas. Si más aún, el tiempo transcurrido entre colisiones –tiempo libre medio– es mucho más pequeño que la escala de tiempo para el cambio de las propiedades térmicas, entonces la distribución de temperaturas puede cambiar con el tiempo [6].

El equilibrio entre la materia y la radiación puede ser alcanzado por medio de las interacciones entre partículas con masa y los fotones. En este caso, la radiación se

## CAPÍTULO 2. ECUACIONES DE EVOLUCIÓN ESTELAR

### 2.2. ECUACIÓN DE ENERGÍA

---

convierte en radiación de cuerpo negro, donde la distribución de energía de los fotones se describe por medio de la función de Planck, considerando iguales la temperatura del gas y de la radiación. De igual forma, el gas y la radiación se pueden considerar en equilibrio térmico local, es decir, la temperatura del gas es la misma que la temperatura de la radiación en cada punto, aunque sabemos que la temperatura de una estrella no es uniforme ni constante. Esto significa que la radiación en los interiores estelares es muy cercana a la radiación de cuerpo negro, descrita por la función de Planck correspondiente a temperaturas locales únicamente. A esto se le conoce como *equilibrio local termodinámico* (LTE por sus siglas en inglés) [13].

Debemos destacar que la radiación y la materia no están siempre en estado de equilibrio. Por ejemplo la radiación solar pasando a través de la atmósfera terrestre no alcanza el equilibrio con el gas, la temperatura de la radiación es la temperatura efectiva del sol, aproximadamente 6000 K, mientras que la temperatura del gas está cerca de 300 K. Situaciones similares ocurren en nebulosas gaseosas que son iluminadas por estrellas que están dentro de ellas. Otro ejemplo es el flujo de partículas en el viento estelar, principalmente protones y electrones, donde las temperaturas son de aproximadamente  $10^6$  K para los protones y casi el doble para los electrones [14].

Asumir LTE constituye una gran simplificación, ya que permite el cálculo de propiedades termodinámicas en términos de la temperatura, la densidad y la composición a medida que cambian desde el centro hacia la superficie de la estrella. Por tanto la estructura de una estrella de masa  $M$ , se determina únicamente en un intervalo dado de tiempo, si la densidad  $\rho$ , la temperatura  $T$ , y la composición de las fracciones de masa de cada constituyente son conocidas en cada punto dentro de la estrella. Por punto se entiende cualquier valor de la variable independiente escogida en el espacio, el cual se refiere a una superficie esférica alrededor del centro. La temperatura, densidad y composición no cambian únicamente con la distancia al centro de la estrella, sino también con el tiempo. Por lo tanto la evolución de una estrella compuesta por  $n$  elementos diferentes se describe por  $n + 2$  funciones, cuyas variables independientes son el espacio y el tiempo:  $\rho(m, t)$ ,  $T(m, t)$ , y las fracciones de masa  $x_i(m, t)$ , donde  $1 \leq i \leq n$ , por tanto se requiere un conjunto de  $n + 2$  ecuaciones que sean solución de estas funciones [12].

Haremos uso de las leyes básicas de conservación para aplicarlas a nuestro sistema físico (estrella): *conservación de masa, momento, momento angular y energía*. Como asumiremos en primera aproximación que una estrella es un sistema no rotatorio, entonces el momento angular será cero para todos los tiempos [15].

## 2.2. Ecuación de energía

La primera Ley de la Termodinámica o el Principio de conservación de la energía, refieren a aquellos estados en que la energía de un sistema puede cambiar a dos formas de transferencia: calor y trabajo. El calor puede ser añadido o extraído y el trabajo se puede hacer sobre el sistema o bien llevado a cabo por el sistema e involucrar un cambio

## CAPÍTULO 2. ECUACIONES DE EVOLUCIÓN ESTELAR

### 2.2. ECUACIÓN DE ENERGÍA

---

en su volumen, expansión o contracción. Podemos considerar un elemento pequeño de masa  $dm$  dentro de una estrella, sobre el cual la temperatura, densidad y composición pueden tomarse aproximadamente constantes. En vista de la simetría esférica asumida, un elemento puede ser escogido como una cáscara delgada esférica con radio entre  $r$  y  $r + dr$ , ver figura 2.1.

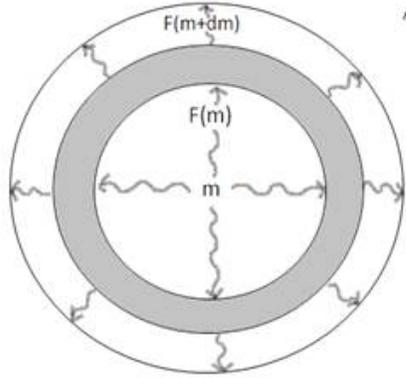


Figura 2.1: Cáscara esférica dentro de una estrella, el calor fluye en sentido radial.

Sea  $u$  la energía por unidad de masa y  $P$  la presión. Denotaremos por  $\delta f$  al cambio que ocurre en el valor de alguna cantidad  $f$  dentro del elemento de masa sobre un periodo corto de tiempo  $\delta t$ . Entonces si  $\delta Q$  es la cantidad de calor absorbido ( $\delta Q > 0$ ) o emitido ( $\delta Q < 0$ ) por el elemento de masa y  $\delta W$  es el trabajo hecho en el intervalo de tiempo  $\delta t$ , el cambio en la energía térmica, de acuerdo con la primera ley está dado por

$$\delta(udm) = dm\delta u = \delta Q + \delta W \quad (2.1)$$

donde hemos asumido la conservación de la masa, tomando  $dm$  constante. El trabajo se puede expresar como

$$\delta W = -P\delta dV = -P\delta \left( \frac{dV}{dm} dm \right) = -P\delta \left( \frac{1}{\rho} \right) dm \quad (2.2)$$

Notemos que la compresión significa la reducción del elemento de volumen o  $\delta dV < 0$ , por lo tanto implica una adición de energía, mientras que la expansión ( $\delta dV > 0$ ) se consigue a expensas de la propia energía del elemento de masa.

Las fuentes de calor de los elementos de masa son a) la liberación de la energía nuclear, si hay disponible y b) el balance de los flujos de calor transmitidos dentro y fuera del elemento. La velocidad de la liberación de la energía nuclear por unidad de masa se denota por  $q$  y la cantidad de energía que fluye perpendicularmente a través de la superficie de la esfera por  $F(m) = L$ , donde  $L$  es la luminosidad y se define como

**CAPÍTULO 2. ECUACIONES DE EVOLUCIÓN ESTELAR**  
**2.2. ECUACIÓN DE ENERGÍA**

---

la cantidad de energía radiada por unidad de tiempo. La luminosidad de una estrella es usualmente expresada en términos de la luminosidad del Sol,  $L_{\odot} = 3,85 \times 10^6 J s^{-1}$ . Las luminosidades estelares oscilan entre menos de  $10^{-5} L_{\odot}$  y más de  $10^5 L_{\odot}$ . De acuerdo con esto,

$$\delta Q = q dm \delta t + F(m) \delta t - F(m + dm) \delta t \quad (2.3)$$

pero  $F(m + dm) = F(m) + (\partial F / \partial m) dm$ , así

$$\delta Q = \left( q - \frac{\partial F}{\partial m} \right) dm \delta t \quad (2.4)$$

Si ahora sustituimos (2.2) y (2.4) en (2.1) se tiene que

$$dm \delta u + P \delta \left( \frac{1}{\rho} \right) dm = \left( q - \frac{\partial F}{\partial m} \right) dm \delta t$$

y en el límite  $\delta t \rightarrow 0$  obtenemos

$$\dot{u} + P \left( \frac{1}{\rho} \right) \dot{\phantom{u}} = \left( q - \frac{\partial F}{\partial m} \right) \dot{\phantom{u}} \quad (2.5)$$

donde hemos usado la notación  $\dot{f}$  para la derivada parcial temporal  $\partial f / \partial t$  de una función  $f$ .

En equilibrio térmico, cuando la derivada temporal desaparece, entonces

$$q = \frac{dF}{dm} \quad (2.6)$$

Si integramos sobre las masas se tiene que

$$\int_0^M q dm = \int_0^M dF = L \quad (2.7)$$

el lado izquierdo de esta ecuación representa la potencia total suministrada en la estrella debido a los procesos nucleares, ésta es la luminosidad nuclear, comúnmente denotada por  $L_{nuc}$ ,

$$L_{nuc} = \int_0^M q dm \quad (2.8)$$

por tanto, el equilibrio térmico implica que la energía es radiada hacia afuera por la estrella al mismo tiempo que se produce en su interior,  $L = L_{nuc}$ .

### 2.3. Ecuación de movimiento

La Segunda Ley de la Mecánica que da la ecuación de movimiento, establece que la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo de masa  $m$  fija imparte una aceleración que es igual a la fuerza dividida por la masa. Ésta es la ley de conservación de momento para un cuerpo de masa fija. Consideremos un elemento de volumen cilíndrico dentro de una estrella, con un eje de longitud  $dr$  en la dirección radial, entre un radio  $r$  y  $r + dr$ , y una sección transversal de área  $dS$ , como se muestra en la figura 2.2.

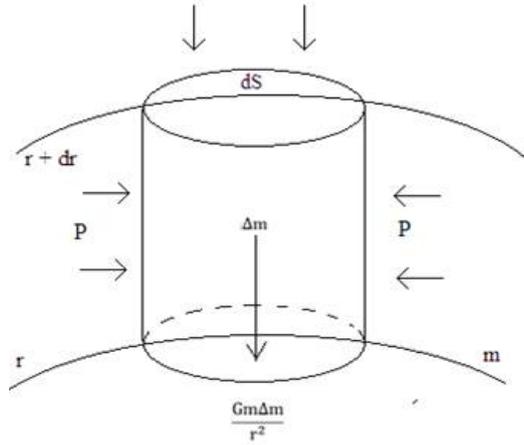


Figura 2.2: Elemento de volumen cilíndrico dentro de una estrella.

Si la densidad del elemento de volumen es  $\rho$ , su masa  $\Delta m$  está dada por

$$\Delta m = \rho dr dS \quad (2.9)$$

La fuerza que actúa sobre este elemento es de dos tipos: a) la fuerza gravitacional, ejercida por la fuerza interior a  $r$ , esta fuerza es radial y dirigida hacia el centro y b) la fuerza resultante de la presión ejercida por el gas que rodea el elemento. Debido a la simetría esférica asumida, las fuerzas debido a la presión actúan perpendicularmente hacia el centro del elemento cilíndrico y se equilibran únicamente por las fuerzas debido a la presión que actúan perpendicularmente en la parte superior e inferior que aún no se han considerado. Denotaremos por  $\ddot{r} = (\partial^2 r / \partial t^2)$  la aceleración del elemento, que se puede escribir de la forma

$$\ddot{r} \Delta m = -\frac{Gm \Delta m}{r^2} + P(r) dS + P(r + dr) dS \quad (2.10)$$

Pero  $P(r + dr) = P(r) + (\partial P / \partial r) dr$ , así

**CAPÍTULO 2. ECUACIONES DE EVOLUCIÓN ESTELAR**  
**2.3. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO**

---

$$\ddot{r}\Delta m = -\frac{Gm\Delta m}{r^2} - \frac{\partial P}{\partial r} \frac{\Delta m}{\rho} \quad (2.11)$$

Dividiendo entre  $\Delta m$ , se obtiene

$$\ddot{r} = -\frac{Gm}{r^2} - \frac{\partial P}{\partial r} \frac{1}{\rho} \quad (2.12)$$

si escogemos  $m$  como variable independiente en el espacio y usando la transformación  $dr = dm/4\pi r^2\rho$ , la ecuación (2.12) se convierte en

$$\ddot{r} = -\frac{Gm}{r^2} - 4\pi r^2 \frac{\partial P}{\partial r} \quad (2.13)$$

Cuando las aceleraciones son despreciables (2.12) y (2.13) describen un estado de equilibrio hidrostático, con la fuerza gravitacional y la fuerza de la presión exactamente en balance,

$$\frac{dP}{dm} = -\rho \frac{Gm}{r^2} \quad (2.14)$$

o

$$\frac{dP}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \quad (2.15)$$

como el lado derecho de (2.14) y (2.15) siempre es negativo, el equilibrio hidrostático implica que la presión disminuye hacia el exterior.

Podemos estimar la presión en el centro de una estrella en equilibrio hidrostático integrando (2.15) desde el centro de la superficie de la estrella

$$P(M) - P(0) = \int_0^M \frac{Gmdm}{4\pi r^4} \quad (2.16)$$

En el miembro izquierdo de (2.16) se encuentra la presión central  $P_c \equiv P(0)$ , donde la presión de la superficie prácticamente desaparece,  $P(M) \approx 0$ , por otro lado el miembro derecho se toma  $R$  el radio estelar con  $R \geq r$ , y obtener el límite más bajo para obtener la presión central

$$P_c = \int_0^M \frac{Gmdm}{4\pi r^4} \geq \int_0^M \frac{Gmdm}{4\pi R^4} \quad (2.17)$$

produciendo

$$P_c \geq \left( \frac{GM^2}{8\pi R^4} \right) \quad (2.18)$$

## 2.4. El teorema del virial

Una consecuencia importante del equilibrio hidrostático es la relación que establece entre la energía potencial gravitacional y la energía interna, o la energía cinética de un sistema de partículas. Multiplicando la ecuación de equilibrio hidrostático (2.15) por el volumen  $V = (4/3)\pi r^3$  e integrando sobre toda la estrella, se obtiene

$$\int_0^{P(R)} V dP = -\frac{1}{3} \int_0^M \frac{Gmdm}{r} \quad (2.19)$$

la integral del miembro derecho de (2.19) no es otra cosa más que la energía potencial gravitacional de la estrella, esto es, la energía que requiere la estrella para reunir material desde el infinito, definiremos

$$\Omega = \int_0^M \frac{Gmdm}{r} \quad (2.20)$$

El miembro izquierdo de la ecuación se puede integrar por partes, de tal forma que:

$$\int_0^{P(R)} V dP = [PV]_0^R - \int_0^{V(R)} P dV = \Omega \quad (2.21)$$

donde el primer término del lado derecho desaparece, ya que en el centro de la estrella  $V = 0$  y en la superficie  $P = 0$ .

Combinando (2.19) y (2.21), se obtiene finalmente

$$-3 \int_0^{V(R)} P dV = \Omega \quad (2.22)$$

si tomamos  $dV = dm/\rho$ , se obtiene

$$-3 \int_0^M \frac{P}{\rho} dm = \Omega \quad (2.23)$$

**CAPÍTULO 2. ECUACIONES DE EVOLUCIÓN ESTELAR**  
**2.4. EL TEOREMA DEL VIRIAL**

---

Esta ecuación es la *forma general del teorema del virial*. Una relación similar, puede ser obtenida integrando la ecuación (2.19) hasta un radio  $R_s < R$

$$P_s V_s - \int_0^{M_s} \frac{P}{\rho} dm = \frac{1}{3} \Omega_s \quad (2.24)$$

donde  $\Omega_s$  es la energía potencial gravitacional de la esfera cuya frontera es  $R_s$ , la cual no es afectada por la fuerza externa ejercida por la esfera con radio entre  $R_s$  y  $R$ , mientras que  $P_s$  es la presión a  $R_s$  ejercida por el peso de la columna de la esfera que lo envuelve.

Consideremos el caso particular de un gas ideal de densidad  $\rho$ , a la temperatura  $T$  y sea la masa del gas  $m_g$ . La presión del gas está dada por  $P = (\rho/mg)kT$ , donde  $k = 1,38 \times 10^{-23} J/K$  es la constante de Boltzmann [16]. La energía cinética media del movimiento de traslación de las moléculas que componen el gas es  $(3/2)kT$  y dado que para un gas ideal la energía cinética de sus moléculas por unidad de masa es

$$u = \frac{3 kT}{2 m_g} = \frac{3 P}{2 \rho} \quad (2.25)$$

si combinamos (2.25) con el teorema del virial (2.23), obtenemos  $\int_0^m u dm = -\frac{1}{2}\Omega$ , la integral del lado izquierdo es simplemente la energía total interna  $U$ , entonces

$$U = -\frac{1}{2}\Omega \quad (2.26)$$

Podemos usar este resultado para estimar la temperatura promedio interna de una estrella, asumiendo que la materia estelar se comporta como un gas ideal, la energía potencial gravitacional, (2.20), de una estrella de masa  $M$  y radio  $R$  está dada por

$$\Omega = -\alpha \frac{GM^2}{R} \quad (2.27)$$

donde  $\alpha$  es una constante del orden de la unidad, determinada por la distribución de materia dentro de la estrella, esto es, el *perfil de densidad*. Por otro lado, de (2.25)

$$U = \int_0^M \frac{3 kT}{2 m_g} dm = \frac{3}{2} \frac{k}{m_g} \bar{T} M \quad (2.28)$$

donde  $\bar{T}$  es temperatura promedio sobre la masa estelar, combinando (2.26) y (2.28) obtenemos

**CAPÍTULO 2. ECUACIONES DE EVOLUCIÓN ESTELAR**  
**2.5. ENERGÍA TOTAL DE UNA ESTRELLA**

---

$$\bar{T} = \frac{\alpha m_g GM}{3 kR} \quad (2.29)$$

sustituyendo la densidad promedio  $\rho = 3M/4\pi R^3$  en (2.29), se obtiene  $T \propto M^{2/3}\rho^{1/3}$ , lo cual significa que si tenemos dos estrellas de igual masa, si una es más densa entonces su temperatura es mayor.

## 2.5. Energía total de una estrella

Empezamos integrando la ecuación de energía (2.5) sobre la masa total de la estrella

$$\int_0^M \dot{u} dm + \int_0^M P \left(\frac{1}{\rho}\right) \dot{\phantom{m}} dm = L_{nuc} - L \quad (2.30)$$

el primer miembro del lado izquierdo de (2.30) se escribe como

$$\int_0^M \dot{u} dm = \frac{d}{dt} \int_0^M u dm = \dot{U} \quad (2.31)$$

Notemos que  $(1/\rho)\dot{\phantom{m}} = (dV/dm)\dot{\phantom{m}} = \partial\dot{V}/\partial m$  y  $\dot{V} = 4\pi r^2 \dot{r}$ , integrando por partes el segundo término del lado izquierdo de (2.30) obtenemos

$$\int_0^M P \frac{\partial\dot{V}}{\partial m} dm = [P\dot{V}]_0^M - \int_0^M 4\pi r^2 \dot{r} \frac{\partial P}{\partial m} dm \quad (2.32)$$

ahora sustituimos (2.31) y (2.32) en (2.30) y se obtiene finalmente que

$$\dot{U} - \int_0^M 4\pi r^2 \dot{r} \frac{\partial P}{\partial m} dm = L_{nuc} - L \quad (2.33)$$

Regresamos a la expresión para la ecuación de movimiento, (2.12), e integramos sobre la masa total de la estrella y multiplicamos por  $\dot{r}$ , entonces

$$\int_0^M \dot{r} \ddot{r} dm = - \int_0^M \frac{Gm}{r^2} \dot{r} dm - \int_0^M 4\pi r^2 \dot{r} \frac{\partial P}{\partial m} dm \quad (2.34)$$

como la energía cinética total de la estrella está dada por  $K = \int_0^M \frac{1}{2} \dot{r}^2 dm$  la integral del miembro izquierdo de(2.34) se convierte en

**CAPÍTULO 2. ECUACIONES DE EVOLUCIÓN ESTELAR**  
**2.6. ESCALAS DE TIEMPO DE LA EVOLUCIÓN ESTELAR**

---

$$\int_0^M \dot{r} \ddot{r} dm = \int_0^M \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \dot{r}^2 \right) dm = \frac{d}{dt} \int_0^M \frac{1}{2} \dot{r}^2 dm = \frac{d}{dt} K = \dot{K} \quad (2.35)$$

El primer término del miembro derecho de (2.34) es

$$- \int_0^M Gm \frac{\dot{r}}{r^2} dm = - \int_0^M Gm \left( \frac{1}{r} \right) \dot{\phantom{r}} dm = - \frac{d}{dt} \int_0^M \frac{GM dm}{r} = -\dot{\Omega} \quad (2.36)$$

así (2.34) se convierte en

$$\dot{K} + \dot{\Omega} = - \int_0^M 4\pi r^2 \dot{r} \frac{\partial P}{\partial m} dm \quad (2.37)$$

Combinando (2.33) y (2.37) se obtiene

$$\dot{K} + \dot{\Omega} + \dot{U} = L_{nuc} - L \quad (2.38)$$

donde el término del lado izquierdo de la ecuación (2.38) representa el cambio total en la energía de la estrella  $E = U + K + L$ , esto es

$$\dot{E} = L_{nuc} - L \quad (2.39)$$

Si una estrella está en equilibrio térmico, se sigue que  $\dot{E} = 0$  y la energía es constante. Si en adición, la estrella está en equilibrio hidrostático,  $K = 0$ . En este caso  $U$  y  $\Omega$  son descritos por el teorema del virial y por lo tanto cualquiera de ellos determina la energía total de la estrella. Consecuentemente cada uno de los términos se conserva. Por ejemplo una estrella en equilibrio térmico e hidrostático no se puede enfriar y expandir, debe conservar su energía (térmica) y la energía potencial gravitacional.

## 2.6. Escalas de tiempo de la evolución estelar

La evolución de una estrella se describe por tres ecuaciones dependientes del tiempo

$$\ddot{r} = -\frac{Gm}{r^2} - 4\pi r^2 \frac{\partial P}{\partial m} \quad (2.40)$$

$$\dot{U} + P \left( \frac{1}{\rho} \right) \dot{\phantom{r}} = \left( q - \frac{\partial F}{\partial m} \right) \quad (2.41)$$

**CAPÍTULO 2. ECUACIONES DE EVOLUCIÓN ESTELAR**  
**2.6. ESCALAS DE TIEMPO DE LA EVOLUCIÓN ESTELAR**

---

$$\dot{X} = f(\rho, T, x) \quad (2.42)$$

La primera ecuación involucra los cambios dinámicos o estructurales, la segunda describe los cambios térmicos y la tercera se ocupa de los procesos nucleares que producen cambios en la composición. Cada cambio o proceso, tiene su escala de tiempo característica  $\tau$ , la cual se define como la razón de cambio entre la cantidad (o propiedad física)  $\phi$  y su cambio en el tiempo  $\dot{\phi}$ :

$$\tau = \frac{\phi}{\dot{\phi}} \quad (2.43)$$

### 2.6.1. Escala dinámica de tiempo

Podemos estudiar los cambios en la estructura de una estrella con simetría esférica por el cambio en las características de sus dimensiones, tomando  $R = \phi$ , con  $R$  el radio de la estrella. Como la gravedad es una fuerza atrayente, el rango de cambio de  $R$  debe ser la velocidad característica en un campo gravitacional, la caída libre o velocidad de escape  $v_{esc} = \sqrt{2GM/R} = \dot{\phi}$ , por tanto la escala de tiempo dinámica puede ser estimada por

$$\tau_{dyn} \approx \frac{R}{v_{esc}} = \sqrt{\frac{R^3}{2GM}} \quad (2.44)$$

o en términos de la densidad promedio  $\bar{\rho} = 3M/4\pi R^3$ , por tanto

$$\tau_{dyn} \approx \sqrt{\frac{1}{G\rho}} \quad (2.45)$$

Existen muchos métodos para obtener la escala de tiempo dinámica y con todos se obtiene el mismo resultado. La escala de tiempo del Sol es aproximadamente 1000 s, generalmente

$$\tau_{dyn} \approx 1000 \text{ s} \sqrt{\left(\frac{R}{R_0}\right)^3 \left(\frac{M_0}{M}\right)} \quad (2.46)$$

La escala de tiempo dinámica es extremadamente pequeña, la edad aproximada del Sol es de 4.6 millones de años o bien,  $1,5 \times 10^{17} \text{ s}$ , cerca de  $10^{14} \tau_{dyn, \odot}$ , este resultado implica que un proceso dinámico ocurre en una estrella cuando la fuerza gravitacional no es equilibrada por la fuerza de la presión. Esta situación puede desarrollar una contracción, si hay presión insuficiente para contrarrestar la gravedad, o bien una expansión, si la presión es muy

**CAPÍTULO 2. ECUACIONES DE EVOLUCIÓN ESTELAR**  
**2.6. ESCALAS DE TIEMPO DE LA EVOLUCIÓN ESTELAR**

---

grande. Cualquiera de estos estados será alcanzado dentro de un periodo de tiempo del orden de la escala dinámica de tiempo. Esto nos lleva a las siguientes conclusiones:

1. Si en una estrella se lleva a cabo un proceso dinámico, el consiguiente colapso o explosión debe ser observable en su totalidad. En efecto, se sabe que estos eventos ocurren, estas estrellas son llamadas supernovas [17].
2. Cambios rápidos que a veces son observados en las estrellas pueden indicar que los procesos dinámicos están tomando lugar.
3. Una estrella se puede considerar como un sistema en equilibrio hidrostático todo el tiempo. Esto no significa que las estrellas son estáticas durante su larga vida, sino más bien que evolucionan cuasi-estáticamente, constantemente ajustando su estructura interna para mantener su balance dinámico.

**2.6.2. Escala térmica de tiempo**

Los procesos térmicos afectan la energía interna de una estrella, en este caso se considera  $\dot{\phi} = U$ . Por el teorema del virial  $U \approx GM^2/R$ . La razón característica del cambio de  $U$  es la razón a la cual la energía es radiada fuera de la estrella, por lo tanto podemos definir  $\dot{\phi} = L$ . La escala de tiempo térmica se estima por

$$\tau_{th} = \frac{U}{L} \approx \frac{GM^2}{RL} \quad (2.47)$$

Para el Sol,  $\tau_{thO} \approx 10^{15}$  s, aproximadamente 30 millones de años, generalmente

$$\tau_{th} = 10^{15} \left( \frac{M}{M_0} \right)^2 \left( \frac{R}{R_0} \right) \left( \frac{L_0}{L} \right) s \quad (2.48)$$

La escala térmica de tiempo es en muchos órdenes de magnitud más grande que la escala dinámica de tiempo, pero ésta constituye todavía una pequeña fracción, cerca del 1% o menos, de la vida completa de una estrella. Por esto no podemos observar el desarrollo de los procesos térmicos en una estrella, y asumimos que la mayor parte de su vida se encuentra en equilibrio térmico. Si una estrella se mantiene en equilibrio térmico e hidrostático durante una fase de evolución, su energía total se conserva (o cambia muy lentamente), durante esa fase, y por el teorema del virial, la energía potencial gravitacional y la energía térmica se conservan. Por esto si ocurre una contracción (cuasi-estática) en una parte de la estrella, se asume que en alguna otra parte de ella debe ocurrir una expansión para conservar  $\phi$ . Similarmente si la temperatura incrementa en una zona, ésta debe aumentar en otra para mantener  $U$  constante. La escala de tiempo térmica se puede interpretar como el tiempo que debería tomar a la estrella emitir su reserva total de energía térmica al contraerse, siempre y cuando su luminosidad se mantenga constante. Éste fue el camino por el cual William Thomson (Lord Kelvin) y Hermann Helmholtz determinaron de manera independiente la edad del sol, y por esta razón la escala térmica de tiempo es frecuentemente llamada *escala de tiempo Helmholtz-Kelvin* [8].

## **CAPÍTULO 2. ECUACIONES DE EVOLUCIÓN ESTELAR**

### **2.6. ESCALAS DE TIEMPO DE LA EVOLUCIÓN ESTELAR**

---

El estudio de la evolución estelar resulta en un problema que requiere resolver un conjunto de ecuaciones diferenciales, dicha solución solo se puede alcanzar de forma numérica y en general ella depende de las condiciones de frontera e iniciales. Sin embargo, es posible llevar a cabo un estudio cualitativo que si permita entender y predecir el comportamiento de una estrella, por ello en el siguiente capítulo se presenta un modelo mecánico donde se consideran procesos politrópicos y se obtienen las relaciones termodinámicas que modelan la evolución estelar.



## Capítulo 3

# Un modelo mecánico para el Sol

El presente capítulo y el siguiente contienen lo que se considera la parte principal de esta tesis, ya que veremos que los modelos politrópicos nos permiten entender de forma cualitativa los procesos de transferencia de calor en una estrella, particularmente el Sol. En el apéndice A y B se hace un estudio detallado de los modos de transferencia de calor y la teoría de la transferencia radiativa, por ser este modo el que predomina en una estrella.

En la literatura se reporta que la estabilidad de las reacciones de fusión nuclear en una estrella se debe al *calor específico negativo* del sistema, lo cual significa que cuando el sistema atraviesa por un proceso de este tipo, su temperatura disminuye cuando se le suministra energía y entropía, y además el volumen de dicho sistema incrementa. Uno puede llevarse la impresión de que este fenómeno es el resultado de una complicada interacción de muchas variables relacionadas con su distribución como una función que depende del radio de la estrella, por ejemplo: temperatura, presión, densidad, tasa de producción de energía, luminosidad, opacidad y masa; así como de un conjunto de leyes, tales como la ley de gravitación, ley de conservación de la masa y energía, ley de Stefan-Boltzmann y condición de equilibrio hidrostático. Sin embargo cuando tratamos de entender la física fundamental del mecanismo, este estudio puede ser un camino largo y difícil, cuya conclusión no se conoce.

En esta sección presentaremos un modelo mecánico que permita entender la estabilidad de una estrella de forma cualitativa, ya que para ello consideraremos los componentes de dicha estrella como un gas ideal que sufre procesos politrópicos.

### 3.1. Procesos politrópicos

El Sol presenta mecanismos de autocontrol. Aunque la descripción de una estrella es compleja, algunos de sus mecanismos de autorregulación se pueden entender desde el punto de vista de los *procesos politrópicos*.

Todos los procesos *isobárico*, *isotérmico*, *adiabático* tienen una peculiaridad común: todos transcurren a capacidad calorífica constante, a este tipo de procesos se les conoce

### CAPÍTULO 3. UN MODELO MECÁNICO PARA EL SOL

#### 3.1. PROCESOS POLITRÓPICOS

---

como *politrópicos*.

Partiendo de la condición de que la capacidad calorífica permanezca constante durante el proceso, el primer principio de la termodinámica debe ser de la forma

$$CdT = C_V dT + pdV \quad (3.1)$$

Tomando la ecuación para gas ideal y la relación de Mayer en (3.1), hallamos

$$\frac{dT}{T} + \left( \frac{C_p - C_V}{C_V - C} \right) \frac{dV}{V} = 0 \quad (3.2)$$

que al integrar toma la forma:

$$TV^{k-1} = cte \quad (3.3)$$

donde  $(C_p - C_V)/(C_V - C) = k - 1$ .

Esta es la *ecuación politrópica en variables T, V*. Eliminando de ella  $T$  mediante la igualdad  $T = pV/R$ , encontramos

$$PV^k = cte \quad (3.4)$$

donde  $k = (C - C_p)/(C - C_V)$  es el *exponente politrópico*.

Se tienen diferentes casos dependiendo del valor que toma  $C$ . Para  $C = 0$ ,  $k = \gamma$ , de (3.4) se obtiene la ecuación de la adiabática. Para  $C = \infty$ ,  $k = 1$ , la ecuación de la isotérmica. Para  $C = C_p$ ,  $k = 0$ , la ecuación de la isobárica. Finalmente para  $C = C_V$ ,  $k = \pm\infty$ , se obtiene la ecuación de la isocórica.

Se puede demostrar que para un proceso politrópico, la capacidad calorífica molar de un gas ideal toma la forma

$$C = \frac{R(k - \gamma)}{(\gamma - 1)(k - 1)} \quad (3.5)$$

### CAPÍTULO 3. UN MODELO MECÁNICO PARA EL SOL

#### 3.1. PROCESOS POLITRÓPICOS

---

y los valores del exponente politrópico para los cuales la capacidad calorífica será negativa, quedan acotados por  $1 < k < \gamma$ .

Para un mol de gas ideal (con ecuación de estado  $PV = RT$ ) a la temperatura  $T$ , presión  $p$  y volumen  $V$ , que es calentado en condiciones tales que se cumple (3.4), se puede determinar la capacidad calorífica como una función de  $k$  para diferentes procesos. Para un proceso tal que se cumpla que la función  $f(p, V)$  permanece constante, la capacidad calorífica viene dada por

$$\left(\frac{\delta Q}{\partial T}\right)_k = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_k + p \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_k \quad (3.6)$$

Como la energía interna  $U$  en un gas ideal es sólo función de la temperatura,  $U = U(T)$ , se tiene que  $(\partial U/\partial T)_k = C_V$ .

Además, el proceso  $f(p, V)$  se puede reescribir de la forma  $f(T, V)$ , (3.3), derivando el segundo término de la ecuación (3.6) se tiene

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_k = - \left(\frac{\partial V}{\partial f}\right)_T \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_V = - \frac{V}{T(k-1)} \quad (3.7)$$

La ecuación (3.6) se reescribe como

$$\left(\frac{\delta Q}{\partial T}\right)_k = C_V - \frac{R}{k-1} \quad (3.8)$$

De esta ecuación se tienen los siguientes casos particulares, en donde se introduce  $\delta$  (un número positivo muy pequeño):

1.  $k = 0$ . Proceso isóbaro,  $p = cte$  y  $C_k = C_V + R = C_p$ .
2.  $0 < k < 1$ . Suponiendo  $k = 1 - \delta$ , se tiene que

$$C_k = C_V + \frac{R}{\delta} \geq 0$$

la cual es una capacidad calorífica positiva.

3.  $k = 1$ . Proceso isoterma,  $T = cte$  y  $C_k = \infty$ . Aunque se proporciona calor al sistema su temperatura no varía.

**CAPÍTULO 3. UN MODELO MECÁNICO PARA EL SOL**  
**3.2. VARIACIONES DE TEMPERATURA, ENTROPÍA Y CALOR**

---

4.  $1 < k < (C_p/C_V = \gamma)$ . Suponiendo  $k = (C_p/C_V) - \delta$ , se tiene que

$$C_k = \frac{-C_V^2 \delta}{R - \delta C_V} \leq 0$$

que es una capacidad calorífica negativa.

5.  $k = C_p/C_V$ . Proceso adiabático y  $C_k = 0$ . El proceso ve modificada su temperatura pero no hay intercambio de calor. En  $(\delta Q/\partial T)_k$  el numerador es cero y el denominador es positivo.

6.  $k > C_p/C_V$ . Suponiendo que  $k = C_p/C_V + \delta$ ,

$$C_k = \frac{C_V^2 \delta}{R}$$

que es una capacidad calorífica positiva.

7.  $k = \infty$ . Proceso isócoro,  $V = cte$  y  $C_k = C_V$ .

Las capacidades caloríficas negativas son una característica importante de los procesos politrópicos que tienen lugar en las estrellas.

### 3.2. Variaciones de temperatura, entropía y calor

Para un gas ideal,  $pV = NRT$  y  $C_V = cte$ , el formalismo termodinámico permite obtener que:

$$S(T, V) = S_0 + NC_V \ln T + NR \ln \frac{V}{N} \quad (3.9)$$

1. En un proceso en el que se cumple que  $PV^k = cte$ , también se cumple (3.3), ahora es inmediato comprobar que

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{f(k)} = \left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial f}\right)_V = -(k-1)\frac{T}{V} < 0$$

Por tanto, en un proceso de este tipo en el que el volumen aumenta,  $\Delta V > 0$ ,

$$\Delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{f(k)} \Delta V$$

$$\Delta T = -(k-1)\frac{T}{V} \Delta V < 0$$

la temperatura disminuye y el proceso va cortando isotermas decrecientes, ver figura 3.2.

**CAPÍTULO 3. UN MODELO MECÁNICO PARA EL SOL**  
**3.3. UN MODELO PARA EL SOL**

---

2. Del mismo modo se calcula a partir de (3.9) que la variación de la entropía respecto al volumen es:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{f(k)} = \frac{NC_V}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{f(k)} + \frac{R}{NV} = \left(\frac{N}{V}\right) [R - C_V(k - 1)] \Delta V > 0$$

Por tanto en un proceso de este tipo en el que el volumen aumenta,  $\Delta V > 0$ ,

$$\Delta S = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{f(k)} \Delta V$$

$$\Delta S = \frac{N}{V} [R - C_V(k - 1)] \Delta V > 0,$$

la entropía aumenta y el proceso va cortando adiabáticas (isentrópicas) de mayor entropía, ver figura 3.3.

3. La capacidad calorífica a lo largo de este proceso viene dada por

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_k = C_V - \frac{R}{k-1}$$

y como ya se mencionó anteriormente, para el caso  $1 < k < \gamma$ , es una capacidad calorífica negativa. Por tanto puesto que en este proceso,  $\Delta V > 0$ ,  $\Delta T < 0$ ,  $\delta Q > 0$  y se absorbe calor. Se demuestra por tanto que es la variación de la entropía la que determina si el sistema absorbe o cede calor y no la variación de la temperatura.

Hay que tener en cuenta que para que el proceso politrópico discutido pueda llevar a cabo, el gas debe estar unido a alguna clase de mecanismo con el que intercambie trabajo. Al proporcionar energía al sistema en forma de calor (aumento de la entropía) el gas realiza trabajo sobre el mecanismo y su temperatura disminuye (capacidad calorífica negativa).

### 3.3. Un modelo para el Sol

Los procesos politrópicos tienen lugar en estrellas homogéneas en sus primeros estadios. Con el fin de modelar este comportamiento, consideraremos una estrella como un sistema formado por dos subsistemas:

1. Materia de la que está formada la estrella (gas ideal).
2. El campo gravitatorio de la misma.

Durante los procesos de fusión nuclear se proporciona energía al subsistema gas, dicha energía se pierde debido a los mecanismo de transferencia radiativa (por razones de órdenes de magnitud, se pueden suponer despreciables las pérdidas por radiación).

### CAPÍTULO 3. UN MODELO MECÁNICO PARA EL SOL

#### 3.3. UN MODELO PARA EL SOL

La energía de fusión se cede al gas en forma de calor y la energía interna del gas disminuye, así como su temperatura, una gran parte de la energía proporcionada al gas en forma de calor pasa al otro subsistema, el campo gravitatorio, dando lugar a la expansión de la estrella, aproximadamente la mitad de la energía total, como lo describe el teorema del virial.

El balance de entropía se puede expresar como

$$\dot{Q} = T\dot{S} \quad (3.10)$$

donde  $\dot{Q}$  y  $\dot{S}$  son el flujo de calor cedido al gas y la variación de entropía por unidad de tiempo, respectivamente. Puesto que la variación de entropía del subsistema gas depende tanto de la variación de la temperatura como de la variación de volumen, se tiene que la entropía aumenta a pesar de que disminuya la temperatura, pues el aumento de volumen compensa dicha disminución.

Por tanto, la estabilidad de una estrella que está quemando su combustible nuclear, se debe al mecanismo de retroalimentación basado en el calor específico negativo de la estrella. A medida que se quema el combustible de la estrella, la estrella aumenta su volumen y su temperatura disminuye. Si el *flujo de calor disminuye*, entonces el combustible se quema con menor rapidez, la temperatura aumenta y el combustible se vuelve a quemar más rápido. Si el *flujo de calor aumenta*, el combustible se quema con mayor rapidez, la temperatura disminuye y el combustible se quema más lento.

#### 3.3.1. Estudio cualitativo del Sol por medio de un modelo mecánico

Un modelo mecánico del Sol se muestra en la Figura 3.1.

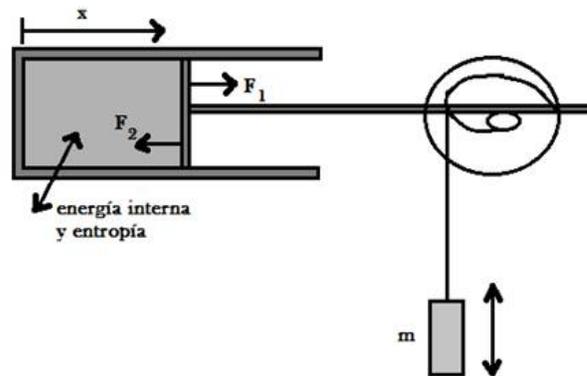


Figura 3.1: Modelo mecánico para el Sol. La posición de equilibrio del pistón (determina el volumen de la estrella) depende de la energía interna del gas. Cuando se proporciona energía interna (y entropía) al gas, el émbolo se mueve hacia la derecha, el volumen aumenta y la temperatura disminuye.

Mientras que en una estrella real el gas se mantiene unido por el campo gravitacional, el gas en este modelo de estrella está unido por un contenedor cilíndrico con un pistón.

### CAPÍTULO 3. UN MODELO MECÁNICO PARA EL SOL

#### 3.3. UN MODELO PARA EL SOL

---

Cuando el gas es calentado, el flujo de energía  $\dot{Q}$  que entra en el gas está relacionado con el flujo de entropía  $\dot{S}$  entrando en ella, mediante (3.10) [18], [19].

Las fuerzas que actúan sobre el sistema son:

1. La fuerza  $F_1(x)$  debido al gas.
2. La fuerza  $F_2(x)$  debido al arreglo peso-polea, que se elige para que sea de la forma [20]:

$$F_2(x) = \frac{C_2}{x^k} \quad (3.11)$$

con  $1 < k < \gamma$ .

Donde  $x$  es la longitud de la columna de gas y  $C_2$  es una constante positiva. Cuando el émbolo se desplaza hacia la derecha, la masa del arreglo sube, de tal forma que se realiza trabajo que se acumula en forma de energía potencial.

Si el émbolo se encuentra en equilibrio una pequeña variación de la energía interna en condiciones adiabáticas implica que  $PV^\gamma = cte$ , entonces la fuerza  $F_1$  que ejerce el gas sobre el émbolo será

$$F_1(x) = \frac{C_1}{x^\gamma} \quad (3.12)$$

donde  $C_1$  es una constante positiva y depende de la entropía que contiene el gas. La condición de equilibrio mecánico exige que

$$F(x_0) = F_1(x_0) + F_2(x_0) = \frac{C_1}{x_0^\gamma} - \frac{C_2}{x_0^k} \quad (3.13)$$

debe cumplirse en todo momento para algún  $x_0$ .

Para determinar si este equilibrio es estable, se tiene que

$$\left[ \frac{dF}{dx} \right]_{x=x_0} = (k - \gamma) \frac{C_1}{x_0^{\gamma+1}} < 0 \quad (3.14)$$

para  $\gamma > k$ . De donde se deduce que para una pequeña desviación de la posición de equilibrio, el sistema será conducido a la posición  $x_0$ .

Cuando entregamos calor o lo extraemos del gas, el pistón se moverá pero siempre permanecerá en estado de equilibrio. La relación  $p - V$  del gas para estos estados se expresa como:

$$P(V) = \frac{C}{V^k} \quad (3.15)$$

### CAPÍTULO 3. UN MODELO MECÁNICO PARA EL SOL

#### 3.3. UN MODELO PARA EL SOL

aquí  $C$  es una constante. Por esto, la relación  $p - V$  es representada por una hipérbola. Su exponente  $k$  se encuentra entre el de una adiabática y el de una isoterma, tal como se muestra en las figuras 3.2 y 3.3, y ésta es una relación politrópica. Recordemos que esto representa los estados de equilibrio mecánico, los cuáles se distinguen para diferentes contenidos de entropía del gas. El sistema pasa a través de estos estados cuando el calor es extraído o entregado al gas.

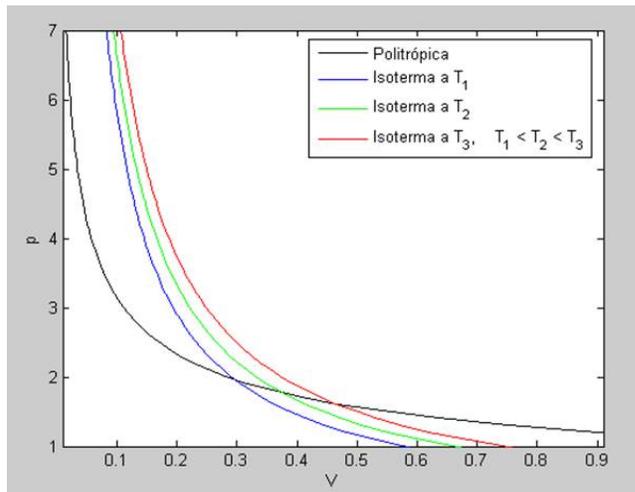


Figura 3.2: Curva  $p - V$  de nuestro gas junto con una serie de isotermas. Cuando se recorre la curva politrópica de mayor a menor volumen, se observa que cruza las isotermas de mayor a menor temperatura, de este hecho se puede decir que: *cuando se suministra calor al gas su temperatura disminuye.*

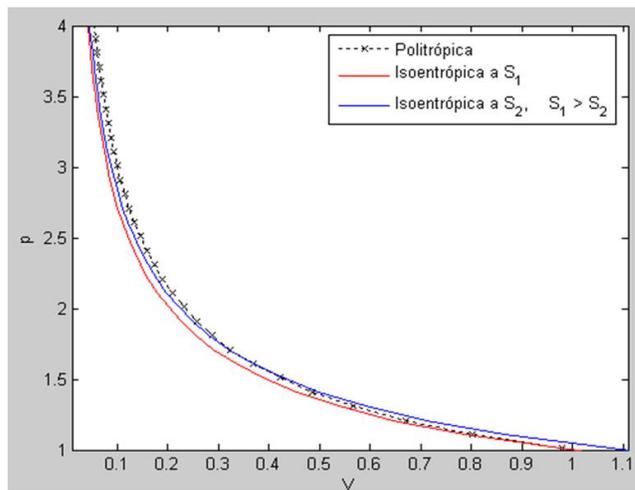


Figura 3.3: Curva  $p - V$  del gas que modela la estrella junto con una familia de adiabáticas. Se observa que cuando se sigue la curva  $p - V$  de nuestro modelo solar, se cruzan las curvas de entropía constante, lo cual indica el aumento de entropía. Por ello cuando suministramos entropía, el volumen del gas incrementa. Ya que el suministro de entropía está relacionado con un suministro de calor se puede concluir que: *cuando el calor es suministrado al gas, su volumen incrementa.*

## CAPÍTULO 3. UN MODELO MECÁNICO PARA EL SOL

### 3.3. UN MODELO PARA EL SOL

---

Por lo anterior consideramos que el modelo presentado contiene el comportamiento cualitativo sobre como se comporta una estrella. Es importante notar que en este experimento se consideran únicamente procesos reversibles. En general, en una estrella, existen procesos altamente irreversibles, en particular, las reacciones de fusión y la transferencia de calor desde la zona de reacción hacia la exterior. Sin embargo, como el modelo lo muestra, estas irreversibilidades no están relacionadas con la estabilidad de la estrella.

#### 3.3.2. El balance de energía y entropía

El modelo solar consiste en dos subsistemas interactuantes, ambos de los cuales pueden almacenar energía:

1. El gas contenido en el recipiente cilíndrico.
2. El arreglo peso-polea.

Cuando la energía es aplicada al gas, su temperatura decrece. Dado que para un gas ideal su energía interna depende únicamente de la temperatura, suministrando calor al gas hace que su energía interna disminuya. Esto se explica considerando que el gas está conectado al otro subsistema. Con esto concluimos que, cuando suministramos una cierta cantidad de energía al gas, la mayor parte de esta energía se pasa al subsistema peso-polea.

Para el balance de entropía sólo es necesario tomar en cuenta uno de los dos subsistemas. Tanto el subsistema peso-polea como el campo gravitatorio de la estrella, no son capaces de almacenar entropía. Al discutir el balance de entropía en un gas, tenemos que tener en cuenta que la entropía depende de dos variables: el volumen y la temperatura del gas. Cuanto mayor sea el volumen y cuanto mayor sea la temperatura de un gas, más entropía contiene (ambas tienen una dependencia logarítmica [21]). De la mecánica estadística se entiende que la entropía aumenta cuando el volumen y la temperatura aumentan.

El modelo que aquí hemos presentado es muy simplificado pero ha sido estudiado y discutido por científicos de la más alta calificación como Chandrasekhar [22]. La representación gráfica y la interpretación es parte de este trabajo.

Como parte de este trabajo de tesis surge el interés por conocer de que modo la radiación estelar, en este caso la radiación solar, llega a la Tierra e interactúa con la atmósfera terrestre, por ello en el siguiente capítulo se presenta un modelo de simulación neuronal que permita hacer predicciones a partir de datos reales.



## Capítulo 4

# Estimación de la Radiación Solar Superficial con Redes Neuronales Artificiales

El estudio de la evolución estelar es en general muy complicado y el estudio se hace en la mayoría de las veces de forma numérica, en nuestra investigación encontramos un tema que viene a completar este trabajo de tesis y el cual consiste en considerar los datos de radiación que se pueden medir en la superficie de la tierra. Los datos que se obtienen sobre la radiación solar en la superficie terrestre son muy importantes en una amplia gama de aplicaciones como la meteorología, ingeniería, ciencias agrícolas, por ejemplo, física del suelo, hidrología agrícola y modelación de cultivos, así como en el sector salud, para el control de enfermedades y la investigación del cáncer de piel, o bien, en la investigación en muchos campos de las ciencias naturales. Algunos ejemplos pueden incluir la arquitectura y el diseño de construcciones, por ejemplo aire acondicionado y sistemas de refrigeración, asimismo el diseño de sistemas de calefacción solar y modelos de predicción del clima [23].

La radiación solar que llega a la parte superior de la atmósfera de la Tierra en general es de magnitud constante. Sin embargo, la radiación que llega a cierto lugar sobre la superficie de la Tierra es variable, esto se debe a los gases, nubes y partículas de polvo en la atmósfera, que absorben y/o dispersan la radiación en diferentes longitudes de onda. La obtención de datos fiables de la radiación que llega al nivel del suelo requiere de mediciones sistemáticas. Sin embargo y hasta donde sabemos, en muchos países, la densidad espacial de *estaciones actinométricas* es inadecuada. Incluso en los países desarrollados hay una escasez de medidas de radiación solar a largo plazo o bien mediciones confiables. Esta situación llevó a la elaboración de procedimientos de cálculo que permitan proporcionar estimaciones de la radiación solar en lugares donde no se han realizado mediciones y donde hay lagunas en los registros de medición.

Los antecedentes de los estudios de radiación solar en nuestro país pueden situarse en los años de 1911 a 1928, cuando el investigador de origen polaco Ladislaw Gorczynski realizó mediciones actinométricas en el Observatorio Meteorológico de Tacubaya y otros

## CAPÍTULO 4. ESTIMACIÓN DE LA RADIACIÓN SOLAR SUPERFICIAL CON REDES NEURONALES ARTIFICIALES

---

lugares del mundo para determinar las características de la radiación solar a nivel de superficie con ayuda de un sensor desarrollado por él mismo (termopila de Gorcynsky).

Entre los investigadores nacionales que iniciaron los trabajos de investigación en este campo podemos mencionar al Ing. Jesús Martínez G. y al Dr. Ignacio Galindo Estrada miembros del Instituto de Ciencia Aplicada, que más tarde se incorporara al Instituto de Geofísica de la UNAM.

En el año de 1956 empiezan a efectuarse mediciones de radiación solar en el Instituto de Ciencia Aplicada auspiciado por la UNESCO con donaciones de equipo de diversos países participantes del Año Geofísico Internacional, y adquisiciones del propio Instituto; se realiza mediciones de: duración de la insolación, radiación global, radiación difusa y radiación directa (flujos totales). Además del Observatorio de Radiación Solar de Ciudad Universitaria, se han tenido estaciones solarimétricas en Mezcala, Gro., Chilpancingo, Gro., Chihuahua, Chih., Altzomoni, Edo. de Méx., Laguna del Rey, Coah. y Orizabita, Hgo. De éstas, la que continúa en operación es la última de ellas.

Las estimaciones de la radiación solar se pueden obtener por medio de un *modelo de radiación de sitio-específico* o bien con un *modelo de predicción mecánico*. El modelo de sitio se basa en relaciones empíricas con las variaciones meteorológicas registradas en las estaciones. Aunque el modelo de sitio-específico requiere de un conjunto de datos con información de la radiación solar actual para determinar los coeficientes apropiados, este enfoque es más sencillo y preciso que los modelos mecánicos.

La necesidad de tener datos de la radiación solar en la superficie terrestre es cada vez más importante, ya que con esta información se pueden generar modelos de la composición y dinámica atmosférica, así como incrementar el número de aplicaciones con energía solar. Se ha desarrollado un gran número de modelos de cálculo de radiación solar que van desde complicados códigos de computadora hasta simples relaciones empíricas. La elección del modelo por lo general toma en cuenta estas características: (1) disponibilidad de información meteorológica y (2) precisión del modelo. Para propósitos prácticos el primer criterio hace que los programas basados en la solución de la ecuación de transferencia radiativa sean inutilizables.

El tipo de datos de radiación solar que se requiere depende de la aplicación. Por ejemplo, para llevar a cabo estudios climatológicos se requieren datos mensuales basados en promedios diarios y para simular el rendimiento de dispositivos solares se requieren datos por hora o periodos más cortos.

A continuación se discute la aplicación de Redes Neuronales Artificiales (ANN-por sus siglas en inglés), como una herramienta moderna para la simulación de la radiación solar superficial. Se lleva a cabo un estudio de la investigación reportada en la literatura, centrándose en la metodología neuronal, la base de datos reportada y la validación de estos datos. El objetivo de este capítulo es tener una buena comprensión de las capacidades y aplicabilidad de ANN en la estimación de la radiación solar superficial, así como presentar algunas herramientas de software que permitan la creación de este tipo de modelos de

## CAPÍTULO 4. ESTIMACIÓN DE LA RADIACIÓN SOLAR SUPERFICIAL CON REDES NEURONALES ARTIFICIALES

### 4.1. REDES NEURONALES

---

simulación.

#### 4.1. Redes Neuronales

Una red neuronal artificial (ANN) es una estructura interconectada por sencillas unidades de procesamiento, cuya funcionalidad se puede mostrar gráficamente por su semejanza con los elementos de los procesos biológicos, las neuronas, organizadas de tal manera que la estructura de la red se adapta al problema que se está considerando. Las capacidades de procesamiento de las redes artificiales son determinadas por la fuerza existente entre las unidades de procesamiento, el patrón de arquitectura que se sigue durante la construcción de la red y un conjunto de parámetros especiales adquiridos durante el entrenamiento de la red. Haykin establece que [24]:

*Una red neuronal es un procesador distribuido masivamente en paralelo que tiene una propensión natural para almacenar el conocimiento empírico y ponerla a disposición para su uso. Se asemeja el cerebro en dos aspectos: (1) el conocimiento que adquiere la red se obtiene a través de un proceso de aprendizaje y (2) la fuerza de las interconexiones entre las neuronas, conocidas como pesos o pesos sinápticos, se utilizan para almacenar el conocimiento.*

Durante las últimas dos décadas, el uso de ANN ha demostrado ser una excelente herramienta para la investigación, ya que son capaces de manejar interrelaciones no lineales (funciones de aproximación no-lineal), datos separados (clasificación de los datos), localizar relaciones ocultas en grupos (clustering) o modelar sistemas naturales (simulación). Naturalmente, ANN encontró una tierra fértil en la investigación de la radiación solar.

#### 4.2. Construcción de redes neuronales

En esta sección presentaremos una propuesta para construir el modelo de ANN para la estimación de la radiación solar. Dicha propuesta se trabajara sobre un software conocido como Matlab, el cual es un lenguaje de alto nivel y un entorno interactivo equipado para la construcción de ANN [8].

Emplearemos un conjunto de datos reales obtenidos de observaciones realizadas en Athalassa (35°8'27" Norte, 33°23'4" Este), lugar donde se encuentra la principal estación radiométrica del Servicio Meteorológico de Chipre. La isla de Chipre se encuentra entre los círculos de latitud 34,6° y 35,6° Norte y entre los meridianos 32° y 54,5° Este, rodeado por el mar Mediterráneo. El clima mediterráneo se caracteriza por la sucesión de una sola estación de lluvias de noviembre a mediados de marzo y una temporada seca más larga de mediados de marzo a octubre. Esta generalización es modificada por la influencia de factores marítimos, produciendo veranos más fríos e inviernos más cálidos en la mayor parte de la costa y las zonas bajas. La visibilidad en general es muy buena. Sin embargo, durante la primavera y principios del verano, la atmósfera es bastante nebulosa, con polvo transferido de los vientos de los desiertos del Sahara y Arabia, por lo general asociados con el desarrollo de depresiones del desierto [25].

**CAPÍTULO 4. ESTIMACIÓN DE LA RADIACIÓN SOLAR  
SUPERFICIAL CON REDES NEURONALES ARTIFICIALES**  
**4.2. CONSTRUCCIÓN DE REDES NEURONALES**

---

#### 4.2.1. Aplicando ANN con Matlab

MATLAB es un entorno de cálculo numérico y también un lenguaje de programación. Permite la manipulación de matrices, gráficos de funciones y datos, así como la implementación de algoritmos. Además ofrece una variedad de herramientas para el diseño de redes neuronales, implementación, visualización y simulación [26].

Con los datos existentes para la duración de insolación en Chipre, vamos a crear, paso a paso, un modelo neuronal capaz de calcular la *Radiación Fotosintéticamente Activa diaria*, comúnmente llamada PAR, por sus siglas en inglés [27], ésta es, la radiación integrada del rango de longitudes de onda que son capaces de producir actividad fotosintética en plantas y otros organismos fotosintéticos como microalgas y bacterias. Este rango es el comprendido aproximadamente entre los 400 y 700 nm, que es también el rango de radiación visible.

Dentro del conjunto de datos que se tienen, se toman pesos y sesgos aleatorios y las variables de entrada/salida son convertidas a filas (MATLAB requiere que todos los datos de entrada sean presentadas como vectores fila).

Pasos para la creación del modelo neuronal que calculará la radiación PAR:

- Importamos los datos al espacio de trabajo de Matlab.
  
- Graficamos los datos disponibles para el mes, ver figura 4.1.
  
- Pre-procesamiento de los datos (normalización).
  
- Creación de la red. La red creada usando el método de notación de Matlab se ilustra en la figura 4.2. De acuerdo con este esquema se tiene una capa de entrada con una neurona, la capa oculta con 10 neuronas y la capa de salida de sólo una neurona.  $IW(i)$  es una matriz celda bidimensional que contiene los pesos de las conexiones entre las entradas y la capa  $i$ ,  $LW(i,j)$  contiene la matriz de peso de las conexiones desde la capa  $j$  hacia la capa  $i$  y  $b(i)$  contiene los umbrales de las diferentes capas.

# CAPÍTULO 4. ESTIMACIÓN DE LA RADIACIÓN SOLAR SUPERFICIAL CON REDES NEURONALES ARTIFICIALES

## 4.2. CONSTRUCCIÓN DE REDES NEURONALES

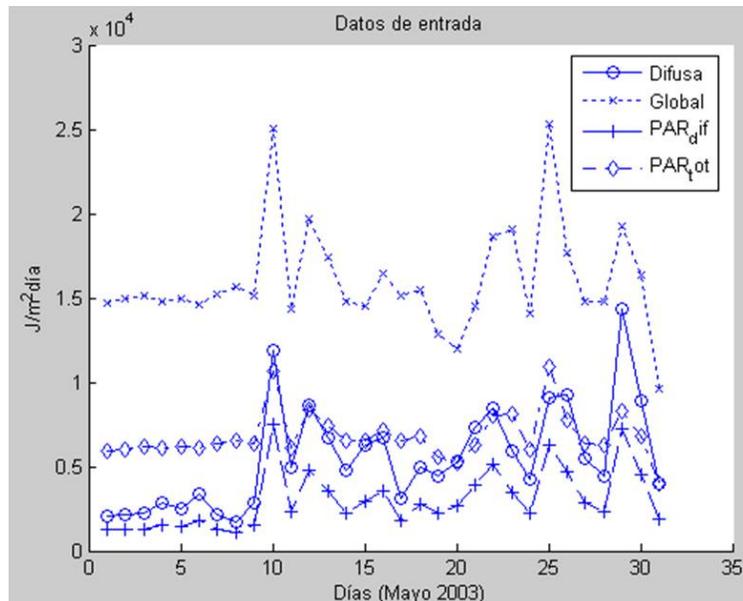


Figura 4.1: Datos para los días del mes de mayo de 2003.

- Inicialización de la red.
- Simulación de la red sin entrenamiento para mostrar la respuesta inicial a los datos de entrada. Los datos han sido normalizados en el rango  $[-1,1]$ . El resultado de la simulación de la red no entrenada se presenta en la figura 4.3.
- Entrenamiento de la red. La red se entrena en modo Batch mediante la función `train`. La función `anorm` es la salida normalizada del conjunto de entrenamiento, ver figura 4.4. En esta parte se establecen las instrucciones que detienen el funcionamiento de la red, por ejemplo, el error asociado (goal) y el número de iteraciones (epochs).
- Post-procesamiento de los datos. Los datos son desnormalizados.
- Graficar la salida, ver figura 4.5.

De la figura 4.5 podemos asumir falsamente que mediante el aumento de las épocas de formación, se reducirá el error global. Sin embargo, este no es el caso. La red que hemos creado está sobreajustada. Su rendimiento probablemente aumentará con el aumento iteraciones y finalmente se acercará a cero, pero la red será incompetente para datos desconocidos. La población del conjunto de datos parece ser pequeño para entrenar la red neuronal correctamente, pero ya que la relación que estamos investigando es una función lineal simple [28], la red no tiene ningún problema para converger a la solución.

**CAPÍTULO 4. ESTIMACIÓN DE LA RADIACIÓN SOLAR  
SUPERFICIAL CON REDES NEURONALES ARTIFICIALES**  
4.2. CONSTRUCCIÓN DE REDES NEURONALES

---

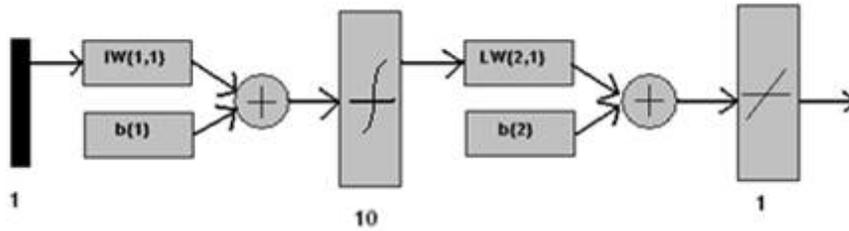


Figura 4.2: Red neuronal usando la notación de MATLAB.

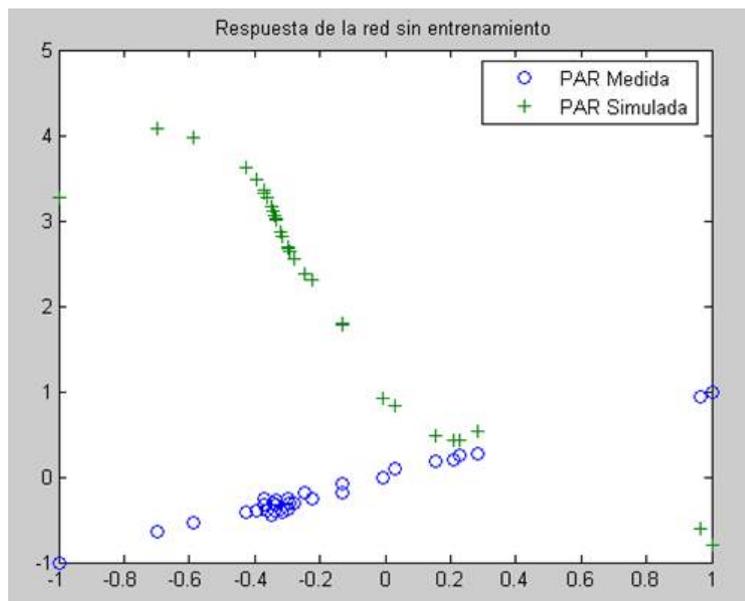


Figura 4.3: Simulación de la red neuronal sin entrenamiento. Los datos de entrada se han normalizado.

## CAPÍTULO 4. ESTIMACIÓN DE LA RADIACIÓN SOLAR SUPERFICIAL CON REDES NEURONALES ARTIFICIALES

### 4.2. CONSTRUCCIÓN DE REDES NEURONALES

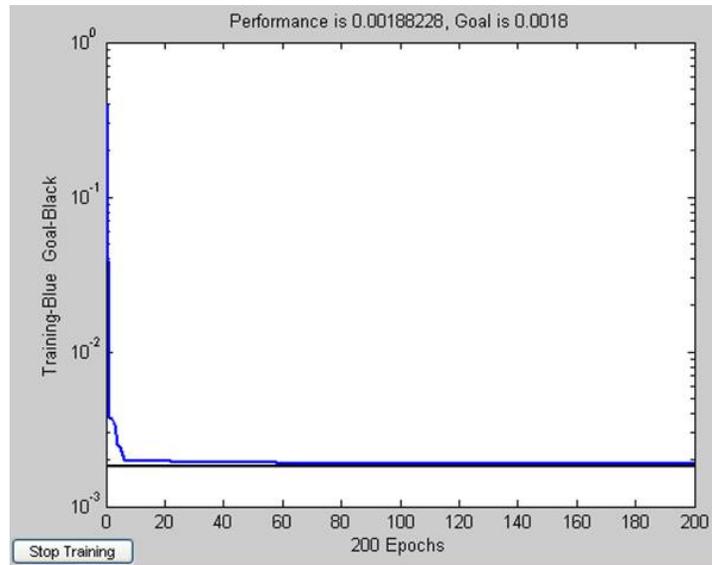


Figura 4.4: Entrenamiento de la red. En este gráfico se muestra el número de iteraciones y el error asociado a cada una de ellas. Después de 132 iteraciones el error asociado (0.0018) se mantiene constante.

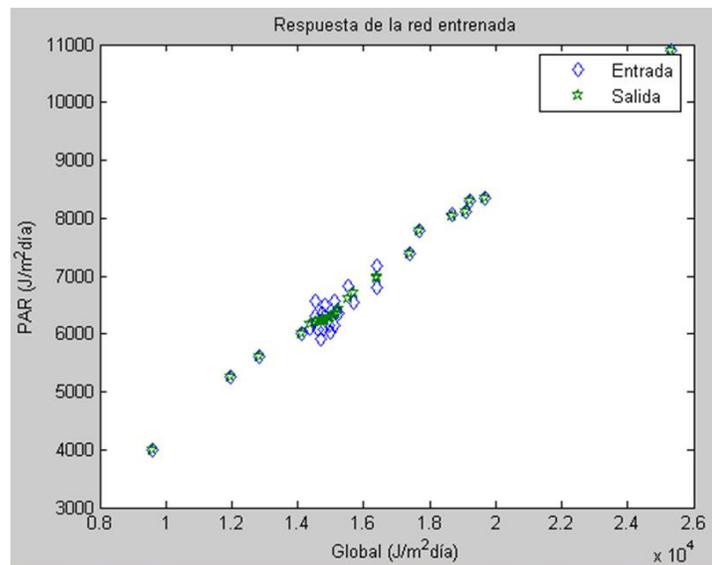


Figura 4.5: Respuesta de la red entrenada.

De igual forma presentamos una propuesta para construir el modelo de ANN para la estimación de la radiación solar difusa en México, ver figuras 4.6 y 4.7. En su paso a través de la atmósfera parte de la irradiancia es atenuada por fenómenos de dispersión y absorción. La radiación que llega a la Tierra sin haber sufrido cambio en su trayectoria lineal, se llama radiación directa. Conocer el flujo de la radiación solar directa y difusa es importante para el análisis y diseño de algunos sistemas solares. Por ejemplo el valor de la radiación normal es necesario para el cálculo de la radiación solar sobre superficies

## CAPÍTULO 4. ESTIMACIÓN DE LA RADIACIÓN SOLAR SUPERFICIAL CON REDES NEURONALES ARTIFICIALES

### 4.2. CONSTRUCCIÓN DE REDES NEURONALES

---

inclinadas. Varios autores han desarrollado sus propias correlaciones entre la irradiación global y la irradiación difusa [29]. Empleamos un conjunto de datos obtenidos de observaciones realizadas en el Observatorio de Radiación Solar del Instituto de Geofísica de la UNAM, México, lugar donde se realiza investigación en el campo de los procesos de interacción de la radiación solar con la atmósfera, sus componentes, así como sus implicaciones energéticas de conservación y aprovechamiento.

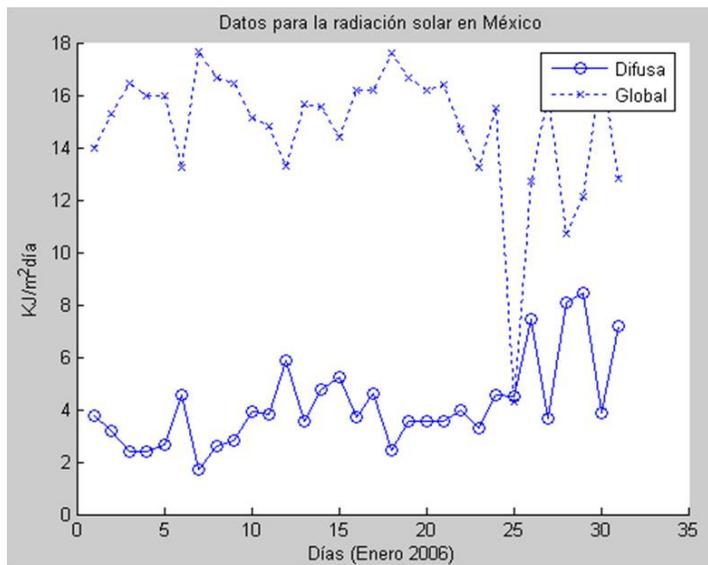


Figura 4.6: Datos para los días del mes de enero de 2006.

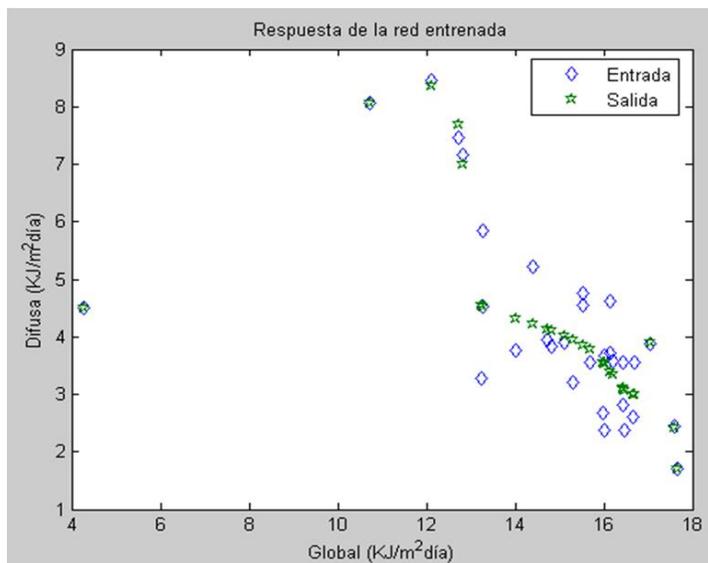


Figura 4.7: Respuesta de la red entrenada.

**CAPÍTULO 4. ESTIMACIÓN DE LA RADIACIÓN SOLAR  
SUPERFICIAL CON REDES NEURONALES ARTIFICIALES**  
**4.2. CONSTRUCCIÓN DE REDES NEURONALES**

---

En el Apéndice C se hace un estudio detallado sobre ANN y se agregan los detalles de los programas completos para la aplicación de una Red Neuronal Artificial en radiación solar.



## Capítulo 5

# Conclusiones

Nuestro interés por conocer la teoría que describe la evolución estelar, nos llevó a encontrar que este problema se resuelve por medio de la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales que requieren solución numérica. Sin embargo, nuestra hipótesis de trabajo es que también es posible estudiar el comportamiento estelar con otros modelos alternativos como procesos politrópicos y simulación con redes neuronales artificiales. Por ello, concluimos que:

- Hemos descrito las propiedades que caracterizan la habilidad de una superficie para emitir radiación térmica y las propiedades que caracterizan la forma en que una superficie responde a la irradiación. También se ha puesto de manifiesto la importancia del cuerpo negro en la descripción de la radiación térmica.
- La estabilidad de la combustión nuclear en una estrella se debe a mecanismos de retroalimentación basados en el calor específico negativo de la estrella. Este calor específico negativo puede ser obtenido por medio de un modelo mecánico simple asumiendo procesos politrópicos. Con este modelo, la mecánica y termodinámica de una estrella pueden ser entendidas cualitativamente sin recurrir a las soluciones de las ecuaciones diferenciales que modelan la evolución estelar. Sin embargo, hasta donde sabemos el modelo politrópico no permite hacer cálculos numéricos y por tanto la estimación es cualitativa y de entendimiento.
- Las Redes Neuronales Artificiales comprenden un método estadístico no lineal para simular problemas relacionados con la radiación solar. El creciente interés de la aplicación de ANN en las ciencias atmosféricas ha sido revisada por muchos autores. Muchos de los procesos atmosféricos no son totalmente comprendidos, además no pueden expresarse en términos deterministas. Por esta razón, en muchas ocasiones, estos procesos han sido tratados estadísticamente. El uso de ANN ha resultado ser un método efectivo en el estudio de la energía solar. Entre las desventajas de ANN se tiene que debido a que es un método basado en datos reales, se requiere una cantidad suficiente de éstos. Normalmente, en lo relacionado a la radiación, los datos que se pueden utilizar como entrada deben abarcar un período de algunos años. Sin embargo, actualmente ya se cuenta con datos tomados en gran parte del mundo.



## Apéndice A

# Modelos físicos para la transferencia de calor

Del estudio de la termostática sabemos que la energía se puede transferir mediante las interacciones de un sistema con su alrededor, estas interacciones se denominan *trabajo* y *calor*. Sin embargo, la termostática trata de los estados finales del proceso durante el cual ocurre una interacción y no proporciona información alguna con respecto a la naturaleza de esta interacción o la rapidez con la que ésta se produce. Para que ocurra la transferencia de calor, debe haber un gradiente de temperatura, es decir un desequilibrio termodinámico. Llamaremos *transferencia de calor* a la energía en tránsito en un sistema debido a una diferencia de temperaturas [30], [31]. Cuando existe un gradiente de temperatura en un medio estacionario, que puede ser un sólido o un fluido, se utiliza el término *conducción* para explicar la transferencia de calor que se producirá a través del medio. En cambio, el término *convección* se refiere a la transferencia de calor que ocurrirá entre una superficie y un fluido en movimiento cuando están a diferentes temperaturas. El tercer modo de transferencia de calor se denomina *radiación térmica*. Todas las superficies con temperatura finita emiten energía en forma de ondas electromagnéticas, en ausencia de un medio, existe una transferencia de calor por radiación entre dos superficies a diferentes temperaturas.

### A.1. Conducción

La conducción se considera como la transferencia de energía de las partículas más energéticas a las menos energéticas de un sistema debido a las interacciones de las mismas. El mecanismo físico de conducción se puede explicar considerando un gas en el que existe un gradiente de temperatura y suponiendo que no hay movimiento global. El gas puede ocupar el espacio entre dos superficies que se mantienen a diferentes temperaturas, como se muestra en la figura A.1. Se asocia la temperatura en cualquier punto con la energía de las moléculas del gas en la proximidad del punto. Esta energía está relacionada con el movimiento traslacional aleatorio, así como con los movimientos internos de rotación y vibración de las moléculas. En los buenos conductores eléctricos un gran número de electrones libres se mueven en la estructura de la red del material. De la misma

# APÉNDICE A. MODELOS FÍSICOS PARA LA TRANSFERENCIA DE CALOR

## A.2. CONVECCIÓN

---

manera que estos electrones pueden transportar carga eléctrica, también pueden llevar energía térmica de una región de alta temperatura a una de baja temperatura, como ocurre en los gases. Con frecuencia nos referimos a estos electrones como *gas de electrones*.

Las temperaturas más altas se asocian con las energías moleculares más altas y cuando las moléculas vecinas chocan, ocurre una transferencia de energía. En presencia de un gradiente de temperatura, la transferencia de energía por conducción ocurre en la dirección de la temperatura decreciente.

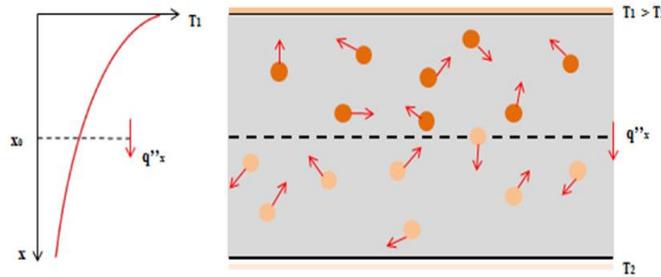


Figura A.1: Asociación de la transferencia de calor por conducción con la difusión de energía debida a la actividad molecular.

Los procesos de transferencia de calor se pueden cuantificar por medio de ecuaciones y modelos apropiados, que sirven para cuantificar la cantidad de energía que se transfiere por unidad de tiempo. Para la conducción, la ecuación se conoce como *Ley de Fourier*, que para una pared plana unidimensional con distribución de temperatura  $T(x)$ , se expresa como

$$q''_x = -k \frac{dT}{dx} \quad (\text{A.1})$$

El flujo de calor o transferencia de calor por unidad de área  $q''_x$  ( $W/m^2$ ) es la velocidad con que se transfiere el calor en la dirección de  $x$  por área unitaria perpendicular a la dirección de transferencia, y es proporcional al gradiente de temperatura  $dT/dx$  en esta dirección.

## A.2. Convección

La transferencia de calor por convección se compone de dos mecanismos. Además de la transferencia de energía debida al movimiento molecular aleatorio (difusión), la energía también se transfiere mediante el movimiento global, o macroscópico del fluido. El movimiento del fluido se asocia con el hecho de que en cualquier instante grandes números de moléculas se mueven de forma colectiva o como agregados. Tal movimiento en presencia de un gradiente de temperatura, contribuye a la transferencia de calor. Debido a que las moléculas del agregado mantienen su movimiento aleatorio, la transferencia total de calor se debe entonces a una superposición de transporte de energía por el movimiento

**APÉNDICE A. MODELOS FÍSICOS PARA LA TRANSFERENCIA DE CALOR**  
**A.2. CONVECCIÓN**

---

aleatorio de éstas y por el movimiento global del fluido.

Veamos el caso de transferencia de calor por convección que ocurre entre un fluido en movimiento y una superficie cuando éstos tienen diferentes temperaturas. Consideremos el flujo de fluido sobre la superficie calentada de la Figura A.2. Una consecuencia de la interacción fluido–superficie es la formación de una región en el fluido en la que la velocidad varía de cero en la superficie a un valor infinito  $u_\infty$  asociado con el flujo. Esta región de fluido se conoce como *capa límite térmica o de velocidad*. Si las temperaturas de la superficie y del fluido difieren, habrá una región del fluido a través de la cual la temperatura varía de  $T_s$  en  $y = 0$  a  $T_\infty$  en el flujo exterior. En cualquier caso si  $T_s > T_\infty$ , ocurrirá la transferencia de calor por convección entre la superficie y el flujo exterior.

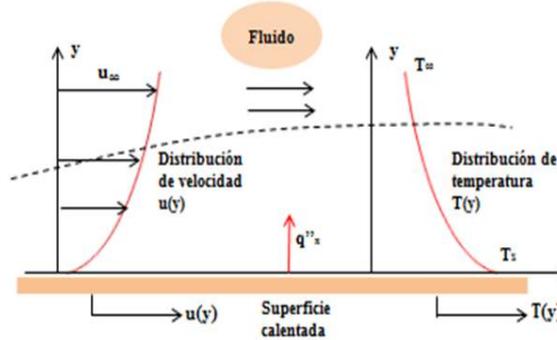


Figura A.2: Esquema de velocidades y temperaturas de la capa límite en la transferencia de calor por convección.

La transferencia de calor por convección se sustenta tanto en el movimiento molecular aleatorio (difusión) como en el movimiento volumétrico del fluido en la capa límite. La contribución debido a la difusión domina cerca de la superficie donde la velocidad del fluido es baja. En la interfaz entre la superficie y el fluido ( $y = 0$ ) la velocidad del fluido es cero y el calor se transfiere sólo por este mecanismo. La contribución debida al movimiento volumétrico del fluido se origina del hecho de que la capa límite crece a medida que el flujo avanza en la dirección  $x$  y entonces, el calor que se conduce en esta capa es arrastrado corriente abajo y finalmente se transmite al fluido fuera de la capa límite.

El modelo apropiado para el proceso de transferencia de calor por convección es de la forma

$$q'' = h(T_s - T_\infty) \quad (\text{A.2})$$

donde  $q''$  es el flujo de calor por convección y es proporcional a la diferencia de temperaturas entre la superficie y el fluido,  $T_s$  y  $T_\infty$ , respectivamente. Esta expresión se conoce como la *ley de enfriamiento de Newton* y la constante de proporcionalidad  $h$  ( $W/m^2K$ ) se

APÉNDICE A. MODELOS FÍSICOS PARA LA TRANSFERENCIA DE CALOR  
A.3. RADIACIÓN

---

llama *coeficiente de transferencia de calor por convección*. Este coeficiente depende de las condiciones en la capa límite, en las que influyen la geometría de la superficie, la naturaleza del movimiento del fluido y las propiedades térmicas del fluido y de transporte. Cualquier estudio de conducción se reduce al estudio de los medios por los que es posible determinar  $h$ , la transferencia de calor por convección con frecuencia se usa como condición de frontera en la solución de problemas de conducción.

### A.3. Radiación

En contraste con los mecanismos de conducción y convección, ya discutidos, en donde está involucrada la transferencia de calor a través de un medio material, el calor también se puede transferir a regiones donde existe el vacío. En este caso, el mecanismo es la radiación electromagnética que es propagada como resultado de una diferencia de temperaturas, esto es, la *radiación térmica*. La radiación térmica es la energía emitida por la materia que se encuentra a una temperatura finita. La radiación puede provenir de cualquier estado en que se encuentre la materia, sólidos, líquidos y gases. Sin importar la forma de la materia, la radiación se puede atribuir a cambios en las configuraciones electrónicas de los átomos o moléculas que la constituyen. La energía es transportada por ondas electromagnéticas (fotones).

Consideremos los procesos de transferencia de radiación para la Figura A.3 (a). La radiación que la superficie emite se origina a partir de la energía térmica de la materia limitada por la superficie, la velocidad a la que libera energía por unidad de área ( $W/m^2$ ) se denomina la *potencia emisiva superficial*  $E$ . Hay un límite superior para la potencia emisiva, que es establecida por la *ley de Stefan-Boltzmann*

$$E_b = \sigma T_s^4 \tag{A.3}$$

donde  $T_s$  es la temperatura absoluta ( $K$ ) de la superficie y  $\sigma$  es la constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} W/m^2 K^4$ ). Esta superficie se llama *radiador ideal* o *cuerpo negro*.

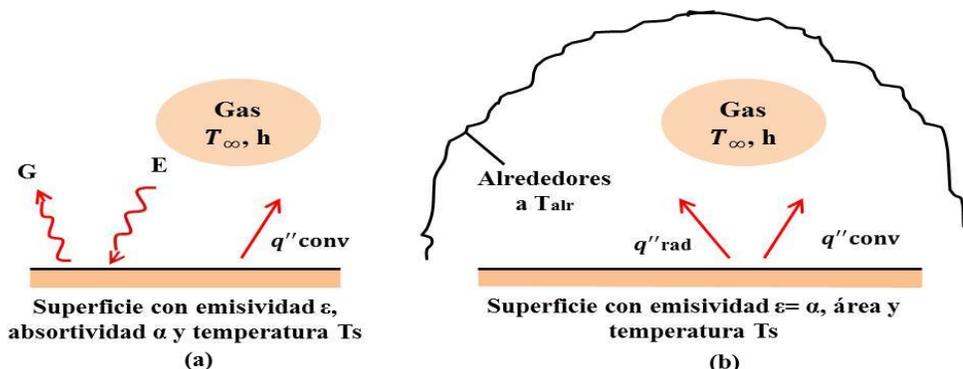


Figura A.3: Intercambio de radiación: (a) en la superficie, y (b) entre una superficie y sus alrededores.

**APÉNDICE A. MODELOS FÍSICOS PARA LA TRANSFERENCIA DE CALOR**  
**A.3. RADIACIÓN**

---

El flujo de calor emitido por una superficie real es menos que el de un cuerpo negro a la misma temperatura y está dado por

$$E = \varepsilon\sigma T_s^4 \quad (\text{A.4})$$

donde  $\varepsilon$  es una propiedad radiativa de la superficie llamada *emisividad*, y toma valores en el rango  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ , esta propiedad proporciona una medida de la eficiencia con que una superficie emite energía en relación con un cuerpo negro. La radiación también puede incidir sobre una superficie desde sus alrededores. La radiación se origina desde una fuente, por ejemplo, el Sol. Se designa la velocidad a la que la radiación incide sobre un área unitaria de la superficie como irradiación  $G$ , ver figura A.3 (b). Una parte de la radiación, o toda, puede ser absorbida por el material, y así incrementar la energía térmica del material. La velocidad a la que la energía radiante es absorbida por área superficial unitaria se evalúa a partir del conocimiento de una propiedad radiativa de la superficie llamada *absortividad*  $\alpha$ . Esto es,

$$G_{abs} = \alpha G \quad (\text{A.5})$$

donde  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Si  $\alpha < 1$  y la superficie es opaca, parte de la irradiación se refleja. Si la superficie es semitransparente, parte de la irradiación también se transmite. Sin embargo, si la radiación absorbida aumenta, entonces la radiación emitida disminuye, así, la energía térmica de la materia, la radiación transmitida y reflejada no tiene ningún efecto sobre esta energía.

Un caso que ocurre con frecuencia implica el intercambio de radiación entre una superficie pequeña a  $T_s$ , y una superficie isotérmica más grande que rodea por completo a la pequeña, ver figura A.3(b). Si se supone que la superficie es tal que  $\alpha = \varepsilon$  (caso para una superficie gris), la velocidad neta de transferencia de calor por radiación desde la superficie, expresada por unidad de área de la superficie, es

$$q''_{rad} = \varepsilon E_b(T_s) - \alpha G = \varepsilon\sigma(T_s^4 - T_{alr}^4) \quad (\text{A.6})$$

Esta expresión proporciona la diferencia entre la energía térmica que se libera debido a la emisión por radiación y la que se gana debido a la absorción de radiación. Para muchas aplicaciones es conveniente expresar el intercambio neto de calor por radiación en la forma

$$q_{rad} = h_{rad}A(T_s - T_{alr}) \quad (\text{A.7})$$

**APÉNDICE A. MODELOS FÍSICOS PARA LA TRANSFERENCIA DE CALOR**  
**A.4. RESISTENCIA TÉRMICA**

---

donde  $h_r$  es el *coeficiente de transferencia de calor por radiación*, así

$$h_r \equiv \varepsilon\sigma(T_s + T_{alr})(T_s^4 + T_{alr}^4) \quad (\text{A.8})$$

La superficie de la figura A.3(a) puede transferir simultáneamente calor por convección a un gas contiguo, para el caso de la figura A.3(b), la velocidad de transferencia de calor desde la superficie es entonces

$$q = q_{conv} + q_{rad} = hA(T_s - T_\infty) + \varepsilon\sigma A(T_s^4 - T_{alr}^4) \quad (\text{A.9})$$

#### A.4. Resistencia térmica

Existe una analogía entre la difusión de calor y la carga eléctrica. De la misma manera que se asocia una resistencia eléctrica con la conducción de electricidad, también se asocia una resistencia térmica con la conducción de calor. Se define la resistencia como la razón de un potencial de transmisión a la transferencia de calor correspondiente, la resistencia térmica para la conducción es

$$R_{t,cond} \equiv \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{q} = \frac{L}{kA} \quad (\text{A.10})$$

para el caso de una pared plana bidimensional.

Una resistencia térmica también se asocia con la transferencia de calor mediante convección a una superficie. De la *ley de enfriamiento de Newton*, la resistencia térmica para convección toma la forma

$$R_{t,conv} \equiv \frac{T_s - T_\infty}{q} = \frac{1}{hA} \quad (\text{A.11})$$

En particular en el intercambio de radiación entre una superficie y sus alrededores, la resistencia térmica para radiación se define como

$$R_{t,rad} \equiv \frac{T_s - T_{alr}}{q_{rad}} = \frac{1}{h_r A} \quad (\text{A.12})$$

Las representaciones de circuitos proporcionan una herramienta útil para conceptualizar y cuantificar problemas de transferencia de calor.

## Apéndice B

# Teoría de la transferencia de calor por Radiación

La transferencia de calor mediante radiación térmica no necesariamente requiere la presencia de materia. Es un proceso muy importante y, en el sentido físico es quizás el más interesante de los modos de transferencia de calor. En este apéndice consideraremos los medios por los que se genera la radiación térmica y la forma en que interactúa con la materia.

### B.1. Conceptos fundamentales

Asociamos la energía térmica a la intensidad con que la materia emite energía como resultado de su temperatura. El mecanismo de emisión se relaciona con la energía liberada como consecuencia de oscilaciones de los núcleos de los materiales o transiciones entre los estados energéticos de los electrones que constituyen la materia. Estas oscilaciones a su vez, son propiciadas por la energía interna, y por tanto la temperatura de la materia.

Todas las formas de materia emiten radiación. Para gases y sólidos semitransparentes, como vidrio y cristales de sal a temperaturas elevadas, la emisión es un *fenómeno volumétrico*, como se muestra en la figura B.1 (a), es decir, la radiación que emerge de un volumen finito de materia es el efecto integrado de la emisión local a través del volumen. Sin embargo en la mayoría de los sólidos y líquidos, la radiación es un *fenómeno superficial*, ver Figura B.1 (b), la radiación emitida desde las moléculas interiores es fuertemente absorbida por las moléculas contiguas, en consecuencia, la radiación que se emite desde un sólido o líquido se origina de moléculas que están a una distancia de aproximadamente  $1 \mu m$  de la superficie expuesta.

**APÉNDICE B. TEORÍA DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR POR RADIACIÓN**  
**B.1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES**

---

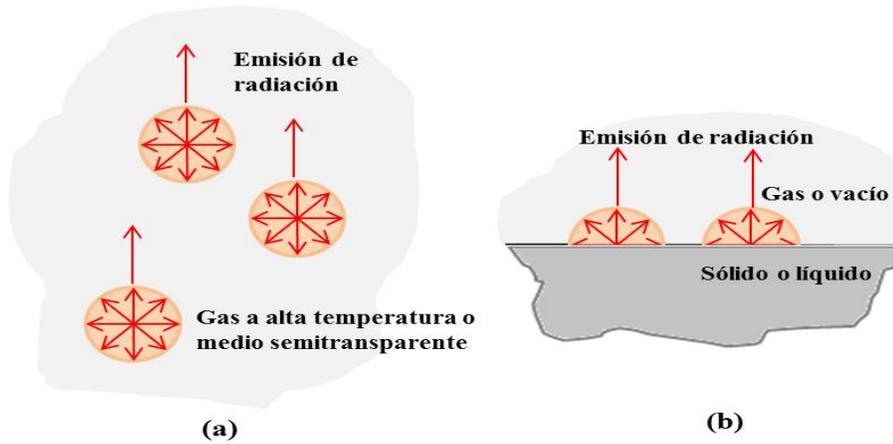


Figura B.1: Proceso de emisión; (a) Fenómeno volumétrico. (b) Fenómeno superficial.

Una teoría considera a la radiación como la propagación de una acumulación de partículas denominadas *fotones* o *cuantos*. Alternativamente, la radiación se puede ver como la propagación de ondas electromagnéticas. En cualquier caso deseamos atribuir a la radiación las propiedades características de las ondas, frecuencia  $\nu$  y longitud de onda  $\lambda$ , estas propiedades se relacionan mediante

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \tag{B.1}$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz en el medio. Para la propagación en el vacío,  $c_0 = 2,998 \times 10^8 \text{ m/s}$ .

La parte intermedia del espectro, que se extiende de aproximadamente de 0.1 a 100  $\mu\text{m}$  e incluye una parte de la radiación ultravioleta (UV), todo el visible y el infrarrojo (IR), se denomina *radiación térmica*.

La naturaleza espectral de la radiación térmica es una de las dos características que complican su descripción, la segunda característica se relaciona con su *direccionalidad*.

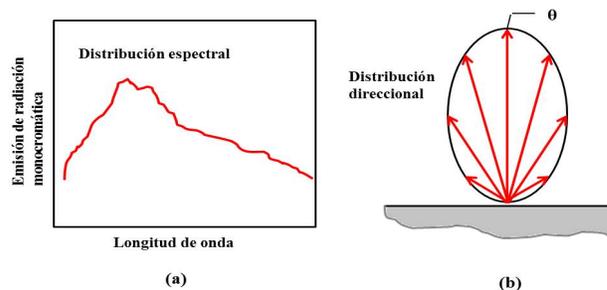


Figura B.2: Radiación emitida por una superficie: (a) Distribución espectral, (b) Distribución direccional.

**APÉNDICE B. TEORÍA DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR POR RADIACIÓN**  
**B.2. INTENSIDAD DE LA RADIACIÓN**

---

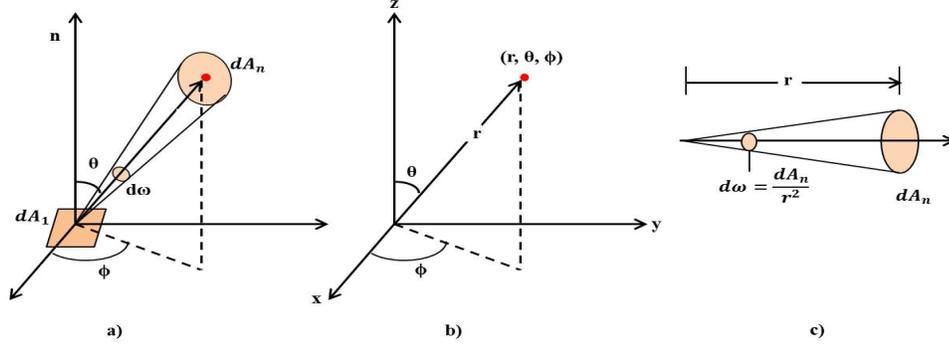


Figura B.3: Naturaleza direccional de la radiación. (a) Emisión de radiación desde un área diferencial  $dA_1$  en un ángulo sólido  $d\omega$  subtendido por  $dA_n$  en un punto sobre  $dA_1$ . (b) Sistema de coordenadas esféricas. (c) Definición de ángulo sólido.

## B.2. Intensidad de la radiación

Si consideramos en la figura 3.3 (a) la proporción en que la emisión de  $dA_1$  pasa a través de  $dA_n$ , podemos expresar esta cantidad en términos de la intensidad espectral  $I_{\lambda,e}$  de la radiación emitida. Se define  $I_{\lambda,e}$  como la razón a la que se emite energía radiante a la longitud de onda  $\lambda$  en la dirección  $(\theta, \phi)$ , por unidad de área de la superficie emisora normal a esta dirección, por unidad de ángulo sólido alrededor de esta dirección, y por intervalo de longitud de onda unitaria  $d\lambda$  alrededor de  $\lambda$ . Notemos que el área que se utiliza para definir la intensidad es la componente  $dA_1$  perpendicular a la dirección de la radiación. La intensidad espectral, que tiene unidades de  $W/m^2 \text{ sr } \mu\text{m}$  se define entonces como

$$I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \phi) \equiv \frac{dq}{dA_1 \cos \theta d\omega d\lambda} \quad (\text{B.2})$$

donde  $(dq/d\lambda) \equiv dq_\lambda$  es la razón a la que la radiación de longitud de onda  $\lambda$  sale de  $dA_1$  y pasa a través de  $dA_n$ . Entonces

$$dq_\lambda = I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \phi) dA_1 \cos \theta d\omega \quad (\text{B.3})$$

donde  $dq_\lambda$  tiene unidades de  $W/\mu\text{m}$ . Esta expresión permite calcular la rapidez a la que la radiación emitida por una superficie se propaga en la región de espacio definida por el ángulo sólido  $d\omega$  alrededor de la dirección  $(\theta, \phi)$ . El flujo de radiación espectral asociado con  $dA_1$  es

$$dq''_\lambda = I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \phi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \quad (\text{B.4})$$

### B.2.1. Emisión, Irradiación y Radiosidad

La emisión ocurre desde cualquier superficie que está a una temperatura finita. Introduciremos el concepto de *potencia emisiva* para cuantificar la cantidad de radiación

**APÉNDICE B. TEORÍA DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR POR  
RADIACIÓN  
B.2. INTENSIDAD DE LA RADIACIÓN**

---

emitida por área superficial unitaria. La *potencia espectral emisiva*  $E_\lambda$  ( $W/m^2 \mu m$ ) se define como la intensidad a la que se emite radiación de longitud de onda  $\lambda$  en todas direcciones desde una superficie por unidad de longitud de onda  $d\lambda$  alrededor de  $\lambda$  y por área superficial unitaria, se relaciona con la intensidad espectral de la radiación emitida mediante

$$E_\lambda(\lambda) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \phi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \quad (B.5)$$

La potencia emisiva total,  $E$  ( $W/m^2$ ), es la rapidez a la que se emite radiación por unidad de área en todas las longitudes de onda y en todas las direcciones, esto es

$$E = \int_0^\infty E_\lambda(\lambda) d\lambda \quad (B.6)$$

La intensidad de la radiación incidente se puede relacionar con un flujo radiativo, denominado *irradiación*, que abarca la radiación incidente desde todas las direcciones. La irradiación espectral  $G_\lambda$  ( $W/m^2 \mu m$ ) se define como la rapidez a la que la radiación de longitud de onda  $\lambda$  incide sobre una superficie, por unidad de área de la superficie y por intervalo de longitud de onda unitaria  $d\lambda$  alrededor de  $\lambda$ . Entonces

$$G_\lambda(\lambda) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \quad (B.7)$$

Si la irradiación total  $G_\lambda$  ( $W/m^2$ ) representa la razón a la que incide la radiación por unidad de área de todas direcciones y a todas las longitudes de onda, se tiene que

$$G = \int_0^\infty G_\lambda(\lambda) d\lambda \quad (B.8)$$

La *radiosidad* se refiere a toda la energía radiante que sale de una superficie. Esta radiación incluye la parte reflejada de la irradiación, así como la emisión directa. La radiosidad espectral  $J_\lambda$  ( $W/m^2 \mu m$ ) representa la rapidez a la que la radiación de longitud de onda  $\lambda$  sale de una unidad de área superficial, por intervalo de longitud de onda unitaria  $d\lambda$  alrededor de  $\lambda$ . Como describe la radiación que sale en todas las direcciones, se relaciona con la intensidad asociada con la emisión y la reflexión,  $I_{(\lambda,e+r)}(\lambda, \theta, \phi)$ , por la siguiente expresión

$$J_\lambda(\lambda) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_{\lambda,e+r}(\lambda, \theta, \phi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \quad (B.9)$$

**APÉNDICE B. TEORÍA DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR POR  
RADIACIÓN**  
**B.2. INTENSIDAD DE LA RADIACIÓN**

---

De aquí la radiosidad total  $J$  ( $W/m^2$ ) asociada con todo el espectro es

$$J = \int_0^{\infty} J_{\lambda}(\lambda) d\lambda \quad (\text{B.10})$$

El estudio de la transferencia de calor por radiación en este trabajo de tesis, nace del interés por conocer con detalle la teoría que gobierna este mecanismo y la forma de llevar estos resultados al estudio de la estrellas, como se ve, es un tema bastante complejo donde intervienen factores que en los otros modos de transferencia no participan. Considerar una estrella como un cuerpo negro, ayuda a simplificar su estudio.



## Apéndice C

# Redes Neuronales Artificiales: una visión general

### C.1. Neuronas biológicas

La unidad básica de procesamiento de información en la naturaleza es la neurona, en la figura C.1 se muestra un esquema simplificado de ésta.

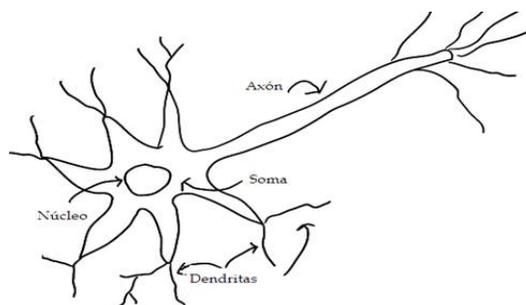


Figura C.1: Esquema de una neurona biológica individual.

Las neuronas biológicas están caracterizadas por una morfología tridimensional muy compleja, ver figura C.2. El resultado es una construcción capaz de procesar información para analizar y resolver problemas. Se compone de una enorme cantidad de células con un alto grado de conectividad que procesan la información en paralelo. En general, suele haber cerca de  $10^{15}$  conexiones (sinapsis) en el cerebro. Desde el punto de vista neurobiológico, una neurona se compone de cuatro elementos principales: soma, dendritas, axón y sinapsis.

APÉNDICE C. REDES NEURONALES ARTIFICIALES: UNA VISIÓN GENERAL  
C.2. NEURONAS ARTIFICIALES

---

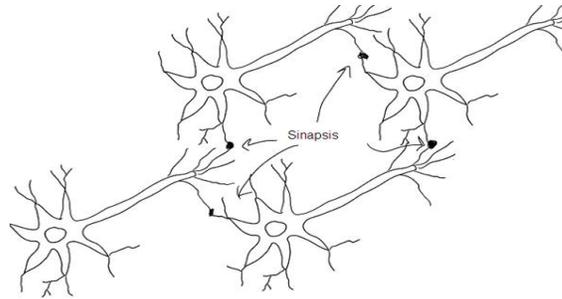


Figura C.2: Esquema simplificado de una red neuronal.

En una forma simplificada el funcionamiento de una red neuronal se describe de la siguiente forma: el soma recibe impulsos eléctricos cortos de neuronas vecinas, se reciben procesos de la información recibida y se producen señales de salida que son empujados a través del axón para su transformación por otras neuronas. La conexión se lleva a cabo en una terminal similar a un botón, llamado sinapsis. La fuerza (peso) de la sinapsis es una representación del conocimiento almacenado y por lo tanto la memoria para conocimientos previos. El funcionamiento sináptico asigna un peso relativo (importancia) a cada señal de entrada de acuerdo con la experiencia pasada (conocimiento) almacenada en la sinapsis. El soma agrega todas las señales recibidas, multiplicadas por el peso dado a cada sinapsis específica y si la agregación ponderada (weighted aggregation) de las entradas excede un cierto umbral entonces se reenvía al axón desde donde se guía a otras neuronas.

## C.2. Neuronas Artificiales

La base de cualquier sistema de computación neural es una representación artificial de la célula fundamental del cerebro: la neurona. Un modelo esquemático de una neurona artificial se ilustra en la figura C.3. Las neuronas artificiales (o elementos de procesamiento, PE) están diseñados para responder a las entradas de información aplicadas y comportarse de forma coherente. Se considera que la neurona artificial original es la TLU (Unidad Umbral Lógica), propuesta por W. McCulloch y W. Pitts [32]. Las entradas y salidas son sistemas binarios, mientras que la función de activación, que se explica más adelante en esta sección, es la función de umbral, teniendo valores enteros 0 y 1.

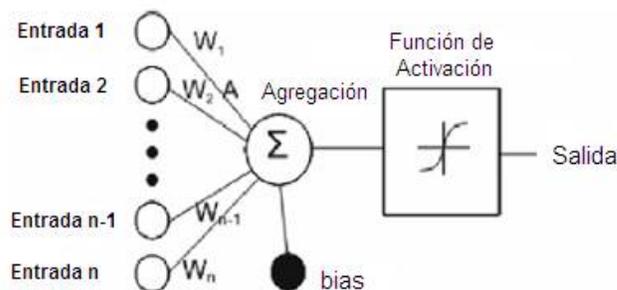


Figura C.3: Esquema simplificado de múltiples entradas en una neurona artificial (*Perceptrón*).

## APÉNDICE C. REDES NEURONALES ARTIFICIALES: UNA VISIÓN GENERAL

### C.3. REDES NEURONALES ARTIFICIALES

---

La aplicación artificial de una neurona biológica es en realidad, un algoritmo o un circuito electrónico cuya operación se puede resumir en los siguientes pasos:

1. Todos los valores de entrada se multiplican por un peso predeterminado y se suman.
2. Se agrega un bias (sesgo) al resultado.
3. La suma se introduce en la función de activación.
4. La señal fluye a la siguiente neurona.

Usando notación matemática, la salida de una neurona puede ser escrita como

$$Y = f \left( b + \sum_i w_i x_i \right) \quad (\text{C.1})$$

donde  $b$  es el sesgo de la neurona,  $w_i$  es el peso para la entrada específica,  $x_i$  es el valor real que se pasa a la neurona para la suma y  $f$  es la función de activación.

El bias de entrada en el algoritmo de la neurona es el valor de desplazamiento que ayuda a la señal a exceder el umbral de la función de activación. Hay muchas opciones para las funciones de transferencia de la neurona. En general, estas funciones deben ser continuas y diferenciables entre los límites superior e inferior de las dos siguientes razones: tienen que estar limitadas con el fin de proteger la red de valores extremos que pasan a través de los nodos, independientemente de la magnitud de las entradas y tienen que ser diferenciables con el fin de implementar la *Regla Delta* [33], un procedimiento esencial durante la fase de ajuste de peso (entrenamiento de la red).

### C.3. Redes neuronales artificiales

Una red neuronal artificial es una red formada por nodos (o neuronas) y conexiones, donde las neuronas individuales están conectadas a través de articulaciones sinápticas complejas caracterizadas por coeficientes de ponderación (agregación), cada neurona hace su contribución a las propiedades de cómputo de todo el sistema.

#### C.3.1. Funcionamiento de las redes neuronales

Una red neuronal es capaz de detectar relaciones complejas y no lineales entre variables, a partir de unidades sencillas como las neuronas, al disponer muchas de estas unidades en paralelo. Las variables se dividen en variables de entrada y de salida, relacionadas por algún tipo de correlación o dependencia (no necesariamente causa-efecto).

Una configuración habitual en aplicaciones de energía solar se compone de tres capas: entrada, capa oculta y de salida.

# APÉNDICE C. REDES NEURONALES ARTIFICIALES: UNA VISIÓN GENERAL

## C.3. REDES NEURONALES ARTIFICIALES

---

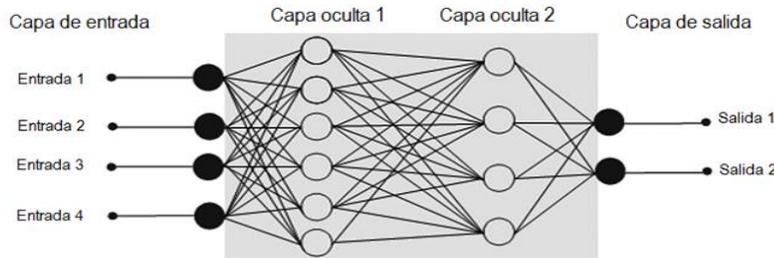


Figura C.4: Ejemplo de una red neuronal con 4 capas.

El funcionamiento de una neurona consiste en la transformación de los valores de las entradas a través de las conexiones, en una salida. La salida se obtiene a partir de una función de propagación, una función de activación y una función de transferencia.

- La función de propagación más común consiste en el sumatorio de todas las entradas multiplicadas por los pesos de las conexiones, más un valor de sesgo o bias.
- La función de activación, en caso de que exista, activa o desactiva la salida de esta neurona.
- La función de transferencia se aplica al resultado de la función de propagación y normalmente consiste en una función de salida acotada como la sigmoidea (**logsig**)  $[0,1]$ , o la tangente hiperbólica (**tansig**)  $[-1,1]$ . Otras funciones de transferencia pueden ser una función lineal (**purelin**)  $[-\infty, +\infty]$  o una función de discriminación (**hardlim**)  $[0,1]$ .

### C.3.2. Tipos de redes neuronales

Los criterios más importantes para clasificar las redes neuronales son:

- Según el tipo de conexiones:
  - Redes de propagación hacia adelante (*feed-forward*), donde las conexiones van en un solo sentido desde la capa de entrada hacia la capa de salida.
  - Redes recurrentes, donde las conexiones pueden realizar ciclos.
- Según el tipo de aprendizaje:
  - Aprendizaje supervisado. Los datos (o entradas) tienen una respuesta conocida (o salida), con la cual se ajusta o entrena la red neuronal.
  - Aprendizaje no supervisado o auto-organizado. Los datos son solamente entradas. Son redes empleadas fundamentales para clasificación reconocimiento de patrones.

Para nuestros propósitos de simulación para radiación solar, nos enfocaremos en la aplicación de redes neuronales de propagación hacia adelante, con aprendizaje supervisado.

## APÉNDICE C. REDES NEURONALES ARTIFICIALES: UNA VISIÓN GENERAL

### C.4. SIMULACIÓN EN MATLAB PARA CREAR ANN

---

#### C.3.3. Entrenamiento de la red neuronal

Dada una estructura y tamaño de la red neuronal, se procede al entrenamiento de la red. El entrenamiento o aprendizaje, cuyo objetivo es que la red neuronal sea capaz de reproducir el comportamiento subyacente en los datos aportados, consiste básicamente en la minimización de una función de coste o error, lo que equivale a que la salida de la red, se aproxima a la salida en los datos. La función de coste más común es la de promedio de errores al cuadrado.

Algunos ejemplos de los métodos de ajuste son los de tipo gradiente o los algoritmos genéticos. Ambos métodos son iterativos, que se repiten hasta cumplir alguno de los diferentes criterios de parada. Algunos ejemplos de los criterios de parada son el número de iteraciones, la obtención de un error mínimo, o un tiempo de ejecución.

#### C.3.4. Estandarización de los datos

El proceso de entrenamiento de la red neuronal se realiza de manera mucho más rápida si se estandarizan las entradas y salidas de la red, de modo que todas ellas se expresan en rangos similares (a modo de cambio de escala).

Se pueden estandarizar forzando los datos a que se encuentren en un rango determinado, como por ejemplo, escalando todos los datos de una determinada variable al rango  $[-1, 1]$  (variable uniformemente distribuida), o también de modo similar haciendo que los datos se encuentren cerrados en 0 con una desviación típica de 1 (como una variable de distribución normal).

#### C.3.5. Simulación

Una vez entrenada una red neuronal, se puede comprobar el funcionamiento de la misma, aportando datos de entrada y obteniendo datos de salida. Este proceso se llama *simulación*, ya que los datos de entrada pueden ser datos empleados en el entrenamiento, o datos nuevos de los cuales se desea tener una predicción. Un primer paso consiste en la comparación de los datos de salida (o *targets*) empleados en el entrenamiento, con los datos simulados por la red neuronal. Esta comparación se llama *validación cruzada* y permite representar gráficamente la bondad del ajuste de la red neuronal.

### C.4. Simulación en Matlab para crear ANN

En la Figura C.5 se presenta la propuesta de programa en Matlab para crear una red neuronal capaz de reproducir los datos reportados para la radiación solar en México.

# APÉNDICE C. REDES NEURONALES ARTIFICIALES: UNA VISIÓN GENERAL

## C.4. SIMULACIÓN EN MATLAB PARA CREAR ANN

```
%Crear una red neuronal artificial para calcular la radiación difusa diaria
%-----
%Calculos diarios
%-----
%Inicialización del ambiente de trabajo en MATLAB
clear;

%Importar datos al espacio de trabajo de Matlab
load ('datos.mat') ;

%Graficar los datos disponibles para el mes
figure(1);
Hold;
plot(Difusa, '-o');
plot(Global, 'x');
title ('Datos para la radiación solar en México');
xlabel('Dias (Enero 2006)');
ylabel('KJm(-2)/día');
legend ('Difusa','Global');

Continue=input ('Output 1 : Visualize input data \nSee figure "1" - Hit Enter to continue \n');

%Pre-procesamiento de los datos (normalización)
[xn,xmin,xmax,yn,ymin,ymax]=premnmx(Global,Difusa);

%Creación de la red neuronal
net=newff([-1 1],[10 1],('tansig' 'purelin'));

%Inicializar la red neuronal
net=init(net);

%Simular la red neuronal sin entrenamiento para mostrar la respuesta inicial a los datos de entrada
Simulation=sim(net,xn');

hold off
figure(2);
plot(xn,yn,'o',xn,Simulation,'+');
title ('Respuesta de la red sin entrenamiento');
legend('Difusa medida','Difusa simulada');

Continue=input ('Output 2 : Untrained Network Response \nSee figure "2" - Hit Enter to continue \n');

%Parámetros de entrenamiento
net.trainParam.epochs=200;
net.trainParam.goal=.0018;

%Entrenamiento de la red neuronal
net=train(net,xn',yn');
anorm=sim(net,xn');

Continue=input ('Output 3 : The network is trained \nSee figure "Training with TRAINLM" - Hit Enter to continue \n');

%Post-procesamiento de los datos
a=postmnmx(anorm,ymin,ymax);

%Graficar la respuesta de la red
figure (4);
plot (Global,Difusa,'d',Global,a,'p');
title ('Respuesta de la red');
legend('Datos de entrada','Salida de la red');
Continue=input ('Output 4 : Network Response \nSee figure "4" - Hit Enter to continue \n');
```

Figura C.5: Código MATLAB para estimar la radiación solar difusa por medio de una red neuronal artificial.

El programa funciona de la siguiente manera:

- La función `premnmx` pre-procesa (normaliza) los datos de modo que los valores de entrada y destino caigan en el intervalo  $[-1,1]$ .
- Usando la función `newff` hemos creado una nueva red llamada `net`.

## APÉNDICE C. REDES NEURONALES ARTIFICIALES: UNA VISIÓN GENERAL

### C.4. SIMULACIÓN EN MATLAB PARA CREAR ANN

---

- Con la función `init` se inicializan pesos y umbrales aleatorios, las variables de entrada/salida se han convertido a filas.
- La función `sim` se utiliza para simular la red y calcular las salidas.
- Como parámetros de entrenamiento, tomamos el número de iteraciones máxima (`epochs`) y el error mínimo al que se quiere llegar (`goal`), estos parámetros funcionan como instrucciones de parada para detener el funcionamiento de la red.
- La red se entrena en modo Batch mediante la función `train`, esto significa que los datos de entrenamiento son celdas. La función `anorm` es la salida normalizada del conjunto de entrenamiento.
- La salida de la simulación es des-normalizada usando la función `postmnmx`.

Las Redes Neuronales Artificiales comprenden un método estadístico no lineal que desde hace dos décadas se ha popularizado por su eficacia para reproducir valores experimentales ya que muestran un método confiable de ajuste de datos. El creciente interés de la aplicación de ANN ha sido revisada por muchos autores. Por ejemplo, Gardner y Dorling discuten su uso en las ciencias de la atmósfera [34], Hsieh y Tang discuten aplicaciones en meteorología y oceanografía [35].

Entre las desventajas de ANN se tiene que debido a que es un método basado en datos reales, se requiere una cantidad suficiente de éstos. Normalmente, en lo relacionado a la radiación, los datos que se pueden utilizar como entrada deben abarcar un periodo de algunos años. La experimentación con ANN sobre bases de datos pequeñas puede dar lugar a resultados erróneos. No existe una receta definida en cuanto al tamaño de los datos necesario, pero la efectividad de los modelos se ha mejorado a medida que se dispone de más datos.

El uso de ANN ha resultado ser un método efectivo en el estudio de la energía solar.



# Bibliografía

- [1] L. F. Rodríguez, S. Torres, *Galileo su tiempo su obra y su legado*, El Colegio Nacional, México, 2009.
- [2] H. Karttunen, *Fundamental Astronomy*, Springer, New York, 2007.
- [3] T. Koupelis, K. Kuhn, *In Quest of the Universe*, Jones and Bartlett Publishers, United States, 2007.
- [4] M. Alonso, E. Finn, *Física, Volumen II: Campos y Ondas*, Fondo Educativo Interamericano, Estados Unidos, 1970.
- [5] E. Hecht, *Fundamentos de física*, Thomson Learning, México, 2001.
- [6] D. Prialnik, *An Introduction to the theory of stellar structure and evolution*, Cambridge University Press, New York, 2007.
- [7] R. Eisberg, R. Resnick, *Física Cuántica*, Editorial Limusa, México 1978.
- [8] M. S. Longair, *La evolución de nuestro universo*, Cambridge University Press, United Kingdom, 1998.
- [9] S. Arthur, *Parámetros Observables (Compilación)*, UNAM, México, 2012.
- [10] S. Arthur, *Astrofísica Estelar (Compilación)*, UNAM, México 2012.
- [11] L. Oster, *Astronomía Moderna*, Editorial Reverté, Barcelona, 1978.
- [12] R. Tayler, *The Stars: Their structure and evolution*, Wykeham Publications, London, 1970.
- [13] E. Robert, G. Anglada, *Introducción a la física del medio interestelar*, Universidad de Barcelona, España, 2007.
- [14] J. Freeman, *Tormentas en el espacio*, Cambridge University Press, Madrid, 2001.
- [15] S. DeGroot, P. Mazur, *Non-equilibrium thermodynamics*, Dover Publications, United States, 2007.
- [16] A. Kikoin, I. Kikoin, *Física Molecular*, Editorial Mir, Moscú, 1979.
- [17] M. Peimbert, *Evolución de la composición química del universo*, El Colegio Nacional, México, 1993.

- [18] H. B. Callen, *Thermodynamics*, Jhon Wiley and Sons, New York, 1960.
- [19] H. U. Fuchs, *The dynamics of Heat*, Springer, New York, 1996.
- [20] F. Herrmann, H. Hauptmann, *Understanding the stability of stars by mean of thought experments with a model star*, Am. J. Phys., **65**, 292-295, (1997).
- [21] F. Reif, *Statistical Physics: Berkeley Physics Course*, McGraw-Hill, New York, 1965.
- [22] S. Chandrasekhar, *An Introduction To The Study of Stellar Structure*, University of Chicago Press, Chicago, 1938.
- [23] V. Badescu, *Modeling Solar Radiation at the Earth is Surface*, Springer-Verlag, Berlín, 2008.
- [24] S. Haykin, *Neural Networks: A comprehensive foundation*, MacMillan College Publishing, New York, 1994.
- [25] S. Michaelides, P. Evripidou, G. Kallos, *Monitoring and predicting Saharan desert dust transport in the eastern Mediterranean*, Weather, **64**, 359-365, (1999).
- [26] B. Hudson, M. Hagan, H. Demuth, *MATLAB Neural Network Toolbox, Users Guide*, MathWorks, Inc., United States, 2013.
- [27] C. Jacovides, F. Tymvios, G. Papaioannou, D. Assimakopoulos, C. Theofilou, *Ratio of PAR to broadband solar radiation measured in Cyprus*, Agr. Forest Meteorol, **121**, 135-140, (2004).
- [28] C. Jacovides, F. Tymvios, D. Assimakopoulos, N. Kaltsounides, *The dependence of global and diffuse PAR radiation components on sky conditions at Athens*, Agr. Forest Meteorol, **143**, 277-287, (2007).
- [29] V. Estrada, *Modelos sencillos para calcular el componente difuso de la irradiación global diaria promedio mensual*, Memorias del XV Congreso Nacional de la Sociedad Nacional de Energía Solar, Zacatecas, México, Octubre, 147-149, (1991).
- [30] F. Incropera, D. DeWitt, *Fundamentos de transferencia de calor*, Prentice Hall, México, 1999.
- [31] J. P. Holman, *Transferencia de calor*, McGraw-Hill, México, 2a. edición, 1986.
- [32] W. McCulloch, W. Pitts, *A Logical Calculus of the Ideas Imminent in Nervous Activity*, B. Math. Biophys, **5**, 115-133, (1943).
- [33] J. McClelland, D. Rumelhart, *Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructure of Cognition*, Foundations 1 Cambridge, MA: MIT Press, (1986).
- [34] M.W. Gardner, S. R. Dorling, *Artificial neural networks (the multilayer perceptron): A review of applications in the atmospheric sciences*, Atmos. Environ, **32**, 2627-2636, (1998).
- [35] M. W. Hsieh, B. Tang, *Applying neural network models to prediction and data analysis in meteorology and oceanography*, B. Am. Meteorol. Soc **79**, 1855-1870, (1998).