Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Fisico-Matemáticas

# Caracterización de parámetros de dispersión lineal en muestras transparentes homogéneas por zonas con interferometría diferencial y barrido en $\lambda$

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**Licenciado en Física Aplicada**

por

Aaron Castillo Cardoso

asesorado por

Dr. Gustavo Rodríguez Zurita

Puebla Pue.
agosto 2014

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Fisico-Matemáticas

# Caracterización de parámetros de dispersión lineal en muestras transparentes homogéneas por zonas con interferometría diferencial y barrido en $\lambda$

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**Licenciado en Física Aplicada**

por

Aaron Castillo Cardoso

asesorado por

Dr. Gustavo Rodríguez Zurita

Puebla Pue.
agosto 2014

**Título:** Caracterización de parámetros de dispersión lineal en muestras transparentes homogéneas por zonas con interferometría diferencial y barrido en $\lambda$
**Estudiante:** Aaron Castillo Cardoso

COMITÉ

| | |
|---|---|
| Dra. Rosario Pastrana Sánchez<br>Presidente | Dr. Carlos Robledo Sánchez<br>Secretario |
| Dra. Maribel Méndez Otero<br>Vocal | Dr. Cruz Meneses Fabián<br>Vocal |
| Vocal | Dr. Gustavo Rodríguez Zurita<br>Asesor |

# Índice general


1. **Introducción** 1
   1.1. Objetivo general. . . . . 2
   1.2. Objetivo específicos. . . . . 2

2. **Dispersión lineal del índice de refracción** 4
   2.1. Ecuaciones de Maxwell. . . . . 4
   2.2. Ecuaciones de Maxwell en materiales lineales. . . . . 5
   2.3. Ecuaciones de Onda en materiales lineales. . . . . 8
   2.4. Índice de refracción . . . . . 9
   2.5. Modelo resonante para el índice de refracción . . . . . 10

3. **Caracterización de parámetros de dispersión lineal** 12
   3.1. Coeficientes de Cauchy . . . . . 12
   3.2. Como calcular $\lambda_c$ . . . . . 14
   3.3. Interferometría y dispersión . . . . . 15
   3.4. Análisis de un caso, con frontera arbitraria . . . . . 17
   3.5. Simulación de ajuste no lineal . . . . . 18

4. **Caracterización de parámetros dispersivos con interferencia de desplazamiento lateral** 20
   4.1. Comparación simulada entre Mach-Zender y desplazamiento lateral . . . . . 21
   4.2. Reconstrucción de fase y ajustes de A y B . . . . . 22
   4.3. Discusión de los casos . . . . . 32

5. **Relación con parámetros dispersivos de Abbe** 34
   5.1. Parámetros de Abbe . . . . . 34
   5.2. Relación entre $V_d$ con A y B . . . . . 35

6. **Conclusiones** 39

A. **Tecnica interferometrica de corrimiento de fase** 42
   A.1. Interferencia con dos disturbios de diferente frecuencia. . . . . 42

B. **Listado de Programas** **47**
B.1. Programa para obtener el ajuste no lineal. . . . . 48
B.2. Programa para casos. . . . . 53

# Capítulo 1

## Introducción

En este trabajo se propone un método para el estudio de dispersiones lineales normales considerando muestras homogéneas por zonas, utilizando interferometría de corrimiento de fase (PSI).
Los caminos ópticos se expresan como producto de índices de refracción y distancias. Por ello, la fase puede expresarse como función de $\lambda$ y de posición (variable separable). Conociendo la fase como función de la posición para diferentes valores de $\lambda$ puede conocerse tal función.
Este tipo de muestras, al ser de diferentes materiales, pueden tener distintos índices de refracción teniendo así diferente relación de dispersión. Para conocer estas relaciones de dispersión se requiere estudiar diversas secciones de la muestra bajo la iluminación de distintas longitudes de onda en el rango visible (barrido en $\lambda$).
El estudio teórico de la dispersión se basa en la teoría de Maxwell que estudia las respuesta eléctricas y magnéticas de la materia bajo campos aplicados. Así es necesario considerar la naturaleza atómica de la materia para analizar la dispersión. Un modelo teórico que explica la dependencia del índice de refracción respecto a la frecuencia (por tanto de la longitud de onda) es un modelo resonante. En este estudio se consideran materiales transparentes dentro del rango visible. De acuerdo al modelo considerado, la región de transparencia no está cerca de la frecuencia de resonancia, que se deberá hallar en frecuencias más altas que las visibles: en la región ultravioleta. Cerca de resonancia se halla la llamada dispersión anómala. Entonces, al considerar materiales transparentes en el visible, no se describirán efectos de absorción ni de dispersión anómala. Tampoco se con-

siderará efectos no lineales, inducidos en los materiales por campos con irradiancias altas.
En este trabajo se propone una nueva manera de medir dispersiones normales con técnicas interferométricas seleccionando varias longitudes de onda para la misma muestra. De modo distinto a trabajos anteriores [1] se propone la inspección de métodos interferométricos diferenciales.
En trabajos previos [1] ya se han propuesto interferómetros para determinar parámetros de dispersión. Se ha identificado que debe tenerse especial cuidado con el procedimiento de desenvoltura de fase ya que no debe introducirse constantes arbitrarias. Por ello se ha recomendado trabajar dentro de un intervalo de fase no mayor que $2\pi$ y conteniendo a la fase cero (orden cero). Es la llamada "región de desenvoltura natural"[1]. Pero si la recuperación de la interfaz no fuera prioritaria, un interferómetro que obtuviera la derivada del frente de onda podría garantizar encontrar esa región. A tales sistemas les llamaremos interferómetros diferenciales [2,3]. En este trabajo se analizan sus propiedades en relación a la dispersión normal. Un ejemplo de un interferómetro diferencial es el de desplazamiento lateral [2,3].
El análisis presentado se basa en la simulación de un interferómetro diferencial.

## 1.1. Objetivo general.

Establecer las condiciones de visibilidad propias de un método interferométrico diferencial capaz de medir dispersiones lineales normales por punto en muestras poseyendo índices de refracción homogéneos por zonas.

## 1.2. Objetivo específicos.

- ❖ Revisar, estudiar y asimilar las bases que hay detrás de la teoría de dispersión e interferometría de corrimiento de fase.
- ❖ Proponer un procedimiento de medición de dispersiones lineales de acuerdo al método propuesto.
- ❖ Simular el procedimiento para situaciones típicas utilizando Mathcad,

definiendo primero las muestras que consta de distintos objetos unidimensionales.

- ❖ Aplicar interferometría de corrimiento de fase para la recuperación de las distribuciones de fases definidas para los objetos definidos anteriormente.
- ❖ Análisis de los resultados y conclusiones generales.

Este trabajo de tesis queda organizado de la siguiente manera: el capítulo 2 contiene teoría base para entender la teoría de dispersión en medios materiales, se explica de manera breve el concepto de índice de refracción y se obtiene una expresión para este a partir del modelo resonante. El capítulo 3 describe la forma de una ecuación de Cauchy y el significado de los coeficientes, ademas, se explica la relación existente entre dispersión y el método interferométrico diferencial y se hace el análisis de un caso con el método que se propone. El capítulo 4 explica en breve las ventajas de un interferómetro de desplazamiento lateral y se hace la comparación con uno de desplazamiento lateral haciendo la reconstrucción de fase para un mismo caso y obteniendo los ajustes para los coeficientes A y B de Cauchy se hace el análisis de casos en los que se hacen variaciones en el polinomio propuesto como interfaz entre dos medios. El capítulo 5 relaciona los parámetros de Abbe con los coeficientes de Cauchy encontrados mediante el método que hemos propuesto. El capítulo 6 son la conclusiones generales del trabajo de tesis. En los apéndices se explican el método de corrimiento de fase así como se detallan los programas utilizados para obtener los resultados.

# Capítulo 2

## Dispersión lineal del índice de refracción

### 2.1. Ecuaciones de Maxwell.

Desde finales del siglo XVIII diversos científicos formularon leyes cuantitativas que relacionaban las interacciones entre los campos eléctricos, los campos magnéticos y las corrientes sobre conductores. Entre estas leyes están la ley de Ampere, la ley de Faraday o la ley de Lenz, pero fue James Clerk Maxwell quien lograría unificar todas estas leyes en una descripción coherente del campo electromagnético.
Maxwell resumió las propiedades conocidas de los fenómenos eléctricos y magnéticos en cuatro ecuaciones. La primera relaciona el campo eléctrico $\vec{E}$ que atraviesa una superficie $A$ (por ejemplo una esfera) con la carga eléctrica Q contenida dentro de la superficie. La segunda ecuación relaciona el campo magnético $\vec{B}$ que atraviesa una superficie $A$ con la carga magnética contenida en la superficie, y afirma que dicha carga es nula, es decir, que no existen cargas magnéticas. La tercera ecuación describe dos formas de inducir un campo magnético $\vec{B}$ en una espira circular $L$. Una de ellas implica el movimiento de cargas en una corriente eléctrica $i$, y la otra implica un flujo eléctrico variable. La cuarta ecuación describe la forma de inducir un campo eléctrico $\vec{E}$ mediante un flujo magnético variable. La variación de un flujo depende de la variación del campo ($\vec{E}$ o $\vec{B}$) y de la superficie $A$ atravesada por el mismo.
Estas ecuaciones pueden representarse tanto de forma integral como de forma diferencial de la siguiente manera:

| | Forma Integral | Forma Diferencial |
|---|---|---|
| Ley de Gauss | $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$ | $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$ |
| Ley de Gauss Magnética | $\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$ | $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ |
| Ley de Ampere | $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ | $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 i_{enc} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ |
| Ley de Faraday | $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ | $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ |

Estas ecuaciones se conocen como las Ecuaciones de Maxwell en el vació.

## 2.2. Ecuaciones de Maxwell en materiales lineales.

Las ecuaciones de Maxwell escritas de la forma como se presentan en la tabla de la sección anterior son correctas y completas. Sin embargo cuando se trabaja con medios que están sujetos a polarización eléctrica y magnética deberían de escribirse de una manera mas conveniente. Dentro de un material polarizado habrá acumulaciones de cargas ligadas a corrientes sobre las cuales no se tendrá control directo, por lo tanto reformularemos las ecuaciones de Maxwell de tal manera que solo hagan referencia explícita solo a las fuentes que se pueden controlar es decir a cargas y corrientes "libres".
Sabemos que la polarización eléctrica produce una densidad de carga ligada:

$$\rho_{lig} = -\nabla \cdot \vec{P}, \tag{2.1}$$

igualmente la polarización magnética o magnetización produce una corriente ligada

$$\vec{J_b} = \nabla \times \vec{M}. \tag{2.2}$$

por lo que hay una nueva característica que se debe tomar en cuenta en el caso no estático que es: cualquier cambio en la polarización eléctrica produce un flujo de carga (ligada $\vec{P_p}$) el cuál debe ser incluido en la corriente total. Por lo tanto la densidad de corriente es

$$\vec{J}_p = \frac{\partial P}{\partial t}. \tag{2.3}$$

esta corriente no tiene nada que ver con la corriente $\vec{J}_{lig}$. Esta última es asociada con la magnetización del material e involucra el spin y el orbital de movimiento del electrón. $\vec{J}_p$ es el resultado del movimiento lineal de cargas cuando la polarización eléctrica cambia. Si $\vec{P}$ apunta hacia la derecha y tiene un incremento, entonces cada carga con signo positivo se mueve un poco a la derecha y cada carga con signo negativo se mueve hacia la izquierda; el efecto acumulativo de estos movimientos es la corriente de polarización $\vec{J}_p$.
Entonces la densidad de carga esta dada por la suma de dos términos

$$\rho = \rho_{lib} + \rho_{lig} = \rho_{lib} - \nabla \cdot \vec{P}, \tag{2.4}$$

y la densidad de corriente esta dada por la suma de tres términos

$$\vec{J} = \vec{J}_{lib} + \vec{J}_{lig} + \vec{J}_p = \vec{J}_{lib} + \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial P}{\partial t}, \tag{2.5}$$

por lo que ley de Gauss puede ser escrita como

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho_{lib} - \nabla \cdot \vec{P}), \tag{2.6}$$

o

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{lib}, \tag{2.7}$$

donde $\vec{D}$ esta dado por

$$\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \tag{2.8}$$

mientras que la ley de Ampere puede escribirse como

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J}_{lib} + \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial P}{\partial t} \right) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{2.9}$$

o

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{lib} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{2.10}$$

donde $\vec{H}$ es

$$\vec{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}. \tag{2.11}$$

La ley de Faraday y $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ no son afectadas por esta separación de cargas y corrientes en partes libres y ligadas ya que estas expresiones no involucran a $\rho$ o $\vec{J}$.
Entonces las ecuaciones de Maxwell se escriben como

$$(i) \nabla \cdot \vec{D} = \rho_{lib} \qquad (iii) \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$(ii) \nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad (iv) \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{lib} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

estas ecuaciones no son una generalización de la ecuaciones Maxwell ya que simplemente muestran una división conveniente de la carga y la corriente en términos libres y ligados y tienen una desventaja de notación ya que contienen tanto a $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$ y $\vec{H}$ que deben ser reemplazados por las relaciones constitutivas apropiadas es decir dando $\vec{D}$ y $\vec{H}$ en términos de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ y estos dependen de la naturaleza del material, para un medio lineal (es decir en un medio donde las relaciones entre las componentes del vector desplazamiento y del vector campo son relaciones lineales) se tiene

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e, \qquad \vec{M} = \chi_m \vec{H} \tag{2.12}$$

entonces

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \qquad \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} \tag{2.13}$$

donde $\epsilon \equiv \epsilon_0 (1 + \chi_e)$ y $\mu \equiv \mu_0 (1 + \chi_m)$. Entonces la ecuaciones de Maxwell están dadas por:

$$\begin{array}{ll} (i)\nabla \cdot \vec{E} = 0 & (iii)\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ (ii)\nabla \cdot \vec{B} = 0 & (iv)\nabla \times \vec{B} = \mu\epsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array}$$

cuando $\rho = 0$ y $\vec{J} = 0$

## 2.3. Ecuaciones de Onda en materiales lineales.

Dadas las ecuaciones de Maxwell en medios materiales lineales podemos obtener la ecuación de onda para medios materiales lineales, observamos que este conjunto constituye un conjunto acoplado de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden para $\vec{E}$ y $\vec{B}$. El cual podemos desacoplar si aplicamos el rotacional a $(iii)$ y $(iv)$:

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = \nabla \left(\nabla \cdot \vec{E}\right) - \nabla^2 \vec{E} = \nabla \times \left(-\frac{\partial B}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{B}\right) = -\mu\epsilon\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{B}\right) = \nabla \left(\nabla \cdot \vec{B}\right) - \nabla^2 \vec{B} = \nabla \times \left(\mu\epsilon\frac{\partial E}{\partial t}\right) = \mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{B}\right) = -\mu\epsilon\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.$$

pero $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ y $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, se tiene que:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\epsilon\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{2.14}$$

y

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu\epsilon\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \tag{2.15}$$

entonces ahora tenemos ecuaciones separadas para $\vec{E}$ y $\vec{B}$, pero son de segundo orden. pero nos representan ondas que se propagan a través del medio lineal con velocidad

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n} \tag{2.16}$$

donde

$$n \equiv \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} \tag{2.17}$$

es el índice de refracción del material, para muchos materiales el valor de $\mu$ es muy cercano al valor de $\mu_0$ entonces

$$n \cong \sqrt{\epsilon_r} \tag{2.18}$$

donde $\epsilon_r$ es una constante dieléctrica y casi siempre es mayor que 1, por lo tanto la luz viaja mas despacio en el medio.

## 2.4. Índice de refracción

La interacción macroscópica de la luz con los medios materiales puede caracterizarse como un cociente de velocidades denominado *índice de refracción* y simbolizado comúnmente como $n$. Si $c$ es la velocidad de la luz en el vacío, considerado como el medio de referencia y $v$ es la velocidad de la luz en un medio material para cierta longitud de onda $\lambda$, entonces,

$$n = \frac{c}{v} \tag{2.19}$$

siendo $v < c$. En el vacío $c = v$ por lo tanto $n = 1$; en cualquier otro medio material $n > 1$. Cabe aclarar, que la ecuación es válida únicamente si el medio material bajo consideración es homogéneo e isótropo; en materiales que no cumplen estas condiciones el índice de refracción depende de otras variables, como lo son la posición en el espacio $(x, y, z)$, el tiempo $t$ o la temperatura $T$, de modo que estas dependencias pueden representarse como una función de varias variables como:

$$n = n(x, y, z, t, T) \tag{2.20}$$

## 2.5. Modelo resonante para el índice de refracción

Calculemos el índice de refracción como resultado de la interacción de la luz con un material, para esto imaginemos que el material esta conformado de átomos los cuales solo cuentan con un núcleo muy masivo y un electrón sujeto a este núcleo. Centremos nuestro estudio en las fuerzas que experimenta el electrón cuando interactúa con una onda electromagnética (luz), entonces la fuerza total que siente el electrón es:

$$m_e \frac{d^2x}{d^2t} = -e[\vec{E} + \vec{V_e} \times \vec{B}] - m_e w_0^2 x - m_e \gamma \frac{dx}{dt} \tag{2.21}$$

despreciando la contribución de la fuerza de Lorentz ya que $\vec{V_e}$ es pequeña y haciendo que la fase espacial del campo eléctrico sea constante ya que el diámetro del electrón es mas pequeño que $\lambda$ entonces:

$$m_e \frac{d^2x}{d^2t} + m_e w_0^2 x - m_e \gamma \frac{dx}{dt} = -eE_0 e^{i(kz-\omega t)} = -E_{0p} e^{-i\omega t} \tag{2.22}$$

obtenemos una ecuación diferencial de segundo orden, lineal no homogénea y ya que sus soluciones están dadas por $x(t) = x_0 e^{-i\omega t}$, tomando la primera y segunda derivada de $x(t)$ y sustituyéndolas en la en la ecuación diferencial obtenemos:

$$m_e x_0 (-i\omega)^2 e^{-i\omega t} + m_e \gamma x_0 (-i\omega) e^{-i\omega t} + m_e \omega_0^2 x_0 e^{-i\omega t} = -eE_{0p} e^{-i\omega t} \tag{2.23}$$

de donde finalmente obtenemos:

$$x(t) = \frac{-(e/m_e)E_{0p}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} e^{-i\omega t} \tag{2.24}$$

pero sabemos que el momento dipolar es $P = -ex = \frac{(e^2/m_e)E_{0p}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} e^{-i\omega t}$ y si $n_0$ es la densidad de electrones, entonces

$$\vec{P} = \frac{n_0(e^2/m_e)E_{0p}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} e^{-i\omega t} \tag{2.25}$$

y dado que $\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0)\vec{E}$ entonces $\epsilon = \epsilon_0 + \frac{P}{E} = \epsilon_0 + \frac{n_0(e^2/m_e)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}$, ahora dividiendo la expresión anterior entre $\epsilon_0$ y recordando que $n^2 = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ entonces finalmente obtenemos la expresión para el índice de refracción dada por:

$$n^2 = 1 + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{n_0(e^2/m_e)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \tag{2.26}$$

# Capítulo 3

## Caracterización de parámetros de dispersión lineal

### 3.1. Coeficientes de Cauchy

En la sección 2.5 del capítulo anterior abarca la descripción del modelo resonante del índice de refracción, en el cual se trato de detallar la interacción de un electrón en presencia de un campo eléctrico, llegando a la conclusión de que el índice de refracción es dependiente de la frecuencia del campo eléctrico como lo muestra la ecuación (2.26).
Hasta ahora hemos supuesto la existencia de una sola frecuencia natural $\omega_0$. Para explicar la observación de un comportamiento más complicado, generalicemos las cosas suponiendo que hay $N$ moléculas por unidad de volumen cada una con $f_j$ osciladores que tienen frecuencias naturales $\omega_{0j}$ donde $j = 1, 2, 3, \ldots$. En este caso

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_j}. \tag{3.1}$$

Esta expresión funciona muy bien para medios enrarecidos tales como gases, sin embargo, debemos hacer otras consideraciones si deseamos aplicarla a sustancias densas. A diferencia de los átomos aislados, los que están en un material denso experimentan también el campo inducido por sus compañeros. Consecuentemente un átomo *"ve"* ademas del campo aplicado $E(t)$ otro campo, dado por $P(t)/3\epsilon_0$, por lo tanto podemos obtener

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{Nq_e^2}{3\epsilon_0 m_e}\sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_j}. \tag{3.2}$$

Un índice de refracción complejo implica que existe absorción, por lo que nos limitaremos a regiones donde esta es despreciable (es decir $\omega_0^2 - \omega^2 >> \gamma_j\omega$) y $n$ es real, tal que:

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{Nq_e^2}{3\epsilon_0 m_e}\sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2}. \tag{3.3}$$

Los gases transparentes, líquidos y sólidos sin color tienen sus frecuencias características fuera de la región visible del espectro. En particular los vidrios tienen frecuencia naturales efectivas mayores a las del visible, en el ultravioleta, donde se hacen opacos. las frecuencias características importantes para los vidrios ocurren en longitudes de onda de alrededor de 100nm. El centro del rango visible es aproximadamente cinco veces eso y, de ahí, $\omega_{0j}^2 >> \omega^2$. Se observa que cuando $\omega$ aumenta hacia $\omega_{0j}$, $(\omega_{0j}^2 - \omega)$ disminuye y $n$ aumenta gradualmente con la frecuencia como lo muestra la figura siguiente

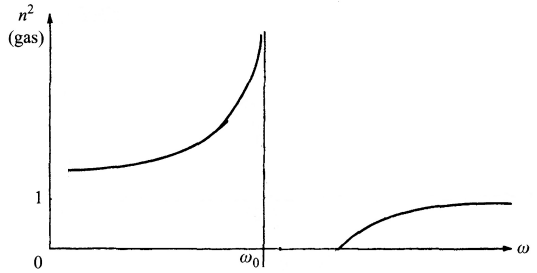


Figura 3.1: Gráfica de dispersión.

esto se llama dispersión normal. En la región del ultravioleta, cuando $\omega$ se aproxima a una frecuencia natural, los osciladores comenzaran a resonar. Sus amplitudes aumentaran marcadamente y esto sera acompañado por un amortiguamiento fuerte y una marcada absorción de energía de la onda incidente. Cuando $\omega_{0j} = \omega$ en la ecuación (3.3) el termino de amortiguamiento se hace dominante. Las regiones cercanas a $\omega_{0j}$ son llamadas

bandas de absorción, ahí $dn/d\omega$ es negativa y se dice que el proceso es dispersión anómala, es decir, los rayos de longitud de onda corta son refractados menos que los rayos de longitud de onda mas grandes, lo que tiene como consecuencia que se invierta la secuencia usual del prisma de colores. Para las sustancias que son transparentes para el ojo en el dominio del espectro visible. Definimos como $V_v$ a las frecuencias de absorción que están en el lado de longitudes de onda cortas, y como $V_r$ las que están en el lado de longitudes de onda larga, entonces la formula de dispersión se convierte entonces en una expansión en serie de potencias con respecto a $v$ y $\lambda$

$$n^2-1 = A+Bv^2+Cv^2+\cdots-\frac{B'}{v^2}-\frac{C'}{v^2}-\cdots = A+\frac{Bc^2}{\lambda^2}+\frac{Cc^4}{\lambda^4}+\cdots-\frac{B'\lambda^2}{c^2}-\frac{C'\lambda^4}{c^4}-\cdots\ , \tag{3.4}$$

donde

$$A = \sum_v \frac{\rho_v}{V_v^2};\ B = \sum_v \frac{\rho_v}{V_v^4};\ C = \sum_v \frac{\rho_v}{V_v^6};\ B' = \sum_r \rho_r;\ C' = \sum_r \rho_r V_r^2$$

en el rango libre de absorción el valor de $n$ para gases difiere muy poco de uno por lo que podemos remplazar $n^2-1$ por $2(n-1)$ y dado que los términos $B'$ y $C'$ surgen de las frecuencias de resonancia en el ultravioleta, entonces su influencia es muy poco apreciable, entonces si solo se toman en cuenta los términos menores que $1/\lambda^2$ la ecuación (3.4) se reduce a la fórmula de Cauchy

$$n = A_1 + \frac{B_1}{\lambda^2} \tag{3.5}$$

donde $A_1 = \frac{A}{2}; B_1 = \frac{Bc^2}{A}$ en el caso de sustancias con mayor densidad como lo son los sólidos y líquidos, se puede hace un tratado similar y obtener de nuevo la fórmula de Cauchy para el índice de refracción.

## 3.2. Como calcular $\lambda_c$

De acuerdo a la sección anterior cada frecuencia de resonancia que consideremos, estará ligada a una longitud de onda por lo que podemos graficarlas y obtener una gráfica de dispersión para cada longitud de onda dada.

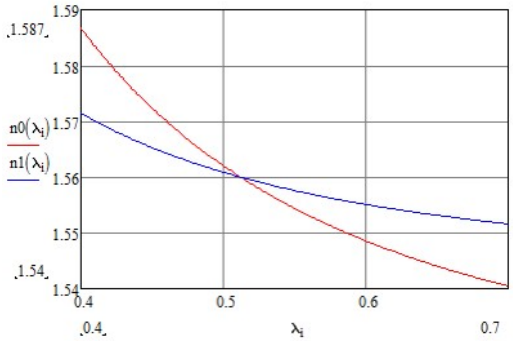


Figura 3.2: Curvas de dispersión para dos materiales.

Entonces para dos curvas de dispersión $n_1(\lambda)$ y $n_2(\lambda)$ que se intersectan en el rango visible existe una longitud de onda $\lambda_c$ tal que $n_1(\lambda_c) = n_2(\lambda_c)$; donde $\lambda_c$ es la longitud de onda de corte.
Entonces podemos obtener la relación siguiente

$$n_1 = A_1 + \frac{B_1}{\lambda_c^2} = A_2 + \frac{B_2}{\lambda_c^2} = n_2, \tag{3.6}$$

de donde despejamos $\lambda_c$ y obtenemos

$$\lambda_c^2 = \frac{B_2 - B_1}{A_1 - A_2} = -\frac{B}{A}. \tag{3.7}$$

es decir conocidos los parámetros de Cauchy de una curva de dispersión y la longitud de corte, podemos obtener información de los parámetros de Cauchy de la otra curva de dispersión.

## 3.3. Interferometría y dispersión

Se usarán técnicas interferométricas para tratar de determinar los parámetros de Cauchy de la ecuación de dispersión, para lograr esto primero haremos unas suposiciones.
Sabemos que cuando un frente de onda pasa a través de un objeto, tiene asociada una distribución de fase $\phi$, la cuál es función de la longitud de camino óptico que es el producto del índice de refracción $n(\lambda)$ (que en

general es una función de $\lambda$)por un cierto ancho $d(x)$ (que es una función del espacio $x$).
Por lo tanto esta fase está dada por el número de onda $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ multiplicado por la longitud de camino óptico, es decir

$$\phi(\lambda, x) = k(\lambda)\, n(\lambda)\, d(x). \tag{3.8}$$

si nos fijamos en la ecuación anterior, podemos observar que esta ecuación es de variables separables en $\lambda$ y $x$ ya que ninguna de sus componentes depende de las dos variables independientes al mismo tiempo. Debido a esto es posible aproximar el valor del índice de refracción como función del número de onda $k$ y de la fase $\phi$

$$n(\lambda) \propto d(x_0)\, n(\lambda) = \frac{\lambda \Delta\phi(\lambda, x_0)}{2\pi}. \tag{3.9}$$

como lo muestra la figura siguiente

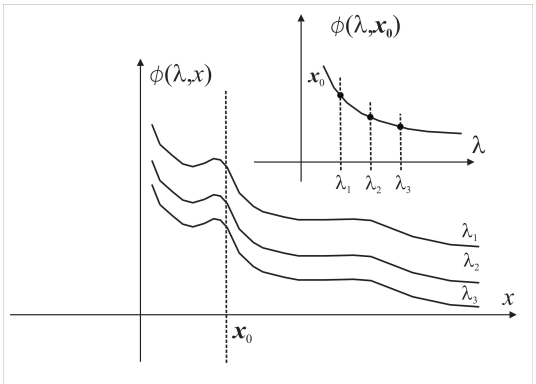


Figura 3.3: La fase es función de $\lambda$ y distancia

ademas de la ecuación (3.9) podemos encontrar una relación entre dos índices de refracción de la siguiente forma

$$\frac{\lambda_1 \phi(\lambda_1, x_0)}{\lambda_2 \phi(\lambda_2, x_0)} = \frac{n_1(\lambda)}{n_2(\lambda)}. \tag{3.10}$$

## 3.4. Análisis de un caso, con frontera arbitraria

Analicemos el caso en el cual se tienen dos dieléctricos con una interfaz de forma arbitraria entre estos como lo muestra la siguiente figura.

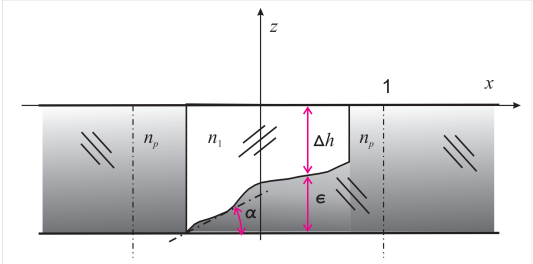


Figura 3.4: Interfaz entre dieléctricos

de la figura anterior se observa que la diferencia de fase viene dada por

$$\Delta\phi = 2\pi \left(|\Delta h| / \lambda\right) \left[n_p\left(\lambda\right) - n_1\left(\lambda\right)\right] \tag{3.11}$$

vemos que la fase depende de la profundidad o de la altura de la interfaz entre los dos dieléctricos, como esta es variable en cada punto de la interfaz, no se puede determinar mediante cálculos directos la fase asociada al cambiar de un medio a otro. Por lo tanto una forma de determinar esta fase es mediante el uso de un interferómetro (haciendo uso del método interferométrico de corrimiento de fase) tipo Mach-Zender.

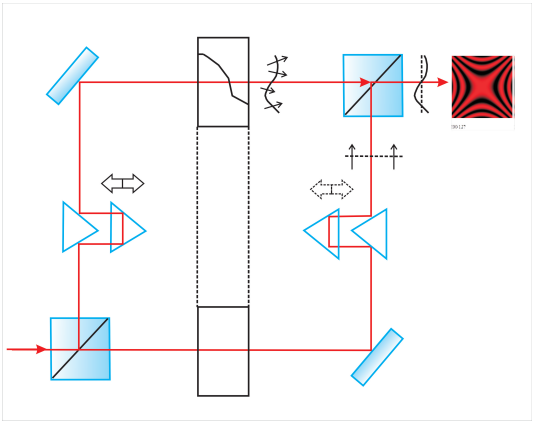

Figura 3.5: Esquema de un interferómetro tipo Mach-Zender

una vez obtenida la fase con el interferómetro procederíamos a calcular los

coeficientes de Cauchy con la ventaja de que se tiene una referencia gracias a la técnica interferométrica. Entonces tenemos que:

$$n(\lambda) = A - B/\lambda^2; \Rightarrow \Delta n(\lambda) = \left(A_2 + \frac{B_2}{\lambda^2}\right) - \left(A_1 + \frac{B_1}{\lambda^2}\right) = \left(A + \frac{B}{\lambda^2}\right)$$

lo que implica que $\lambda_c^2 = |-B/A|$ por lo tanto

$$\Delta\phi(x_0, \lambda) = 2\pi\Delta h(x_0)\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left(A + \frac{B}{\lambda^2}\right)$$

haciendo un poco de álgebra en la ecuación anterior tenemos que:

$$\frac{\Delta\phi(x_0,\lambda)\lambda^3}{2\pi} = \Delta h(x_0)\left(A\lambda^2 + B\right)$$

la expresión anterior también puede ser vista como:

$$\frac{\Delta\phi(x_0, \lambda)\lambda^3}{2\pi} = C\left(A\lambda^2 + B\right) \tag{3.12}$$

por lo tanto se puede hacer un ajuste no lineal para determinar los valores de $A$, $B$ y $C$.

## 3.5. Simulación de ajuste no lineal

Para poder determinar los coeficientes de Cauchy para algún $n(\lambda)$ se ha hecho una simulación con la ayuda de software de cálculo (Mathcad) en la cuál se trata de reproducir los datos que se tienen para una muestra de Inmmersions mittle-Quartz y Plagioklas con la cual obtenemos una longitud de onda de corte $\lambda_c = 0{,}512\mu m$ o $\lambda_c^2 = 0{,}262\mu m^2$.
El programa hecho en Mathcad parte de algunas consideraciones físicas de nuestro sistema real como lo son, las dimensiones de nuestra muestra, el ángulo de inclinación de esta, lo que nos permite simular los caminos ópticos de un interferómetro con lo cual podemos obtener interferogramas que al procesarlos nos permitirán obtener las distribuciones de fase para nuestro sistema al ser irradiado por distintas longitudes de onda lo que nos permitirá obtener datos acerca de la frontera que existe entre los dieléctricos así como datos de la curva de dispersión que nos permitirá corroborar la longitud de corte obtenida de nuestro sistema físico. Lo que se hace en el programa es obtener la distribución de fase para siete $\lambda's$ en el caso en la que nos encontremos en la región de dispersión anómala (fase envuelta),

utilizaremos el método interferométrico de corrimiento de fase (PSI) para obtener la distribución de fase requerida.

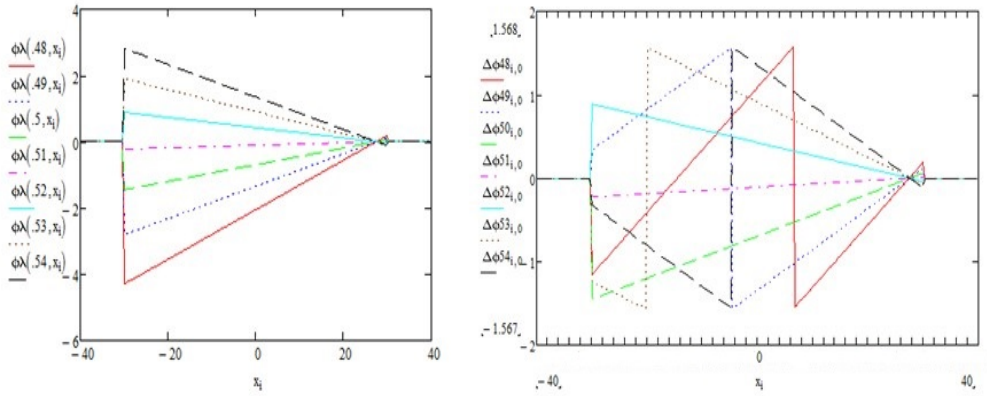

Figura 3.6: Fase con desenvoltura natural (izquierda), fase envuelta (derecha, se gráfica fase vs posición, la posición va de $-40$ a 40 con un paso de 2 unidades).

ahora bien utilizando estas siete $\lambda's$ que van desde los $480nm$ a los $550nm$ con un paso de $10nm$ podemos obtener un valor para el lado derecho de la ecuación (3.12) observemos que si graficamos el lado derecho de la ecuación (3.12) contra $\lambda^2$ obtenemos un comportamiento lineal como lo muestra la gráfica siguiente:

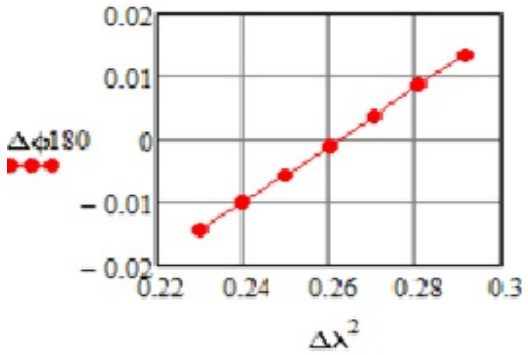


Figura 3.7: Gráfica $\Delta\phi$ vs $\Delta\lambda^2$.

ahora bien utilizamos el método de Levenberg-Marquardt optimizado para determinar los coeficientes A,B y C que serán nuestros parámetros de Cauchy.

# Capítulo 4

## Caracterización de parámetros dispersivos con interferencia de desplazamiento lateral

La simulación del capítulo anterior muestra la necesidad de conocer los ordenes de interferencia absolutos; esto se refleja en la región de desenvoltura natural la cuál esta cerca del orden cero.

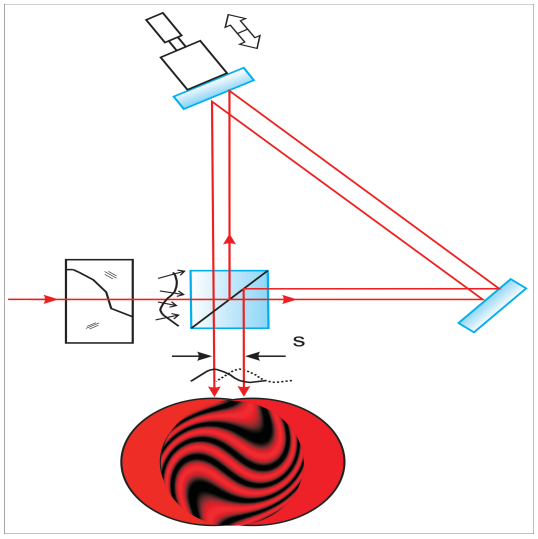


Figura 4.1: Esquema de interferómetro de desplazamiento lateral

Para asegurarse que se está en dicha región puede emplearse un sistema interferométrico de desplazamiento lateral, el cual nos arroja resultados proporcionales a la derivada del frente de onda los cuales contendrán con mayor posibilidad al orden cero.
El esquema anterior muestra un interferómetro de desplazamiento late-

ral, con el cual queda claro que la información de la frontera entre los dieléctricos es de segunda importancia, esto en el caso de que los parámetros dispersivos se pudieran obtener [2,3].

## 4.1. Comparación simulada entre Mach-Zender y desplazamiento lateral

Para tener idea de las variaciones de fase observables a través de interferencia, en cada uno de los interferométros utilizados, se calculan interferogramas para varias longitudes de onda con una misma distribución de fase $\Delta h\,(x)$ (fig 4,2).
Se calcula ahora $\Delta h\,(x)$ como un polinomio de quinto grado como ejemplo de interfaz. Los interferogramas de cada interferómetro, se superponen cromáticamente para simular su presencia simultánea, pero los cálculos se harán con longitudes de onda por separado.

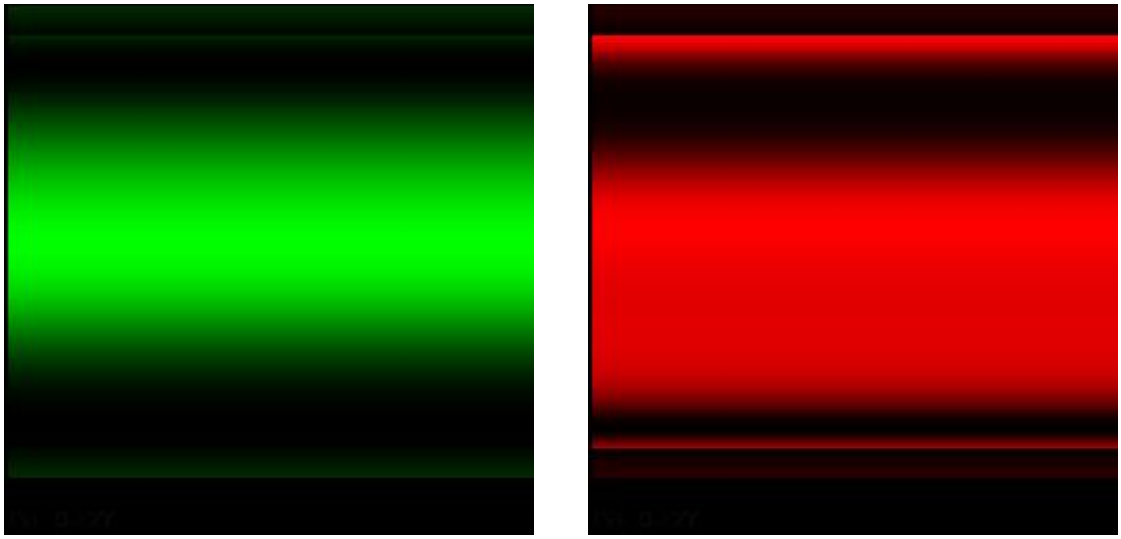

Figura 4.2: Interferogramas con desplazamiento lateral para dos longitudes de onda: 0,51$\mu m$ (izquierda) y 0,6$\mu m$ (derecha).

al superponer todos los interferogramas obtenidos obtendremos un interferograma policromatico que de acuerdo a su coloración mostraran cambios de fase altos y separados del orden cero, estos de permanecer sin coloración indicaran su cercanía al orden cero.

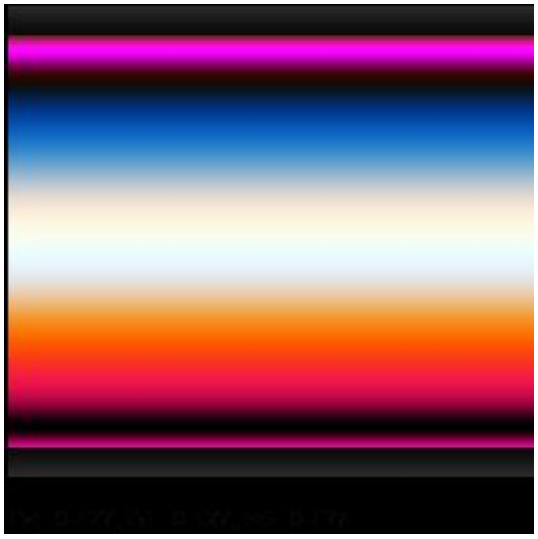

Figura 4.3: Interferograma policromático (superposición de tres interferogramas con distintas longitudes de onda como primarios).

## 4.2. Reconstrucción de fase y ajustes de A y B

A continuación se realiza la comparación entre los resultados obtenidos de la aplicación del "método propuesto" utilizando un interferómetro Mach-Zehnder y un interferómetro de desplazamiento lateral que implica trabajar con un polinomio de grado 5 y la derivada de dicho polinomio respectivamente esto para obtener los coeficientes de Cauchy A y B.

- Caso 1

En este primer caso se define el polinomio de quinto grado como $\Delta y\left(x\right) = \left(a0 + a1 * x + a2 * x^2 + a3 * x^3 + a4 * x^4 + a5 * x^5\right) * 10^0$, donde a0 es el coeficiente independiente del polinomio y es igual a cero y $10^0$ es un factor que multiplica al polinomio.
De acuerdo a nuestro método propuesto se obtienen los interferogramas para distintas longitudes de onda y se superponen para obtener los interferogramas policromáticos.

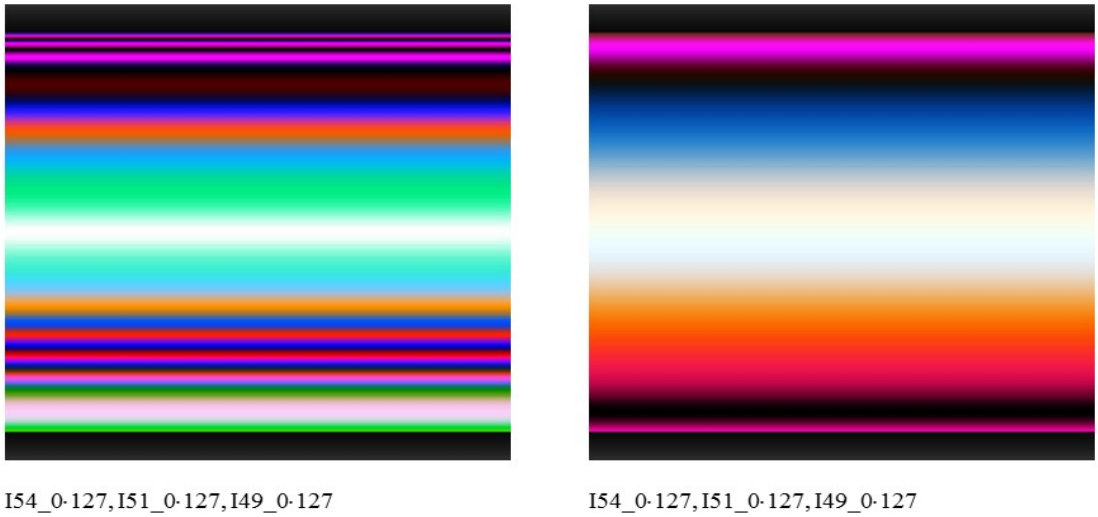


Figura 4.4: Patrones de interfrencia cromáticos con interferómetros de referencia constante (izquierda) y de desplazamiento lateral (derecha). Factor $10^0$ con $a0 = 0$ (ver texto).

con los cuales obtenemos las distribuciones de fase correspondientes para 14 longitudes de onda que van de los $450\mu m$ a los $580\mu m$ con un paso de $10\mu m$

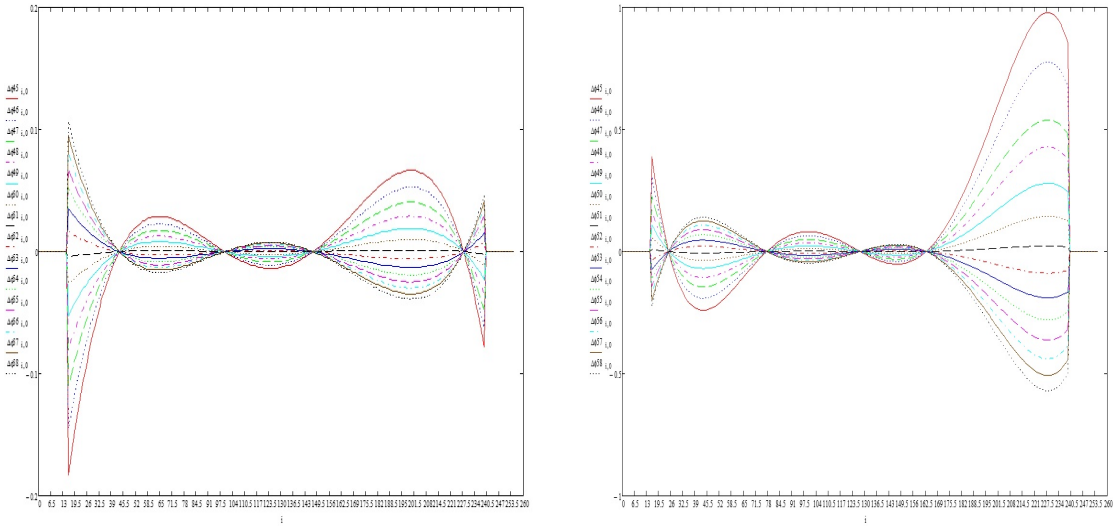

Figura 4.5: Secciones de interferogramas para distintas longitudes de onda (con interferómetros de referencia constante (izquierda) y de desplazamiento lateral (derecha)) de $450\mu m$ a $580\mu m$. Factor $10^0$ con $a0 = 0$ (ver texto).

dadas las distribuciones de fase podemos calcular los coeficientes A y B de Cauchy utilizando el método Levenberg-Marquardt optimizado con el cual obtenemos los siguientes resultados.

$$cg1 = \begin{pmatrix} -0.144 \\ -0.022 \\ 5.865\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg2 = \begin{pmatrix} -0.109 \\ -0.022 \\ 5.853\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg3 = \begin{pmatrix} -0.039 \\ -0.022 \\ 5.827\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg4 = \begin{pmatrix} 0.062 \\ -0.023 \\ 5.971\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg5 = \begin{pmatrix} 0.189 \\ -0.022 \\ 5.872\times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$cg6 = \begin{pmatrix} 0.33 \\ -0.022 \\ 5.859\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg7 = \begin{pmatrix} 0.472 \\ -0.022 \\ 5.854\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg8 = \begin{pmatrix} 0.599 \\ -0.022 \\ 5.854\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg9 = \begin{pmatrix} 0.691 \\ -0.022 \\ 5.857\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg10 = \begin{pmatrix} 0.725 \\ -0.022 \\ 5.863\times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$cg11 = \begin{pmatrix} 0.676 \\ -0.022 \\ 5.875\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg12 = \begin{pmatrix} 0.516 \\ -0.023 \\ 5.911\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg13 = \begin{pmatrix} 0.231 \\ -0.021 \\ 5.589\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg14 = \begin{pmatrix} -0.259 \\ -0.022 \\ 5.816\times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$AMI - APG = -0.024$$

$$BMI - BPG = 6.29\times 10^{-3}$$

Figura 4.6: Resultados para el interferómetro de referencia constante

$$cg1 = \begin{pmatrix} -0.144 \\ -0.022 \\ 5.865\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg2 = \begin{pmatrix} -0.109 \\ -0.022 \\ 5.853\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg3 = \begin{pmatrix} -0.039 \\ -0.022 \\ 5.827\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg4 = \begin{pmatrix} 0.062 \\ -0.023 \\ 5.971\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg5 = \begin{pmatrix} 0.189 \\ -0.022 \\ 5.872\times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$cg6 = \begin{pmatrix} 0.33 \\ -0.022 \\ 5.859\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg7 = \begin{pmatrix} 0.472 \\ -0.022 \\ 5.854\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg8 = \begin{pmatrix} 0.599 \\ -0.022 \\ 5.854\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg9 = \begin{pmatrix} 0.691 \\ -0.022 \\ 5.857\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg10 = \begin{pmatrix} 0.725 \\ -0.022 \\ 5.863\times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$cg11 = \begin{pmatrix} 0.676 \\ -0.022 \\ 5.875\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg12 = \begin{pmatrix} 0.516 \\ -0.023 \\ 5.911\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg13 = \begin{pmatrix} 0.231 \\ -0.021 \\ 5.589\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg14 = \begin{pmatrix} -0.259 \\ -0.022 \\ 5.816\times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$AMI - APG = -0.024$$

$$BMI - BPG = 6.29\times 10^{-3}$$

Figura 4.7: Resultados para el interferómetro de desplazamiento lateral

donde el primer termino (renglón) de cada columna representa el valor del coeficiente C, el segundo término de cada columna representa el valor del coeficiente A y el último término de cada columna representa el valor del coeficiente C. Una vez obtenidos estos valores podemos reconstruir la frontera de los dieléctricos lo cual nos resulta en:

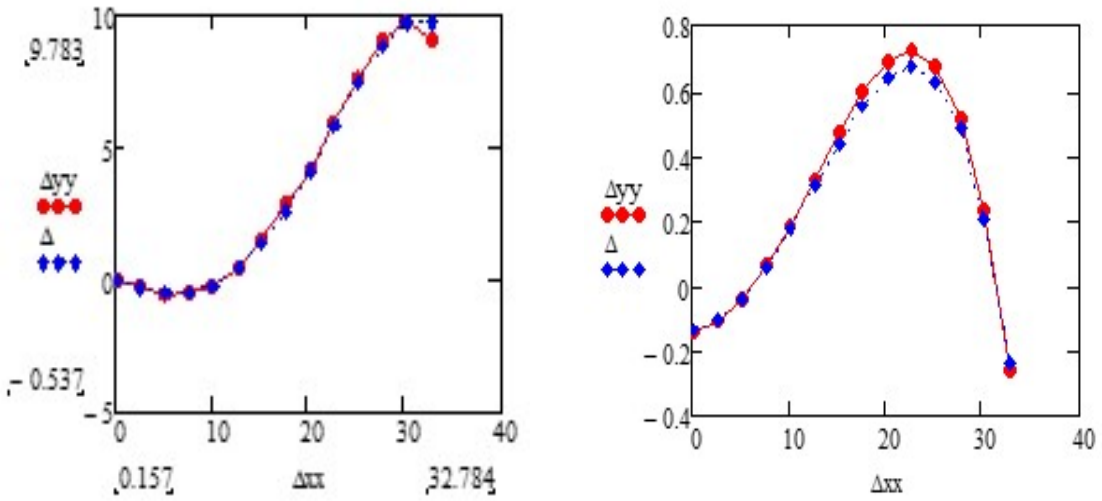


Figura 4.8: Reconstrucciones (en rojo) de interfaz con referencia constante (izquierda) y de la derivada de la interfaz con desplazamiento lateral (derecha). Se ha usado la misma región espacial en ambos casos. Factor $10^0$ con $a0 = 0$ (ver texto).

- Caso 2

En este segundo caso se define el polinomio de quinto grado como $\Delta y\,(x) = \left(a0 + a1 * x + a2 * x^2 + a3 * x^3 + a4 * x^4 + a5 * x^5\right) * 10^1$, donde a0 es el coeficiente independiente del polinomio y es igual a cero y $10^1$ es un factor que multiplica al polinomio. siguiendo nuestra simulación obtenemos lo siguiente

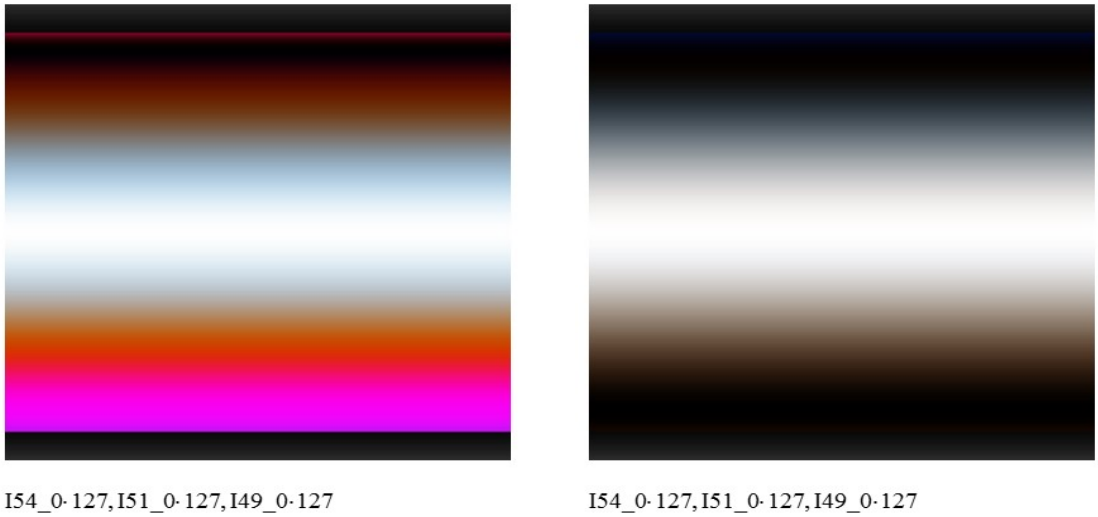


Figura 4.9: Patrones de interfrencia cromáticos con interferómetros de referencia constante (izquierda) y de desplazamiento lateral (derecha). Factor $10^1$ con $a0 = 0$ (ver texto).

con los cuales obtenemos las distribuciones de fase correspondientes para 14 longitudes de onda que van de los $450\mu m$ a los $580\mu m$ con un paso de $10\mu m$

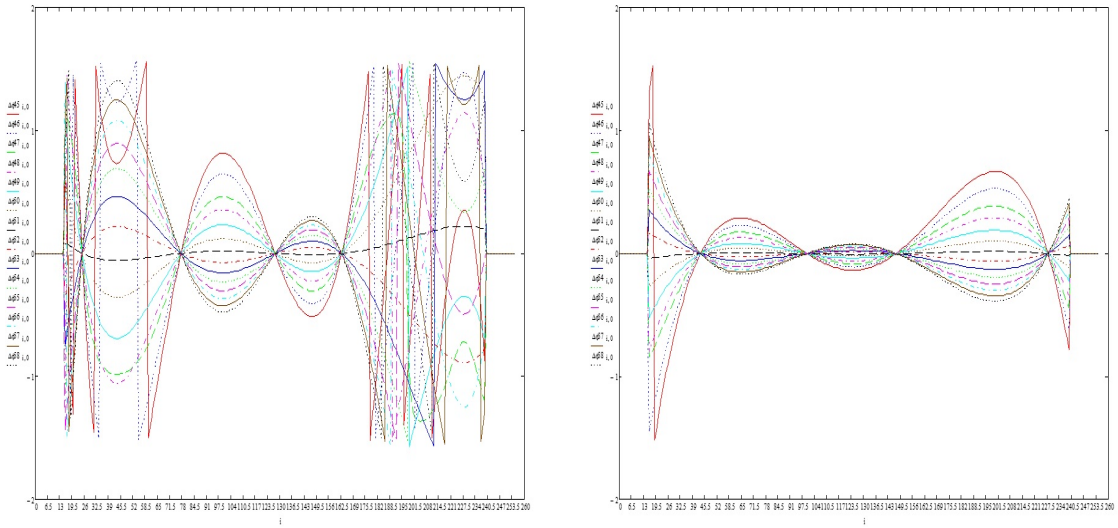

Figura 4.10: Secciones de interferogramas para distintas longitudes de onda (con interferómetros de referencia constante (izquierda) y de desplazamiento lateral (derecha)). Factor $10^1$ con $a0 = 0$ (ver texto).

procesando los datos obtenemos.

$$cg1 = \begin{pmatrix} -0.226 \\ -0.022 \\ 5.874 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg2 = \begin{pmatrix} -3.431 \\ -0.023 \\ 5.929 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg3 = \begin{pmatrix} -5.315 \\ -0.023 \\ 5.932 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg4 = \begin{pmatrix} -5.07 \\ -0.023 \\ 5.924 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg5 = \begin{pmatrix} -1.986 \\ -0.023 \\ 5.897 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$cg6 = \begin{pmatrix} 4.421 \\ -0.023 \\ 5.967 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg7 = \begin{pmatrix} 14.292 \\ -0.023 \\ 5.899 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg8 = \begin{pmatrix} 15.97 \\ -0.024 \\ 5.663 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg9 = \begin{pmatrix} -1.558 \\ -0.025 \\ 4.953 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg10 = \begin{pmatrix} -5.9 \\ -0.023 \\ 5.852 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$cg11 = \begin{pmatrix} -0.589 \\ 0.2 \\ -0.044 \end{pmatrix} \quad cg12 = \begin{pmatrix} -0.208 \\ -0.03 \\ 3.041 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg13 = \begin{pmatrix} -0.467 \\ -0.042 \\ -2.408 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg14 = \begin{pmatrix} -0.524 \\ -0.04 \\ -1.475 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$AMI - APG = -0.024$$

$$BMI - BPG = 6.29 \times 10^{-3}$$

Figura 4.11: Resultados para el interferómetro de referencia constante

$$cg1 = \begin{pmatrix} -1.425 \\ -0.023 \\ 5.916\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg2 = \begin{pmatrix} -1.08 \\ -0.023 \\ 5.902\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg3 = \begin{pmatrix} -0.383 \\ -0.022 \\ 5.872\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg4 = \begin{pmatrix} 0.644 \\ -0.022 \\ 5.779\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg5 = \begin{pmatrix} 1.79 \\ -0.024 \\ 6.212\times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$cg6 = \begin{pmatrix} 3.213 \\ -0.023 \\ 6.019\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg7 = \begin{pmatrix} 4.605 \\ -0.023 \\ 5.994\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg8 = \begin{pmatrix} 5.835 \\ -0.023 \\ 5.992\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg9 = \begin{pmatrix} 6.709 \\ -0.023 \\ 6.006\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg10 = \begin{pmatrix} 6.992 \\ -0.023 \\ 6.054\times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$cg11 = \begin{pmatrix} 6.318 \\ -0.024 \\ 6.268\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg12 = \begin{pmatrix} 5.358 \\ -0.022 \\ 5.678\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg13 = \begin{pmatrix} 2.206 \\ -0.022 \\ 5.841\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg14 = \begin{pmatrix} -2.571 \\ -0.022 \\ 5.861\times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$AMI - APG = -0.024$$

$$BMI - BPG = 6.29\times 10^{-3}$$

Figura 4.12: Resultados para el interferómetro de desplazamiento lateral

donde el primer término (renglón) de cada columna representa el valor del coeficiente C, el segundo término de cada columna representa el valor del coeficiente A y el ultimo término de cada columna representa el valor del coeficiente C. Una vez obtenidos estos valores podemos reconstruir la frontera de los dieléctricos lo cual nos resulta en:

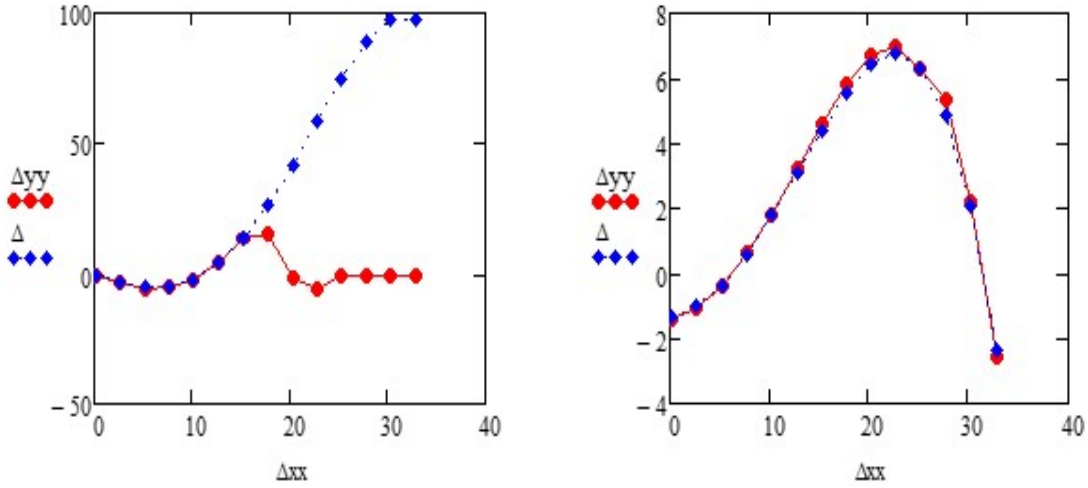


Figura 4.13: Reconstrucciones (en rojo) de interfaz con referencia constante (izquierda) y de la derivada de la interfaz con desplazamiento lateral (derecha). Se ha usado la misma región espacial en ambos casos. Factor $10^1$ con $a0 = 0$ (ver texto).

- Caso 3

En este tercer caso se define el polinomio de quinto grado como $\Delta y\,(x) = \left(a0 + a1 * x + a2 * x^2 + a3 * x^3 + a4 * x^4 + a5 * x^5\right) * 10^2$, donde a0 es el coeficiente independiente del polinomio y es igual a cero y $10^2$ es un factor

que multiplica al polinomio. siguiendo nuestra simulación obtenemos lo siguiente

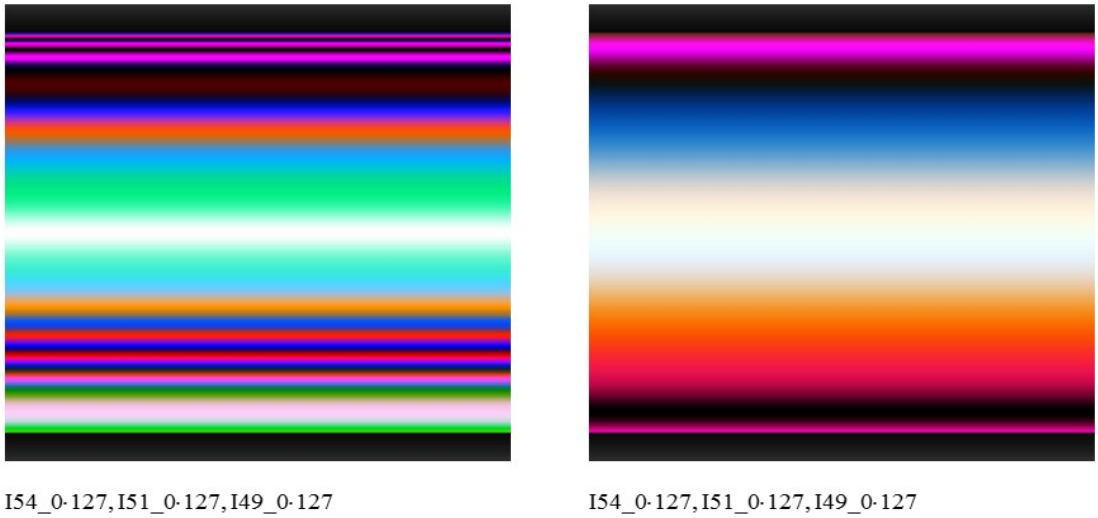


Figura 4.14: Patrones de interfrencia cromáticos con interferómetros de referencia constante (izquierda) y de desplazamiento lateral (derecha). Factor $10^2$ con $a0 = 0$ (ver texto).

con los cuales obtenemos las distribuciones de fase correspondientes para 14 longitudes de onda que van de los $450\mu m$ a los $580\mu m$ con un paso de $10\mu m$

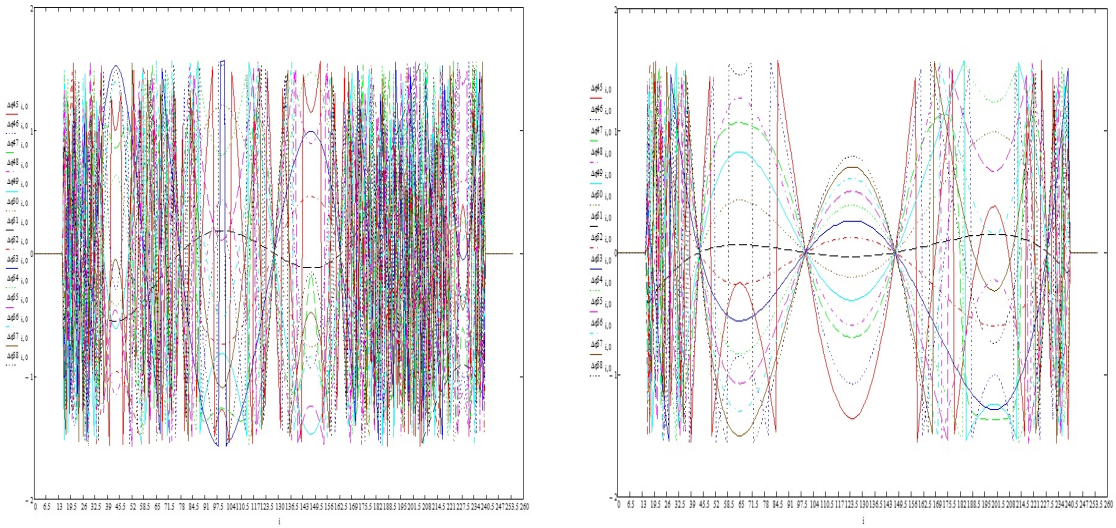

Figura 4.15: Secciones de interferogramas para distintas longitudes de onda (con interferómetros de referencia constante (izquierda) y de desplazamiento lateral (derecha)). Factor $10^2$ con $a0 = 0$ (ver texto).

procesando los datos obtenemos.

$$cg1 = \begin{pmatrix} -2.239 \\ -0.023 \\ 5.927\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg2 = \begin{pmatrix} -0.856 \\ -0.017 \\ 7.145\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg3 = \begin{pmatrix} 4.171 \\ -0.024 \\ 5.599\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg4 = \begin{pmatrix} 6.079 \\ -0.024 \\ 5.649\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg5 = \begin{pmatrix} -13.661 \\ -0.023 \\ 5.784\times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$cg6 = \begin{pmatrix} -0.878 \\ -0.028 \\ 4.232\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg7 = \begin{pmatrix} 6.672 \\ -0.024 \\ 5.724\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg8 = \begin{pmatrix} -3.028 \\ -0.024 \\ 5.324\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg9 = \begin{pmatrix} -13.21 \\ -0.024 \\ 5.606\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg10 = \begin{pmatrix} -1.46 \\ 0.043 \\ -0.016 \end{pmatrix}$$

$$cg11 = \begin{pmatrix} -7.173 \\ -0.025 \\ 5.148\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg12 = \begin{pmatrix} 7.418 \\ -0.024 \\ 6.12\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg13 = \begin{pmatrix} -4.669 \\ -0.022 \\ 6.049\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg14 = \begin{pmatrix} -5.245 \\ -0.022 \\ 6.027\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} AMI - APG = -0.024 \\ BMI - BPG = 6.29\times 10^{-3} \end{matrix}$$

Figura 4.16: Resultados para el interferómetro de referencia constante

$$cg1 = \begin{pmatrix} -13.939 \\ -0.023 \\ 5.968\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg2 = \begin{pmatrix} -10.619 \\ -0.023 \\ 5.954\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg3 = \begin{pmatrix} -3.79 \\ -0.023 \\ 5.924\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg4 = \begin{pmatrix} 6.28 \\ -0.023 \\ 5.907\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg5 = \begin{pmatrix} 12.798 \\ -0.023 \\ 5.73\times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$cg6 = \begin{pmatrix} -0.764 \\ -0.028 \\ 4.19\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg7 = \begin{pmatrix} -4.03 \\ -0.026 \\ 4.861\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg8 = \begin{pmatrix} -4.502 \\ -0.025 \\ 5.254\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg9 = \begin{pmatrix} -5.253 \\ -0.021 \\ 6.301\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg10 = \begin{pmatrix} -2.095 \\ -0.018 \\ 6.917\times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$cg11 = \begin{pmatrix} -6.337 \\ -0.021 \\ 6.22\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg12 = \begin{pmatrix} -5.606 \\ -0.024 \\ 5.575\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg13 = \begin{pmatrix} 9.63 \\ -0.026 \\ 5.918\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg14 = \begin{pmatrix} -13.903 \\ -0.024 \\ 5.582\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} AMI - APG = -0.024 \\ BMI - BPG = 6.29\times 10^{-3} \end{matrix}$$

Figura 4.17: Resultados para el interferómetro de desplazamiento lateral

donde el primer término (renglón) de cada columna representa el valor del coeficiente C, el segundo término de cada columna representa el valor del coeficiente A y el ultimo término de cada columna representa el valor del coeficiente C. Una vez obtenidos estos valores podemos reconstruir la frontera de los dieléctricos lo cual nos resulta en:

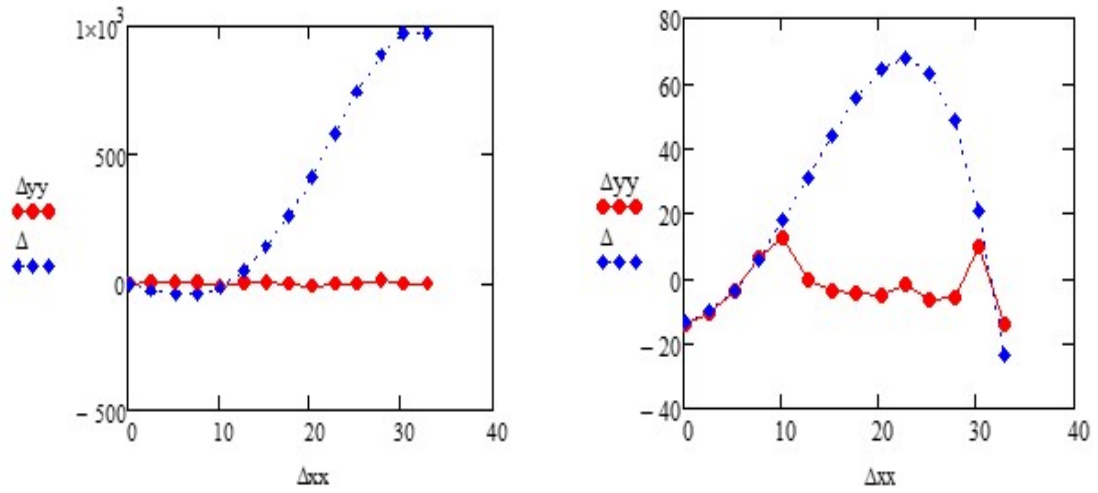


Figura 4.18: Reconstrucciones (en rojo) de interfaz con referencia constante (izquierda) y de la derivada de la interfaz con desplazamiento lateral (derecha). Se ha usado la misma región espacial en ambos casos. Factor $10^2$ con $a0 = 0$ (ver texto).

- Caso 4

En este cuarto caso se define el polinomio de quinto grado como $\Delta y\,(x) = \left(a0 + a1 * x + a2 * x^2 + a3 * x^3 + a4 * x^4 + a5 * x^5\right) * 10^0$, donde a0 es distinto de cero y $10^1$ es un factor que multiplica al polinomio. siguiendo nuestra simulación obtenemos lo siguiente

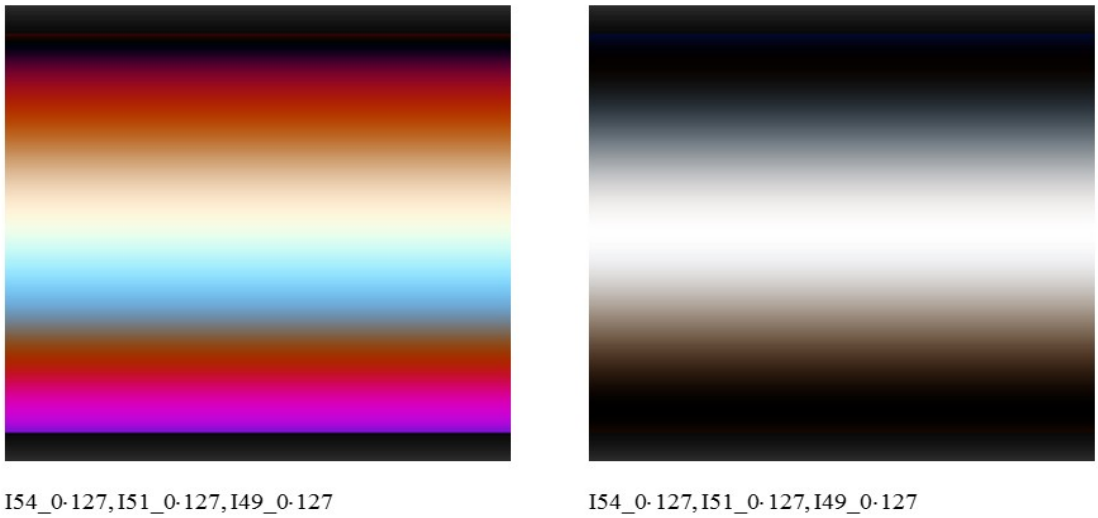


Figura 4.19: Patrones de interfrencia cromáticos con interferómetros de referencia constante (izquierda) y de desplazamiento lateral (derecha). Factor $10^1$ con $a0 = 1$ (ver texto).

con los cuales obtenemos las distribuciones de fase correspondientes para 14 longitudes de onda que van de los $450\mu m$ a los $580\mu m$ con un paso de $10\mu m$

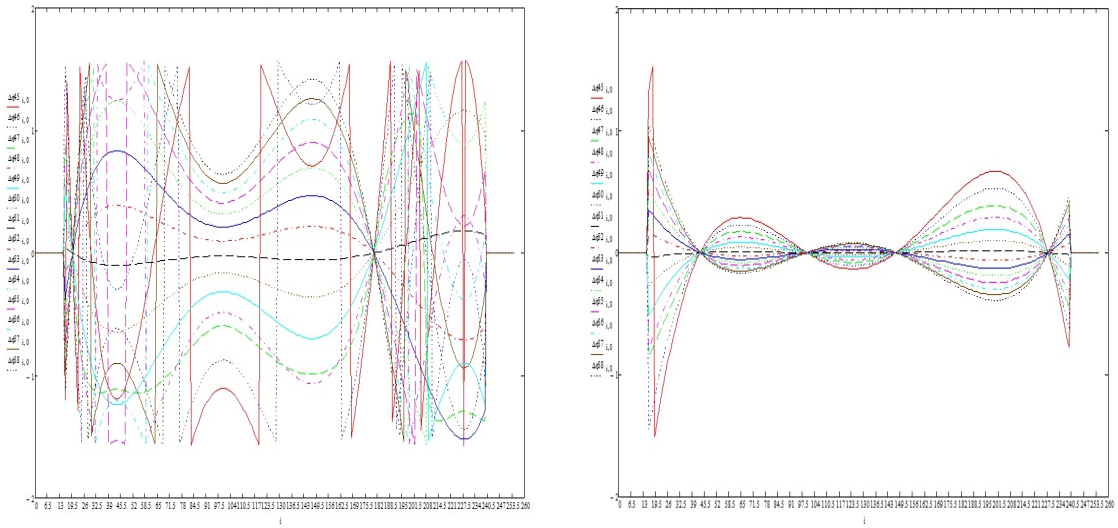

Figura 4.20: Secciones de interferogramas para distintas longitudes de onda (con interferómetros de referencia constante (izquierda) y de desplazamiento lateral (derecha)). Factor $10^1$ con $a0 = 1$ (ver texto).

procesando los datos obtnemos.

$$cg1 = \begin{pmatrix} -14.631 \\ -0.023 \\ 5.825\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg2 = \begin{pmatrix} -12.485 \\ -0.024 \\ 5.61\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg3 = \begin{pmatrix} -14.274 \\ -0.024 \\ 5.647\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg4 = \begin{pmatrix} -14.054 \\ -0.024 \\ 5.635\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg5 = \begin{pmatrix} -11.157 \\ -0.024 \\ 5.548\times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$cg6 = \begin{pmatrix} -15.909 \\ -0.023 \\ 5.933\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg7 = \begin{pmatrix} -6.222 \\ -0.023 \\ 5.911\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg8 = \begin{pmatrix} 7.027 \\ -0.023 \\ 5.966\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg9 = \begin{pmatrix} 11.574 \\ -0.024 \\ 5.617\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg10 = \begin{pmatrix} -4.255 \\ -0.024 \\ 5.531\times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$cg11 = \begin{pmatrix} -1.782 \\ -0.023 \\ 5.735\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg12 = \begin{pmatrix} -0.382 \\ 4.826\times 10^{-3} \\ 0.011 \end{pmatrix} \quad cg13 = \begin{pmatrix} 4.238 \\ -0.048 \\ 0.011 \end{pmatrix} \quad cg14 = \begin{pmatrix} 1.34 \\ -0.15 \\ 0.035 \end{pmatrix}$$

$$AMI - APG = -0.024$$

$$BMI - BPG = 6.29\times 10^{-3}$$

Figura 4.21: Resultados para el interferómetro de referencia constante

$$cg1 = \begin{pmatrix} -1.425 \\ -0.023 \\ 5.916\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg2 = \begin{pmatrix} -1.08 \\ -0.023 \\ 5.902\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg3 = \begin{pmatrix} -0.383 \\ -0.022 \\ 5.872\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg4 = \begin{pmatrix} 0.644 \\ -0.022 \\ 5.779\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg5 = \begin{pmatrix} 1.79 \\ -0.024 \\ 6.212\times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$cg6 = \begin{pmatrix} 3.213 \\ -0.023 \\ 6.019\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg7 = \begin{pmatrix} 4.605 \\ -0.023 \\ 5.994\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg8 = \begin{pmatrix} 5.835 \\ -0.023 \\ 5.992\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg9 = \begin{pmatrix} 6.709 \\ -0.023 \\ 6.006\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg10 = \begin{pmatrix} 6.992 \\ -0.023 \\ 6.054\times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$cg11 = \begin{pmatrix} 6.318 \\ -0.024 \\ 6.268\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg12 = \begin{pmatrix} 5.358 \\ -0.022 \\ 5.678\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg13 = \begin{pmatrix} 2.206 \\ -0.022 \\ 5.841\times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad cg14 = \begin{pmatrix} -2.571 \\ -0.022 \\ 5.861\times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$AMI - APG = -0.024$$

$$BMI - BPG = 6.29\times 10^{-3}$$

Figura 4.22: Resultados para el interferómetro de desplazamiento lateral.

donde el primer termino (renglón) de cada columna representa el valor del coeficiente C, el segundo termino de cada columna representa el valor del coeficiente A y el ultimo termino de cada columna representa el valor del coeficiente C. una ves obtenidos estos valores podemos reconstruir la frontera de los dieléctricos lo cual nos resulta en:

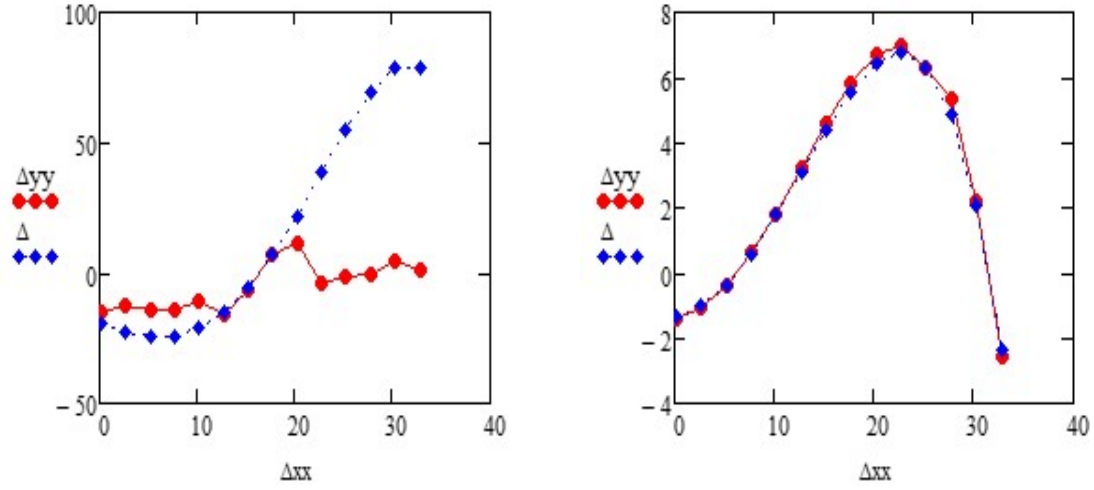


Figura 4.23: Reconstrucciones (en rojo) de interfaz con referencia constante (izquierda) y de la derivada de la interfaz con desplazamiento lateral (derecha). Se ha usado la misma región espacial en ambos casos. Factor $10^1$ con $a0 = 1$ (ver texto).

## 4.3. Discusión de los casos

En todos lo casos anteriores se observa que cuando se trabaja con el polinomio de quinto grado solo algunos valores arrojados son los esperados esto es debido a que los valores que no corresponden se encuentran en una

área donde el desenvolvimiento de fase no es permitido.
También vemos que al trabajar con la derivada del polinomio de quinto grado todos los valores para A y B y son los esperados esto se debe a que al trabajar con la derivada se tiene un área mayor de desenvolvimiento de fases.
Note la correspondiente disminución en el grado de reconstrucción de interfaz según el estrechamiento de la región de desenvoltura.

# Capítulo 5

## Relación con parámetros dispersivos de Abbe

### 5.1. Parámetros de Abbe

Una forma de caracterizar el vidrio que constituye un prisma, una lente o una placa de vidrio es considerando el comportamiento de su índice de refracción al variar la longitud de onda de la radiación que cruza la muestra de vidrio; para ello, Abbe introdujo el concepto de *poder dispersivo* el cuál lo definió mediante la siguiente expresión;

$$v_d = \frac{n_F - n_C}{n_d - 1} \tag{5.1}$$

donde,
$n_F$ es el índice de refracción para la línea del hidrógeno en 4861 $A^\circ$,
$n_C$ es el índice de refracción para la línea del hidrógeno en 6563 $A^\circ$,
$n_d$ es el índice de refracción para la línea del cloruro de sodio en 5876 $A^\circ$,
$n_D$ es el índice de refracción para la línea del cloruro de sodio en 5893 $A^\circ$;
con la notación de $A^\circ$ como un Amstrong que es igual a $10^{-8}$ cm. El número de Abbe se define como el inverso del poder dispersivo,

$$v = \frac{1}{v_d} = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C}, \tag{5.2}$$

Como puede observarse de la Ec. (3.1), para medir $n$ en diferentes longitudes de onda es necesario considerar el tipo de fuente luminosa y por esta razón, tradicionalmente, se emplean como fuentes de emisión aquellas que

contienen hidrógeno y cloruro de sodio (sal común). En ambas ecuaciones, (5.1) y (5.2), $n_d - 1$ es la refractividad y $n_F - n_C$ es la refractividad media; en general, para dos índices de refracción $n_1$ y $n_2$, $n_1 - n_2$ se conoce como la dispersión media parcial. Las letras empleadas como subíndices en el índice de refracción corresponden a la nomenclatura de Fraunhofer empleada en espectroscopía para las líneas espectrales del elemento o compuesto químico bajo consideración.
En el caso de un prisma dispersor, sabemos que, para ángulos pequeños, $sin(\alpha) = \alpha$, entonces se puede escribir

$$\delta_d = \alpha(n_d - 1) \Rightarrow n_d - 1 = \tfrac{\delta_d}{\alpha},$$

y de igual manera,

$$\delta_F - \delta C = (n_F - n_C)\,\alpha \Rightarrow n_F - n_C = \tfrac{\delta_F - \delta C}{\alpha},$$

de modo que, el número de Abbe puede expresarse, para un prisma delgado como:

$$v = \frac{\delta_d}{\delta_F - \delta_C}. \tag{5.3}$$

esta última ecuación representa el cociente entre lo que se definió como la refractividad y la refractividad media dada en la ecuación (5.2), pero ahora expresada en términos de los ángulos de desviación mínima para ciertas longitudes de onda. Al hecho de que un prisma disperse o descomponga la luz blanca en las diversas longitudes de onda que la componen (espectro visible) se le conoce como *dispersión cromática o aberración cromática.*

## 5.2. Relación entre $V_d$ con A y B

Si bien se han podido obtener los coeficientes de Cauchy (A, B y C) y se ha hecho mucho hincapié en la obtención de estos coeficientes, se ha de explicar de una manera más explícita que relación guardan estos con el índice de refracción.
Si bien hemos dados algunas visiones de lo que representa el índice de refracción y hemos dicho que relaciones se han de cumplir para poder saber

que índice le corresponde a cierto material, también hemos dado la dependencia de forma cuantitativa del concepto de índice de refracción, una de ellas nos dice que el índice de refracción depende del camino óptico seguido por el rayo de luz, de esta conclusión pudimos obtener relaciones que nos llevaron a concluir que la frontera entre dos materiales puede ser descrita y obtenerse mediante cierto tratamiento experimental y como resultado se obtenía que el coeficiente C de Cauchy nos describía la frontera entre los materiales estudiados, sin embargo este coeficiente dependía de los otros dos coeficientes, entonces veamos como se relacionan estos dos coeficientes, que es lo que significan y como podemos relacionarlos o que es lo que nos dicen del índice de refracción. si bien se ha hecho un estudio que muestra una relación entre los Coeficientes de Cauchy y la expresión para el índice de refracción (sección 3.1) también hemos visto una relación entre el índice de refracción y la forma de caracterizar una superficie óptica (en general una interfaz de vidrio) mediante los números de Abbe pero podrá existir una relación entre los números de Abbe y los Coeficientes de Cauchy, es lógico pensar en la existencia de una relación entre los parámetros de Cauchy y el número de Abbe ya que ambos están relacionados a la descripción del índice de refracción.

Por un lado vimos que los coeficientes de Cauchy A y B en cierta forma son determinantes para obtener el parámetro C el cual nos genera la frontera entre dos dieléctricos. Por otra parte lo que Abbe definió como poder dispersivo podría considerarse de manera muy general la forma del material (frontera) entonces tendríamos en cierta forma que $C \propto V_d$ por lo que inmediatamente podría verse una relación entre los coeficientes de Cauchy y el número de Abbe. en otras palabras

$$\frac{n_F - n_C}{n_d - 1} = \frac{B}{A} \tag{5.4}$$

dada esta relación el coeficiente B definiría la refractividad media del material y el coeficiente A seria la refractividad del material.

Un ejemplo del uso de los parámetros de Abbe se muestra en la fig 5.1. Se muestra ahí los vidrios ópticos: $n_d(587{,}6nm)$ como función del numero de Abbe V.

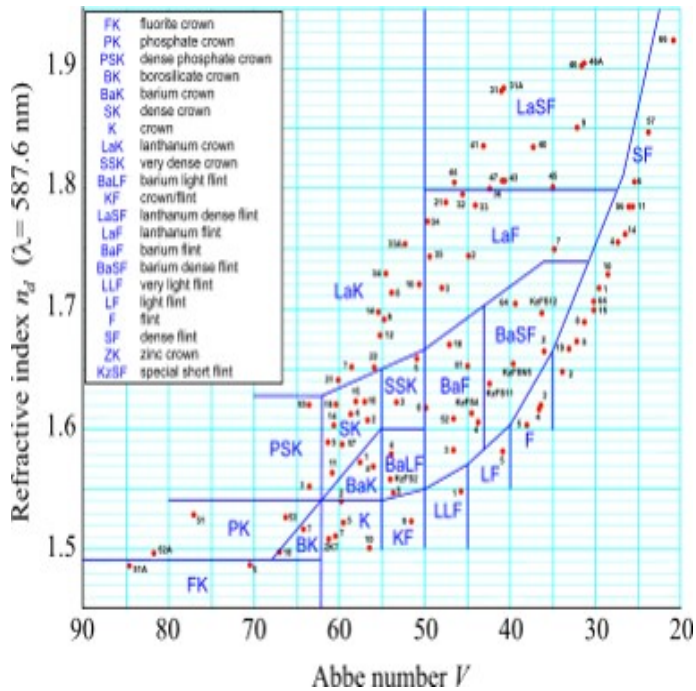


Figura 5.1: Número de Abbe para vidrio óptico $n_d(587{,}6nm)$ vs. V.

La condición establecida por la ec. 3.10 se cumple, como lo muestra la fig 5.2, donde se gráfica, por ejemplo, para $\lambda = 0{,}46\mu m$ y el caso 4.

$$\frac{(0{,}46)\Delta\phi 46}{(0{,}45)\Delta\phi 45}$$

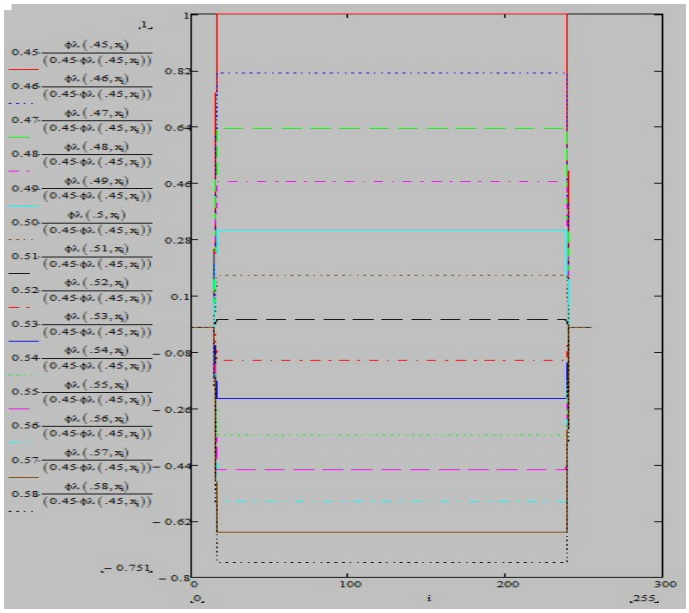


Figura 5.2: Gráfica de la ec. 3.10 con datos del caso 4.

como función de cada punto dentro de una región desenvuelta natural. Varias longitudes de onda se han usado. Se nota que cada cociente no depende de la posición.
Se comprueba que el cociente especifico anterior es prácticamente igual al cociente (a 10 cifras)

$$\frac{n0(0{,}460)-n1(0{,}460)}{n0(0{,}450)-n1(0{,}450)} = 0{,}8108351951$$

y similarmente para el resto de las longitudes de onda.

# Capítulo 6

## Conclusiones

Este proceso para obtener los coeficientes de Cauchy nos arroja datos importantes para su consideración ya que nuestro propósito general es saber la frontera entre dos dieléctricos y de manera aún mas general saber en primera instancia la forma de un objeto que se encuentre rodeado por otro y que no sea posible cortar para ver la forma del objeto que se encuentre encapsulado.
Los mejores resultados se vieron al realizar el experimento con el interferómetro de desplazamiento lateral ya que en éste la reconstrucción de la frontera coincidía en mas puntos de la frontera propuesta.
Por otro lado de los resultados obtenidos se observa que si usamos suficientes longitudes de onda para determinar la fase de manera interferométrica puede conducirnos a obtener parámetros de dispersión lineal.
También queda en explicito que es necesaria una referencia común para poder "desenvolver la fase".
Un interferómetro diferencial amplia el rango de desenvoltura natural.
Al derivar un interferómetro diferencial garantiza la consecución del orden cero absoluto de interferencia.
Se puede obtener la derivada de la distribución de fase envuelta y eventualmente podemos obtener la distribución de fase mediante integración numérica si es que esta se desea conocer.
Aun cuando nuestro método arroja datos muy favorables para nuestros propósitos el error intrínseco de este se debe de estudiar mas esto para saber si en estudios mas completos nuestro método resulta o arroja resultados útiles, por lo que necesitamos un mejor parámetro de ajuste para

reducir discrepancias.
este método se puede utilizar para la caracterización de muestras delgadas de materiales, ya que podemos calcular los parámetros adicionales de dispersión como los números de Abbe.

# Bibliografía


[1] Barrancos C., Jacob. Simulación para determinar dispersiones lineales normales en muestras Homogéneas por zonas con interferometría de corrimiento de fase y barrido en $\lambda$, Tesis licenciatura en Física, FCFM-BUAP, 2014

[2] Mantravadi, M.V.R.K, Lateral Shearing Interferometers, Optical Shop Testing, Ed. D. Malacara, Wiley

[3] Steel, W. H, Interferometry Cambridge Studies in Modern Optics, 2nd ed., sec 4.4. Shearing Interferometers, Cambridge University Press 1967, 1983

[4] Jackson D. Classical Electrodynamics. Tercera edición 1999.

[5] Reitz Milford. Fundamentos de la Teoría Electromagnética. Cuarta edición

[6] Feynman Lectures on Physics Volumen 2.

[7] Crawford Frank S. Ondas.

# Apéndice A

## Tecnica interferometrica de corrimiento de fase

Un problema fundamental en interferometría consiste en extraer información de fase a partir de interferogramas. Varios procedimientos se han propuesto y usado para lograrlo cuando sólo se dispone de un interferograma. Muchos de dichos métodos se basan en el examen de franjas de valores extremos (máximos o mínimos), como la técnica de esqueletización de franjas, entre otras. Pero al final de la década de los 70's se ha desarrollado Un nuevo paradigma, conocido corno interferometría heterodina. Discutiendo esta idea, puede desprenderse la técnica del corrimiento de fase como un caso especial. La interferometría con un solo interferograma también ocupa un lugar dentro de dicho esquema. En lo siguiente se discute la idea general.

### A.1. Interferencia con dos disturbios de diferente frecuencia.

Se supondrán dos disturbios de polarización s, (perpendicular) que son aproximadamente ondas planas, aunque con variaciones espaciales de fase. Tienen estas ondas las siguientes expresiones

$$V_1(x,t) = a_1(x)\, exp\left(-i\left[\vec{k}_1 \cdot \vec{x} - \omega_1 t + \phi_1(\vec{x})\right]\right), \tag{A.1}$$

$$V_2(x,t) = a_2(x)\, exp\left(-i\left[\vec{k}_2 \cdot \vec{x} - \omega_2 t + \phi_2(\vec{x})\right]\right), \tag{A.2}$$

donde las amplitudes $a_i(x)$ se permiten poseer variaciones en el espacio(fig. A.1), la polarización de ambas ondas es s (por lo cual la cuestión puede simplificarse al caso escalar), $\vec{k}_i$ son los vectores de la dirección principal de cada disturbio, $\omega_i$ es la frecuencia angular de cada onda.
Aunque $\omega_1 \neq \omega_2$, no se suponen muy diferentes ($\omega_1 \approx \omega_2$) para poder mantener la simplificación de que $\left|\vec{k}_1\right| = \left|\vec{k}_2\right|$. Las distribuciones espaciales de fase $\phi_i(x)$ representan entonces algunas desviaciones de una onda plana. Al depender aquellas de las diferencias de camino óptico en cada disturbio, son las portadoras de la información buscada (índices de refracción, desplazamientos, topografía, etc.).
La irradiancia resultante de la superposición de $V_1$ y $V_2$ resulta en

$$I_T(x,t) = \left|V_1(\vec{x},t) + V_2(\vec{x},t)\right|^2 \cong a_1^2(\vec{x}) + a_2^2(\vec{x}) + 2a_1(\vec{x})\, a_2(\vec{x})\, cos\left[\Omega t + \Delta\Phi(\vec{x})\right], \tag{A.3}$$

donde $\Omega = \omega_2 - \omega_1$, $\Delta\Phi(\vec{x}) = \phi_2(\vec{x}) - \phi_1(\vec{x})$.
Generalmente en interferometría, se busca conocer $\Delta\Phi(\vec{x})$ en base a $I_T$. Comúnmente, se elige una distribución de fase ($\phi_2(\vec{x})$, por ejemplo) y entonces de $\Delta\Phi(\vec{x})$ se conoce la otra distribución ($\phi_1(\vec{x})$). La conocida, usualmente una onda plana o esférica, se llama *onda de referencia*. La desconocida es la *señal*.
Alternativamente, puede escribirse

$$I_T(\vec{x},t) = a(\vec{x})\left\{1 + m(\vec{x})\, cos\left[\Omega t + \Delta\Phi(\vec{x})\right]\right\}, \tag{A.4}$$

con $a_1^2(\vec{x}) = a_1^2(\vec{x}) + a_2^2(\vec{x})$ y $m(\vec{x}) = \frac{2a_1(\vec{x})a_2(\vec{x})}{a(\vec{x})}$. Lo que nos dice que que $I_T$ depende no solo de $\Delta\Phi(\vec{x})$, sino de otros dos parametros más ($a_1(\vec{x})$ y $a_2(\vec{x})$ ó $a(\vec{x})$ y $m(\vec{x})$).
Pero experimentalmente el problema es inverso: se parte del interferograma para hallar la distribución. Usando un único interferograma como plantea la interferometría acarrea las siguientes inconveniencias:
$I_T(x)$ depende de tres cantidades desconocidas en general $(a_1(x), a_2(x), \Delta\Phi(\vec{x}))$ ó $(a(x), m(x), \Delta\Phi(\vec{x}))$. Sólo conociendo $a_1, a_2$, por ejemplo, puede definirse un problema inverso biunívoco, pero no

siempre se puede tener esa información.
Los datos más confiables ocurren en las posiciones de los valores extremos $I_T(x)$ de (para esqueletizar, por ejemplo). Pero por ser valores extremos, es en ellas donde precisamente existe menor sensibilidad en la detección $(\partial I\,(x)\,/\partial x = 0)$.
Los datos en valores extremos aparecen equidistantes en fase (cada cambio de $\pi$) y no equidistantes en el espacio. Entonces, las regiones de pocas franjas (o cambios menores a $\pi$) pueden quedar submuestradas.
La incertidumbre en la posición de las franjas depende de $\partial\Delta\Phi\,(x)\,/\partial x$ por lo cual resulta no uniforme.
La interpolación entre franjas es poco confiable porque $a(x)$ y $m(x)$ no son precisamente constantes en lo general. En algún tipo de problemas, $a(x)$ y $m(x)$ pueden mantenerse constantes, como es el caso en la prueba de componentes ópticas. Pero cuando los objetos de estudio son reflectores difusos, como en mecánica o en holografía, esa condición no puede cumplirse. El resto de inconvenientes, sin embargo, son más difíciles de superar.
Aunado a estos últimos, cabe mencionar la ambigüedad en cuanto al orden de interferencia (el orden del múltiplo de $\pi$) y el signo del mismo, ya que estos aspectos se hallan encubiertos por una función oscilante.
Aunque diversos esquemas atacan algunos de los inconvenientes mencionados, la introducción de un término adicional conocido (tal como $\Omega t$ en la ec. A.4) puede dar cuenta de todos los problemas indicados alcanzando precisiones en mediciones de fase mejores que $\lambda/20$ uniformemente en el campo de interferencia.
Para ver la razón de lo afirmado, considérese el interferómetro tipo Michelson. En él, un elemento fundamental consiste en la modulación sistemática de la diferencia de camino optico. Se consigue mediante un apilamiento piezoeléctrico cuyo desplazamiento a lo largo del brazo horizontal se controla con un voltaje $V$ opcional de cuatro alternativas indicadas. Cada alternativa determina un tipo de enfoque de captura de datos. Sobre el apilamiento, se fija el espejo de referencia. Otro elemento opcional y poco usual es el espejo auxiliar. Colocado junto al espejo de prueba, permite el monitoreo del desplazamiento real del espejo de referencia.

Con cualquiera de las posibles modulaciones del espejo a través del piezoeléctrico, se introduce una fase en el patrón de interferencia. Denotándola por $f$, la irradiancia puede expresarse como

$$I\left(x,t\right)=a\left(x\right)\left\{1+m\left(x\right)cos\left[\Delta\Phi\left(x\right)+f\right]\right\}. \tag{A.5}$$

para las modulaciones esquematizadas $f=f(t)$. Pero existen procedimientos basados en modulaciones espaciales, en los cuales $f=f(x)$.
Cuando $f=\Omega t$, la irradiancia se encuentra expresada como la ecuacion A.4. Aunque $f=\Omega t$ no es físicamente realizable, es prácticamente posible una excelente aproximación utilizando un voltaje tipo "diente de sierra" con tiempo de retroceso pequeño. De esta manera, se obtiene un patrón de interferencia desplazándose con velocidad constante. Ajustando el período del voltaje, su pendiente y el período del patrón, puede conseguirse un patrón en movimiento constante sin discontinuidades. En la figura se muestran dos detectores $A$ y $B$ separados una

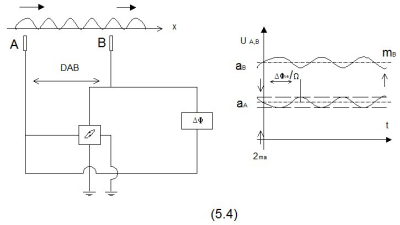


Figura A.1: Esquema de los detectores A y B.

distancia $D_{AB}$ sensando el patrón móvil. En rango lineal, cada detector envía sendas señales a dos canales de un osciloscopio. En el modo xy de éste, debe desplegarse una elipse debido a que la frecuencia de $u_A, u_B$ (las señales de cada detector) es la misma $\Omega$. La elipticidad, inclinación y sentido de giro de la elipse dependen de las amplitudes de cada señal, así como también de la fase $\Delta\Phi_{AB}$ óptica entre los puntos. Debido a las limitaciones de medir los parámetros referidos en base a una elipse, puede emplearse un medidor de fase. Dado que las fases electrónicas pueden medirse con precisiones del orden de $2\pi/1000$, la potencialidad en precisión del método es de

$\lambda/1000$. Nótese que esta propiedad no depende de la variación del patrón de interferencia sobre los puntos de medición, eliminando así algunas de las inconveniencias propias de la interferometría homodina.
Si ambos canales se despliegan paralelamente, se exhibirían dos señales con diferente valor de DC($a_A = a(x_A)$ y $a_B = a(x_B)$), diferente modulación de franjas ($m_A = m(x_A)$ y $m_B = m(x_B)$) y, sobre todo, una mutua diferencia de fase $\Delta\Phi_{AB}$. Los parámetros que influyen en la irradiancia total resultan separados aun cuando pueden variar a lo largo de la posición $x$.
Puede fijarse un punto $x_A$ y variar $D_AB$, "escaneando" $x_B$ como se considere apropiado a fin de hallar la distribución de fase $\Delta\Phi\,(x)$ respecto a la fase sobre el punto de posición $x_A$.
Alternativamente puede barrerse el campo con el par de detectores a distancia constante $D_{AB}$ para conocer directamente el gradiente de la distribución $\Delta\Phi\,(x)$, de más directa relación con la tensión y el esfuerzo de muestra sólidas bajo inspección ($F(x) = \Delta\Phi\,(x + D) - \Delta\Phi\,(x) \propto d\,(\Delta\Phi)\,/dx$).

# Apéndice B

## Listado de Programas

A continuación se en listan los programas que se ocuparon para obtener los resultados mostrados anteriormente

- ❖ Programa para obtener el ajuste no lineal
- ❖ Programa para el caso 1
- ❖ Programa para el caso 2
- ❖ Programa para el caso 3
- ❖ Programa para el caso 4

.

## B.1. Programa para obtener el ajuste no lineal.

El programa empieza definiendo variables de entorno e introduciendo datos que se tienen del material con que se va a trabajar.
$N := 256, \qquad i := 0 \ldots N-1 \qquad \lambda_{min} = 0{,}4 \qquad \lambda_{max} = 0{,}7$
$j := 0 \ldots N-1 \qquad \lambda_i = \lambda_{min} + (\lambda_{max} - \lambda_{min}) \cdot \frac{i}{N-1}$
$AMI := 1{,}518 \qquad BMI := 0{,}011$ Inmmersions mittle-Quartz
$APG := 1{,}542 \qquad BPG := 4{,}71 \times 10^{-3}$ Plagioklas
$n0(\lambda) := AMI + \frac{BMI}{\lambda^2} \qquad n1(\lambda) := APG + \frac{BPG}{\lambda^2}$
$\lambda_{cc} := \sqrt{\left|\frac{BMI-BPG}{AMI-APG}\right|} \qquad \lambda_{cc} = 0{,}512$
este es el valor de $\lambda$ en el cruce de las curvas de dispersión, a continuación se muestra la gráfica del en donde se cortan las curvas.

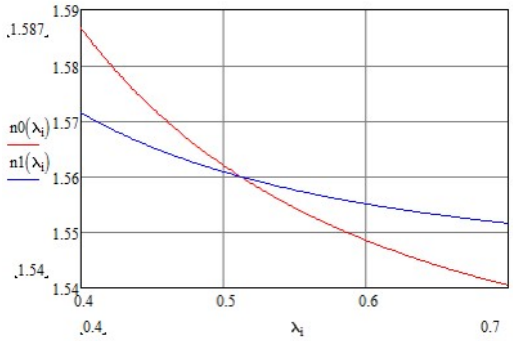


Figura B.1: Gráficas de dispersión.

Ahora se hacen las consideraciones del sistema físico para proceder a hacer la simulación, definiendo algunas variables.
$xmin := -40 \qquad xmax := 40 \qquad x_i := xmin + \frac{i \cdot xmax - xmin}{N-1}$
$ymin := -40 \qquad ymax := 40 \qquad y_i := ymin + \frac{i \cdot ymax - ymin}{N-1}$
$\Delta e := 20$ espesor de la muestra
$aw := 30$ largo de la muestra
$\alpha := \frac{\pi}{3}$ angulo de inclinación de la muestra
$\epsilon := tan(\alpha)$ altura de la muestra
$b := \Delta e - \epsilon \qquad \Delta y(x) := (x+1) \cdot tan(\alpha) - \Delta e$
Se definen los caminos ópticos
$\psi 1 := n1(\lambda) \cdot \Delta y(x) + n0(\lambda \cdot (\Delta e - \Delta y(x)))$
$\psi 2 := n0(\lambda) \cdot \Delta e$

$\phi\lambda(\lambda, x) := if\left[|x| \leq aw, \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (n0(\lambda) - n1(\lambda)) \cdot \Delta y(x + 87), 0\right]$
se grafican los caminos ópticos

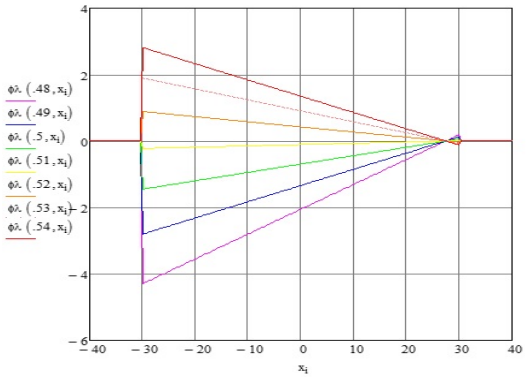


Figura B.2: caminos ópticos.

se obtiene el patrón de interferencia, que en general esta dado por
$I\lambda(\lambda, x, fn) = 1 + cos\left(\phi\lambda(\lambda, x) + \alpha r \cdot x + fn\right)$ $\alpha r := 0{,}1$ y se grafican

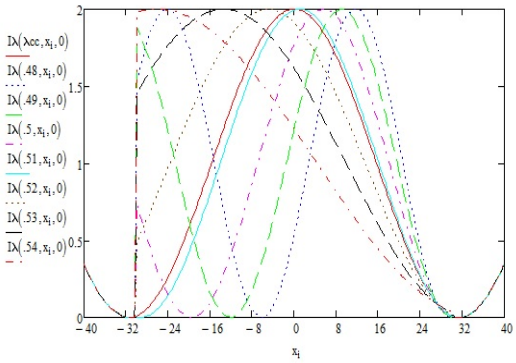


Figura B.3: Patrón de interferencia para los siete $\lambda's$.

se obtienen los interferogramas para cada longitud de onda y se superponen para obtener el interferogrma policromÃ¡tico

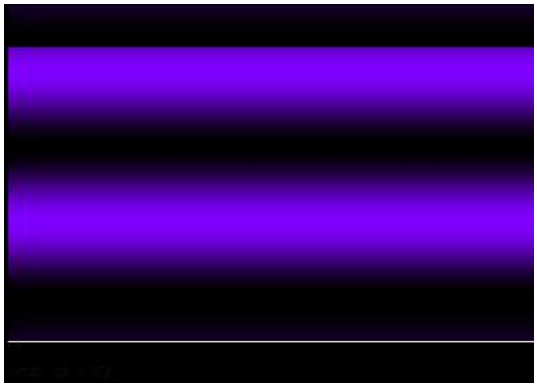

Figura B.4: Interferograma para $\lambda = 48\mu m$

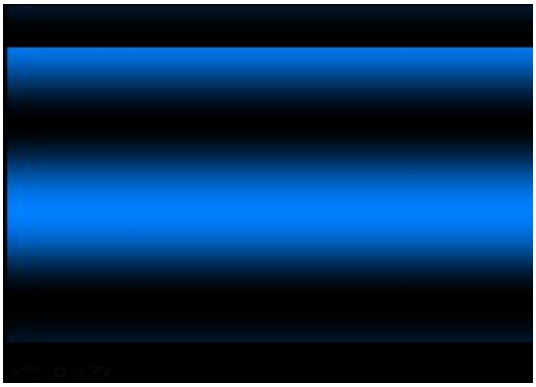

Figura B.5: Interferograma para $\lambda = 49\mu m$.

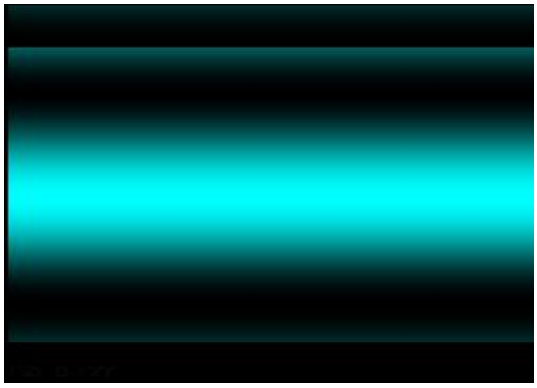

Figura B.6: Interferograma para $\lambda = 48\mu m$

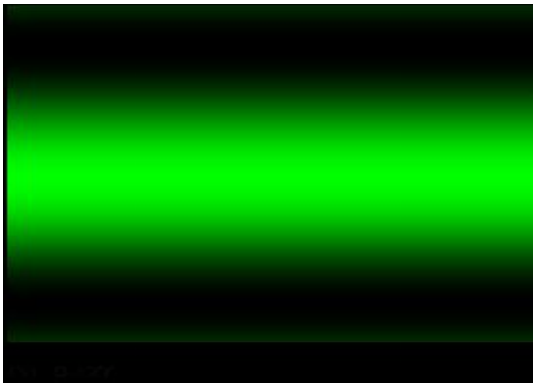

Figura B.7: Interferograma para $\lambda = 49\mu m$.

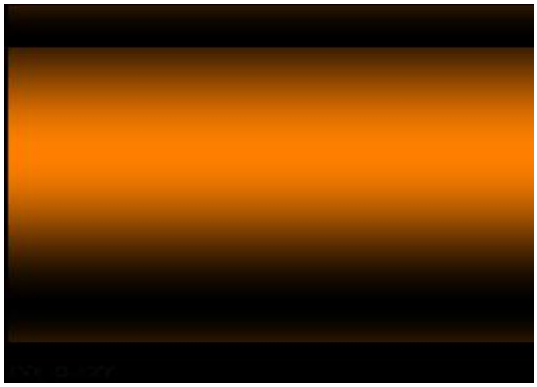

Figura B.8: Interferograma para $\lambda = 48\mu m$

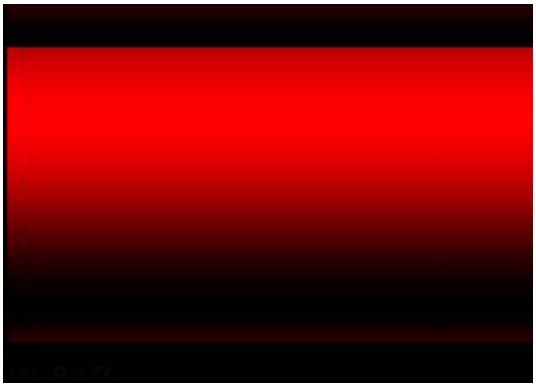

Figura B.9: Interferograma para $\lambda = 49\mu m$.

Figura B.10: Interferograma para $\lambda = 48\mu m$

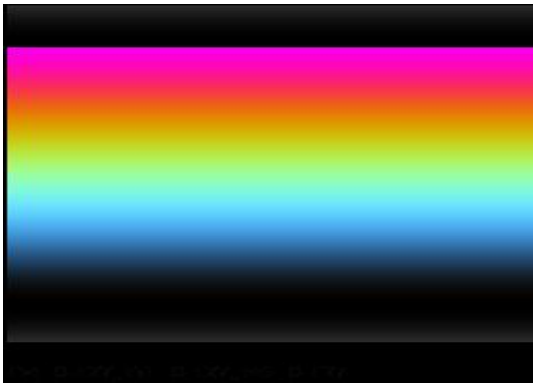

Figura B.11: Interferograma para $\lambda = 49\mu m$.

se hace el corrimiento de fase, calculando tres interferogramas con distinto ángulo inicial $\left(0, \frac{2\pi}{3}, \frac{-2\pi}{3}\right)$ y se extrae la fase deseada mediante la fórmula (esto se hace para cada una de las longitudes de onda)
$Tan\Delta\phi 48_{i,j} := \sqrt{3} \cdot \frac{I2-I1}{I0-I1-I2}$ $\quad \Delta\phi 48_{i,j} = atan\left(Tan\Delta\phi 48_{i,j}\right)$ donde I0, I1 y I2 representan las intensidades de los interferogramas que corresponden a los ángulos $\left(0, \frac{2\pi}{3}, \frac{-2\pi}{3}\right)$ respectivamente se grafica la fase

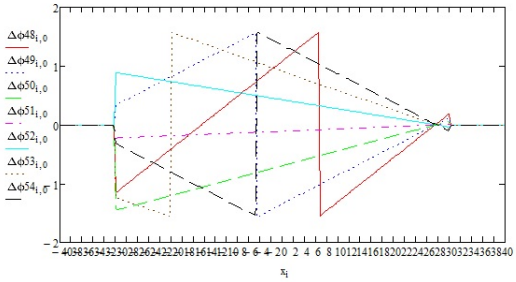


Figura B.12: fase.

dado que la fase presenta regiones en las que la dispersión es anómala y como nuestra función depende la distancia nos fijamos en puntos cercanos al origen en los que se de un desevolvimiento natural de la fase, entonces en cada uno de estos puntos donde se da un desenvolvimiento natural de la fase es donde podemos utilizar el método de Levenberg-Marquardt para determinar los coeficientes de Cauchy. definimos el vector $\Delta\phi$ y lo graficamos en función del incremento de $\lambda$

$$\Delta\phi 180 := \begin{bmatrix} (.48)^3 \cdot \frac{\Delta\phi 48}{2\pi} 180.0 \\ (.49)^3 \cdot \frac{\Delta\phi 49}{2\pi} 180.0 \\ (.50)^3 \cdot \frac{\Delta\phi 50}{2\pi} 180.0 \\ (.51)^3 \cdot \frac{\Delta\phi 51}{2\pi} 180.0 \\ (.52)^3 \cdot \frac{\Delta\phi 52}{2\pi} 180.0 \\ (.53)^3 \cdot \frac{\Delta\phi 53}{2\pi} 180.0 \\ (.54)^3 \cdot \frac{\Delta\phi 54}{2\pi} 180.0 \end{bmatrix}$$

Figura B.13: Interferograma para $\lambda = 48\mu m$

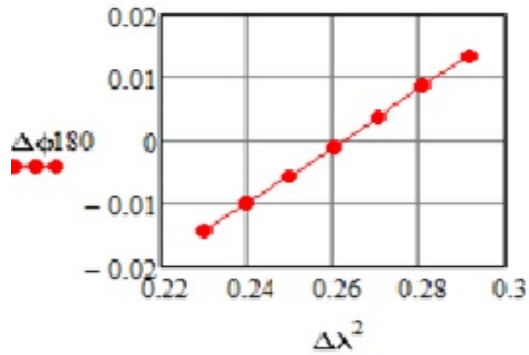


Figura B.14: Interferograma para $\lambda = 49\mu m$.

se obtiene la tabla

data1 :=

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0.48 | -0.014 |
| 1 | 0.49 | -0.01 |
| 2 | 0.5 | $-5.525 \cdot 10^{-3}$ |
| 3 | 0.51 | $-9.069 \cdot 10^{-4}$ |
| 4 | 0.52 | $3.803 \cdot 10^{-3}$ |
| 5 | 0.53 | $8.604 \cdot 10^{-3}$ |
| 6 | 0.54 | 0.013 |
| 7 | | |

Figura B.15: fase.

aplicando el metodo, se definen los vectores

$X1 := data^{<0>}$ $\quad Y1 := data^{<1>}$

$$f1(\lambda, C, A, B) := \begin{bmatrix} c \cdot (A \cdot \lambda^2 + B) \\ A \cdot \lambda^2 + B \\ c \cdot \lambda^2 \\ c \end{bmatrix} \qquad guess1 := \begin{pmatrix} 113{,}501 \\ -0{,}024 \\ 6{,}29 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

definimos el vector $cg1 := genfit(X1, Y1, guess1, f1)$ con lo que se obtiene el vector

$cg1 = \begin{pmatrix} -18{,}61 \\ -0{,}024 \\ 6{,}269 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$ este vector nos proporciona los coeficientes de Cauchy

estos los tomamos como verdaderos dado que $\frac{cg1_2}{cg1_1} = -0{,}262$ y sabemos

que $\lambda_{cc}^2 = 0{,}262$ por lo tanto $cg_2 = B$, $cg1_1 = A$ y $cg1_0 = C$
este proceso se hace para todos los puntos que estemos estudiando. Ademas podemos con estos coeficientes obtener la distribucionde fase mediante $h1(\lambda) := cg1_0 \cdot \left(cg1_1 \cdot \lambda^2 + cg1_2\right)$

## B.2. Programa para casos.

El programa que sigue será el que se ha utilizado para hacer todos los casos, como se mencionó en su respectiva sección el cambio en cada uno de los casos casos radica en la forma de como se define el polinomio y se mostrara el programa "base" para calcular los casos discutidos anteriormente.
se empieza definiendo las variables del entorno $N := 256$, $\quad i := 0 \ldots N-1 \quad \lambda_{min} = 0{,}4 \quad \lambda_{max} = 0{,}7$
$j := 0 \ldots N-1 \quad \lambda_i = \lambda_{min} + (\lambda_{max} - \lambda_{min}) \cdot \frac{i}{N-1}$
$AMI := 1{,}518 \quad BMI := 0{,}011$ Inmmersions mittle-Quartz
$APG := 1{,}542 \quad BPG := 4{,}71 \times 10^{-3}$ Plagioklas
$n0(\lambda) := AMI + \frac{BMI}{\lambda^2} \quad n1(\lambda) := APG + \frac{BPG}{\lambda^2}$
$\lambda_{cc} := \sqrt{\left|\frac{BMI-BPG}{AMI-APG}\right|} \quad \lambda_{cc} = 0{,}512$
este es el valor de $\lambda$ en el cruce de las curvas de dispersión, a continuación se muestra la gráfica del en donde se cortan las curvas.

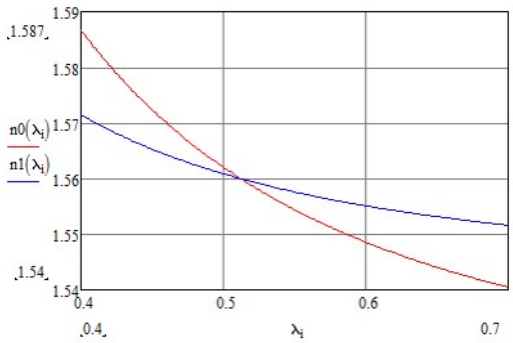


Figura B.16: Gráficas de dispersión.

$xmin := -40 \quad xmax := 40 \quad x_i := xmin + \frac{i \cdot xmax - xmin}{N-1}$
$ymin := -40 \quad ymax := 40 \quad y_i := ymin + \frac{i \cdot ymax - ymin}{N-1}$
determinemos las consideraciones de nuestro sistema físico, primero traba-

jaremos con un interferómetro tipo Mach-Zender por lo que necesitamos definir nuestro polinomio de quinto grado y despues trabajaremos con un interferómetro de desplazamiento lateral para la deriva de nuestro polinomio de quinto grado.

**Interferometro Mach-Zender**

Definimos el polinomio de quinto grado $\Delta z := 200$ $aw := 35$ $\beta := 0$
$a0 := 0$ $a1 := -0{,}135$ $a2 := 0{,}0027$ $a3 := 0{,}0009$ $a4 := 0{,}000002$ $a5 := 0{,}0000006$
$\Delta y(x) := \left(a0 + a1 * x + a2 * x^2 + a3 * x^3 + a4 * x^4 + a5 * x^5\right) * 10^0$
graficamos el polinomio

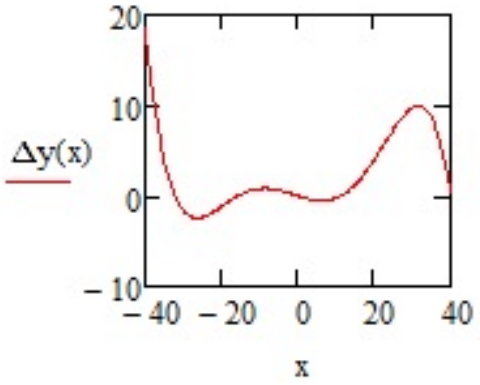


Figura B.17: polinomio de quinto grado.

Se definen los caminos ópticos
$\psi 1 := n1(\lambda) \cdot \Delta y(x) + n0(\lambda) \cdot (\Delta z - \Delta y(x))$
$\psi 2 := n0(\lambda) \cdot \Delta z$
$\phi\lambda(\lambda, x) := if\left[|x| \leq aw, \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (n0(\lambda) - n1(\lambda)) \cdot \Delta y(x+0) + \beta, 0\right]$ se grafican los caminos ópticos para cada una de las longitudes de onda

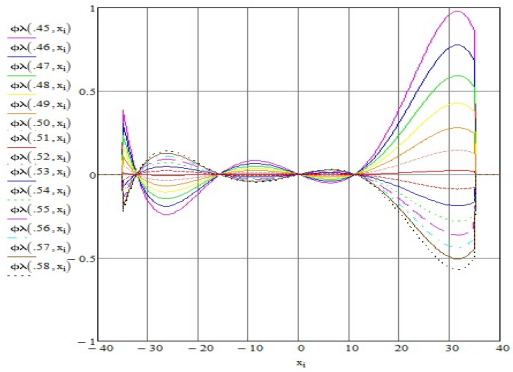


Figura B.18: polinomio de quinto grado.

se obtiene el patrón de interferencia, que en general esta dado por
$I\lambda(\lambda, x, fn) = 1 + cos\left(\phi\lambda(\lambda, x) + \alpha r \cdot x + fn\right)$ $\alpha r := 0{,}1$ y se grafican

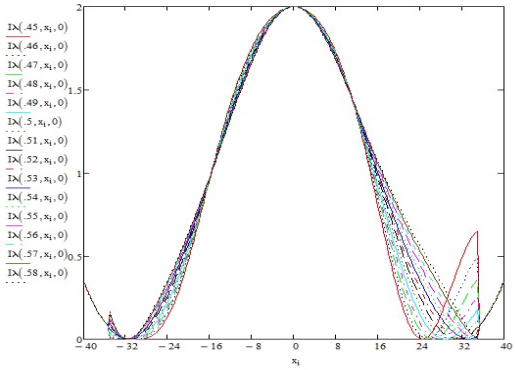


Figura B.19: Patrónes de interferencia de las diferentes longitudes de onda.

se obtienen los interferogramas para cada longitud de onda y se superponen para obtener el interferograma policromático

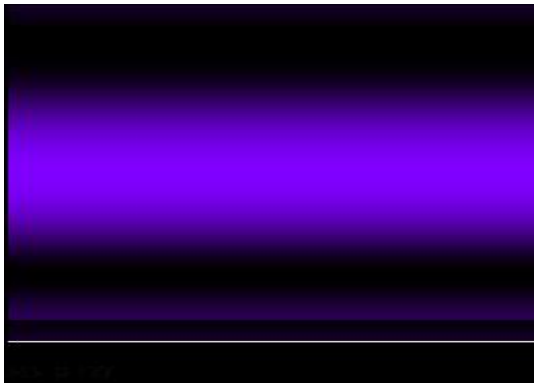

Figura B.20: Interferograma para $\lambda = 45\mu m$

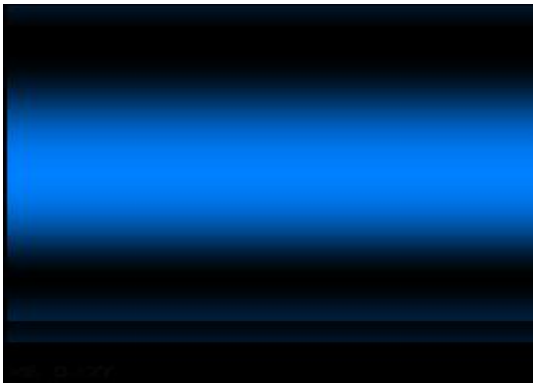

Figura B.21: Interferograma para $\lambda = 46\mu m$.

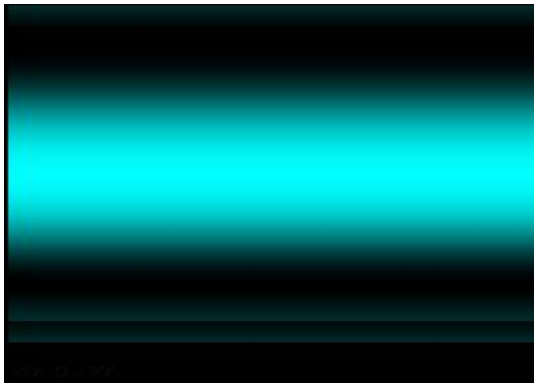

Figura B.22: Interferograma para $\lambda = 47\mu m$

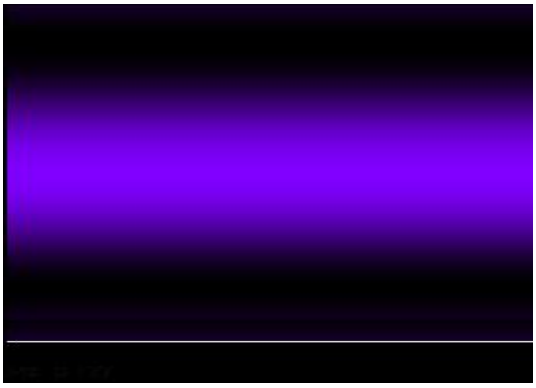

Figura B.23: Interferograma para $\lambda = 48\mu m$.

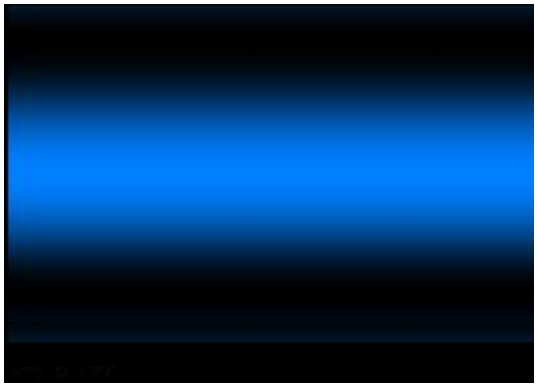

Figura B.24: Interferograma para $\lambda = 49\mu m$

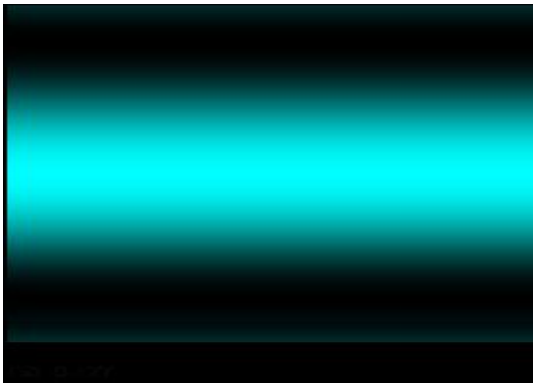

Figura B.25: Interferograma para $\lambda = 50\mu m$.

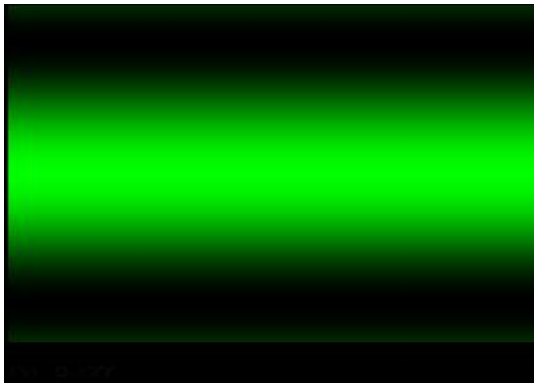

Figura B.26: Interferograma para $\lambda = 51\mu m$

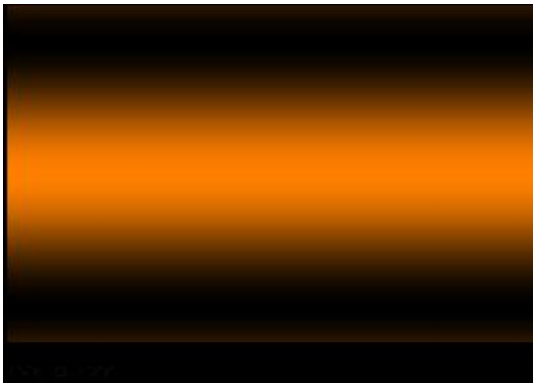

Figura B.27: Interferograma para $\lambda = 52\mu m$.

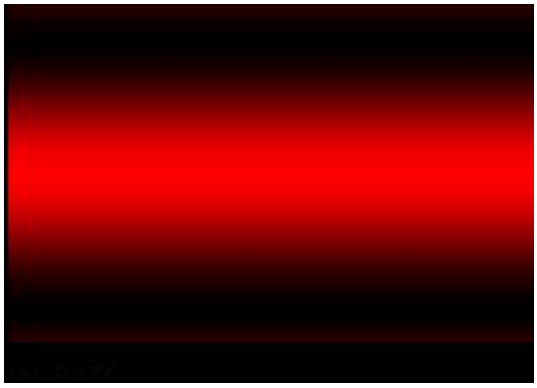

Figura B.28: Interferograma para $\lambda = 53\mu m$

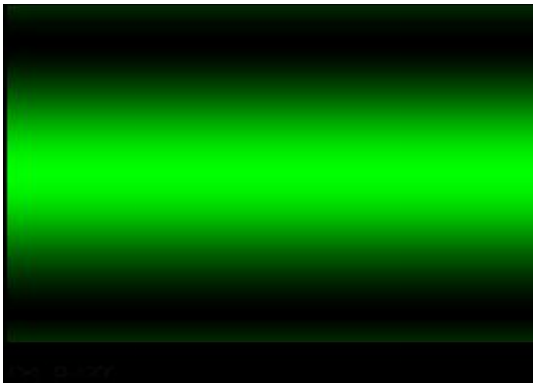

Figura B.29: Interferograma para $\lambda = 54\mu m$.

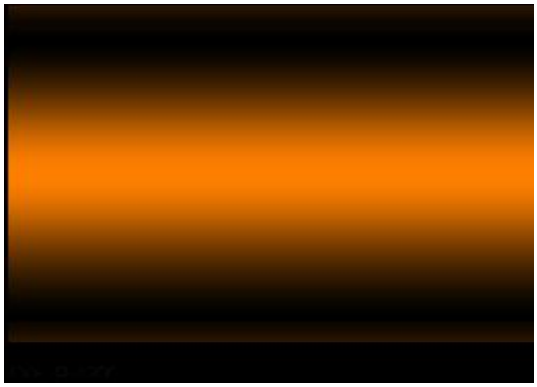

Figura B.30: Interferograma para $\lambda = 55\mu m$

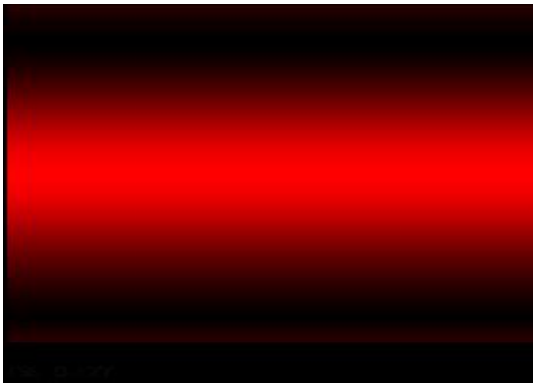

Figura B.31: Interferograma para $\lambda = 56\mu m$.

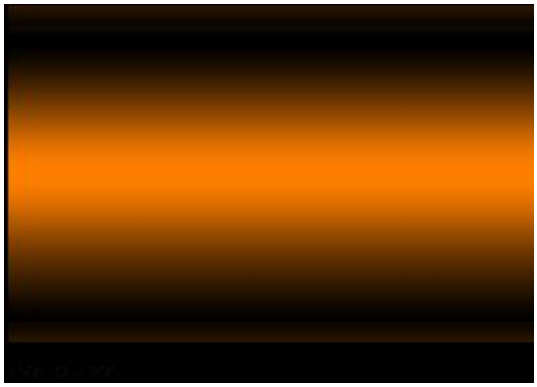

Figura B.32: Interferograma para $\lambda = 57\mu m$

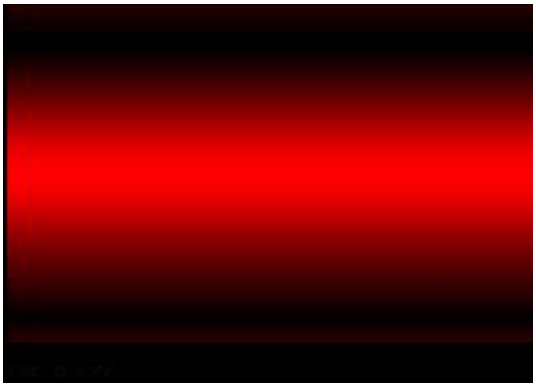

Figura B.33: Interferograma para $\lambda = 58\mu m$.

Figura B.34: Interferograma para policromático

se hace el corrimiento de fase, calculando tres interferogramas con distinto ángulo inicial $\left(0, \frac{2\pi}{3}, \frac{-2\pi}{3}\right)$ y se extrae la fase deseada mediante la fórmula (esto se hace para cada una de las longitudes de onda)
$Tan\Delta\phi 48_{i,j} := \sqrt{3} \cdot \frac{I2-I1}{I0-I1-I2}$ $\quad \Delta\phi 48_{i,j} = atan\left(Tan\Delta\phi 48_{i,j}\right)$ donde I0, I1 y I2 representan las intensidades de los interferogramas que corresponden a los ángulos $\left(0, \frac{2\pi}{3}, \frac{-2\pi}{3}\right)$ respectivamente se grafica la fase

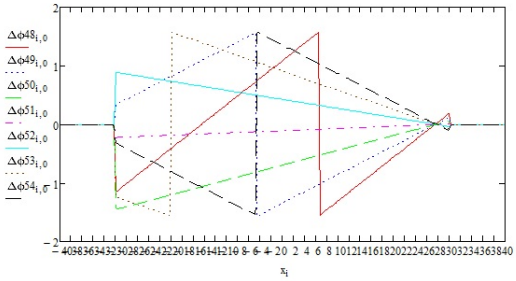


Figura B.35: fase.

se utiliza el método de Levenberg-Marquardt para determinar los coeficientes de Cauchy.
definimos el vector $\Delta\phi$ y lo graficamos en función del incremento de $\lambda$

$$\Delta\phi128 := \begin{bmatrix} (45)^3 \cdot \frac{\Delta\phi45_{128,0}}{2\pi} \\ (46)^3 \cdot \frac{\Delta\phi46_{128,0}}{2\pi} \\ (47)^3 \cdot \frac{\Delta\phi47_{128,0}}{2\pi} \\ (48)^3 \cdot \frac{\Delta\phi48_{128,0}}{2\pi} \\ (49)^3 \cdot \frac{\Delta\phi49_{128,0}}{2\pi} \\ (50)^3 \cdot \frac{\Delta\phi50_{128,0}}{2\pi} \\ (51)^3 \cdot \frac{\Delta\phi51_{128,0}}{2\pi} \\ (52)^3 \cdot \frac{\Delta\phi52_{128,0}}{2\pi} \\ (53)^3 \cdot \frac{\Delta\phi53_{128,0}}{2\pi} \\ (54)^3 \cdot \frac{\Delta\phi54_{128,0}}{2\pi} \\ (55)^3 \cdot \frac{\Delta\phi55_{128,0}}{2\pi} \\ (56)^3 \cdot \frac{\Delta\phi56_{128,0}}{2\pi} \\ (57)^3 \cdot \frac{\Delta\phi57_{128,0}}{2\pi} \\ (58)^3 \cdot \frac{\Delta\phi58_{128,0}}{2\pi} \end{bmatrix}$$

Figura B.36: vector de fases

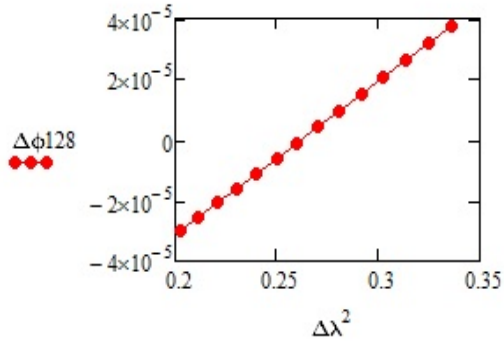


Figura B.37: grafica de Fase vs $\Delta\lambda$.

se definen los vectores
$X1 := data^{<0>}$ $\quad Y1 := data^{<1>}$

$$f1(\lambda, C, A, B) := \begin{bmatrix} c \cdot (A \cdot \lambda^2 + B) \\ A \cdot \lambda^2 + B \\ c \cdot \lambda^2 \\ c \end{bmatrix} \qquad guess1 := \begin{pmatrix} -1{,}817 \times 10^4 \\ -0{,}024 \\ 6{,}29 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

definimos el vector $cg1 := genfit(\Delta\lambda, \Delta\phi128, guess1, f1)$ con lo que se obtiene el vector
$cg1 = \begin{pmatrix} -0{,}023 \\ -0{,}022 \\ 5{,}829 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$ este vector nos proporciona los coeficientes de Cauchy
estos los tomamos como verdaderos dado que $\frac{cg1_2}{cg1_1} = -0{,}262$ y sabemos que $\lambda_{cc}^2 = 0{,}262$ por lo tanto $cg_2 = B$, $cg1_1 = A$ y $cg1_0 = C$
y obtenemos valores para la expresión
$h1(\lambda) := cg1_0 \cdot \left(cg1_1 \cdot \lambda^2 + cg1_2\right)$

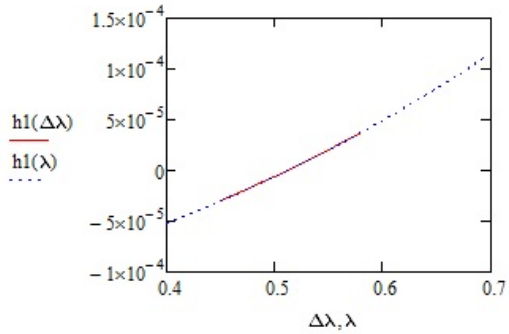


Figura B.38: fase.

después de obtener todos los vectores $cgx$ con $x = 1 \cdots 14$ (digamos uno por cada longitud de onda que consideremos, pueden ser más), definimos los siguientes vectores

$$\Delta yy := \begin{pmatrix} cg1_0 \\ cg2_0 \\ cg3_0 \\ cg4_0 \\ cg5_0 \\ cg6_0 \\ cg7_0 \\ cg8_0 \\ cg9_0 \\ cg10_0 \\ cg11_0 \\ cg12_0 \\ cg13_0 \\ cg14_0 \end{pmatrix} \qquad \Delta x := \begin{pmatrix} 128 \\ 136 \\ 144 \\ 152 \\ 160 \\ 168 \\ 176 \\ 184 \\ 192 \\ 200 \\ 208 \\ 216 \\ 224 \\ 232 \end{pmatrix}$$

$$\Delta xx := \begin{pmatrix} x_{128} \\ x_{136} \\ x_{144} \\ x_{152} \\ x_{160} \\ x_{168} \\ x_{176} \\ x_{184} \\ x_{192} \\ x_{200} \\ x_{208} \\ x_{216} \\ x_{224} \\ x_{232} \end{pmatrix} \qquad \Delta := \begin{pmatrix} \Delta y(x_{128}) \\ \Delta y(x_{136}) \\ \Delta y(x_{144}) \\ \Delta y(x_{152}) \\ \Delta y(x_{160}) \\ \Delta y(x_{168}) \\ \Delta y(x_{176}) \\ \Delta y(x_{184}) \\ \Delta y(x_{192}) \\ \Delta y(x_{200}) \\ \Delta y(x_{208}) \\ \Delta y(x_{216}) \\ \Delta y(x_{224}) \\ \Delta y(x_{232}) \end{pmatrix}$$

debemos tener en consideración que lo que estamos haciendo es para reconstruir la frontera en este caso el propio polinomio de quinto grado, esto de acuerdo al análisis del programa es el coeficiente C de Cauchy que es el primer término (o entrada) de cada uno de nuestros vectores $cgx$ es por eso que se definen los vectores anteriores, graficamos estos vectores

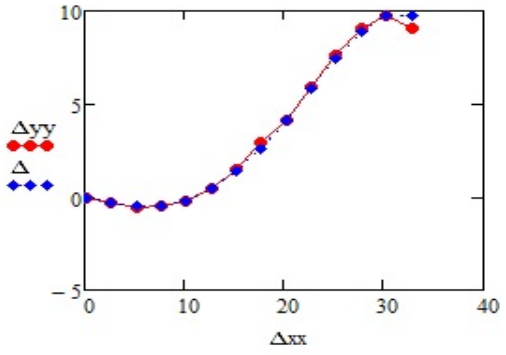


Figura B.39: reconstrucción de una parte del polinomio

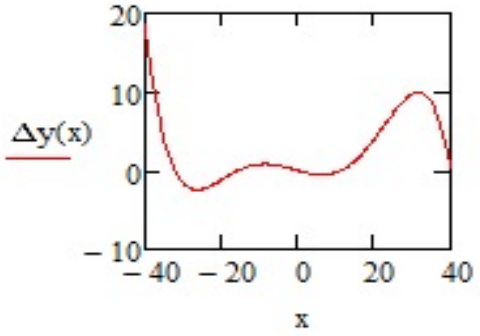


Figura B.40: polinomio de quinto grado.

ahora se trabajara con el interferómero de desplazamiento lateral

### Interferómetro de desplazamiento lateral

Se empieza definiendo la derivada del polinomio de quinto grado

$\Delta hp(z) := \frac{d}{dz}(\Delta y(z))$ $\frac{d}{dz}\Delta y(z) \rightarrow 0{,}0054z + 0{,}0027z^2 + 0{,}00000z^3 - 0{,}000003z^4 - 0{,}135$

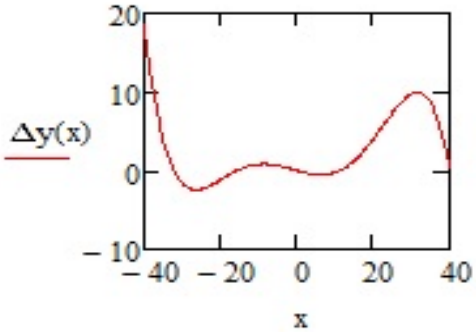


Figura B.41: polinomio de quinto grado

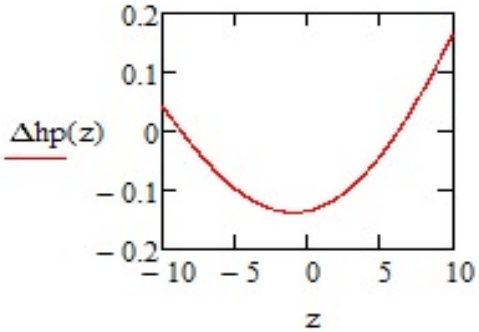


Figura B.42: derivada del polinomio de quinto grado.

$\phi\lambda(\lambda, x) := if\left[|x| \leq aw, \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (n0(\lambda) - n1(\lambda)) \cdot \Delta hp(x+0) + \beta, 0\right]$ se tienen los caminos ópticos
y se siguen los mismos pasos que cuando se trabajaba con el interferómetro tipo Mach-Zender para obtener las distribuciones de fase, los interferogramas, el desenvolvimiento de fase y los coeficientes de Cauchy, después se definen los siguientes vectores que nos ayudaran a reconstruir la frontera de nuestro objeto.

$$\Delta yy := \begin{pmatrix} cg1_0 \\ cg2_0 \\ cg3_0 \\ cg4_0 \\ cg5_0 \\ cg6_0 \\ cg7_0 \\ cg8_0 \\ cg9_0 \\ cg10_0 \\ cg11_0 \\ cg12_0 \\ cg13_0 \\ cg14_0 \end{pmatrix} \qquad \Delta x := \begin{pmatrix} 128 \\ 136 \\ 144 \\ 152 \\ 160 \\ 168 \\ 176 \\ 184 \\ 192 \\ 200 \\ 208 \\ 216 \\ 224 \\ 232 \end{pmatrix}$$

$$\Delta xx := \begin{pmatrix} x_{128} \\ x_{136} \\ x_{144} \\ x_{152} \\ x_{160} \\ x_{168} \\ x_{176} \\ x_{184} \\ x_{192} \\ x_{200} \\ x_{208} \\ x_{216} \\ x_{224} \\ x_{232} \end{pmatrix} \qquad \Delta := \begin{pmatrix} \Delta hp(x_{128}) \\ \Delta hp(x_{136}) \\ \Delta hp(x_{144}) \\ \Delta hp(x_{152}) \\ \Delta hp(x_{160}) \\ \Delta hp(x_{168}) \\ \Delta hp(x_{176}) \\ \Delta hp(x_{184}) \\ \Delta hp(x_{192}) \\ \Delta hp(x_{200}) \\ \Delta hp(x_{208}) \\ \Delta hp(x_{216}) \\ \Delta hp(x_{224}) \\ \Delta hp(x_{232}) \end{pmatrix}$$

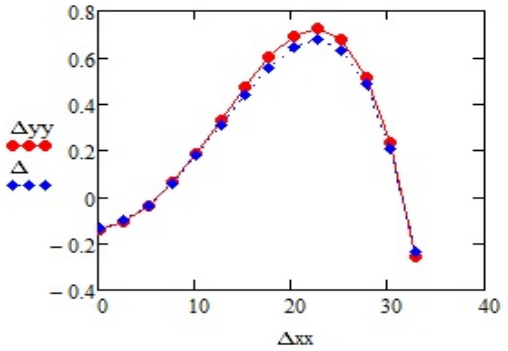


Figura B.43: derivada obtenida por los coeficientes de Cauchy

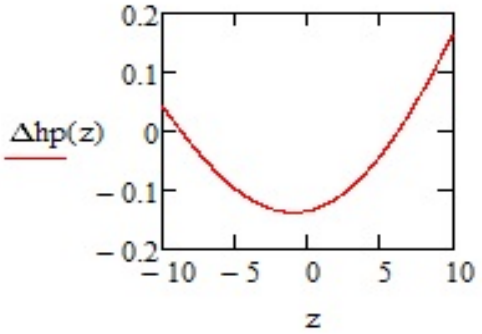


Figura B.44: derivada del polinomio de quinto grado.

y así es como se obtienen los resultados de los casos que se discutieron anteriormente.