Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Fisico-Matemáticas

El sector de Yukawa del Modelo Estándar en 6 dimensiones

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Adriana Pérez Martínez

asesorado por

Dr. J. Jesús Toscano Chávez

Puebla Pue.
Noviembre de 2013

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Fisico-Matemáticas

El sector de Yukawa del Modelo Estándar en 6 dimensiones

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Adriana Pérez Martínez

asesorado por

Dr. J. Jesús Toscano Chávez

Puebla Pue.
Noviembre de 2013

Título: El sector de Yukawa del Modelo Estándar en 6 dimensiones
Estudiante: Adriana Pérez Martínez

COMITÉ

Dr. Gilberto Tavares Velasco
Presidente

Dra. María Alicia López Osorio
Secretario

Dr. Eric Martínez Pascual
Vocal

Dr. Arturo Fernández Téllez
Vocal

Dr. J. Jesús Toscano Chávez
Asesor

Índice general

Agradecimientos

A mis padres por todo el apoyo que me han brindado a lo largo de mis estudios. En especial a mi mamita linda porque siempre creyo en mí y me apoyó en todo momento; siempre me esforcé al máximo para que estuvieras orgullosa de mí. A mi papá le agradezco su apoyo económico brindado, ya que sin eso habría sido muy difícil seguir estudiando. A mis hermanos que siempre han estado a mi lado.

A mi asesor de tesis el Dr. J. Jesús Toscano Chávez por su apoyo, dedicación y tiempo proporcionado para la realización de esta tesis, por compartir sus conocimientos conmigo, por alentarme a conocer lo fascinante que es la física fundamental, en cada uno de sus cursos y seminarios.

A todos mis profesores, con los que tuve la oportunidad de tomar clases a lo largo de mi carrera, los cuales compartieron sus conocimientos y a veces grandes consejos, y que definitivamente hicieron que me enamorara más de la física.

A todos mis amigos que caminaron a mi lado durante mi carrera; sin duda alguna su compañía hizo que mi estancia en la universidad fuese aún mejor y más liviana. A Marxil porque siempre creyó en mi, y me alentaba a esforzarme más.

A CONACYT por su apoyo económico brindado para la realización de esta tesis, mediante el proyecto Correciones radiativas y dimensiones extra.

Resumen

Se estudian las propiedades matemáticas de espinores en seis dimiensiones. Se escribe el sector de Yukawa del Modelo Estándar en seis dimensiones y se deriva la lagrangiana efectiva que resulta de asumir que las dos dimensiones extras están compactificadas.

Introducción

Se sabe que teorías fundamentales a la escala de Planck, tales como teorías de cuerdas, requieren de más de cuatro dimensiones para ser formuladas de manera consistente. Estas formulaciones no son teorías de campo, pero a mucho más bajas energías los efectos de dimensiones extras se pueden parametrizar en forma independiente del modelo por medio de una teoría de campo efectiva gobernada por un grupo de Poincaré extendido. Aunque a la escala de Planck, estas teorías carecen de interés fenomenológico, en la última década se ha argumentado que dimensiones extras relativamente grandes podrían manifestarse a la escala de TeVs [1]. De acuerdo con este enfoque, el espacio tridimensional ordinario está embebido en un espacio-tiempo de dimensión más alta, el cual es conocido con el nombre de bulto. Si las dimensiones extras son suficientemente pequeñas, los campos de norma y de materia del modelo estándar (ME) se propagarán por las dimensiones extras, incidiendo de esta manera sobre observables que estarán bajo el escrutinio del gran colisionador de hadrones (LHC, por sus siglas en inglés). Por consistencia con los experimentos actuales, se supone que las dimensiones extras están apropiadamente compactificadas en una subvariedad $\mathcal{N}^n$ de tamaño suficientemente pequeño. Como resultado de la compactificación de esta subvariedad, los campos que inicialmente son gobernados por el grupo de Poincaré extendido $ISO(1,m)$, son desarrollados en serie de Fourier con respecto a las coordendadas de las subvariedad $\mathcal{N}^n$, cuyos coeficientes son campos que forman representaciones del grupo de Lorentz estándar $SO(1,3)$, conocidos con el nombre de excitaciones de Kaluza-Klein o simplemente campos de KK, así que la teoría efectiva resultante es invariante bajo el grupo de Poincaré estándar $ISO(1,3)$. Por otra parte, la teoría original es gobernada por el grupo de norma $SU(N,\mathcal{M}^m)$, pero después de la compactificación, los campos de KK forman representaciones del grupo $SU(N,\mathcal{M}^4)$. El hecho importante a destacar en este punto, lo cual ha sido discutido en una serie reciente de artículos [2–7], es que el paso de la teoría original, gobernada por los grupos $ISO(1,m)$ y $SU(N,\mathcal{M}^m)$, a la teoría efectiva que contiene los modos de KK, la cual está definida por los grupos estándar $ISO(1,3)$ y $SU(N,\mathcal{M}^4)$, es altamente no trivial por las causas que comentaremos brevemente a continuación.

Un aspecto notable de este tipo de teorías es que los modos de KK asociados con la serie de Fourier de los campos de norma son también campos de norma, solo que masivos, pues como se estableció claramente en la referencia [2], los modos de KK asociados a un campo de norma del grupo $SU(N,\mathcal{M}^m)$ son también campos de norma que se transforman en la representación adjunta del grupo estándar $SU(N,\mathcal{M}^4)$, lo cual significa que el mecanismo de Higgs opera en el proceso de compactificación. Sin embargo, dicho mecanismo no puede operar, en este caso, en la forma estándar, esto es, mediante el rompimiento espontáneo de una simetría global (Teorema de Goldstone), ya que el paso de la teoría de norma gobernada por el grupo $SU(N,\mathcal{M}^m)$ a la teoría efectiva caracterizada por el grupo de norma $SU(N,\mathcal{M}^4)$ no involucra un rompimimiento espontáneo del grupo de norma. En efecto, los grupos $SU(N,\mathcal{M}^m)$ y $SU(N,\mathcal{M}^4)$ tienen el mismo número de generadores y sólo difieren en la dimensión de la variedad soporte. Dado que $\mathcal{M}^m$ contiene a $\mathcal{M}^4$, $SU(N,\mathcal{M}^4)$ es un subgrupo de $SU(N,\mathcal{M}^m)$ en este sentido y no porque uno tenga más generadores que el otro [4]. En realidad, el mecanismo de Higgs opera por compactificación, esto es, por un rompimiento explícito del grupo de Poincaré $ISO(1,m)$ al grupo de Poincaré estándar $ISO(1,3)$, lo cual ocurre cuando las coordenadas extras son integradas [4]. La generazilación de estos resultados a un número arbitrario de dimensiones extras n tanto a nivel clásico [5] como cuántico [6] ha sido completada para el sector puro de Yang-Mills. Diversas aplicaciones fenomenológicas en el contexto del ME con una dimensión extra [8] se han llevado a cabo con resultados interesantes [7]. El objetivo central de esta tesis es el estudio del proceso de compactificación de campos espinoriales en seis dimensiones y su aplicación al sector de Yukawa del Modelo Estándar. El propóposito de este trabajo es establecer las bases para el estudio general de espinores y su compactificación en presencia de un número arbitrario de dimensiones extras, lo cual nos permitiría establecer una formulación general del Modelo Estándar en dimensiones extras.

El contenido de la tesis se ha organizado de la siguiente manera. En el Capítulo 1 se presenta una discusión elemental de los grupos ortogonales, unitarios y el grupo de Poincaré. En el Capítulo 2 se estudia el fenómeno de rompimiento espontáneo de una simetría global (Teorema de Goldstone) y local (Mecanismo de Higgs). El Capítulo 3 es dedicado a estudiar las propiedades básicas de la teoría electrodébil. En el Capítulo 4 se presenta la contribución de esta tesis, la cual consiste en establecer las propiedades matemáticas de los espinores en 6 dimensiones con el fin de estudiar el sector de Yukawa de la teoría electrodébil con dos dimensiones compactas. Finalmente, en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones.

Capítulo 1

Simetrías Continuas

Desde la antigüedad los Griegos creían que las simetrías de la naturaleza debían estar reflejadas en el movimiento de los objetos; empero fue hasta Newton quien se dio cuenta que las simetrías fundamentales de la naturaleza están manifiestas, no en el movimiento individual de los objetos, sino en el conjunto de todos los posibles movimientos. Por ejemplo: la ley de la gravitación universal de Newton nos muestra una simetría esférica, la fuerza es la misma en todas las direcciones. De esta forma todas estas simetrías ocultas de los sistemas son solamente reveladas de formas indirectas.

Por otro lado podríamos preguntarnos qué es una simetría. En el lenguaje matemático, es una operación que transforma un sistema, el cual lo deja invariante, es decir, lleva al sistema a una configuración indistinguible de la original.

Asimismo la simetría de un cuerpo es descrita dando el conjunto de todas aquellas transformaciones donde preserve la distancia entre todos los pares de puntos del cuerpo y lleve a dicho cuerpo en su propia coincidencia. Cualquier transformación con estas características es llamada una transformación simétrica. Es claro que este conjunto forma un grupo, el grupo de simetrías de un cuerpo. Las transformaciones que preservan la distancia pueden ser de tres tipos fundamentales:

1. Rotación a través de un ángulo definido alrededor de un eje.

2. Reflexión en un plano.

3. Desplazamientos paralelos (translaciones).

Los grupos de simetrías de muchos sistemas físicos consisten en un infinito número de elementos más que en un número finito. De esta forma los problemas físicos requieren examinar la teoría de representación de grupos con un número infinito de elementos. Por otro lado un grupo se dice continuo si alguna definición generalizada de "cercanía" o continuidad es impuesta sobre los elementos de la variedad del grupo. Se demanda que un pequeño cambio en los factores de un producto produzca un pequeño cambio en el producto. Así nos restringiremos en el caso donde los elementos de la variedad del grupo pueden ser etiquetados por un conjunto finito de variados parámetros continuos. El grupo cuyos elementos pueden ser etiquetados por un número finito de varios parámetros continuos es llamado un grupo continuo finito. El rango de variación de los parámetros no está especificado, puede variar entre $-\infty$ y $+\infty$, o está confinado en algún dominio finito. Si el dominio de la variación es finito, la variedad del grupo se dice que es cerrada. [9]

Para continuar se dice que hay una simetría G continua cuando un sistema físico se mantiene invariante bajo la transformación continua dada por G, o equivalentemente cuando la lagrangiana del sistema es invariante. A veces dicho conjunto de simetría G genera una estructura algebraica de grupo, en tal caso se dice que hay un grupo de simetrías. [10]

1.1. Grupos ortogonales y unitarios. $SO(N)$ y $SU(N)$

1.1.1. Grupos $SO(N)$

Sea $O(N)$ el conjunto de las matrices reales $N \times N$ que al actuar sobre $\mathbb{R}^N$ dejan invariante la distancia del origen al punto $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$, la cual es definida por

$$x^2 = x^i x^i = \delta_{ij} x^i x^j = x^T \mathbb{1} x. \tag{1.1}$$

Ahora, bajo la transformación

$$x'^i = O^{ij} x^j, \tag{1.2}$$

la distancia queda como

$$x'^2 = x'^i x'^j = (Ox)^i (Ox)^j = x^T (O^T \mathbb{1} O) x = x^2,$$

lo cual implica que $O^T O = \mathbb{1}$. Entonces $O(N)$ consta de todas las matrices cuya inversa coincide con su transpuesta. Este tipo de matrices reciben el nombre de matrices ortogonales. Dichas matrices están definidas en espacios euclideanos, esto es, espacios cuyos tensor métrico es

$$g_{ij} = \mathbb{1}_{ij} = \delta_{ij}.$$

En estos espacios, el elemento de longitud se define como

$$ds^2 = \delta_{ij} dx^i dy^j = dx^i dx^i.$$

En consecuencia las matrices O forma un grupo, siendo la operación el producto matricial. En efecto,

1. Existe cerradura, ya que si $O_1, O_2 \in O(N)$, entonces $(O_1 O_2)^T (O_1 O_2) = O_2^T O_1^T O_1 O_2 = \mathbb{1}$.
2. Existencia del nuetro. El neutro es $\mathbb{1}$, ya que es ortogonal trivialmente.
3. Existencia del inverso. El inverso de O es O^T.
4. Asosciatividad. Se cumple en general.

Cuando los elementos del grupo conmutan, se dice que el grupo es conmutativo o abeliano. En el caso que nos ocupa, solo $O(2)$ es conmutativo. Las matrices O tienen N^2 componentes, pero no todos son independientes, ya que deben de cumplir la condición de ortogonalidad

$$O^T O = \mathbb{1}, \tag{1.3}$$

la cual proporciona $\frac{1}{2} N(N+1)$ elementos dependientes. Así que el número de componentes independientes de O es:

$$N^2 - \frac{1}{2} N(N+1) = \frac{1}{2} N(N-1). \tag{1.4}$$

Este es el número de parámetros del grupo $O(N)$.

Por otra parte, tomando el determinante en la relación de ortogonalidad, se tiene $Det(O^T O) = Det(\mathbb{1})$, por lo tanto

$$Det(O) = \pm 1.$$

De acuerdo con esto, los elementos de $O(N)$ se pueden agrupar en dos categorías:

- Subconjunto de todas los $O \in O(N)$ tales que $Det(O) = 1$. Dado que $\mathbb{1}$ pertenece a esta categoría, este subconjunto forma el subgrupo $SO(N)$.

- El subconjunto formado por todos los $O \in O(N)$ tales que el $Det(O) = -1$. Estos elementos, los cuales no forman un subgrupo, son de la forma O_pO, con $O \in SO(N)$ y O_p una matriz diagonal formada con $+1$ y -1, con un número impar de -1.

Por otro lado, existe una relación uno a uno entre parámetros y los llamados generadores del grupo. Los elementos del grupo se pueden escribir como

$$O(\theta) = e^{iT^a\theta^a}, \tag{1.5}$$

donde $\theta = (\theta^1, \theta^2, \cdots, \theta^{\frac{1}{2}N(N-1)})$, con a$= 1, 2, ..., \frac{1}{2}N(N-1)$, es el conjunto de parámetros del grupo. Los elementos de $SO(N)$ dependen de estos parámetros y de los generadores definidos por una transformación infinitesimal como sigue

$$O(\delta\theta) = \mathbb{1} + \frac{dO}{d\theta^a}|_{\theta^a=0}\delta\theta^a = \mathbb{1} + iT^a\delta\theta^a, \tag{1.6}$$

con $T^a = \frac{1}{i}\frac{dO}{d\theta^a}|_{\theta^a=0}$ los generadores del grupo.

Ahora, sea $O(\bar{\theta}), O(\theta) \in SO(N)$, entonces su producto es también un elemento del grupo $O(\bar{\theta})O(\theta) = O(g(\bar{\theta},\theta)) \in SO(N)$, con $g(\bar{\theta},\theta) = (g^1(\bar{\theta},\theta), g^2(\bar{\theta},\theta), \cdots, g^{\frac{1}{2}N(N-1)}(\bar{\theta},\theta))$. Debe cumplirse que $g^a(0,0) = 0$, $O(\bar{\theta} = 0) = \mathbb{1} = O(\theta = 0)$ y $g^a(0,\theta) = g^a(\theta, 0) = \theta^a$. En términos de generadores $O(\bar{\theta})O(\theta) = O(g(\bar{\theta},\theta))$, toma la forma

$$e^{iT^a\bar{\theta}^a}e^{iT^a\theta^a} = e^{iT^a g^a(\bar{\theta},\theta)}.$$

Haciendo un desarrollo en serie de Taylor en ambos lados de la igualdad, y asumiendo que en $g(\theta,\bar{\theta})$ no pueden aparecer términos proporcionales a $\bar{\theta}^2$ y θ^2, porque violaría el hecho que $g^a(\bar{\theta},0) = g^a(0,\theta) = \theta^a$, se obtiene

$$g(\theta,\bar{\theta}) = \theta^a + \bar{\theta}^a + g^{abc}\bar{\theta}^b\theta^c + \cdots \tag{1.7}$$

De esta forma de los términos proporcionales a $\bar{\theta}\theta$, del desarrollo en serie, se obtiene una condición no trivial, la cual es

$$i^2\bar{\theta}^bT^b\theta^cT^c = ig^{abc}T^a\bar{\theta}^b\theta^c + \frac{i^2}{2}(\theta^b\bar{\theta}^c + \bar{\theta}^b\theta^c)T^{bc}, \tag{1.8}$$

pero los términos de T^{bc} deben ser simétricos, ya que surgen de segundas derivadas en el desarrollo en serie, así podemos quitar el producto de $\bar{\theta}\theta$. Haciendo el álgebra se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} T^bT^c + ig^{abc}T^a &= T^cT^b + ig^{acb}T^a \\ \Rightarrow T^bT^c - T^cT^b &= i(g^{acb} - g^{abc})T^a \end{aligned}$$

$$\therefore [T^a, T^b] = if^{abc}T^c, \tag{1.9}$$

es el álgebra de Lie del grupo, donde $f^{abc} = g^{acb} - g^{abc}$ son las constantes de estructura.

- **Representaciones**

Sea G un grupo, si $g_i \in G$ entonces el objeto $D(g_i)$ es una representación de G si obedece

$$D(g_i)D(g_j) = D(g_ig_j), \tag{1.10}$$

para todos los elementos de G. Con otras palabras, los $D(g_i)$ tienen la misma regla de multiplicación que el grupo original.

Considere la transformación infinitesimal

$$x'^i = O^{ij}x^j = (\delta^{ij} + w^{ij})x^j = x^i + w^{ij}x^j, \tag{1.11}$$

entonces la condición de ortogonalidad toma la forma:

$$\delta^{ij} = (\delta^{ki} + w^{ki})(\delta^{kj} + w^{kj}) = \delta^{ij} + w^{ij} + w^{ji}, \tag{1.12}$$

de manera que $w^{ij} = -w^{ji}$. Así que este tensor tiene $\frac{1}{2}$N(N-1) componentes independientes. Éstos son los parámetros del grupo. Por ejemplo, w^{ij} es el ángulo que caracteriza la rotación en el plano $x^i - x^j$. Ahora bien en la ec.(1.6) se mostró la forma infinitesimal de O, la cual en esta notación toma la forma

$$O(\mathbb{1} + w) = \mathbb{1} + \frac{i}{2}w_{ij}M^{ij}, \tag{1.13}$$

donde M^{ij} son los generadores del grupo, los cuales se transforman como 2-tensores bajo el grupo. La prueba es como sigue. Sea $D(O)$ una representación de $SO(N)$, entonces usando la ley de multiplicación al producto

$$D(O)D(\mathbb{1} + w)D^{-1}(O) = D(\mathbb{1} + OwO^{-1}),$$

se obtiene que

$$D(O)M^{ij}D^{-1}(O) = O^{ik}O^{jl}M^{kl},$$

lo cual prueba que los generadores se transforman como 2-tensores. Asumiendo que O es también infinitesimal, se obtiene

$$\left[\mathbb{1} + \frac{i}{2}\omega^{kl}M_{kl}\right] M_{ij} \left[\mathbb{1} - \frac{i}{2}\omega^{kl}M_{kl}\right] = \left(\delta^{ik} + \omega^{ik}\right)\left(\delta^{jl} + \omega^{jl}\right) M_{kl},$$

lo cual, después de un poco de álgebra, se traduce en

$$[M_{kl}, M_{ij}] = i\left(\delta_{jl}M_{ik} - \delta_{jk}M_{il} + \delta_{ik}M_{lj} - \delta_{il}M_{kj}\right). \tag{1.14}$$

Ésta es el Álgebra de Lie del grupo $SO(N)$.

Por otro lado, se dice que una representación $D(g_i)$ es reducible si se puede descomponer en forma de bloques diagonales. Por ejemplo, la siguiente matriz es una representación reducible,

$$D(g_i) = \begin{pmatrix} D_1(g_i) & 0 & 0 \\ 0 & D_2(g_i) & 0 \\ 0 & 0 & D_3(g_i) \end{pmatrix}, \tag{1.15}$$

donde las D_i son representaciones de más baja dimensión del grupo, esto es, las $D(g_i)$ se puede descomponer en piezas más pequeñas del grupo. El conjunto completo de todas las representaciones del grupo $SO(N)$ se divide en las siguientes categorías

- Tensoriales
- Espinoriales

Representaciones tensoriales

El 0-tensor es la representación trivial del grupo. El 1-tensor es la representación más simple no trivial, dada por

$$A'^i = O^{ij} A^j. \tag{1.16}$$

Una forma simple de generar representaciones de SO(N) de rango más alto es con el producto externo de vectores. Por ejemplo, el producto $A^i B^i$ se transforma como $(A'^i B'^j) = (O^{ik} O^{jl})(A^k B^l)$. De modo que el objeto que se transforma como el producto externo de varios vectores se llama tensor. En general, un tensor $T^{ijk\cdots}$ bajo $SO(N)$ no es otra cosa que un objeto que se transforma como el producto de vectores ordinarios, es decir,

$$T'^{i_1 i_2 \cdots} = O^{i_1 j_1} O^{i_2 j_2} \dots T^{j_i j_2 \cdots} \tag{1.17}$$

Los tensores son en general reducibles, esto es, dentro de la colección de componentes que forman el tensor, se puede encontrar subconjuntos que por sí mismos forman una representación del grupo. Tomando combinaciones simétricas y antisimétricas se pueden extraer representaciones irreducibles. Por ejemplo, sea el tensor T^{ij}, el cual se transforma como

$$T'^{ij} = O^{ik} O^{jl} T^{kl}.$$

Tómese las partes simétricas y antisimétricas,

$$S^{ij} = \frac{1}{2}(T^{ij} + T^{ji})$$

y

$$A^{ij} = \frac{1}{2}(T^{ij} - T^{ji}),$$

la primera con $\frac{1}{2}N(N+1)$ componentes y la segunda con $\frac{1}{2}N(N-1)$ componentes. Estas partes se transforman independientemente sin mezclarse. Así por ejemplo, en un espacio bidimensional, el objeto T^{ij} con 4 elementos, se descompone en 2 objetos que tiene un número menor de componentes: S^{ij} tiene 3 componentes y A^{ij} tiene 1 componente.

Representación espinorial

La representación espinorial consiste en la introducción de N matrices Γ^i; las cuales obedecen la regla de anticonmutación

$$\left\{\Gamma^i, \Gamma^j\right\} = 2\delta^{ij}, \tag{1.18}$$

y recibe el nombre de Álgebra de Clifford. La representación espinorial de los generadores de $SO(N)$ se define por

$$M^{ij} = \frac{i}{4}[\Gamma^i, \Gamma^j]. \tag{1.19}$$

Esta eleción particular de los generadores satisface el álgebra de Lie del grupo.

En general, uno puede encontrar una representación espinorial de $SO(N)$ para N par, que es compleja y tiene dimensión $2^{\frac{N}{2}}$. En este caso de dimensión par podemos introducir una matriz adicional

$$\Gamma^{N+1} = i\Gamma^1\Gamma^2 ... \Gamma^N = \frac{i}{N!}\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}\Gamma^{i_1}\Gamma^{i_2}...\Gamma^{i_N}. \tag{1.20}$$

Esta matriz tiene propiedades especiales, ya que del álgebra de Clifford se implica que

$$\Gamma^i\Gamma^j = -\Gamma^j\Gamma^i, \ i \neq j \tag{1.21}$$

y

$$(\Gamma^i)^2 = \mathbb{1}. \tag{1.22}$$

Directamente de su definición se encuentra que

$$\left\{\Gamma^{N+1}, \Gamma^i\right\} = 0 \quad y \quad (\Gamma^{N+1})^2 = \mathbb{1}. \tag{1.23}$$

Así que el conjunto de matrices $\Gamma^1, \Gamma^2, ..., \Gamma^N$ y Γ^{N+1} también satisfacen el álgebra de Clifford. Además en los espacios de dimensión par podemos introducir el concepto de quiralidad, a través de los proyectores

$$P_L \equiv \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \Gamma^{N+1}) \tag{1.24}$$

y

$$P_R \equiv \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \Gamma^{N+1}), \tag{1.25}$$

con las siguientes propiedades:

$$P_L^2 = P_L, \quad P_R^2 = P_R, \quad P_L P_R = 0 \ \ y \ \ P_L + P_R = \mathbb{1}.$$

En esta representación el grupo $SO(N)$ actúa sobre "vectores" columna de dimensión $2^{\frac{N}{2}}$, llamados espinores,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{1.26}$$

Los proyectores P_L y P_R permiten definir espinores independientes, es decir,

$$\psi_L = P_L \psi \quad y \quad \psi_R = P_R \psi,$$

se nombran espinor izquierdo y espinor derecho, respectivamente. Obviamente,

$$\psi = \psi_L + \psi_R.$$

Esto permite introducir el concepto de quiralidad[1] en física. La interacción débil es una teoría quiral.

Cuando la dimensión del espacio es impar, es decir, se tiene $SO(N+1)$, con N par, la dimensión de la representación sigue siendo la misma $2^{\frac{N}{2}}$, de esta manera Γ^i tienen dimensión $2^{\frac{N}{2}} \times 2^{\frac{N}{2}}$ y los espinores dimensión $2^{\frac{N}{2}}$. Pero ahora debemos tener $N+1$ matrices Γ^i, y se forma con las N matrices Γ^i y la matriz Γ^{N+1}, de tal suerte que se cumpla el álgebra de Clifford. Las $N+1$ matrices Γ^i se transforma como 1-tensores bajo $SO(N+1)$. Y los generadores son de la misma dimensión que en el caso par, sólo que ahora el número de generadores es $\frac{1}{2}N(N+1)$. La diferencia en el número de generadores es N . En los espacios con dimensión impar no existe quiralidad.

[1] Viene del Griego, mano. Su definición clasica es: Una figura geométrica o conjunto de puntos es dicho que presenta quiralidad si su imagen de espejo no puede ser superpuesta con ella misma.

1.1.2. Grupos $SU(N)$

Consta de las matrices unitarias $N \times N$ con determinante $+1$. Esta representación de dimensión N se llama representación fundamental. Sea $U \in SU(N)$, la cual tiene N^2 condiciones debido al hecho que $U^\dagger = U^{-1}$ y una condición más que surge del hecho que $Det(U) = +1$. Entonces el número de parámetros independientes de U es igual a $2N^2 - N^2 - 1 = N^2 - 1$, el cual es siempre mayor que N.

Por otra parte, dado que un operador unitario se puede escribir como la exponencial de un operador hermitiano, podemos escribir los elementos de $SU(N)$ como

$$U(\alpha) = e^{i\alpha^a t^a}, \quad a = 1, 2, ..., N^2 - 1, \tag{1.27}$$

donde $t^{a\dagger} = t^a$ son los generadores del grupo y α^a sus parámetros. El inverso de $U(\alpha)$ es

$$U^\dagger(\alpha) = (e^{i\alpha^a t^a})^\dagger = e^{-i\alpha^a t^a}. \tag{1.28}$$

Dado que $Det(U) = 1$, esto implica que

$$\begin{aligned} log(DetU) &= TrlogU \\ 0 &= Trt^a, \end{aligned}$$

entonces las t^a forman un conjunto de N^2-1 matrices hermitianas de traza nula. En la representación fundamental, los generadores suelen normalizarse a $Tr(t^a t^b) = \frac{\delta^{ab}}{2}$.

Ahora, sea U(α), U(β) $\in$ SU(N), entonces

$$U(\alpha)U(\beta) = e^{i\alpha^a t^a} e^{i\beta^b t^b}.$$

Usando la identidad, $e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{3!}[[A,B],B]+\cdots}$, se tiene que

$$\begin{aligned} U(\alpha)U(\beta) &= exp\{i(\alpha^a + \beta^a)t^a - \frac{1}{2}\alpha^a\beta^b[t^a, t^b] - \frac{i}{3!}\alpha^a\beta^b\beta^c[[t^a, t^b], t^c] + ...\} \\ &= U(\gamma) \in SU(N), \end{aligned}$$

lo cual es posible si,

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c, \tag{1.29}$$

donde f^{abc} son las constantes de estructura del grupo. Ésta es el álgebra de Lie del grupo $SU(N)$. Analizando más el álgebra de Lie del grupo se encuentra que las constantes de estructura f^{abc} son reales y totalmente antisimétricas.

Representaciones de $SU(N)$

- *Representación fundamental de $SU(N)$*

La representación de dimensión de dimensión N es la más baja del grupo $SU(N)$ y recibe el nombre de representación fundamental. En esta representación los elementos de $SU(N)$ son matrices unitarias $N \times N$, las cuales actúan sobre N-pletes complejos:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{pmatrix}, \tag{1.30}$$

y se transforman como $\varphi' = U\varphi$, o en componentes, $\varphi'^i = U^i_j \varphi^j; \quad i, j, ... = 1, 2, ..., N$. Luego la transformación infinitesimal corresponde a

$$U(\alpha) = \mathbb{1} + i\alpha^a t^a, \tag{1.31}$$

en componentes $U^i_j = \delta^i_j + i\alpha^a(t^a)^i_j$, para α^a infinitesimales. En este caso, $\varphi'^i = \varphi^i + \delta\varphi^i$, entonces $\delta\varphi^i = \varphi'^i - \varphi^i = i\alpha^a(t^a)^i_j\varphi^j$.

- *Representación adjunta*

Sean φ y χ dos N-pletes de $SU(N)$

$$\varphi' = U\varphi, \quad y \quad \chi' = U\chi,$$

entonces

$$\chi'^{\dagger}\varphi' = (U\chi)^{\dagger}(U\varphi) = \chi^{\dagger}(U^{\dagger}U)\varphi = \chi^{\dagger}\varphi$$

es un invariante. Considere las propiedades de transformación del producto externo de dos N-pletes de SU(N), $\varphi_i\chi^{\dagger j}$, el cual es un objeto con N^2 componentes.

$$m_i^j = (\varphi\chi^{\dagger})_i^j \tag{1.32}$$

dado que φ y χ se transforman en la representación fundamental. El objeto m debe transformarse de manera bien definida. En efecto,

$$m' = UmU^{\dagger} \tag{1.33}$$

m es un 2-tensor. La expresión (1.33) es la transformación de similaridad. Luego tomando la traza en ambos lados, se tiene que

$$Trm' = Tr(UmU^{\dagger}) = Tr(U^{\dagger}Um) = Trm, \tag{1.34}$$

el cual es otro invariante, entonces Trm = S es un escalar. Ahora observe que

$$m_i^j = \varphi_i\chi^{\dagger j} - \frac{1}{N}(Trm)\delta_i^j + \frac{1}{N}(Trm)\delta_i^j = M_i^j + \frac{1}{N}(Trm)\delta_i^j,$$

por lo tanto,

$$M = m - \frac{1}{N}(Trm)\mathbb{1}, \tag{1.35}$$

y tiene la propiedad que es de traza nula por construción. Entonces el objeto m que tiene N^2 componentes se ha descompuesto en dos objetos que se transforman bajo $SU(N)$ sin mezclarse. El primero es S con una componente, el cual transforma como $S' = S$; y el segundo es M con $N^2 - 1$ componentes. Se dice que se transforman bajo la representación adjunta de SU(N) como

$$M' = UMU^{\dagger}. \tag{1.36}$$

Dado que M es una matriz $N \times N$ de traza nula, ésta puede ser expresada como combinación lineal de los N^2-1 generadores [2] t^a, de la siguiente manera:

$$M = A^a t^a, \qquad a = 1, ..., N^2 - 1. \tag{1.37}$$

Bajo una transformación infinitesimal

$$M' = UMU^{\dagger} = (\mathbb{1} + i\alpha^a t^a)M(\mathbb{1} - i\alpha^a t^a) = M + i\alpha^a[t^a, M]$$

$$A'^a t^a = A^a t^a + i\alpha^b A^c[t^b, t^c] = A^a t^a + i\alpha^b A^c(if^{abc}t^a)$$

$$\Rightarrow A'^a = A^a + i\alpha^b A^c(if^{abc}). \tag{1.38}$$

[2] El número de componentes de M coincide con el número de generadores y además sabemos que los generadores son de traza nula.

Esto sugiere que se identifiquen los elementos $(T^b)_{ac}$ de un conjunto de N^2-1 matrices T^b de dimensión (N^2-1)x(N^2-1) como

$$(T^b)_{ac} = if^{abc}.$$

Note que $Tr(T^b) = (T^b)_{aa} = if^{aba} = 0$. Además $T^{b\dagger} = T^b$, ya que $(T^{b*})_{ca} = -if^{cba} = -if^{acb} = if^{abc} = (T^b)_{ac}$. Entonces los T^a son los generadores de $SU(N)$ en la representación adjunta. Estos generadores deben de satisfacer:

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c.$$

En resumen, un objeto A= $A^a t^a$, en general con t^a no necesariamente es la representación fundamental, se transforma como

$$\delta A = i\alpha^a[t^a, A], \tag{1.39}$$

en la representación adjunta, y

$$\delta A^a = -f^{abc}\alpha^b A^c. \tag{1.40}$$

1.2. Grupo de Poincaré

Las propiedades del espacio-tiempo plano surgen de los siguientes postulados:

1. Las leyes de la física lucen iguales en todos los marcos de referencia inerciales. Significa que las ecuaciones que representan estas leyes deben tener una estructura covariante, de tal suerte que su forma no cambie cuando se pasa a otro marco inercial o se realiza alguna rotación en el 3-espacio.

2. Existe una velocidad límite en la naturaleza, la cual tiene un valor absoluto c. Sólo las partículas de masa cero se mueven a esta velocidad, como los fotones, los gluones, etc. Este postulado determina la métrica del espacio-tiempo.

Las coordenadas del espacio-tiempo son denotadas por x^0, x^1, x^2 y x^3, donde $x^0 \equiv ct$ es la coordenada temporal y x^i son coordenadas espaciales (i=1, 2, 3.) El 4-vector posición se denota por

$$x^\alpha = (x^0, \vec{x}), \qquad \alpha = 0, i. \tag{1.41}$$

Nos interesa estudiar las propiedades de simetría de los sistemas físicos cuando en el 4-espacio se realizan cierto tipo de transformaciones. Las transformaciones con sentido físico que pueden ser realizadas son:

- Rotaciones en el 3-espacio, son transformaciones ortogonales en los planos: $x^1 - x^2$, $x^1 - x^3$ y $x^2 - x^3$.

- Transformaciones puras de Lorentz (boost), los cuales conectan marcos de referencia inercial en movimiento relativo a lo largo de los ejes x^1, x^2, x^3. Son transformaciones lineales en los planos espacio-temporales , $x^0 - x^1, x^0 - x^2$ y $x^0 - x^3$.

- Transformaciones a lo largo de los 4 ejes.

1.2.1. Grupo de Lorentz

Consideraremos en general las propiedades del grupo de Lorentz homogéneo. Nos concentraremos en los aspectos teóricos del grupo, los cuales ofrecen la oportunidad de comprender mejor el papel central que juega la relatividad espacial la descripción de las partículas elementales.

La transformación más general de Lorentz está dada en términos de transformación de coordenadas conectando dos marcos de referencia inercial, siguiendo la notación usual de la Relatividad Especial, estas transformaciones se definen como

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \tag{1.42}$$

con la condición

$$(x')^2 = (x)^2,$$

expresado por un 4-vector covariante. [11] El cuadrado de un 4-vector es definido por

$$(x)^2 = g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} = x^{\mu} x_{\mu} = (x^0)^2 - (\vec{x})^2, \tag{1.43}$$

donde el tensor métrico $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$, cuya forma es dictada por el segundo postulado, se puede escribir como la matriz 4×4

$$g = \{g_{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.44}$$

Así en el espacio-tiempo los puntos señalan eventos; por ejemplo, el nacimiento (producción) de una partícula al tiempo t_1, en el punto $\vec{x_1}$, y su muerte (decaimiento) al tiempo t_2 en el punto $\vec{x}_2$. Es de interés físico la separación entre eventos, dado por

$$S_{12}^2 = (x_1^0 - x_2^0)^2 - |\vec{x_1} - \vec{x_2}|^2, \tag{1.45}$$

el cual está dictado por el segundo postulado; vemos que la norma no es definida positiva. De acuerdo con esto el intervalo se clasifica en 3 categorías:

- $S_{12}^2 > 0$,
- $S_{12}^2 < 0$,
- $S_{12}^2 = 0$,

cuya interpretación física es la siguiente:

1) $S_{12}^2 > 0$. Es un invariante temporaloide. Siempre es posible encontrar un marco de referencia en el cual $\vec{x_1}' = \vec{x_2}'$ de tal suerte que

$$S_{12}^2 = (x_1^{0'} - x_2^{0'})^2 > 0.$$

Los eventos pueden estar relacionados de manera causal.

2) $S_{12}^2 < 0$. Es un intervalo espacialoide. Siempre es posible encontrar un marco de referencia en el cual $x_1^{0'} = x_2^{0'}$, así que

$$S_{12}^2 = -(\vec{x_1}' - \vec{x_2}')^2 < 0.$$

Los eventos ocurren al mismo tiempo pero en puntos diferentes, no pueden estar relacionados de manera causal.

3) $S_{12}^2 = 0$. Este es un intervalo luzoide. Dichos eventos forman el llamado cono de luz, los cuales son conectados por las partículas que se mueven a la velocidad límite.

Para dos eventos separados infinitesimalmente, podemos escribir

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2. \tag{1.46}$$

Por otro lado la longitud $x^2 = x_\alpha x^\alpha$ es un invariante de Lorentz, de donde se halla que

$$\Lambda^T g \Lambda = g, \tag{1.47}$$

lo que nos dice que Λ es una transformación de Lorentz, si deja invariante g en este sentido. Ahora tomando el determinante a ambos lados, se encuentra que

$$Det(\Lambda) = \pm 1.$$

Las transformaciones con determinante $+1$, se llaman transformaciones propias de Lorentz. Y las transformaciones impropias de Lorentz son de la forma: $\Lambda_p \Lambda$ *ó* $\Lambda_T \Lambda$, con Λ una transformación propia. Un ejemplo de transformaciones impropias son las siguientes:

$$\Lambda_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ó \quad \Lambda_p = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde la primera transformación representa la reflexión espacial y la segunda representa la reversión temporal.

Las propiedades del grupo de Lorentz son dictadas por el álgebra que satisfacen sus generadores. Para determinarlos, necesitamos los 3 boots y las 3 rotaciones. Las matrices que representan a los 3 boost son:

$$\Lambda(\xi_1) = \begin{pmatrix} cosh\xi_1 & -sinh\xi_1 & 0 & 0 \\ -sinh\xi_1 & cosh\xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(\xi_2) = \begin{pmatrix} cosh\xi_2 & 0 & -sinh\xi_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sinh\xi_2 & 0 & cosh\xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.48}$$

$$y \quad \Lambda(\xi_3) = \begin{pmatrix} cosh\xi_3 & 0 & 0 & -sinh\xi_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -sinh\xi_3 & 0 & 0 & cosh\xi_3 \end{pmatrix}.$$

Las matrices que representan a las 3 rotaciones son:

$$\Lambda(\theta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos\theta_1 & sin\theta_1 \\ 0 & 0 & -sin\theta_1 & cos\theta_1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(\theta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta_2 & 0 & -sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & sin\theta_2 & 0 & cos\theta_2 \end{pmatrix}, \tag{1.49}$$

$$y \quad \Lambda(\theta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta_3 & sin\theta_3 & 0 \\ 0 & -sin\theta_3 & cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego los generadores estan dados por:

$$K_i = \frac{1}{i}\frac{d\Lambda(\xi_i)}{d\xi_i}|_{\xi_i=0} \quad y \quad J_i = \frac{1}{i}\frac{d\Lambda(\theta_i)}{d\theta_i}|_{\theta_i=0}. \tag{1.50}$$

Se puede mostrar que

$$J_i^\dagger = J_i \quad y \quad K_i^\dagger = -K_i. \tag{1.51}$$

Un cálculo directo muestra que

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k, \tag{1.52}$$
$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk} J_k, \tag{1.53}$$

lo que indica que los boost no forman un grupo, y finalmente que

$$[J_i, K_i] = i\epsilon_{ijk} K_k. \tag{1.54}$$

Defínase los siguientes generadores:

$$\left.\begin{matrix} A_i = \frac{1}{2}(J_i + iK_i) \\ B_i = \frac{1}{2}(J_i - iK_i) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} A_i^\dagger = A_i \\ B_i^\dagger = B_i \end{matrix}. \tag{1.55}$$

Entonces

$$[A_i, A_j] \;=\; i\epsilon_{ijk} A_k \to SU(2), \tag{1.56}$$
$$[B_i, B_j] \;=\; i\epsilon_{ijk} B_k \to SU(2), \tag{1.57}$$
$$[A_i, B_j] \;=\; 0 \to SU(2) \times SU(2). \tag{1.58}$$

Por otro lado las transformaciones de Lorentz son de hecho los elementos del grupo de Lorentz $SO(1,3)$. Comparando esto con las reglas de conmutación de $SU(2)$, vemos que tenemos dos copias de $SU(2)$. El hecho que podamos escribir el grupo de Lorentz como dos copias de $SU(2)$ es relevante para encontrar sus representaciones, ya que las representaciones de $SU(2)$ son bien conocidas. Esto es sólo cierto en dimensión 1+3 del espacio-tiempo.

- **Representación espinoral del grupo de Lorentz**

Encontrar las representaciones del grupo de Lorentz $SO(1,3)$, es equivalente a encontrar las representaciones del grupo $SU(2) \times SU(2)$. Sabemos que las representaciones de $SU(2)$ son especificadas por un valor $j = 0, 1/2, 3/2, \cdots$, con $2j+1$ la dimensión de la representación. Por lo tanto, la representación del grupo de Lorentz en dimensión 1+3 será especificada por 2 valores de j, uno por cada copia de SU(2). En otras palabras, una representación dada de $SO(1,3)$, puede ser especificada por un doblete (j, j'), donde j corresponde a un $SU(2)$ y j' corresponde al otro grupo $SU(2)$. Debido a que la representación j de $SU(2)$ esta formada por matrices $(2j+1) \times (2j+1)$, la representcaión (j, j') del grupo de Lorentz $SO(1,3)$ estará formada por matrices $(2j+1)(2j'+1) \times (2j+1)(2j'+1)$ [12]. La forma en que se construyen las diversas representaciones sigue la regla de la suma de momento angular.

El campo de Dirac

Se discute la representación espinorial en el contexto del grupo de Lorentz $SO(1,3)$, el cual, aparte de la métrica, coincide esencialmente con el grupo ortogonal $SO(4)$. Dicha representación es conocida como representación espinorial de Dirac.

Una representación del grupo $SO(1,3)$ se entiende como un conjunto de matrices $D(\Lambda)$ que satisface la ley de multiplicación del grupo

$$D(\bar{\Lambda})D(\Lambda) = D(\bar{\Lambda}\Lambda),$$

donde

$$D(\Lambda) = e^{\frac{i}{2} w_{\mu\nu} S^{\mu\nu}}, \tag{1.59}$$

con $S^{\mu\nu}$ los generadores del grupo en dicha representación. Sea la transformación infinitesimal de Lorentz

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + w^{\mu}_{\nu}; \qquad w_{\mu\nu} = -w_{\nu\mu}, \tag{1.60}$$

para la cual

$$D(\Lambda) = \mathbb{1} + \frac{i}{2} w_{\mu\nu} S^{\mu\nu}; \qquad S^{\mu\nu} = -S^{\nu\mu}. \tag{1.61}$$

Como ya se dijo, el conjunto de matrices $S^{\mu\nu}$ son los generadores del grupo, los cuales satisface el álgebra de Lie del grupo de Lorentz, dada por

$$i[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] = g^{\nu\rho} S^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} S^{\nu\sigma} - g^{\sigma\mu} S^{\rho\nu} + g^{\sigma\nu} S^{\rho\mu}. \tag{1.62}$$

Para construir los generadores asuma que existen matrices γ^{μ} (μ= 0, 1, 2 y 3) que satisfacen el álgebra de Clifford,

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu}, \tag{1.63}$$

de tal suerte que los generadores de la representación espinorial son:

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}] = -S^{\nu\mu}. \tag{1.64}$$

Un cálculo directo muestra que

$$[S^{\mu\nu}, \gamma^{\rho}] = -i(g^{\nu\rho}\gamma^{\mu} - g^{\mu\rho}\gamma^{\nu}). \tag{1.65}$$

También se puede demostrar que $S^{\mu\nu}$ satisface el álgebra de Lorentz. Por otra parte, se puede demostrar que

$$D(\Lambda)\gamma^{\rho} D^{-1}(\Lambda) = \Lambda^{\rho}_{\mu}\gamma^{\mu} \tag{1.66}$$

lo que nos dice que γ^{μ} se transforma como un 4-vector en el mismo sentido que $D(\Lambda)\mathbb{1}D^{-1}(\Lambda) = \mathbb{1}$ es un escalar. Por otra parte se puede demostrar que

$$D(\Lambda)S^{\rho\sigma}D^{-1}(\Lambda) = (\delta^{\rho}_{\mu}\delta^{\sigma}_{\nu} + \delta^{\sigma}_{\nu} w^{\rho}_{\nu} + \delta^{\rho}_{\nu} w^{\sigma}_{\mu})S^{\mu\nu},$$

que es justo la versión infinitesimal de

$$D(\Lambda)S^{\rho\sigma}D^{-1}(\Lambda) = \Lambda^{\rho}_{\mu}\Lambda^{\sigma}_{\nu}S^{\mu\nu}. \tag{1.67}$$

La representación espinorial tiene una transformación de paridad que se toma como $\beta = \gamma^0$. Del álgebra de Clifford se concluye que

$$\beta^{-1} = \beta. \tag{1.68}$$

Así, para las matrices de Dirac, se tiene que $\beta\gamma^{\mu}\beta^{-1}$ se transforma como sigue:

$$\begin{array}{rcl} \beta\gamma^{i}\beta^{-1} & = & -\gamma^{i}, \\ \beta\gamma^{0}\beta^{-1} & = & \gamma^{0}. \end{array} \tag{1.69}$$

En particular, bajo paraidad los generadores se transforman como

$$\beta S^{ij}\beta^{-1} = S^{ij} \quad y \quad \beta S^{0i}\beta^{-1} = -S^{0i}. \tag{1.70}$$

Por otro lado, en un espacio 4-dimensional los tensores totalmente antisimétricos no pueden tener más de 4 índices. La regla es la siguiente: Un tensor con N índices en D dimensiones tiene un número de componentes independientes igual a $\frac{D!}{N!(D-N)!}$, así γ^μ tiene 4 componentes independientes ya que $D = 4$ y $N = 1$, entonces las γ^μ deben ser matrices 4×4. De manera general, en cualquier espacio tiempo de dimensión D, uno puede formar tensores antisimétricos con un número de índices igual a $0, 1, 2, ..., D$; los cuales tienen conjuntamente un número de componentes independientes igual a

$$\sum_{N=0}^{D} \frac{D!}{N!(D-N)!} = 2^D. \tag{1.71}$$

Así que las matrices γ^ρ deben tener $2^{\frac{D}{2}}$ renglones y $2^{\frac{D}{2}}$ columnas.

Volviendo al 4-espacio, una representación conveniente de las matrices de Dirac es

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad y \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.72}$$

con 0, $\mathbb{1}$ matrices 2×2 y σ^i las matrices de Pauli.[3] Esta es la llamada representación de Dirac. Note que

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0 \quad y \quad \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i \qquad \Rightarrow \gamma^{\mu\dagger} = \gamma_\mu, \tag{1.73}$$

ya que no es posible construir una representación hermítica, dado que implicaría que el grupo de Lorentz admite representaciones unitarias, lo cual no es posible. En esta representación, los generadores espaciales toman la forma

$$S^{ij} = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}. \tag{1.74}$$

Y los generadores de boost son de la forma

$$S^{0i} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.75}$$

Por otro lado, como sabemos si el espacio tiene dimensión par, existe otra matriz independiente. Sea

$$\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{1}{4!}\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\rho, \tag{1.76}$$

la cual, mediante un cálculo directo, se puede probar que es hermítica. En la representación de Dirac γ_5 es dada por

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.77}$$

Además, dado que

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \Rightarrow [\gamma^5, S^{\mu\nu}] = 0. \tag{1.78}$$

De esta relación se obtine que bajo transformaciones de Lorentz se transforma como un 0-tensor, $D(\Lambda)\gamma^5 D^{-1}(\Lambda) = \gamma^5$, mientras que bajo paridad se transforma como $\beta\gamma^5\beta^{-1} = \gamma^0\gamma^5\gamma^0 = -\gamma^5$. De donde concluimos que es un seudo-escalar, ya que cambia de signo bajo paridad.

[3] Dichas matrices son: $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ y $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ahora, sea el campo con 4 componentes

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix}.$$

$\psi(x)$ es un campo espinorial, el cual se transforma en la representación espinorial de $SO(1,3)$ de la forma

$$\psi(x) = D(\Lambda)\psi(x). \tag{1.79}$$

Un aspecto importante es como podemos multiplicar un par de espinores para formar un escalar. Uno podría pensar que $\psi^\dagger\psi$ es un escalar, de la siguiente manera:

$$\psi'^\dagger\psi' = \psi^\dagger D^\dagger(\Lambda)D(\Lambda)\psi = \psi^\dagger\psi,$$

y esto sería cierto si $D^\dagger(\Lambda) = D^{-1}(\Lambda)$, pero como habíamos dicho antes esto no es posible ya que el grupo de Lorentz no admite representaciones unitarias, y la matriz $D(\Lambda)$ que representa a los boost no es unitaria, porque $S^{ij\dagger} = S^{ij}$, para este caso D es unitaria, pero $S^{0i\dagger} = -S^{0i}$ y en este caso la D no es unitaria. Por lo tanto no se pueden construir objetos covariantes con $\psi^\dagger$. La solución del problema consiste en introducir el siguiente objeto

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0. \tag{1.80}$$

Bajo una transformación infinitesimal, tenemos

$$\bar{\psi}' = \psi^\dagger[\mathbb{1} - \frac{i}{2}w_{\mu\nu}S^{\mu\nu}]\gamma^0. \tag{1.81}$$

Si μ y ν son espaciales entonces $\bar{\psi}' = \bar{\psi}D^{-1}(\Lambda)$. Por otra parte, cuando por ejemplo μ=0 y ν espacial, tenemos $(S^{\mu\nu})^\dagger = -S^{\mu\nu}$, pero en este caso se puede demostrar que $(S^{\mu\nu})^\dagger\gamma^0 = \gamma^0 S^{\mu\nu}$. De donde finalmente se obtiene que

$$\bar{\psi}' = \bar{\psi}D^{-1}(\Lambda). \tag{1.82}$$

Por lo tanto

$$\bar{\psi}'\psi' = \bar{\psi}\psi,$$

es un invariante de Lorentz. En particular si $D(\Lambda) = \beta \Rightarrow \bar{\psi}'\mathbb{1}\psi' = \bar{\psi}'\beta\mathbb{1}\beta\psi' = \bar{\psi}\psi$.

Luego en lugar de tomar $S^{\mu\nu}$, suele usarse para construir invariantes

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \tag{1.83}$$

Todos estos objetos son covariantes bajo SO(1,3).

1.2.2. Grupo de Translaciones

La transformación continua más general en el espacio-tiempo consta de una transformación de Lorentz más una translación, definida como

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\nu, \tag{1.84}$$

con a^μ un 4-vector constante. Considere dos transformaciones sucesivas, así que

$$x''^\mu = \bar{\Lambda}^\mu_\rho x'^\rho + \bar{a}^\mu = \bar{\Lambda}^\mu_\rho(\Lambda^\rho_\nu x^\nu + a^\rho) + \bar{a}^\mu = (\bar{\Lambda}\Lambda)^\mu_\nu x^\nu + (\bar{\Lambda}a)^\mu + \bar{a}^\mu.$$

Por otro lado, recuérdese que las transformaciones de Lorentz son aquellas que satisfacen $\Lambda^T g\Lambda = g$, así que

$$(\bar{\Lambda}\Lambda)^T g(\bar{\Lambda}\Lambda) = \Lambda^T(\bar{\Lambda}^T g\bar{\Lambda})\Lambda = \Lambda^T g\Lambda = g,$$

también es una transformación de Lorentz. Entonces, sea $D(\Lambda, a)$ una representación del grupo de Poincaré, entonces debe cumplirse la regla de composición

$$D(\bar{\Lambda}, a)D(\Lambda, a) = D(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda}a + \bar{a}). \tag{1.85}$$

Ahora considere una transformación infinitesimal

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + w^\mu_\nu \quad y \quad a^\mu = \epsilon^\mu, \tag{1.86}$$

donde w^μ_ν y ϵ^μ son infinitesimales. Mientras que la condición de Lorentz $g_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\rho\Lambda^\nu_\sigma = g_{\rho\sigma}$, toma la forma

$$g_{\mu\nu}(\delta^\mu_\rho + w^\mu_\rho)(\delta^\nu_\sigma + w^\nu_\sigma) = g_{\rho\sigma},$$

esto es

$$g_{\rho\sigma} + w_{\rho\sigma} + w_{\sigma\rho} = g_{\rho\sigma}, \tag{1.87}$$

entonces $w_{\rho\sigma} = -w_{\sigma\rho}$ es totalmente antisimétrico. En este caso $w_{\mu\nu}$ tiene 6 componentes independientes, y ϵ^μ tiene 4 componentes independientes. Por lo tanto vemos que el grupo de Poincaré tiene 10 parámetros. Para una transformación infinitesimal, la representación D puede ser escrita como

$$D(1 + w, \epsilon) = \mathbb{1} + \frac{i}{2}w_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - i\epsilon_\mu P^\mu, \tag{1.88}$$

donde $J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}$ dada la antisimetría de $w_{\mu\nu}$. Los $J^{\mu\nu}$ son los generadores del grupo de Lorentz y los P^μ representan a los generadores del grupo de las translaciones. Examinemos las propiedades de transformación bajo el grupo de $J^{\mu\nu}$ y P^μ. Para tal fin se considera el producto

$$D(\Lambda, a)D(1 + w, \epsilon)D^{-1}(\Lambda, a),$$

donde Λ y a son los parámetros de una transformación finita, que no está relacionada con la transformación infinitesimal. Pero antes de acuerdo con la regla de composición

$$D^{-1}(\Lambda, a) = D(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a).$$

Por lo tanto haciendo el álgebra se obtiene que

$$D(\Lambda, a)D(1 + w, \epsilon)D^{-1}(\Lambda, a) = D(1 + \Lambda w\Lambda^{-1}, \Lambda\epsilon - \Lambda w\Lambda^{-1}a).$$

Haciendo un desarrollo a primer orden en w y ϵ, tenemos lo siguiente:

$$D(\Lambda, a)[\mathbb{1} + \frac{i}{2}w_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - i\epsilon_\rho P^\rho]D^{-1}(\Lambda, a) = \mathbb{1} + \frac{i}{2}(\Lambda w\Lambda^{-1})_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - i(\Lambda\epsilon - \Lambda w\Lambda^{-1}a)_\mu P^\mu,$$

esto es,

$$D(\Lambda, a)[\frac{1}{2}w_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - \epsilon_\rho P^\rho]D^{-1}(\Lambda, a) = \frac{1}{2}w_{\rho\sigma}\Lambda^\rho_\mu\Lambda^\sigma_\nu J^{\mu\nu} + \frac{1}{2}w_{\rho\sigma}\Lambda^\rho_\mu\Lambda^\sigma_\nu(a^\nu P^\mu - a^\mu P^\nu) - \epsilon_\rho\Lambda^\rho_\mu P^\mu.$$

De esta manera igualando coeficientes de $w_{\rho\sigma}$ y ϵ_ρ, se llega a las siguientes relaciones:

$$D(\Lambda, a)J^{\rho\sigma}D^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda^\rho_\mu\Lambda^\sigma_\nu(J^{\mu\nu} - a^\mu P^\nu + a^\nu P^\mu) \tag{1.89}$$

$$D(\Lambda, a)P^\rho D^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda^\rho_\mu P^\mu \tag{1.90}$$

Para a^{μ} =0, estas ecuaciones muestran que $J^{\mu\nu}$ es un 2-tensor y P^{μ} es un 1-tensor. Y para translaciones puras ($\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$), estas ecuaciones nos dicen que P^{μ} es un invariante bajo translaciones, pero no $J^{\rho\sigma}$. Ahora bien asuma que las transformaciones $D(\Lambda, a)$ son infinitesimales, así que la ecuación (1.89) toma la forma

$$[\mathbb{1} + \frac{i}{2}w_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - i\epsilon_{\mu}P^{\mu}]J^{\rho\sigma}[\mathbb{1} - \frac{i}{2}w_{\mu\nu}J^{\mu\nu} + i\epsilon_{\mu}P^{\mu}] = (\delta^{\rho}_{\mu} + w^{\rho}_{\mu})(\delta^{\sigma}_{\nu} + w^{\sigma}_{\nu})(J^{\mu\nu} - \epsilon^{\mu}P^{\nu} + \epsilon^{\nu}P^{\mu}).$$

Haciendo las cuentas se llega a

$$\frac{i}{2}w_{\mu\nu}[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] - i\epsilon_{\mu}[P^{\mu}, J^{\rho\sigma}] = \frac{1}{2}w_{\mu\nu}(g^{\rho\nu}J^{\mu\sigma} - g^{\rho\mu}J^{\nu\sigma}) - \frac{1}{2}w_{\mu\nu}(g^{\sigma\mu}J^{\rho\nu} - g^{\sigma\nu}J^{\rho\mu}) + \epsilon_{\mu}(g^{\sigma\mu}P^{\rho} - g^{\rho\mu}P^{\sigma}).$$

Igualando coeficientes de $w_{\mu\nu}$ y ϵ_{μ} nuevamente, se halla que

$$\begin{aligned} i\,[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= g^{\rho\nu}J^{\mu\sigma} - g^{\rho\mu}J^{\nu\sigma} - g^{\sigma\mu}J^{\rho\nu} + g^{\sigma\nu}J^{\rho\mu} && (1.91) \\ i\,[P^{\mu}, J^{\rho\sigma}] &= (g^{\mu\rho}P^{\sigma} - g^{\mu\sigma}P^{\rho}) && (1.92) \end{aligned}$$

Por otra parte, la ecuación (1.90) toma la forma

$$[\mathbb{1} + \frac{i}{2}w_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - i\epsilon_{\mu}P^{\mu}]P^{\rho}[\mathbb{1} - \frac{i}{2}w_{\mu\nu}J^{\mu\nu} + i\epsilon_{\mu}P^{\mu}] = (\delta^{\rho}_{\mu} + w^{\rho}_{\mu})P^{\mu},$$

la cual conduce a

$$\frac{i}{2}w_{\mu\nu}[J^{\mu\nu}, P^{\rho}] - i\epsilon_{\mu}[P^{\mu}, P^{\rho}]\rho = \frac{1}{2}w_{\mu\nu}(g^{\rho\nu}P^{\mu} - g^{\rho\mu}P^{\nu}).$$

De donde finalmente se concluye que

$$[P^{\mu}, P^{\rho}] = 0; \tag{1.93}$$

lo que nos dice que el grupo de las translaciones es conmutativo. Las ecs. (1.91,1.92,1.93) representan el álgebra de Lie del grupo de Poincaré $ISO(1,3)$.

Capítulo 2

Rompimiento espontáneo de una simetría continua

En el modelo estándar las teorías aceptadas son teorías de Gauge (norma) y qué significa esto, que existe una simetría que tiene invariancia de norma. Así la lagrangiana que describe al sistema es invariante de norma, es decir, es invariante bajo la acción del grupo de Lie en consideración. Desde el punto de vista cuántico, el campo de norma se manifiesta mediante partículas bosónicas sin masa, y es precisamente en la parte donde la teoría no concuerda con la realidad, ya que como sabemos las partículas mediadoras de la interacción débil son partículas masivas. Por lo tanto, necesitamos un mecanismo en el cual podamos dotar de masa a estas partículas, pero sin destruir la simetría de la lagrangiana. Al tratar de dar solución a este problema, en 1964 el escocés Peter Ware Higgs encontró un método para dotar de masa a estas partículas sin romper la simetría local con la que cuenta la teoría de norma. Dicho rompimiento permite obtener la masa de las partículas sin que ocurre un rompimiento expícito de la simetría de norma de la teoría [10].

En teorías de norma, no podemos definir el término de masa de un campo de norma, el cual está definido por

$$\frac{1}{2}m^2 A_\mu^a A_a^\mu, \tag{2.1}$$

ya que no es invariante bajo transformaciones de norma, dadas por

$$A'_\mu(x) = U(x)A_\mu(x)U^\dagger(x) + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^\dagger,$$

con

$$A_\mu \equiv T^a A_\mu^a, \tag{2.2}$$

donde U(x) es un elemento del grupo en consideración (unitario u ortogonal). El rompimiento espontáneo de una simetría permite definir la masa para algunos o todos los campos de norma $A_\mu^a(x)$ mediante el así llamado mecanismo de Higgs.

Sea G un grupo de Lie (orotgonal u unitario) y H un subgrupo. Luego sea $\phi(x)$ un multiplete de campos escalares en alguna representación de G. El rompimiento espontáneo de G en H, denotado por $G \to H$, consiste en la elección de una dirección particular $\phi_0 = \text{cte}$ (no depende de las cooordenadas) en el espacio de configuración tal que $H \subset G$ tiene por elementos $U(g)$, que dejan invariante ϕ_0, es decir,

$$U(g)\phi_0 = \phi_0. \tag{2.3}$$

Note que existirán $U(g) \in G$, pero $U(g) \notin H$, tales que

$$U(g)\phi_0 \neq \phi_0.$$

El rompimiento espontáneo consiste en elegir una dirección especial en el espacio en el que aparece la representación del grupo, en este caso el grupo electrodébil, dada por los campos escalares que no es invariante bajo el grupo completo, sino sólo por un subgrupo de éste, el grupo electromagnético en el caso que nos coupa. El teorema de Goldstone sintetiza lo que ocurre cuando se rompe espontáneamente una simetría continua global, es decir, que no depende de los puntos de espacio-tiempo. Mientras que el mecanismo de Higgs caracteriza este mismo fenómeno pero cuando el rompimiento espontáneo se realiza en una teoría local, esto es, en una teoría de norma. Ambos fenómenos serán discutidos a continuación.

Sea la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - V(\phi^\dagger, \phi), \tag{2.4}$$

con V$(\phi^\dagger, \phi) = (\phi^\dagger \phi) + \lambda(\phi^\dagger \phi)^2$, $\lambda > 0$, real. La existencia de un rompimiento espontáneo depende de un estado de mínima energía degenerado, el cual surge de la siguiente manera

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_i} = 0 \Rightarrow [\mu^2 + 4\lambda(\phi^\dagger \phi)]\phi^i = 0. \tag{2.5}$$

Tenemos dos posibilidades,

- $\phi_0 = 0$.
- $\mu^2 < 0 \Rightarrow \phi^\dagger \phi = \frac{\mu^2}{4\lambda} \equiv v^2$.

En el segundo caso, notamos que el conjunto de puntos que cumplen dicha condición, coincide precisamente con los puntos de una esfera, los cuales están conectados por G. Pero la teoría debe desarrollarse en el entorno de un ϕ_0. Así, dependiendo de cómo se elija ϕ_0 es lo que determina H. La elección de un ϕ_0 particular es lo que significa romper espontánemente el grupo G al grupo H. El campo ϕ(x) en $\mathcal{L}$ es remplazado por

$$\phi \to \phi_0 + \phi(x). \tag{2.6}$$

Este hecho no destruye la invariancia de $\mathcal{L}$ bajo G. Esto es importante: la lagrangiana de la teoría sigue siendo invariante bajo G, lo único que no es invariante bajo este grupo es el vector ϕ_0.

Ahora, si $U(g) \in H$, entonces

$$U(g)\phi_0 = \phi_0 \Rightarrow [\mathbb{1} + i\alpha^a T^a + \cdots]\phi_0 = \phi_0, \tag{2.7}$$

lo que indica que $T^a \phi_0 = 0$. Se dice que los generadores de H no están rotos. Por el contrario si $U(g) \in G$, implica que

$$U(g)\phi_0 \neq \phi_0 \Rightarrow T^a \phi_0 \neq 0,$$

donde T^a son los generadores de G que están rotos.

Como veremos a continuación, si la simetría es global, por cada generador roto aparece un bosón de Goldstone, el cual es un campo escalar sin masa, este es el teorema de Goldstone. Si G es local, los bosones de Goldstone se incorporan a los campos de norma asociados con los generadores rotos para formar el estado de polarización longitudinal del campo de norma en consideración, esto es el mecanismo de Higgs.

2.1. El Teorema de Goldstone

El teorema de Goldstone establece que si una simetría global se rompe de forma espontánea, aparecen partículas escalares sin masa. Así, existe una partícula escalar, denominada bosón de

Goldstone, por cada generador de la simetría que se rompe. Este mecanismo es el rompimiento espontáneo de una simetría global, en cual involucra un multiplete de escalares dado en alguna representación del grupo. Tomando una lagrangiana renormalizable, que sea invariante bajo dicho grupo, hallamos que en ciertos puntos tenemos un mínimo del potencial. Una vez hallados los puntos extremos, al tomar una dirección en particular es cuando rompemos la simetría. Y como ya se dijo, por cada generador roto debe existir un escalar de masa cero, llamado bosón de Glodstone. Existe, además, un campo escalar con masa en reposo que corresponde a una excitación a lo largo de la dirección especial que se ha elegido al romper espontáneamente la simetría; este campo recibe el nombre de bosón de Higgs.

Para ilustrar las ideas esenciales atrás del rompimiento espontáneo de una simetría, se considerará un caso específico. Se trata de romper espontáneamente el grupo $SO(3)$ en el grupo $SO(2)$. Para ello considere el triplete de $SO(3)$ de campos escalares

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \varphi_3(x) \end{pmatrix},$$

donde los campos $\varphi_i(x)$ son campos reales. Bajo $SO(3)$

$$\varphi'(x) = O(\theta)\varphi(x); \qquad O(\theta) = e^{i\theta^a T^a} \in SO(3). \tag{2.8}$$

La siguiente lagrangiana renormalizable es un invariante de Lorentz y bajo $SO(3)$ global

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^\dagger (\partial^\mu \varphi) - V(\varphi^\dagger \varphi),$$

con

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}\mu^2(\varphi^T \varphi) + \lambda(\varphi^T \varphi)^2,$$

donde λ >0, $\lambda \in \mathbb{R}$, V es el potencial escalar (potencial de Higgs si $\mu^2 < 0$). Los puntos extremos del potencial son dados por

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_i} = [\mu^2 + 4\lambda(\varphi^\dagger \varphi)]\varphi_i = 0,$$

si $\mu^2 > 0$, entonces el mínimo ocurre en φ_i=0; en este caso, μ corresponde a la masa de los campos φ_i. Un caso mucho más interesante ocurre si $\mu^2 < 0$, pues existe un número infinito de punto que satisfacen la condición de extremo

$$\varphi^\dagger \varphi = \frac{-\mu^2}{4\lambda} \equiv v^2,$$

esto es,

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = v^2, \tag{2.9}$$

dado que $\lambda > 0$, V (y por tanto, la energía) es un mínimo en todos los puntos de esta superficie esférica. Lo que quiere decir que el estado base es degenerado, con grado de degeneración infinito no numerable. Note que la esfera es un invariante de $SO(3)$. En efecto, sean φ_0 los puntos de la esfera, entonces $\varphi_0' = O\varphi_0$ el cual es otro punto de la esfera. Se debe de elegir una dirección en particular caracterizada por algún punto de esta esfera, notando siempre que todos los puntos son equivalentes en el sentido de que están relacionados por el grupo de simetría. Romper espontáneamente $SO(3)$ significa elegir una dirección particular (un punto de la esfera). Que dirección φ_0 elegir lo determina la teoría física. En este caso tómese

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Los elementos de $SO(2)$ son los elementos de $SO(3)$ tales que dejan invariante a φ_0, es decir,

$$O(\theta_3)\varphi_0 = \varphi_0.$$

Dichos elementos son las matrices de la forma

$$O(\theta_3) = \begin{pmatrix} cos\theta_3 & -sin\theta_3 & 0 \\ sin\theta_3 & cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De esta manera, $SO(3)$ es roto espontáneamente a $SO(2)$. Observamos que

$$\begin{aligned} O(\theta_3)\varphi_0 &= \varphi_0 \\ [\mathbb{1} + \theta_3 T_3 + \cdots]\,\varphi_0 &= \varphi_0 \Rightarrow T_3\varphi_0 = 0, \end{aligned}$$

de esta manera se dice que el generador T_3 no está roto. Dado que con $O(\theta_a) = e^{i\theta_a T_a}$, lo cual con $a \neq 3$, se convierte en

$$e^{i\theta_a T_a}\varphi_0 \neq \varphi_0 \Rightarrow T_a\varphi_0 \neq 0,$$

implica que los generadores T_1 y T_2 están rotos.

Ahora, desarrollando la teoría en el entorno de φ_0 mediante la traslación

$$\varphi(x) \to \varphi_0 + \varphi(x),$$

se tiene,

$$\begin{aligned} \varphi_0 + \varphi &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \varphi_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v + \varphi_3(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v + h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi_h + \varphi_g; \qquad con\ \varphi_h^\dagger\varphi_g = 0. \end{aligned}$$

De donde resulta que el potencial toma la forma

$$V = \frac{1}{2}\mu^2(\varphi_h + \varphi_g)^\dagger(\varphi_h + \varphi_g) + \lambda[(\varphi_h + \varphi_g)^\dagger(\varphi_h + \varphi_g)]^2,$$

pero $\mu^2 = -4\lambda v^2$. Después de hacer el álgebra se llega a lo siguiente

$$V = \lambda[2(-v^2 + \varphi_h^\dagger\varphi_h)\varphi_g^\dagger\varphi_g + (\varphi_h^\dagger\varphi_h - 2v^2)\varphi_h^\dagger\varphi_h + (\varphi_g^\dagger\varphi_g)^2].$$

Los términos de masa se identifican con las partes cuadráticas en los campos. Una posible masa para φ_1 y φ_2 solo puede surgir de

$$(-v^2 + \varphi_h^\dagger\varphi_h)\varphi_g^\dagger\varphi_g = [-v^2 + (v + h^2)](\varphi_1^2 + \varphi_2^2) = 2vh(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \cdots$$

Entonces φ_1 y φ_2 tiene masa cero, por lo que reciben el nombre de bosones de Goldstone. Como ya se había señalado anteriormente siempre aparece uno por cada generador roto. El término de donde puede surgir un término de masa para el campo h es

$$(\varphi_h^\dagger\varphi_h - 2v^2)\varphi_h^\dagger\varphi_h = [(v + h)^2 - 2v^2](v + h)^2 = 4v^2h^2 + 4vh^3 + h^4 - v^4.$$

Haciendo un poco de álgebra se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu h)(\partial^\mu h) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_1)(\partial^\mu\varphi_1) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_2)(\partial^\mu\varphi_2) \\ &\quad -\lambda[2vh(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + 2h^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2 - v^4 + 4v^2h^2 + 4vh^3 + h^4]. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}_h = \frac{1}{2}(\partial_\mu h)(\partial^\mu h) - \frac{1}{2}m_h^2 h^2 - 4v\lambda h^3 - \lambda h^4,$$

con $m_h^2 = 8\lambda v^2$, entonces $\lambda = \frac{m_h^2}{8v^2}$. Finalmente

$$\mathcal{L}_h = \frac{1}{2}(\partial_\mu h)(\partial^\mu h) - \frac{1}{2}m_h^2 h^2 - \frac{m_h^2}{2v}h^3 - \frac{m_h^2}{8v^2}h^4.$$

Note que los bosones de Goldstone se transforman covariantemente bajo $SO(2)$. Los bosones de Goldstone siempre aparecen en una representación del subgrupo H. Este es un resultado general. El campo masivo h, llamado bosón de Higgs, se transforma trivialmente bajo $SO(2)$.

2.2. El mecanismo de Higgs

Cuando la teoría considerada en el punto anterior es de norma, es decir, cuando es invariante bajo transformaciones locales del grupo en consideración, los campos de norma adquieren masa mediante la absorción de los bosones de Goldstone, de tal suerte que éstos desaparecen de la teoría para incorporarse como un grado de libertad extra de los campos de norma, grado de libertad que corresponde a la masa de la partícula. La partícula de Higgs queda como el único remanente físico del multiplete de escalares introducido en la teoría para implementar el rompimiento espontáneo de la simetría.

Asúmase ahora que el grupo $SO(3)$ actua localmente, esto es,

$$O(\theta) = e^{i\theta^a(x)T^a} \equiv U(x). \tag{2.11}$$

La teoría invariante es ahora

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(D_\mu\varphi)^\dagger(D^\mu\varphi) - V(\varphi^\dagger,\varphi) - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}, \tag{2.12}$$

donde $D_\mu = \partial_\mu - igT^aA^a_\mu$ es la derivada covariante y $F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\epsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu$ la curvatura del grupo. En particular, en la representación de triplete

$$(D_\mu\varphi)^a = \mathcal{D}^{ab}_\mu\varphi_b,\ con\ \mathcal{D}^{ab}_\mu = \delta^{ab}\partial_\mu - g\epsilon^{abc}A^c_\mu.$$

Asumiendo que la teoría presenta rompimiento espontáneo ($\mu^2 < 0$), debemos tomar

$$\varphi \to \varphi_0 + \varphi, \quad con \quad \varphi_0 = \begin{pmatrix}0\\0\\v\end{pmatrix} \quad y \quad \varphi = \begin{pmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\\h\end{pmatrix}.$$

Nada cambia en V$(\varphi^\dagger,\varphi)$, con respecto a cuando la teoría es global. Pero en el sector cinético se generan resultados interesantes, como se verá a continuación. Tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_k &= \frac{1}{2}[D_\mu(\varphi_0+\varphi)]^\dagger[D^\mu(\varphi_0+\varphi)] \longrightarrow \frac{1}{2}(D_\mu\varphi_0)^\dagger(D^\mu\varphi_0)\\ &= \frac{1}{2}g^2\epsilon^{abd}\epsilon^{ace}A^d_\mu A^{e\mu}\varphi^b_0\varphi^c_0 = \frac{g^2v^2}{2}(A^1_\mu, A^2_\mu)\begin{pmatrix}A^{1\mu}\\A^{2\mu}\end{pmatrix},\end{aligned}$$

el cual se transforma covariantemente bajo $SO(2)$ justo como $\begin{pmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\end{pmatrix}$. Y esto muestra que los campos asociados con los generadores rotos T^1 y T^2 adquieren masa, con $m_A = gv$, es decir,

$$\frac{1}{2}m_A^2(A^1_\mu, A^2_\mu)\begin{pmatrix}A^{1\mu}\\A^{2\mu}\end{pmatrix}.$$

Ahora, defínase los campos complejos

$$A_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 \mp iA_\mu^2),$$

lo que implica que:

$$\begin{aligned} A_\mu^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^+ + A_\mu^-) \\ A_\mu^2 &= \frac{i}{\sqrt{2}}(A_\mu^+ - A_\mu^-). \end{aligned}$$

Entonces, el término de masa toma la siguiente forma $m_A^2 A_\mu^- A^{+\mu}$, la cual es invariante bajo $U(1) \sim SO(2)$. Observe que el campo de norma A_μ^3 asociado al generador no roto de $SO(3)$ permanece sin masa.

Por otra parte, defínase

$$G^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 \mp i\varphi_2).$$

Un desarrollo explícito del sector cinético usando las relaciones anteriormente definidas, conduce a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\mathcal{D}_\mu^{ab}\varphi_b)(\mathcal{D}^{ac\mu}\varphi_c) &= (D_\mu G^+)^\dagger(D^\mu G^+) + \frac{1}{2}(\partial_\mu h)(\partial^\mu h) + ig\varphi_3[A_\mu^+(D^\mu G^+)^\dagger \\ &\quad -A_\mu^-(D^\mu G^+)] + g^2\varphi_3^2 A_\mu^- A^{+\mu} + ig(\partial_\mu\varphi_3)(G^+A^{-\mu} + G^-A^{+\mu}) \\ &\quad -\frac{g^2}{2}(G^+A_\mu^- + G^-A_\mu^+)(G^-A^{+\mu} + G^+A^{-\mu}). \end{aligned}$$

En lo que respecta al sector de Yang-Mills, definimos

$$F_{\mu\nu}^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(F_{\mu\nu}^1 - iF_{\mu\nu}^2) = D_\mu A_\nu^+ - D_\nu A_\mu^+; \quad F_{\mu\nu}^- = (F_{\mu\nu}^+)^\dagger,$$

$$F_{\mu\nu}^3 = F_{\mu\nu} + ig(A_\mu^- A_\nu^+ - A^+\mu A_\nu^-), \quad con \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

de donde se desprende que este sector se puede escribir como

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} &= -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^- F^{+\mu\nu} - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F^{\mu\nu} - igF_{\mu\nu}A^{-\mu}A^{+\nu} \\ &\quad +\frac{g^2}{4}(A_\mu^- A_\nu^+ - A_\mu^+ A_\nu^-)(A^{-\mu}A^{+\nu} - A^{+\mu}A^{-\nu}). \end{aligned}$$

Los acoplamientos físicos que surgen del sector cinético de Higgs son

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\partial_\mu h)(\partial^\mu h) + g^2\varphi_3^2 A_\mu^- A_\mu^+ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu h)(\partial^\mu h) + m_v^2 A_\mu^- A_\mu^+ \\ &\quad +2gm_v h A_\mu^- A_\mu^+ + g^2h^2 A_\mu^- A_\mu^+, \end{aligned}$$

con $m_v = gv$, entonces $v = \frac{m_v}{g}$. En términos de los campos complejos $A_\mu^\pm$ y $G^\pm$, la teoría es invariante bajo el grupo $U(1)$ en forma manifiesta.

Capítulo 3

La teoría electrodébil

El modelo estándar es una teoría cuántica de campos renormalizable que describe las interacciones electrodébil y fuerte entre los quarks y los leptones, los cuales constituyen las componentes de materia más elementales hasta hoy conocidos. Dichas partículas son fermiones de espín 1/2 e interaccionan entre sí mediante el intercambio de bosones de norma de espín 1 que están asociados con dichas interacciones. [13]

El modelo estándar es descrito por el grupo de norma

$$SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1),$$

donde $U_Y(1)$ es el grupo de Hipercarga. La correspondiente constante de acoplamiento y el campo de norma asociados a este grupo se denota por g' y B_μ, respectivamente. Los campos de norma asociados con el grupo $SU(2)$ son detodados por W_μ^a y con g se denota la constante de acoplamiento correspondiente. Finalmente, $SU(3)$ es el grupo de la interacción fuerte. Los correspondientes ocho bosones de norma reciben el nombre de gluones y suelen denotarse por G_μ^a. En esta tesis nos centraremos en el sector electrodébil del modelo caracterizado por el grupo de norma $SU_L(2) \times U(1)_Y$ [14]. El propósito de este capítulo es presentar una breve descripción de cada uno de los sectores de la teoría electrodébil, con énfasis especial en el sector de Yukawa, en el contexto del cual se dará la contribución original de este trabajo.

Una interesante peculiaridad de la interacción electrodébil es que distingue entre los estados de helicidad de los leptones y los quarks, es decir, los bosones de norma correspondientes se acoplan con diferentes intensidades a dichos estados. Como consecuencia, esta interacción viola paridad. Otra característica importante consiste en que los bosones de norma correspondientes son masivos. Es por esto que el mecanismo de Higgs juega un papel central en esta teoría.

En la teoría electrodébil, los leptones y quarks se organizan en tres dobletes izquierdos de $SU_L(2)$, denominados familias, que tienen características similares, excepto por sus masas,

$$1era.Familia: \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L ; \quad e_R^-; \quad \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L ; \quad u_R \;\; y \;\; d_R \tag{3.1}$$

$$2da.Familia: \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L ; \quad \mu_R^-; \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L ; \quad c_R \;\; y \;\; s_R \tag{3.2}$$

$$3era.Familia: \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}_L ; \quad \tau_R^-; \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L ; \quad t_R \;\; y \;\; b_R \tag{3.3}$$

Resumidos de la siguiente manera,

$$L_i = \begin{pmatrix} \nu_i \\ l_i \end{pmatrix}_L ; \quad l_{Ri}; \qquad Q_i = \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix}_L ; \quad u_{Ri} \;\; y \;\; d_{Ri} \tag{3.4}$$

Los campos derechos e izquierdos están dados en términos del operador de quiralidad γ_5 mediante $\psi_L = P_L\psi$ y $\psi_R = P_R\psi$, donde los proyectores de quiralidad entán definidos como lo dictan las ecuaciones (1.24) y (1.25). Esta notación es usada debido al hecho de que los campos izquierdos transforman como dobletes bajo el grupo $SU_L(2)$, sin embargo este no es el caso para los campos derechos, los cuales son sigletes del grupo. Así, los campos tiene las siguientes transformaciones de norma bajo $SU_L(2) \times U_Y(1)$:

$$\begin{aligned} L_i &\rightarrow L'_i = exp[-i\alpha^i(x)\frac{\sigma^i}{2} + i\beta(x)\frac{Y}{2}]L_i \\ l_{Ri} &\rightarrow l'_{Ri} = exp[i\beta(x)\frac{Y}{2}]l_{Ri}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

donde $\alpha^i(x)$ y $\beta(x)$ son parámetros de los grupos $SU_L(2)$ y $U_Y(1)$, respectivamente. Estos operadores determinan dos números cuánticos Y y T_3 , los cuales estan relacionados con la carga eléctrica, mediante la relación de Gell-Mann-Nishijima[1]

$$Q = \frac{\sigma^3}{2} + \frac{Y}{2}. \tag{3.6}$$

Calculemos el valor explícito de las hipercargas de los leptones y los quarks. Comencemos con el valor del doblete leptónico y de quarks,

$$L_i \begin{Bmatrix} Q_{\nu_i} = 0 = \frac{1}{2} + \frac{Y}{2} \\ Q_{l_i} = -1 = -\frac{1}{2} + \frac{Y}{2} \end{Bmatrix} \Rightarrow Y_{Ll} = (-1)$$

$$Q_i \begin{Bmatrix} Q_{u_i} = \frac{+2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{Y}{2} \\ Q_{d_i} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{Y}{2} \end{Bmatrix} \Rightarrow Y_{Lq} = (\frac{1}{3}).$$

Ahora calculemos el valor de la hipercarga de los singletes de leptones y quarks,

$$\begin{aligned} l_{Ri} &\rightarrow Q = -1 = 0 + \frac{Y}{2} \Rightarrow Y_R^l = -2, \\ u_R &\rightarrow Q = \frac{2}{3} = 0 + \frac{Y}{2} \Rightarrow Y_R^u = \frac{4}{3} \\ d_R &\rightarrow Q = \frac{-1}{3} = 0 + \frac{Y}{2} \Rightarrow Y_R^d = \frac{-2}{3}. \end{aligned}$$

La lagrangiana invariante de norma de $SU_L(2) \times U_Y(1)$ se puede dividir en dos partes, una que contiene a los campos bosónicos y otra que contiene fermiones y bosones. La parte bosónica se divide a su vez en los sectores de Higgs y de Yang-Mills, mientras que el sector de fermiones se divide en los sectores de Corrientes y de Yukawa. Por lo tanto, la lagrangiana de la teoría electrodébil se puede divir en cuatro sectores como sigue:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^f + \mathcal{L}^b = \mathcal{L}^H + \mathcal{L}^{YM} + \mathcal{L}^Y + \mathcal{L}^C,$$

donde $\mathcal{L}^f = \mathcal{L}^Y + \mathcal{L}^C$ y $\mathcal{L}^b = \mathcal{L}^H + \mathcal{L}^{YM}$. Se procede ahora a presentar una breve descripción de las características principales de cada uno de estos sectores.

3.1. Sector de Higgs

Este sector permite dotar de masa a los bosones débiles y al bosón de Higgs y genera la dinámica entre estas partículas. Para dotar de masa a los fermiones y bosones de norma, necesitamos del rompimiento espontáneo de la invariancia de norma, ya que nosotros vivimos en el mundo simétrico

[1]Esta combinación lineal hace que el vacío quede invariante

$U_e(1)$, con un fotón sin masa. De esta forma debemos tener el siguiente rompimiento espontáneo $SU_L(2) \times U_Y(1) \to U_e(1)$. Para realizar este rompimiento espontáneo de simetría, se introduce el campo escalar, llamado el campo de Higgs. Como se tienen cuatro campos de norma (tres asociados con $SU_L(2)$ y uno con $U(1)_Y$), y se quiere terminar con un fotón si masa asociado con $Ue_(1)$, se necesitan de al menos cuatro grados de libertad. [15] De esta manera se introduce un doblete escalar de SU(2), con hipercarga Y_Φ=1, [16]

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} G_w^+ \\ \Phi_0 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

La lagrangiana renormalizable es

$$\mathcal{L}_H = \mathcal{L}_{HK} + V, \tag{3.8}$$

donde $\mathcal{L}_{HK}$ es el término cinético, dado por:

$$\mathcal{L}_{HK} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi), \tag{3.9}$$

del cual sugen las masas de los bosones de norma, así como sus interacciones con el bosón de Higgs. Por otra parte, V es el potencial de Higgs, cuya estructura renormalizable tiene la forma:

$$V = \mu^2(\Phi^\dagger \Phi) + \lambda(\Phi^\dagger \Phi)^2, \tag{3.10}$$

con μ un parámetro con unidades de masa y $\lambda > 0$ adimensional, para asegurar que el vacio sea estable. Es aquí donde se genera la masa del bosón de Higgs y sus auto interacciones. El rompimiento espontáneo de $SU_L(2) \times U_Y(1)$ ocurre cuando $\mu^2 < 0$. En efecto la condición de mínimo es dada por:

$$\frac{\partial V}{\partial \Phi^\dagger} = 0 \Rightarrow [\mu^2 + 2\lambda(\Phi^\dagger \Phi)]\Phi = 0, \tag{3.11}$$

pero esta mínima energía es degenerada, ya que

$$\Phi^\dagger \Phi = -\frac{\mu^2}{2\lambda} = \frac{v^2}{2}. \tag{3.12}$$

De esta manera se toma una dirección Φ_0, tal que:

$$Q\Phi_0 = \left(\frac{\sigma^3}{2} + \frac{Y}{2}\right)\Phi_0 = 0, \tag{3.13}$$

dado que $Y\Phi(x)$ =(+1)$\Phi(x)$, tomando la relación de Gell-Mann-Nishijima se obtiene que

$$Q = \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

así la única forma posible para Φ_0 es:

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

Por lo que al estar eligiendo un Φ_0, ya estamos rompiendo el grupo. De esta forma la teoría tiene un mínimo en Φ_0. En consecuencia de los 4 generadores, queremos romper 3 para que corresponda al grupo electromagnético, como se ha dicho anteriormente. Según el teorema de Goldstone, por cada generador roto hay un escalar de masa cero, llamado bosón de Golstone. En este caso se tiene,

$$\Phi(x) \to \Phi_0 + \Phi(x) = \begin{pmatrix} G_w^+ \\ \frac{v+H+iG_z}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_w^+ \\ \frac{iG_z}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \Phi_g + \Phi_h. \tag{3.15}$$

La masa del campo H surge del potencial de Higgs.

Ya hemos visto que $\frac{v^2}{2} = \frac{-\mu^2}{2\lambda}$, de donde resulta que $\mu^2 = -\lambda v^2$. Ahora bien, queremos conocer $(\Phi_g+\Phi_h)^\dagger(\Phi_g+\Phi_h) = \Phi_g^\dagger\Phi_g+\Phi_h^\dagger\Phi_h+\Phi_g^\dagger\Phi_h+\Phi_h^\dagger\Phi_g$. Pero $\Phi_h^\dagger\Phi_h = (\frac{v+H}{\sqrt{2}})^2$, $\Phi_g^\dagger\Phi_g = (G_w^-G_w^+ + \frac{G_z^2}{2})$ y $\Phi_g^\dagger\Phi_h + \Phi_h^\dagger\Phi_g = 0$. Por lo tanto $(\Phi_g+\Phi_h)^\dagger(\Phi_g+\Phi_h) = \Phi_g^\dagger\Phi_g + \Phi_h^\dagger\Phi_h$. Entonces

$$\begin{aligned} V(\Phi^\dagger,\Phi) &= [-\lambda v^2 + \lambda(\Phi^\dagger\Phi)](\Phi^\dagger\Phi) \\ &= \lambda[2(-\frac{v^2}{2} + \Phi_h^\dagger\Phi_h)\Phi_g^\dagger\Phi_g + (\Phi_h^\dagger\Phi_h - v^2)\Phi_h^\dagger\Phi_h + (\Phi_g^\dagger\Phi_g)^2]. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Analicemos de cerca el primer término del cual podría surgir un término de masa para $G_w^\pm$ y G_z. Como $\Phi_g^\dagger\Phi_g = (G_w^-G_w^+ + \frac{G_z^2}{2}) = (\Phi_1^2+\Phi_2^2+\Phi_I^2)$, entonces se tiene que

$$2\lambda(-\frac{v^2}{2} + \Phi_h^\dagger\Phi_h)\Phi_g^\dagger\Phi_g = 2\lambda(vH + \frac{H^2}{2})(\Phi_1^2+\Phi_2^2+\Phi_I^2). \tag{3.17}$$

Así, de la ec. (3.17) vemos que no hay ningún términos que puede contribuir con términos de masa para los campos Φ_1, Φ_2 y Φ_I. Esto significa que los campos $G_w^\pm$ y G_z son bosones de Golstone, que como sabemos siempre aparece uno por cada generador roto si la simetría es global, en cuyo caso tenemos ∂_μ en lugar de D_μ, y seudobosones de Golstone si la simetría es de norma (mecanismo de Higgs). Finalmente, analicemos el segundo término de la ecuación (3.16), el cual está dado por

$$\begin{aligned} \lambda(\Phi_h^\dagger\Phi_h - v^2)\Phi_h^\dagger\Phi_h &= \lambda(-\frac{v^2}{2} + vH + \frac{H^2}{2})(\frac{v^2}{2} + vH + \frac{H^2}{2}) \\ &= \lambda(-\frac{v^4}{4} + v^2H^2 + vH^3 + \frac{H^4}{4}). \end{aligned} \tag{3.18}$$

De esta expresión se puede identificar la masa que corresponde al campo H, la cual puede verse que es dada por $m_H = \sqrt{2}\sqrt{\lambda}v$.

Por otra parte, los sudobosones de Goldstone pueden ser removidos de la teoría mediante una transformación de norma particular, conocida con el nombre de norma unitaria. Esta norma corresponde a una transformación de norma para la cual los nuevos seudobosones de Goldstone son exactamente cero:

$$G_w'^\pm = 0 \ \ y \ \ G_z' = 0.$$

Este caso corresponde a fijar la norma con respecto a los generadores rotos de $SU_L(2)\times U_Y(1)$, pero no respecto al generador no roto. Esta es la norma unitaria,

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

Para desarrollar el término cinético debemos conocer la forma de la derivada covariante en la representación fundamental, la cual es dada por

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\frac{\sigma^a}{2}W_\mu^a - ig'\frac{Y}{2}B_\mu. \tag{3.20}$$

Construyamos explícitamente la derivada covariante para esta representación, para eso tomemos en cuenta que $Q\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 0$, y definamos $\sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ operador de subida, y $\sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ operador de bajada. Además, se introducen las siguientes definiciones para los campos de norma: $W_\mu^\pm = W_\mu^1 \mp iW_\mu^2$. Después de alguna álgebra, se obtiene

$$D_\mu\Phi = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial_\mu H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - \frac{ig}{2}(v+H)W_\mu^+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}(gW_\mu^3 - g'B_\mu)\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right]. \tag{3.21}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}_{HK} = \frac{1}{2}(\partial_\mu H)(\partial^\mu H) + \frac{g^2}{4}(v+H)^2 W_\mu^- W^{+\mu} + \frac{1}{8}(v+H)^2(g^2 W_\mu^3 W^{3\mu} - 2gg' W_\mu^3 B^\mu + g'^2 B_\mu B^\mu). \tag{3.22}$$

El término $\frac{g^2}{4}(v)^2 W_\mu^- W^{+\mu}$ es el término de masa para los campos de norma $W^\pm$. En lo que respecta a los términos de masa asociados a los campos de norma W_μ^3 y B_μ, notemos que la ecuación anterior se puede escribir como

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu H)(\partial^\mu H) + \frac{g^2}{4}(v+H)^2 W_\mu^- W^{+\mu} + \frac{1}{8}(v+H)^2 (W_\mu^3, B_\mu) \begin{pmatrix} g^2 & gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix},$$

donde se definió el llamado ángulo débil como $tan\theta_w = \frac{g'}{g}$. Por lo tanto, $cos\theta_w = c_w = \frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}}$ y $sin\theta_w = s_w = \frac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}}$. De la expresión anterior, vemos que los términos de masa para los campos W_μ^3 y B_μ están encriptados en el siguiente término

$$\frac{1}{8}v^2 (W_\mu^3, B_\mu) \begin{pmatrix} g^2 & gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix}, \tag{3.23}$$

el cual puede ser diagonalizado de la siguiente manera

$$\frac{1}{8}v^2 (Z_\mu, A_\mu) \begin{pmatrix} g^2+g'^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix} = \frac{1}{8}v^2(g^2+g'^2) Z_\mu Z^\mu, \tag{3.24}$$

usando la transformación ortogonal

$$\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_w & s_w \\ -s_w & c_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}. \tag{3.25}$$

De la ec.(3.24) podemos ver que la masa del bosón de norma neutro Z está dada por $m_Z = \frac{1}{2c_w} gv = \frac{m_W}{c_W}$, mientras que la masa del fotón es cero, como debe ser.

3.2. Sector de Yang-Mills

En los años 50's Yang y Mills concideraron extender la invariancia local de norma para incluir las transformaciones no-abelianas [2] bajo SU(2) [14]. De esta forma al incluir los campos vectoriales, se debe agregar el término de propagación de los campos, también denominado el término cinético, el cual debe de ser invariante de norma. Dicho término se construye con las estructuras covariantes dadas por el tensor de campo $W_{\mu\nu} = T^i W_{\mu\nu}^i$, asociado con el grupo no abeliano de $SU_L(2)$ y el correspondiente tensor $B_{\mu\nu}$ del grupo abeliano $U_Y(1)$, los cuales transforman de la siguiente manera

$$W'_{\mu\nu} = U W_{\mu\nu} U^\dagger, \quad U \in SU_L(2) \tag{3.26}$$

$$y \quad B'_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}. \tag{3.27}$$

Así, la lagrangiana del sector de Yang-Mills de la teoría electrodébil está dada por

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}, \tag{3.28}$$

[2] Esto lo hicieron como un ejercicio matemático.

donde los tensores de campo están dados por

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \tag{3.29}$$

$$W^a_{\mu\nu} = \partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu + g e^{abc} W^b_\mu W^c_\nu. \tag{3.30}$$

Pero como vimos en la sección anterior, se tiene que $B_\mu = c_w A_\mu - s_w Z_\mu$ y $W^3_\mu = c_w Z_\mu + s_w A_\mu$, entonces

$$B_{\mu\nu} = c_w F_{\mu\nu} - s_w Z_{\mu\nu} \tag{3.31}$$

y

$$W^3_{\mu\nu} = s_w F_{\mu\nu} + c_w Z_{\mu\nu} + ig(W^-_\mu W^+_\nu - W^-_\nu W^+_\mu). \tag{3.32}$$

Además, definimos

$$W^+_{\nu\mu} = \partial_\mu W^+_\nu - \partial_\nu W^+_\mu. \tag{3.33}$$

Por otra parte, sean los tensores con contenido de carga eléctrica

$$\left.\begin{array}{l} \hat{W}^+_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(W^1_{\mu\nu} - iW^2_{\mu\nu}) \\ \hat{W}^-_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(W^1_{\mu\nu} + iW^2_{\mu\nu}) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} W^1_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{W}^+_{\mu\nu} + \hat{W}^-_{\mu\nu}) \\ W^2_{\mu\nu} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{W}^+_{\mu\nu} - \hat{W}^-_{\mu\nu}) \end{array}$$

Note que $\hat{W}^-_{\mu\nu} = (\hat{W}^+_{\mu\nu})^\dagger$. Realizando el álgebra para $\hat{W}^+_{\mu\nu}$, se tiene que

$$\hat{W}^+_{\mu\nu} = W^+_{\mu\nu} + ie(W^+_\mu A_\nu - W^+_\nu A_\mu) + igc_w(W^+_\mu Z_\nu - W^+_\nu Z_\mu). \tag{3.34}$$

Finalmente la lagrangiana de Yang-Mills toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}(W^1_{\mu\nu} W^{1\mu\nu} + W^2_{\mu\nu} W^{1\mu\nu}) - \frac{1}{4} W^3_{\mu\nu} W^{3\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2}\hat{W}^-_{\mu\nu}\hat{W}^{+\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} - ig(s_w F_{\mu\nu} + c_w Z_{\mu\nu})W^{-\mu}W^{+\nu} \\ &\quad + \frac{g^2}{4}(W^-_\mu W^+_\nu - W^+_\mu W^-_\nu)(W^{-\mu}W^{+\nu} - W^{+\mu}W^{-\nu}). \end{aligned} \tag{3.35}$$

Este sector determina las interacciones entre los bosones de norma electrodébiles $W^\pm$, Z y A.

3.3. Sector de Yukawa

El modelo estándar contiene dos sectores fermiónicos con estructuras de norma y de Lorentz completamente diferentes. Uno de estos sectores es el de Yukawa. La simetría electrodébil no permite la introducción explícita de términos de masa para ninguún tipo de particula, y en particular para los leptones y quarks. El sector de Yukawa tiene como propósito generar las masas para los fermiones quirales vía el mecanismo de Higgs. Las invariantes de este sector se contruyen como producto de eigenestados de campos de norma que vinculan fermiones de diferente helicidad acoplados al doblete de Higgs. Como sabemos, la teoría electrodébil no define los estados de helicidad derecha para los neutrinos, por lo que no pueden tener ninguna manifestación física en este sector. El secctor de Yukawa corresponde a invariantes electrodébiles de dimensión cuatro que se pueden construir con los dobletes izquierdos de los fermiones, los singletes derechos y el doblete de Higgs.

Las expresiones (3.1), (3.2), (3.3) y (3.4) nos muestran como se organizan los fermiones. De esta forma la lagrangiana de Yukawa es:

$$\mathcal{L}_Y = \mathcal{L}^l_Y + \mathcal{L}^q_Y, \tag{3.36}$$

donde

$$\mathcal{L}_Y^l = -Y_{ij}^l \bar{L}_i' \Phi l_{Rj}' + h.c. \tag{3.37}$$

y

$$\mathcal{L}_Y^q = -Y_{ij}^u \bar{Q}_i' \tilde{\Phi} u_{Rj}' - Y_{ij}^d \bar{Q}_i' \Phi d_{Rj}' + h.c., \tag{3.38}$$

donde en cada término existe suma sobre los índices de sabor i, j. Las Y_{ij}^l, Y_{ij}^u y Y_{ij}^d son componentes de matrices 3×3 completamente generales, llamadas las constantes de Yukawa, las cuales son adimensionales. En lo que respecta a los quarks, sabemos que existen estados derechos para las dos componentes del doblete izquierdo, de esta manera es necesario considerar otro objeto que transforme convariantemente bajo el grupo $SU_L(2) \times U_Y(1)$. Dicho objeto es dado por

$$\tilde{\Phi} = i\sigma^2 \Phi^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v+H}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.39}$$

3.3.1. Sector de Yukawa Leptónico

El sector de Yukawa leptónico puede escribirse de la siguiente manera

$$\Phi \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{L}_Y^l &= -Y_{ij}^l (\bar{\nu}_{Li}', \bar{l}_{Li}') \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} l_{Rj}' + h.c. \\ &= -\frac{v+H}{\sqrt{2}} Y_{ij}^l \bar{l}_{Li}' l_{Rj}' + h.c. \\ &= -\frac{v+H}{\sqrt{2}} \bar{E}_L' Y^l E_R' + h.c., \end{aligned} \tag{3.40}$$

donde $E' = \begin{pmatrix} e' \\ \mu' \\ \tau' \end{pmatrix}$ es un vector en el espacio de sabor. Lo que implica que

$$\mathcal{L}_Y^l = -\bar{E}_L' \frac{Y^l v}{\sqrt{2}} E_R' - \frac{H}{\sqrt{2}} \bar{E}_L' Y^l E_R' + h.c. \tag{3.41}$$

Ahora sea $\frac{Y^l v}{\sqrt{2}} = \bar{Y}^l$, de aquí también se tiene que $Y^l = \frac{\sqrt{2}\bar{Y}^l}{v}$. Así que la lagrangiana puede ser escrita de la siguiente manera

$$\mathcal{L}_Y^l = -(1 + \frac{H}{v}) \bar{E}_L' \bar{Y}^l E_R' + h.c. \tag{3.42}$$

Como ya se había mencionado, $\bar{Y}_{ij}^l = \frac{v}{\sqrt{2}} Y_{ij}^l$ son los elementos de la matriz de masa, la cual es completamente general. Para identificar las masas físicas es necesario diagonalizarla. Al respecto, existe un teorema del álgebra lineal que nos dice

Teorema: Para cualquier matriz M, siempre es posible encontrar dos matrices unitarias, A y B, tal que AMB es real y diagonal.

Prueba.- Expresemos la matriz M en su descomposición polar, la cual está dada por

$$M = HU,$$

donde H es una matriz hermitiana y U una matriz unitaria. Pero toda matriz hermitiana puede ser diagonalizada por una matriz unitaria, esto es,

$$S^\dagger HS$$

es diagonal, con $S^\dagger = S^{-1}$. Por lo que tomando $A = S^\dagger$ y $B = U^\dagger S$, tenemos que

$$AMB = S^\dagger MU^\dagger S = S^\dagger (HU)U^\dagger S = S^\dagger HS,$$

la cual es una matriz real y diagonal, ya que los eigenvalores de una matriz hermitiana son eigenvalores reales. Por lo que queda demostrado el teorema.

Por otro lado, sea la transformación unitaria dada por

$$E'_L = V^l_L E_L \tag{3.43}$$

$$E'_R = V^l_R E_R, \tag{3.44}$$

donde V^l_L y V^l_R son matrices unitarias, entonces la lagrangiana toma la forma

$$\mathcal{L}^l_Y = -(1+\frac{H}{v})\bar{E}_L V^{l\dagger}_L \bar{Y}^l V^l_R E_R + h.c. \tag{3.45}$$

Definamos $M^l = V^{l\dagger}_L \bar{Y}^l V^l_R$, la cual es una matriz diagonal y real, usando el teorema anteriormente demostrado, por eso se pide que V^l_L y V^l_R, sean matrices unitarias. Dicha matriz es la matriz de masa de los leptones. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^l_Y &= -(1+\frac{H}{v})(\bar{E}_L M^l E_R + \bar{E}_R M^l E_L) \\ &= -(1+\frac{H}{v})(\bar{E} M^l E), \end{aligned} \tag{3.46}$$

donde

$$M^l = \begin{pmatrix} m_e & 0 & \\ 0 & m_\mu & 0 \\ 0 & 0 & m_\tau \end{pmatrix}. \tag{3.47}$$

Así pues el sector de Yukawa para leptones conserva el sabor, esto es, el bosón de Higgs sólo se acopla al mismo tipo de leptón cargado. Finalmente,

$$\mathcal{L}^l_Y = -(1+\frac{gH}{2m_w})(\bar{E} M^l E) \tag{3.48}$$

3.3.2. Sector de Yukawa de Quarks

Una vez más en la norma unitaria, tenemos

$$\Phi \to \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

y

$$\tilde{\Phi} \to \begin{pmatrix} \frac{v+H}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De este modo la lagrangiana de Yukawa para el sector de quarks es

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_Y^q &= -Y_{ij}^u(\bar{u}'_{Li}, \bar{d}'_{Li}) \begin{pmatrix} \frac{v+H}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} u'_{Rj} - Y_{ij}^d(\bar{u}'_{Li}, \bar{d}'_{Li}) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} d'_{Rj} + h.c. \\
&= -\frac{v+H}{\sqrt{2}} Y_{ij}^u \bar{u}'_{Li} u'_{Rj} - \frac{v+H}{\sqrt{2}} Y_{ij}^d \bar{d}'_{Li} d'_{Rj} + h.c. \\
&= -\frac{v+H}{\sqrt{2}} (\bar{U}'_L Y^u U'_R + \bar{D}'_L Y^d D'_R) + h.c. \qquad (3.49)
\end{aligned}$$

donde $U' = \begin{pmatrix} u' \\ c' \\ t' \end{pmatrix}$ y $D' = \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix}$ son vectores en el espacio de sabor. Entonces

$$\mathcal{L}_Y^q = -\bar{U}'_L \frac{Y^u v}{\sqrt{2}} U'_R - \frac{H}{\sqrt{2}} \bar{U}'_L Y^u U'_R - \bar{D}'_L \frac{Y^d v}{\sqrt{2}} D'_R - \frac{H}{\sqrt{2}} \bar{D}'_L Y^d D'_R + h.c. \qquad (3.50)$$

Sean $\frac{Y^u v}{\sqrt{2}} = \bar{Y^u}$ y $\frac{Y^d v}{\sqrt{2}} = \bar{Y^d}$, así que la lagrangiana anterior toma la forma

$$\mathcal{L}_Y^q = -(1 + \frac{H}{v})(\bar{U}'_L \bar{Y^u} U'_R + \bar{D}'_L \bar{Y^d} D'_R) + h.c. \qquad (3.51)$$

Además $\bar{Y}_{ij}^u = \frac{v}{\sqrt{2}} Y_{ij}^u$ y $\bar{Y}_{ij}^d = \frac{v}{\sqrt{2}} Y_{ij}^d$ son los elementos de la matriz de masa para los quarks de tipo up y down, respectivamente. Dichas matrices son completamente generales, las cuales deben ser diagonalizadas para determinar las masas físicas de los quarks. Apoyándonos en el teorema de la sección anterior, hagamos las siguientes transformaciones unitarias

$$\left.\begin{aligned} U'_L = V_L^u U_L \\ U'_R = V_R^u U_R \end{aligned}\right\} ; \begin{aligned} D'_L = V_L^d D_L \\ D'_R = V_R^d D_R, \end{aligned} \qquad (3.52)$$

donde V_L^u, V_R^u, V_L^d y V_R^d son matrices unitarias. Entonces, en término de los nuevos campos, la lagragiana de Yukawa toma la forma

$$\mathcal{L}_Y^q = -(1 + \frac{H}{v})(\bar{U}_L V_L^{u\dagger} \bar{Y^u} V_R^u U_R + \bar{D}_L V_L^{d\dagger} \bar{Y^d} V_R^d D_R) + h.c. \qquad (3.53)$$

Definamos $M^u = V_L^{u\dagger} \bar{Y^u} V_R^u$ y $M^d = V_L^{d\dagger} \bar{Y^d} V_R^d$, las cuales, como consecuencia del teorema mencionado, son matrices diagonales y reales. Finalmente,

$$\mathcal{L}_Y^q = -(1 + \frac{H}{v})(\bar{U} M^u U + \bar{D} M^d D), \qquad (3.54)$$

con

$$M^u = \begin{pmatrix} m_u & 0 & \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix} \quad y \quad M^d = \begin{pmatrix} m_d & 0 & \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{pmatrix}. \qquad (3.55)$$

De esta manera el sector de Yukawa para quarks en términos de los eigenestados de campos de masa conserva el sabor, ya que el bosón de Higgs sólo se acopla a pares del mismo tipo de quarks.

3.4. Sector de Corrientes

Este sector determina los términos cinéticos de los leptones y quarks, así como sus interacciones con los bosones de norma. Esto se genera al sustituir la derivada ordinaria de la parte cinética de los fermiones quirales por la derivada covariante asociada al grupo electrodébil, lo que da lugar a la presencia de términos de interacción carracterizados por las estructuras de Lorentz γ_μ y $\gamma_\mu\gamma_5$. Las interacciones de los fermiones con los bosones de norma da lugar a lo que se conoce como corrientes cargadas y neutras. En términos de los eigenestados de masa, este sector conserva el sabor de familias y aun entre miembros de las misma familia en el caso de corrientes neutras. Este requerimiento viene de la necesidad de definir correctamente a los términos cinéticos, los cuales no pueden involucrar el producto de dos términos diferentes, es decir, los términos de la forma $i\bar{f}_{Li}\gamma^\mu\partial_\mu f_{Lj}$ con i distinto de j, no tiene una interpretación directa en el contexto de campo libre.

La lagrangiana renormalizable para este sector es dada por

$$\mathcal{L}_c = \mathcal{L}_c^l + \mathcal{L}_c^q, \tag{3.56}$$

donde

$$\mathcal{L}_c^l = i\bar{L}_i'\not{\mathbf{D}}L_i' + i\bar{l}'_{Ri}\not{D}l'_{Ri}. \tag{3.57}$$

La primera derivada de la ec. (3.57) es:

$$\mathbf{D}_\mu = \partial_\mu - i\frac{\sigma^a}{2}W_\mu^a + ig'\frac{Y_L}{2}B_\mu, \tag{3.58}$$

y la segunda derivada corresponde a

$$D_\mu = \partial_\mu - ig'\frac{Y_{lR}}{2}B_\mu. \tag{3.59}$$

De acuerdo con el rompimiento espontáneo $SU_L(2)\times U_Y(1) \to U_e(1)$, el generador del grupo electromagnético es $Q = T^3 + \frac{Y}{2}$, así que el lepton cargado izquierdo y derecho tienen la misma carga, auqnue, como ya se vio, no la misma hipercarga. Entonces

$$Q_l = \frac{\sigma^3}{2} + \frac{Y_L}{2} \quad y \quad Q_l = \frac{Y_R}{2}.$$

Por otra parte para el caso del doblete la derivada covariante en la representación fundamental de $SU_L(2)$ es

$$\mathbf{D}_\mu = \partial_\mu - \frac{ig}{\sqrt{2}}(W_\mu^+\sigma^+ + W_\mu^-\sigma^-) - \frac{ig}{2c_w}Z_\mu(\sigma^3 - 2s_w^2Q_l) - ieQ_lA_\mu, \tag{3.60}$$

mientras que para el singlete la derivada covariante correspondiente es

$$D_\mu = \partial_\mu - ieQ_lA_\mu + igQ_l\frac{s_w^2}{c_w}Z_\mu. \tag{3.61}$$

Por ejemplo,

$$\not{D}L_i' = \begin{pmatrix}\not{\partial}\nu_{Li}\\ \not{\partial}l_{Li}\end{pmatrix} - \frac{ig}{\sqrt{2}}\not{W}^+\begin{pmatrix}l_{Li}\\ 0\end{pmatrix} - \frac{ig}{\sqrt{2}}\not{W}^-\begin{pmatrix}0\\ \nu_{Li}\end{pmatrix} - \frac{ig}{2c_w}\not{Z}\begin{pmatrix}\nu_{Li}\\ -(1+2s_w^2Q_l)l_{Li}\end{pmatrix} - ieQ_l\not{A}\begin{pmatrix}0\\ l_{Li}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow i\bar{L}_i'\not{D}L_i' \quad &= \quad i\bar{\nu}'_{Li}\not{\partial}\nu'_{Li} + i\bar{l}'_{Li}\not{\partial}l'_{Li} + \frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^+\bar{\nu}'_{Li}\gamma^\mu l'_{Li} + \frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^-\bar{l}'_{Li}\gamma^\mu\nu'_{Li}\\ &\quad +eQ_lA_\mu\bar{l}'_{Li}\gamma^\mu l'_{Li} + \frac{g}{2c_w}Z_\mu(\bar{\nu}'_{Li}\gamma^\mu\nu'_{Li} - (1+2s_w^2Q_l)(\bar{l}'_{Li}\gamma^\mu l'_{Li}))\end{aligned}$$

y

$$i\bar{l}'_{Ri}\not{\partial}l'_{Ri} = i\bar{l}'_{Ri}\not{\partial}l'_{Ri} + eQ_lA_\mu\bar{l}'_{Ri}\gamma^\mu l'_{Ri} - \frac{s_w^2}{c_w}gQ_lZ_\mu\bar{l}'_{Ri}\gamma^\mu l'_{Ri}.$$

3.4.1. Sector de corrientes Leptónico

El sector de corrientes leptónico es dado por la siguiente lagrangiana

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_c^l &= i\bar{\nu}'_{Li}\partial\!\!\!/\nu'_{Li} + i\bar{l}'_{Li}\partial\!\!\!/ l'_{Li} + \frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^+\bar{\nu}'_{Li}\gamma^\mu l'_{Li} + \frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^-\bar{l}'_{Li}\gamma^\mu\nu'_{Li} \\ &+eQ_lA_\mu\bar{l}'_{Li}\gamma^\mu l'_{Li} + \frac{g}{2c_w}Z_\mu(\bar{\nu}'_{Li}\gamma^\mu\nu'_{Li} - (1+2s_w^2Q_l)(\bar{l}'_{Li}\gamma^\mu l'_{Li})) \\ &+i\bar{l}'_{Ri}\partial\!\!\!/ l'_{Ri} + eQ_lA_\mu\bar{l}'_{Ri}\gamma^\mu l'_{Ri} - \frac{s_w^2}{c_w}gQ_lZ_\mu\bar{l}'_{Ri}\gamma^\mu l'_{Ri}. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Sean los vectores en el espacio de sabor,

$$\nu' = \begin{pmatrix}\nu'_e\\ \nu'_\mu\\ \nu'_\tau\end{pmatrix} \quad y \quad E' = \begin{pmatrix}e'\\ \mu'\\ \tau'\end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_c^l &= i\bar{\nu}'_L\partial\!\!\!/\nu'_L + i\bar{E}'_L\partial\!\!\!/ E'_L + i\bar{E}'_R\partial\!\!\!/ E'_R + \frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^+\bar{\nu}'_L\gamma^\mu E'_L \\ &+\frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^-\bar{E}'_L\gamma^\mu\nu'_L + eA_\mu(Q_l\bar{E}'_L\gamma^\mu E'_L + Q_l\bar{E}'_R\gamma^\mu E'_R) \\ &+\frac{g}{2c_w}Z_\mu(\bar{\nu}'_L\gamma^\mu\nu'_L - (1+2s_w^2Q_l)(\bar{E}'_L\gamma^\mu E'_L)) - \frac{s_w^2}{c_w}gQ_lZ_\mu\bar{E}'_R\gamma^\mu E'_R. \end{aligned} \tag{3.63}$$

Pasando a eigenestados de masa elegimos las mismas matrices que rotan E_L y E_R

$$\begin{matrix}E'_L = V_L^lE_L\\ E'_R = V_R^lE_R\end{matrix}.$$

¿Pero qué hacemos con ν'_L? Como no hay ninguna restricción ya que desaparece totalmente del sector leptónico de Yukawa, podemos elegir la transformación que mas nos convenga, así lo transformamos de la misma forma que E'_L, para que elimine los efectos de violación de sabor en las corrientes cargadas. Entonces, tomemos

$$\nu'_L = V_L^l\nu_L.$$

Como consecuencia de esta elección, las corrientes neutras conservan el sabor. En efecto,

$$\begin{aligned}\bar{\nu}'_L\gamma^\mu E'_L &= \bar{\nu}_LV_L^{l\dagger}\gamma^\mu V_L^lE_L \\ &= \bar{\nu}_L\gamma^\mu V_L^{l\dagger}V_L^lE_L \\ &= \bar{\nu}_L\gamma^\mu E_L. \end{aligned} \tag{3.64}$$

En lo que respecta a las corrientes cargadas, tenemos

$$\begin{aligned}\bar{E}'_L\partial\!\!\!/ E'_L + \bar{E}'_R\partial\!\!\!/ E'_R &= \bar{E}_L\partial\!\!\!/ E_L + \bar{E}_R\partial\!\!\!/ E_R \\ &= \bar{E}\partial\!\!\!/ P_LE + \bar{E}\partial\!\!\!/ P_RE \\ &= \bar{E}\partial\!\!\!/(P_R+P_L)E \\ &= \bar{E}\partial\!\!\!/ E. \end{aligned} \tag{3.65}$$

lo cual muestra que no esxisten acoplamientos entre miembros de diferentes familias. Es importante señalar la ausencia de interacciones entre leptones de diferentes familias mediadas por el bosón débil cargado. Además esto no sólo se debe a la inexistencia de neutrinos derechos, sino también a que el sector de corrientes es originalmente invariante de sabor. Finalmente,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_c^l &= i\bar{\nu}_L\partial\!\!\!/\nu_L + i\bar{E}\partial\!\!\!/E + \frac{g}{\sqrt{2}}(W_\mu^+\bar{\nu}\gamma^\mu P_L E + W_\mu^-\bar{E}\gamma^\mu P_L\nu)\\ &+eA_\mu(Q_l\bar{E}\gamma^\mu E)\\ &+\frac{g}{2c_w}Z_\mu(\bar{\nu}\gamma^\mu P_L\nu + g_L^l\bar{E}_L\gamma^\mu E_L + g_R^l\bar{E}_R\gamma^\mu E_R).\end{aligned} \tag{3.66}$$

3.4.2. Sector de corrientes Quarks

El sector de corrientes de quarks está caracterizado por la siguiente lagrangiana

$$\mathcal{L}_c^q = i\bar{Q}_i'D\!\!\!\!/\,Q_i' + i\bar{u}_{Ri}'D\!\!\!\!/\,u_{Ri}' + i\bar{d}_{Ri}'D\!\!\!\!/\,d_{Ri}', \tag{3.67}$$

donde $Q_i' = \begin{pmatrix} u_i' \\ d_i' \end{pmatrix}_L$. El desarrollo explícito de esta expresión conduce a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_c^q &= i\bar{u}_{Li}'\partial\!\!\!/u_{Li}' + i\bar{d}_{Li}'\partial\!\!\!/d_{Li}' + \frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^+\bar{u}_{Li}'\gamma^\mu d_{Li}' + \frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^-\bar{d}_{Li}'\gamma^\mu u_{Li}'\\ &+eQ_lA_\mu\bar{d}_{Li}'\gamma^\mu d_{Li}' + \frac{g}{2c_w}Z_\mu(\bar{u}_{Li}'\gamma^\mu u_{Li}' - (1+2s_w^2Q_l)(\bar{d}_{Li}'\gamma^\mu d_{Li}'))\\ &+i\bar{u}_{Ri}'\partial\!\!\!/u_{Ri}' + eQ_lA_\mu\bar{u}_{Ri}'\gamma^\mu u_{Ri}' - \frac{s_w^2}{c_w}gQ_lZ_\mu\bar{u}_{Ri}'\gamma^\mu u_{Ri}'\\ &+i\bar{d}_{Ri}'\partial\!\!\!/d_{Ri}' + eQ_lA_\mu\bar{d}_{Ri}'\gamma^\mu d_{Ri}' - \frac{s_w^2}{c_w}gQ_lZ_\mu\bar{d}_{Ri}'\gamma^\mu d_{Ri}'.\end{aligned} \tag{3.68}$$

Introduciendo los siguientes vectores en el espacio de sabor de quarks,

$$U' = \begin{pmatrix} u' \\ c' \\ t' \end{pmatrix}; \qquad D' = \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix}$$

la lagrangiana toma la forma

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_c^l &= i\bar{U}_L'\partial\!\!\!/U_L' + i\bar{D}_L'\partial\!\!\!/D_L' + i\bar{U}_R'\partial\!\!\!/U_R' + i\bar{D}_R'\partial\!\!\!/D_R' + \frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^+\bar{U}_L'\gamma^\mu D_L' + \frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu^-\bar{D}_L'\gamma^\mu U_L'\\ &+eA_\mu(Q_l\bar{D}_L'\gamma^\mu D_L' + Q_l\bar{U}_R'\gamma^\mu U_R' + Q_l\bar{D}_R'\gamma^\mu D_R')\\ &+\frac{g}{2c_w}Z_\mu(\bar{U}_L'\gamma^\mu U_L' - (1+2s_w^2Q_l)(\bar{D}_L'\gamma^\mu D_L'))\\ &-\frac{s_w^2}{c_w}gQ_lZ_\mu\bar{U}_R'\gamma^\mu U_R' - \frac{s_w^2}{c_w}gQ_lZ_\mu\bar{D}_R'\gamma^\mu D_R'\end{aligned} \tag{3.69}$$

Pasando a eigenestado de masa mediante las siguientes transformaciones unitarias

$$\begin{aligned}U_L' &= V_L^uU_L\\ U_R' &= V_R^uU_R\\ D_L' &= V_L^dD_L\\ D_R' &= V_R^dD_R.\end{aligned}$$

se obtienen las corrientes cargadas y neutras en este sector. Como consecuencia de la unitariedad de la transformación, las corrientes neutras conservan el sabor. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\bar{U}_R'\gamma^\mu U_R' &= \bar{U}_RV_R^{u\dagger}V_R^u\gamma^\mu U_R\\ &= \bar{U}_R\gamma^\mu U_R.\end{aligned} \tag{3.70}$$

Cabe señalar que el cambio de sabor mediado por corrientes neutras aparece a orden de un lazo.

Algo muy diferente ocurre con las corrientes cargadas. En este caso, se tiene

$$
\begin{aligned}
\bar{U}'_L \gamma^\mu D'_L &= \bar{U}_L V_L^{u\dagger} \gamma^\mu V_L^d D_L \\
&= \bar{U}_L V_L^{u\dagger} V_L^d \gamma^\mu D_L,
\end{aligned}
$$

sea K= $V_L^{u\dagger} V_L^d$ la matriz de Kobayashi-Maskawa. Entonces,

$$
\bar{U}'_L \gamma^\mu D'_L = \bar{U}_L K \gamma^\mu D_L. \tag{3.71}
$$

Existe un efecto observable de interacciones entre quarks de diferentes familias que se transfiere desde el sector de Yukawa a través del proceso de rotación. Este es un fenómeno directamente relacionado con la definición de las masas de los fermiones quirales. Por lo tanto las corrientes cargadas cambian el sabor de los quarks. La presencia de este efecto de violación de sabor a nivel de acción clásica es responsable de que a orden de un lazo aparezca el fenómeno de cambio de sabor mediado por los bosones neutros Z, A y H (corrientes neutras con cambio de sabor).

Capítulo 4

El sector de Yukawa en 6 dimensiones

En este capítulo se presenta la contribución de esta tesis. El objectivo central es encontrar la representación espinorial del grupo de Lorentz en 6 dimensiones, determinando la forma explícita de las matrices de Dirac correspondientes, con el fin de estudiar la estructura del sector de Yukawa en un espacio-tiempo 6-dimensional, en el que además de las 4 dimensiones ordinarias del espacio-tiempo, se asume la existencia de dos coordenadas espaciales compactas.

4.1. Espinores en 6 dimensiones

Considere un espacio-tiempo plano de dimensión m, es decir, una variedad $\mathcal{M}^m = \mathcal{M}^4 \times \mathcal{N}^n$, donde n es el número de dimensiones extra. El grupo de Poincaré $ISO(1, m-1)$ en este espacio está definido a través de sus generadores, cuyo número es igual a $\frac{1}{2}m(m+1)$; donde m de estos generadores, denotados por P_M ($M = \mu, \bar{\mu}$, con $\mu = 0, 1, 2, 3$ y $\bar{\mu} = 5, ..., 4+n$), pertencen al grupo de las translaciones, y los restantes $\frac{1}{2}m(m-1)$, denotados por J_{MN}, están asociados con el grupo de Lorentz $SO(1, m-1)$. Estos generadores satisfacen la siguiente álgebra de Poincaré [4]

$$[P_M, P_N] = 0, \tag{4.1}$$

$$[J_{MN}, P_R] = i\left(g_{MR}P_N - g_{NR}P_M\right) \tag{4.2}$$

$$[J_{MN}, J_{RS}] = i\left(g_{MR}J_{NS} - g_{MS}J_{NR} - g_{NR}J_{MS} + g_{NS}J_{MR}\right). \tag{4.3}$$

Esta álgebra tiene 2 sub-álgebras unidas. Una de éstas corresponde al grupo de Poincaré estándar, la cual se denota con índices griegos, y que ya fue presentada en el capítulo 1.

$$\begin{aligned}
&[P_\mu, P_\nu] = 0,\\
&[J_{\mu\nu}, P_\rho] = i\left(g_{\mu\rho}P_\nu - g_{\nu\rho}P_\mu\right)\\
&[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i\left(g_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} + g_{\nu\sigma}J_{\mu\rho}\right).
\end{aligned}$$

Mientras que la otra álgebra está asociada con el grupo ortogonal inhomogéneo en n dimensiones $ISO(n)$, y cuyos índices correspondientes a las dimensiones extra son denotadas con índices griegos barra,

$$\begin{aligned}
&[P_{\bar{\mu}}, P_{\bar{\nu}}] = 0,\\
&[J_{\bar{\mu}\bar{\nu}}, P_{\bar{\rho}}] = i\left(g_{\bar{\mu}\bar{\rho}}P_{\bar{\nu}} - g_{\bar{\nu}\bar{\rho}}P_{\bar{\mu}}\right)\\
&[J_{\bar{\mu}\bar{\nu}}, J_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}] = i\left(g_{\bar{\mu}\bar{\rho}}J_{\bar{\nu}\bar{\sigma}} - g_{\bar{\mu}\bar{\sigma}}J_{\bar{\nu}\bar{\rho}} - g_{\bar{\nu}\bar{\rho}}J_{\bar{\mu}\bar{\sigma}} + g_{\bar{\nu}\bar{\sigma}}J_{\bar{\mu}\bar{\rho}}\right).
\end{aligned}$$

- **Transformación de campos**

Considere una transformación infinitesinal de Poincaré en la variedad $\mathcal{M}^m$,

$$X'_M = X_M + w_{MN}X^N + \epsilon_M, \tag{4.4}$$

donde $X \in \mathcal{M}^m$. Además, $w_{MN} = -w_{NM}$ y ϵ_M son los parámetros infinitesimales del grupo. Entonces

$$\delta X_M = w_{MN}X^N + \epsilon_M. \tag{4.5}$$

Campo vectorial

Bajo una transformación infinitesimal del grupo de Poincaré, un campo vectorial se transforma como

$$\mathcal{A}'_M(X) = [g_{MN} + w_{MN}]\mathcal{A}^N(X + \delta X). \tag{4.6}$$

Haciendo un desarrollo en serie a primer orden en la variación de la coordenada X, se tiene

$$\mathcal{A}'_M(X) = [g_{MN} + w_{MN}](\mathcal{A}^N(X) + \delta X_P \partial^P \mathcal{A}^N(X)),$$

esto es,

$$\mathcal{A}'_M(X) = g_{MN}\mathcal{A}^N(X) + w_{MN}\mathcal{A}^N(X) + g_{MN}(w_{PR}X^R + \epsilon_P)\partial^P \mathcal{A}^N(X),$$

de donde se obtiene que la variación del campo está dada por

$$\delta\mathcal{A}'_M(X) = [w_{MN} + g_{MN}(w_{PR}X^R + \epsilon_P)\partial^P]\mathcal{A}^N(X). \tag{4.7}$$

Esta relación puede dividirse naturalmente en variaciones de componentes de $\mathcal{A}_\mu(X)$ y $\mathcal{A}_{\bar{\mu}}(X)$ como sigue,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A}_\mu(X) &= [w_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}(w_{\lambda\rho}x^\rho + \epsilon_\lambda)\partial^\lambda]\mathcal{A}^\nu(X) \\ &\quad +[(w_{\bar{\mu}\bar{\nu}}x^{\bar{\nu}} + \epsilon_{\bar{\mu}})\partial^{\bar{\mu}} + w_{\mu\bar{\nu}}(X^{\bar{\nu}}\partial^\mu - x^\mu\partial^{\bar{\nu}})]\mathcal{A}_\mu(X) + w_{\mu\bar{\nu}}\mathcal{A}^{\bar{\nu}}(X), \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A}_{\bar{\mu}}(X) &= [w_{\bar{\mu}\bar{\nu}} + g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(w_{\bar{\lambda}\bar{\rho}}x^{\bar{\rho}} + \epsilon_{\bar{\lambda}})\partial^{\bar{\lambda}}]\mathcal{A}^{\bar{\nu}}(X) \\ &\quad +[(w_{\mu\nu}x^\nu + \epsilon_\mu)\partial^\mu + w_{\mu\bar{\nu}}(x^{\bar{\nu}}\partial^\mu - x^\mu\partial^{\bar{\nu}})]\mathcal{A}_{\bar{\mu}}(X) + w_{\bar{\mu}\nu}\mathcal{A}^\nu(X). \end{aligned} \tag{4.9}$$

De estas expresiones, podemos ver que $\mathcal{A}_\mu$ y $\mathcal{A}_{\bar{\mu}}$ se transforman bajo el grupo estándar de Lorentz $SO(1,3)$ como un vector y un escalar, respectivamente, mientras que bajo el grupo ortogonal $SO(n)$ se transforman como un escalar y un vector, respectivamente. Esto significa que el vector definido por el grupo grande de Poincaré $ISO(1, m-1)$ puede descomponerse en términos de objetos covariantes de los grupos $ISO(1,3)$ y $ISO(n)$. Estos objetos son $\mathcal{A}_\mu(X)$ y $\mathcal{A}_{\bar{\mu}}(X)$.

Campo Espinorial

En el estudio de esta representación de $SO(1, m-1)$, asumiremos que m es par, a modo de no perder la propiedad de quiralidad de los espinores. Del capítulo 1, sabemos que existen m matrices Γ_M de dimension $2^{\frac{m}{2}} \times 2^{\frac{m}{2}}$, tales que satisfacen el álgebra de Clifford, definida como

$$\{\Gamma_M, \Gamma_N\} = 2g_{MN},$$

donde la métrica se toma como $g_{MN} = diag(1, -1, -, ..., -1)$. También, sabemos que los generadores de la representación espinorial se definen como

$$S^{MN} = \frac{i}{4}[\Gamma^M, \Gamma^N].$$

Ahora bien, un espinor bajo el grupo de Lorentz $SO(1, m-1)$ se transforma como

$$\Psi'_A(X) = (\Lambda_S)_{AB}\Psi_B(X); \qquad \Lambda_S = e^{\frac{i}{2}w_{MN}S^{MN}}, \tag{4.10}$$

donde $(\Lambda_S)_{AB} \in SO(1, m-1)$, con $A = \alpha, \bar{\alpha}$, siendo $\alpha = 1,2,3,4$ y $\bar{\alpha} = 5, ..., 2^{\frac{m}{2}}$. Bajo una transformacion infinitesimal de Poincaré, tenemos que

$$\Psi'_A(X) = [\delta_{AB} + \frac{i}{2} w_{MN} (S^{MN})_{AB}] \Psi_B(X + \delta X). \tag{4.11}$$

Haciendo un desarrollo en serie a primer orden en la variación de la coordenada X, se obtiene

$$\Psi'_A(X) = [\delta_{AB} + \frac{i}{2} w_{MN} (S^{MN})_{AB}][\Psi_B(X) + \delta X_R \partial^R \Psi_B(X)],$$

esto es,

$$\begin{aligned}\Psi'_A(X) &= [\delta_{AB} + \frac{i}{2} w_{MN} (S^{MN})_{AB} + \delta_{AB}(w_{MN} X^N + \epsilon_M)\partial^M] \Psi_B(X) \\ &= \Psi_A(X) + \frac{i}{2} w_{MN} (S^{MN})_{AB} \Psi_B(X) + \delta_{AB}(w_{MN} X^N + \epsilon_M)\partial^M \Psi_B(X),\end{aligned}$$

así que la variación del espinor es dada por

$$\delta\Psi_A(X) = [\frac{i}{2} w_{MN} (S^{MN})_{AB} + \delta_{AB}(w_{MN} X^N + \epsilon_M)\partial^M] \Psi_B(X). \tag{4.12}$$

Podemos ver que esta relación puede dividirse en variaciones de $\Psi_\alpha(X)$ y $\Psi_{\bar{\alpha}}$ como sigue

$$\begin{aligned}\delta\Psi_\alpha(X) &= \frac{i}{2}[w_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_{\alpha\beta} + w_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(S^{\bar{\mu}\bar{\nu}})_{\alpha\beta} + 2w_{\mu\bar{\nu}}(S^{\mu\bar{\nu}})_{\alpha\beta}]\Psi_\beta(X) \\ &\quad +[\delta_{\alpha\beta}(w_{\mu\nu}x^\nu + \epsilon_\mu)\partial_\mu + \delta_{\alpha\beta}(w_{\bar{\mu}\bar{\nu}}x^{\bar{\nu}} + \epsilon_{\bar{\mu}})\partial_{\bar{\mu}} + \delta_{\alpha\beta}w_{\mu\bar{\nu}}(x^{\bar{\nu}}\partial_\mu - x^\mu\partial_{\bar{\nu}})]\Psi_\beta(X) \\ &\quad +\frac{i}{2}[w_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_{\alpha\bar{\beta}} + w_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(S^{\bar{\mu}\bar{\nu}})_{\alpha\bar{\beta}} + 2w_{\mu\bar{\nu}}(S^{\mu\bar{\nu}})_{\alpha\bar{\beta}}]\Psi_{\bar{\beta}}(X),\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}\delta\Psi_{\bar{\alpha}}(X) &= \frac{i}{2}[w_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} + w_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(S^{\bar{\mu}\bar{\nu}})_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} + 2w_{\mu\bar{\nu}}(S^{\mu\bar{\nu}})_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}]\Psi_{\bar{\beta}}(X) \\ &\quad +[\delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(w_{\mu\nu}x^\nu + \epsilon_\mu)\partial_\mu + \delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(w_{\bar{\mu}\bar{\nu}}x^{\bar{\nu}} + \epsilon_{\bar{\mu}})\partial_{\bar{\mu}} + \delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}w_{\mu\bar{\nu}}(x^{\bar{\nu}}\partial_\mu - x^\mu\partial_{\bar{\nu}})]\Psi_{\bar{\beta}}(X) \\ &\quad +\frac{i}{2}[w_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_{\bar{\alpha}\beta} + w_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(S^{\bar{\mu}\bar{\nu}})_{\bar{\alpha}\beta} + 2w_{\mu\bar{\nu}}(S^{\mu\bar{\nu}})_{\bar{\alpha}\beta}]\Psi_\beta(X).\end{aligned} \tag{4.14}$$

Por lo que el espinor que se transforma bajo el grupo grande de Poincaré $ISO(1, m-1)$ puede descomponerse en términos de objetos covariantes de los grupos $ISO(1,3)$ y $ISO(n)$. Las transformaciones estándar de Poincaré están definidas por las condiciones $w_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = w_{\mu\bar{\nu}} = \epsilon_{\bar{\mu}} = 0$. En este caso, las ecuaciones (4.13) y (4.14) toman la forma

$$\delta\Psi_\alpha(X) = \left[\frac{i}{2}[w_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_{\alpha\beta}] + \delta_{\alpha\beta}(w_{\mu\nu}x^\nu + \epsilon_\mu)\partial_\mu\right]\Psi_\beta(X) + \frac{i}{2}[w_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_{\alpha\bar{\beta}}]\Psi_{\bar{\beta}}(X), \tag{4.15}$$

$$\delta\Psi_{\bar{\alpha}}(X) = \left[\frac{i}{2}[w_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}] + \delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(w_{\mu\nu}x^\nu + \epsilon_\mu)\partial_\mu\right]\Psi_{\bar{\beta}}(X) + \frac{i}{2}[w_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_{\bar{\alpha}\beta}]\Psi_\beta(X). \tag{4.16}$$

De estas últimas dos expresiones no podemos concluir aún como se transforman estos objetos bajo el grupo de Lorentz estándar $SO(1,3)$, ya que necesitamos saber como son los generadores S^{MN} explícitamente.

Hasta el momento todo lo que hemos hecho es muy general, ya que todo fue desarrollado en el contexto de un espacio-tiempo de dimensión m. Como ya fue mencionado, el objetivo de esta tesis es estudiar la estructura del sector de Yukawa en un espacio-tiempo de dimensión $m = 6$, por lo que en lo que sigue restringiremos nuestro análisis a esta dimensión. Entonces, un primer paso consiste en construir los generadores de la representación espinorial en esta dimensión. Para tal fin, necesitamos determinar las matrices de Dirac, que en esta dimensión son 6 Γ_M ($M = \mu, \bar{\mu}$, con $\mu = 0, 1, 2, 3$ y $\bar{\mu} = 5, 6$) y tienen dimensión 8 × 8. La estructura de dichas matrices está determinada por el álgebra de Clifford. Para construir dichas matrices, se tomará como base las matrices de Dirac en 4 dimensiones. Pero antes, necesitamos definir el producto directo de matrices. Sean

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

dos matrices generales. El producto directo de matrices (producto de Kronecker) se define como

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}. \tag{4.17}$$

Tomando esta convención, podemos expresar las matrices de Dirac 4-dimensionales como el producto directo de las matrices de Pauli con ellas mismas, o con la identidad, esto es[1],

$$\gamma^0 = (\sigma^3 \otimes \mathbb{1}_2), \quad \gamma^i = i(\sigma^2 \otimes \sigma^i), \quad \gamma^5 = (\sigma^1 \otimes \mathbb{1}_2). \tag{4.18}$$

con i=1, 2, 3. Ahora usemos estas matrices para construir las matrices Γ_M en 6 dimensiones. Se proponen las siguientes,

$$\Gamma^0 = (\sigma^2 \otimes \gamma^0) = \begin{pmatrix} 0_4 & -i\gamma^0 \\ i\gamma^0 & 0_4 \end{pmatrix}, \tag{4.19}$$

$$\Gamma^j = (\sigma^2 \otimes \gamma^j) = \begin{pmatrix} 0_4 & -i\gamma^j \\ i\gamma^j & 0_4 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3 \tag{4.20}$$

$$\Gamma^5 = (i\sigma^2 \otimes \gamma^5) = \begin{pmatrix} 0_4 & \gamma^5 \\ -\gamma^5 & 0_4 \end{pmatrix}, \tag{4.21}$$

$$\Gamma^6 = (i\sigma^3 \otimes \mathbb{1}) = i\begin{pmatrix} \mathbb{1}_4 & 0_4 \\ 0_4 & -\mathbb{1}_4 \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

Dichas matrices satisfacen el álgebra de Clifford, es decir,

$$\{\Gamma_M, \Gamma_N\} = 2g_{MN}, \tag{4.23}$$

donde $g_{MN} = diag(1, -1, -1, -1, -1, -1)$. Se deduce que estas matrices tienen las siguientes propiedades

$$\Gamma^{0\dagger} = \Gamma^0; \quad \Gamma^i = -\Gamma^{i\dagger}; \quad \Gamma^5 = -\Gamma^{5\dagger}, \quad \Gamma^6 = -\Gamma^{6\dagger}. \tag{4.24}$$

Como la dimensión en la que trabajamos es par, sabemos que debe de existir una matriz Γ^7 que satisfaga $\left\{\Gamma^7, \Gamma^M\right\} = 0$ y $(\Gamma^7)^2 = \mathbb{1}$, la cual está definida por

$$\Gamma^7 = -\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\Gamma^3\Gamma^5\Gamma^6 = (\sigma^1 \otimes \mathbb{1}_4) = \begin{pmatrix} 0_4 & \mathbb{1}_4 \\ \mathbb{1}_4 & 0_4 \end{pmatrix}. \tag{4.25}$$

Dicha matriz es hermítica.

Por lo tanto ya podemos construir los generadodes de la representación espinorial para esta dimensión, ya que como sabemos $S^{MN} = \frac{i}{4}[\Gamma^M, \Gamma^N]$, entonces utilizando la definición de los generadores y propiedades del producto directo se tiene que[2]

[1]Los subíndices representan la dimensión de la matriz, por ejemplo $\mathbb{1}_2$ es la matriz identidad 2×2.
[2]Los subíndices indican la dimensión de los generadores, o de las matrices.

$$
\begin{aligned}
S_6^{0i} &= \frac{i}{4}[\Gamma^0,\Gamma^i] = \frac{i}{4}(\mathbb{1}_2 \otimes [\gamma^0,\gamma^i]) = \frac{i}{4}\begin{pmatrix} [\gamma^0,\gamma^i] & 0_4 \\ 0_4 & [\gamma^0,\gamma^i] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_4^{0i} & 0_4 \\ 0_4 & S_4^{0i} \end{pmatrix};\\
S_6^{ij} &= \frac{i}{4}[\Gamma^i,\Gamma^j] = \frac{i}{4}(\mathbb{1}_2 \otimes [\gamma^i,\gamma^j]) = \frac{i}{4}\begin{pmatrix} [\gamma^i,\gamma^j] & 0_4 \\ 0_4 & [\gamma^i,\gamma^j] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_4^{ij} & 0_4 \\ 0_4 & S_4^{ij} \end{pmatrix};\\
S_6^{05} &= \frac{i}{4}[\Gamma^0,\Gamma^5] = \frac{i}{4}(\mathbb{1}_2 \otimes i[\gamma^0,\gamma^5]) = \frac{i}{4}\begin{pmatrix} i[\gamma^0,\gamma^5] & 0_4 \\ 0_4 & i[\gamma^0,\gamma^5] \end{pmatrix};\\
S_6^{i5} &= \frac{i}{4}[\Gamma^i,\Gamma^5] = \frac{i}{4}(\mathbb{1}_2 \otimes i[\gamma^i,\gamma^5]) = \frac{i}{4}\begin{pmatrix} i[\gamma^i,\gamma^5] & 0_4 \\ 0_4 & i[\gamma^i,\gamma^5] \end{pmatrix};\\
S_6^{i6} &= \frac{i}{4}[\Gamma^i,\Gamma^6] = \frac{i}{4}(i[\sigma^2,\sigma^3] \otimes \gamma^i);\\
S_6^{06} &= \frac{i}{4}[\Gamma^0,\Gamma^6] = \frac{i}{4}(i[\sigma^2,\sigma^3] \otimes \gamma^0);\\
S_6^{56} &= \frac{i}{4}[\Gamma^5,\Gamma^6] = \frac{i}{4}(i[\sigma^2,\sigma^3] \otimes i\gamma^5),
\end{aligned}
$$

con $i, j = 1, 2, 3$. Como vemos los generadores son matrices de $8{\times}8$, cuyas componentes denotaremos de la siguiente manera $\{S^{MN}\}_{AB}$, donde A=$\alpha, \bar{\alpha}$, con α=1, 2, 3, 4 y $\bar{\alpha}$= 5, 6, 7, 8. Por otro lado los generadores S_6^{0i} y S_6^{ij} se pueden escribir de la siguiente forma

$$
S_6^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} S_4^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & S_4^{\mu\nu} \end{pmatrix}, \tag{4.26}
$$

es decir los generadores $S_6^{\mu\nu}$ bajo SO(1,5) en 6 dimensiones, se pueden escribir en forma covariante en términos de los generadores $S_4^{\mu\nu}$ bajo SO(1,3) en 4 dimensiones, mas explícitamente vemos que las componentes $(S^{\mu\nu})_{\alpha\beta}$ y $(S^{\mu\nu})_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ coinciden con las componentes de los generadores en la dimensión 4, y las componentes $(S^{\mu\nu})_{\bar{\alpha}\beta}$ y $(S^{\mu\nu})_{\alpha\bar{\beta}}$ son cero, es importante poder conocer estas componentes, ya que de acuerdo con las ecuaciones (4.15) y (4.16) se necesitan conocer para poder determinar como se transforman los espinores bajo el grupo de Lorentz estándar SO(1,3). Por lo tanto la transformación infinitesimal para las componentes de los espinores en 6 dimensiones, queda finalmente como

$$
\delta\Psi_\alpha(X) = \left[\frac{i}{2}[w_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_{\alpha\beta}] + \delta_{\alpha\beta}(w_{\mu\nu}x^\nu + \epsilon_\mu)\partial_\mu\right]\Psi_\beta(X), \tag{4.27}
$$

$$
\delta\Psi_{\bar{\alpha}}(X) = \left[\frac{i}{2}[w_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}] + \delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(w_{\mu\nu}x^\nu + \epsilon_\mu)\partial_\mu\right]\Psi_{\bar{\beta}}(X). \tag{4.28}
$$

Lo que indica que $\Psi_\alpha(X)$ y $\Psi_{\bar{\alpha}}(X)$ se transforman como espinores, cada uno bajo el grupo de Lorentz SO(1,3).

Por lo tanto ahora sabemos que los espinores en 6 dimensiones, bajo el grupo de Lorentz SO(1,5), se transforman independientemente como 2 espinores covariantes de dimensión 4 bajo el grupo de Lorentz SO(1,3). Así podemos escribir cualquier espinor de dimensión 6, el cual tiene 8 componentes de la siguiente forma

$$
\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \hat{\psi} \end{pmatrix}, \tag{4.29}
$$

donde ψ y $\hat{\psi}$ son objetos de 4 componentes que se transforman en la representación espinorial de $SO(1,3)$. Se sigue que los objetos

$$
\Psi_{(L,R)} = \begin{pmatrix} \psi_{(L,R)} \\ \hat{\psi}_{(L,R)} \end{pmatrix}, \tag{4.30}
$$

donde $\psi_{(L,R)}$ y $\hat{\psi}_{(L,R)}$ tienen 4 componentes, se transforman como espinores derechos e izquierdos bajo $SO(1,3)$.

4.2. Sector de Yukawa

En el capítulo anterior se presentó a detalle el sector de Yukawa del modelo estándar en 4 dimensiones. Como ya se mencionó, el objetivo de esta tesis es estudiar este mismo sector en el espacio tiempo con dos dimensiones extra compactas. Las coordenadas 4-dimensionales serán denotadas por x, y por y las dos coordenadas extras. La lagrangiana invariante bajo $SU_{L,6D}(2) \times U_{Y,6D}(1)$ es [3]

$$\mathcal{L}^{Y}_{6D}(x,y) = \mathcal{L}^{l}_{6D}(x,y) + \mathcal{L}^{q}_{6D}(x,y), \tag{4.31}$$

donde el primer término corresponde al sector de leptones, mientras que el último término representa el sector de quarks. En el capítulo anterior vimos que ambos sectores tienen una estructura muy similar. Por lo tanto, nos concentraremos primero en desarrollar detalladamente el término referente al sector de Yukawa leptónico. Tomando a éste como base, el desarrollo del sector de quarks es inmediato. El sector de Yukawa de leptones en 6 dimensiones puede ser escrito como

$$\mathcal{L}^{l}_{6D}(x,y) = -\hat{Y}^{l}_{ij}\bar{L}_{i6D}(x,y)\Phi_{6D}(x,y)I_{Rj6D}(x,y) + h.c., \tag{4.32}$$

donde $-\hat{Y}^{l}_{ij}$ es una matriz 3×3, la cual es completamente general y tiene dimensión de inverso de masa, $[m^{-1}]$. Además, $\Phi_{6D}(x,y)$ es el doblete de Higgs en 6 dimensiones. Por otro lado

$$\bar{L}_{i6D}(x,y) = \begin{pmatrix} N_{i6D}(x,y) \\ I_{i6D}(x,y) \end{pmatrix}_L ,$$

es el doblete leptónico en 6 dimensiones, donde N_{Li}, I_{Li}, I_{Ri} son espinores en 6 dimensiones de 8 componentes. Como vimos en la sección anterior los espinores en esta dimensión se pueden descomponer en 2 objetos de 4 componentes que se transforman como espinores bajo el grupo de Lorentz estándar $SO(1,3)$. Entonces, sean

$$N_{Li6D}(x,y) = \begin{pmatrix} \nu_{Li4D}(x,y) \\ \hat{\nu}_{Li4D}(x,y) \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

y

$$I_{(Li,Ri)6D}(x,y) = \begin{pmatrix} l_{(Li,Ri)4D}(x,y) \\ \hat{l}_{(Li,Ri)4D}(x,y) \end{pmatrix}, \tag{4.34}$$

donde ν y $\hat{\nu}$ representan leptones neutros (neutrinos); mientras que l y $\hat{l}$ representan leptones cargados.

Tomando en cuenta las consideraciones hechas acerca de los dobletes y singletes, y omitiendo los subíndices de la dimensión en la que se trabaja, así como la dependencia en las coordenadas,

[3] El subíndice 6D, índica que los parámetros del grupo tomarán valores en el espacio 6-dimensional.

la expresión de la lagrangiana de sector de Yukawa leptónico queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^l_{6D} &= -\hat{Y}^l_{ij}\{\left(\bar{N}_{Li}, \bar{I}_{Ri}\right)\begin{pmatrix} G^+_w \\ \phi_0 \end{pmatrix} I_{Rj} + h.c. \\
&= -\hat{Y}^l_{ij}\{\bar{N}_{Li}G^+_w I_{Rj} + \bar{I}_{Ri}\phi_0 I_{Rj}\} + h.c. \\
&= -\hat{Y}^l_{ij}\{(\bar{\nu}_{Li}, \bar{\hat{\nu}}_{Li})\begin{pmatrix} l_{Rj} \\ \hat{l}_{Rj} \end{pmatrix} G^+_w + (\bar{l}_{Li}, \bar{\hat{l}}_{Li})\begin{pmatrix} l_{Rj} \\ \hat{l}_{Rj} \end{pmatrix}\phi_0\} + h.c. \\
&= -\hat{Y}^l_{ij}\{(\bar{\nu}_{Li} l_{Rj} + \bar{\hat{\nu}}_{Li}\hat{l}_{Rj})G^+_w + (\bar{l}_{Li} l_{Rj} + \bar{\hat{l}}_{Li}\hat{l}_{Rj})\phi_0\} + h.c. \\
&= -\hat{Y}^l_{ij}\{(\bar{\nu}_{Li}, \bar{l}_{Li})\begin{pmatrix} G^+_w \\ \phi_0 \end{pmatrix} l_{Rj} + (\bar{\hat{\nu}}_{Li}, \bar{\hat{l}}_{Li})\begin{pmatrix} G^+_w \\ \phi_0 \end{pmatrix}\hat{l}_{Rj}\} + h.c. \\
&= -\hat{Y}^l_{ij}\{\bar{L}_i(x,y)\Phi(x,y)l_{Rj} + \bar{\hat{L}}_i(x,y)\Phi(x,y)\hat{l}_{Rj}\} + h.c.\,, \qquad (4.35)
\end{aligned}$$

donde

$$L_i(x,y) = \begin{pmatrix} \nu_i \\ l_i \end{pmatrix}_L \qquad (4.36)$$

$$\hat{L}_i(x,y) = \begin{pmatrix} \hat{\nu}_i \\ \hat{l}_i \end{pmatrix}_L\,, \qquad (4.37)$$

son dobletes izquierdos de $SU_L(2)$, cuyas componentes son espinores de $SO(1,3)$. Note que esta lagrangiana es invariante bajo los grupos estándar $SU_L(2) \times U_Y(1)$ y $ISO(1,3)$. Tomando como base esta expresión, no es difícil convencerse de que el sector de Yukawa completo puede ser escrito como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^Y_{6D} = &-\hat{Y}^l_{ij}\{\bar{L}_i(x,y)\Phi(x,y)l_{Rj}(x,y) + \bar{\hat{L}}_i(x,y)\Phi(x,y)\hat{l}_{Rj}(x,y)\} + h.c. \\
&-\hat{Y}^u_{ij}\{\bar{Q}_i(x,y)\tilde{\Phi}(x,y)U_{Rj}(x,y) + \bar{\hat{Q}}_i(x,y)\tilde{\Phi}(x,y)\hat{U}_{Rj}(x,y)\} + h.c. \\
&-\hat{Y}^d_{ij}\{\bar{Q}_i(x,y)\Phi(x,y)D_{Rj}(x,y) + \bar{\hat{Q}}_i(x,y)\Phi(x,y)\hat{D}_{Rj}(x,y)\} + h.c. \qquad (4.38)
\end{aligned}$$

4.3. Compactificación

Hasta ahora todas las coordenadas fueron tratadas de igual forma, pero los experimentos indican que de existir dimensiones extra, éstas deben ser más pequeñas que la distancia más pequeña explorada en la actualidad. De esta manera las coordenadas y deben estar compactificadas. La forma más simple es suponer que están compactificadas en círculos, de esta manera denotaremos a una de las coordenadas como y^1 la cual se asumira que esta compactificada en el círculo S^1 de radio R_1, y denotaremos a la otra coordenada como y^2, la cual estará compactificada en el círculo S^2 de radio R_2. Por razones que quedaran más claras adelante, se hacen corresponder pares de puntos de los círculos con la orbifold $(S^1/Z_2) \times (S^2/Z_2)$, esta elección establece condiciones de periodicidad y paridad, en los dobletes, los singletes y el doblete de Higgs con respecto a las dimensiones extras. Las condiciones de periodicidad y paridad que se muestran acontinuación sólo se centran en el sector de Yukawa leptónico, pero se imponen las mismas condiciones de periodicidad y paridad para el sector de Yukawa de quarks. Las condiciones de periodicidad son dadas por

$$\begin{aligned}
L_i(x,y) &= L_i(x,y+R), \\
l_{Ri}(x,y) &= l_{Ri}(x,y+R), \\
\hat{L}_i(x,y) &= \hat{L}_i(x,y+R), \\
\hat{l}_{Ri}(x,y) &= \hat{l}_{Ri}(x,y+R) \\
\Phi(x,y) &= \Phi(x,y+R),
\end{aligned}$$

y expresiones similares para los quarks. En estas expresiones, R $= (R_1, R_2)$. Por otra parte, las condiciones de paridad son útiles para reproducir el sector de Yukawa del Modelo Estándar en el límite en que $R \to 0$. Dado que los campos de la teoría de dimensión 4 corresponden a los modos cero de la serie de Fourier, es claro que el doblete de Higgs debe ser elegido par:

$$\Phi(x, y) = \Phi(x, -y) \,. \tag{4.39}$$

Por otra parte, en la teoría de dimensión 6 tenemos dos tipos de espinores para cada tipo de lepton y quark, los cuales se transforman de idéntica forma bajo los grupos de norma y de Lorentz, así que para reproducir la teoría estándar cualquiera de los espinores de tipo ψ o $\bar{\psi}$ puede ser elegido para reproducir la teoría estándar, esto es, cualquiera de los dos puede ser elegido par. Una vez elegido éste, el otro tipo de espinor debe, necesariamente, ser elegido impar. Asumiremos las siguientes condiciones de paridad:

$$\begin{aligned} L_i(x, y) &= L_i(x, -y), & (4.40) \\ l_{Rj}(x, y) &= l_{Rj}(x, -y) \,, & (4.41) \end{aligned}$$

en tanto que

$$\begin{aligned} \hat{L}_i(x, y) &= -\hat{L}_i(x, -y), & (4.42) \\ \hat{l}_{Rj}(x, y) &= -\hat{l}_{Rj}(x, -y) \,. & (4.43) \end{aligned}$$

Dadas las propiedades de periodicidad y paridad establecidas arriba, podemos expresar los dobletes y singletes leptónicos, así como el doblete de Higgs en series de Fourier en el intervalo $0 \leq y \leq R$, con respecto a las coordenadas y^1 y y^2. Dichas series están dadas por

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}} \psi^{(0,0)}(x) + \sum_{m_1=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{R_1 R_2}} \psi^{(m_1,0)}(x) cos\left(2\pi \frac{m_1 y^1}{R_1}\right) \\ &+ \sum_{m_2=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{R_1 R_2}} \psi^{(0,m_2)}(x) cos\left(2\pi \frac{m_2 y^2}{R_2}\right) \\ &+ \sum_{m_1,m_2=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{R_1 R_2}} \psi^{(m_1,m_2)}(x) cos\left(2\pi\left(\frac{m_1 y^1}{R_1} + \frac{m_2 y^2}{R_2}\right)\right) . \end{aligned} \tag{4.44}$$

Mientras que para los dobletes y singletes con gorro, su desarrollo en serie es

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(x, y) &= \sum_{m_1=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{R_1 R_2}} \hat{\psi}^{(m_1,0)}(x) sin\left(2\pi \frac{m_1 y^1}{R_1}\right) \\ &+ \sum_{m_2=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{R_1 R_2}} \hat{\psi}^{(0,m_2)}(x) sin\left(2\pi \frac{m_2 y^2}{R_2}\right) \\ &+ \sum_{m_1,m_2=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{R_1 R_2}} \hat{\psi}^{(m_1,m_2)}(x) sin\left(2\pi\left(\frac{m_1 y^1}{R_1} + \frac{m_2 y^2}{R_2}\right)\right) . \end{aligned} \tag{4.45}$$

Finalmente para el doblete de Higgs su serie de Fourier está dada como

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}} \Phi^{(0,0)}(x) + \sum_{m_1=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{R_1 R_2}} \Phi^{(m_1,0)}(x) cos\left(2\pi \frac{m_1 y^1}{R_1}\right) \\ &+ \sum_{m_2=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{R_1 R_2}} \Phi^{(0,m_2)}(x) cos\left(2\pi \frac{m_2 y^2}{R_2}\right) \\ &+ \sum_{m_1,m_2=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{R_1 R_2}} \Phi^{(m_1,m_2)}(x) cos\left(2\pi\left(\frac{m_1 y^1}{R_1} + \frac{m_2 y^2}{R_2}\right)\right) \end{aligned} \tag{4.46}$$

Usando los desarrollos de Fourier para los campos en el sector leptónico, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{l}_{6D} &= -\hat{Y}^{l}_{ij}\Bigg\{\Bigg[\frac{1}{\sqrt{R_1R_2}}\bar{L}_i^{(0,0)}(x) + \sum_{m_1=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\bar{L}_i^{(m_1,0)}(x)cos(2\pi\frac{m_1y^1}{R_1}) \\
&+ \sum_{m_2=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\bar{L}_i^{(0,m_2)}(x)cos(2\pi\frac{m_2y^2}{R_2}) \\
&+ \sum_{m_1,m_2=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\bar{L}_i^{(m_1,m_2)}(x)cos(2\pi(\frac{m_1y^1}{R_1}+\frac{m_2y^2}{R_2}))\Bigg]\cdot\Bigg[\frac{1}{\sqrt{R_1R_2}}\Phi^{(0,0)}(x) \\
&+ \sum_{m_1'=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\Phi^{(m_1',0)}(x)cos(2\pi\frac{m_1'y^1}{R_1}) + \sum_{m_2'=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\Phi^{(0,m_2')}(x)cos(2\pi\frac{m_2'y^2}{R_2}) \\
&+ \sum_{m_1',m_2'=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\Phi^{(m_1',m_2')}(x)cos(2\pi(\frac{m_1'y^1}{R_1}+\frac{m_2'y^2}{R_2}))\Bigg]\cdot\Bigg[\frac{1}{\sqrt{R_1R_2}}l_{Rj}^{(0,0)}(x) \\
&+ \sum_{m_1''=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}l_{Rj}^{(m_1'',0)}(x)cos(2\pi\frac{m_1''y^1}{R_1}) + \sum_{m_2''=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}l_{Rj}^{(0,m_2'')}(x)cos(2\pi\frac{m_2''y^2}{R_2}) \\
&+ \sum_{m_1'',m_2''=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}l_{Rj}^{(m_1'',m_2'')}(x)cos(2\pi(\frac{m_1''y^1}{R_1}+\frac{m_2''y^2}{R_2}))\Bigg] \\
&+\Bigg[\sum_{m_1=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\bar{\hat{L}}_i^{(m_1,0)}(x)sin(2\pi\frac{m_1y^1}{R_1}) + \sum_{m_2=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\bar{\hat{L}}_i^{(0,m_2)}(x)sin(2\pi\frac{m_2y^2}{R_2}) \\
&+ \sum_{m_1,m_2=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\bar{\hat{L}}_i^{(m_1,m_2)}(x)sin(2\pi(\frac{m_1y^1}{R_1}+\frac{m_2y^2}{R_2}))\Bigg]\cdot\Bigg[\frac{1}{\sqrt{R_1R_2}}\Phi^{(0,0)}(x) \\
&+ \sum_{m_1'=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\Phi^{(m_1',0)}(x)cos(2\pi\frac{m_1'y^1}{R_1}) + \sum_{m_2'=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\Phi^{(0,m_2')}(x)cos(2\pi\frac{m_2'y^2}{R_2}) \\
&+ \sum_{m_1',m_2'=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\Phi^{(m_1',m_2')}(x)cos(2\pi(\frac{m_1'y^1}{R_1}+\frac{m_2'y^2}{R_2}))\Bigg]\cdot \\
&\Bigg[\sum_{m_1''=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\bar{\hat{l}}_{Rj}^{(m_1'',0)}(x)sin(2\pi\frac{m_1''y^1}{R_1}) + \sum_{m_2''=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\bar{\hat{l}}_{Rj}^{(0,m_2'')}(x)sin(2\pi\frac{m_2''y^2}{R_2}) \\
&+ \sum_{m_1'',m_2''=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{R_1R_2}}\bar{\hat{l}}_{Rj}^{(m_1'',m_2'')}(x)sin(2\pi(\frac{m_1''y^1}{R_1}+\frac{m_2''y^2}{R_2}))\Bigg]\Bigg\} + h.c. \qquad (4.47)
\end{aligned}$$

Todos estos términos tienen su correspondiente en el sector de quarks, lo único que cambia es el nombre de los dobletes y singletes. Ahora se procede a integrar las coordenadas compactas. El procedimiento es directo usando las propiedades de las funciones trigonométricas y ciertas integrales que dependen de productos de éstas (ver ápendice). Una vez realizadas las integrales, definimos constantes de Yukawa adimensionales dadas por la relación $Y^l_{ij} = \frac{\hat{Y}^l_{ij}}{\sqrt{R_1R_2}}$. Finalmente, la lagrangiana efectiva 4-dimensional del sector de Yukawa leptónico queda de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{l}_{4D} &= \int_0^{R_1} dy^1 \int_0^{R_2} dy^2 \mathcal{L}^{l}_{6D} \\ &= -Y^{l}_{ij}\Big\{ \bar{L}_i^{(0,0)}(x)\Phi^{(0,0)}(x) l_{Rj}^{(0,0)}(x) + \mathcal{L}_l^{(0,0)} + \mathcal{L}_l^{(m_1,0)} \\ &\quad + \mathcal{L}_l^{(0,m_2)} + \mathcal{L}_l^{(m_1,m_2)} \Big\} + h.c. \end{aligned} \tag{4.48}$$

donde $\mathcal{L}_l^{(0,0)}$ representa parte de la lagrangiana que tiene todos lo modos cero del doblete de Higgs, es decir,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_l^{(0,0)} &= \bar{L}_i^{(m_1,0)}(x)\Phi^{(0,0)}(x) l_{Rj}^{(m_1,0)}(x) + \bar{\hat{L}}_i^{(m_1,0)}(x)\Phi^{(0,0)}(x)\hat{l}_{Rj}^{(m_1,0)}(x) \\ &\quad + \bar{L}_i^{(0,m_2)}(x)\Phi^{(0,0)}(x) l_{Rj}^{(0,m_2)}(x) + \bar{\hat{L}}_i^{(0,m_2)}(x)\Phi^{(0,0)}(x)\hat{l}_{Rj}^{(0,m_2)}(x) \\ &\quad + \bar{L}_i^{(m_1,m_2)}(x)\Phi^{(0,0)}(x) l_{Rj}^{(m_1,m_2)}(x) + \bar{\hat{L}}_i^{(m_1,m_2)}(x)\Phi^{(0,0)}(x)\hat{l}_{Rj}^{(m_1,m_2)}(x). \end{aligned}$$

Ahora $\mathcal{L}_l^{(m_1,0)}$ representa parte de la lagrangiana que tiene todos lo modos m_1 del doblete de Higgs, el cual es

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_l^{(m_1,0)} &= \bar{L}_i^{(m_1,0)}(x)\Phi^{(m_1,0)}(x) l_{Rj}^{(0,0)}(x) + \bar{L}_i^{(0,0)}(x)\Phi^{(m_1',0)}(x) l_{Rj}^{(m_1',0)}(x) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{ \bar{L}_i^{(m_1,m_2)}(x)\Phi^{(m_1,0)}(x) l_{Rj}^{(0,m_2)}(x) + \bar{\hat{L}}_i^{(m_1,m_2)}(x)\Phi^{(m_1,0)}(x)\hat{l}_{Rj}^{(0,m_2)}(x) \\ &\quad + \bar{L}_i^{(m_1,0)}(x)\Phi^{(m_1',0)}(x) l_{Rj}^{(m_1+m_1',0)}(x) + \bar{\hat{L}}_i^{(m_1,0)}(x)\Phi^{(m_1',0)}(x)\hat{l}_{Rj}^{(m_1+m_1',0)}(x) \\ &\quad + \bar{L}_i^{(m_1'+m_1'',0)}(x)\Phi^{(m_1',0)}(x) l_{Rj}^{(m_1'',0)}(x) + \bar{\hat{L}}_i^{(m_1'+m_1'',0)}(x)\Phi^{(m_1',0)}(x)\hat{l}_{Rj}^{(m_1'',0)}(x) \\ &\quad + \bar{L}_i^{(0,m_2)}(x)\Phi^{(m_1',0)}(x) l_{Rj}^{(m_1',m_2)}(x) + \bar{\hat{L}}_i^{(0,m_2)}(x)\Phi^{(m_1',0)}(x)\hat{l}_{Rj}^{(m_1',m_2)}(x) \\ &\quad + \bar{L}_i^{(m_1,m_2)}(x)\Phi^{(m_1',0)}(x) l_{Rj}^{(m_1+m_1',m_2)}(x) + \bar{\hat{L}}_i^{(m_1,m_2)}(x)\Phi^{(m_1',0)}(x)\hat{l}_{Rj}^{(m_1+m_1',m_2)}(x) \\ &\quad + \bar{L}_i^{(m_1'+m_1'',m_2)}(x)\Phi^{(m_1',0)}(x) l_{Rj}^{(m_1'',m_2)}(x) + \bar{\hat{L}}_i^{(m_1'+m_1'',m_2)}(x)\Phi^{(m_1',0)}(x)\hat{l}_{Rj}^{(m_1'',m_2)}(x) \\ &\quad + \bar{L}_i^{(m_1,0)}(x)\Phi^{(m_1+m_1'',0)}(x) l_{Rj}^{(m_1'',0)}(x) - \bar{\hat{L}}_i^{(m_1,0)}(x)\Phi^{(m_1+m_1'',0)}(x)\hat{l}_{Rj}^{(m_1'',0)}(x)\Big\}. \end{aligned}$$

Lo mismo ocurre para $\mathcal{L}_l^{(0,m_2)}$ representa parte de la lagrangiana que tiene todos lo modos m_2 del doblete de Higgs, y este es

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_l^{(0,m_2)} &= \bar{L}_i^{(0,m_2)}(x)\Phi^{(0,m_2)}(x) l_{Rj}^{(0,0)}(x) + \bar{L}_i^{(0,0)}(x)\Phi^{(0,m_2')}(x) l_{Rj}^{(0,m_2')}(x) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{ \bar{L}_i^{(m_1,m_2)}(x)\Phi^{(0,m_2)}(x) l_{Rj}^{(m_1,0)}(x) + \bar{\hat{L}}_i^{(m_1,m_2)}(x)\Phi^{(0,m_2)}(x)\hat{l}_{Rj}^{(m_1,0)}(x) \\ &\quad + \bar{L}_i^{(0,m_2)}(x)\Phi^{(0,m_2')}(x) l_{Rj}^{(0,m_2+m_2')}(x) + \bar{\hat{L}}_i^{(0,m_2)}(x)\Phi^{(0,m_2')}(x)\hat{l}_{Rj}^{(0,m_2+m_2')}(x) \\ &\quad + \bar{L}_i^{(0,m_2'+m_2'')}(x)\Phi^{(0,m_2')}(x) l_{Rj}^{(0,m_2'')}(x) + \bar{\hat{L}}_i^{(0,m_2'+m_2'')}(x)\Phi^{(0,m_2')}(x)\hat{l}_{Rj}^{(0,m_2'')}(x) \\ &\quad + \bar{L}_i^{(m_1,0)}(x)\Phi^{(0,m_2')}(x) l_{Rj}^{(m_1,m_2')}(x) + \bar{\hat{L}}_i^{(m_1,0)}(x)\Phi^{(0,m_2')}(x)\hat{l}_{Rj}^{(m_1,m_2')}(x) \\ &\quad + \bar{L}_i^{(m_1,m_2)}(x)\Phi^{(0,m_2')}(x) l_{Rj}^{(m_1,m_2+m_2')}(x) + \bar{\hat{L}}_i^{(m_1,m_2)}(x)\Phi^{(0,m_2')}(x)\hat{l}_{Rj}^{(m_1,m_2+m_2')}(x) \\ &\quad + \bar{L}_i^{(m_1,m_2'+m_2'')}(x)\Phi^{(0,m_2')}(x) l_{Rj}^{(m_1,m_2'')}(x) + \bar{\hat{L}}_i^{(m_1,m_2'+m_2'')}(x)\Phi^{(0,m_2')}(x)\hat{l}_{Rj}^{(m_1,m_2'')}(x) \\ &\quad + \bar{L}_i^{(0,m_2)}(x)\Phi^{(0,m_2+m_2'')}(x) l_{Rj}^{(0,m_2'')}(x) - \bar{\hat{L}}_i^{(0,m_2)}(x)\Phi^{(0,m_2+m_2'')}(x)\hat{l}_{Rj}^{(0,m_2'')}(x)\Big\}. \end{aligned}$$

Finalmente $\mathcal{L}_l^{(m_1,m_2)}$ representa parte de la lagrangiana que tiene la combinación de los modos m_1 y m_2 del doblete de Higgs, el cual es

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(m_1,m_2)} \quad = \quad & \bar{L}_i^{(m_1,m_2)}(x)\Phi^{(m_1,m_2)}(x)l_{Rj}^{(0,0)}(x) + \bar{L}_i^{(0,0)}(x)\Phi^{(m_1',m_2')}(x)l_{Rj}^{(m_1',m_2')}(x) \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{ \bar{L}_i^{(m_1,0)}(x)\Phi^{(m_1,m_2')}(x)l_{Rj}^{(0,m_2')}(x) - \bar{\hat{L}}_i^{(m_1,0)}(x)\Phi^{(m_1,m_2')}(x)l_{Rj}^{(0,m_2')}(x) \\
& + \bar{L}_i^{(0,m_2)}(x)\Phi^{(m_1',m_2)}(x)l_{Rj}^{(m_1',0)}(x) - \bar{\hat{L}}_i^{(0,m_2)}(x)\Phi^{(m_1',m_2)}(x)\hat{l}_{Rj}^{(m_1',0)}(x) \\
& + \bar{L}_i^{(m_1,m_2'+m_2'')}(x)\Phi^{(m_1,m_2')}(x)l_{Rj}^{(0,m_2'')}(x) + \bar{\hat{L}}_i^{(m_1,m_2'+m_2'')}(x)\Phi^{(m_1,m_2')}(x)\hat{l}_{Rj}^{(0,m_2'')}(x) \\
& + \bar{L}_i^{(m_1'+m_1'',m_2)}(x)\Phi^{(m_1',m_2)}(x)l_{Rj}^{(m_1'',0)}(x) + \bar{\hat{L}}_i^{(m_1'+m_1'',m_2)}(x)\Phi^{(m_1',m_2)}(x)\hat{l}_{Rj}^{(m_1'',0)}(x) \\
& + \bar{L}_i^{(m_1,0)}(x)\Phi^{(m_1',m_2')}(x)l_{Rj}^{(m_1+m_1',m_2')}(x) + \bar{\hat{L}}_i^{(m_1,0)}(x)\Phi^{(m_1',m_2')}(x)\hat{l}_{Rj}^{(m_1+m_1',m_2')}(x) \\
& + \bar{L}_i^{(0,m_2)}(x)\Phi^{(m_1',m_2')}(x)l_{Rj}^{(m_1',m_2+m_2')}(x) + \bar{\hat{L}}_i^{(0,m_2)}(x)\Phi^{(m_1',m_2')}(x)\hat{l}_{Rj}^{(m_1',m_2+m_2')}(x) \\
& + \bar{L}_i^{(m_1,m_2)}(x)\Phi^{(m_1',m_2')}(x)l_{Rj}^{(m_1+m_1',m_2+m_2')}(x) \\
& + \bar{\hat{L}}_i^{(m_1,m_2)}(x)\Phi^{(m_1',m_2')}(x)\hat{l}_{Rj}^{(m_1+m_1',m_2+m_2')}(x) \\
& + \bar{L}_i^{(m_1'+m_1'',m_2'+m_2'')}(x)\Phi^{(m_1',m_2')}(x)l_{Rj}^{(m_1'',m_2'')}(x) \\
& + \bar{\hat{L}}_i^{(m_1'+m_1'',m_2'+m_2'')}(x)\Phi^{(m_1',m_2')}(x)\hat{l}_{Rj}^{(m_1'',m_2'')}(x) \\
& + \bar{L}_i^{(m_1,m_2)}(x)\Phi^{(m_1,m_2+m_2'')}(x)l_{Rj}^{(0,m_2'')}(x) - \bar{\hat{L}}_i^{(m_1,m_2)}(x)\Phi^{(m_1,m_2+m_2'')}(x)\hat{l}_{Rj}^{(0,m_2'')}(x) \\
& + \bar{L}_i^{(0,m_2)}(x)\Phi^{(m_1',m_2+m_2'')}(x)l_{Rj}^{(m_1',m_2'')}(x) - \bar{\hat{L}}_i^{(0,m_2)}(x)\Phi^{(m_1',m_2+m_2'')}(x)\hat{l}_{Rj}^{(m_1',m_2'')}(x) \\
& + \bar{L}_i^{(m_1,m_2)}(x)\Phi^{(m_1+m_1'',m_2)}(x)l_{Rj}^{(m_1'',0)}(x) - \bar{\hat{L}}_i^{(m_1,m_2)}(x)\Phi^{(m_1+m_1'',m_2)}(x)\hat{l}_{Rj}^{(m_1'',0)}(x) \\
& + \bar{L}_i^{(m_1,0)}(x)\Phi^{(m_1+m_1'',m_2')}(x)l_{Rj}^{(m_1'',m_2')}(x) - \bar{\hat{L}}_i^{(m_1,0)}(x)\Phi^{(m_1+m_1'',m_2')}(x)\hat{l}_{Rj}^{(m_1'',m_2')}(x) \\
& + \bar{L}_i^{(m_1,m_2)}(x)\Phi^{(m_1+m_1'',m_2+m_2'')}(x)l_{Rj}^{(m_1'',m_2'')}(x) \\
& - \bar{\hat{L}}_i^{(m_1,m_2)}(x)\Phi^{(m_1+m_1'',m_2+m_2'')}(x)\hat{l}_{Rj}^{(m_1'',m_2'')}(x)\Big\}
\end{aligned}$$

Con base en los resultados obtenidos para el sector leptónico, podemos escribir la lagrangiana efectiva 4-dimensional para el sector completo de Yukawa como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{4D}^{Y} \quad = \quad & -Y_{ij}^{l}\Big\{ \bar{L}_i^{(0,0)}(x)\Phi^{(0,0)}(x)l_{Rj}^{(0,0)}(x) + \mathcal{L}_l^{(0,0)} + \mathcal{L}_l^{(m_1,0)} \\
& + \mathcal{L}_l^{(0,m_2)} + \mathcal{L}_l^{(m_1,m_2)}\Big\} + h.c. \\
& -Y_{ij}^{u}\Big\{ \bar{Q}_i^{(0,0)}(x)\tilde{\Phi}^{(0,0)}(x)U_{Rj}^{(0,0)}(x) + \mathcal{L}_u^{(0,0)} + \mathcal{L}_u^{(m_1,0)} \\
& + \mathcal{L}_u^{(0,m_2)} + \mathcal{L}_u^{(m_1,m_2)}\Big\} + h.c. \\
& -Y_{ij}^{d}\Big\{ \bar{Q}_i^{(0,0)}(x)\Phi^{(0,0)}(x)D_{Rj}^{(0,0)}(x) + \mathcal{L}_d^{(0,0)} + \mathcal{L}_d^{(m_1,0)} \\
& + \mathcal{L}_d^{(0,m_2)} + \mathcal{L}_d^{(m_1,m_2)}\Big\} + h.c. \qquad (4.49)
\end{aligned}$$

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo de tesis se ha presentado una revisión elemental de las propiedades básicas de los grupos ortogonales, $SO(N)$, de los grupos unitarios, $SU(N)$ y de los grupos $SO(1, m-1)$. En este contexto, se estudió el fenómeno de rompimiento espontáneo de la simetría, en sus dos variantes, global, lo cual es sintetizado en lo que se conoce como Teorema de Goldstone, y local, lo cual es conocido como Mecanismo de Higgs. Se presentó un estudio somero del sector electrodébil del Modelo Estándar.

La contribución de este trabajo de tesis se centró en el estudio de las propiedades básicas de espinores determinados por el grupo de Lorentz en seis dimensiones, $SO(1, 5)$. Los principales resultados se pueden enumerar como sigue:

- **Representación.** Se introdujo una representación de las matrices de Dirac en 6 dimensiones, escrita en términos de las matrices correspondientes en 4 dimensiones, dada por

$$\Gamma^0 = (\sigma^2 \otimes \gamma^0) = \begin{pmatrix} 0_4 & -i\gamma^0 \\ i\gamma^0 & 0_4 \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

$$\Gamma^j = (\sigma^2 \otimes \gamma^j) = \begin{pmatrix} 0_4 & -i\gamma^j \\ i\gamma^j & 0_4 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3 \tag{5.2}$$

$$\Gamma^5 = (i\sigma^2 \otimes \gamma^5) = \begin{pmatrix} 0_4 & \gamma^5 \\ -\gamma^5 & 0_4 \end{pmatrix}, \tag{5.3}$$

$$\Gamma^6 = (i\sigma^3 \otimes \mathbb{1}) = i \begin{pmatrix} \mathbb{1}_4 & 0_4 \\ 0_4 & -\mathbb{1}_4 \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

- **Generadores.** La representación anterior permite escribir los generadores del grupo $SO(1, 5)$ que definen al subgrupo estándar $SO(1, 3)$, en bloques diagonales como sigue:

$$S_6^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} S_4^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & S_4^{\mu\nu} \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

- **Espinores.** Esta descomposición diagonal de los generadores del grupo de Lorentz estándar nos permite descomponer el espinor de 8 componentes definido por $SO(1, 5)$ como sigue,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \hat{\psi} \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

donde ψ y $\hat{\psi}$ son objetos de 4 componentes que se transforman en la representación espinorial de $SO(1, 3)$.

- **Sector de Yukawa.** Se derivo el sector de Yukawa efectivo que resulta de integrar los dos dimensiones extras.

Perspectivas. Construir una teoría efectiva para el Modelo Estándar que resulte de la integración de un número arbitrario de dimensiones extra compactas.

Apéndice A

Integrales

Como se vio en el capítulo 4 para recuperar la lagrangiana en 4 dimensiones se integraron las dimensiones extra. Para realizar eso se utilizaron las siguientes integrales:

$$\int_0^R dycos(2\pi\frac{my}{R}) = 0,$$
$$\int_0^R sin(2\pi\frac{my}{R})dy = 0,$$
$$\int_0^R dycos(2\pi\frac{my}{R})cos(2\pi\frac{ny}{R}) = \frac{R}{2}\delta_{mn},$$
$$\int_0^R dysin(2\pi\frac{my}{R})sin(2\pi\frac{ny}{R}) = \frac{R}{2}\delta_{mn},$$
$$\int_0^R sin(2\pi\frac{my}{R})cos(2\pi\frac{ny}{R})dy = 0,$$
$$\int_0^{R_1} dy^1 \int_0^{R_2} dy^2 cos(2\pi\frac{m_1y^1}{R_1}) = 0,$$
$$\int_0^{R_1} dy^1 \int_0^{R_2} dy^2 cos(2\pi(\frac{m_1y^1}{R_1} + \frac{m_2y^2}{R_2})) = 0,$$
$$\int_0^{R_1} dy^1 \int_0^{R_2} dy^2 cos(2\pi\frac{m_1y^1}{R_1})cos(2\pi\frac{m_1'y^1}{R_1}) = \frac{R_1R_2}{2}\delta_{m_1m_1'},$$
$$\int_0^{R_1} dy^1 \int_0^{R_2} dy^2 cos(2\pi\frac{m_2y^2}{R_2})cos(2\pi\frac{m_1'y^1}{R_1}) = 0,$$
$$\int_0^{R_1} dy^1 \int_0^{R_2} dy^2 cos(2\pi(\frac{m_1y^1}{R_1} + \frac{m_2y^2}{R_2}))cos(2\pi\frac{m_1'y^1}{R_1}) = 0.$$
$$\int_0^{R_1} dy^1 \int_0^{R_2} dy^2 cos(2\pi(\frac{m_1y^1}{R_1} + \frac{m_2y^2}{R_2}))cos(2\pi(\frac{m_1'y^1}{R_1} + \frac{m_2'y^2}{R_2})) = \frac{R_1R_2}{2}\delta_{m_1m_1'}\delta_{m_2m_2'},$$
$$\int_0^{R_1} dy^1 \int_0^{R_2} dy^2 cos(2\pi\frac{m_1y^1}{R_1})cos(2\pi\frac{m_1'y^1}{R_1})cos(2\pi\frac{m_1''y^1}{R_1})$$
$$= \frac{R_1R_2}{4}\{\delta_{m_1+m_1',m_1''} + \delta_{m_1+m_1'',m_1'} + \delta_{m_1'+m_1'',m_1}\},$$
$$\int_0^{R_1} dy^1 \int_0^{R_2} dy^2 sin(2\pi\frac{m_1y^1}{R_1})cos(2\pi\frac{m_1'y^1}{R_1})cos(2\pi\frac{m_1''y^1}{R_1}) = 0,$$
$$\int_0^{R_1} dy^1 \int_0^{R_2} dy^2 cos(2\pi(\frac{m_1y^1}{R_1} + \frac{m_2y^2}{R_2}))cos(2\pi\frac{m_1'y^1}{R_1})cos(2\pi\frac{m_1''y^1}{R_1}) = 0,$$

$$\int_0^{R_1} dy^1 \int_0^{R_2} dy^2 cos(2\pi(\frac{m_1y^1}{R_1}+\frac{m_2y^2}{R_2}))cos(2\pi\frac{m_2'y^2}{R_2})cos(2\pi\frac{m_1''y^1}{R_1}) = \frac{R_1R_2}{4}\delta_{m_1m_1'}\delta_{m_2m_2'},$$

$$\int_0^{R_1} dy^1 \int_0^{R_2} dy^2 sin(2\pi\frac{m_1y^1}{R_1})sin(2\pi\frac{m_1'y^1}{R_1})cos(2\pi\frac{m_1''y^1}{R_1})$$

$$= \frac{R_1R_2}{4}\{-\delta_{m_1+m_1',m_1''}+\delta_{m_1+m_1'',m_1'}+\delta_{m_1'+m_1'',m_1}\},$$

$$\int_0^{R_1} dy^1 \int_0^{R_2} dy^2 cos(2\pi(\frac{m_1y^1}{R_1}+\frac{m_2y^2}{R_2}))cos(2\pi(\frac{m_1'y^1}{R_1}+\frac{m_2'y^2}{R_2}))cos(2\pi\frac{m_1''y^1}{R_1})$$

$$= \frac{R_1R_2}{4}\delta_{m_2m_2'}\{\delta_{m_1+m_1'',m_1'}+\delta_{m_1'+m_1'',m_1}\},$$

$$\int_0^{R_1} dy^1 \int_0^{R_2} dy^2 cos(2\pi(\frac{m_1y^1}{R_1}+\frac{m_2y^2}{R_2}))cos(2\pi(\frac{m_1'y^1}{R_1}+\frac{m_2'y^2}{R_2}))cos(2\pi\frac{m_2''y^2}{R_2})$$

$$= \frac{R_1R_2}{4}\delta_{m_1m_1'}\{\delta_{m_2+m_2'',m_2'}+\delta_{m_2'+m_2'',m_2}\},$$

$$\int_0^{R_1} dy^1 \int_0^{R_2} dy^2 sin(2\pi\frac{m_1y^1}{R_1})sin(2\pi\frac{m_1'y^1}{R_1})sin(2\pi\frac{m_1''y^1}{R_1}) = 0,$$

$$\int_0^{R_1} dy^1 \int_0^{R_2} dy^2 cos(2\pi(\frac{m_1y^1}{R_1}+\frac{m_2y^2}{R_2}))cos(2\pi(\frac{m_1'y^1}{R_1}+\frac{m_2'y^2}{R_2}))cos(2\pi(\frac{m_1''y^1}{R_1}+\frac{m_2''y^2}{R_2}))$$

$$= \frac{R_1R_2}{4}\{\delta_{m_1+m_1',m_1''}\delta_{m_2+m_2',m_2''}+\delta_{m_1+m_1'',m_1'}\delta_{m_2+m_2'',m_2'}+\delta_{m_1'+m_1'',m_1}\delta_{m_2'+m_2'',m_2}\},$$

$$\int_0^{R_1} dy^1 \int_0^{R_2} dy^2 sin(2\pi(\frac{m_1y^1}{R_1}+\frac{m_2y^2}{R_2}))sin(2\pi\frac{m_1''y^1}{R_1}) = 0,$$

$$\int_0^{R_1} dy^1 \int_0^{R_2} dy^2 sin(2\pi(\frac{m_1y^1}{R_1}+\frac{m_2y^2}{R_2}))sin(2\pi\frac{m_2''y^2}{R_2}) = 0,$$

$$\int_0^{R_1} dy^1 \int_0^{R_2} dy^2 sin(2\pi(\frac{m_1y^1}{R_1}+\frac{m_2y^2}{R_2}))cos(2\pi\frac{m_1'y^1}{R_1})sin(2\pi\frac{m_1''y^1}{R_1}) = 0,$$

$$\int_0^{R_1} dy^1 \int_0^{R_2} dy^2 sin(2\pi(\frac{m_1y^1}{R_1}+\frac{m_2y^2}{R_2}))cos(2\pi\frac{m_2'y^2}{R_2})sin(2\pi\frac{m_2''y^2}{R_2}) = 0,$$

$$\int_0^{R_1} dy^1 \int_0^{R_2} dy^2 sin(2\pi(\frac{m_1y^1}{R_1}+\frac{m_2y^2}{R_2}))cos(2\pi\frac{m_1'y^1}{R_1})sin(2\pi\frac{m_2''y^2}{R_2})$$

$$= \frac{R_1R_2}{4}\delta_{m_1m_1'}\delta_{m_2m_2''},$$

$$\int_0^{R_1} dy^1 \int_0^{R_2} dy^2 sin(2\pi(\frac{m_1y^1}{R_1}+\frac{m_2y^2}{R_2}))cos(2\pi\frac{m_2'y^2}{R_2})sin(2\pi\frac{m_1''y^1}{R_1})$$

$$= \frac{R_1R_2}{4}\delta_{m_1m_1''}\delta_{m_2m_2'},$$

$$\int_0^{R_1} dy^1 \int_0^{R_2} dy^2 sin(2\pi\frac{m_1y^1}{R_1})cos(2\pi(\frac{m_1'y^1}{R_1}+\frac{m_2'y^2}{R_2}))sin(2\pi\frac{m_1''y^1}{R_1}) = 0,$$

$$\int_0^{R_1} dy^1 \int_0^{R_2} dy^2 sin(2\pi\frac{m_2y^2}{R_2})cos(2\pi(\frac{m_1'y^1}{R_1}+\frac{m_2'y^2}{R_2}))sin(2\pi\frac{m_2''y^2}{R_2}) = 0,$$

$$\int_0^{R_1} dy^1 \int_0^{R_2} dy^2 sin(2\pi\frac{m_1y^1}{R_1})cos(2\pi(\frac{m_1'y^1}{R_1}+\frac{m_2'y^2}{R_2}))sin(2\pi\frac{m_2''y^2}{R_2})$$

$$= -\frac{R_1R_2}{4}\delta_{m_1m_1'}\delta_{m_2'm_2''},$$

$$\int_0^{R_1} dy^1 \int_0^{R_2} dy^2 sin(2\pi(\frac{m_1 y^1}{R_1} + \frac{m_2 y^2}{R_2}))cos(2\pi(\frac{m_1' y^1}{R_1} + \frac{m_2' y^2}{R_2}))sin(2\pi\frac{m_1'' y^1}{R_1})$$
$$= \frac{R_1 R_2}{4}\delta_{m_2 m_2'}\{\delta_{m_1'+m_1'',m_1} - \delta_{m_1+m_1'',m_1'}\},$$
$$\int_0^{R_1} dy^1 \int_0^{R_2} dy^2 sin(2\pi(\frac{m_1 y^1}{R_1} + \frac{m_2 y^2}{R_2}))cos(2\pi(\frac{m_1' y^1}{R_1} + \frac{m_2' y^2}{R_2}))sin(2\pi\frac{m_2'' y^2}{R_2})$$
$$= \frac{R_1 R_2}{4}\delta_{m_1 m_1'}\{\delta_{m_2'+m_2'',m_2} - \delta_{m_2+m_2'',m_2'}\},$$
$$\int_0^{R_1} dy^1 \int_0^{R_2} dy^2 sin(2\pi(\frac{m_1 y^1}{R_1} + \frac{m_2 y^2}{R_2}))sin(2\pi(\frac{m_1' y^1}{R_1} + \frac{m_2' y^2}{R_2}))$$
$$= \frac{R_1 R_2}{2}\delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'},$$
$$\int_0^{R_1} dy^1 \int_0^{R_2} dy^2 sin(2\pi(\frac{m_1 y^1}{R_1} + \frac{m_2 y^2}{R_2}))cos(2\pi\frac{m_1' y^1}{R_1})sin(2\pi(\frac{m_1'' y^1}{R_1} + \frac{m_2'' y^2}{R_2}))$$
$$= \frac{R_1 R_2}{4}\delta_{m_2 m_2'}\{\delta_{m_1+m_1',m_1''} + \delta_{m_1'+m_1'',m_1}\},$$
$$\int_0^{R_1} dy^1 \int_0^{R_2} dy^2 sin(2\pi(\frac{m_1 y^1}{R_1} + \frac{m_2 y^2}{R_2}))cos(2\pi\frac{m_2' y^2}{R_2})sin(2\pi(\frac{m_1'' y^1}{R_1} + \frac{m_2'' y^2}{R_2}))$$
$$= \frac{R_1 R_2}{4}\delta_{m_1 m_1'}\{\delta_{m_2+m_2',m_2''} + \delta_{m_2'+m_2'',m_2}\}$$
$$\int_0^{R_1} dy^1 \int_0^{R_2} dy^2 sin(2\pi(\frac{m_1 y^1}{R_1} + \frac{m_2 y^2}{R_2}))cos(2\pi(\frac{m_1' y^1}{R_1} + \frac{m_2' y^2}{R_2}))sin(2\pi(\frac{m_1'' y^1}{R_1} + \frac{m_2'' y^2}{R_2}))$$
$$= \frac{R_1 R_2}{4}\{\delta_{m_1+m_1',m_1''}\delta_{m_2+m_2',m_2''} - \delta_{m_1+m_1'',m_1'}\delta_{m_2+m_2'',m_2'} + \delta_{m_1'+m_1'',m_1}\delta_{m_2'+m_2'',m_2}\}.$$

Bibliografía

[1] I. Antoniadis, Phys. Lett. B **246**, 377 (1990); N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. R. Dvali, Phys. Lett. B **429**, 263 (1998) ; I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. R. Dvali, Phys. Lett. B **436**, 257 (1998).

[2] H. Novales-Sánchez and J. J. Toscano, Phys. Rev. D **82**, 116012 (2010).

[3] H. Novales-Sánchez and J.J. Toscano, Phys.Rev. D **84**, 076010 (2011), e-Print: arXiv:1105.2765 [hep-ph].

[4] M. A. López-Osorio, E. Martínez-Pascual, H. Novales-Sánchez, and J. J. Toscano, Phys. Rev. D **88**, 036015 (2013), arXiv:1302.2981.

[5] M. A. López-Osorio, E. Martínez-Pascual, H. Novales-Sánchez, and J. J. Toscano, en preparación.

[6] M. A. López-Osorio, E. Martínez-Pascual, H. Novales-Sánchez, and J. J. Toscano, en preparación.

[7] A. Flores-Tlalpa, J. Montaño, H. Novales-Sánchez, F. Ramírez-Zavaleta, and J.J. Toscano, Phys. Rev. D **83**, 016011 (2011), e-Print: arXiv:1009.0063 [hep-ph]; H. Novales-Sánchez and J.J. Toscano, Phys. Rev. D **84**, 057901 (2011), e-Print: arXiv:1105.4625 [hep-ph]; M. A. López-Osorio, E. Martínez-Pascual, J. Montaño, H. Novales-Sánchez, J.J. Toscano, E.S. Tututi. e-Print: arXiv:1305.0621 [hep-ph] (enviado a Phys. Rev. D).

[8] A. Cordero-Cid, M. Gómez-Bock, H. Novales-Sánchez, and J.J. Toscano, Pramana **80**, 369-412 (2013), e-Print: arXiv:1108.2926 [hep-ph].

[9] HAMERMESH, Morton; *Group theory and its application to physical problems*; Londres; Addison Wesley; 1962; 509 p.

[10] Notas tomadas del curso Partículas 2, impartido en la FCFM-BUAP por el Dr. J. Jesús Toscano Chávez durante el semestre de otoño de 2012.

[11] COSTA, Giovanni; FOGLI, Gianluigi; *Symmetries and Gruop Theory in Particle Physics*; Londres; Springer; 2012; 291 p.

[12] MATTHEW, Robinson ; *Symmrety and the Standar Model*; Londres; Springer; 2011; 327 p.

[13] DOBADO, A.; GÓMEZ, A.; MAROTO, A.L.; PELÁEZ, J.R.; *Effective Lagrangians for the Standar Model*; Berlín; Springer; 1997; 315 p.

[14] TEUBNER, Thomas; *The Standar Model* ; Oxford ; Lecturas presentadas en la escuela para jovenes en física de altas energías; 2008

[15] MORII, T.; LIM, C.S.; MUKHERJEE, S.N.; *The Phsics of the Standar Model and Beyond* ; Singapur; World Scientific; 2004; 298 p.

[16] Notas tomadas del Seminario de tesis, impartido en la FCFM-BUAP por el Dr. J. Jesús Toscano Chávez durante el semestre de primavera de 2012.

[17] GRIFFITHS, David; *Introduction to Elementary Particles*; Alemania ; WILEY-VCH ; 2004; 392p.

[18] ILIAN, Wolfgang; *Electroweak Symmetry Breaking*; Estados Unidos de América; Springer; 2004; 113 p.

[19] MACHACA ROCHA, Arturo; *El discreto encanto de las partículas elementales*; Primera edición; México; La ciencia desde México, FCE; 1988; 126 p.

[20] GRADSHTEYN, I.S.; RYZHIK, I.M.; *Table of Integrals, Series, and Products*; Septima edición; Estados Unidos de América; Academic Press; 2007; 1171 p.

[21] FERNÁNDEZ ÁLVAREZ, Estrada Ramón; RAMÓN MEDRANO, Marina; *Partículas Elementales*; Primera edición; México; Colección: La Ciencia para todos. FCE; 2003; 221 p.

[22] LOVETT CLINE, Barbara; *Los creadores de la nueva física*; Primera edición; México; Fondo de cultura económica; 1989; 333 p.