



# UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUEBLA

---

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

SOLUCIÓN DE VACÍO PARA ESPACIOS ESTACIONARIOS  
CON DOS SIMETRÍAS Y CONFORMALMENTE PLANOS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
LICENCIATURA EN FÍSICA

PRESENTA:  
CUAUHTEMOC CAMPUZANO VARGAS

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. GERARDO F. TORRES DEL CASTILLO

PUEBLA, PUE., MÉXICO  
FEBRERO 2014



---

## Agradecimientos

A mi madre... por sus palabras que siempre me acompañaron en los momentos difíciles de mi carrera: Hubieras estudiado contaduría

A la memoria de mi padre Q.E.P.D.

Al Profe Gerardo, por todo: por la física, por la dedicación, por el ejemplo, por compartir la pasión.

A mis sinodales y a la ECFM por todo lo que en nosotros dejaron, entre todo, por ser la meta de lo a que queremos pertenecer.

A Nelly.

A mis hermanas y hermanos, las Mujeres de la vida masoquista, Isaico, p...Roberto, Guacaro, Agustin, TiranoSayas Gandallicus... a la Sala Lacandona, por los buenos recuerdos.

A ... aja, aja, aja, siiiii... Rafaín...

# Índice general

<b>Contenido</b>	<b>I</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Conceptos preliminares</b>	<b>7</b>
1.1. Representación del espacio-tiempo . . . . .	7
1.2. Clasificación del espacio-tiempo según sus simetrías . . . . .	8
1.3. El tensor de Einstein . . . . .	10
1.3.1. Símbolos de Christoffel . . . . .	10
1.3.2. El tensor de Riemann . . . . .	11
1.3.3. El tensor de Ricci y escalar de Ricci . . . . .	12
1.3.4. Tensor de Einstein . . . . .	14
1.4. Simetrías y geometría . . . . .	14
1.4.1. Ecuación de las geodésicas . . . . .	14
1.4.2. Vectores de Killing . . . . .	15
<b>2. Ecuaciones de Einstein</b>	<b>19</b>
2.1. Ecuaciones de Einstein al vacío . . . . .	23
<b>3. Soluciones de las ecuaciones de Einstein</b>	<b>27</b>
3.1. Soluciones con valor del parámetro $\epsilon = 1$ . . . . .	28
3.2. Soluciones con valor del parámetro $\epsilon = -1$ . . . . .	30
3.3. Métricas encontradas . . . . .	30



# Introducción

Definitivamente las ecuaciones de Einstein son la conclusión más impactante de la teoría de la Relatividad General (RG) y describen el campo gravitacional de configuraciones de materia y energía, en su forma tensorial se escriben como sigue:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1)$$

el lado izquierdo de la ecuación anterior,  $G_{\mu\nu}$ , es conocido como el tensor de Einstein; y proporciona información acerca de la curvatura del espacio-tiempo. En el lado derecho  $\kappa$  es una constante de proporcionalidad y  $T_{\mu\nu}$  el tensor de energía-momento el cual caracteriza todo aquello que genera la curvatura del espacio-tiempo, i.e., la distribución tanto de masa como de energía. Operacionalmente son un sistema acoplado de diez ecuaciones diferenciales parciales no lineales de segundo orden. Así estas ecuaciones cuantifican por un lado la geometría curva del espacio-tiempo (el lado izquierdo de la ecuación) y cómo es afectada por la presencia de materia; que a su vez es afectada por la geometría. La constante de proporcionalidad ayuda a regresar, en el límite clásico, a la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho, \quad (2)$$

donde  $\rho$  es la densidad de masa,  $\phi$  es el potencial gravitacional y  $G$  es la constante de gravitación universal.

El presente trabajo está enfocado a resolver las ecuaciones de campo en el caso en que no hay materia presente; lo que equivale a resolver el sistema de ecuaciones;

$$G_{\mu\nu} = 0_{\mu\nu}. \quad (3)$$

En la literatura resolver este problema para determinada geometría es referido como encontrar soluciones al vacío de las ecuaciones de Einstein. La finalidad de concentrarnos en ellas es la de estudiar los efectos gravitacionales en una región del espacio-tiempo fuera de la fuente [1][2][3][4].

Históricamente la búsqueda de soluciones a las ecuaciones de Einstein es uno de los primeros temas de investigación que surgieron a partir de la publicación de la teoría de la Relatividad General. Las primeras soluciones publicadas se deben a Karl Schwarzschild en 1916 para una geometría esférica y se resolvieron para el vacío y poco tiempo después con materia. La interpretación de esas soluciones es, en el caso extremo, de un agujero negro esférico con una singularidad en el centro y con un parámetro  $M$  identificado como la masa del agujero; en el caso no extremo es un modelo de una estrella estática y esférica. Sin embargo, esta interpretación que actualmente les damos evolucionó a partir de la predicción de una singularidad en el espacio-tiempo cuando la solución llega al punto conocido como el radio de Schwarzschild [1, 5]. Para 1924 Arthur Eddington demuestra que la singularidad desaparece después de un cambio de coordenadas y es aclarado por Georges Lemaître en 1933 que la singularidad en el radio de Schwarzschild es debido a una singularidad en las coordenadas, y no física. En 1958 Finkelstein introduce el concepto de horizonte de eventos al identificar el radio de Schwarzschild con una superficie 'una membrana unidireccional, en la que las influencias causales solo pueden cruzar en una dirección', por otro lado esta interpretación corresponde el punto de vista de los observadores que caen atravesando el horizonte de eventos. La máxima extensión a las coordenadas fue hecha por Martin Kruskal en 1960. La generalización a la solución de la geometría esférica fue encontrada por Kerr en 1963 quien obtiene la solución de un espacio-tiempo con una métrica estacionaria circular y axial simétrica, que se interpreta como un agujero negro rotando, con dos parámetros identificados como la masa  $M$  y el momento angular  $J$ .<sup>1</sup> En 1967 Wheeler introduce el término de agujero negro (black hole). A partir de las interpretaciones más aceptadas de las soluciones se empiezan a entender los objetos extremos que predice la teoría, los ahora famosos agujeros negros, agujeros de gusano y otros objetos no tan famosos como las ondas gravitacionales y las singularidades del espacio-tiempo. La teoría también es usada para modelar al Universo, y estrellas (objetos compactos)[5].<sup>2</sup>

En cuatro dimensiones el espacio-tiempo es descrito por una métrica simétrica  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ ,  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$  que es representada por una matriz  $4 \times 4$ . La métrica más general debe contener 10 funciones  $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^0, x^1, x^2, x^3)$  que dependen de todas las coordenadas, sin pérdida de generalidad 4 de estas funciones es posible escogerlas como sistema coordenado, por lo que solo hay libertad para 6 de las funciones, y ya que como se mencionó anteriormente, las ecuaciones de Einstein son

---

<sup>1</sup>Ezra Newman en 1965 encuentra la solución para una métrica con carga eléctrica conocida como la solución de Kerr-Newman; a partir de esta solución, Werner Israel, Brandon Carter y David Robinson, establecen que un agujero negro estacionario es completamente descrito por tres parámetros, masa  $M$ , carga  $q$  y momento angular  $J$ .

<sup>2</sup>Detalles de como evolucionó la interpretación de la singularidad del espacio de Schwarzschild, pueden verse en wikipedia donde además hay un listado de resultados importantes de la RG en el link a la era de oro de la RG, Golden Eage

un conjunto acoplado de 10 ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden no lineales para 6 funciones. Básicamente las ecuaciones son obtenidas algebraicamente con las primeras y segundas derivadas de la métrica. El problema consiste en que un sistema con las características mencionadas no cuenta con un método general para resolverse, además de que nada asegura que el sistema tenga solución analítica.

La forma de lidiar con un sistema de ecuaciones como el obtenido a partir de las ecuaciones de campo, es similar al que se usó por primera vez y emula la práctica frecuente en física, de idealizar el fenómeno; en el artículo original de la primera solución Schwarzschild hace referencia a un trabajo de Einstein en el que propone estudiar el movimiento de un partícula puntual sin masa entre dos puntos fijos, i.e., la geodésica en una variedad. En un primer esfuerzo para resolver este problema Einstein propone que la descripción estática de la partícula debe obedecer las siguientes condiciones (ver [6] y referencias dentro):

- 1) Todas las funciones métricas  $g_{\mu\nu}$  deben ser independientes de la coordenada  $x_0$ ,
- 2)  $g_{i0} = g_{0i} = 0$  con  $i = 1, 2, 3$ ,
- 3) La solución debe ser invariante bajo rotaciones de las coordenadas  $x_1, x_2, x_3$
- 4) En infinito la métrica debe ser Minkowski.

En el trabajo [6] Schwarzschild demuestra que el problema se reduce a resolver un sistema acoplado de cuatro ecuaciones diferenciales parciales no lineales de segundo orden y consistente con las condiciones establecidas por Einstein. Como ya se mencionó en la solución se recurrió a una práctica frecuente en física, que es probar la teoría para el sistema más simple, en otras descripciones se recurre a la idealización del fenómeno a describir, y los primeros modelos son la mayoría de las veces muy simétricos, y que además pueden ignorar fuerzas o efectos siempre presentes en el fenómeno real. Implícitamente el trabajo muestra que una restricción físicamente razonable, como la descripción planteada por Einstein, se traduce en una forma muy particular de la métrica del espacio-tiempo. Esto último es muy importante pues las restricciones físicas que se imponen a un problema en Relatividad General tienen consecuencias sobre su geometría, que se traducen en una forma particular de la métrica del espacio-tiempo. Otra implicación no resaltada es que las geometrías sencillas del espacio tiempo tienen como consecuencia ecuaciones de Einstein definitivamente mas sencillas y manejables, por tanto mayor oportunidad de obtener soluciones exactas de ellas.

Es en el sentido del parrafo anterior la razón de este trabajo, pues estudiaremos a las ecuaciones de Einstein en el vacío para la geometría más general que se obtiene

al introducir dos simetrías en el espacio tiempo, traducidas en geometría se trata de la independencia de las funciones métricas de dos coordenadas del espacio tiempo. Por el tipo de métrica que se obtiene con dos simetrías <sup>3</sup> la clasificación del espacio-tiempo en orden de la mas simétrica a la menos:

- Estacionaria circular axial (Kerr 1963).
- Estacionaria circular cíclica.
- Estacionaria no-circular axial.
- Estacionaria no-circular cíclica.

Como un caso particular de los espacios estacionarios se encuentra

- Estática (Schwarzschild 1916)

La interpretación física en los casos no extremos las soluciones encontradas son interpretadas como un modelo estelar, donde se modelan los campos gravitacionales en el interior, exterior y sobre la frontera de una fuente. La geometría más simple es la estática que en algún sistema coordenado tiene una métrica diagonal con funciones métricas que dependen solo de dos coordenadas. La generalización a esta solución es estacionaria circular y axial simétrica, es una geometría que se obtiene a partir de dos simetrías impuestas al espacio tiempo, cabe mencionar que no es la más general con esas dos simetrías. Los espacios estacionarios tienen geometrías tipo Kerr y son conocidas en la literatura como métricas Lewis-Papapetrou [7], técnicamente son estacionarias circulares cíclicas y axial simétricas si poseen un eje de simetría [8]. Hasta la fecha los espacios estacionarios no-circulares no han sido muy investigados y son pocas las soluciones exactas ya que tiene pocos años que son tema de investigación [9, 10, 11].

Hay pocos modelos completos del campo gravitacional para objetos compactos, Schwarzschild es uno y el que es la generalización más natural, Kerr, aún no se completa. Desde la aparición de la solución de Kerr<sup>4</sup> en 1963 hasta 2013, todos los intentos por encontrar el interior no habían tenido éxito, fue en 2013 que Kyriakopoulos encontró una familia de fluidos anisótropos como fuentes de Kerr [12]. Aun cuando la generalización del modelo de esférico es un hecho, Gourgoulhon muestra que los espacios estacionarios circulares no son capaces de describir algunos efectos observados en las estrellas de neutrones ya que hay intercambio de materia en el

---

<sup>3</sup>En el capítulo siguiente se precisara formalmente las simetrías y condiciones que se piden a ellas.

<sup>4</sup>Es conocido en la literatura como el problema de Kerr.

---

ecuador de las estrellas misma que con los modelos circulares no se pueden modelar [9].

El presente trabajo está enfocado a encontrar soluciones al vacío de las ecuaciones de Einstein para un espacio estacionario no circular cíclico conformalmente plano. Existen varias motivaciones para estudiar a los espacios no circulares. Una de ellas es que presentan una alternativa de solución al problema de Kerr, pues aunque existen soluciones encontradas al interior de métricas estacionarias circulares axial simétricas, no se han encontrado, hasta ahora, soluciones que sean susceptibles de complementar la solución exterior de Kerr. R. Vera reportó en [10] que es posible la compatibilidad entre espacios no circulares al interior y espacios circulares al exterior, lo que abre la posibilidad de que la investigación enfocada a los espacios no circulares sea una alternativa prometedora. Además, estudiar a los espacios no circulares abre la posibilidad de dar una descripción completa a los espacios estacionarios axial simétricos (que por su generalidad de no circulares, contienen a los espacios circulares) en lugar de buscar soluciones particulares al problema de Kerr. Otra de las motivaciones radica en que el estudio de esta clase de espacios proporciona una descripción más cercana a la realidad que la dada por los espacios circulares. En un trabajo sobre estrellas de neutrones recién formadas se encontró que el campo magnético toroidal que se presenta en éstas es posible que sea creado por la rotación diferencial<sup>5</sup> en el núcleo de la estrella de neutrones. Para que estos objetos sean descritos por la relatividad general se necesita estudiar a los espacios no circulares, pues la existencia de campo magnético toroidal no es compatible con la condición de circularidad (ver [9] y referencias citadas allí).

El presente trabajo está estructurado de la siguiente manera: en el primer capítulo se introduce al lector en el conocimiento de los conceptos necesarios para una buena comprensión del tema y los temas sugeridos y que se discuten en la bibliografía. En el segundo capítulo se muestra la forma en que se calculó el tensor de Einstein incluyendo ejemplos que facilitan al lector el seguimiento de los cálculos desarrollados. En el tercer capítulo se detalla el procedimiento por el que se obtuvieron soluciones a las ecuaciones diferenciales y se muestran las métricas resultantes para cada rama de solución. Finalmente se presentan las conclusiones del trabajo.

---

<sup>5</sup>Se dice que un objeto en rotación presenta rotación diferencial cuando sus diferentes partes se mueven con velocidades angulares diferentes.

---

# Capítulo 1

## Conceptos preliminares

### 1.1. Representación del espacio-tiempo

Actualmente la mayoría de las teorías físicas desarrollan un modelo matemático definido por un conjunto de ecuaciones diferenciales, y aderezado con un conjunto de reglas para traducir los resultados matemáticos en hechos significativos del mundo físico. En el caso de las teorías de la gravitación la más aceptada es la teoría de Einstein de la Relatividad General (RG). En este caso el conjunto de ecuaciones tiene dos ingredientes; primero imponer que el espacio-tiempo sea representado geoméricamente por una variedad Riemanniana (Lorentziana), y segundo la ecuación que describe la interacción entre la materia y la gravedad, i.e., la ecuación de campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

La relatividad general está basada sobre el concepto de que el espacio-tiempo es representado por una variedad<sup>1</sup> diferencial cuatro-dimensional dotada de una métrica Lorentziana. Con la métrica se define el producto interno de elementos en  $M$  y por tanto caracteriza localmente al espacio-tiempo estudiado, también llamada algunas veces elemento de línea es expresada en forma tensorial como sigue

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\alpha)dx^\mu dx^\nu. \quad (1.2)$$

Su carácter de elemento de línea aparece de manera inmediata al desarrollar sus términos. Siguiendo la convención de suma de Einstein, suponiendo un espacio

---

<sup>1</sup>Una variedad, es un espacio que visto globalmente puede tener alguna geometría complicada, pero en regiones locales cada punto puede ser caracterizado por el espacio  $\mathbb{R}^n$  (espacio euclidiano).

cuatro-dimensional, y tomando en cuenta que  $dx^\mu dx^\nu = dx^\nu dx^\mu$  y  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$  se tiene

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= g_{00}dx^0 dx^0 + 2g_{01}dx^0 dx^1 + 2g_{02}dx^0 dx^2 + 2g_{03}dx^0 dx^3 \\
 &+ g_{11}dx^1 dx^1 + 2g_{12}dx^1 dx^2 + 2g_{13}dx^1 dx^3 \\
 &+ g_{22}dx^2 dx^2 + 2g_{23}dx^2 dx^3 \\
 &+ g_{33}dx^3 dx^3.
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Vemos entonces que los elementos del tensor métrico  $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$  representan los coeficientes del elemento de línea. Un aspecto importante de la métrica, es que nos permite definir el producto interno entre dos vectores infinitesimales

( $dx^\mu \vec{e}_\mu$  y  $dx^\nu \vec{e}_\nu$  en nuestro caso). Nótese en este punto que  $ds^2$  es un número real[1][2].

## 1.2. Clasificación del espacio-tiempo según sus simetrías

El espacio más general es expresado por la métrica (1.3), que tiene 10 componentes  $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$  donde  $\mu, \nu$  y  $\alpha$  corren sobre las coordenadas 0,1,2 y 3. Cuatro de las componentes pueden ser elegidas como nuevas coordenadas, por lo que el sistema tiene en realidad 6 funciones libres. Aún las 6 funciones métricas dependen de las cuatro coordenadas del espacio-tiempo, uno puede justificar la independencia de la coordenada temporal de éstas ya que si notamos que los objetos que describe la RG no cambian drásticamente conforme transcurre el tiempo, al imponer esta condición estamos en el caso de un espacio-tiempo **estacionario**. La estructura de la métrica en este tipo de espacios es la misma que la de los espacios generales (1.3), la única diferencia es que las funciones métricas dependen de tres coordenadas y no de cuatro.

Concretamente un espacio es estacionario si las funciones métricas no dependen de la coordenada temporal. Cuando adicionamos la invariancia bajo inversión temporal, i.e.,  $t \rightarrow -t$  estamos en el caso de un espacio **estático**. Físicamente se espera que el comportamiento del sistema será el mismo sin importar el sentido en el cual transcurra el tiempo. En este caso la estructura de la métrica es visible ya que el desplazamiento temporal es perpendicular a las direcciones espaciales.

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & g_{00}dx^0dx^0 \\
 & +g_{11}dx^1dx^1 + 2g_{12}dx^1dx^2 + 2g_{13}dx^1dx^3 \\
 & +g_{22}dx^2dx^2 + 2g_{23}dx^2dx^3 \\
 & +g_{33}dx^3dx^3. \tag{1.4}
 \end{aligned}$$

El tipo de espacios-tiempo que estudiamos en este trabajo son aquellos con dos simetrías, la independencia de la coordenada temporal y de otra espacial, tal que ahora las funciones métricas dependan solo de dos coordenadas. Sin pérdida de generalidad imponemos la independencia de la coordenada  $x^1$  y exigimos la condición  $x^1 = x^1 + 2\pi$ . Los espacio-tiempo con las simetrías descritas arriba se les conoce como **estacionarios cíclicos**. Este tipo de espacios pueden o no contener un eje de simetría dentro de la variedad. Si bajo una rotación del grupo  $SO(3)$  uno de estos espacios conserva un conjunto de puntos invariantes se le denomina axial simétrico y el conjunto de puntos será el eje de simetría y los llamamos **estacionarios axial simétricos**.

Vale la pena aclarar que la estructura de la métrica de los espacios descritos en el párrafo anterior es la misma que 1.3, por lo que la única simplificación que hemos ganado es en la dependencia de los elementos de la métrica. Una simetría que simplifica ampliamente las ecuaciones de Einstein es la circular que explicamos a continuación.

Un espacio estacionario cíclico es aquel que no depende de  $t$  y  $x^1$  y donde esta última satisface  $\phi =: x^1 = x^1 + 2\pi$ , si además le exigimos la invariancia ante inversión simultánea  $(t, \phi) \rightarrow (-t, -\phi)$  entonces les llamaremos **estacionarios cíclicos circulares**. Esta invariancia conocida también como circularidad, tiene consecuencias fundamentales sobre la estructura de la métrica y es reflejada en que secciona al espacio-tiempo en dos 2-superficies ortogonales entre sí.

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & g_{00}dx^0dx^0 + 2g_{01}dx^0dx^1 \\
 & +g_{11}dx^1dx^1 \\
 & +g_{22}dx^2dx^2 + 2g_{23}dx^2dx^3 \\
 & +g_{33}dx^3dx^3. \tag{1.5}
 \end{aligned}$$

Cada simetría que se le impone al espacio-tiempo, como la estaticidad o la axial, se refleja en la métrica, ya sea sobre sus coordenadas—equivalentemente, mediante vectores de Killing[2][13]—, ó en su forma canónica. Estas simetrías en la métrica facilitan la solución de sus respectivas ecuaciones de Einstein. Entre menos

requerimientos hagamos a la métrica, ganaremos más generalidad, pero será más difícil encontrar soluciones exactas.

Si ahora pedimos que sea un espacio **circular**, imponemos la invariancia ante las inversiones simultáneas de las coordenadas  $t$  y  $\phi$ , es decir, bajo la transformación  $(t, \phi) \rightarrow (-t, -\phi)$ . Los espacios que no tienen esta restricción son llamados **no circulares**[11].

Como se mencionó anteriormente, todas estas restricciones pueden ser obtenidas de manera geométrica mediante vectores de Killing y estableciendo relaciones entre ellos.

## 1.3. El tensor de Einstein

En la presente sección se tratan los conceptos involucrados en el cálculo del tensor de Einstein, proporcionando para cada elemento una breve descripción de su significado geométrico y se mencionan propiedades útiles para calcular el tensor. No, pretendemos de ninguna forma presentar un curso de geometría diferencial y vamos más bien a seguir un tutorial poco formal pero concreto en cómo calcular el tensor de Einstein, para la parte formal recomendamos revisar la bibliografía al final.

### 1.3.1. Símbolos de Christoffel

Es necesario, para el estudio de los espacios curvos, un operador que generalice a la derivada tomando en cuenta el caso en el que la base vectorial no sea constante en todo el espacio<sup>2</sup>. De esta manera, siguiendo la regla del producto de Leibniz[2], la derivada de un cierto vector  $\vec{A}$  en cierta base  $\{\vec{e}_b\}$  es

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^b} = \frac{\partial}{\partial x^b}(A^a \vec{e}_a) = \frac{\partial A^a}{\partial x^b} \vec{e}_a + A^a \frac{\partial \vec{e}_a}{\partial x^b}. \quad (1.6)$$

Ahora bien, en coordenadas cartesianas ordinarias las bases vectoriales son constantes y por tanto el segundo término de la ecuación anterior es nulo, es decir, se recupera el resultado conocido de la derivada. Notemos ahora que  $\frac{\partial \vec{e}_a}{\partial x^b}$  es un vector, por tanto puede ser escrito como una combinación lineal de los elementos de la base vectorial. Los coeficientes de dicha combinación lineal son representados por el símbolo de Christoffel  $\Gamma_{ab}^c$  y su parte vectorial es representada por un nuevo vector

<sup>2</sup>Los símbolos de Christoffel representan los términos de corrección que surgen al diferenciar un vector o un campo vectorial en algún sistema de coordenadas no cartesiano.

$\vec{e}_c$ , de manera que con esta notación

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^b} = \frac{\partial A^a}{\partial x^b} \vec{e}_a + A^a \Gamma_{ab}^c \vec{e}_c, \quad (1.7)$$

que es lo que se conoce como **derivada covariante**. A partir de lo anterior definimos a los símbolos de Christoffel como

$$\frac{\partial \vec{e}_a}{\partial x^b} = \Gamma_{ab}^c \vec{e}_c. \quad (1.8)$$

Los símbolos de Christoffel pueden ser expresados en términos de la métrica como

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\epsilon} \left( \frac{\partial g_{\beta\epsilon}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\gamma\epsilon}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\epsilon} \right), \quad (1.9)$$

donde los índices corren sobre cada una de las coordenadas. Esto se ejemplifica en el capítulo de resultados, donde se muestra paso a paso la forma de obtención de los símbolos de Christoffel utilizando la métrica. Los símbolos de Christoffel tienen la propiedad de simetría  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha$  [2][13]

### 1.3.2. El tensor de Riemann

El tensor de Riemann, también llamado de curvatura, es un tensor de orden cuatro, que se define mediante los símbolos de Christoffel y sus primeras derivadas como

$$R_{\mu\eta\nu}^\zeta = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\zeta}{\partial x^\eta} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\eta}^\zeta}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\epsilon \Gamma_{\epsilon\eta}^\zeta - \Gamma_{\mu\eta}^\epsilon \Gamma_{\epsilon\nu}^\zeta. \quad (1.10)$$

Este tensor proporciona información sobre la curvatura de la variedad que se estudie. El tensor de Riemann es nulo si y sólo si el espacio estudiado es perfectamente plano (independientemente de las coordenadas que se utilicen). Explicado de manera poco formal, el tensor de Riemann consiste en transportar paralelamente<sup>3</sup> un vector  $V^\mu$  a lo largo de una dirección dada  $A^\mu$  y luego a lo largo de otra dirección  $B^\nu$  y comparar el vector derivado de esta operación con el que resultaría de transportar a  $V^\mu$  primero a lo largo de  $B^\nu$  y posteriormente, a lo largo de  $A^\mu$ . Ver figura 1.1

En lenguaje matemático, estos transportes paralelos son expresados por derivadas covariantes en una y otra dirección y el tensor de Riemann informa sobre la conmutatividad o no conmutatividad entre ellas:

$$\nabla_\mu \nabla_\nu V_c - \nabla_\nu \nabla_\mu V_c = R_{\mu\nu c}^d V_d. \quad (1.11)$$

<sup>3</sup>El transporte paralelo consiste en mover un vector a lo largo de una trayectoria manteniéndolo siempre constante

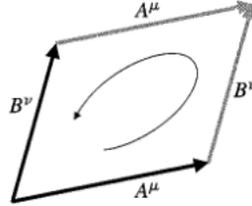


Figura 1.1: Direcciones dadas por los vectores  $A^\mu$  y  $B^\nu$

En el espacio plano, el orden de las direcciones en que transportamos cualquier vector no cambia su dirección (figura 1.2), las derivadas conmutan y el tensor de Riemman es nulo, pero en espacios curvos el vector cambiará su dirección resultante al ser transportado y la dirección resultante dependerá de las trayectorias que se sigan (figura 1.3). Este hecho conduce a la no conmutatividad de las derivadas en (1.11) y el tensor de Riemman ya no será nulo. La ecuación (1.11) nos dice, por tanto, que si el tensor de Riemman no es nulo, nos encontramos ante un espacio curvo [2][14].

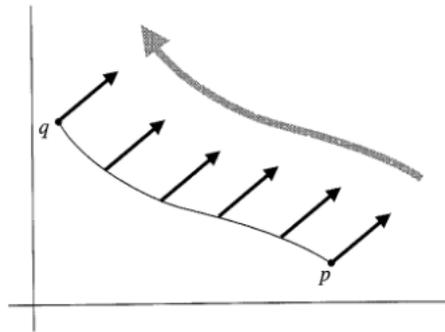


Figura 1.2: Transporte de un vector en el espacio plano. Sus componentes se mantienen constantes

### 1.3.3. El tensor de Ricci y escalar de Ricci

Las contracciones del tensor de Riemman conducen a otros objetos matemáticos que son necesarios para definir el tensor de Einstein. El primero de ellos es el

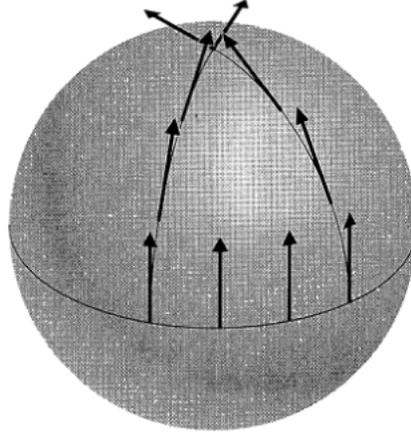


Figura 1.3: Transporte paralelo en una 2-esfera

tensor de Ricci, el cual es obtenido al hacer la contracción del primer y tercer índices del tensor de Riemann:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\eta\nu}^{\eta}, \quad (1.12)$$

el cual satisface la propiedad de simetría

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \quad (1.13)$$

Al intentar realizar otras contracciones del tensor de Riemann, algunas resultan nulas y otras pueden reducirse a  $R_{\mu\nu}$ , por lo que el tensor de Ricci es esencialmente la única contracción del tensor de Riemann.

El tensor de Ricci se obtiene mediante los símbolos de Christoffel como

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma_{\rho\mu}^{\rho}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\rho} \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\rho\mu}^{\lambda}, \quad (1.14)$$

donde nuevamente los índices corren sobre cada una de las coordenadas y las comas indican diferenciación. El escalar de Ricci es obtenido al contraer el tensor de Ricci:

$$R = R_{\mu}^{\mu}. \quad (1.15)$$

El tensor y escalar de Ricci contienen información completa sobre las trazas del tensor de Riemman dejándolas como partes libres [2] [13].

### 1.3.4. Tensor de Einstein

Finalmente, el tensor de Einstein viene dado como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (1.16)$$

Dado que  $g_{\mu\nu}$  y  $R_{\mu\nu}$  son tensores simétricos,  $G_{\mu\nu}$  es también simétrico. Es importante recordar que los símbolos de Christoffel son primeras derivadas de la métrica y que el tensor de Ricci contiene primeras derivadas de los símbolos de Christoffel, por lo que las componentes de  $G_{\mu\nu}$  contendrán segundas derivadas de la métrica[1][2] [3].

## 1.4. Simetrías y geometría

Las restricciones o exigencias que se hacen al espacio tiempo también pueden ser introducidas de forma covariante, como veremos a continuación.

### 1.4.1. Ecuación de las geodésicas

El movimiento de una partícula en caída libre ahora en la Relatividad General es el movimiento a lo largo una geodésica tipo tiempo y su dinámica es revelada por la ecuación:

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = 0, \quad (1.17)$$

donde  $u^\mu := dx^\mu/d\tau$  y  $\tau$  son el vector tangente a la geodésica y el tiempo propio que se usa para parametrizar a las coordenadas de una partícula que se mueve a lo largo de la geodésica. Desarrollando explícitamente la ecuación anterior

$$u^\alpha \frac{\partial u_\beta}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma u^\alpha u_\gamma = 0, \quad (1.18)$$

nótese que;

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} = u^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \quad (1.19)$$

entonces la ec.(1.18) se escribe

$$\frac{du_\beta}{d\tau} = \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma u^\alpha u_\gamma \quad (1.20)$$

usando la forma explícita de los símbolos de Christoffel

$$\begin{aligned}\Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma} u^{\alpha} u_{\gamma} &= \frac{1}{2} g^{\gamma\nu} \left( \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} \right) u^{\alpha} u_{\gamma} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} \right) u^{\alpha} u^{\nu}\end{aligned}\quad (1.21)$$

si intercambiamos  $\alpha \rightarrow \nu$  en la última expresión esperamos que

$$\left( \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} \right) u^{\alpha} u^{\nu} = \left( \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\alpha}} \right) u^{\nu} u^{\alpha}.\quad (1.22)$$

Uno puede notar que el segundo término de los dos lados de la igualdad es el mismo dado que los vectores  $u^{\nu} u^{\alpha} = u^{\alpha} u^{\nu}$  conmutan. Factorizando un signo menos en la expresión del lado derecho de la igualdad y dada la conmutatividad de los  $u^{\mu}$ 's

$$\left( \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} \right) u^{\alpha} u^{\nu} = - \left( \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} \right) u^{\nu} u^{\alpha} = - \left( \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} \right) u^{\alpha} u^{\nu},\quad (1.23)$$

es decir el termino entre paréntesis es antisimétrico y el producto de las componentes de las cuadrivelocidades simétrico y por tanto

$$\left( \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} \right) u^{\alpha} u^{\nu} = 0.\quad (1.24)$$

Finalmente la ecuación de las geodésicas es:

$$\frac{du_{\beta}}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\beta}} u^{\nu} u^{\alpha}.\quad (1.25)$$

Este resultado nos dice:

*Si todas las componentes del tensor métrico  $g_{\nu\alpha}$  son independientes de  $x^{\beta}$ , para algún índice fijo  $\beta$ , entonces el vector tangente  $u_{\beta}$  es constante a lo largo de la trayectoria de la partícula.*

### 1.4.2. Vectores de Killing

Físicamente la simetría de un sistema en  $R^3$  o en el espacio de Minkowski es observada cuando bajo traslaciones a lo largo de ciertas líneas o superficies las variables físicas no cambian. Para los espacios Riemannianos la traducción de las simetrías mencionadas es posible si existe una variedad m-dimensional de puntos que son físicamente equivalentes y  $1 \leq m \leq 4$ .

Bajo una traslación se espera que la métrica no cambie, la pregunta es como hacerle saber a la métrica esto. Proponemos un vector  $\xi^\mu(x^\nu)$  definido para cada punto del espacio  $x^\nu$ , en una traslación infinitesimal en la dirección  $\xi^\mu$ ;

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x^\nu)d\lambda := x^\mu + \delta x^\mu. \quad (1.26)$$

Bajo esa operación la variación de la métrica es:

$$\delta g_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \delta x^\sigma = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \xi^\sigma d\lambda. \quad (1.27)$$

Con esos elementos el elemento de línea en un punto  $x^\mu$  y en su vecindad  $x'^\mu$  es idéntica solo si su variación es cero; i.e.,

$$\begin{aligned} \delta(ds^2) &= \delta(g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu) \\ &= \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \xi^\sigma + g_{\sigma\nu} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} + g_{\mu\sigma} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\nu} \right) dx^\mu dx^\nu d\lambda = 0, \end{aligned} \quad (1.28)$$

en la expresión anterior se toma en cuenta que los operadores conmutan, i.e.,  $d\delta = \delta d$  y se concluye con las ecuaciones

$$\left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \xi^\sigma + g_{\sigma\nu} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} + g_{\mu\sigma} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\nu} \right) = 0 \quad (1.29)$$

las cuales son equivalentes a lo que se conoce en la literatura como la derivada de Lie  $\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu}$ ,

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0 := \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu}. \quad (1.30)$$

Los vectores  $\xi^\mu$  que satisfacen (1.29) o (1.30) son llamados los vectores de Killing y a las ecuaciones citadas las ecuaciones de Killing. Si las ecuaciones (1.29) no tienen solución entonces el espacio tiempo no tiene simetrías. Cuando existe solución uno puede encontrar un sistema de referencia donde

$$\xi^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad (1.31)$$

entonces (1.29) se reduce a

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \xi^\sigma = 0, \quad (1.32)$$

esta última ecuación está íntimamente ligada con la ecuación de las geodésicas (1.25), para encontrar la conexión entre ellas solo hay que demostrar que;  $u_\mu \xi^\mu = cte$  a lo largo de una geodésica.

Sea  $u^\mu$  un vector tangente a una geodésica y sea  $\xi^\mu$  un vector de Killing entonces el producto  $u_\mu \xi^\mu = cte$ .

$$\nabla_u(u_\mu \xi^\mu) = (u^\alpha \nabla_\alpha g_{\mu\beta} u^\beta) \xi^\mu + u_\mu (u^\alpha \nabla_\alpha \xi^\mu) = g_{\mu\beta} (u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta) \xi^\mu + u_\mu (u^\alpha \nabla_\alpha \xi^\mu) = 0, \quad (1.33)$$

el primer término es cero por (1.17) y el segundo por (1.30).

Concluyendo la introducción covariante de las simetrías en un espacio Riemanniano:

*Siempre que en algún sistema coordenado la métrica del espacio tiempo no dependa de algunas de las coordenadas entonces hay un vector de Killing asociado.*



# Capítulo 2

## Ecuaciones de Einstein

A lo largo de este capítulo y del siguiente, se presentan los cálculos realizados para encontrar las ecuaciones de campo de Einstein al vacío para nuestro caso particular y la forma en que se resolvieron las ecuaciones diferenciales.

Por conveniencia en este capítulo se optó por usar una nueva notación usada frecuentemente en la literatura moderna; se expresan a la derivada parcial y a la derivada covariante en una forma más compacta. Identificaremos el operador ”,” con la derivada parcial usual  $f_{,\mu} := \partial f / \partial x^\mu$ ,  $A_{\alpha;\nu} := \partial A_\alpha / \partial x^\nu$  y a la ”;” con la derivada covariante  $C_{\alpha;\nu} := \nabla_\nu A_\alpha$

Iniciamos con la descripción geométrica de un espacio estacionario no-circular cíclico y axialsimétrico<sup>1</sup> conformalmente plano.<sup>2</sup> La métrica más general para un espacio estacionario no circular cíclico conformalmente plano fue reportada por Ayón, Campuzano y García (ver cita mas adelante). [11]:

$$ds^2 = e^{-2Q} \left( -k(d\tau^2 + 2xd\tau d\sigma + \epsilon d\sigma^2) + \frac{dx^2}{(C_0 + C_1x)(x^2 - \epsilon) - k(K_0 + K_1x)^2} + 2k(K_0 + K_1x)d\sigma dy + (C_0 + C_1x)dy^2 \right), \quad (2.1)$$

donde  $Q = Q(x, y)$  y  $K_0, K_1, C_0$  y  $C_1$  son constantes de integración. En interesante notar que en el caso en que  $K_0 = 0$  y  $K_1 = 0$  se obtienen los espacios estacionarios circulares cíclicos que fueron estudiados en ([15]) y además que al romper con la simetría de reflexión  $(t, \sigma) \rightarrow (-t, -\sigma)$  el espacio presenta un eje de simetría. Los

---

<sup>1</sup>En nuestro caso las dos simetrías están presentes en la métrica estudiada contenidas en los valores del parámetro  $\epsilon \pm 1$ , con el valor positivo es axial y cíclica par el negativo.

<sup>2</sup>Conformalmente plano: cuando es nula la parte sin traza de su correspondiente tensor de Riemman

---

parámetros  $k$  y  $\epsilon$  toman los valores  $\pm 1$  y básicamente definen cual será la coordenada temporal y cual la espacial en el sector Killingiano de la métrica <sup>3</sup>, por lo que sin pérdida de generalidad en lo sucesivo  $k = 1$ .

El espacio tiempo que se estudia es tal que tiene dos vectores de Killing uno tipo tiempo  $\xi^\mu \xi_\mu = -1$  y otro tipo espacio  $\eta^\mu \eta_\mu = 1$ . Si los vectores satisfacen la ecuación  $\xi^\mu{}_{;\nu} \eta^\nu - \eta^\mu{}_{;\nu} \xi^\nu = 0$  se dice que conmutan. La simetría de reflexión mencionada anteriormente se puede escribir de forma covariante y es equivalente a que los vectores de Killing satisfagan la condición de circularidad<sup>4</sup> ([7, 16])

$$\begin{aligned}\xi_{[a;b} \xi_c \eta_{d]} &= 0 \\ \eta_{[a;b} \eta_c \xi_{d]} &= 0\end{aligned}\tag{2.2}$$

en nuestro caso resulta

$$\begin{aligned}\xi_{[a;b} \xi_c \eta_{d]} &= e^{2Q} (K_0 + K_1 x), \\ \eta_{[a;b} \eta_c \xi_{d]} &= e^{2Q} (\epsilon K_1 + K_0 x),\end{aligned}\tag{2.3}$$

con lo que se muestra el rompimiento de la simetría de reflexión y la circularidad no es alcanzada, de ahí la distinción, entre espacios circulares y no circulares.

Después de las aclaraciones anteriores inciamos ahora con los cálculos para obtener el tensor de Einstein.

Primeramente el procedimiento es calcular los símbolos de Christoffel, a manera de ejemplo, presentamos el cálculo del símbolo  $\Gamma_{x\tau}^\sigma$ .

Sustituyendo los índices  $\sigma, x, \tau$  del símbolo que se quiere calcular en la definición (1.9) y usando la nueva notación  $\Gamma_{x\tau}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (g_{x\rho,\tau} + g_{\tau\rho,x} - g_{x\tau,\rho})$ , el índice  $\rho$  corre sobre cada una de las coordenadas, así que al desarrollarlo siguiendo la convención de suma de índices de Einstein, tenemos

$$\begin{aligned}\Gamma_{x\tau}^\sigma &= \frac{1}{2} g^{\sigma x} (g_{xx,\tau} + g_{\tau x,x} - g_{x\tau,x}) + \frac{1}{2} g^{\sigma\tau} (g_{x\tau,\tau} + g_{\tau\tau,x} - g_{x\tau,\tau}) \\ &+ \frac{1}{2} g^{\sigma y} (g_{xy,\tau} + g_{\tau y,x} - g_{x\tau,y}) + \frac{1}{2} g^{\sigma\sigma} (g_{x\sigma,\tau} + g_{\tau\sigma,x} - g_{x\tau,\sigma}).\end{aligned}$$

Algunos de estos elementos del tensor métrico son nulos, y algunas derivadas también, dado que nuestra métrica depende sólo de  $x$  e  $y$ . De esta manera nuestra tarea se reduce a calcular

$$\Gamma_{x\tau}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\tau} g_{\tau\tau,x} + \frac{1}{2} g^{\sigma\sigma} g_{\tau\sigma,x}.$$

---

<sup>3</sup>El análisis detallado puede verse en la referencia [15].

<sup>4</sup>El símbolo  $[ ]$  indica antisimetrización y operacionalmente se define como  $V_{[\alpha\beta]} := \frac{1}{2}(V_{\alpha\beta} - V_{\beta\alpha})$ .

---

Después de realizar el álgebra correspondiente, finalmente obtenemos

$$\Gamma_{x\tau}^\sigma = -\frac{1}{2} \frac{C_0 + C_1x}{(x^2 - \epsilon)(C_0 + C_1x) - (K_0 + K_1x)^2}.$$

Lo siguiente en el procedimiento consiste en calcular las componentes del tensor de Ricci. Se mostrará el cálculo de la componente  $R_{x\tau}$ , el cual es parecido al realizado con los símbolos de Christoffel. Primeramente, suistuímos los parámetros  $x$  y  $\tau$  en la ecuación (1.14).

$$R_{x\tau} = \Gamma_{\tau x, \rho}^\rho - \Gamma_{\rho x, \tau}^\rho + \Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\tau x}^\lambda - \Gamma_{\tau\lambda}^\rho \Gamma_{\rho x}^\lambda.$$

En la ecuación anterior, vemos que el segundo término corresponde a derivadas parciales con respecto a  $\tau$  y dado que la función de nuestra métrica no depende de esta coordenada dicho término es nulo. Expandimos el índice  $\rho$  en cada uno de los términos siguiendo el orden  $(\tau, x, y, \sigma)$ , por razones didácticas presentamos la expansión de cada término en un renglón distinto

$$\begin{aligned} R_{x\tau} &= \Gamma_{\tau x, \tau}^\tau + \Gamma_{\tau x, x}^x + \Gamma_{\tau x, y}^y + \Gamma_{\tau x, \sigma}^\sigma \\ &+ \Gamma_{\tau\lambda}^\tau \Gamma_{\tau x}^\lambda + \Gamma_{x\lambda}^x \Gamma_{\tau x}^\lambda + \Gamma_{y\lambda}^y \Gamma_{\tau x}^\lambda + \Gamma_{\sigma\lambda}^\sigma \Gamma_{\tau x}^\lambda \\ &- \Gamma_{\tau\lambda}^\tau \Gamma_{\tau x}^\lambda - \Gamma_{\tau\lambda}^x \Gamma_{xx}^\lambda - \Gamma_{\tau\lambda}^y \Gamma_{yx}^\lambda - \Gamma_{\tau\lambda}^\sigma \Gamma_{\sigma x}^\lambda. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Notemos que, en la ecuación anterior, el quinto y el noveno término se cancelan y el tensor solo depende de  $x, y$  por tanto el primer y cuarto término son nulos, y finalmente el tensor a calcular es:

$$\begin{aligned} R_{x\tau} &= \Gamma_{\tau x, x}^x + \Gamma_{\tau x, y}^y \\ &+ \Gamma_{x\lambda}^x \Gamma_{\tau x}^\lambda + \Gamma_{y\lambda}^y \Gamma_{\tau x}^\lambda + \Gamma_{\sigma\lambda}^\sigma \Gamma_{\tau x}^\lambda \\ &- \Gamma_{\tau\lambda}^x \Gamma_{xx}^\lambda - \Gamma_{\tau\lambda}^y \Gamma_{yx}^\lambda - \Gamma_{\tau\lambda}^\sigma \Gamma_{\sigma x}^\lambda. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Expandiendo  $\lambda$ , en cada uno de los términos. Nuevamente presentamos el desarrollo de cada término en un renglón distinto;

$$\begin{aligned} R_{x\tau} &= \Gamma_{\tau x, x}^x + \Gamma_{\tau x, y}^y \\ &+ \Gamma_{x\tau}^x \Gamma_{\tau x}^\tau + \Gamma_{xx}^x \Gamma_{\tau x}^x + \Gamma_{xy}^x \Gamma_{\tau x}^y + \Gamma_{x\sigma}^x \Gamma_{\tau x}^\sigma \\ &+ \Gamma_{y\tau}^y \Gamma_{\tau x}^\tau + \Gamma_{yx}^y \Gamma_{\tau x}^x + \Gamma_{yy}^y \Gamma_{\tau x}^y + \Gamma_{y\sigma}^y \Gamma_{\tau x}^\sigma \\ &+ \Gamma_{\sigma\tau}^\sigma \Gamma_{\tau x}^\tau + \Gamma_{\sigma x}^\sigma \Gamma_{\tau x}^x + \Gamma_{\sigma y}^\sigma \Gamma_{\tau x}^y + \Gamma_{\sigma\sigma}^\sigma \Gamma_{\tau x}^\sigma \\ &- \Gamma_{\tau\tau}^x \Gamma_{xx}^\tau - \Gamma_{\tau x}^x \Gamma_{xx}^x - \Gamma_{\tau y}^x \Gamma_{yx}^y - \Gamma_{\tau\sigma}^x \Gamma_{xx}^\sigma \\ &- \Gamma_{\tau\tau}^y \Gamma_{yx}^\tau - \Gamma_{\tau x}^y \Gamma_{yx}^x - \Gamma_{\tau y}^y \Gamma_{yx}^y - \Gamma_{\tau\sigma}^y \Gamma_{yx}^\sigma \\ &- \Gamma_{\tau\tau}^\sigma \Gamma_{\sigma x}^\tau - \Gamma_{\tau x}^\sigma \Gamma_{\sigma x}^x - \Gamma_{\tau y}^\sigma \Gamma_{\sigma x}^y - \Gamma_{\tau\sigma}^\sigma \Gamma_{\sigma x}^\sigma. \end{aligned}$$

El quinto término se cancela con el vigésimo (resaltados en negritas) dada la simetría de los símbolos de Cristoffel, por lo que, tomando en cuenta los términos diferentes de cero, tenemos

$$\begin{aligned}
R_{x\tau} &= \Gamma_{\tau x, y}^y + \Gamma_{yy}^y \Gamma_{\tau x}^y + \Gamma_{y\sigma}^y \Gamma_{\tau x}^\sigma + \Gamma_{\sigma\tau}^\sigma \Gamma_{\tau x}^\tau + \Gamma_{\sigma y}^\sigma \Gamma_{\tau x}^y + \Gamma_{\sigma\sigma}^\sigma \Gamma_{\tau x}^\sigma - \Gamma_{\tau\tau}^x \Gamma_{xx}^\tau \\
&- \Gamma_{\tau\sigma}^x \Gamma_{xx}^\sigma - \Gamma_{\tau\tau}^y \Gamma_{yx}^\tau - \Gamma_{\tau\sigma}^y \Gamma_{yx}^\sigma - \Gamma_{\tau\tau}^\sigma \Gamma_{\sigma x}^\tau - \Gamma_{\tau\sigma}^\sigma \Gamma_{\sigma x}^\sigma.
\end{aligned}$$

Una vez realizada la derivada del primer término y efectuada el álgebra, la componente de Ricci es:

$$R_{x\tau} = -\frac{(K_0 + K_1x)}{-(K_0 + K_1x)^2 + (x^2 - \epsilon)(C_0 + C_1x)} \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Es necesario ahora calcular el escalar de Ricci, el cual se obtiene contrayendo los índices del tensor de Ricci con ayuda del tensor métrico

$$R = R^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.6)$$

Expandiendo  $\mu$  y dejando fijo el otro índice, se tiene

$$R = g^{\tau\nu} R_{\tau\nu} + g^{x\nu} R_{x\nu} + g^{y\nu} R_{y\nu} + g^{\sigma\nu} R_{\sigma\nu}.$$

Expandiendo cada término, tenemos:

$$\begin{aligned}
R &= g^{\tau\tau} R_{\tau\tau} + g^{\tau x} R_{\tau x} + g^{\tau y} R_{\tau y} + g^{\tau\sigma} R_{\tau\sigma} \\
&+ g^{x\tau} R_{x\tau} + g^{xx} R_{xx} + g^{xy} R_{xy} + g^{x\sigma} R_{x\sigma} \\
&+ g^{y\tau} R_{y\tau} + g^{yx} R_{yx} + g^{yy} R_{yy} + g^{y\sigma} R_{y\sigma} \\
&+ g^{\sigma\tau} R_{\sigma\tau} + g^{\sigma x} R_{\sigma x} + g^{\sigma y} R_{\sigma y} + g^{\sigma\sigma} R_{\sigma\sigma}.
\end{aligned}$$

Los términos diferentes de cero y considerando que el tensor de Ricci es simétrico, obtenemos:

$$\begin{aligned}
R &= g^{\tau\tau} R_{\tau\tau} + 2g^{\tau y} R_{\tau y} + 2g^{\tau\sigma} R_{\tau\sigma} + g^{xx} R_{xx} + g^{yy} R_{yy} + 2g^{y\sigma} R_{y\sigma} \\
&+ g^{\sigma\sigma} R_{\sigma\sigma}.
\end{aligned}$$

Finalmente el escalar de Ricci se escribe como:

$$\begin{aligned}
R &= 6e^{2Q} \left\{ -[-(K_0 + K_1x)^2 + (x^2 - \epsilon)(C_0 + C_1x)] \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \right)^2 \right. \\
&+ [3C_1(x^2 - \epsilon) - 2K_1(K_0 + K_1x) + 2C_0x] \frac{\partial Q}{\partial x} \\
&+ [-(K_0 + K_1x)^2 + (x^2 - \epsilon)(C_0 + C_1x)] \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \\
&- \frac{x^2 - \epsilon}{-(K_0 + K_1x)^2 + (x^2 - \epsilon)(C_0 + C_1x)} \left( \frac{\partial Q}{\partial y} \right)^2 \\
&\left. - \frac{3}{12}(C_0 + 3C_1x - K_1^2) \right\}. \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Tenemos ahora todos los elementos necesarios para calcular las componentes del tensor de Einstein. Calculamos la componente  $G_{\tau y}$ . Comenzamos sustituyendo los parámetros  $\tau$  e  $y$  en la definición (1.16).

$$G_{\tau y} = R_{\tau y} - \frac{1}{2}g_{\tau y}R.$$

Notemos que,  $g_{\tau y} = 0$ , por lo que simplemente  $G_{\tau y} = R_{\tau y}$ , entonces;

$$G_{\tau y} = -\frac{1}{2}(C_0K_1 - C_1K_0).$$

## 2.1. Ecuaciones de Einstein al vacío

Por conveniencia se trabaja con el tensor mixto de las ecuaciones de Einstein ( $G^\nu{}_\mu = 0$ ). Utilizando el tensor métrico, obtenemos la forma mixta, mediante

$$G^\nu{}_\mu = g^{\beta\nu}G_{\mu\beta}. \quad (2.8)$$

En nuestro caso particular presentamos las componentes diferentes de cero de las ecuaciones de Einstein en el vacío:

$$\begin{aligned} G^\tau{}_\tau &= e^{2Q} \left\{ [(x^2 - \epsilon)(C_0 - C_1x) - (K_0 + K_1x)^2] \left[ -2\frac{\partial Q}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 \right] \right. \\ &+ \frac{(x^2 - \epsilon)}{[(x^2 - \epsilon)(C_0 - C_1x) - (K_0 + K_1x)^2]} \left[ -2\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2 \right] \\ &\left. - [5C_1x^2 - 2C_1\epsilon + 3xC_0 - 4K_1(K_0 + K_1x)]\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{5C_1 + C_0 - 3K_1^2}{4} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (2.9a)$$

$$G^\tau{}_\sigma = e^{2Q} \left\{ [\epsilon(C_0 + C_1x) + K_0(K_0 + K_1x)]\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{(K_0K_1 + C_1\epsilon)}{2} \right\} = 0, \quad (2.9b)$$

$$\begin{aligned} G^\tau{}_x &= e^{2Q} \left\{ -2x(K_0 + K_1x) \right. \\ &+ \frac{(x^2 - \epsilon)(K_0C_0 + K_1C_1x^2) + 2x(C_0K_1\epsilon + C_1K_0x^2)}{(x^2 - \epsilon)(C_0 - C_1x) - (K_0 + K_1x)^2} \frac{\partial Q}{\partial y} \\ &\left. + [(x^2 - \epsilon)(C_0 - C_1x) - (K_0 + K_1x)^2] \left[ \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (2.9c)$$

$$G_y^\tau = e^{2Q} \left\{ (C_0 K_1 - K_0 C_1) \left( x \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{1}{2} \right) - \frac{2(K_0 + K_1 x)}{(x^2 - \epsilon)(C_0 - C_1 x) - (K_0 + K_1 x)^2} \left[ \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \left( \frac{\partial Q}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} = 0, \quad (2.9d)$$

$$G_\tau^\sigma = e^{2Q} (C_0 + C_1 x) \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{C_1}{2(C_0 + C_1 x)} \right] = 0, \quad (2.9e)$$

$$\begin{aligned} G_\sigma^\sigma = e^{2Q} & \left\{ (x^2 - \epsilon) \left[ -2 \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \left( \frac{\partial Q}{\partial y} \right)^2 \right] \right. \\ & + [(x^2 - \epsilon)(C_0 - C_1 x) - (K_0 + K_1 x)^2] \left[ -2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \right)^2 \right] \\ & - [3(C_0 + C_1 x)x + C_1(5x^2 - 2\epsilon) - 3(K_0 + K_1 x)^2] \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \\ & \left. + \frac{5C_1 x + C_0 - K_1^2}{4} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (2.9f)$$

$$\begin{aligned} G_x^\sigma = e^{2Q} & \left\{ 2(K_0 + K_1 x) \left( \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} \right) \right. \\ & + \frac{K_1(K_0 + K_1 x)^2 + (x^2 - \epsilon)(K_1 C_0 - K_0 C_1) - 2x(C_0 + C_1 x)(K_0 + K_1 x)}{(x^2 - \epsilon)(C_0 - C_1 x) - (K_0 + K_1 x)^2} \\ & \left. \left( \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \right\} = 0, \end{aligned} \quad (2.9g)$$

$$\begin{aligned} G_y^\sigma = e^{2Q} & \left\{ \frac{-2(K_0 + K_1 x)}{(x^2 - \epsilon)(C_0 - C_1 x) - (K_0 + K_1 x)^2} \left[ \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \left( \frac{\partial Q}{\partial y} \right)^2 \right] \right. \\ & \left. + (K_1 C_0 - K_0 C_1) \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \right\} = 0, \end{aligned} \quad (2.9h)$$

$$G_\tau^x = e^{2Q} (K_0 + K_1 x) \left( \frac{\partial Q}{\partial y} \right) = 0, \quad (2.9i)$$

$$G_{\sigma}^x = e^{2Q}(K_0x + K_1\epsilon) \left( \frac{\partial Q}{\partial y} \right) = 0, \quad (2.9j)$$

$$G_{\tau}^y = e^{2Q}(K_0 + K_1x) \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{K_1}{2(K_0 + K_1x)} \right) = 0, \quad (2.9k)$$

$$G_{\sigma}^y = e^{2Q}(K_0x + K_1\epsilon) \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{K_0}{2(K_0 + K_1\epsilon)} \right) = 0, \quad (2.9l)$$

$$\begin{aligned} G_x^x = e^{2Q} & \left\{ \frac{x^2 - \epsilon}{(x^2 - \epsilon)(C_0 - C_1x) - (K_0 + K_1x)^2} \left[ -\frac{\partial^2 Q}{\partial^2 y} + \left( \frac{\partial Q}{\partial y} \right)^2 \right] \right. \\ & + [2K_1(K_0 + K_1x) - 2x(C_0 + C_1x) - C_1(x^2 - \epsilon)] \frac{\partial Q}{\partial x} \\ & \left. + 3[(x^2 - \epsilon)(C_0 - C_1x) - (K_0 + K_1x)^2] \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \right)^2 + \frac{C_0 + 3C_1 - K_1^2}{4} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (2.9m)$$

$$G_y^x = e^{2Q} \left[ 2 \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} + 2 \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{(x^2 - \epsilon)C_1 + K_1(K_0 + K_1x)}{(x^2 - \epsilon)(C_0 - C_1x) - (K_0 + K_1x)^2} \frac{\partial Q}{\partial y} \right] = 0, \quad (2.9n)$$

$$G_x^y = e^{2Q} \left[ 2 \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} + 2 \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{(x^2 - \epsilon)C_1 + (K_0 + K_1x)(K_0x + K_1\epsilon)}{(x^2 - \epsilon)[(x^2 - \epsilon)(C_0 - C_1x) - (K_0 + K_1x)^2]} \frac{\partial Q}{\partial y} \right] = 0, \quad (2.9ñ)$$

$$\begin{aligned} G_y^y = e^{2Q} & \left\{ [(x^2 - \epsilon)(C_0 - C_1x) - (K_0 + K_1x)^2] \left[ -2 \frac{\partial^2 Q}{\partial^2 x} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \right)^2 \right] \right. \\ & - [(x^2 - \epsilon)C_1 - 4(C_0 + C_1x)x - 3K_1(K_0 + K_1x)] \frac{\partial Q}{\partial x} \\ & \left. + \frac{3(x^2 - \epsilon)}{(x^2 - \epsilon)(C_0 - C_1x) - (K_0 + K_1x)^2} \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{3C_0 + 5C_1x - K_1^2}{4} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.9o)$$

El resolver este sistema de ecuaciones es el problema al que está enfocado el presente trabajo.

## Capítulo 3

# Soluciones de las ecuaciones de Einstein

Las soluciones a las ecuaciones de Einstein son tales que satisfacen simultáneamente a todo el sistema al sustituir las funciones encontradas. Como no hay un método general para resolverlas en nuestro caso analizamos las ecuaciones mas sencillas en busca de 'sugerencias' para resolver el sistema. Una vez obtenida una solución, se procedió a sustituirla en las demás componentes y se obtuvieron relaciones entre constantes que resuelven el sistema. Se dice que se tiene una solución exacta cuando se llega a conocer la forma explícita todas las funciones métricas del elemento de línea.

Uno puede verificar que las ecuaciones (2.9i) ó (2.9j), ya que  $K_0 \neq 0$ ,  $K_1 \neq 0$  y  $e^Q \neq 0$ , implican

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = 0, \quad (3.1)$$

es decir, la función  $Q(x, y)$  no depende de la variable  $y$ ; por lo que hacemos  $Q(x, y) = q(x)$ .

Sustituyendo  $q(x)$  en el sistema (2.9) la componente (2.9b) es equivalente a;

$$2[(K_0 K_1 + \epsilon C_1)x + K_0^2 + \epsilon C_0] \frac{dq}{dx} - (K_0 K_1 + \epsilon C_1) = 0.$$

Es fácil integrar esta ecuación al notar que el segundo término es solo la derivada del logaritmo del coeficiente que acompaña a la derivada, es decir

$$dq(x) = \frac{1}{2} \frac{(K_0 K_1 + \epsilon C_1)}{[(K_0 K_1 + \epsilon C_1)x + K_0^2 + \epsilon C_0]} dx, \quad (3.2)$$

que se integra de forma sencilla haciendo un cambio de variable, y se obtiene

$$q(x) = \frac{1}{2} \ln[(K_0 K_1 + \epsilon C_1)x + K_0^2 + \epsilon C_0] + \frac{1}{2} q_0, \quad (3.3)$$

donde  $q_0$  es una constante de integración.

Sustituyendo (3.3) en el sistema (2.9), de las componentes  $y_\tau$  y  $y_\sigma$

$$e^{q_0} \epsilon (C_0 K_1 - K_0 C_1) = 0, \quad (3.4a)$$

$$G_\sigma^y = e^{q_0} (K_0^3 - \epsilon K_1^2 K_0 - \epsilon^2 K_1 C_1 + \epsilon K_0 C_0) = 0, \quad (3.4b)$$

De la ecuación (3.4a) vemos que la única solución físicamente aceptable es;

$$K_1 = \frac{C_1}{C_0} K_0. \quad (3.5)$$

sustituyendo (3.5) en (3.4b) tenemos,

$$\left( \epsilon \frac{C_1^2}{C_0^2} - 1 \right) (K_0^2 + \epsilon C_0) = 0, \quad (3.6)$$

esta última ecuación es interesante porque para cada valor del parámetro  $\epsilon \pm 1$  tenemos diferentes soluciones. En la sección siguiente analizaremos todas las posibles soluciones de (3.6), que constituyen diferentes ramas de soluciones.

### 3.1. Soluciones con valor del parámetro $\epsilon = 1$

Cuando  $\epsilon = 1$  la ecuación (3.6)

$$\left( \frac{C_1^2}{C_0^2} - 1 \right) (K_0^2 + C_0) = 0, \quad (3.7)$$

lo que da lugar a dos condiciones;

$$\left(\frac{C_1^2}{C_0^2} - 1\right) = 0 \quad \vee \quad (K_0^2 + C_0) = 0 \quad (3.8)$$

cuando se satisface la primera condición implica  $|C_1| = |C_0|$ , i.e., los valores absolutos de las  $C$ 's son iguales, aunque pueden tener signos contrarios. Por lo que (3.5) tiene las siguientes soluciones:

$$K_1 = K_0 \quad \vee \quad K_1 = -K_0, \quad (3.9)$$

cuando

$$C_1 = C_0 \quad \vee \quad C_1 = -C_0, \quad (3.10)$$

respectivamente.

Sustituyendo la primera igualdad de (3.9) y (3.10) en (3.3)

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2} \ln[(K_0^2 + C_0)x + K_0^2 + C_0] + \frac{1}{2} \ln q_0, \\ &= \frac{1}{2} \ln[q_0(K_0^2 + C_0)(1 + x)]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Ahora sustituimos la segunda igualdad de (3.9) y (3.10) en (3.3)

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2} \ln[(-K_0^2 - C_0)x + K_0^2 + C_0] + \frac{1}{2} \ln q_0, \\ &= \frac{1}{2} \ln[q_0(K_0^2 + C_0)(1 - x)]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Cuando se utiliza la segunda condición de (3.8) los parámetros de la solución son determinados  $\epsilon = 1$ ,  $K_1 = C_1/C_0 K_0$  y  $K_0^2 = -C_0$  lo que implica que  $C_0 < 0$ . Sustituyendo lo anterior en (3.3)

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{1}{2} \ln \left[ \left( \frac{C_1}{C_0} K_0^2 + C_1 \right) x + K_0^2 + C_0 \right] + \frac{1}{2} \ln q_0, \\ &= \frac{1}{2} \ln q_0 \left[ \frac{C_1}{C_0} (K_0^2 + C_0) x + K_0^2 + C_0 \right], \end{aligned} \quad (3.13)$$

por lo tanto el argumento de la función logaritmo es cero!, por lo cual queda descartada como solución.

### 3.2. Soluciones con valor del parámetro $\epsilon = -1$

Cuando  $\epsilon = -1$  la ecuación (3.6) queda

$$-\left(1 + \frac{C_1^2}{C_0^2}\right)(K_0^2 - C_0) = 0, \quad (3.14)$$

lo que da lugar a una condición, pues al contrario que en la sección anterior el primer término si pidieramos que fuera cero implicaría que la solución es compleja y eso no puede ser, entonces

$$(K_0^2 - C_0) = 0 \quad (3.15)$$

sustituyendo en (3.3)

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{1}{2} \ln \left[ \left( \frac{C_1}{C_0} K_0^2 - C_1 \right) x + K_0^2 - C_0 \right] + \frac{1}{2} q_0, \\ &= \frac{1}{2} \ln q_0 \left[ \frac{C_1}{C_0} (K_0^2 - C_0) x + K_0^2 - C_0 \right], \end{aligned} \quad (3.16)$$

lo que no puede ser porque nuevamente el argumento de la función logaritmo es cero!

### 3.3. Métricas encontradas

Hasta el momento nos dedicamos a integrar el sistema de ecuaciones (2.9), debido a la alta simetría del espacio estudiado consistió en encontrar la función  $Q(x, y)$ . Una vez encontrada la solución y fijado los parámetros constantes hay que sustituirlos en la métrica inicial,

- Con  $\epsilon = 1$ ,  $K_0 = K_1$  y  $C_0 = C_1$

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{q_0(K_0^2 + C_0)(1+x)} \left\{ - (d\tau^2 + 2xd\tau d\sigma + d\sigma^2) + 2K_0(1+x)dyd\sigma \right. \\ &\quad \left. + C_0(1+x)dy^2 + \frac{dx^2}{C_0(1+x)(x^2-1) - K_0^2(1+x)^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

- Con  $\epsilon = 1$ ,  $K_1 = -K_0$  y  $C_1 = -C_0$

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \frac{1}{q_0(K_0^2 + C_0)(1-x)} \left\{ - (d\tau^2 + 2xd\tau d\sigma + d\sigma^2) + 2K_0(1-x)dyd\sigma \right. \\
 & \left. + C_0(1-x)dy^2 + \frac{dx^2}{C_0(1-x)(x^2-1) - K_0^2(1-x)^2} \right\} \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

Estas son las únicas dos soluciones físicamente aceptables que se reportan en el presente trabajo, aun queda analizar si las soluciones de la ecuación (3.4b) al sustituirse en (3.4a) dan lugar a soluciones diferentes de las encontradas. Hay que mencionar que aunque encontramos soluciones al vacío, cuando se calcula el tensor de Riemann de las métricas (4.1) y (4.2) el tensor es cero, lo que implica que regresamos al caso plano. Sin embargo preferimos dejar ese análisis para otro trabajo.



# Capítulo 4

## Conclusiones

- El objetivo principal del trabajo se cumplió , encontramos soluciones al vacío de la ecuaciones de Einstein en un espacio estacionario no-circular conformalmente plano. Lamentablemente al calcular el tensor de Riemann resulta que todas las componentes son cero, por lo que regresamos al espacio plano.
- En nuestra perspectiva, el presente trabajo sirve como una buena referencia en cuanto a conocer los conceptos básicos con los que se trabaja en Soluciones Exactas a las ecuaciones de Einstein. Sobre todo es una guía detallada de los objetos que hay que calcular y las referencias dónde buscar.
- Las soluciones reportadas son las primeras en la literatura del tipo no-circular
- Con  $\epsilon = 1$ ,  $K_0 = K_1$  y  $C_0 = C_1$

$$ds^2 = \frac{1}{q_0(K_0^2 + C_0)(1+x)} \left\{ - (d\tau^2 + 2xd\tau d\sigma + d\sigma^2) + 2K_0(1+x)dyd\sigma \right. \\ \left. + C_0(1+x)dy^2 + \frac{dx^2}{C_0(1+x)(x^2-1) - K_0^2(1+x)^2} \right\} \quad (4.1)$$

- Con  $\epsilon = 1$ ,  $K_1 = -K_0$  y  $C_1 = -C_0$

$$ds^2 = \frac{1}{q_0(K_0^2 + C_0)(1-x)} \left\{ - (d\tau^2 + 2xd\tau d\sigma + d\sigma^2) + 2K_0(1-x)dyd\sigma \right. \\ \left. + C_0(1-x)dy^2 + \frac{dx^2}{C_0(1-x)(x^2-1) - K_0^2(1-x)^2} \right\} \quad (4.2)$$

---

# Bibliografía

- [1] Hans Stephani, *Relativity. An introduction to Special and General Relativity*. Cambridge University Press. (3 ed. 2004).
- [2] Sean Carroll, *Spacetime and Geometry. An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley. St. Francisco USA (2004).
- [3] David McMahon. *Relativity Demystified*. McGraw-Hill. USA (2006).
- [4] Charles W. Misner, Kip S. Thorne and John Archibald Wheeler, *Gravitation*. Freeman and Company. San Francisco. (1972)
- [5] [http://en.wikipedia.org/wiki/Black\\_hole](http://en.wikipedia.org/wiki/Black_hole).
- [6] Karl Schwarzschild, *On the Gravitational Field of a Mass Point according to Einsteins Theory*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys.-Math. Klasse, 189-196, (1916). [arXiv:physics/9905030].
- [7] Hans Stephani, *Exact Solutions for Einstein's Field Equations*. Cambridge University Press (2003).
- [8] Cuauhtemoc Campuzano, Alberto García, Circular stationary cyclic symmetric spacetimes; conformal flatness, [arXiv:gr-qc/0310054].
- [9] E. Gourgoulhon and S. Bonazzola, *Noncircular axisymmetric stationary spacetimes* Phys. Rev. D. 48, 2635 (1993)
- [10] R.Vera Class. Quant. Gravity **20**, 2785 (2003) [arXiv:gr-qc/0305108].
- [11] Eloy Ayón-Beato, Cuauhtemoc Campuzano and Alberto García, *Conformally Flat Noncircular Spacetimes*. Phys. Rev. D 74, 024014 (2006)[arXiv:gr-qc/0506004v1].
- [12] E. Kyriakopoulos, *Family Of Rotating Anisotropic Fluid Solutions which Match to Kerr's Solution* Int.J.Mod.Phys. D22 ,1350051 (2013).

- [13] Bernard F. Schutz, *A first course in general relativity*. Cambridge University Press. 6 ta ed. (2004).
- [14] Robert M. Wald, *General Relativity*. The University of Chicago Press. (1984).
- [15] Alberto García, Cuauhtemoc Campuzano, *On conformally flat stationary axisymmetric space-times* Phys.Rev. D66 124018 (2002), Erratum-ibid. D68 049901 (2003).
- [16] A. Lightman, W. Price, R. H. Price, S. A. Teukolsky *Problem Book in Relativity and Gravitation*, Princeton University Press (1975).