

**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
PUEBLA**

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



**SIMULACIÓN PARA DETERMINAR DISPERSIONES LINEALES
NORMALES EN MUESTRAS HOMOGÉNEAS POR ZONAS CON
INTERFEROMETRÍA DE CORRIMIENTO DE FASE Y BARRIDO
EN λ**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN FÍSICA

PRESENTA

JACOB BARRANCO CISNEROS

DIRECTOR DE TESIS
GUSTAVO RODRIGUEZ ZURITA

PUEBLA, PUE.

10 de Junio del 2014

*”Da tu primer paso
ahora. No importa
que no veas el
camino completo.
Sólo da tu primer
paso y el resto del
camino irá
apareciendo a
medida que camines.”
-Martin Luther King, Jr.-*

Agradecimientos

Agradezco de manera muy especial a mi mamá que siempre me ha apoyado a lo largo de la vida en cada decisión que yo he tomado.

Le agradezco a mis hermanos por estar siempre ahí para ayudarme y por darme el mejor ejemplo.

Agradezco también al Dr. Gustavo Rodríguez Zurita por su más de una oportunidad para finalizar este proyecto, por su tiempo y disponibilidad.

Agradezco a VIEP por su apoyo para realizar mi tesis con el proyecto titulado *Interferometría con sistemas laser PIV y OPO* con numero de referencia 213/2014.

Finalmente a todos las personas que conocí durante el transcurso de esta etapa.

Índice general

1. Introducción	1
2. Antecedentes	5
2.1. Campo electromagnético	5
2.1.1. Ecuaciones de Maxwell	5
2.1.2. Ecuaciones para materiales	6
2.1.3. Ecuaciones de onda	6
2.1.4. Velocidad de la luz	7
2.1.5. Índice de refracción	8
2.2. Dispersión lineal	9
2.2.1. Modelo de Drude-Lorentz	9
2.2.2. Relaciones Kramers-Krönig	16
2.3. Velocidad de grupo	19
2.3.1. Onda plana viajera homogénea: velocidad de fase	19
2.3.2. Paquete de ondas: velocidad de grupo	23
2.4. Métodos de medición de dispersiones lineales	28
2.4.1. Método de Abbe	28
2.5. Ajustes de datos de dispersión: coeficientes en el polinomio de Cauchy	29
2.5.1. Polinomios de ajuste	29
2.5.2. Coeficientes de Cauchy	30
3. Medición interferométrica de dispersiones	33
3.1. Interferometría: corrimiento de fase	33
3.1.1. Interferencia	33
3.1.2. Interferometría	35
3.1.3. Interferometría de corrimiento de fase (PSI)	37
3.2. Posibilidad de medición de dispersiones con interferometría	40
3.3. Análisis de la propuesta con corrimiento de fase	41

3.4. Factibilidad de la propuesta	43
4. Simulaciones numéricas	45
4.1. Dispersión homogénea por zonas de espesor constante e interfaz lineal . .	45
4.2. Dispersión homogénea por zonas de espesor constante e interfaz cúbica .	52
4.3. Dispersión homogénea por zonas de espesor constante e interfaz con la forma de un polinomio de grado 5	54
5. Simulaciones numéricas de recuperaciones de fase	57
5.1. Recuperación de distribuciones de fase con corrimiento de fase a distintas λ	57
5.1.1. Objeto unidimensional de dispersión homogénea por zonas de es- pesor constante e interfaz lineal	57
5.1.2. Objeto unidimensional de dispersión homogénea por zonas de es- pesor constante e interfaz cúbica	67
5.1.3. Objeto unidimensional de dispersión homogénea por zonas de es- pesor constante e interfaz con la forma de un polinomio de grado 5	73
5.2. Resultados y discusión	79
6. CONCLUSIONES GENERALES	87
Bibliografía	88

Capítulo 1

Introducción

En este trabajo se propone un método para el estudio de dispersiones lineales normales considerando muestras homogéneas por zonas, utilizando interferometría de corrimiento de fase (PSI). Los índices de refracción asociados a estas muestras se pueden dar como funciones de la longitud de onda y del espacio. Este tipo de muestras, al ser de diferentes materiales, pueden tener distintos índices de refracción teniendo así diferente relación de dispersión. Para conocer estas relaciones de dispersión se requiere estudiar diversas secciones de la muestra bajo la iluminación de distintas longitudes de onda en el rango visible.

El estudio teórico de la dispersión se basa en la teoría de Maxwell que estudia las respuestas eléctricas y magnéticas de la materia bajo campos aplicados. Así es necesario considerar la naturaleza atómica de la materia para analizar la dispersión. Un modelo teórico que explica la dependencia del índice de refracción respecto a la frecuencia (por tanto de la longitud de onda) es el Modelo de Drude-Lorentz. Aporta una expresión matemática para su descripción. Al analizar esta expresión, se puede identificar lo que se conoce como dispersión normal y anómala. La dispersión anómala se da para valores de frecuencia cercanos al valor de la frecuencia de resonancia del sistema, para los propósitos la región anómala es de poca importancia, ya que las frecuencias de absorción de los átomos libres se encuentra exclusivamente en la región ultravioleta del espectro. Por ello, no es de interés pues en este estudio se trabaja con valores de la longitud de onda en el rango visible.

En este trabajo de tesis se propone una nueva manera de medir dispersiones normales con técnicas interferométricas seleccionando varias longitudes de onda para la misma muestra. Ésto se presentará en simulaciones numéricas de situaciones representativas. Es importante mencionar que la parte experimental del método propuesto no es parte de este trabajo.

En la Fig. 1.1 se muestra en forma de diagrama de bloques el planteamiento del problema.

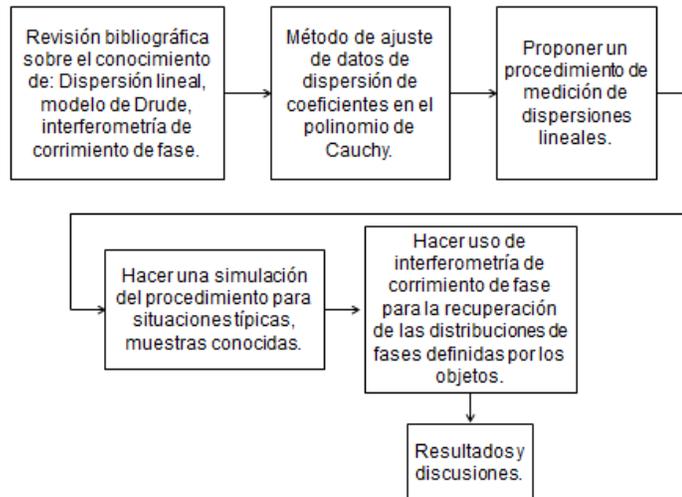


Figura 1.1: Diagrama de bloques del planteamiento del problema

Así, los objetivos planteados para este trabajo de tesis son los que se describen a continuación.

Objetivo general:

Establecer las condiciones de viabilidad propias de un método interferométrico capaz de medir dispersiones lineales normales por punto en muestras poseyendo índices de refracción homogéneos por zonas.

Ojetivos específicos:

- Revisar, estudiar y asimilar las bases que hay detrás de la teoría de dispersión e interferometría de corrimiento de fase.
- Establecer las condiciones y alcances del método propuesto.
- Proponer un procedimiento de medición de dispersiones lineales de acuerdo al método propuesto.

- Simular el procedimiento para situaciones típicas utilizando Mathcad, definiendo primero las muestras que consta de distintos objetos unidimensionales.
- Aplicar la interferometría de corrimiento de fase para la recuperación de las distribuciones de fases definidas para los objetos definidos anteriormente.
- Análisis de los resultados y conclusiones generales.
- Escribir y defender la tesis.

El trabajo de tesis queda organizado de la siguiente manera: el capítulo 2 contiene teoría que es base para entender la teoría de dispersión en medios materiales, se explica de manera breve en que consiste los polinomios de ajuste y como a partir de ellos es posible ajustar datos de dispersión. Se describe la forma de una ecuación de Cauchy y el significado de los coeficientes de dicha ecuación. El capítulo 3 se divide en tres partes importantes. La primera parte consiste en teoría que hay detrás de la interferometría de corrimiento de fase (PSI). En la segunda parte se describe el método propuesto que se refiere a la posibilidad de medir dispersiones con interferometría. Finalmente en la tercera parte se describe el análisis de la propuesta haciendo corrimiento de fase. En el capítulo 4, se describen los objetos propuestos que estarán bajo estudio y se explica las primeras simulaciones de los objetos. Describiéndolos de forma general se definen las condiciones fundamentales para su estudio. En el capítulo 5, se exponen las simulaciones numéricas de recuperación de fase para los distintos objetos una vez hecho el corrimiento de fase para distintas longitudes de onda. En este capítulo se dan los resultados que se obtiene de haber desarrollado el método que se propone. Se realiza una discusión de los resultados. En el capítulo 6, se dan las conclusiones generales.

En la sección de apéndices se anexan los programas usados de simulación de los objetos.

Capítulo 2

Antecedentes

2.1. Campo electromagnético

2.1.1. Ecuaciones de Maxwell

El estado de excitación que se establece en el espacio por la presencia de cargas eléctricas es llamado campo electromagnético. Es representando por dos vectores \mathbf{E} y \mathbf{B} : campo eléctrico y la inducción magnética, respectivamente.

Para describir los efectos del campo en la materia, es necesario introducir un conjunto de vectores más: la densidad de corriente eléctrica \mathbf{j} , el desplazamiento eléctrico \mathbf{D} y el vector intensidad de campo magnético \mathbf{H} .

Las derivadas espaciales y temporales de los cinco vectores están relacionadas con las ecuaciones de Maxwell (unidades cgs):

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}} = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi \rho, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.4)$$

Cada una de estas ecuaciones representa una generalización de algunas observaciones experimentales. La ecuación (2.1) representa una extensión de la ley de Ampère; la ecuación (2.2) es la forma diferencial de la ley de inducción electromagnética de Faraday; la ecuación (2.3) es la ley de Gauss, que a su vez se deduce de la ley de Coulomb; y la ecuación (2.4) establece el caso de no tener monopolos magnéticos.

2.1.2. Ecuaciones para materiales

En las ecuaciones de Maxwell se relacionan las cinco cantidades \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{B} , \mathbf{D} y \mathbf{j} , para permitir una determinación única de los vectores de campo para una distribución dada de corrientes y cargas. Estas ecuaciones deben ser complementadas por las relaciones que describe el comportamiento de las sustancias bajo la influencia del campo. Estas relaciones son conocidas como ecuaciones de materiales (o relaciones constitutivas). En general, son bastante complicadas, pero si el campo es armónico en el tiempo, si los cuerpos están en reposo, o en movimiento muy lento respecto de otro y si el material es isotrópico (es decir, cuando sus propiedades físicas son independientes de la dirección), toman una forma relativamente simple(lineal).

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (2.7)$$

aquí, σ es llamada la conductividad específica, ε es conocida como la constante dieléctrica (o permitividad) y μ se llama la permeabilidad magnética.

2.1.3. Ecuaciones de onda

Las ecuaciones de Maxwell relacionan los vectores de campo por medio de ecuaciones diferenciales simultáneas. Por eliminación, obtenemos las ecuaciones diferenciales que cada uno de los vectores deben satisfacer por separado. Limitaremos nuestra atención a la parte del campo que no contiene cargas o corrientes, es decir, donde $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ y $\rho = 0$.

De la ecuación para materiales (2.7) sustituimos \mathbf{B} en la segunda ecuación de Maxwell (2.2), dividimos ambos lados por μ y aplicamos el operador rotacional, obtenemos

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) + \frac{1}{c} \nabla \times \dot{\mathbf{H}} = 0, \quad (2.8)$$

En seguida diferenciamos la primera ecuación de Maxwell (2.1) respecto al tiempo, utilizamos la ecuación (2.6) y eliminamos el rotacional de \mathbf{H} punto con el resultado de la ecuación (2.8), se obtiene

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) + \frac{\varepsilon}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} = 0, \quad (2.9)$$

Utilizando la identidad $\nabla \times u\mathbf{v} = u\nabla \times \mathbf{v} + \nabla u \times \mathbf{v}$ y también que $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) =$

$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$ la ecuación (2.9) se convierte en

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} + (\nabla \ln \mu) \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0, \quad (2.10)$$

De la ecuación (2.3), utilizando nuevamente la ecuación (2.6) y aplicando la identidad $\nabla \cdot u\mathbf{v} = u\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla u$ obtenemos

$$\varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla \varepsilon = 0, \quad (2.11)$$

La ecuación (2.10) puede escribirse de la siguiente forma

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} + (\nabla \ln \mu) \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \nabla(\mathbf{E} \cdot \nabla \ln \varepsilon) = 0, \quad (2.12)$$

De una manera similar se obtiene una ecuación para \mathbf{H}

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \ddot{\mathbf{H}} + (\nabla \ln \varepsilon) \times (\nabla \times \mathbf{H}) + \nabla(\mathbf{H} \cdot \nabla \ln \mu) = 0, \quad (2.13)$$

En particular, si el medio es homogéneo $\nabla \ln \varepsilon = \nabla \ln \mu = 0$ entonces las ecuaciones (2.12) y (2.13) se reduce a

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} = 0, \quad (2.14)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \ddot{\mathbf{H}} = 0. \quad (2.15)$$

2.1.4. Velocidad de la luz

Las ecuaciones de la sección anterior son ecuaciones estándar para el movimiento de ondas y sugieren la existencia de ondas electromagnéticas que se propagan con cierta velocidad.

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad (2.16)$$

La constante c fue determinada por primera vez por R.Kohlrausch y W.Weber en 1856 a

partir de valores de la capacitancia de un condensador, se encontró que era muy parecida a la velocidad de la luz en el espacio libre. Usando este resultado, Maxwell desarrolló su teoría electromagnética de la luz y predijo la existencia de las ondas electromagnéticas. La veracidad de esta predicción fue confirmada por los experimentos célebres de H. Hertz.

Las mediciones de la velocidad de las ondas electromagnéticas en alambres llevadas a cabo por Mercier(1923) dieron el valor de c igual a $299,782 \text{ km/s}$. El valor adoptado por La Conferencia General de Pesas y Medidas es

$$c = 299,792,458 \text{ m/s}. \quad (2.17)$$

El acuerdo cercano entre los valores de c obtenidos a partir de diferentes tipos de mediciones (y en algunos casos usando la radiación cuyas frecuencias difieren por un factor de cientos de miles de los utilizados en las mediciones ópticas) da una sólida confirmación a la teoría de Maxwell.

2.1.5. Índice de refracción

La constante dieléctrica ε por lo general es mayor que la unidad y para sustancias transparentes no magnéticas μ es prácticamente igual a la unidad, de modo que la velocidad v de acuerdo a la ecuación (2.16) es menor que la velocidad de la luz en el vacío c . Esta conclusión se demostró por primera vez de manera experimental para la propagación de la luz en el agua en 1850 por Foucault y Fizeau.

El valor de v no está determinado directamente por el valor de c , con la ayuda de la ley de refracción es posible determinar dicho valor. De acuerdo con esta ley, si una onda electromagnética plana incide sobre el límite de una superficie entre dos medios homogéneos, el seno del ángulo θ_1 que se encuentra entre la normal a la onda incidente y la normal a la superficie lleva una relación constante con el seno del ángulo θ_2 que se encuentra entre la normal de la onda refractada y la superficie normal. La relación entre el seno del ángulo de incidencia y el seno del ángulo de refracción es igual a la razón entre la velocidad de la onda en el primer medio v_1 y la velocidad de la onda en el segundo medio v_2 .

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (2.18)$$

El valor de la relación constante en (2.18) se denota generalmente por n_{12} y se le conoce como índice de refracción relativo, para la refracción del primer medio en el segundo medio. También definimos un índice de refracción absoluto n de un medio. Este índice de refracción es la comparación de la velocidad de la luz en un medio con la velocidad de la luz en el vacío.

$$n = \frac{c}{v}. \quad (2.19)$$

Si n_1 y n_2 son índices de refracción absolutos de dos medios, el índice de refracción (relativo) n_{12} para la refracción del primer medio en el segundo medio esta dada como

$$n_{12} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (2.20)$$

Comparando las ecuaciones (2.19) y (2.16), resulta la fórmula de Maxwell

$$n = \sqrt{\epsilon\mu}. \quad (2.21)$$

Para sustancias no magnéticas se considera el valor de μ igual a la unidad. Por otro lado, son bien conocidos los experimentos llevados a cabo por Newton que muestran que el índice de refracción depende del color, es decir, de la frecuencia de la luz [1].

2.2. Dispersión lineal

2.2.1. Modelo de Drude-Lorentz

En la sección 2.1 se ha señalado que la velocidad de la fase, por tanto, el índice de refracción, no puede ser constante del medio. De hecho, estas cantidades dependen de la frecuencia. La variación del índice de refracción respecto a la frecuencia constituye el fenómeno de dispersión. Para un tratamiento adecuado de dispersión, sería necesario profundizar en la teoría atómica de la materia, pero es posible dar un modelo simplificado de la dispersión en un medio (esencialmente debido a H.A.Lorentz) utilizando uno de los dos resultados básicos referentes a la estructura molecular.

Una molécula consiste de un número de partículas pesadas (constituyen el núcleo atómico de los átomos que forman la molécula) alrededor de las cuales los electrones giran. Los electrones poseen cargas negativas y los núcleos carga positiva. En las moléculas neutras las cargas de los electrones compensan las cargas de los núcleos. Sin embargo, las cargas del núcleo atómico y de los electrones pueden no coincidir, entonces este sistema forma un dipolo eléctrico. Por simplicidad, aquí excluirémos las moléculas polares, aunque estas juegan un papel importante en muchos fenómenos físico y químicos.

Si una molécula no polar se somete a un campo eléctrico, los electrones y los núcleos se desplazan y se genera un momento dipolar. La suma vectorial de todos los momentos dipolares de las moléculas por unidad de volumen es el vector de polarización \mathbf{P} .

Para determinar la dependencia de la polarización y del índice de refracción respecto a la frecuencia del campo primero debemos encontrar el desplazamiento \mathbf{r} de cada partícula desde su posición de equilibrio. Podemos suponer que sobre cada electrón actúa la fuerza de Lorentz \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E}' + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}'), \quad (2.22)$$

donde e es la carga del electrón y v su velocidad. Se supondrá que la velocidad del electrón es más pequeña que la velocidad c de la luz en el vacío, de modo que la contribución del campo magnético se puede despreciar en la expresión para la fuerza de Lorentz. La determinación rigurosa del desplazamiento efectivo de los núcleos y los electrones bajo la acción de la fuerza eléctrica es un problema complicado de la mecánica cuántica. Sin embargo se ha confirmado que el electrón se comporta, en buena aproximación, como si estuviera enlazado a una posición de equilibrio por una fuerza de restauración cuasi-elástica.

$$\mathbf{Q} = -q\mathbf{r}. \quad (2.23)$$

Por lo tanto, si m denota la masa del electrón, la ecuación del movimiento es

$$m\ddot{\mathbf{r}} + q\mathbf{r} = e\mathbf{E}', \quad (2.24)$$

Sea ω la frecuencia angular del campo incidente

$$\mathbf{E}' = E'_0 e^{-i\omega t}, \quad (2.25)$$

Y para la ecuación (2.24) se considera como solución la siguiente expresión

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t}, \quad (2.26)$$

La ecuación (2.24) nos da la solución estacionaria

$$\mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}'}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (2.27)$$

donde

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{q}{m}}, \quad (2.28)$$

se le llama frecuencia de resonancia (o absorción). De acuerdo con la ecuación (2.27) el electrón oscila con la frecuencia del campo incidente.

Antes de continuar con el análisis recordemos algunos conceptos referentes a polarización. Para nuestro desarrollo, se considera que para cada molécula el momento dipolar eléctrico \mathbf{p} producido por la influencia del campo es proporcional al campo efectivo \mathbf{E}' .

$$\mathbf{p} = \alpha\mathbf{E}'. \quad (2.29)$$

La molécula que se considera debe ser isotrópica, pero como solo estamos interesados en el efecto medio sobre todas las orientaciones posibles de la molécula, no es necesario suponer que cada molécula individual es isotrópica. α será considerada para representar la

polarizabilidad media, y puesto que \mathbf{p} es de dimensiones $[el]$ y \mathbf{E}' de dimensiones $[el^{-2}]$ ($e = \text{carga}, l = \text{longitud}$), α se puede ver que tiene dimensiones $[l^3]$.

Si N es el número de moléculas por unidad de volumen, el momento eléctrico total \mathbf{P} por unidad de volumen está dada por:

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p} = N\alpha\mathbf{E}'. \quad (2.30)$$

Recordemos que el campo total en el interior de una esfera que rodea a una molécula, es la suma del campo efectivo \mathbf{E}' sobre la molécula central y el campo medio \mathbf{E} .

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\mathbf{P} \quad (2.31)$$

Cuando un material dieléctrico se somete a un campo eléctrico \mathbf{E} se polariza. La relación que expresa esto es $\mathbf{P} = \chi\mathbf{E}$, siendo la χ la susceptibilidad dieléctrica. Utilizando las ecuaciones (2.30) y (2.31) se encuentra una expresión explícita para la susceptibilidad dieléctrica.

$$\chi = \frac{N\alpha}{1 - \frac{4\pi}{3}N\alpha}. \quad (2.32)$$

Si ahora sustituimos χ en la relación $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi$, obtenemos la siguiente expresión para la constante dieléctrica:

$$\varepsilon = \frac{1 + \frac{8\pi}{3}N\alpha}{1 - \frac{4\pi}{3}N\alpha}. \quad (2.33)$$

Invirtiéndola ecuación (2.33) nos da información sobre la dependencia de la polarizabilidad media en términos de ε y N , y si utilizamos la relación $\varepsilon = n^2$ se tiene:

$$\alpha = \frac{3}{4\pi N} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{3}{4\pi N} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}. \quad (2.34)$$

La relación se descubrió de forma independiente y prácticamente al mismo tiempo por dos científicos de nombres casi idénticos, Lorentz y Lorenz y en consecuencia lleva por nombre *formula de Lorentz – Lorenz*.

Cada electrón contribuye a la polarización con un momento $\mathbf{P} = e\mathbf{r}$. También habrá contribuciones del núcleo, pero como las masas nucleares son más pesadas que las de los electrones, estas contribuciones en primera aproximación pueden ser despreciables. Además, suponiendo por el momento que hay un solo electrón efectivo en una molécula con una frecuencia de resonancia ω_0 , se obtiene para la polarización total \mathbf{P} la siguiente expresión.

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p} = N e\mathbf{r} = N \frac{e^2}{m} \frac{\mathbf{E}'}{(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (2.35)$$

Comparando (2.35) con (2.30) tenemos:

$$N\alpha = N \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (2.36)$$

expresando la densidad de polarizabilidad en términos de parámetros atómicos. Es conveniente introducir la noción de una dependencia de la constante dieléctrica respecto a la frecuencia $\varepsilon(\omega)$ definida por la relación de Maxwell $\varepsilon = n^2$, donde n es el índice de refracción, vista entonces como una función $n(\omega)$ (ec. (2.21)). La constante dieléctrica estática es entonces el valor de $\varepsilon(0) = n^2(0)$, que corresponde, de acuerdo a la ecuación (2.34), al valor límite $N\alpha(0)$ que se obtiene a partir de la ecuación (2.36).

$$N\alpha(0) = \frac{Ne^2}{m\omega_0^2}, \quad (2.37)$$

De acuerdo a la ecuación (2.36), para $\omega = 0$, la función $N\alpha(\omega)$ es monótonamente creciente respecto ω , y tiende a infinito para $\omega = \omega_0$ (punto de resonancia), para $\omega \geq \omega_0$, se acerca al valor 0 desde la parte negativa al incrementar ω , sustituyendo la ecuación (2.36) en la ecuación (2.34), se encuentra la dependencia explícita del índice de refracción con respecto a la frecuencia:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} \frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (2.38)$$

Para un gas, n es aproximadamente igual a la unidad, así que se puede establecer $n^2 + 2 \sim 3$, entonces la ecuación anterior resulta:

$$n^2 - 1 \sim 4\pi N\alpha = \frac{4\pi Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (2.39)$$

Se ve que n es una función creciente con respecto a la frecuencia, se dice entonces que la dispersión es *normal*. Además $n \leq 0$ para $\omega \leq \omega_0$, y n se aproxima a la unidad al incrementar ω (ver la figura 2.1).

En la frecuencia de resonancia ($\omega = \omega_0$) n y α son infinitas como lo sugiere nuestra formula. Esta singularidad surge porque hemos despreciado el efecto de amortiguación. La amortiguación es un factor esencial en todo el proceso, pues los electrones que vibran emiten ondas electromagnéticas que transfieren energía, pero también hay otras razones para la disipación de la energía (por ejemplo debido a colisiones entre los átomos). Formalmente la amortiguación puede tomarse en cuenta añadiendo en la ecuación de movimiento (2.24) un término $\gamma\dot{\mathbf{r}}$ que representa una fuerza de resistencia.

$$m\ddot{\mathbf{r}} + \gamma\dot{\mathbf{r}} + q\mathbf{r} = e\mathbf{E}', \quad (2.40)$$

En similitud con la ecuación (2.27) tenemos:

$$\mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}'/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega}. \quad (2.41)$$

De la ecuación (2.35) la polarización se puede escribir como $\mathbf{P} = N e \mathbf{r}$, donde N es el número de partículas por unidad de volumen. Recordemos que cuando un material dieléctrico se somete a un campo eléctrico \mathbf{E} se polariza, de acuerdo a $\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}$, con las relaciones anteriores se obtiene de (2.41):

$$\chi \mathbf{E} = \frac{N e^2 / m}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega} \mathbf{E}'. \quad (2.42)$$

Pero se sabe que el campo molecular está relacionado con el campo eléctrico de la onda y el vector polarización \mathbf{P} a través de la ecuación (2.37). Recordemos la relación entre el índice de refracción n y la susceptibilidad eléctrica χ , $n^2 = 1 + \chi$. Utilizando las ecuaciones anteriores y la relación $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi$, se encuentra la siguiente ecuación fundamental, que expresa la dependencia del índice de refracción respecto a la frecuencia, con términos reales e imaginarios.

$$\begin{aligned} n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)} &= \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}} \\ &= \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\omega}} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{4\pi N e^2}{m}} \quad (2.43) \\ n(\omega) &= n_r(\omega) + i n_i(\omega) \end{aligned}$$

La polarización y por lo tanto también $N\alpha$, se convierten en cantidades complejas. Se puede demostrar que el módulo de esta función compleja es (aparte de un pequeño factor debido a la absorción) la densidad de polarizabilidad y esto se muestra por el trazo de la curva en la figura 2.1. La curva tiene un máximo considerable en ω , que es ligeramente más pequeño que ω_0 . Entre el máximo y el mínimo de la función, se observa que disminuye con el aumento de frecuencia, entonces se habla de una región de dispersión anómala. Para nuestros propósitos la región anómala es de poca importancia, ya que las frecuencias de absorción de los átomos libres se encuentran exclusivamente en la región ultravioleta del espectro. Entonces el índice de refracción de la luz visible es siempre mayor que la unidad.

Hasta ahora hemos asumido que el sistema sólo tiene una frecuencia de resonancia. En general, habrá más frecuencias, incluso en sistemas con el mismo tipo de moléculas, así que las ecuaciones (2.38) y (2.39) debe ser sustituidas por expresiones más generales.

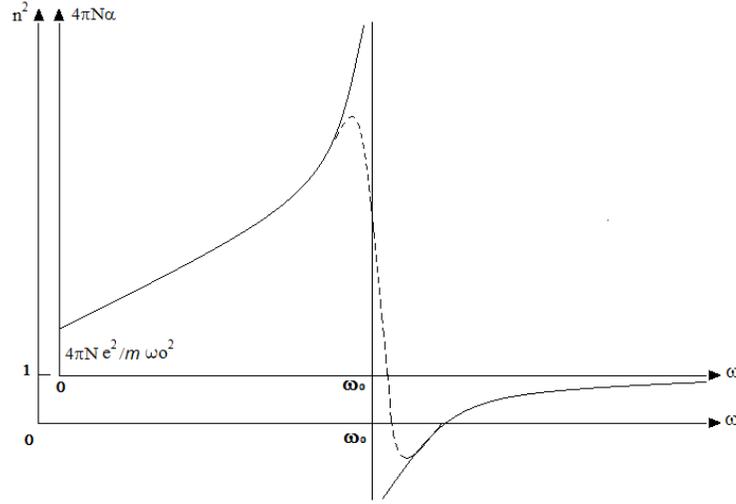


Figura 2.1: Curvas de dispersión: La curva continua se da sin considera el efecto de amortiguamiento, la curva punteada corresponde al hecho de tomar en cuenta el efecto de amortiguamiento. (Las ordenadas representan las partes reales de n^2 y de $4\pi N\alpha$.)

Despreciando por el momento otra vez el movimiento de los núcleos, tenemos en el lugar de la ecuación (2.38),

$$\frac{4\pi}{3} N\alpha = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} N \frac{e^2}{m} \sum_k \frac{f_k}{\omega_k^2 - \omega^2}, \quad (2.44)$$

Donde $N f_k$ es el número de electrones que corresponde a la frecuencia de resonancia ω_k . Para gases ($n \sim 1$) podemos reescribir (2.44) de la siguiente forma,

$$n^2 - 1 = 4\pi N\alpha = \sum_k \frac{\rho_k}{\nu_k^2 - \nu^2} = \sum_k \frac{\rho_k}{c^2} \frac{\lambda^2 \lambda_k^2}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \quad (2.45)$$

donde

$$\rho_k = N \frac{e^2}{\pi m} f_k,$$

$$\nu_k = \frac{\omega_k}{2\pi} = \frac{c}{\lambda_k},$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c}{\lambda}.$$

Utilizando las siguiente identidad

$$\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_k^2} = 1 + \frac{\lambda_k^2}{\lambda^2 - \lambda_k^2}$$

Entonces la ecuación (2.45) resulta,

$$n^2 - 1 = a + \sum_k \frac{b_k}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \quad (2.46)$$

con

$$a = \sum_k \frac{\rho_k}{\nu_k^2} = \frac{1}{c^2} \sum_k \rho_k \lambda_k^2,$$

$$b_k = \frac{c^2 \rho_k}{\nu_k^4} = \frac{1}{c^2} \rho_k \lambda_k^4.$$

Para representar el índice de refracción en todo el rango visible, por lo general es suficiente tomar en cuenta sólo una de las dos frecuencias de resonancia en la región ultravioleta. Se ha encontrado que para el rango $\lambda = 0.436\mu m$ a $\lambda = 8.68\mu m$, tiene la siguiente fórmula para el hidrogeno, oxígeno y aire.

$$n^2 - 1 = a + \frac{b}{\lambda^2 - \lambda_0^2}, \quad (2.47)$$

donde a, b y λ_0 son constantes.

Denotamos por ν_v las frecuencias de absorción, que están en el lado de longitud de onda corta (violeta), y por ν_r a las frecuencias de longitud de onda larga (rojo), la fórmula de dispersión (2.45) se convierte en la expansión en serie de potencias respecto a ν y λ :

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= A + B\nu^2 + C\nu^4 + \dots - \frac{B'}{\nu^2} - \frac{C'}{\nu^4} - \dots \\ &= A + \frac{Bc^2}{\lambda^2} + \frac{Cc^2}{\lambda^4} + \dots - \frac{B'\lambda^2}{c^2} - \frac{C'\lambda^4}{c^4} - \dots, \end{aligned} \quad (2.48)$$

Donde;

$$\begin{aligned} A &= \sum_\nu \frac{\rho_\nu}{\nu_\nu^2}, & B &= \sum_\nu \frac{\rho_\nu}{\nu_\nu^4}, & C &= \sum_\nu \frac{\rho_\nu}{\nu_\nu^6}, \\ B' &= \sum_r \rho_r, & C' &= \sum_r \rho_r \nu_r^2, \dots \end{aligned} \quad (2.49)$$

En un rango de absorción libre el valor de n para gases difiere muy poco de la unidad, que se puede reemplazar $n^2 - 1$ por $2(n - 1)$. Por otra parte, los términos B', C', \dots se derivan

de las frecuencias de resonancia ultravioleta, generalmente es despreciable su influencia. Entonces, si se conservan únicamente los términos de orden menor a $1/\lambda^2$. La ecuación (2.48) se reduce a la ecuación de Cauchy [1].

$$n - 1 = A_1 \left(1 + \frac{B_1}{\lambda^2}\right), \quad (2.50)$$

donde

$$A_1 = \frac{A}{2}, \quad B_1 = \frac{Bc^2}{A}. \quad (2.51)$$

2.2.2. Relaciones Kramers-Krönig

Consideremos una onda electromagnética, la que expresamos en sus componentes de distintas frecuencias. El vector desplazamiento lo escribimos como una integral de Fourier:

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{D}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.52)$$

Cada componete está relacionada con el campo eléctrico:

$$\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \varepsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) \quad (2.53)$$

se pueden expresar a través de la transformada inversa:

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}, t') e^{i\omega t'} dt' \quad (2.54)$$

Reemplazando (2.53) en (2.52) obtenemos:

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.55)$$

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}, t') e^{i\omega t'} dt' \quad (2.56)$$

intercambiando el orden de integración obtenemos:

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) \vec{E}(\vec{r}, t - \tau) d\tau \quad (2.57)$$

donde $G(\tau)$ es la transformada de Fourier de $\varepsilon(\omega) - 1$:

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\varepsilon(\omega) - \varepsilon_0] e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (2.58)$$

Estas dos ecuaciones dan la dependencia no-local en el tiempo entre \vec{D} y \vec{E} . Si $\varepsilon(\omega)$ no depende de ω , $G(\tau) \propto \delta(\tau)$ y la conexión entre \vec{D} y \vec{E} es instantánea. En caso contrario $G(\tau)$ es distinto de cero por un cierto tiempo y entonces la conexión es no-local en el tiempo.

Como modelo para la permitividad ε podemos usar la ecuación (2.43) :

$$\varepsilon(\omega) - \varepsilon_0 = \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (2.59)$$

$$G(\tau) = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} d\omega \quad (2.60)$$

Esta integral se puede evaluar por integración de contorno, considerando que el integrando tiene polos en:

$$\omega_{1,2} = -\frac{i\gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4} \quad (2.61)$$

Nótese que los polos se encuentran en el semiplano inferior.

Ahora considerando el exponente de $e^{-i\omega t}$ en el integrando. Este lo podemos escribir como:

$$-i(\omega_R + i\omega_I)\tau = -i\omega_R\tau + \omega_I\tau \quad (2.62)$$

Obviamente para $\tau < 0$ el contorno debe cerrarse por el semiplano superior, ya que un contorno en el semiplano inferior, el integrando diverge. Pero como no hay polos en el semiplano superior, el resultado es $G(\tau) = 0$.

Por el contrario para $\tau > 0$ en el contorno debe hacerse en el semiplano inferior. En este caso el resultado es $-2\pi i$ veces la suma de los residuos de los polos:

$$G(\tau) = \varepsilon_0 \omega_p^2 e^{-\gamma\tau/2} \frac{\text{sen } \nu_0\tau}{\nu_0}, \quad \text{donde} \quad \nu_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4} \quad (2.63)$$

Resumiendo:

$$G(\tau) = \varepsilon_0 \omega_p^2 e^{-\gamma\tau/2} \frac{\text{sen } \nu_0\tau}{\nu_0} \Theta(\tau = 0) \quad (2.64)$$

Así llegamos a:

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \int_0^{\infty} G(\tau) \vec{E}(\vec{r}, t - \tau) d\tau \quad (2.65)$$

y también podemos escribir la permitividad como:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \int_0^{\infty} G(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (2.66)$$

Ya que el integrando es distinto de cero sólo para $\tau > 0$ esta relación nos dice que bajo la suposición razonable que $G(\tau)$ es finita para todo τ , $\varepsilon(\omega)$ es analítica en la parte superior del plano complejo ω . Esta una consecuencia de relación casual entre \vec{D} y \vec{E} . A partir de que \vec{E}, \vec{D} y G son reales se puede demostrar que $\varepsilon(-\omega) = \varepsilon^*(\omega^*)$. El comportamiento de $\varepsilon(\omega)$ para grandes valores de ω mediante una expansión en series de Taylor de $G(\tau)$ en la ecuación (2.66).

$$\varepsilon(\omega) \simeq \varepsilon_0 - \frac{iG(0)}{\omega} - \frac{\omega G'(0)}{\omega^2} + \dots \quad (2.67)$$

Aquí se entiende que G y sus derivadas se calculan en $\tau = 0^+$. Sin embargo como G no puede tener una discontinuidad en $\tau = 0$, el segundo término está ausente. Así

$$\text{Re}(\varepsilon(\omega)) \simeq \varepsilon_0 - \frac{G'(0)}{\omega^2} \quad \text{Im}(\varepsilon(\omega)) \simeq -\frac{iG''(0)}{\omega^3} \quad (2.68)$$

Escribamos la permitividad como una función de la variable compleja z , expresada como una integral contorno. Para esto usamos el teorema de Cauchy que nos permite escribir para cualquier punto z dentro de un contorno C en la parte superior del plano complejo ω :

$$\varepsilon(Z) = \varepsilon_0 + \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\varepsilon(\omega') - \varepsilon_0}{\omega' - z} d\omega' \quad (2.69)$$

donde C incluye el eje real y un gran semicírculo en el infinito. Ya que $\varepsilon(\omega) - \varepsilon_0 \rightarrow 0$ suficientemente rápido en infinito, podemos escribir la última relación como:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(\omega') - \varepsilon_0}{\omega' - \omega - i\varepsilon} d\omega' \quad (2.70)$$

La cantidad $i\varepsilon$ nos recuerda que el contorno se debe deformar en un pequeño semicírculo debajo de punto $\omega' = \omega$. Así el denominador se debe escribir formalmente como:

$$\frac{1}{\omega' - \omega - i\varepsilon} = P\left(\frac{1}{\omega' - \omega}\right) + \pi i \delta(\omega' - \omega) \quad (2.71)$$

Reemplazando la relación 2.71 en la ecuación (2.70) tenemos:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega) &= \varepsilon_0 + P \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(\omega') - \varepsilon_0}{\omega' - \omega} d\omega' + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \pi i [\varepsilon(\omega') - \varepsilon_0] \delta(\omega' - \omega) d\omega' \\ &= \varepsilon_0 + P \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(\omega') - \varepsilon_0}{\omega' - \omega} d\omega' + \frac{1}{2} [\varepsilon(\omega) - \varepsilon_0] \end{aligned}$$

Esto nos permite escribir (2.70) como:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(\omega') - \varepsilon_0}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (2.72)$$

Tomando parte real e imaginaria de esta ecuación obtenemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\varepsilon(\omega)] &= \varepsilon_0 + \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}[\varepsilon(\omega')]}{\omega' - \omega} d\omega' \\ \operatorname{Im}[\varepsilon(\omega)] &= -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}[\varepsilon(\omega')] - \varepsilon_0}{\omega' - \omega} d\omega' \end{aligned}$$

Estas relaciones fueron derivadas por R. de L. Kröning en 1926 y por H.A Kramers independientemente en 1927.

2.3. Velocidad de grupo

2.3.1. Onda plana viajera homogénea: velocidad de fase

En un medio homogéneo en regiones libres de corrientes y cargas, cada componente rectangular $V(\mathbf{r}, t)$ de los vectores de campo satisface la ecuación de onda homogénea.

$$\nabla^2 V - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0. \quad (2.73)$$

Enseguida examinaremos la solución de esta ecuación. Sea $\mathbf{r}(x, y, z)$ el vector de posición de un punto P en el espacio y $\mathbf{s}(s_x, s_y, s_z)$ un vector unitario en una dirección fija. Cualquier solución de (2.73) de la forma:

$$V = V(\mathbf{r}, \mathbf{s}, t) \quad (2.74)$$

representa una onda plana, ya que V es constante en cada instante de tiempo a lo largo de cada uno de los planos

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = \text{constante}$$

Será conveniente elegir un nuevo conjunto de ejes cartesianos $O\xi, O\eta, O\zeta$, con $O\zeta$ en la dirección de \mathbf{s} , entonces,

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = \zeta, \quad (2.75)$$

se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x} = s_x \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = s_y \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = s_z \frac{\partial}{\partial \zeta}.$$

A partir de estas relaciones se encuentra que,

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2}, \quad (2.76)$$

de manera que (2.73) se puede escribir como,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0, \quad (2.77)$$

Si establecemos

$$\zeta - vt = p, \quad \zeta + vt = q, \quad (2.78)$$

(2.77) toma la forma

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p \partial q} = 0, \quad (2.79)$$

La solución general de esta ecuación es

$$\begin{aligned} V &= V_1(p) + V_2(q) \\ &= V_1(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} - vt) + V_2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} + vt), \end{aligned} \quad (2.80)$$

donde V_1 y V_2 son funciones arbitrarias.

Vemos que el argumento de V_1 no se modifica cuando (ζ, t) se sustituye por $(\zeta + v\tau, t + \tau)$, donde τ es arbitrario. Por lo tanto V_1 representa una perturbación que se propaga con velocidad v en la dirección positiva ζ . Del mismo modo V_2 representa una perturbación que se propaga con velocidad v en la dirección negativa ζ .

En un punto en el espacio \mathbf{r}_0 la perturbación de la onda es función solo del tiempo:

$$V(\mathbf{r}_0, t) = F(t). \quad (2.81)$$

El caso cuando F es periódica es de particular interés, en consecuencia consideramos el caso en que F tiene la forma

$$F(t) = a \cos[\omega t + \delta]. \quad (2.82)$$

a es la amplitud y el argumento del término coseno $\omega t + \delta$ es la fase. La cantidad

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} \quad (2.83)$$

es la frecuencia y representa el número de vibraciones por segundo. ω es la frecuencia angular y da el número de vibraciones en 2π segundos. Ya que F permanece sin cambios cuando t es reemplazado por $t + T$, T es el período de las vibraciones, las funciones de

onda (es decir, soluciones de la ecuación de onda) de la forma (2.82) se dice que son armónicas con respecto al tiempo. Consideremos una función de onda que representa una onda armónica plana que se propaga en la dirección del vector unitario \mathbf{s} . Sustituyendo t por $t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} / v$, en la ecuación (2.82) obtenemos:

$$V(\mathbf{r}, t) = a \cos[\omega(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}}{v}) + \delta]. \quad (2.84)$$

La ecuación (2.84) permanece sin cambios cuando $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}$ se reemplaza por $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} + \lambda$, donde

$$\lambda = v \frac{2\pi}{\omega} = vT. \quad (2.85)$$

λ es la longitud de onda, se puede definir una longitud de onda reducida λ_0 como:

$$\lambda_0 = cT = n\lambda; \quad (2.86)$$

esta es la longitud de onda que corresponde a una onda armónica de la misma frecuencia que se propaga en el vacío. En espectroscopia se utiliza también el concepto de número de onda κ , que se define como el número de veces que vibra una onda por unidad de longitud (cm) en el vacío:

$$\kappa = \frac{1}{\lambda_0} = \frac{\nu}{c}. \quad (2.87)$$

Es conveniente definir vectores k_0 y k en la dirección de propagación \mathbf{s} , cuyas longitudes son:

$$k_0 = 2\pi\kappa = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c}. \quad (2.88)$$

y

$$k = nk_0 = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\omega}{c} = \frac{\omega}{v}. \quad (2.89)$$

El vector $\mathbf{k} = k\mathbf{s}$ se denomina vector de onda o vector de propagación en el medio, siendo $\mathbf{k}_0 = k_0\mathbf{s}$ el vector correspondiente en el vacío. En lugar de la constante δ también se utiliza el concepto de longitud de trayectoria l , que es la distancia a través de la cual un frente de onda retrocede cuando la fase aumenta en δ :

$$l = \frac{v}{\omega}\delta = \frac{\lambda}{2\pi}\delta = \frac{\lambda_0}{2\pi n}\delta. \quad (2.90)$$

Ahora consideremos ondas armónicas dependientes del tiempo de una forma más complicada. En general una onda armónica real escalar dependiente del tiempo con frecuencia ω , puede definirse como una solución real de la ecuación de onda, definida de la siguiente forma:

$$V(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) \cos[\omega t - g(\mathbf{r})], \quad (2.91)$$

$a(> 0)$ y g son funciones reales y escalares de posición. Las superficies

$$g(\mathbf{r}) = \text{constante} \quad (2.92)$$

se denominan superficies de onda. A diferencia del caso anterior, en general las superficies de amplitud constante de la onda no coinciden con las superficies de fase constante. Dicha onda se dice que es no homogénea.

Los cálculos con ondas armónicas se simplifican expresando a las ondas en términos de exponenciales, la ecuación (2.91) se expresa como:

$$V(\mathbf{r}, t) = \mathcal{R}\{U(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\} \quad (2.93)$$

donde

$$U(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r})e^{ig(\mathbf{r})}, \quad (2.94)$$

\mathcal{R} denota la parte real. Sustituyendo (2.94) en (2.73), se encuentra que U debe satisfacer la ecuación

$$\nabla^2 U + n^2 k_0^2 U = 0. \quad (2.95)$$

U es la amplitud compleja de la onda. En particular, si la onda es plana, uno tiene

$$g(\mathbf{r}) = \omega\left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}}{v}\right) - \delta = k(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}) - \delta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \delta. \quad (2.96)$$

Si las operaciones para V son lineales se puede omitir el símbolo \mathcal{R} en (2.93) y operar directamente con la función compleja.

A diferencia de una onda armónica plana, la onda más general descrita por la ecuación (2.93) no es periódica con respecto al espacio. La fase $\omega t - g(\mathbf{r})$, se considera que es la misma para (\mathbf{r}, t) y $(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, t + dt)$, con la condición

$$\omega dt - (\text{grad } g) \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (2.97)$$

Si denotamos por \mathbf{q} el vector unitario en la dirección $d\mathbf{r}$, y escribimos $d\mathbf{r} = \mathbf{q}ds$, entonces de (2.97) tenemos

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\omega}{\mathbf{q} \cdot \text{grad } g}. \quad (2.98)$$

Esta expresión será numéricamente más pequeña cuando \mathbf{q} sea la normal a la superficie de onda, es decir, cuando $\mathbf{q} = \text{grad } g / |\text{grad } g|$, siendo entonces el valor

$$v^{(p)}(\mathbf{r}) = \frac{\omega}{|\text{grad } g|}. \quad (2.99)$$

$v^{(p)}(\mathbf{r})$ se le llama la velocidad de fase y es la velocidad con la que cada una de las superficies de onda avanzan. Para una onda electromagnética plana se tiene de (2.96) que $\text{grad } g = \mathbf{k}$, por lo tanto

$$v^{(p)} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (2.100)$$

Debe tenerse en cuenta que la expresión ds/dt dada por (2.98) no es el resultado de la velocidad de fase en la dirección \mathbf{q} , es decir, la velocidad de fase no se comporta como un vector. Por otro lado su recíproco, es decir, la cantidad.

$$\frac{dt}{ds} = \frac{\mathbf{q} \cdot \text{grad } g}{\omega}, \quad (2.101)$$

se ve que es la componente del vector $(\text{grad } g)/\omega$ en la dirección \mathbf{q} . El vector $(\text{grad } g)/\omega$ se denomina a veces la lentitud de fase.

La velocidad de fase en ciertos casos puede ser mayor que c . Para ondas planas esto será así cuando $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ sea menor que la unidad, como se puede ver en las regiones de dispersión anómala. De acuerdo con la teoría de la relatividad, las señales no pueden viajar más rápido que c . Esto implica que la velocidad de fase no puede corresponder a una velocidad con la que se propaga una señal. Esta velocidad es velocidad de grupo, por lo cual la contradicción es solo aparente. Es debido al hecho de que mientras una onda monocromática puede en efecto tener una rapidez mayor que c , ella no puede llevar información. La información la transporta un paquete de ondas que se desplazan con una velocidad de grupo siempre menor que c .

2.3.2. Paquete de ondas: velocidad de grupo

Las ondas monocromáticas consideradas en el apartado anterior son idealizaciones no estrictamente realizadas en la práctica. Se deduce del teorema de Fourier que cualquier onda $V(\mathbf{r}, t)$, puede considerarse como superposición de ondas monocromáticas de diferentes frecuencias:

$$V(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty a_\omega(\mathbf{r}) \cos[\omega t - g_\omega(\mathbf{r})] d\omega. \quad (2.102)$$

Es conveniente utilizar una representación compleja, en la que V es considerada como la parte real asociada a una onda compleja:

$$V(\mathbf{r}, t) = \mathcal{R} \int_0^\infty a_\omega(\mathbf{r}) e^{-i[\omega t - g_\omega(\mathbf{r})]} d\omega. \quad (2.103)$$

Una onda puede decirse que es “cuasi-monocromática”, si las amplitudes de Fourier a_ω difieren sensiblemente de cero dentro de un rango estrecho,

$$\bar{\omega} - \frac{1}{2}\Delta\omega \leq \omega \leq \bar{\omega} + \frac{1}{2}\Delta\omega \quad (\Delta\omega/\bar{\omega} \ll 1)$$

en torno a una frecuencia media $\bar{\omega}$. En este caso, se habla de un grupo de ondas o un paquete de ondas.

Para ilustrar algunas de las propiedades principales de un grupo de ondas, consideremos en primer lugar una onda formada por la superposición de dos ondas monocromáticas planas con las mismas amplitudes y ligeramente diferentes en frecuencias y en números de onda, que se propagan en la dirección del eje z .

$$V(z, t) = ae^{-i(\omega t - kz)} + ae^{-i[(\omega + \delta\omega)t - (k + \delta k)z]}, \quad (2.104)$$

Esta ecuación puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} V(z, t) &= a\{e^{\frac{1}{2}i(t\delta\omega - z\delta k)} + e^{-\frac{1}{2}i(t\delta\omega - z\delta k)}\}e^{-i(\bar{\omega}t - \bar{k}z)} \\ &= 2a \cos\left[\frac{1}{2}(t\delta\omega - z\delta k)\right]e^{-i(\bar{\omega}t - \bar{k}z)}, \end{aligned} \quad (2.105)$$

donde

$$\bar{\omega} = \omega + \frac{1}{2}\delta\omega, \quad \bar{k} = k + \frac{1}{2}\delta k, \quad (2.106)$$

son la frecuencia media y el número de onda medio respectivamente. (2.105) puede interpretarse como la representación de una onda plana de frecuencia $\bar{\omega}$ y longitud de onda $2\pi/\bar{k}$ propagándose en la dirección z . La amplitud de esta onda no es constante, varía con el tiempo y la posición, entre los valores $2a$ y 0 . Los máximos sucesivos de la función de amplitud se dan en los siguientes intervalos;

$$\delta t = \frac{4\pi}{\delta\omega} \quad (\text{con } z \text{ fija}) \quad \text{o} \quad \delta z = \frac{4\pi}{\delta k} \quad (\text{con } t \text{ fijo}), \quad (2.107)$$

Los máximos de la función de fase son en los siguientes intervalos;

$$\delta t = \frac{2\pi}{\bar{\omega}} \quad (\text{con } z \text{ fija}) \quad \text{o} \quad \delta z = \frac{2\pi}{\bar{k}} \quad (\text{con } t \text{ fijo}), \quad (2.108)$$

Por lo tanto ya que $\delta\omega/\bar{\omega}$ y $\delta k/\bar{k}$ se supone que son pequeñas en comparación con la unidad, la amplitud varía lentamente en comparación con el otro término.

A partir de (2.105) se deduce que los planos de amplitud constante, en particular, los máximos de la amplitud, se propagan con la velocidad

$$v^{(g)} = \frac{\delta\omega}{\delta k}, \quad (2.109)$$

mientras que los planos de fase constante se propagan con la velocidad

$$v^{(p)} = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}, \quad (2.110)$$

$v^{(g)}$ se denomina la velocidad de grupo de la onda. Como V obedece a la ecuación de onda, la frecuencia ω y el número de onda k están relacionados; al considerar un medio con un índice de refracción n , uno tiene (ver (2.89))

$$k = n(\omega) \frac{\omega}{c}, \quad (2.111)$$

donde n es la función de índice de refracción. La ecuación (2.111) expresa la *dispersión* de la onda. En un medio no dispersivo, n es independiente de ω , la velocidad de fase v^p y la velocidad de grupo v^g entonces son iguales a c/n . Sin embargo en un medio dispersivo, en general, las dos velocidades son diferentes.

Puesto que $\delta\omega$ se supone que es pequeña, $\delta\omega/\delta k$ puede ser sustituido por $d\omega/dk$, de modo que la expresión para la velocidad de grupo puede ser escrita como:

$$v^{(g)} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (2.112)$$

Consideremos un grupo de ondas unidimensionales

$$V(z, t) = \int_{(\Delta\omega)} a_\omega e^{-i(\omega t - kz)} d\omega, \quad (2.113)$$

donde $\Delta\omega$ representa un intervalo pequeño alrededor de una frecuencia media $\bar{\omega}$ ($\Delta\omega/\bar{\omega} \ll 1$) para el cual a_ω difiere apreciablemente de cero. Sea $\bar{k} = n(\bar{\omega})\bar{\omega}/c$ el número de onda correspondiente. Entonces (2.113) se puede expresar de la siguiente manera

$$V(z, t) = A(z, t) e^{-i(\bar{\omega}t - \bar{k}z)}, \quad (2.114)$$

donde

$$A(z, t) = \int_{\Delta\omega} a_\omega e^{-i[(\omega - \bar{\omega})t - (k - \bar{k})z]} d\omega \sim \int_{(\Delta\omega)} a_\omega e^{-i[(\omega - \bar{\omega})(t - (\frac{dk}{d\omega})_{\bar{\omega}}z)]} d\omega, \quad (2.115)$$

si $\Delta\omega$ es suficientemente pequeño. V puede ser interpretada como una onda plana con amplitud variable de frecuencia $\bar{\omega}$ y número de onda \bar{k} , propagándose en la dirección z . La amplitud $A(z, t)$ representa una superposición de ondas armónicas con frecuencias $\omega - \bar{\omega}$. como suponemos que $\Delta\omega/\bar{\omega}$ es menor que la unidad, A variará lentamente en comparación con el otro término. En general A es complejo, de modo que hay una contribución ($\arg A$) para la fase $\bar{\omega}t - \bar{k}z$. Las superficies

$$t = \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\bar{\omega}} z, \quad (2.116)$$

desempeñan un papel importante, en cada una de estas superficies $A(z, t)$ es constante. Por lo tanto la velocidad de avance para un valor definido de A y también para el máximo de $|A|$ se da por la *velocidad de grupo*.

$$v^{(g)} = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{\bar{k}}, \quad (2.117)$$

La velocidad de grupo y la velocidad de fase mantienen una relación de la siguiente manera,

$$v^{(g)} = \frac{d}{dk}(v^{(p)}k) = v^{(p)} + k \frac{dv^{(p)}}{dk} = v^{(p)} - \lambda \frac{dv^{(p)}}{d\lambda}, \quad (2.118)$$

Por último, vamos a considerar un grupo de ondas en tres dimensiones.

$$V(\mathbf{r}, t) = \mathcal{R} \int_{(\Delta\omega)} a_{\omega} e^{-i[\omega t - g_{\omega}(\mathbf{r})]} d\omega. \quad (2.119)$$

Por analogía con (2.113), separamos un término correspondiente a la frecuencia media $\bar{\omega}$ y escribimos

$$V(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t) e^{-i[\bar{\omega} t - g_{\bar{\omega}}(\mathbf{r})]}, \quad (2.120)$$

donde

$$A(\mathbf{r}, t) = \int_{(\Delta\omega)} a_{\omega}(\mathbf{r}) e^{-i[(\omega - \bar{\omega})t - (g_{\omega}(\mathbf{r}) - g_{\bar{\omega}}(\mathbf{r}))]} d\omega \sim \int_{(\Delta\omega)} a_{\omega}(\mathbf{r}) e^{-i[(\omega - \bar{\omega})(t - (\frac{\partial g(\mathbf{r})}{\partial \omega})_{\bar{\omega}})]} d\omega, \quad (2.121)$$

si $\Delta\omega$ es suficientemente pequeño. La ecuación (2.120) representa una onda de frecuencia $\bar{\omega}$ cuya amplitud $A(\mathbf{r}, t)$ varía en espacio y tiempo, esta variación es lenta en comparación con el otro término. Por analogía con (2.116) la superficie

$$t = \left[\frac{\partial g(\mathbf{r})}{\partial \omega} \right]_{\bar{\omega}} \quad (2.122)$$

se espera que desempeñe un papel importante. Sin embargo, la función de amplitud A no es necesariamente constante en cada una de las superficies, ya que la amplitud de Fourier a_{ω} no es función sólo de la frecuencia, sino también de la posición. Para ver el significado de (2.122), se puede considerar el valor absoluto $M = |A|$. Tenemos

$$M^2(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t) A^*(\mathbf{r}, t) = \int_{(\Delta\omega)} \int_{(\Delta\omega)} a_{\omega}(\mathbf{r}) a_{\omega'}(\mathbf{r}) e^{-i[(\omega - \omega')(t - (\frac{\partial g(\mathbf{r})}{\partial \omega})_{\bar{\omega}})]} d\omega d\omega'. \quad (2.123)$$

Obviamente la parte imaginaria de la integral doble desaparece ya que M^2 es real. (Formalmente esto puede verificarse intercambiando las variables independientes ω y ω' y tomando en cuenta que la parte imaginaria del integrando cambia de signo) por lo tanto

$$M^2(\mathbf{r}, t) = \int_{(\Delta\omega)} \int_{(\Delta\omega)} a_\omega(\mathbf{r}) a_{\omega'}(\mathbf{r}) \cos[(\omega - \omega')(t - (\frac{\partial g(\mathbf{r})}{\partial \omega})_{\bar{\omega}})] d\omega d\omega'. \quad (2.124)$$

Ahora veamos un punto en particular $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ y recordemos que $a_\omega \geq 0$, vemos que $M^2(\mathbf{r}_0, t)$ alcanza su máximo cuando el argumento del coseno es cero, es decir, cuando $t = (\frac{\partial g(\mathbf{r}_0)}{\partial \omega})_{\bar{\omega}}$. Por lo tanto (2.122) representa las superficies donde la amplitud absoluta alcanza su máximo en un tiempo t . Es conveniente definir la velocidad de grupo para un grupo de ondas en tres dimensiones, consideramos un desplazamiento pequeño $\delta\mathbf{r} = \mathbf{q}\delta s$, donde \mathbf{q} es un vector unitario en la dirección normal a la superficie, tenemos a partir de (2.122) que el cambio correspondiente δt está dado por

$$\delta t = \delta s \left| \text{grad} \left(\frac{\partial g(\mathbf{r})}{\partial \omega} \right)_{\bar{\omega}} \right|, \quad (2.125)$$

entonces para un grupo de ondas en tres dimensiones la velocidad de grupo está dada como:

$$v^{(g)} = \frac{1}{\left| \text{grad} \left(\frac{\partial g}{\partial \omega} \right)_{\bar{\omega}} \right|}. \quad (2.126)$$

Esta expresión podría compararse con la ecuación (2.99)

$$v^{(p)} = \frac{1}{\left| \text{grad} \frac{g}{\omega} \right|}. \quad (2.127)$$

para la velocidad de fase de una onda armónica en general. En el caso especial de un grupo de ondas planas propagándose en la dirección z se tiene que $g_\omega = kz$ y (2.126) se reduce a (2.117). A partir de la discusión anterior es evidente que el rango de la frecuencia efectiva $\Delta\omega$, es un parámetro importante relacionado con un grupo de ondas ya que es la magnitud que determina de manera importante la variación de la amplitud y de la fase. Si el medio no es dispersivo, un grupo de ondas viajará una distancia considerable y no se notará una variación apreciable. En estas circunstancias, la velocidad de grupo, puede considerarse como la velocidad de propagación del grupo completo, también representará la velocidad a la que es propagada la energía, esto, sin embargo, no es cierto de manera general.

2.4. Métodos de medición de dispersiones lineales

2.4.1. Método de Abbe

Ernst Karl Abbe sentó las bases de la óptica moderna, desarrolló numerosos instrumentos ópticos, en 1874 describió lo que se le conoce como refractómetro de Abbe, que permite obtener la medición de dispersión (medición del índice de refracción n) por medio de la determinación de posición del rayo crítico incidente sobre un sistema formado por líquido depositado sobre una superficie de vidrio: los refractómetros Abbe pueden emplear los dos métodos de refracción, refracción total o refracción de ángulo crítico. Este instrumento está constituido por dos prismas de vidrio *flint* conteniendo una delgada capa de espesor del líquido a examinar. El prisma inferior sirve para mantener el líquido y es el que permite la medición. El prisma superior sirve para la iluminación, la descripción siguiente corresponde a este caso. Consiste en iluminar el líquido a analizar con luz rasante y determinar el ángulo límite α que depende del índice n buscado y del índice n' del material sobre el que reposa el líquido y en el cual el rayo rasante penetra.

$$n = n' \sin \alpha, \quad (2.128)$$

Este rayo continúa su camino y ataca la cara de salida del prisma con el ángulo

$$\beta = \gamma - \alpha, \quad (2.129)$$

donde γ es el ángulo del prisma. El rayo sale del prisma con el ángulo θ de tal forma que

$$n' \sin \beta = \sin \theta. \quad (2.130)$$

El ángulo θ está relacionado con el índice buscado n . Un visor indica el ángulo y se gradúa directamente en índice de refracción. El valor es preciso con dos unidades del cuarto de decimal del valor del índice n . Como no es posible conseguir un único rayo rasante que penetre en el lugar adecuado del soporte material subyacente, el dispositivo emplea un haz de luz cuyo límite es, por construcción, el rayo rasante. Este haz constituye el rango de luz cuyo límite será ajustado al retículo y será la base de la medición. La figura 2.2 representa este dispositivo. El prisma superior está iluminado y contiene el rayo rasante. La luz entra en el prisma inferior en un rango de luz cuyo rayo superior corresponde a la prolongación del rayo rasante. A la salida del prisma, este rango de luz es reflejado por un espejo y es observado a través de una lente colimadora. Se puede observar, en esta lente, el rango de luz y su límite, que aporta la información sobre el ángulo límite, esto es, sobre el índice de refracción del líquido estudiado.

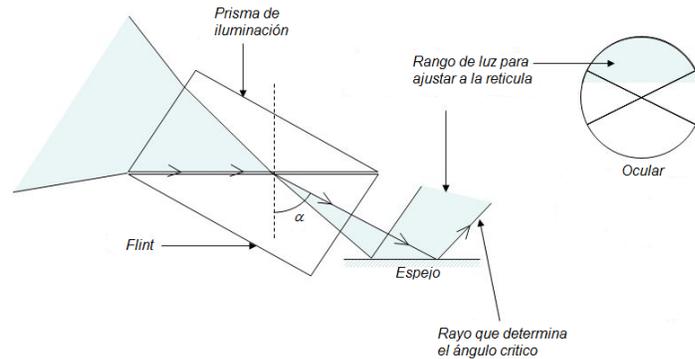


Figura 2.2: Refractómetro de prisma de Abbe.

2.5. Ajustes de datos de dispersión: coeficientes en el polinomio de Cauchy

2.5.1. Polinomios de ajuste

En el presente trabajo se realizaron ajustes de datos a diferentes polinomios. Los ajustes están basados en el algoritmo de Levenberg-Marquardt (LM) que a continuación describiremos de manera abreviada. Es un algoritmo iterativo de optimización en el que el método de iteración presenta una ligera modificación sobre el método tradicional de Newton. Las ecuaciones normales $N\Delta = J^T J\Delta = J^T \varepsilon$ (J representa el jacobiano de la función, Δ los incrementos de los parámetros y ε el vector de errores residuales del ajuste), son reemplazadas por las ecuaciones normales aumentadas $N'\Delta = J^T \varepsilon$, donde $N'_{ii} = (1 + \lambda_i)N_{ii}$ y $N'_{ij} = N_{ij}$ para $i \neq j$. El valor de λ es inicialmente puesto a algún valor, normalmente $\lambda = 10^{-3}$. Si el valor de Δ obtenido resolviendo las ecuaciones aumentadas conduce a una reducción del error, entonces el incremento es aceptado y λ es dividido por 10 para la siguiente iteración. Por otro lado si el valor de Δ conduce a un aumento del error, entonces λ es multiplicado por 10 y se resuelven de nuevo las ecuaciones normales aumentadas, este proceso continúa hasta que el valor de Δ encontrado da lugar a un decremento del error. Este proceso de resolver repetidamente las ecuaciones normales aumentadas para diferentes valores de λ hasta encontrar un valor aceptable de Δ es lo que constituye una iteración del algoritmo de LM.

En los ajustes llevados a cabo en este trabajo, se utilizó el ajuste llamado regresión de potencias, que se encuentra dentro de las capacidades del programa MathCad. El ajuste

utiliza un función llamada $genfit(X, Y, Z)$, que devuelve un vector que contiene los coeficientes asociados a la curva de potencia de la forma $a \cdot x^b + c$ que mejor se aproxima a los datos de X, Y utilizando valores de prueba Z . La función $genfit$ emplea el método de Levenberg-Marquardt para la minimización.

El procedimiento para realizar el ajuste de datos a una curva de potencias es el siguiente, a partir de dos vectores de datos que se desean ajustar X, Y y teniendo la función de ajuste por ejemplo $y = A \cdot x^b$ donde A y b son desconocidos, se procede a definir un vector con la función $genfit$.

$$f(n, A, b) = \begin{pmatrix} A \cdot n^b \\ n^b \\ A \cdot \ln 0(n) \cdot n^b \end{pmatrix}.$$

La primer entrada del vector anterior corresponde a la función de ajuste, la segunda entrada a la derivada de la función de ajuste respecto al parámetro A y la tercera entrada a la derivada de la función de ajuste respecto al parámetro b . La función $\ln 0$ se utiliza aquí en lugar de \ln porque se puede evaluar para valores cercanos a 0, que es necesario para ajustar los valores de los parámetros y reducir al mínimo el error. Se define un vector como:

$$guess = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

donde a c y d se le asocia un valor. Utilizamos la función $genfit$ para encontrar los parámetros de la función de ajuste,

$$cg = genfit(X, Y, guess, f) \quad (2.131)$$

Así se obtienen los valores para los coeficientes de la función de potencia.

$$guess = \begin{pmatrix} A' \\ b' \end{pmatrix}.$$

Definimos una función utilizando estos coeficientes.

$$f' = A' \cdot x^{b'} \quad (2.132)$$

2.5.2. Coeficientes de Cauchy

Como ya se mostró en la sección (2.2) el índice de refracción presenta una dependencia con la longitud de onda λ , conocida como *relación de dispersión*, así el valor que se

2.5. AJUSTES DE DATOS DE DISPERSIÓN: COEFICIENTES EN EL POLINOMIO DE CAUCHY31

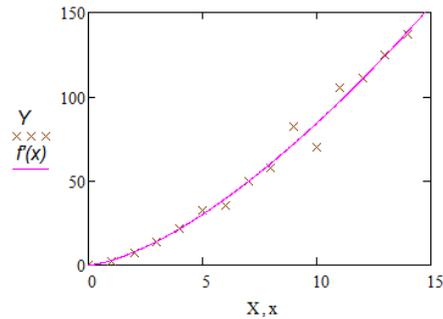


Figura 2.3: Muestra el ajuste de datos a un polinomio de la forma $a \cdot x^b + c$

El índice de refracción n depende de la longitud de onda de la luz incidente, esta dependencia es característica del material, para vidrios transparentes en el visible tiene la forma decreciente que se observa en la figura 2.4. El caso que se aborda en este trabajo es para dispersión normal. Una forma de expresar la dependencia $n(\lambda)$ de algún material es con la *ecuación de Cauchy* que se dedujo en la sección (2.2.1), cuyos dos primeros términos son suficientes para describir el comportamiento de muchos materiales transparentes en el rango visible.

$$n(\lambda) = A + B/\lambda^2 \quad (2.133)$$

donde A y B se conocen como los coeficientes de Cauchy. Es posible teniendo un conjunto de datos de curvas de dispersión realizar un ajuste respecto a la ecuación (2.132) como se muestra la sección anterior (2.5.1) y con ello conocer un aproximación de los valores para los coeficientes A y B .

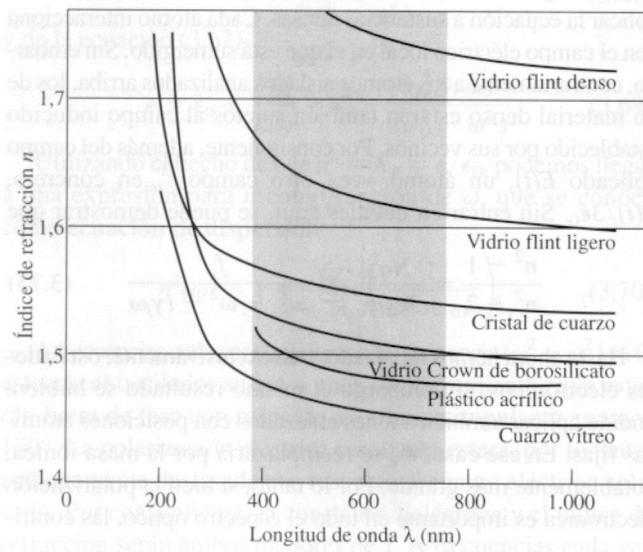


Figura 2.4: Curvas de dispersión de algunos materiales

Capítulo 3

Medición interferométrica de dispersiones

3.1. Interferometría: corrimiento de fase

3.1.1. Interferencia

El fenómeno de interferencia consiste en la superposición de dos o más ondas que forman una onda resultante de mayor o menor amplitud. Este tipo de interferencias da lugar a patrones de interferencia ya sea constructiva o destructiva. Cuando se estudia la interferencia es mejor que atacemos el problema por medio de la irradiancia, la cual es el promedio temporal de flujo de energía de la onda de luz. Con teoría electromagnética es posible demostrar que la irradiancia está dada como:

$$I = \epsilon\nu \langle \mathbf{E}^2 \rangle, \quad (3.1)$$

donde ϵ es la permitividad eléctrica del medio en el cual la luz viaja y ν es la velocidad de propagación. Suponemos dos ondas de luz \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 de la misma frecuencia que son superpuestas. De acuerdo con el principio de superposición tenemos que $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ así la irradiancia resulta:

$$I = \langle \mathbf{E}^2 \rangle, \quad (3.2)$$

Consideramos dos ondas que están linealmente polarizadas en la misma dirección,

$$E_1 = A_1 \cos(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varepsilon_1) \quad (3.3)$$

y

$$E_2 = A_2 \cos(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varepsilon_2). \quad (3.4)$$

De las ecuaciones ((3.2))-((3.4)) se encuentra que:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta, \quad (3.5)$$

donde $I_1 = A_1^2/2, I_2 = A_2^2/2$ y

$$\delta = (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (3.6)$$

es la *diferencia de fase* que proviene de combinar una diferencia de longitud de trayectoria y una diferencia de fase inicial. La irradiancia resultante puede ser mayor, menor o igual a $I_1 + I_2$ dependiendo del valor I_{12} , es decir, dependiendo de δ . Un máximo en la irradiancia se obtiene cuando $\cos \delta = 1$, tal que

$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$$

cuando

$$\delta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots,$$

En este caso la diferencia de fase entre las dos ondas es un múltiplo entero de 2π y las perturbaciones están en fase. Se habla de esto como *interferencia constructiva total*. Cuando $0 < \cos \delta < 1$ las ondas están fuera de fase, $I_1 + I_2 < I < I_{max}$ y el resultado se conoce como *interferencia constructiva*. En $\delta = \pi/2$, $\cos \delta = 0$ las perturbaciones ópticas están a 90° fuera de fase y $I = I_1 + I_2$. Para $0 > \cos \delta > -1$ tenemos la condición de *interferencia destructiva*, $I_1 + I_2 > I > I_{min}$. El mínimo de la irradiancia resulta cuando las ondas están 180° fuera de fase, valles sobre crestas, $\cos \delta = -1$, y

$$I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

Esto ocurre cuando $\delta = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$, y recibe el nombre de *interferencia destructiva total*. Otro caso algo especial, aunque muy importante aparece cuando las amplitudes de ambas ondas que llegan al punto de observación P son iguales, es decir, $\mathbf{E}_{01} = \mathbf{E}_{02}$. Ya que las contribuciones a la irradiancia de ambas fuentes son entonces iguales, hagamos $I_1 = I_2 = I_0$. La ecuación (3.5) se puede escribir ahora como

$$I = 2I_0(1 + \cos \delta) = 4I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2}. \quad (3.7)$$

de lo cual se deduce que $I_{min} = 0$ y $I_{max} = 4I_0$. El patrón de irradiancia puede ser grabado en una hoja de film fotográfico de luz o en un disco duro con una cámara CCD o CMOS. También puede ser visto sobre una pantalla de difusión como una placa de campo de vidrio. En cualquier caso, el patrón consiste en luz alternada y franjas oscuras. Este

patrón de franjas permite la posibilidad de medir la distribución espacial de la diferencia de fase entre las dos ondas.

Denotaremos a la posición \mathbf{r} simplemente como una posición en un plano (x, y) , la diferencia de fase relativa será $\phi = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$. En un contexto de procesamiento de imágenes, es común tratar a la irradiación I como una imagen o patrón de intensidad s , el cual es un múltiplo escalar de esta irradiación. Entonces, la ecuación anterior, vista como una imagen $s = s(x, y)$, donde (x, y) representa una posición espacial, puede escribirse como

$$s(x, y) = s_1(x, y) + s_2(x, y) + 2\sqrt{s_1(x, y)s_2(x, y)} \cos(\phi(x, y)), \quad (3.8)$$

con ϕ como diferencia de fase en vez de δ al tomar $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$, es decir, misma dirección de propagación para las ondas sobrepuestas, y s_1 en vez de $I_j (j = 1, 2)$. La ecuación puede escribirse en dos formas útiles, la primera es

$$s(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(\phi(x, y)), \quad (3.9)$$

donde

$$a(x, y) = s_1(x, y) + s_2(x, y) \quad (3.10)$$

puede considerarse como una distribución de traslación al suponer que s es una función que puede depender de cualquier otra variable que no sea la posición, como el tiempo, la segunda forma es

$$b(x, y) = 2\sqrt{s_1(x, y)s_2(x, y)} \quad (3.11)$$

es una distribución de amplitud. Otra expresión útil para (3.9) es

$$s(x, y) = s_0(x, y)[1 + \gamma(x, y) \cos(\phi(x, y))], \quad (3.12)$$

donde $s_0 = a$ es un múltiplo de la intensidad promedio local y $\gamma = b/a$ es la *visibilidad* o contraste del patrón de franjas inducido por s .

3.1.2. Interferometría

La interferometría es una familia de técnicas que hace uso del principio de superposición de ondas electromagnéticas, con el fin de extraer información acerca de la diferencia de fase involucrada. Esto funciona, ya que, como se ha visto en la sección anterior, cuando dos ondas con la misma frecuencia interfieren, el patrón que resulta está determinado por la diferencia de fase entre las ondas (ondas que están en fase dan origen a interferencia constructiva, ondas fuera de fase dan origen a interferencia destructiva). Para una descripción general, consideramos un solo haz de entrada de luz coherente que pasa por un divisor

de haz que divide al haz primario en dos haces idénticos que viajan rutas (caminos) diferentes cada uno de ellos y se recombinan antes de que lleguen al detector. La diferencia en la distancia que recorren los haces crea una diferencia de fase entre ellos, es esta diferencia de fase producida que crea el patrón de interferencia entre las ondas iniciales, que permite el estudio de todo aquello que cambie la fase a lo largo de los caminos, que podría deberse a un cambio en la longitud de trayectoria o bien a un cambio de índice de refracción.

Para ello se utilizan diversos interferómetros que se clasifican en interferómetros de división de frente de onda e interferómetros de división de amplitud. También se pueden clasificar por otros criterios. Por ejemplo, en interferómetro de camino común o interferómetro de doble ruta. Un interferómetro de camino común consiste en que el haz de referencia y el haz de desplazamiento que pasa por la muestra recorren el mismo camino. Como ejemplos está el interferómetro de Sagnac, el giroscopio de fibra óptica, el interferómetro de difracción punto y el interferómetro de cizallamiento lateral. Un interferómetro de doble ruta consiste en que el haz de referencia y el haz de desplazamiento que pasa por la muestra recorren caminos diferentes, después de ser perturbado el haz por la interacción con la muestra bajo prueba, se recombina con el haz de referencia y se crea un patrón de interferencia que se puede estudiar e interpretar. Algunos ejemplos de este tipo de interferómetros son: el interferómetro de Michelson, el interferómetro de Twyman-Green, y el interferómetro Mach-Zehnder.

En el trabajo presente se propone la utilización del interferómetro de Mach-Zehnder, como ya se mencionó es un dispositivo de división de amplitud. Como se muestra en la figura 3.1 consiste en dos divisores de haz y dos espejos totalmente reflectores, las ondas viajan a lo largo de caminos separados. Una pequeña diferencia entre los caminos se puede producir por un ligero giro de uno de los divisores de haz. Interponiendo un objeto en uno de los haces, se altera la diferencia de camino óptico que se ve reflejado en el cambio en el patrón de franjas [3].

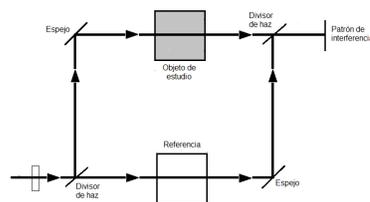


Figura 3.1: interferómetro de Mach-Zehnder

3.1.3. Interferometría de corrimiento de fase (PSI)

La interferometría de corrimiento de fase (PSI) es un método de colección de datos y análisis que se puede aplicar a una gran variedad de situaciones. PSI registra electrónicamente una serie de interferogramas cuando la fase de referencia del interferómetro es cambiada por un valor conocido. La fase del frente de onda se codifica en las variaciones del patrón de intensidad en los interferogramas registrados y con un cálculo punto-punto se recupera la fase.

El método consiste en introducir un corrimiento de fase variable en el tiempo entre el frente de onda de referencia y el frente de onda que pasa por la muestra en el interferómetro. Se producen señales que varían en cada punto de medición en el interferograma, la fase relativa entre los dos frentes de onda es codificada. Por simplicidad para hacer nuestro análisis se utiliza la fase del frente de onda. Esta elección permite que el análisis sea independiente de la configuración experimental y que la conversión de fase para errores de superficie o de diferencia de caminos ópticos (OPD) sea sencillo. Por ejemplo, una superficie con errores de altura $h(x, y)$ producirá un error de frente de onda $\phi(x, y)$:

$$\phi(x, y) = 4\pi h(x, y)/\lambda, \quad (3.13)$$

donde x y y son coordenadas espaciales y λ es la longitud de onda. Las expresiones generales para el frente de onda que pasa por la muestra y la referencia son respectivamente:

$$w_r(x, y, t) = a_r(x, y)e^{i[\phi_r(x, y) - \delta(t)]} \quad (3.14)$$

y

$$w_t(x, y) = a_t(x, y)e^{i[\phi_t(x, y)]}, \quad (3.15)$$

donde $a_r(x, y)$ y $a_t(x, y)$ son las amplitudes de cada frente de onda, $\phi_r(x, y)$ y $\phi_t(x, y)$ son las fases de frente de onda, y $\delta(t)$ es un corrimiento de fase variable en el tiempo introducido en el haz de referencia, para ser más precisos $\delta(t)$ es el corrimiento relativo entre las fases correspondientes para cada frente de onda. El patrón de intensidad resultante es

$$I(x, y, t) = |w_r(x, y, t) + w_t(x, y)|^2 \quad (3.16)$$

o

$$I(x, y, t) = I'(x, y) + I''(x, y) \cos[\phi_t(x, y) - \phi_r(x, y) + \delta(t)], \quad (3.17)$$

donde $I'(x, y) = a_r^2(x, y) + a_t^2(x, y)$ es la intensidad media, y $I''(x, y) = 2a_r(x, y)a_t(x, y)$ es la franja o intensidad de la modulación. Si ahora definimos $\Delta\phi$ como la diferencia de fase del frente de onda $\phi_t(x, y) - \phi_r(x, y)$, obtenemos

$$I(x, y, t) = I'(x, y) + I''(x, y) \cos[\Delta\phi + \delta(t)], \quad (3.18)$$

que es una ecuación fundamental en PSI. La intensidad en cada punto varía como función sinusoidal del corrimiento de fase introducido $\delta(t)$, con un desplazamiento temporal dado por la fase del frente de onda desconocida.

El método más utilizado para introducir el corrimiento de fase $\delta(t)$ en un sistema PSI es trasladando uno de los espejos o superficies ópticas en el interferómetro con un transductor piezoeléctrico fabricado con materiales cerámicos, estos dispositivos se expanden o contraen con un voltaje aplicado de manera externa, el corrimiento de fase inducido varía dependiendo del voltaje aplicado.

Existen distintos esquemas de detección PSI que recopilan y analizan los datos de interferometría de modo que la ecuación (3.18) puede resolverse para la fase de frente de onda desconocida, para ello existen diferentes algoritmos, como ejemplo está el algoritmo de cuatro pasos que requiere que cuatro interferogramas sean registrados y digitalizados, también se encuentra el algoritmo de tres pasos, en este caso el número mínimo de mediciones de la intensidad del interferograma que se requiere para reconstruir la fase de frente de onda son tres, ya que solo hay tres incógnitas en la ecuación (3.18).

Partiendo de la ecuación intensidad (3.18) se realiza el corrimiento de fase $\delta(t) \rightarrow f_n$ secuencialmente para valores $f_n = (0, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3})$, obteniendo una relación que nos permite extraer u obtener la distribución de fase $\Delta\phi$, esto se realiza sumando los valores $\frac{2\pi}{3}$ y $-\frac{2\pi}{3}$ a la fase de la ecuación de intensidad, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} I_0 &= 1 + m \cos \Delta\phi \\ I_1 &= 1 + m \cos(\Delta\phi + \frac{2\pi}{3}) \\ I_2 &= 1 + m \cos(\Delta\phi - \frac{2\pi}{3}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Primero se obtiene la diferencia de I_1 y I_2

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 &= 1 + m \cos(\Delta\phi + \frac{2\pi}{3}) - 1 - m \cos(\Delta\phi - \frac{2\pi}{3}) \\ &= m \cos(\Delta\phi + \frac{2\pi}{3}) - m \cos(\Delta\phi - \frac{2\pi}{3}) \\ &= m \{ [\cos \Delta\phi \cos \frac{2\pi}{3} - \sin \Delta\phi \sin \frac{2\pi}{3}] - [\cos \Delta\phi \cos \frac{2\pi}{3} + \sin \Delta\phi \sin \frac{2\pi}{3}] \} \\ &= m \{ [-\frac{1}{2} \cos \Delta\phi - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \Delta\phi] - [-\frac{1}{2} \cos \Delta\phi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \Delta\phi] \} \\ &= m \{ -\frac{1}{2} \cos \Delta\phi - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \Delta\phi + \frac{1}{2} \cos \Delta\phi - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \Delta\phi \} \\ &= -m\sqrt{3} \sin \Delta\phi \end{aligned} \quad (3.20)$$

enseguida la suma I_1 y I_2

$$\begin{aligned}
 I_1 + I_2 &= 1 + m \cos\left(\Delta\phi + \frac{2\pi}{3}\right) + 1 + m \cos\left(\Delta\phi - \frac{2\pi}{3}\right) \\
 &= 2 + m \cos\left(\Delta\phi + \frac{2\pi}{3}\right) + m \cos\left(\Delta\phi - \frac{2\pi}{3}\right) \\
 &= 2 + m \left\{ \cos \Delta\phi \cos \frac{2\pi}{3} - \sin \Delta\phi \sin \frac{2\pi}{3} \right\} + \left\{ \cos \Delta\phi \cos \frac{2\pi}{3} + \sin \Delta\phi \sin \frac{2\pi}{3} \right\} \\
 &= 2 + m \left\{ \left[-\frac{1}{2} \cos \Delta\phi - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \Delta\phi \right] + \left[-\frac{1}{2} \cos \Delta\phi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \Delta\phi \right] \right\} \\
 &= 2 + m \left\{ -\frac{1}{2} \cos \Delta\phi - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \Delta\phi - \frac{1}{2} \cos \Delta\phi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \Delta\phi \right\} \\
 &= 2 + m \{ -\cos \Delta\phi \} \\
 &= 2 - m \cos \Delta\phi
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

así

$$\begin{aligned}
 2I_0 - (I_1 + I_2) &= 2 + 2m \cos \Delta\phi - 2 + m \cos \Delta\phi \\
 &= 3m \cos \Delta\phi
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 \frac{I_2 - I_1}{2I_0 - (I_1 + I_2)} &= \frac{m\sqrt{3} \sin \Delta\phi}{m3 \cos \Delta\phi} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{3} \tan \Delta\phi \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \tan \Delta\phi
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

de aquí que

$$\tan \Delta\phi = \sqrt{3} \frac{I_2 - I_1}{2I_0 - (I_1 + I_2)} \tag{3.24}$$

así finalmente se obtiene

$$\Delta\phi = \tan^{-1} \left(\sqrt{3} \frac{I_2 - I_1}{2I_0 - (I_1 + I_2)} \right) \tag{3.25}$$

Esta ecuación se evalúa en cada punto de medición para obtener un mapa del frente de onda que nos permite conocer la distribución de fase. El desarrollo anterior es un caso particular del algoritmo de tres pasos donde el corrimiento es para valores de $(0, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3})$ pero el valor del corrimiento en la fase puede tomar otros valores.

Existe una operación más que se le debe hacer a la fase calculada que se obtiene de la ecuación (3.25) antes de que esté lista para ser visualizada y evaluada. Se debe corregir las discontinuidades que surgen debido a la arcotangente que está definida entre $-\pi/2$ a $\pi/2$, la corrección que se puede hacer para calcular la fase es ampliar el rango de trabajo de 0 a 2π . Esto se lleva a cabo mediante una relación a partir de las funciones seno y coseno. En nuestro caso no fue necesario realizar dicho desenvolvimiento como se mostrara más adelante [4].

3.2. Posibilidad de medición de dispersiones con interferometría

Al considerar muestras heterogéneas que pueden ser homogéneas por regiones, se tienen diferentes valores del índice de refracción para cada región, como se mostró en la sección (2.2.1) este valor depende de la longitud de onda λ correspondiente a la onda que incide sobre la muestra y se puede expresar mediante la ecuación de Cauchy:

$$n(\lambda) = A + B/\lambda^2,$$

donde A y B son los llamados coeficientes de Cauchy como se mencionó en la sección (2.5.2). Por ejemplo, si se tienen solo dos regiones diferentes en la muestra, se tendrán dos ecuaciones de Cauchy para cada región.

Para el estudio de la muestra, como ya se dijo antes, se propone utilizar un interferómetro Mach-Zehnder. De esta manera, se puede definir los caminos ópticos y con ellos expresar la diferencia o distribución de fase $\Delta\phi$ como:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot |\Delta y(x, \alpha)| \cdot [\Delta n] \quad (3.26)$$

donde Δy es la forma de la interfaz, Δn es la diferencia de índices de refracción de las regiones en la muestra,

Ahora fijándose en un solo punto $x = x_0$ y para distintos valores de longitudes de onda λ se puede obtener una serie de valores para Δn que es la diferencia de índices de refracción de los medios, mediante la siguiente relación:

$$\Delta n(\lambda, x_0) = \frac{\Delta\phi(x_0)}{(\Delta y \cdot k)} \quad (3.27)$$

donde $k = 2\pi/\lambda$, está claro que se asume que se conoce la distribución de fase. A los valores que se obtiene de la ecuación (3.27) se les realiza un ajuste llamado ajuste de regresión de potencias como se explicó en la sección (2.5.1). El ajuste se hace respecto a una ecuación de la forma $(A + B \cdot \lambda^{-2})$, donde A y B son parámetros que representan los coeficientes de Cauchy en la relación de dispersión normal. El valor de estos parámetros los proporciona el ajuste y corresponden a la diferencia de índices de refracción. Regresando al ejemplo de las dos regiones o medios diferentes, el valor de los parámetros que se obtiene es la diferencia de los índices de refracción de los dos medios. De esta forma, si se conociera los valores de los coeficientes de Cauchy para un medio, sería posible conocer los coeficientes para el otro medio, y con ello, tener un valor de dispersión previamente desconocido.

3.3. Análisis de la propuesta con corrimiento de fase

Considerando el mismo sistema físico de la sección anterior, muestras heterogéneas que pueden ser homogéneas por regiones, ahora se propone utilizar el método de interferometría de corrimiento de fase (PSI) para su estudio. Cada región diferente de la muestra tiene asociada una ecuación de Cauchy para expresar su relación de dispersión. Para el análisis se considera nuevamente un interferómetro Mach-Zehnder, de manera que la distribución de fase $\Delta\phi$ está dada por la relación descrita en la ecuación (3.26). De acuerdo a la ecuación (3.18) de la sección (3.1.3) el patrón de interferencia para una muestra que se encuentra en una dimensión a lo largo del eje x se puede expresar como:

$$I_\lambda(\lambda, x, f_n) = I'(x) + I''(x) \cos[\Delta\phi(\lambda, x) + f_n], \quad (3.28)$$

donde f_n es la fase introducida para realizar el corrimiento de fase, $\Delta\phi$ es la distribución de fase, $I'(x)$ es la intensidad media o luz de fondo, $I''(x)$ es la franja o intensidad de modulación.

Utilizando la ecuación (3.28), se realiza el corrimiento de fase para los valores de fase de $f_n = (0, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3})$ manteniendo la longitud de onda fija en un valor y dejando correr los valores de x_i que representan todos los puntos de la muestra sobre el eje. Como son tres valores que la fase puede tomar, entonces se tiene como resultado a tres funciones diferentes de interferencia en función de x_i . Por ejemplo, para una longitud de onda λ_p se tiene:

$$I_0 = I\lambda(\lambda_p, x_i, 0)$$

$$I_1 = I\lambda(\lambda_p, x_i, \frac{2\pi}{3})$$

$$I_2 = I\lambda(\lambda_p, x_i, \frac{-2\pi}{3})$$

teniendo estas tres funciones y utilizando la relación (3.24) se tiene para el ejemplo:

$$\tan \Delta\phi = \sqrt{3} \frac{I_2 - I_1}{2I_0 - (I_1 + I_2)}. \quad (3.29)$$

De aquí es posible recuperar la distribución de fase para cada longitud de onda elegida.

$$\Delta\phi = \tan^{-1}\left(\sqrt{3} \frac{I_2 - I_1}{2I_0 - (I_1 + I_2)}\right). \quad (3.30)$$

De esta manera se obtienen todas las distribuciones de fase $\Delta\phi$ para los valores de longitud de onda a considerar. En general las distribuciones de fase obtenidas con la relación (3.30) aparecen de manera envuelta, así que es necesario aplicar algún método de desenvolvimiento para las fases como se mencionó en la sección (3.1.3). En este trabajo no fue necesario aplicar algún método de desenvolvimiento pues fue posible obtener las distribuciones de fase $\Delta\phi$ con un desenvolvimiento natural, como se verá más adelante cuando se aborden los problemas físicos propuestos.

Una vez obtenida la distribución de fase de la misma manera que en el método anterior se realiza un ajuste de regresión de potencia para recuperar los valores de los coeficientes de Cauchy, pero esta vez el ajuste se realiza de los datos $\Delta\phi(\lambda, x) \cdot \lambda^3/2\pi$ respecto a una ecuación de la forma $(A \cdot \lambda^2 + B) \cdot C$. Esto es debido a:

$$\Delta\phi(\lambda, x) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (\Delta n(\lambda)) \cdot \Delta y(x)$$

pero

$$\Delta n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

\Rightarrow

$$\Delta\phi(\lambda, x) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \left(A + \frac{B}{\lambda^2}\right) \cdot \Delta y(x)$$

\Rightarrow

$$\frac{\Delta\phi(\lambda, x)}{2\pi} = \left(\frac{A}{\lambda} + \frac{B}{\lambda^3}\right) \cdot \Delta y(x)$$

⇔

$$\frac{\Delta\phi(\lambda, x) \cdot \lambda^3}{2\pi} = (A \cdot \lambda^2 + B) \cdot \Delta y(x)$$

que puede reescribir como:

$$\frac{\Delta\phi(\lambda, x) \cdot \lambda^3}{2\pi} = (A \cdot \lambda^2 + B) \cdot C \quad (3.31)$$

donde A, B y C son los parámetros que el ajuste proporciona. A y B representan los valores de la diferencia de los coeficientes de Cauchy para las regiones, y C representa la forma de la interfaz que tiene el sistema. Regresando al ejemplo de considerar dos regiones distintas, A y B representan la diferencia de coeficientes de los dos medios y C la forma que tiene la interfaz entre las dos regiones. Con ello se obtiene un valor para la dispersión y se recupera la forma de la interfaz.

3.4. Factibilidad de la propuesta

Hasta ahora se ha revisado fundamentos teóricos para entender la dispersión en medios materiales, se explicó el cómo se da el ajuste de datos de dispersión en el caso de un polinomio de Cauchy, se trató el tema de interferometría e interferometría de corrimiento de fase, por lo que se cuenta con la base teórica que permite plantear un método que de lugar a la posibilidad de medir la dispersión lineal normal en diferentes muestras con métodos interferométricos. El trabajo central en esta tesis consiste en realizar programas de simulación numérica con el fin de sustentar el método que se propone, para ello se hará uso del programa Mathcad que cuenta con la herramienta computacional necesaria para realizar dichas simulaciones. De manera general se puede citar que la propuesta que se plantea en el trabajo cuenta con lo necesario para llevarse a cabo.

Capítulo 4

Simulaciones numéricas con objetos de dispersión homogénea por zonas

4.1. Simulación objeto unidimensional de dispersión homogénea por zonas de espesor constante e interfaz lineal

El sistema físico que se propone con el objetivo de estudiar la dispersión normal en muestras homogéneas por zonas, consiste en una muestra de plagioklas que se encuentra en un medio de inmersión, el plagioklas es un conjunto de minerales que básicamente están formados por calcio, para el medio de inmersión se considera aceite de inmersión. Las curvas de dispersión para los medios antes descritos se obtuvieron de la literatura [2]. Realizando un ajuste de datos respecto a la ecuación de Cauchy de estas curvas como se explica en la sección (2.5) es posible encontrar los valores para los Coeficientes de Cauchy siendo estas cantidades fundamentales en la simulación. Las curvas de dispersión para los dos medios se presentan en la gráfica de la figura 4.1.

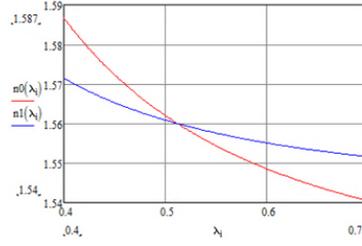


Figura 4.1: Curvas de dispersión $n_0(\lambda)$ para el medio de inmersión y $n_1(\lambda)$ para el plagioklas

cada curva está asociada a una ecuación de Cauchy de coeficientes APG , BPG para el plagioklas y AMI , BMI para el medio de inmersión, estas ecuaciones se expresan de la siguiente manera

$$n_0(\lambda) = AMI + \frac{BMI}{\lambda^2} \quad n_1(\lambda) = APG + \frac{BPG}{\lambda^2} \quad (4.1)$$

con $AMI = 1.518$, $BMI = 0.011$, $APG = 1.542$, $BPG = 4.71 \times 10^{-3}$. Como se muestra en la gráfica 4.1 las curvas de dispersión se intersectan para un valor específico de longitud de onda. En este punto, se cumple que el valor de los índices de refracción de los dos medios son iguales. Entonces el valor de la longitud de onda donde ocurre dicha intersección se puede calcular.

$$n_1(\lambda) = n_0(\lambda)$$

\Leftrightarrow

$$APG + \frac{BPG}{\lambda^2} = AMI + \frac{BMI}{\lambda^2}$$

\Leftrightarrow

$$APG + \frac{BPG}{\lambda^2} - AMI - \frac{BMI}{\lambda^2} = 0$$

\Leftrightarrow

$$APG - AMI + \frac{BPG - BMI}{\lambda^2} = 0$$

4.1. DISPERSIÓN HOMOGÉNEA POR ZONAS DE ESPESOR CONSTANTE E INTERFAZ LINEAL 47

⇒

$$\lambda^2 = \frac{BPG - BMI}{AMI - APG}$$

a este valor de longitud de onda se define como λ_c , con los valores conocidos de los coeficientes de Cauchy se tiene que $\lambda_c^2 = 0.262$ por lo tanto $\lambda_c = 0.512$. Es importante mencionar que el valor λ_c es posible obtenerlo mediante el método propuesto como se verá más adelante. El sistema físico que se propone consiste en una muestra de plagioklas inmersa en un medio de inmersión. La interfaz entre estos dos medios es lineal. Los índices de refracción correspondientes para cada medio es n_0 para el medio de inmersión y n_1 para el plagioklas. El ancho y largo de la muestra es Δe y $2aw$ respectivamente, α es el ángulo de inclinación de la interfaz. A continuación, se presenta un esquema de la muestra en un plano $x - y$. En el esquema como se puede notar ε es la altura del medio

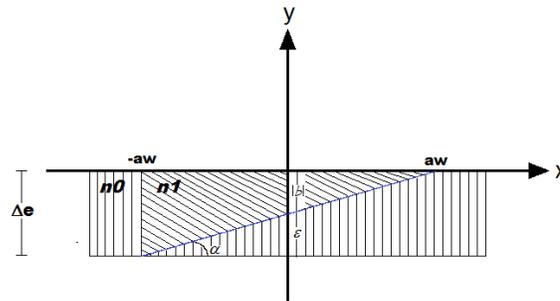


Figura 4.2: Esquema del sistema físico que consiste en plagioklas inmerso en un medio de inmersión.

correspondiente al plagioklas a lo largo del eje y , por otra parte es posible escribir una ecuación para describir a la interfaz en términos de las cantidades definidas en la muestra como se presenta enseguida.

Del esquema se tiene

$$\Delta e - |b| = \varepsilon,$$

pero

$$\tan \alpha = \varepsilon,$$

entonces

$$|b| = \Delta e - \tan \alpha,$$

se sabe que

$$\Delta y = mx + b,$$

finalmente se tiene

$$\Delta y = (\tan \alpha) \cdot x + \tan \alpha - \Delta e. \quad (4.2)$$

Se propone utilizar el interferómetro de Mach-Zehner como se explicó en la sección (3.1.2). A continuación, se presenta un posible arreglo experimental de la muestra en el interferómetro de manera general.

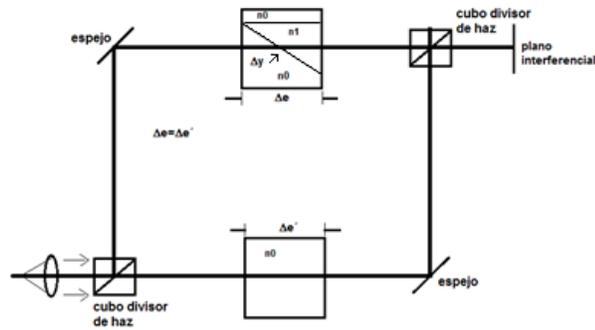


Figura 4.3: Una vista general del posible arreglo experimental de la muestra en un interferómetro Mach-Zehner.

así los caminos ópticos se pueden expresar como:

$$\varphi_1 = n_1(\lambda) \cdot \Delta y(x, \alpha) + n_0(\lambda) \cdot (\Delta e - \Delta y(x, \alpha)) \quad \varphi_2 = n_0(\lambda) \cdot \Delta e,$$

En este caso, la diferencia de caminos ópticos resulta:

$$D.C.O \equiv \varphi_1 - \varphi_2 \quad |x| < aw$$

$$D.C.O \equiv 0 \quad |x| > aw.$$

4.1. DISPERSIÓN HOMOGÉNEA POR ZONAS DE ESPESOR CONSTANTE E INTERFAZ LINEAL 49

Así,

$$\begin{aligned}\varphi_1 - \varphi_2 &= n_1(\lambda) \cdot \Delta y(x, \alpha) + n_0(\lambda) \cdot (\Delta e - \Delta y(x, \alpha)) - n_0(\lambda) \cdot \Delta e \\ &= \Delta y(x, \alpha) \cdot [n_0(\lambda) - n_1(\lambda)].\end{aligned}$$

Finalmente, se tiene que la diferencia de fase, o bien la distribución de fase, está dada como se había descrito en la ecuación (3.26)

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot |\Delta y(x, \alpha)| \cdot [n_0(\lambda) - n_1(\lambda)] \quad |x| < aw, \quad (4.3)$$

donde Δy es la forma de la interfaz, n_1 índice de refracción para la muestra plagioklas y n_0 el índice de refracción del medio de inmersión.

La ecuación para la distribución de fase se define en el programa de simulación de la siguiente manera:

$$\phi\lambda(\lambda, x) \equiv if[|x| \leq aw, \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (n_0(\lambda) - n_1(\lambda)) \cdot \Delta y(x), 0]. \quad (4.4)$$

Como se ha mencionado el rango del espectro electromagnético en el que se trabaja es el visible pues se estudia la dispersión normal, se consideran siete valores diferentes para la longitud de onda (400nm, 450nm, 500nm, 550nm, 600nm, 650nm, 700nm), se asignan valores específicos a las variables controlables, $aw = 30$, $\alpha = \pi/3$, $\Delta e = 200$, $|x| \leq 40$ y finalmente eligiendo un punto de interés a lo largo de la muestra por ejemplo $x_0 = 0$, se obtiene la distribución de fases para un punto fijo dentro del rango visible:

$$\begin{pmatrix} \phi\lambda(.40, 0) \\ \phi\lambda(.45, 0) \\ \phi\lambda(.50, 0) \\ \phi\lambda(.55, 0) \\ \phi\lambda(.60, 0) \\ \phi\lambda(.65, 0) \\ \phi\lambda(.70, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -47.689 \\ -19.549 \\ -2.89 \\ 7.263 \\ 13.553 \\ 17.464 \\ 19.867 \end{pmatrix}.$$

De la ecuación (4.3) se puede obtener una expresión para la diferencia de índices de refracción:

$$\Delta n(\lambda, x_0) = \frac{\phi\lambda(\lambda, x_0)}{\Delta y(x) \cdot k}. \quad (4.5)$$

De la relación anterior, que muestra la relación para la forma de la interfaz y los valores obtenidos para la distribución de fase, se obtiene:

$$(\Delta n) = \begin{pmatrix} 0.015 \\ 7.062 \times 10^{-3} \\ 1.16 \times 10^{-3} \\ -3.207 \times 10^{-3} \\ -6.528 \times 10^{-3} \\ -9.112 \times 10^{-3} \\ -0.011 \end{pmatrix}.$$

a continuación, se muestra una gráfica de los datos Δn respecto a los valores de longitud de onda $\Delta\lambda = (.40, .45, .50, .55, .60, .65, 70)$.

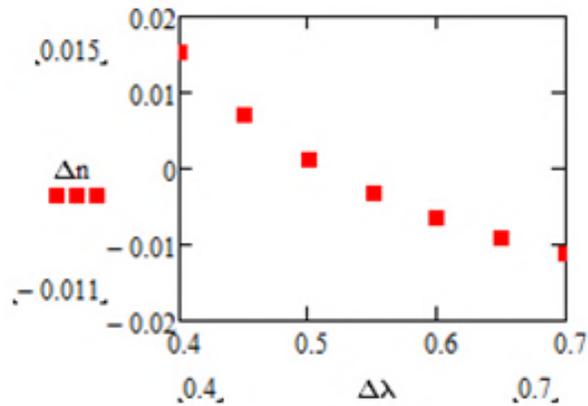


Figura 4.4: Gráfica Δn vs $\Delta\lambda$.

A los valores Δn se les realiza un ajuste de regresión de potencias respecto a la ecuación de la forma $(A + B \cdot \lambda^{-2})$, este ajuste nos proporciona los valores de A y B que representan la diferencia de los coeficientes de Cauchy, en el programa de simulación se define un vector con la función *genfit*

$$f(\lambda, A, B) := \begin{pmatrix} A + B \cdot \lambda^{-2} \\ 1 \\ \lambda^{-2} \end{pmatrix}.$$

utilizando la función *genfit* permite encontrar el valor de los parámetros de la función de ajuste

$$cg := \text{genfit}(\Delta\lambda, \Delta n, \text{guess}, f) \quad (4.6)$$

4.1. DISPERSIÓN HOMOGÉNEA POR ZONAS DE ESPESOR CONSTANTE E INTERFAZ LINEAL 51

así, los valores para los parámetros A y B son los siguientes

$$(cg) := \begin{pmatrix} -0.024 \\ 6.29 \times 10^{-3} \end{pmatrix}.$$

Se puede definir una función $h1(\lambda) := cg_0 + cg_1 \cdot \lambda^{-2}$ con los valores $cg_0 = -0.024$, $cg_1 = 6.29 \times 10^{-3}$ que proporcionó el ajuste y graficarla con los valores ajustados Δn . Como se puede ver en la gráfica 4.5 el ajuste es bueno. Los puntos de los valores Δn se ajustan visualmente a la curva $h1(\lambda)$.

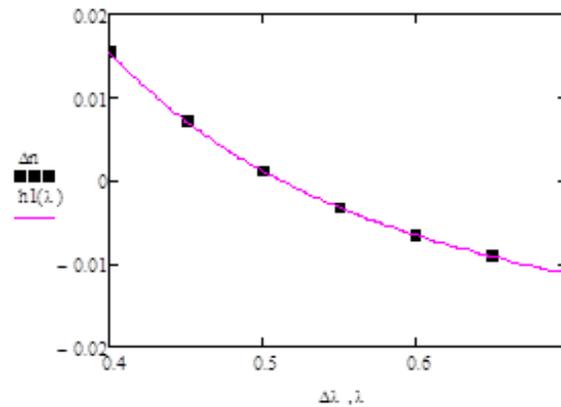


Figura 4.5: Gráfica de comparación entre los valores ajustados Δn y los obtenidos después del ajuste.

Como se puede notar los valores obtenidos cg después de hacer el ajuste coinciden con los valores de los coeficientes de Cauchy. Se realizó el mismo procedimiento anterior para el caso $x > 0$ y $x < 0$ y los resultados fueron similares.

4.2. Simulación objeto unidimensional de dispersión homogénea por zonas de espesor constante e interfaz cúbica

Se propone un sistema físico para el estudio de dispersión normal en una muestra homogénea por zonas que consiste en plagioklas inmerso en un medio de inmersión con una interfaz cúbica que separa a los dos medios, la forma de la interfaz esta descrita por un polinomio de grado tres. Los valores de dispersión para los dos medios son los mismos que el caso del análisis de dispersión homogénea por zonas de espesor constante e interfaz lineal tratado en la sección anterior, el propósito es ver si en este caso es posible de igual forma obtener resultados favorables, las curvas de dispersión para los medios se muestran en la gráfica 4.1 que se pueden expresar mediante ecuaciones de Cauchy, para el medio de inmersión y plagioklas respectivamente, se dan como:

$$n_0(\lambda) = AMI + \frac{BMI}{\lambda^2} \quad n_1(\lambda) = APG + \frac{BPG}{\lambda^2} \quad (4.7)$$

con $AMI = 1.518$, $BMI = 0.011$, $APG = 1.542$, $BPG = 4.71 \times 10^{-3}$. Para el sistema físico propuesto, se tienen las siguientes características: n_0 índice de refracción del medio de inmersión, n_1 índice de refracción del plagioklas, ancho Δe y largo $2aw$. Como ya se mencionó, la interfaz tiene una forma polinómica cúbica. A continuación, se presenta un esquema de la muestra en dos dimensiones. La forma de la interfaz se expresa por un

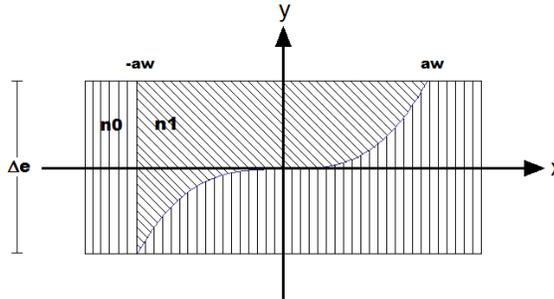


Figura 4.6: Características de la muestra bajo estudio

polinomio de grado tres

$$\Delta y(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0 \quad (4.8)$$

4.2. DISPERSIÓN HOMOGÉNEA POR ZONAS DE ESPESOR CONSTANTE E INTERFAZ CÚBICA53

a, b, c son coeficientes del polinomio que tiene un valor constante que se eligieron de manera arbitraria. Con la propuesta de utilizar un interferómetro Mach-Zehner, el arreglo experimental hipotéticamente usado se muestra en el siguiente esquema:

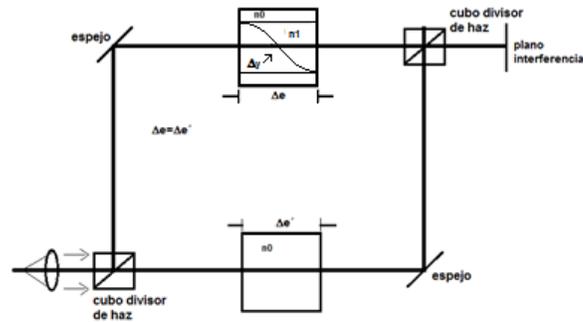


Figura 4.7: Posible arreglo experimental de la muestra en el interferómetro Mach-Zehner

entonces, los caminos ópticos se expresan de la siguiente manera:

$$\varphi_1 = n_1(\lambda) \cdot \Delta y(x, \alpha) + n_0(\lambda) \cdot (\Delta e - \Delta y(x, \alpha)) \quad \varphi_2 = n_0(\lambda) \cdot \Delta e.$$

La diferencia de caminos ópticos se expresa como:

$$D.C.O \equiv \varphi_1 - \varphi_2 \quad |x| < aw,$$

$$D.C.O \equiv 0 \quad |x| > aw.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= n_1(\lambda) \cdot \Delta y(x, \alpha) + n_0(\lambda) \cdot (\Delta e - \Delta y(x, \alpha)) - n_0(\lambda) \cdot \Delta e \\ &= \Delta y(x, \alpha) \cdot [n_0(\lambda) - n_1(\lambda)]. \end{aligned}$$

Finalmente la distribución de fase está dada como en la ecuación (3.26)

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot |\Delta y(x, \alpha)| \cdot [n_0(\lambda) - n_1(\lambda)] \quad |x| < aw.$$

Para este sistema como en el caso anterior, se definió la distribución de fase en el programa de simulación, se les asignó el mismo valor a las variables controlables, $aw = 30$, $\Delta e = 200$, $|x| \leq 40$ y Δy dada por la ecuación (4.8), se eligió un punto x_0 dentro del intervalo de x , siguiendo el mismo procedimiento se logró obtener los valores de los coeficientes de Cauchy.

4.3. Simulación objeto unidimensional de dispersión homogénea por zonas de espesor constante e interfaz con la forma de un polinomio de grado 5

Para el estudio de la dispersión normal en muestras homogéneas por zonas que tienen espesor constante y una interfaz de la forma que describe un polinomio de quinto grado se propone un sistema físico similar al considerado en las secciones anteriores, dos medios diferentes, plagioklas y medio de inmersión con índices de refracción distintos, la única diferencia es la forma de la interfaz entre ellos, los valores de la dispersión para estos medios se consideran de las curvas que se muestra en la gráfica 4.1, las ecuaciones asociadas a las curvas de dispersión se dan de acuerdo a ecuaciones de Cauchy, así para el plagioklas y medio de inmersión se tiene:

$$n1(\lambda) = APG + \frac{BPG}{\lambda^2} \quad n0(\lambda) = AMI + \frac{BMI}{\lambda^2}$$

con $APG = 1.542$, $BPG = 4.71 \times 10^{-3}$, $AMI = 1.518$, $BMI = 0.011$. El sistema físico que se considera en este estudio consiste en los medios ya mencionados, muestra de plagioklas con índice de refracción $n1$ y medio de inmersión con índice de refracción $n0$, el ancho y largo del sistema es de Δe y $2aw$, un esquema que muestra de manera más clara estos datos se presenta a continuación:

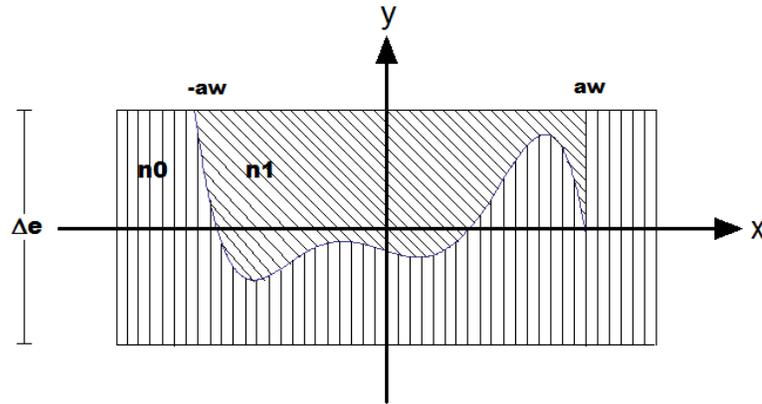


Figura 4.8: Características de la muestra bajo estudio

4.3. DISPERSIÓN HOMOGÉNEA POR ZONAS DE ESPESOR CONSTANTE E INTERFAZ CON LA FORMA

La forma de la interfaz se expresa por un polinomio de grado 5

$$\Delta y(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0 \quad (4.9)$$

a, b, c, d, e son coeficientes del polinomio con un valor arbitrario constante. Con el hecho de utilizar un interferómetro Mach-Zehner se presenta a continuación un esquema experimental hipotético para el sistema propuesto.

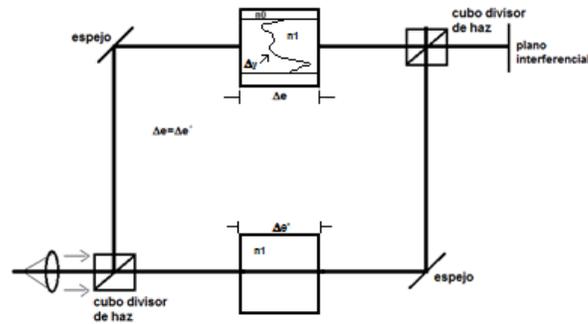


Figura 4.9: Posible arreglo experimental de la muestra en el interferómetro Mach-Zehner

Al igual que en los dos casos anteriores se define en el programa de simulación la distribución fase como la ecuación (4.4). A las variables controlables se les asigna los valores siguientes: $aw = 30$, $\Delta e = 200$, $|x| \leq 40$ y a Δy de acuerdo a la ecuación (4.9). Se elige un punto x_0 dentro del intervalo de x , haciendo el procedimiento explicado en la sección 4.1 se logra obtener los valores de los coeficientes de Cauchy. Es importante señalar que esto se logra para cualquier punto dentro del intervalo de x .

Capítulo 5

Simulaciones numéricas de recuperaciones de fase

5.1. Recuperación de distribuciones de fase con corrimiento de fase para distintos objetos a distintas longitudes de onda

Con el fin de recuperar las distribuciones de fase para los distintos objetos propuestos, se utiliza el método de interferometría de corrimiento de fase (PSI) haciendo uso del algoritmo de tres pasos descrito en la sección 3.1.3.

5.1.1. Objeto unidimensional de dispersión homogénea por zonas de espesor constante e interfaz lineal

En el programa de simulación se define de acuerdo a la ecuación (3.28) el patrón de interferencia para el primer sistema físico propuesto que es un objeto unidimensional de dispersión homogénea por zonas de espesor constante y de interfaz lineal como se propone en la sección 4.1, así el patrón de interferencia para el plagioklas en un medio de inmersión a lo largo de una dimensión x se puede expresar como:

$$I\lambda(\lambda, x, f_n) = 1 + \cos(\phi\lambda(\lambda, x) + \alpha r \cdot x + f_n) \quad (5.1)$$

donde f_n es la fase introducida para realizar el corrimiento de fase, αr es el factor de inclinación para observar franjas de interferencia, $\phi\lambda(\lambda, x)$ es la distribución de fase referente a la ecuación (4.4). Utilizando los valores obtenidos de la ecuación (4.4) como se muestra en

la sección 4.1 se realiza el corrimiento de fase para valores de fase de $f_n = (0, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3})$ en la ecuación (5.1). Inicialmente se considera el valor de $f_n = 0$ con valores de la longitud de onda en el rango visible ($400nm, 450nm, 500nm, 550nm, 600nm, 650nm, 700nm$) y variando el valor de x , a continuación se muestra la gráfica de interferencia para estos valores y los patrones de interferencia para cada longitud de onda

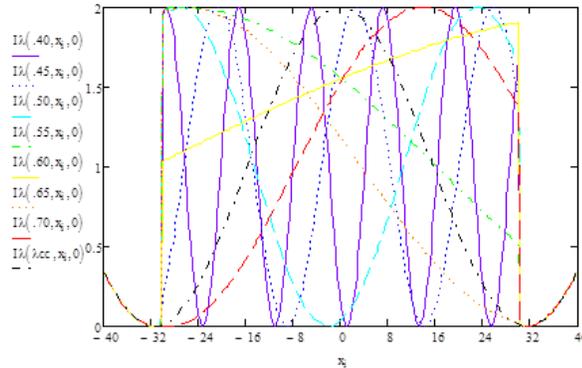


Figura 5.1: Gráficas de interferencia para $f_n = 0$ respecto a x_i y varias λ diferentes.

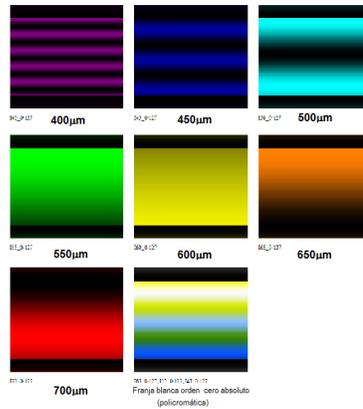


Figura 5.2: Patrones de interferencia calculados para $f_n = 0$ y para distintos valores de longitud de onda en el rango visible.

5.1. RECUPERACIÓN DE DISTRIBUCIONES DE FASE CON CORRIMIENTO DE FASE A DISTINTAS λ 59

Por otra parte se puede considerar a la ecuación (5.1) sin el factor de inclinación, de esta manera se tienen las siguientes gráficas de interferencia al realizar el corrimiento de fase para valores de fase de $f_n = (0, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3})$

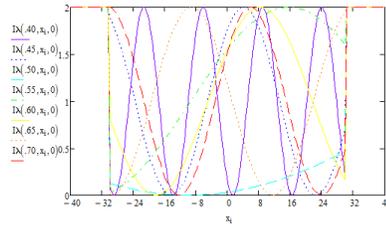


Figura 5.3: Gráficas de interferencia para $f_n = 0$ respecto a x_i y varias λ diferentes.

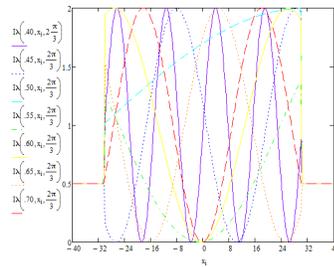


Figura 5.4: Gráficas de interferencia para $f_n = 2\pi/3$ respecto a x_i y varias λ diferentes.

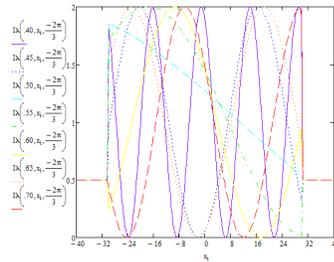


Figura 5.5: Gráficas de interferencia para $f_n = -2\pi/3$ respecto a x_i y varias λ diferentes.

60CAPÍTULO 5. SIMULACIONES NUMÉRICAS DE RECUPERACIONES DE FASE

De las gráficas anteriores es posible obtener una gráfica de interferencia para los tres valores de f_n en solo valor de longitud de onda, se considera el primer valor $\lambda = .400$ como se muestra en la siguiente gráfica

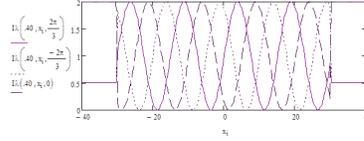


Figura 5.6: Gráfica de interferencia para los tres valores de fases $f_n = (0, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3})$ para $\lambda = .400$

a continuación se presentan las imágenes de interferencia para cada valor de f_n

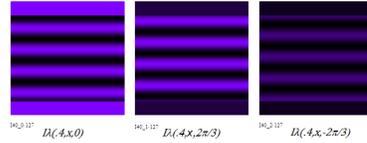


Figura 5.7: Interferogramas de los tres valores de fases $f_n = (0, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3})$ para $\lambda = .400$

con esto lo que se está obteniendo son tres valores de interferencia $I\lambda(.4, x_i, 0)$, $I\lambda(.4, x_i, 2\pi/3)$, $I\lambda(.4, x_i, -2\pi/3)$, recordando la ecuación (3.29) tres relaciones de interferencia son las necesarias para recuperar la distribución de fase para una longitud de onda elegida, así se obtiene la ecuación siguiente:

$$\tan \Delta\phi_4 = \sqrt{3} \frac{I\lambda(.4, x_i, -2\pi/3) - I\lambda(.4, x_i, 2\pi/3)}{2I\lambda(.4, x_i, 0) - (I\lambda(.4, x_i, 2\pi/3) + I\lambda(.4, x_i, -2\pi/3))}$$

entonces

$$\Delta\phi_4 = \tan^{-1} \left(\sqrt{3} \frac{I\lambda(.4, x_i, -2\pi/3) - I\lambda(.4, x_i, 2\pi/3)}{2I\lambda(.4, x_i, 0) - (I\lambda(.4, x_i, 2\pi/3) + I\lambda(.4, x_i, -2\pi/3))} \right)$$

5.1. RECUPERACIÓN DE DISTRIBUCIONES DE FASE CON CORRIMIENTO DE FASE A DISTINTAS λ

así la distribución de fase para $\lambda = .400$ una vez hecho el corrimiento resulta:

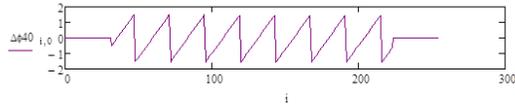


Figura 5.8: Gráfica de la distribución de fase para $\lambda = .400$ después de hacer el corrimiento de fase

Siguiendo este procedimiento se puede recuperar las distribuciones de fase $\Delta\phi$ para las longitudes de onda restantes, se muestran estas distribuciones en la gráfica 5.9.

Aquí como se advirtió en la sección 3.1.3 se presenta un problema de envolvimiento de

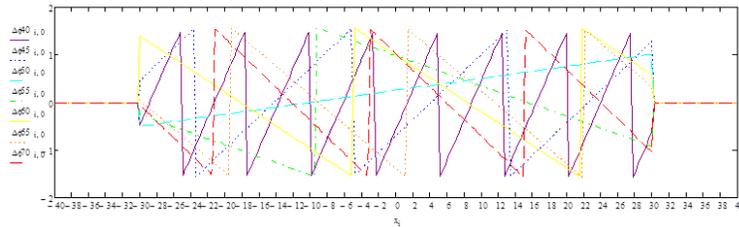


Figura 5.9: Gráfica de distribuciones de fase para longitudes de onda en el visible después de hacer el corrimiento de fases.

fases y como se mencionó existen métodos para realizar el desenvolvemento de las fases y así poder trabajar con ellas, pero en este caso es importante recordar la franja de orden cero que a partir de ahí se pueden ver las amplitudes y fases esencialmente constantes, así que es conveniente considerar valores para la longitud de onda cercanos al punto de cruce de las curvas de dispersión, sabiendo que el punto de cruce se encuentra en $\lambda_c = 0.512$. Los valores que se consideran para la longitud de onda son: 480, 490, 500, 510, 520, 530, 540, nuevamente fijándose en un solo punto $x = 0$ se obtiene los valores $\Delta\phi$ de la ecuación $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot |\Delta y(x, \alpha)| \cdot [n_0(\lambda) - n_1(\lambda)]$, la gráfica que se tiene para esta distribución de fases se presenta en la figura 5.10.

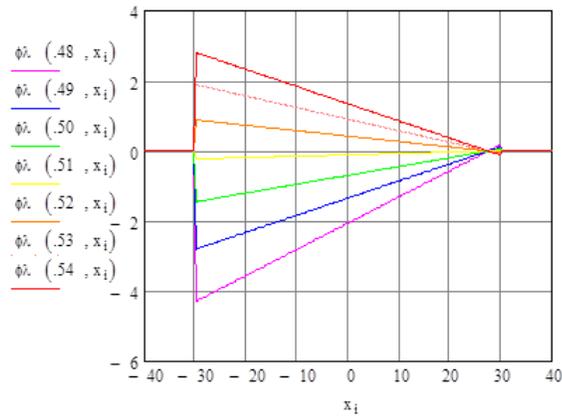


Figura 5.10: Gráfica de distribuciones de fase para longitudes de onda cercanas al punto de cruce de las curvas de dispersión λ_c

De la ecuación (5.1) para la interferencia sin considerar el factor de inclinación se realiza el corrimiento de fase $f_n = (0, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3})$, considerando los valores de longitud de onda previamente elegidos y siendo x_i una variable que representa los puntos de la muestra a lo largo del eje x , se tienen las siguientes gráficas.

5.1. RECUPERACIÓN DE DISTRIBUCIONES DE FASE CON CORRIMIENTO DE FASE A DISTINTAS $\lambda 63$

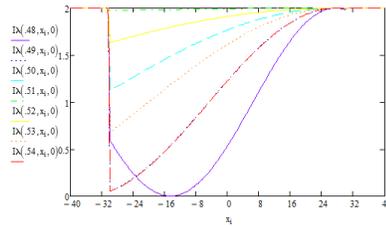


Figura 5.11: Gráfica de interferencia para $f_n = 0$ respecto a x_i .

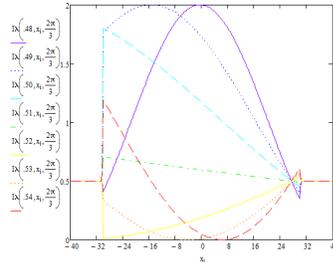


Figura 5.12: Gráfica de interferencia para $f_n = 2\pi/3$ respecto a x_i .

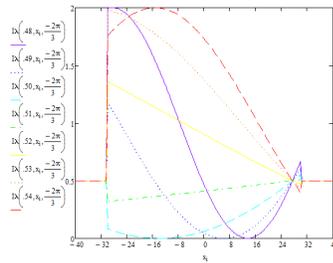


Figura 5.13: Gráfica de interferencia para $f_n = -2\pi/3$ respecto a x_i .

De las gráficas 5.11, 5.12 y 5.13 se puede realizar una gráfica que contenga solo las curvas para un solo valor de longitud de onda y para los tres valores de fase, consideremos $\lambda = .480$, entonces la gráfica e interferogramas resulta

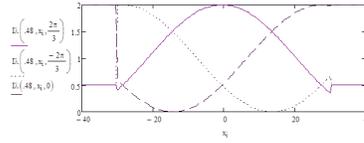


Figura 5.14: Gráfica de interferencia para los tres valores de fases $f_n = (0, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3})$ para $\lambda = .480$

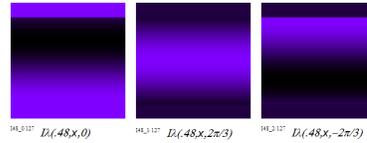


Figura 5.15: Interferogramas de los tres valores de fases $f_n = (0, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3})$ para $\lambda = .480$

con estos tres valores de interferencia $I\lambda(.48, x_i, 0)$, $I\lambda(.48, x_i, 2\pi/3)$, $I\lambda(.48, x_i, -2\pi/3)$ y utilizando la ecuación (3.29) se obtiene para esta longitud de onda:

$$\tan \Delta\phi_{48} = \sqrt{3} \frac{I\lambda(.48, x_i, -2\pi/3) - I\lambda(.48, x_i, 2\pi/3)}{2I\lambda(.48, x_i, 0) - (I\lambda(.48, x_i, 2\pi/3) + I\lambda(.48, x_i, -2\pi/3))}$$

entonces

$$\Delta\phi_{48} = \tan^{-1} \left(\sqrt{3} \frac{I\lambda(.48, x_i, -2\pi/3) - I\lambda(.48, x_i, 2\pi/3)}{2I\lambda(.48, x_i, 0) - (I\lambda(.48, x_i, 2\pi/3) + I\lambda(.48, x_i, -2\pi/3))} \right)$$

La distribución de fase para este valor de longitud de onda después de hacer el corrimiento se muestra en la gráfica siguiente

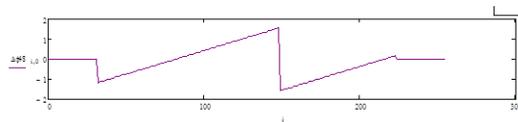


Figura 5.16: Gráfica de la distribución de fase para $\lambda = .480$ después de hacer el corrimiento de fase

5.1. RECUPERACIÓN DE DISTRIBUCIONES DE FASE CON CORRIMIENTO DE FASE A DISTINTAS λ_6

Siguiendo el mismo procedimiento, se recuperan los valores de la distribución de fase $\Delta\phi$ para las demás longitudes de onda consideradas, En resumen, se gráfica lo obtenido de realizar el procedimiento (5.17).

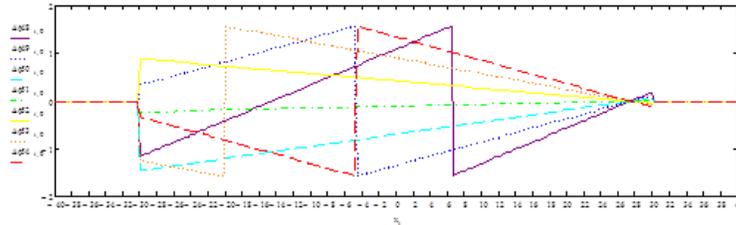


Figura 5.17: Gráfica de distribuciones de fase para longitudes cercanas a λ_c después de hacer el corrimiento de fases.

Haciendo una comparación entre la gráfica 5.17 y 5.10 se nota que existe un intervalo de x donde las curvas de distribución de fases se dan de manera similar. Por otra parte las distribuciones de fase se pueden graficar respecto a los valores i del programa, así se obtiene la Figura 5.18.

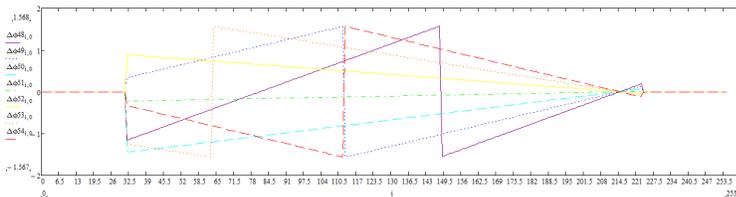


Figura 5.18: Gráfica de distribuciones de fase para longitudes cercanas a λ_c después de hacer el corrimiento de fases.

Se puede ver en la gráfica anterior que hay una región de "desenvolvimiento natural" de las fases. Así que no es necesario aplicar algún método de desenvolvimiento ahí. Esta región se elige para trabajar. Se considera valores de $\Delta\phi$ para cada longitud de onda en un punto fijo de i . Los valores de i considerados son 180, 185, 190, 195, 200. Tomando el primer punto $i = 180$ se obtiene el valor de la distribución de fase para las longitudes de

onda elegidas en dicho valor:

$$\Delta\phi_{180} = \begin{pmatrix} \Delta\phi_{48}(180) \\ \Delta\phi_{49}(180) \\ \Delta\phi_{50}(180) \\ \Delta\phi_{51}(180) \\ \Delta\phi_{52}(180) \\ \Delta\phi_{53}(180) \\ \Delta\phi_{54}(180) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.823 \\ -0.537 \\ -0.278 \\ -0.043 \\ 0.17 \\ 0.363 \\ 0.539 \end{pmatrix}.$$

con estos valores $\Delta\phi_{180}$ como se explica en la sección 3.3 se pueden definir en el programa de simulación los valores de ajuste en un solo punto para cada longitud de onda de la siguiente manera:

$$\Delta\phi\phi_{180} = \begin{pmatrix} (.48)^3 \cdot \frac{\Delta\phi_{48,180,0}}{2\pi} \\ (.49)^3 \cdot \frac{\Delta\phi_{49,180,0}}{2\pi} \\ (.50)^3 \cdot \frac{\Delta\phi_{50,180,0}}{2\pi} \\ (.51)^3 \cdot \frac{\Delta\phi_{51,180,0}}{2\pi} \\ (.52)^3 \cdot \frac{\Delta\phi_{52,180,0}}{2\pi} \\ (.53)^3 \cdot \frac{\Delta\phi_{53,180,0}}{2\pi} \\ (.54)^3 \cdot \frac{\Delta\phi_{54,180,0}}{2\pi} \end{pmatrix}.$$

a los valores $\Delta\phi\phi_{180}$ se les realiza un ajuste de regresión de potencias, el ajuste se hace respecto a una ecuación de la forma $(A \cdot \lambda^2 + B) \cdot C$, donde A, B, C son parámetros que el ajuste proporciona como se explica en la sección 3.3.

Se define un vector:

$$f1(\lambda, C, A, B) = \begin{bmatrix} C \cdot (A \cdot \lambda^2 + B) \\ C \cdot \lambda^2 \\ C \end{bmatrix}.$$

Se define otra función utilizando la función *genfit* para encontrar los parámetros de la función de ajuste

$$cg1 := \text{genfit}[\Delta\lambda, \Delta\phi_{180}, \text{guess1}, f1].$$

De esta manera, se obtiene el valor de los parámetros

$$cg1 = \begin{bmatrix} -19.124 \\ -0.024 \\ 6.266 \times 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

5.1. RECUPERACIÓN DE DISTRIBUCIONES DE FASE CON CORRIMIENTO DE FASE A DISTINTAS λ

El procedimiento anterior se realiza para los puntos i restantes obteniendo resultados similares como se mostrará más adelante.

5.1.2. Objeto unidimensional de dispersión homogénea por zonas de espesor constante e interfaz cúbica

Para recuperar las distribuciones de fase en este objeto lo que se hizo fue considerar nuevos valores para la longitud de onda cercanos al punto de cruce de las gráficas de dispersión con el objetivo de evitar el problema de envolvimiento de las fases, los valores que se consideran para la longitud de onda son $480nm$, $490nm$, $500nm$, $510nm$, $520nm$, $530nm$, $540nm$ fijándose en un solo punto $x = 0$ y de la ecuación $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot |\Delta y(x, \alpha)| \cdot [n_0(\lambda) - n_1(\lambda)]$ se tiene valores para las distribuciones de fase que se pueden graficar como:

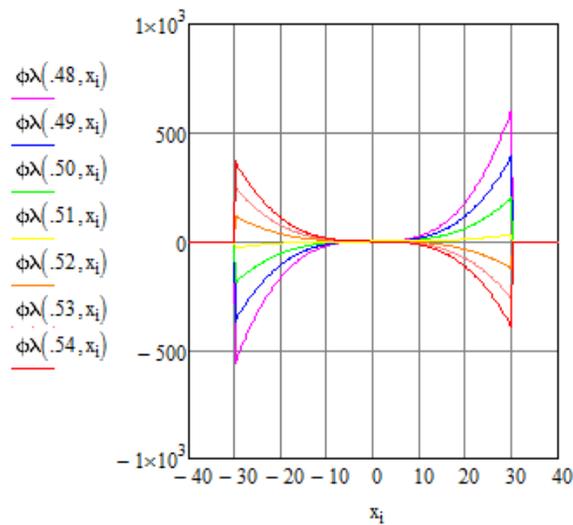


Figura 5.19: Gráfica de distribuciones de fase para longitudes de onda cercanas al punto de cruce de las curvas de dispersión λ_c

Utilizando la ecuación (5.1) para la interferencia se procede a realizar el corrimiento de fase $f_n = (0, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3})$. Considerando los valores de longitud antes mencionados, es posible graficar estos valores con respecto a los puntos de la muestra que se encuentran en la dirección x .

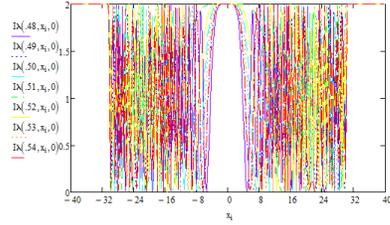


Figura 5.20: Gráfica de interferencia para $f_n = 0$ respecto a x_i .

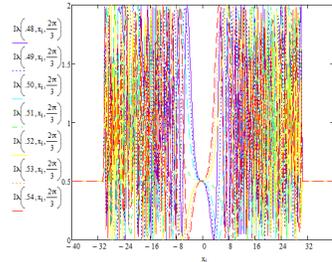


Figura 5.21: Gráfica de interferencia para $f_n = 2\pi/3$ respecto a x_i .

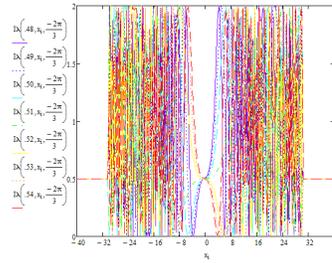


Figura 5.22: Gráfica de interferencia para $f_n = -2\pi/3$ respecto a x_i .

Considerando las gráficas de las Figuras 5.20 – 5.22 se pueden obtener y graficar solo las curvas para una sola longitud de onda para los tres valores de fase. Para $\lambda = .480$, se tiene la Figura 5.23.

5.1. RECUPERACIÓN DE DISTRIBUCIONES DE FASE CON CORRIMIENTO DE FASE A DISTINTAS λ 69

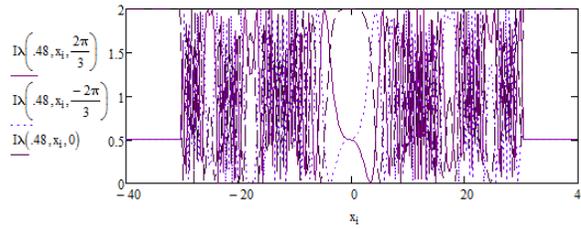


Figura 5.23: Gráfica de interferencia para los tres valores de fases $f_n = (0, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3})$ para $\lambda = .480$.

Los interferogramas asociados se muestran en la Figura 5.24.

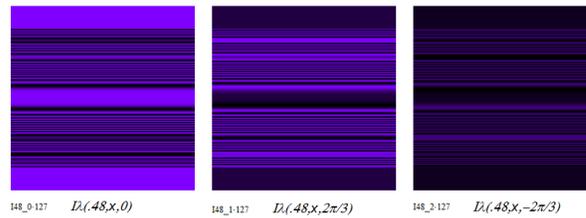


Figura 5.24: Interferogramas de los tres valores de fases $f_n = (0, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3})$ para $\lambda = .480$.

Utilizando la ecuación (3.29) y los tres valores $I\lambda(.48, x_i, 0)$, $I\lambda(.48, x_i, 2\pi/3)$, $I\lambda(.48, x_i, -2\pi/3)$ se tiene para $\lambda = .480$:

$$\tan \Delta\phi_{48} = \sqrt{3} \frac{I\lambda(.48, x_i, -2\pi/3) - I\lambda(.48, x_i, 2\pi/3)}{2I\lambda(.48, x_i, 0) - (I\lambda(.48, x_i, 2\pi/3) + I\lambda(.48, x_i, -2\pi/3))}$$

así

$$\Delta\phi_{48} = \tan^{-1} \left(\sqrt{3} \frac{I\lambda(.48, x_i, -2\pi/3) - I\lambda(.48, x_i, 2\pi/3)}{2I\lambda(.48, x_i, 0) - (I\lambda(.48, x_i, 2\pi/3) + I\lambda(.48, x_i, -2\pi/3))} \right)$$

Para $\lambda = .480$ después de realizar el corrimiento de fase se puede mostrar la siguiente gráfica que contiene a la curva de distribución de fase $\Delta\phi_{48}$ (Figura 5.25).

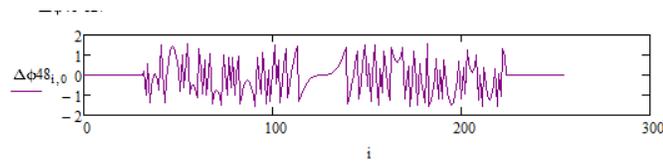


Figura 5.25: Gráfica de la distribución de fase para $\lambda = .480$ después de hacer el corrimiento de fase.

Al realizar el procedimiento anterior se obtienen las distribuciones de fase $\Delta\phi$ para las longitudes de ondas restantes. A continuación, se presenta una gráfica respecto a x_i (Figura 5.26).

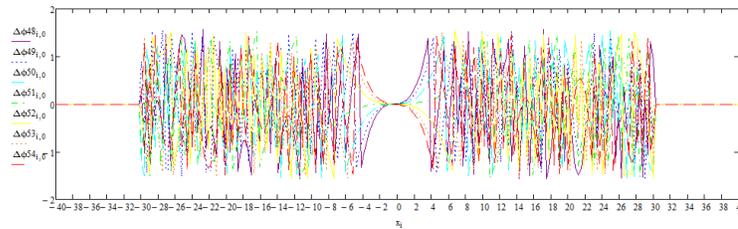


Figura 5.26: Gráfica de distribuciones de fase para longitudes cercanas a λ_c después de hacer el corrimiento de fases.

Haciendo la comparación de las gráficas 5.26 y 5.19, se observa que, en la gráfica que se obtiene después de realizar el corrimiento, las curvas $\Delta\phi$ tienen una forma parecida a las que se tiene en la gráfica antes de realizar el corrimiento en un rango de $|x| < 4$.

Las distribuciones de fase se pueden graficar respecto a los valores i del programa (Figura 5.27).

Al igual que en el caso anterior, en la gráfica se puede ver una región con desenvolvimiento natural de las fases, así que se elige esta región para trabajar. Se toma valores para la distribución de fase $\Delta\phi$ para cada longitud de onda en un punto i . Los puntos que se consideran son 123, 124, 125, 126, 127. Considerando el primer punto $i = 123$, se calcula los valores de las distribuciones de fase para las longitudes de onda elegidas en dicho

5.1. RECUPERACIÓN DE DISTRIBUCIONES DE FASE CON CORRIMIENTO DE FASE A DISTINTAS λ_1

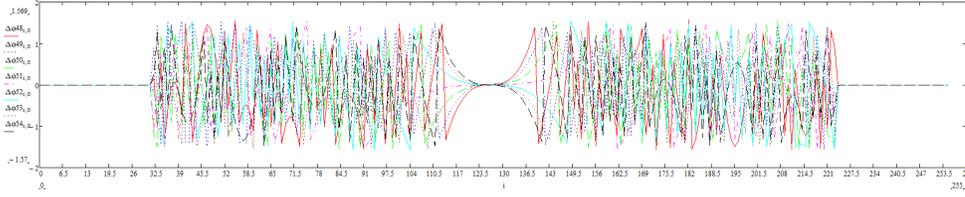


Figura 5.27: Gráfica de distribuciones de fase para longitudes cercanas a λ_c después de hacer el corrimiento de fases.

valor:

$$\Delta\phi_{123} = \begin{pmatrix} \Delta\phi_{48}(123) \\ \Delta\phi_{49}(123) \\ \Delta\phi_{50}(123) \\ \Delta\phi_{51}(123) \\ \Delta\phi_{52}(123) \\ \Delta\phi_{53}(123) \\ \Delta\phi_{54}(123) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.037 \\ -0.024 \\ -0.013 \\ -1.953 \times 10^{-3} \\ 7.726 \times 10^{-3} \\ 0.017 \\ 0.024 \end{pmatrix}.$$

Los valores $\Delta\phi_{123}$ permiten definir valores de la forma $\Delta\phi(\lambda, x) \cdot \lambda^3/2\pi$ en un solo punto para cada longitud de onda elegida como sigue:

$$\Delta\phi\phi_{123} = \begin{pmatrix} (.48)^3 \cdot \frac{\Delta\phi_{48,123,0}}{2\pi} \\ (.49)^3 \cdot \frac{\Delta\phi_{49,123,0}}{2\pi} \\ (.50)^3 \cdot \frac{\Delta\phi_{50,123,0}}{2\pi} \\ (.51)^3 \cdot \frac{\Delta\phi_{51,123,0}}{2\pi} \\ (.52)^3 \cdot \frac{\Delta\phi_{52,123,0}}{2\pi} \\ (.53)^3 \cdot \frac{\Delta\phi_{53,123,0}}{2\pi} \\ (.54)^3 \cdot \frac{\Delta\phi_{54,123,0}}{2\pi} \end{pmatrix}.$$

Lo siguiente es realizar una juste de regresión de potencias a los datos $\Delta\phi\phi_{123}$ respecto a la ecuación de la forma $(A \cdot \lambda^2 + B) \cdot C$ como se explica en la sección 3.3, A , B y C son los parámetros que el ajuste proporciona.

Así, para el primer punto $i = 123$, se define un vector:

$$f_1(\lambda, C, A, B) = \begin{bmatrix} C \cdot (A \cdot \lambda^2 + B) \\ C \cdot \lambda^2 \\ C \end{bmatrix}.$$

Utilizando la función *genfit* se define otra función *cg1* para encontrar los parámetros

$$cg1 := genfit[\Delta\lambda, \Delta\phi_{123}, guess1, f1]$$

Entonces, el valor de los parámetros resultan

$$cg1 = \begin{bmatrix} -0.88 \\ -0.024 \\ 6.194 \times 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

Se realiza procedimiento anterior para los otros puntos *i* que se eligieron, los resultados que se obtuvieron fueron similares.

5.1.3. Objeto unidimensional de dispersión homogénea por zonas de espesor constante e interfaz con la forma de un polinomio de grado 5

En este último sistema físico, con el objetivo de recuperar las distribuciones de fase y evitar el problema de envolvimiento de fases, se eligen valores para la longitud de onda cercanos al punto de cruce de las gráficas de dispersión. Estos valores se consideran de $450nm$, $460nm$, $470nm$, $480nm$, $490nm$, $500nm$, $510nm$, $520nm$, $530nm$, $540nm$, $550nm$, $560nm$, $570nm$, $580nm$. El tomar más valores de longitud de onda permite tener más puntos de análisis en el método. De la ecuación $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot |\Delta y(x, \alpha)| \cdot [n_0(\lambda) - n_1(\lambda)]$ y fijándose en un solo punto $x = 0$, se tiene la gráfica mostrada en la figura 5.28.

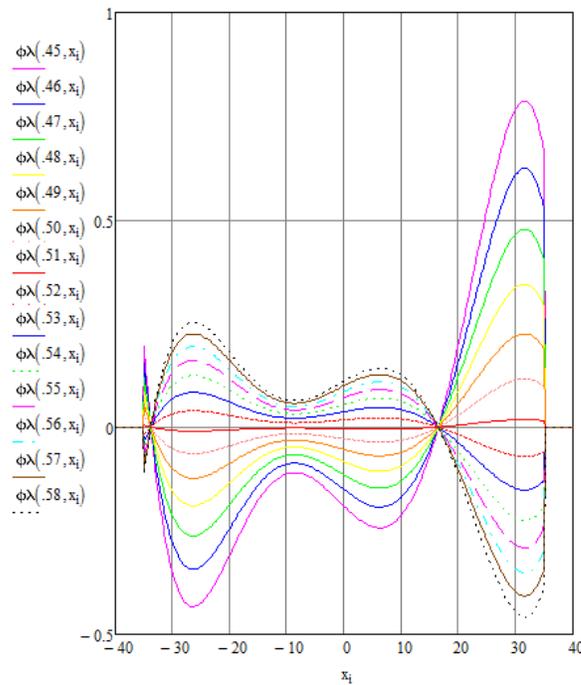


Figura 5.28: Gráfica de distribuciones de fase para longitudes de onda cercanas al punto de cruce de las curvas de dispersión λ_c

De la ecuación de interferencia (5.1) se realiza el corrimiento de fase $f_n = (0, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3})$, se obtiene valores para la interferencia para cada longitud de onda y se pueden graficar estos valores con respecto a lo largo de la muestra, resultando las Figuras 5.29 – 5.31.

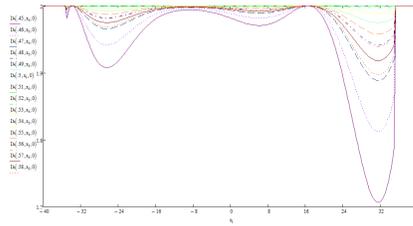


Figura 5.29: Gráfica de interferencia para $f_n = 0$ respecto a x_i .

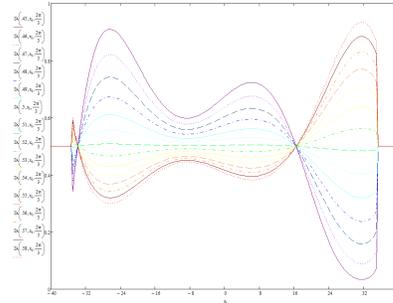


Figura 5.30: Gráfica de interferencia para $f_n = 2\pi/3$ respecto a x_i .

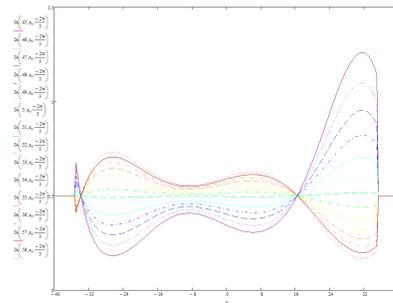


Figura 5.31: Gráfica de interferencia para $f_n = -2\pi/3$ respecto a x_i .

De las gráficas anteriores, a continuación se grafica las curvas para una longitud de onda para los tres valores de fase dejando como variable a x (Figura 5.32).

5.1. RECUPERACIÓN DE DISTRIBUCIONES DE FASE CON CORRIMIENTO DE FASE A DISTINTAS λ 75

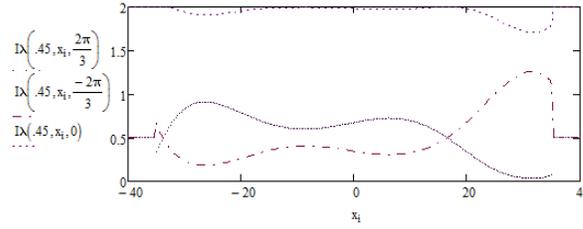


Figura 5.32: Gráfica de interferencia para los tres valores de fases $f_n = (0, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3})$ para $\lambda = .450$

La gráfica anterior es para $\lambda = 450$, los interferogramas asociados se muestran a continuación

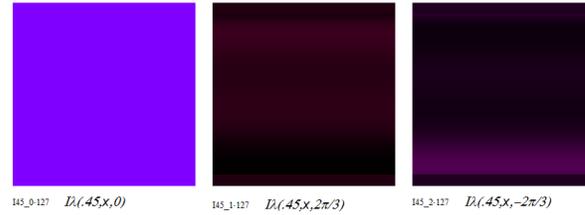


Figura 5.33: Interferogramas de los tres valores de fases $f_n = (0, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3})$ para $\lambda = .450$

Utilizando la ecuación (3.29) y los tres valores de interferencia $I\lambda(.45, x_i, 0)$, $I\lambda(.45, x_i, 2\pi/3)$ y $I\lambda(.45, x_i, -2\pi/3)$ se tiene:

$$\tan \Delta\phi_{45} = \sqrt{3} \frac{I\lambda(.45, x_i, -2\pi/3) - I\lambda(.45, x_i, 2\pi/3)}{2I\lambda(.45, x_i, 0) - (I\lambda(.45, x_i, 2\pi/3) + I\lambda(.45, x_i, -2\pi/3))}$$

entonces

$$\Delta\phi_{45} = \tan^{-1} \left(\sqrt{3} \frac{I\lambda(.45, x_i, -2\pi/3) - I\lambda(.45, x_i, 2\pi/3)}{2I\lambda(.45, x_i, 0) - (I\lambda(.45, x_i, 2\pi/3) + I\lambda(.45, x_i, -2\pi/3))} \right)$$

La distribución de fase para esta longitud de onda después de hacer el corrimiento se muestra en la Figura 5.34.

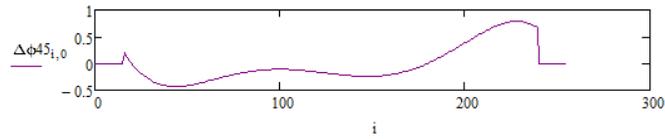


Figura 5.34: Gráfica de la distribución de fase para $\lambda = .450$ después de hacer el corrimiento de fase

Al realizar el procedimiento anterior, para las longitudes de ondas restantes se obtienen las distribuciones de fase $\Delta\phi$, que se reúnen en la siguiente gráfica (Figura5.35).

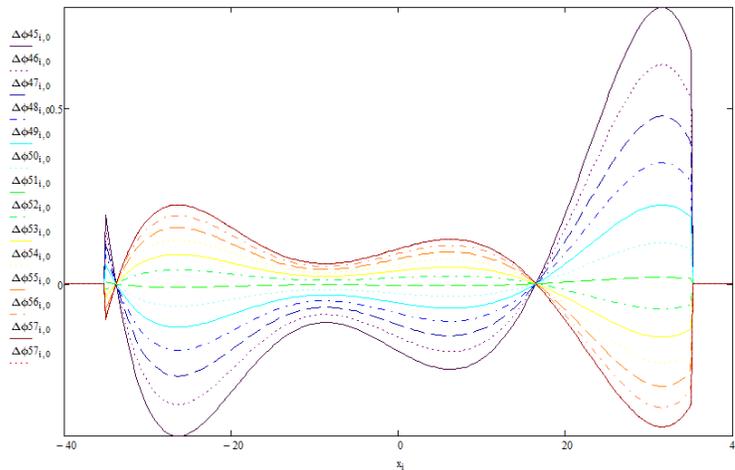


Figura 5.35: Gráfica de distribuciones de fase para longitudes cercanas a λ_c después de hacer el corrimiento de fases.

Comparando las gráficas 5.28 y 5.35 se observa que en la gráfica obtenida después de realizar el corrimiento muestra valores para $\Delta\phi$ similares a los valores iniciales para la distribución de fase. Esto se da dentro un intervalo de x . Los valores $\Delta\phi$ se pueden graficar respecto a los puntos i del programa (Figura5.36).

5.1. RECUPERACIÓN DE DISTRIBUCIONES DE FASE CON CORRIMIENTO DE FASE A DISTINTAS λ_7

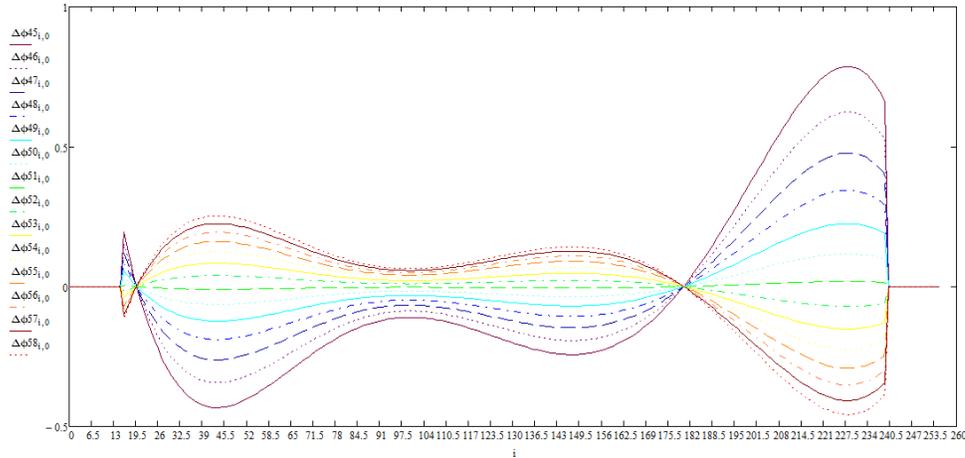


Figura 5.36: Gráfica de distribuciones de fase para longitudes cercanas a λ_c después de hacer el corrimiento de fases.

En la gráfica 5.36 se puede ver una región con desenvolvimiento natural de las fases, así se elige esta región para trabajar. Se toma valores para la distribución de fase $\Delta\phi$ para cada longitud de onda en un punto i , los puntos que se consideran son 128, 136, 144, 152, 160, 168, 176, 184, 192, 200, 208, 216, 224, 232. Para el primero punto $i = 128$ se tiene:

$$\Delta\phi_{128} = \begin{pmatrix} \Delta\phi_{45}(128) \\ \Delta\phi_{46}(128) \\ \Delta\phi_{47}(128) \\ \Delta\phi_{48}(128) \\ \Delta\phi_{49}(128) \\ \Delta\phi_{50}(128) \\ \Delta\phi_{51}(128) \\ \Delta\phi_{52}(128) \\ \Delta\phi_{53}(128) \\ \Delta\phi_{54}(128) \\ \Delta\phi_{55}(128) \\ \Delta\phi_{56}(128) \\ \Delta\phi_{57}(128) \\ \Delta\phi_{58}(128) \end{pmatrix} = -4.435 \times 10^{-3} \begin{pmatrix} -0.194 \\ -0.154 \\ -0.118 \\ -0.085 \\ -0.055 \\ -0.029 \\ 0.018 \\ 0.037 \\ 0.056 \\ 0.072 \\ 0.087 \\ 0.101 \\ 0.113 \end{pmatrix}.$$

Con los valores $\Delta\phi_{128}$ se pueden definir en el programa de simulación los valores de

ajuste en un solo punto para cada longitud de onda como se muestra a continuación:

$$\Delta\phi_{128} = \begin{pmatrix} (.45)^3 \cdot \frac{\Delta\phi_{45,128,0}}{2\pi} \\ (.46)^3 \cdot \frac{\Delta\phi_{46,128,0}}{2\pi} \\ (.57)^3 \cdot \frac{\Delta\phi_{47,128,0}}{2\pi} \\ (.48)^3 \cdot \frac{\Delta\phi_{48,128,0}}{2\pi} \\ (.49)^3 \cdot \frac{\Delta\phi_{49,128,0}}{2\pi} \\ (.50)^3 \cdot \frac{\Delta\phi_{50,128,0}}{2\pi} \\ (.51)^3 \cdot \frac{\Delta\phi_{51,128,0}}{2\pi} \\ (.52)^3 \cdot \frac{\Delta\phi_{52,128,0}}{2\pi} \\ (.53)^3 \cdot \frac{\Delta\phi_{53,128,0}}{2\pi} \\ (.54)^3 \cdot \frac{\Delta\phi_{54,128,0}}{2\pi} \\ (.55)^3 \cdot \frac{\Delta\phi_{55,128,0}}{2\pi} \\ (.56)^3 \cdot \frac{\Delta\phi_{56,128,0}}{2\pi} \\ (.57)^3 \cdot \frac{\Delta\phi_{57,128,0}}{2\pi} \\ (.58)^3 \cdot \frac{\Delta\phi_{58,128,0}}{2\pi} \end{pmatrix}.$$

Lo siguiente es realizar un juste de regresión de potencias a los datos $\Delta\phi_{128}$ respecto a la ecuación de la forma $(A \cdot \lambda^2 + B) \cdot C$ donde A , B y C son parámetros que el ajuste proporciona como se explica en la sección 3.3. Se define un vector:

$$f1(\lambda, C, A, B) = \begin{bmatrix} C \cdot (A \cdot \lambda^2 + B) \\ C \cdot \lambda^2 \\ C \end{bmatrix}.$$

Utilizando la función *genfit* se define otra función *cg1* para encontrar los parámetros de la función de ajuste

$$cg1 := \text{genfit}[\Delta\lambda, \Delta\phi_{128}, \text{guess1}, f1]$$

se obtiene el valor de los parámetros

$$cg1 = \begin{bmatrix} -1.817 \times 10^4 \\ -0.024 \\ 6.29 \times 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

Se repite el procedimiento pero ahora considerando los puntos i que faltan, se logran tener resultados similares a los obtenidos para $i = 128$.

5.2. Resultados y discusión

Del primer sistema físico considerado “objeto unidimensional de dispersión homogénea por zonas de espesor constante e interfaz lineal”, se tiene que después de hacer el corrimiento de fase y elegir un punto de análisis $i = 180$ y una vez realizando el ajuste como se muestra en la sección 5.1.1, se obtiene los siguientes valores para los parámetros de la función de ajuste que se expresan como entradas de un vector columna $cg1$:

$$cg1 = \begin{bmatrix} -19.124 \\ -0.024 \\ 6.266 \times 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

La primer entrada del vector corresponde al valor de Δy que representa el valor de la interfaz entre los dos medios en $i = 180$ o bien en $x = 16.471$, la segunda y tercera entrada son la diferencia de los coeficientes de Cauchy $AMI - APG$ y $BMI - BPG$ respectivamente. Por otra parte, haciendo el cociente entre la tercera y segunda entrada del vector $cg1$, la resultante corresponde al cuadrado de la longitud de onda de cruce correspondiente a las curvas de dispersión de los medios (λ_c^2).

$$\begin{aligned} \lambda_c^2 &= \frac{BMI - BPG}{APG - AMI} \\ &= \frac{6.266 \times 10^{-3}}{0.024} \\ &= 0.262 \end{aligned}$$

Los resultados que se obtienen para los valores de los puntos i restantes se muestran en la siguiente tabla incluyendo los de $i = 180$. Estos resultados se muestran en los programas de simulación que son anexados al final de este trabajo.

Puntos i	ΔY	$AMI - APG$	$BMI - BPG$
180	-19.124	-0.024	6.266×10^{-3}
185	-16.3	-0.024	6.545×10^{-3}
190	-13.087	-0.025	6.545×10^{-3}
195	-11.056	-0.024	6.202×10^{-3}
200	-8.249	-0.024	6.24×10^{-3}

80CAPÍTULO 5. SIMULACIONES NUMÉRICAS DE RECUPERACIONES DE FASE

Recordado la ecuación $\Delta y = (\tan \alpha) \cdot x + \tan \alpha - \Delta e$ definida en la sección 4.1 que representa la forma de la interfaz en entre el plagioklas y el medio de inmersión, al ser evaluada en los valores de x correspondientes a cada punto i del programa se tienen los siguientes valores:

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta y(x_{180}) \\ \Delta y(x_{185}) \\ \Delta y(x_{190}) \\ \Delta y(x_{195}) \\ \Delta y(x_{200}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -169.74 \\ -167.023 \\ -164.306 \\ -161.589 \\ -158.872 \end{pmatrix}.$$

Graficando los valores ΔY que se obtienen de aplicar el método propuesto y los valores Δ se tiene la gráfica de la Figura 5.37.

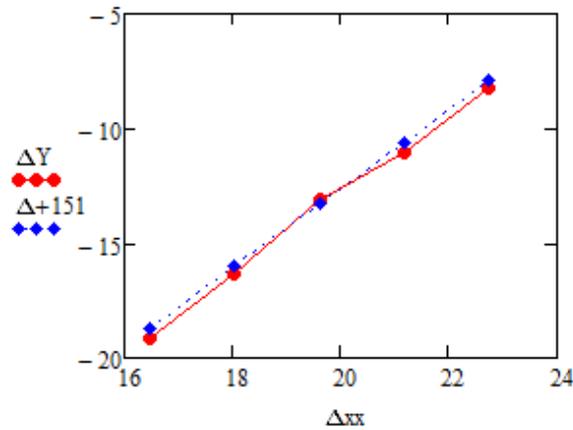


Figura 5.37: Gráfica de comparación entre los valores ΔY y Δ .

De la gráfica anterior se puede notar que existe una diferencia con un valor de 151 entre los valores ΔY y Δ .

Para el segundo sistema físico que se consideró “objeto unidimensional de dispersión homogénea por zonas de espesor constante e interfaz cúbica”, se tiene que, después de realizarse el corrimiento de fase eligiendo un punto $i = 123$ para hacer el análisis y el ajuste de valores para la distribución de fase obtenida como se explica en la sección 5.1.2, se obtienen los valores de los parámetros de ajuste que se presentan a continuación en un vector columna $cg1$:

$$cg1 = \begin{bmatrix} -0.88 \\ -0.024 \\ 6.194 \times 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

Del vector anterior la primera entrada corresponde al valor de Δy que representa el valor de la interfaz que separa a los dos medios en el punto $i = 123$ o bien en el punto $x = -1.412$, la segunda y tercera entrada son los valores de la diferencia de los coeficientes de Cauchy $AMI - APG$ y $BMI - BPG$ respectivamente, el cociente de estas diferencias es el cuadrado de la longitud de onda donde se intersectan las gráficas de dispersión, resultando:

$$\begin{aligned} \lambda_c^2 &= \frac{BMI - BPG}{APG - AMI} \\ &= \frac{6.194 \times 10^{-3}}{0.024} \\ &= 0.262 \end{aligned}$$

Al hacer el mismo procedimiento para los valores i considerados dieron los resultados que se muestran en la siguiente tabla.

Puntos i	ΔY	$AMI - APG$	$BMI - BPG$
123	-0.88	-0.024	6.194×10^{-3}
124	-0.37	-0.023	6.091×10^{-3}
125	-0.077	-0.023	6.155×10^{-3}
126	0.075	-0.023	6.158×10^{-3}
127	0.186	-0.024	6.161×10^{-3}

La ecuación $\Delta y(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$ que representa los puntos de la interfaz entre el pagioklas y el medio de inmersión se evalúa en los valores de x que correspondan a los puntos i que se eligieron para trabajar, esto nos da lo siguiente:

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta y(x_{123}) \\ \Delta y(x_{124}) \\ \Delta y(x_{125}) \\ \Delta y(x_{126}) \\ \Delta y(x_{126}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.866 \\ -0.358 \\ -0.076 \\ 0.073 \\ 0.182 \end{pmatrix}.$$

Al grafica los valores ΔY que se obtuvieron de aplicar el método que se propuso y los valores Δ , se tiene la gráfica de la Figura 5.38.

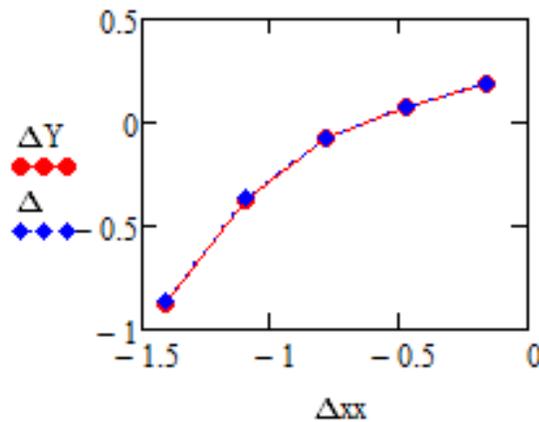


Figura 5.38: Gráfica de comparación entre los valores ΔY y Δ .

En este caso de la gráfica no se puede notar la diferencia que hay entre las dos curvas, pero realizando la diferencia punto a punto de cada curva resulta que tienen una diferencia del orden de 10^{-3} .

En el tercer sistema físico “objeto unidimensional de dispersión homogénea por zonas de espesor constante e interfaz con la forma de un polinomio de grado 5”, después de realizar el ajuste hecho en la sección 5.1.3, se obtuvieron los valores de los parámetros de ajuste para cada punto elegido. Para el primer punto $i=128$ se tiene:

$$cg1 = \begin{bmatrix} -2.088 \times 10^4 \\ -0.023 \\ 5.925 \times 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

Los valores que muestra el vector columna anterior son los siguientes: la primera entrada es el valor de interfaz Δy en el punto $i = 128$ que corresponde a $x = 0.157$, la segunda entrada es la diferencia de los coeficientes de Cauchy $AMI - APG$ y la tercera entrada del vector es la diferencia de los coeficiente de Cauchy $BMI - BPG$. También es posible obtener el cuadrado del valor de longitud de onda donde se intersectan las curvas de dispersión, esto realizando el cociente entre la tercera y segunda entrada el vector.

$$\begin{aligned} \lambda_c^2 &= \frac{BMI - BPG}{APG - AMI} \\ &= \frac{5.925 \times 10^{-3}}{0.023} \\ &= 0.262 \end{aligned}$$

En la siguiente tabla se muestran los resultados de realizar el mismo procedimiento a los puntos i restantes como se explicó anteriormente:

Puntos i	ΔY	$AMI - APG$	$BMI - BPG$
128	-2.088	-0.023	6.194×10^{-3}
136	-2.411	-0.023	6.091×10^{-3}
144	-2.603	-0.023	6.155×10^{-3}
152	-2.581	-0.023	6.158×10^{-3}
160	-2.273	-0.023	6.161×10^{-3}
168	-1.63	-0.022	6.194×10^{-3}
176	-0.63	-0.022	6.091×10^{-3}
184	0.72	-0.022	6.155×10^{-3}
192	2.387	-0.022	6.158×10^{-3}
200	4.281	-0.022	6.161×10^{-3}
208	4.844	-0.027	6.194×10^{-3}
216	6.886	-0.024	6.091×10^{-3}
224	7.73	-0.024	6.155×10^{-3}
232	8.854	-0.021	6.158×10^{-3}

De la ecuación $\Delta y(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$ que representa la interfaz entre los dos medios considerados, al ser evaluada en valores de x correspondientes a los puntos i elegidos se tiene los valores siguientes:

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta y(x_{128}) \\ \Delta y(x_{136}) \\ \Delta y(x_{144}) \\ \Delta y(x_{152}) \\ \Delta y(x_{160}) \\ \Delta y(x_{168}) \\ \Delta y(x_{176}) \\ \Delta y(x_{184}) \\ \Delta y(x_{192}) \\ \Delta y(x_{200}) \\ \Delta y(x_{208}) \\ \Delta y(x_{216}) \\ \Delta y(x_{224}) \\ \Delta y(x_{232}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.967 \\ -2.27 \\ -2.448 \\ -2.424 \\ -2.132 \\ -1.526 \\ -0.587 \\ 0.669 \\ 2.185 \\ 3.853 \\ 5.513 \\ 6.939 \\ 7.836 \\ 7.83 \end{pmatrix}.$$

A continuación se muestra la comparación de curvas de los valores ΔY que se obtienen del método propuesto y los valores Δ dados por la ecuación $\Delta y(x)$ (Figura 5.39).

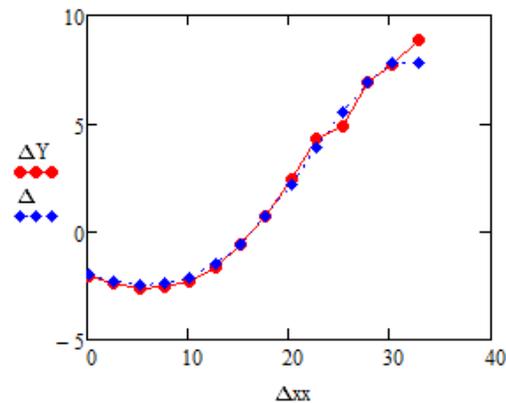


Figura 5.39: Gráfica de comparación entre los valores ΔY y Δ .

En las curvas de la gráfica anterior al hacer la diferencia punto a punto de cada curva se encuentra que existe una diferencia del orden 10^{-1} entre cada valor.

De los resultados obtenidos se puede concluir que si se conocen los valores de los coeficientes de Cauchy para un medio es posible conocer los correspondientes al otro medio pues del método se obtiene la diferencia de éstos.

Por otra parte, es posible conocer la forma de la interfaz que separa a los dos medios bajo estudio. La diferencia entre los valores $\Delta y(x)$ y ΔY se puede deber al tipo de ajuste que se utilizó (Levenberg-Marquardt(LM)).

Se puede mencionar, y no asegurar, por los resultados que se obtuvieron que entre más complicada sea la interfaz entre los medios es posible recuperar su forma de manera más exacta, pues en el caso donde la interfaz se expresa mediante un polinomio de grado cinco el orden de diferencia entre los valores de las curvas $\Delta y(x)$ y ΔY fue de 10^{-1} . Para el caso donde la forma de la interfaz se expresa con un polinomio de grado tres la diferencia entre los valores de las curvas $\Delta y(x)$ y ΔY fue de 10^{-3} . En el primer caso donde la interfaz es lineal la diferencia entre los valores obtenidos y los iniciales fue de 151.

Se puede concluir que mediante este método, es posible conocer el cuadrado de la longitud de onda λ_c^2 y con ello conocer el valor λ_c que es el valor donde las gráficas de dispersión se intersectan.

Capítulo 6

CONCLUSIONES GENERALES

En este trabajo se desarrolló un método propuesto para el estudio de medios dispersivos haciendo uso de técnicas interferométricas. Se analizaron tres sistemas físicos diferentes, que consistían en objetos en dos dimensiones de dispersión homogénea por zonas de espesor constante y con interfaz variable.

Para cada caso, se logró establecer las condiciones necesarias para lograr la recuperación de distribuciones de fase en los diferentes objetos.

En este trabajo, se muestra lo eficaz que resulta la aplicación del método de interferometría de corrimiento de fase (PSI) para la recuperación de fase en los sistemas propuestos.

Se vio que es posible medir dispersiones para diferentes medios con el uso de interferometría bajo ciertas condiciones. Se encontró que es posible recuperar la forma de la interfaz que divide a los dos medios dispersivos, donde la forma de dicha interfaz puede ser descrita por un polinomio de grado uno, tres o cinco, utilizando métodos interferométricos dentro de un rango de longitud de onda en el visible.

Uno de los requerimientos para que se logre este propósito es conocer el valor del orden de interferencia absoluto, el cual no es proporcionado por el método usual de corrimiento de fase.

Otro de los requerimientos fundamentales es la necesidad de que el valor para la longitud de onda λ_c (donde se da la intersección de las curvas de dispersión) sea dentro del rango visible. Este valor de longitud de onda es proporcionado por el método propuesto siendo uno de los resultados importantes.

Un resultado más que se obtiene del trabajo presente es la recuperación de la diferencia de los coeficientes de Cauchy para los medios considerados. De esta manera si se conocen los valores de los coeficientes de Cauchy de un medio es posible conocer el valor de los coeficientes para el otro medio y con ello se estaría conociendo la relación de dispersión

para dicho medio.

Algo importante que mencionar es que no cualquier método de ajuste resulta conveniente. Se utilizó el método Levenberg-Marquardt optimizado y no dio resultados razonables a diferencia del método Levenberg-Marquardt (LM). Éste sí dio buenos resultados.

Una posible solución para los requerimientos deseados es tener el orden cero disponible para localizarlo y así poder establecer una región de desenvolvimiento natural donde sea posible trabajar, como se hizo en los casos tratados en este trabajo. Una posible solución sería el trabajar con un interferómetro diferencial: su rango de desenvolvimiento natural sería más amplio. Trabajar en ello es una dirección posterior.

En general se considera que este método que se propone resulta conveniente para el estudio de la dispersión normal dando resultados favorables. Con ello, se puede decir que se logró cumplir de manera eficaz con los objetivos planteados.

Bibliografía

- [1] Max Born y Emil Wolf, *Principles of Optics*, 6a. edición, Springer-Verlag New York, pp 14-18, 84-90, 1980.
- [2] Hermann Beyer, Horst Riesenber, *Handbuch der Mikroskopie*, 3a. edición, Berlin, 1988.
- [3] Eugene Hecht, Alfred Zajac, *Optics*, Addison-Wesley Publishing Company de Reading, Massachusetts,E.U.A, pp 304-308, 1974.
- [4] Daniel Malacara, *Optical Shop Testing* , 3a. edición, John Wilwy y Sons, New Jersey, pp 550-570 ,Inc. 2007

Este trabajo se presentó en el congreso RIAO-OPTILAS 2013, Session XXIII (AQ2), con el título *Linear Dispersion Characterization (Cauchy Coefficients Determination) using Interferometric Techniques*, J.Barranco-Cisneros, G.Rodríguez-Zurita.