Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Cálculo de reservas para un seguro de vida conjunta mediante la ecuación de Thiele

Tesis presentada para obtener el grado de:
Licenciatura en Actuaría

Presenta:
Yessica Lizbeth Pantaleón Joaquín

Directora de Tesis:
M. C. Brenda Zavala López

Puebla, Pue. Marzo 2020

A mi familia.

Agradecimientos

Agradezco a la vida por permitirme llegar hasta aquí, por cada historia vivida que me ha traído a este momento.

A mi familia por vivir esta aventura conmigo, por apoyarme en cada momento, pero en especial a mi madre por tanta paciencia y amor.

A mis amigos por estar en todo momento y a todos los que de una u otra manera han sido parte de esto.

Un agradecimiento especial a mi asesora M. C. Brenda Zavala López por la paciencia, tiempo y consejos dados a lo largo de estos años, sin su ayuda la realización de este trabajo no sería el mismo.

Así mismo, gracias al Dr. Fernando Velasco Luna, al Mtro. José Asunción Hernández y al Dr. Miguel Pérez Gaspar, por el tiempo empleado en la revisión de esta tesis y por los valiosos comentarios realizados.

Índice General

Introducción

Existen diferentes riesgos o eventos fortuitos a los que estamos expuestos, estos sucesos pueden tener repercusiones negativas y por esta razón el seguro es un instrumento que busca mitigar el impacto de los riesgos. Así, para el desarrollo de este trabajo estaremos interesados en el Seguro de Vida el cual cubre el riesgo de fallecimiento.

En México existen diversas opciones de cobertura para quienes busquen un seguro de vida, una de las primeras compañías nacionales en fundarse para este ramo fue *La Fraternal* en 1890. No obstante, cuando se requiere asegurar a más de una persona con una misma póliza sus opciones se ven limitadas, este tipo de cobertura es conocido como un seguro de vida múltiple.

Los seguros de vida múltiple son usualmente contratados por empresas que buscan una póliza para algún número considerable de empleados, pero cuando buscamos un seguro que cubra el riesgo de dos personas no podemos encontrar muchas alternativas. Es por este motivo que a lo largo de los capítulos introduciremos conceptos como: modelos de supervivencia, modelos de vida múltiple, etc. y así proponer un seguro de vida conjunta para un matrimonio.

Otro concepto en el que estamos interesados es la reserva, la cual es el monto que la aseguradora debe guardar en caso de siniestro para hacer frente a sus obligaciones. Para calcular este valor se propone el uso de la ecuación de Thiele.

El empleo de Thiele permite calcular la reserva en cualquier instante de tiempo y además facilita su obtención cuando queremos asegurar a m personas con la misma póliza, dado que utilizando la definición matemática de la reserva los cálculos pueden resultar repetitivos y de difícil elaboración.

Adicionalmente Thiele requiere plantear a los modelos de vida múltiple como un proceso estocástico, lo cual nos facilitará la compresión de este tipo de coberturas. Esto nos permitirá plantear un estado para cada riesgo asegurado, lo cual sería bastante difícil de plantear para cada persona y con ello mostrar las ventajas del uso de esta ecuación.

El motivo principal para el uso de Thiele es mostrar su implementación en modelos de vida múltiple porque, aunque existen autores como David Dickson que habla de este concepto en *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risk* no existen ejemplos claros de su desarrollo al realizar los cálculos en este tipo de modelos.

Objetivos

El objetivo general de este trabajo es analizar la implementación de la ecuación de Thiele para el cálculo de reservas en un modelo de vida múltiple, como caso particular un seguro para dos vidas.

De manera puntual los objetivos por capítulos son los siguientes:

Capítulo 1: Presentar conceptos básicos de un modelo de supervivencia y con ello definir el cálculo de un seguro, anualidad, prima.

Exponer el principio de equivalencia para definir una reserva.

Capítulo 2: Describir que es un modelo de vida múltiple: último superviviente, vida conjunta y como a partir de estos conceptos se realiza el cálculo de la probabilidad de sobrevivir y fallecer para determinar el cálculo de un seguro de vida múltiple.

Definir que es un proceso estocástico y utilizarlo para hacer una generalización de un modelo de vida múltiple.

Capítulo 3: Introducir a la ecuación de Thiele y su uso en el cálculo de una reserva para modelos de vida múltiple.

Capítulo 4: Plantear un modelo de vida múltiple para un matrimonio. Definir el costo del seguro, anualidad, prima y así ejemplificar la utilidad de Thiele para obtener el valor de las reservas en este modelo.

Apéndice B: Automatizar el cálculo del modelo planteado en el Capítulo 4, utilizando VBA.

Capítulo 1

Conceptos Básicos

1.1. Modelos de Supervivencia

Supongamos que tenemos una máquina que trabaja constantemente todo el tiempo, pero que eventualmente va a tener una falla y tendrá que detenerse. No sabemos cuándo será el tiempo de falla, pero estamos interesados en pronosticar este tiempo y con esto prever nuestras necesidades, este cálculo del tiempo de fallo es un ejemplo de un modelo de supervivencia. Estos modelos son utilizados en diferentes áreas como ingeniera, estadística, demografía y actuaría.

Definimos un modelo de supervivencia como una distribución de probabilidad para un tipo particular de variable aleatoria. El caso que nos interesa es el tiempo de fallo de un modelo que determina el valor esperado de la muerte de un asegurado. Con este modelo buscamos calcular la probabilidad de que el individuo asegurado sobreviva a ciertas edades futuras y con ello el valor de mitigar el riesgo, es decir, el costo del seguro y su respectiva anualidad y prima.

1.1.2. Función de Distribución Acumulativa

Consideremos T_0 como la variable aleatoria para la edad de un recién nacido en el instante de fallo, es decir que T_0 será la edad que tendrá el asegurado cuando este fallezca.

Definición 1. 1: *Sea T_0 una variable aleatoria para el tiempo de falla de un recién nacido, la función de distribución acumulada de T_o está dada por:*

$$F_0(t) = Pr(T_0 \leq t) \qquad\qquad \text{con } \ t \geq 0$$

Es decir $F_0(t)$ es la probabilidad de que ocurra el fallecimiento antes de cumplir la edad t.

En notación actuarial tenemos:

$$_tq_0 = F_0(t) = \Pr(T_0 \leq t)$$

La función de distribución acumulada cumple con las siguientes propiedades:

- $F_0(-\infty) = \lim\limits_{t\to-\infty} F_0(t) \ = 0$

- $F_0(\infty) = \lim_{t\to\infty} F_0(t) \;\; = 1$
- $F_0(t)$ es no decreciente: $t_1 < t_2 \;\Longrightarrow\; F_x(t_1) \leq F_x(t_2)$

1.1.3. Función de Distribución de Supervivencia

Por otra parte, tenemos la probabilidad de supervivencia que nos dice que tan probable es que se sobreviva a algún evento de interés. En algunos casos estaremos más interesados en conocer la probabilidad de supervivencia de la variable T_0 que la probabilidad de fallo y así realizar cálculos de manera eficiente.

Definición 1. 2: *Sea T_0 una variable aleatoria, la función de distribución de supervivencia de T_o está dada por:*

$$S_0(t) = \Pr(T_0 > t) = 1 - F_0(t) \qquad\qquad \text{con } \; t \geq 0$$

En notación actuarial tenemos:

$${}_tp_0 = S_0(t) = \Pr(T_0 > t) = 1 - \;{}_tq_0$$

La función de supervivencia cumple con las siguientes propiedades

- $S_0(-\infty) = \lim_{t\to -\infty} S_0(t) \;\; = 1$
- $S_0(\infty) = \lim_{t\to\infty} S_0(t) \;\; = 0$
- $S_0(t)$ es no creciente: $t_1 < t_2 \;\Longrightarrow\; S_0(t_1) \geq S_0(t_2)$

1.1.4. Función de densidad de probabilidad

Definición 1.3 *La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria T_0, mide la probabilidad relativa de que ocurra el fallo para un tiempo determinado y está dada por:*

$$\begin{aligned} f_0(t) &= \frac{d}{dt} F_0(t) \\ &= -\frac{d}{dt} S_0(t) \end{aligned}$$

Como consecuencia de la definición de $f_0(t)$ tenemos que:

$$F_0(t) = \int_0^t f_0(y)dy \qquad\qquad S_0(t) = \int_t^\infty f_0(y)dy$$

$F_0(t)$ y $S_0(t)$ son probabilidades que se relacionan con ciertos intervalos de tiempo, mientras que $f_0(t)$ se relaciona con un punto de tiempo.

Ejemplo 1.1 *Sea* $f_0(t) = \frac{2t+10}{9000}$*, determine la probabilidad de que* T_0 *tome un valor entre* 10 *y* 60 *con* $0 \leq t \leq 90$.

$$
\begin{aligned}
\Pr(10 < T_0 \leq 60) &= \Pr(T_0 \leq 60) - \Pr(T_0 \leq 10) \\
&= F_0(60) - F_0(10) \\
&= \int_0^{60} \frac{2y+10}{9000} dy - \int_0^{10} \frac{2y+10}{9000} dy \\
&= \int_{10}^{60} \frac{2y+10}{9000} dy \\
&= \left[\frac{2y^2 + 10y}{9000} \Big|_{10}^{60} \right] \\
&= \frac{4}{9}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1.2 *Pruebe que* $S_0(t) = \frac{9000-10t-t^2}{9000}$ *es una función de supervivencia con* $0 \leq t \leq 90$.

Para probar que es una función de supervivencia recordemos que la función valuada en su límite superior debe ser cero y en su límite inferior debe ser 1, así evaluando la función en 0 y 90, tenemos:

$$S_0(0) = \frac{9000 - 10(0) - (0)^2}{9000} = 1$$

$$S_0(90) = \frac{9000 - 10(90) - (90)^2}{9000} = 0$$

De lo anterior comprobamos que se cumple las siguientes condiciones:

- $S_0(-\infty) = \lim_{t \to -\infty} S_0(t) = 1$
- $S_0(\infty) = \lim_{t \to \infty} S_0(t) = 0$

Para comprobar que $S_0(t)$ es no creciente utilizaremos el siguiente teorema:

Teorema 1.1 *Si $S_0(t)$ es continua sobre un intervalo D y $\frac{d}{dt}S_0(t) \leq 0$ para todo punto interior en D, entonces $S_0(t)$ es no creciente en D.*

$$\frac{d}{dt}S_0(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{9000 - 10t - t^2}{9000}\right]$$

$$= \frac{-2t-10}{9000} \leq 0$$

$\therefore$ $S_0(t)$ es no creciente

Podemos concluir que $S_0(t)$ es una función de supervivencia

1.1.5. Fuerza de mortalidad

Algunos modelos de supervivencia están caracterizados por tener una tasa de riesgo o función de tasa de fracaso. En la ciencia actuarial esta tasa de riesgo es conocida como la fuerza de mortalidad.

$f_0(t)$ puede considerarse como la tasa de mortalidad incondicional a la edad t, pero en algunos casos necesitaremos utilizar la tasa de mortalidad condicional, que puede ser utilizada para estimar la probabilidad de que la muerte ocurra en el intervalo $(t, t + dt]$.

La probabilidad de que un recién nacido muera entre la edad $t\ y\ t + h$ para un h lo suficientemente pequeña está dado por la siguiente igualdad:

$$\Pr(t < T \leq t + h \mid T > t) = \frac{F(t + h) - F(t)}{1 - F(t)}$$

Recordemos que $f_0(t) = \frac{d}{dt}F_0(t)$, así por la definición de derivada podemos escribir lo siguiente:

$$f_0(t) \approx \frac{F(t + h) - F(t)}{h}$$

$$\frac{\Pr(t < T \leq t + h \mid T > t)}{h} \approx \frac{f_0(t)}{S_0(t)}$$

Calculando el límite de la igualdad anterior podemos obtener la fuerza de mortalidad que está dada por:

$$\lambda_0(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\Pr(t < T \leq t + h \mid T > t)}{h} = \frac{f_0(t)}{S_0(t)}$$

Notemos que $\lambda_0(t)$ y $f_0(t)$ son medidas instantáneas de la densidad de fallo a la edad t, con la diferencia de que $\lambda_0(t)$ está condicionado a la supervivencia a la edad t, mientras que $f_0(t)$ no está condicionada.

Algunos resultados importantes a partir de la definición de mortalidad son los siguientes:

$$\lambda_0(t) = \frac{\frac{d}{dt} S_0(t)}{S_0(t)}$$

$$= -\frac{d}{dt} \ln(S_0(t))$$

Haciendo los respectivos cálculos obtenemos que:

$$S_0(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda_0(y) dy \right]$$

1.1.6. Esperanza de vida completa al nacer

En algunos cálculos estaremos interesados en conocer cuál es la esperanza de vida de un recién nacido, este número representa la edad esperada a la que sobrevivirá una persona recién nacida.

Esta esperanza está representada por el primer momento o valor esperado de una variable aleatoria.

Definición 1.4: *Sea T_0 una variable aleatoria continua y $f_0(t)$ su función de densidad correspondiente definimos a la esperanza de vida completa al nacer en el intervalo* $[0, \infty)$ *como:*

$$E[T_0] = \int_0^\infty t \cdot f_0(t) dt$$

Este primer momento es el valor esperado incondicional de T_0, el cual es conocido como la esperanza de vida completa al nacer y que está denotado por:

$$e_0^o = E[T_0]$$

Notemos que el subíndice de la notación anterior representa la edad del individuo donde para un recién nacido es cero, mientras que el superíndice es la notación empleada para vida completa.

1.2 Probabilidades de Supervivencia para T_x

Hasta ahora hemos dado conceptos para T_0, que representa el tiempo de fallo para un recién nacido. Consideremos el caso en el que un individuo ha sobrevivido hasta la edad x y del que estamos interesados en conocer cuánto tiempo transcurrirá hasta su fallecimiento.

Denotemos T_x a nuestra nueva variable que considera el tiempo adicional, donde T_x es la variable aleatoria del tiempo de fallo para una persona que se sabe que está viva a la edad x.

A partir de lo anterior en la obtenemos la siguiente relación:

$$T_0 = x + T_x$$

En la Figura 1.1 mostramos el esquema de relación de la ecuación anterior, considerando dos casos:

- Una persona ha nacido y sobrevivirá T_0 años hasta llegar a la edad de fallecimiento k.
- La misma persona ha nacido y sabemos que ha llegado a la edad x y además sobrevive T_x años llegando a la edad de muerte k, es decir que ahora está condicionado a que sobrevivió a la edad x.

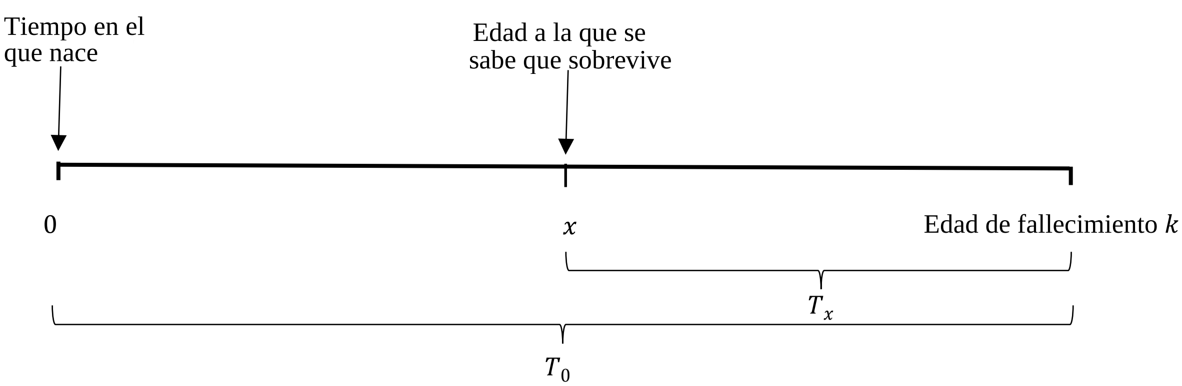

Figura 1.1 Esquema de Relación $T_0 = x + T_x$

.

Considerando los casos anteriores podemos decir que la equivalencia es clara.

1.2.1 Función de Distribución de Supervivencia para T_x

La probabilidad de supervivencia para la variable T_x es ${}_tp_x$.

Donde $${}_tp_x = \Pr(T_x > t) = \Pr(T_0 > x + t \mid T_0 > x)$$

Usando el hecho de que $\{T_0 > x + t\}$ es un subconjunto del evento $\{T_0 > x\}$ y el Teorema de Bayes que nos dice que $\Pr = (\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$, obtenemos la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned}
{}_tp_x &= S_x(t) \\
&= \Pr(T_0 > x + t \mid T_0 > x) \\
&= \frac{\Pr(T_0 > x + t \cap T_0 > x)}{\Pr(T_0 > x)} \\
&= \frac{\Pr(T_0 > x + t)}{\Pr(T_0 > x)} \\
&= \frac{S_0(x + t)}{S_0(x)}.
\end{aligned}$$

1.2.3 Función de Distribución Acumulada para T_x

De manera análoga tenemos que:

$$\begin{aligned}
{}_tq_x &= F_x(t) \\
&= \Pr(T_x \leq t) \\
&= \Pr(T_0 \leq x + t \mid T_0 > x) \\
&= 1 - \Pr(T_0 > x + t \mid T_0 > x) \\
&= 1 - \frac{S_0(x + t)}{S_0(x)}
\end{aligned}$$

Haciendo los cálculos correspondientes:

$${}_tq_x = F_x(t) = \frac{S_0(x + t) - F_0(x)}{1 - F_0(x)}$$

1.2.4 Función de densidad de probabilidad para T_x

A partir de las definiciones anteriores podemos obtener la función de densidad condicional para nuestra variable aleatoria T_x al tiempo de fallo t, es decir:

$$f_x(t) = \frac{d}{dt} F_x(t) = -\frac{d}{dt} S_x(t)$$

1.2.5 Esperanza de vida completa para T_x

De manera similar para T_0, el valor esperado de la variable aleatoria T_x dado que la persona se encuentra con vida a la edad x, es llamado la esperanza de vida completa.

Así:

$$\begin{aligned} e_x^o &= E[T_x] \\ &= \int_0^\infty t \cdot f_x(t) dt \\ &= \int_0^\infty {}_t p_x dt \end{aligned}$$

Notemos que la igualdad anterior es válida siempre que la función de supervivencia tenga esperanza finita, lo cual en el caso de las vidas humanas se cumple.

1.2.6 Variable aleatoria discreta asociada al tiempo de vida

Es necesario definir una nueva variable aleatoria que considere el número de años futuros completos que vivirá una persona de edad x antes de fallecer, así denotaremos a esta variable como K_x.

Su probabilidad está expresada por:

$$\Pr(K_x = k) = \Pr\,(k < T_x \leq k + 1)$$

Esta igualdad nos dice la probabilidad de que una persona llega con vida a la edad k y fallezca en el año inmediato siguiente, podemos decir que K_x es la parte entera de T_x.

Para nuestros fines usaremos la siguiente notación:

$${}_{k|}q_x = \Pr(K_x = k)$$

Y de manera equivalente tenemos esta igualdad:

$$\Pr(k < T_x \leq k + 1) = \Pr\,(x + k < T_0 \leq x + k + 1 | T_0 > x)$$

1.3 Seguro

Un riesgo puede ser definido como la posibilidad de un suceso desfavorable y este suceso puede ser el fallo en un modelo. Algunos ejemplos son: el fallecimiento o invalidez de un individuo, un choque de auto, un incendio, entre otros. Estos ejemplos son riesgos puros, porque implican la posibilidad de pérdida, pero sin existir una posibilidad de ganancia.[1]

El seguro busca mitigar estos riesgos, transfiriendo el peso del riesgo a alguna institución que pueda soportar las posibles pérdidas asociadas, a cambio de un beneficio determinado.

En el seguro de vida el riesgo que se cubre es la muerte y en algunas ocasiones la supervivencia de un individuo, el que nos interesa es aquel que paga un monto al beneficiario si el fallecimiento ocurre.

1.3.1 Seguro de vida discreto

Supongamos que una unidad es pagada al final del periodo si el fallo ocurre, es decir si la muerte ocurre en el intervalo $(t-1, t]$ la unidad será pagada en el tiempo t. Asumiendo una tasa de interés compuesto, el valor presente de la unidad al tiempo 0 está dada por v^t. Pero el tiempo en que se hará el pago también es una variable aleatoria, haciendo que el valor del pago también sea una variable aleatoria, que denotamos por Z_x.

Si el fallo ocurre en el intervalo. Entonces el valor presente de Z_x, está dado por:

$$Z_x = v^{t_x}$$

El costo del seguro estará determinado como la esperanza de la variable Z_x, ya que son los años que se espera que se tenga que cubrir el riesgo y lo denotaremos como A_x.

Así, al calcular la esperanza de Z_x tenemos:

$$\begin{aligned} E[Z_x] &= E[v^{t_x}] \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} v^t \Pr(t_x = t) \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_{t-1|}q_x \end{aligned}$$

Es decir:

[1] José Cosío Rodríguez. (1982). Introducción al Seguro de Vida.

$$A_x = \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_{t-1|}q_x$$

1.3.2. Seguro de Vida Continuo

De manera similar consideremos a T_x una variable aleatoria continua que puede tomar cualquier valor dentro del intervalo definido y que tiene una función $f_x(t)$ asociada. Para este tipo de seguro que paga una unidad si el fallo ocurre, tenemos nuevamente un v^t que representa la tasa de interés. Definimos nuestra nueva variable aleatoria continua para el tiempo de fallo como:

$$\bar{Z}_x = v^T \qquad \text{con } T > 0$$

Calculando el valor esperado de $\bar{Z}_x$ tenemos:

$$\begin{aligned}\bar{A}_x &= E[\bar{Z}_x] \\ &= \int_0^{\infty} v^t\, f_x(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\delta t}\ {}_tp_x\, \mu_{x+t} dt\end{aligned}$$

Ejemplo 1.3 *Considere una distribución exponencial en* $[0, \infty]$ *para* T_x *con* $\lambda = 0.16$ *y una fuerza de interés* δ *del* 4%. *Determine el costo del seguro de vida.*

Recordemos que para una distribución exponencial $f(x) = \lambda e^{-\lambda t}$, así:

$$\begin{aligned}\bar{A}_x &= \int_0^{\infty} e^{-\delta t}\, \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\delta+\lambda)t}\, dt \\ &= \lambda \left[\frac{-e^{-(\delta+\lambda)t}}{\delta + \lambda} \Big|_0^{\infty} \right]\end{aligned}$$

$$\bar{A}_x = \frac{\lambda}{\delta + \lambda}$$

Sustituyendo nuestros valores tenemos que:

$$\bar{A}_x = \frac{0.16}{0.04 + 0.16} = 0.8$$

1.4 Anualidad

Una anualidad consiste en una serie de pagos hechos periódicamente mientras el asegurado se encuentre con vida[2], los cuales pueden ser al inicio de periodo como se muestra en la Figura 1.2.

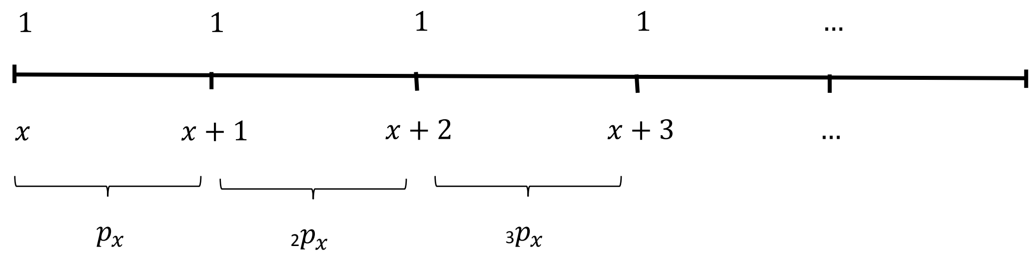

Figura 1.2 Gráfico de anualidad anticipada

Esta serie de pagos depende del tiempo en el que ocurra el fallecimiento, este tiempo es aleatorio. Por ejemplo, para una persona de edad x que realiza pagos anuales y que muere entre el intervalo $[x+t, x+t+1)$ habrá realizado t pagos, sin embargo, esta t es una variable aleatoria del tiempo.

Consideremos a la siguiente variable aleatoria

$$\ddot{a}_{t_x} = 1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{t_x - 1}$$

Como este número de pagos es variable calculamos la esperanza de $\ddot{a}_{t_x}$, la cual es obtenida de la siguiente forma:

$$E\left[\ddot{a}_{t_x}\right] = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \ {}_tp_x$$

Empleando la notación Actuarial:

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \ {}_tp_x$$

De manera similar para el caso continuo tenemos a nuestra variable aleatoria T_x donde el valor presente de los pagos realizados está dado por la variable $\bar{a}_{T_x} = \frac{1-v^{T_x}}{\delta}$.

[2] Michael Sherris. (2011). Principles of Actuarial Science.

Calculando el valor esperado de los pagos realizados, tenemos la anualidad continúa denotada como $\bar{a}_x$ de la siguiente manera:

$$\bar{a}_x = E[\,\bar{a}_{T_x}] = \int_0^{\infty} \bar{a}_t \;\; {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

Haciendo los cálculos correspondientes de la integral anterior llegamos a la siguiente igualdad:

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} v^t \;\; {}_t p_x \, dt$$

Ejemplo 1.4 *Pruebe que* $\bar{a}_x = \frac{1-\bar{A}_x}{\delta}$.

Recordemos que definimos a la variable aleatoria continua para el tiempo de fallo como

$\bar{Z}_x = v^T$,

Calculando el valor esperado de nuestra variable tenemos:

$$\bar{a}_x = E[\,\bar{a}_{T_x}] = E\left[\frac{1-\bar{Z}_x}{\delta}\right] = \frac{1}{\delta}(E[1\,] - E[\bar{Z}_x\,]) = \frac{1-\bar{A}_x}{\delta}.$$

Esta igualdad representa que el seguro puede calcularse en términos de la anualidad y viceversa.

1.4.1 Anualidades capitalizables *m* veces al año

Este tipo de anualidades son aquellas que son pagaderas más de una vez al año, es decir, que hacen pagos de manera semestral, trimestral y mensual o en términos más generales son pagos que se realizan m veces al año, es importante considerar también a la tasa de interés si la anualidad es capitalizable 3 veces al año, estaremos hablando de pagos cuatrimestrales y la tasa de interés a utilizar deberá ser cuatrimestral.

Pagos de $\frac{1}{m}$ son hechos al inicio del periodo m veces estos pagos son equivalentes a realizar un solo pago. Notemos que si $m = 1$ estaremos hablando de una anualidad de un año, como la hemos definido previamente.

Utilizando la notación actuarial tenemos que:

$$\ddot{a}_x{}^{(m)} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} v^{\frac{1}{m}} \;\; {}_{\frac{1}{m}}p_x + \frac{2}{m} v^{\frac{2}{m}} \;\; {}_{\frac{2}{m}}p_x + \cdots$$

$$\ddot{a}_x{}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{\infty} v^{\frac{t}{m}} \;\; {}_{\frac{t}{m}}p_x$$

Dos resultados importantes obtenidos a partir de métodos de aproximación para edades no enteras para las siguientes distribuciones son:

- Distribución Uniforme

$$\ddot{a}_x{}^{(m)} \approx \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m) = \frac{id}{i^{(m)}d^{(m)}}\ddot{a}_x - \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}}$$

Donde $i^{(m)} = m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right] \qquad d^{(m)} = m\left[1 - (1+i)^{\frac{-1}{m}}\right]$

- Distribución Exponencial

$$\ddot{a}_x{}^{(m)} \approx \frac{\delta^2}{i^{(m)}d^{(m)}}\bar{a}_x - \frac{\delta - i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}}$$

Con $i^{(m)} = m\left[e^{\frac{\delta}{m}} - 1\right] \qquad d^{(m)} = m\left[1 - e^{\frac{-\delta}{m}}\right]$

Ejemplo 1.5 *Calcule* $\ddot{a}_x{}^{(3)}$ *para una distribución exponencial en* $[0,\infty]$ *con* $\mu = 0.01$ *y una fuerza de interés* δ *del* 4%.

Para una distribución exponencial tenemos que la anualidad está dada por:

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t}e^{-\mu t}\, dt = \int_0^\infty e^{-(\delta+\mu)t}\, dt = \left[\frac{-e^{-(\delta+\mu)t}}{\delta+\mu}\Big|_0^\infty\right] = \frac{1}{\delta+\mu} = \frac{1}{0.05} = 20$$

Con $i^{(3)} = 3\left[e^{\frac{0.04}{3}} - 1\right] = 0.0402 \quad y \quad d^{(3)} = 3\left[1 - e^{\frac{-0.04}{3}}\right] = 0.0397$

Sustituyendo nuestros valores tenemos que:

$$\ddot{a}_x{}^{(3)} \approx \frac{(0.04)^2}{(0.0402)(0.0397)}(20) - \frac{0.04 - 0.0402}{(0.0402)(0.0397)} \approx 20.1762$$

En este caso la anualidad que se paga continuamente es más barata que hacer pagos cuatrimestrales anticipados.

1.5 Prima

Definición 1.5: *La prima es el pago que deberá hacer el asegurado a la aseguradora por la cobertura del riesgo.*

El asegurado debe hacer pagos periódicos P mientras se encuentre con vida, de manera similar a una anualidad tenemos:

$$\begin{aligned} Valor\ presente\ de\ los\ pagos\ a\ la\ aseguradora &= P + Pvp_x\ + Pv^2\ {}_2p_x + \ldots \\ &= P\sum_{t=0}^{\infty} v^t\ {}_tp_x \\ &= P\ddot{a}_x \end{aligned}$$

El tiempo de fallo es aleatorio, es decir que no sabemos cuándo ocurrirá, por lo cual no sabremos cuantos pagos hará el asegurado al momento de fallo, es por esto por lo que la pérdida es una variable aleatoria que denotamos como L_t.

Las aseguradoras calculan la prima P con el principio de equivalencia que dice que la pérdida esperada de un seguro debe ser cero y esto ocurre cuando el valor presente de las primas es igual valor presente de los beneficios, es decir:

$$E[L_t] = P\ddot{a}_x - A_x = 0$$

De lo anterior tenemos:

$$P = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$$

De manera análoga para una variable aleatoria continua tenemos:

$$\bar{P} = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}$$

1.6 Reserva

El principio de equivalencia dice que:

$$Valor\ presente\ de\ las\ primas = Valor\ presente\ de\ los\ beneficios$$

Con esta igualdad se espera que el valor de pérdida sea cero, pero esta equivalencia no existe siempre, si no hasta cierto tiempo t.

Definimos a la variable aleatoria L_t como:

$$L_t = Valor\ presente\ de\ las\ primas - Valor\ presente\ de\ los\ beneficios, al\ tiempo\ t$$

Asumimos que L_t no es idénticamente igual a cero y asumimos que $T > t$

El valor esperado de L_t condicionado a $T > t$, es conocido como la reserva y esta denotada como ${}_tV$.

Definición 1.6: *La reserva representa la cantidad de dinero que la aseguradora debió ahorrar para proveer los beneficios futuros de la póliza de seguro.*

Para el cálculo de la reserva utilizaremos el método prospectivo que nos dice que la reserva al tiempo t es el valor esperado condicional, de la diferencia entre el valor presente de los beneficios y el valor presente de las primas, es decir:

$$
\begin{aligned}
{}_tV &= E(L_t|T > t) \\
&= Valor\ presente\ actuarial\ de\ los\ beneficios\ futuros \\
&\quad - Valor\ presente\ actuarial\ de\ las\ primas\ futuras
\end{aligned}
$$

A partir de esto obtenemos las siguientes igualdades para un seguro de vida

$${}_tV_x = A_{x+t} - \tfrac{A_x}{\ddot{a}_x}\ddot{a}_{x+t}$$

$${}_t\bar{V}_x = \bar{A}_{x+t} - \tfrac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}\bar{a}_{x+t}$$

Ejemplo 1.6 *Considere una distribución uniforme en* $[0,100]$. *Calcule* ${}_{10}\bar{V}_{30}$ *con una fuerza de interés del* 5%.

Para el cálculo de la reserva necesitamos calcular los siguientes seguros

$$\bar{A}_{30} = \int_0^{70} \frac{1}{70} e^{-0.05t} = 0.277 \qquad \bar{A}_{40} = \int_0^{60} \frac{1}{60} e^{-0.05t} = 0.3167$$

Del ejemplo 1.4 podemos calcular las anualidades de la siguiente forma:

$$\bar{a}_{30} = \frac{1 - \bar{A}_{30}}{\delta} = \frac{1 - 0.277}{0.05} = 14.46$$

$$\bar{a}_{40} = \frac{1 - \bar{A}_{40}}{\delta} = \frac{1 - 0.3167}{0.05} = 13.66$$

Sustituyendo los valores tenemos:

$${}_{10}\bar{V}_{30} = \bar{A}_{40} - \frac{\bar{A}_{30}}{\bar{a}_{30}}\bar{a}_{40} = 0.3167 - \left(\frac{0.277}{14.46}\right)(13.66) \approx 0.055$$

Capítulo 2

La teoría de vida múltiple

En la práctica existen los seguros de grupo que son muy útiles para empresas o compañías que requieran asegurar a sus trabajadores y así mitigar sus riesgos, conocidos como seguros de vida conjunta.[3]

Para poder desarrollar estos seguros es necesario aplicar la teoría matemática actuarial a múltiples vidas, es decir que se pueden generar para $n = 2,3,4, \ldots$, con n finito.

Este tipo de seguros pueden calcularse desde diferentes perspectivas, como lo son los estados:

- Vida conjunta
- Último superviviente

2.1 Vida conjunta

Consideremos un modelo para dos vidas conjuntas x y y al tiempo $t = 0$. Usaremos la notación xy para este estado y T_{xy} como la variable aleatoria del tiempo de fallo para estas vidas conjuntas.

Definición 2.1: *Un estado de vida conjunta es aquel que requiere la supervivencia de todos los miembros del grupo.*

Como consecuencia de la definición T_{xy} es más pequeña que T_x o T_y, es decir que T_{xy} representa el tiempo en que alguna de las vidas falla.

$$T_{xy} = \min\left(T_x\, , T_y\right)$$

2.1.2 Función de supervivencia para T_{xy}

De manera similar al caso de una vida, para nuestra nueva variable tenemos que la función de supervivencia está dada por:

$$S_{xy}(t) = \Pr\left(T_{xy} > t\right)$$

Esta función determina la probabilidad de que ambos individuos estén con vida después de t años y en notación actuarial:

[3] José Cosío Rodríguez. (1982). Introducción al Seguro de Vida.

$$ {}_tp_{xy} = S_{xy}(t) $$

Suponiendo independencia entre T_x y T_y, tenemos:

$$ S_{xy}(t) = \Pr\big(\min(T_x, T_y) > t\big) $$

$$ = \Pr\big(T_x > t, T_y > t\big) $$

$$ = \Pr\big(T_x > t\big) \Pr\big(T_y > t\big) $$

$$ = {}_tp_x \ {}_tp_y $$

Ejemplo 2.1 *Considere a dos individuos de edades* $x = 30$ *y* $y = 35$, *con* x *y* y *independientes y una distribución uniforme en* $[0,100]$. *Calcule* ${}_tp_{30:35}$.

$$ {}_tp_{30} = 1 - \frac{t}{70} \qquad \text{con } 0 \le t \le 70 $$

$$ {}_tp_{35} = 1 - \frac{t}{65} \qquad \text{con } 0 \le t \le 65 $$

$$ {}_tp_{30:35} = \left(1 - \frac{t}{70}\right)\left(1 - \frac{t}{65}\right) = 1 - \left(\frac{135t - t^2}{4550}\right) \qquad \text{con } 0 \le t \le 65 $$

Note que el dominio de la función es la intersección de los dominios de ${}_tp_{30}$ y ${}_tp_{35}$.

2.1.3 Función de Distribución Acumulativa para T_{xy}

En algunos casos estaremos más interesados en la probabilidad de fallo de T_{xy} la cual se obtiene con la función de distribución acumulativa que está dada por:

$$ F_{xy}(t) = 1 - S_{xy}(t) = \Pr\big(T_{xy} \le t\big) $$

O bien usando la notación actuarial $F_{xy}(t) = {}_tq_{xy}$

Suponiendo nuevamente independencia tenemos:

$$ {}_tq_{xy} = 1 - {}_tp_{xy} $$

$$ = 1 - {}_tp_x \ {}_tp_y $$

$$ = 1 - (1 - {}_tq_x)(1 - {}_tq_y) $$

$$ = {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_x \ {}_tp_y $$

Ejemplo 2.2 *Considere a dos individuos de edades* $x = 30$ *y* $y = 35$, *con* x *y* y *independientes y una distribución uniforme en* $[0,100]$. *Calcule* ${}_tq_{30:35}$.

Con la distribución uniforme tenemos que:

$${}_tq_{30} = \frac{t}{70} \qquad \text{con } 0 \leq t \leq 70$$

$${}_tq_{35} = \frac{t}{65} \qquad \text{con } 0 \leq t \leq 65$$

Así, ${}_tq_{30:35} = 1 - {}_tp_{30:35}$

$$= 1 - {}_tp_{30}\ {}_tp_{35}$$

$$= 1 - (1 - {}_tq_{30})(1 - {}_tq_{35})$$

$$= 1 - \left(1 - \tfrac{t}{70}\right)\left(1 - \tfrac{t}{65}\right)$$

$$= 1 - \left[1 - \left(\frac{135t - t^2}{4550}\right) \quad \right]$$

$$= \frac{135t - t^2}{4550} \qquad \text{con } 0 \leq t \leq 65$$

2.1.4 Función de densidad para T_{xy}

Si estamos interesados en el instante de fallo la función de densidad de T_{xy}, nos será de mayor utilidad.

Así,

$$f_{xy}(t) = \frac{d}{dt} F_{xy}(t) = -\frac{d}{dt} S_{xy}(t)$$

Si x y y son independientes tenemos:

$$f_{xy}(t) = -\tfrac{d}{dt}\left({}_tp_x\ {}_tp_y\right)$$

$$= \left(-\tfrac{d}{dt}\ {}_tp_x\right) {}_tp_y - \left(\tfrac{d}{dt}\ {}_tp_x\right)\ {}_tp_y$$

$$= \left({}_tp_x\mu_{x+t}\right) {}_tp_y + \left({}_tp_y\mu_{y+t}\right)\ {}_tp_x$$

$$= \left({}_tp_x\ {}_tp_y\right)\left(\mu_{x+t} + \mu_{y+t}\right)$$

$$= f_x(t)S_y(t) + f_y(t)S_x(t)$$

Ejemplo 2.3 *Considere una distribución uniforme en* $[0{,}100]$ *y a dos individuos de edades* $x = 30\ \ y = 35$, *con* x *y* y *independientes. Calcule* $f_{30:35}(t)$.

De los ejemplos anteriores tenemos que:

$$ {}_tp_{30} = 1 - \frac{t}{70} $$

$$ {}_tp_{35} = 1 - \frac{t}{65} $$

Para una distribución uniforme $\mu_{x+t} = \frac{1}{w-x-t}$

$$ \mu_{30+t} = \frac{1}{100-30-t} = \frac{1}{70-t} $$

$$ \mu_{35+t} = \frac{1}{100-35-t} = \frac{1}{65-t} $$

Sustituyendo nuestros valores

$$ f_{30:35}(t) = (\ {}_tp_{30}\ \ {}_tp_{35})(\ \mu_{30+t} + \mu_{35+t}) $$

$$ \begin{aligned} f_{30:35}(t) \ &= \left[\left(1-\frac{t}{70}\right)\left(1-\frac{t}{65}\right)\right]\left[\frac{1}{70-t}+\frac{1}{65-t}\right] \\ &= \left[\left(\frac{70-t}{70}\right)\left(\frac{65-t}{65}\right)\right]\left[\frac{-2t+135}{(70-t)(65-t)}\right] \\ &= \frac{135-2t}{4550} \end{aligned} $$

2.1.5 Fuerza de fallo para $\boldsymbol{T_{xy}}$

Recordemos que la fuerza de mortalidad mide la tasa de fallo condicional instantánea al tiempo t, dado que sobrevivió al tiempo t en el caso de una vida, pero para un modelo de vida múltiple se generaliza el concepto a la fuerza de fallo que está dada por:

$$ \lambda_{xy}(t) = \frac{f_{xy}(t)}{S_{xy}(t)} $$

O bien podemos utilizar la siguiente notación:

$$ \lambda_{xy}(t) = \mu_{xy}(t) $$

Suponiendo independencia la fuerza del fallo es:

$$\mu_{xy}(t) = \mu_{x+t} + \mu_{y+t}$$

2.1.6 Probabilidad condicional

En algunas situaciones estaremos interesados en conocer la probabilidad de que el modelo no ha fallado al tiempo k y que su fallo ocurrirá en el siguiente periodo, es decir que se ha condicionado la falla a que se ha sobrevivido al tiempo k. Esta probabilidad puede resultar de gran importancia si queremos calcular la probabilidad de los pagos a realizar por mitigar algún riesgo antes de que el fallo ocurra.

Conocer la probabilidad de que el primer fallecimiento del modelo ocurra en el intervalo $(k, k+1]$ está denota por:

$$\begin{aligned} {}_{t|}q_{xy} &= \Pr\left(t < T_{xy} \leq t+1\right) \\ &= S_{xy}(t) - S_{xy}(t+1) \\ &= {}_{t}p_{xy} - {}_{t+1}p_{xy} \\ &= {}_{t}p_{xy}\left(1 - p_{x+t:y+t}\right) \\ &= {}_{t}p_{xy}q_{x+t:y+t} \end{aligned}$$

2.1.7 Esperanza de vida completa para T_{xy}

El valor esperado de la variable aleatoria T_{xy} dado que el modelo para vida conjunta no ha fallado, es el valor que se estima al que sobrevivirá el modelo y está dado por:

$$\begin{aligned} e^{o}_{xy} &= E\left[T_{xy}\right] \\ &= \int_{0}^{\infty} t \cdot f_{xy}(t)dt \\ &= \int_{0}^{\infty} {}_{t}p_{xy}dt \end{aligned}$$

La igualdad anterior como en el caso para una vida es válida, siempre que la función de supervivencia tenga esperanza finita y al hablar de vidas humanas esto se cumple.

2.2 Último superviviente

Consideremos una nueva variable aleatoria $\boldsymbol{T_{\overline{xy}}}$ que denota el tiempo de fallo de este estado para dos personas de edad x y y al tiempo t.

Definición 2.2 *Un estado de último superviviente es aquel que requiere que al menos uno de los miembros sobreviva, es decir que el fallo del modelo no ocurrirá hasta que todos los miembros del grupo fallezcan.*

A partir de la definición anterior tenemos que:

$$T_{\overline{xy}} = máx(T_x\,, T_y)$$

2.2.1 Función acumulativa para $\boldsymbol{T_{\overline{xy}}}$

Sean x y y independientes podemos calcular la probabilidad de fallo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} F_{\overline{xy}}(t) &= \Pr\left(T_{\overline{xy}} \leq t\right) \\ &= \Pr\left(máx(T_x\,, T_y) \leq t\right) \\ &= \Pr\left(T_x \leq t, T_y \leq t\right) \\ &= \Pr\left(T_x \leq t\right) \Pr\left(T_y \leq t\right) \\ &= {}_tq_x\ {}_tq_y \end{aligned}$$

Así, ${}_tq_{\overline{xy}} = {}_tq_x\ {}_tq_y$

2.2.2 Función de supervivencia para $\boldsymbol{T_{\overline{xy}}}$

Recordemos que para nuestros fines x y y son independientes y que estamos interesados en ver la supervivencia de nuestros modelos, es decir, hasta que el último miembro del grupo fallezca lo cual se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} S_{\overline{xy}}(t) &= 1 - F_{\overline{xy}} \\ &= 1 - {}_tq_{\overline{xy}} \\ &= 1 - {}_tq_x\ {}_tq_y \\ &= 1 - (1 - {}_tp_x)(1 - {}_tp_y) \end{aligned}$$

Usando la notación adecuada, tenemos:

$$ {}_tp_{\overline{xy}} = {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_x\ {}_tp_y $$

Ejemplo 2.4 *Considere a dos individuos de edades* $x = 30, y = 35$, *con* x *y* y *independientes y una distribución uniforme en* $[0,100]$. *Calcule* ${}_tq_{\overline{30:35}}$ *y* ${}_tp_{\overline{30:35}}$.

Tenemos para esta distribución que:

$$ {}_tq_{30} = \frac{t}{70} \qquad \text{con } 0 \leq t \leq 70 $$

$$ {}_tq_{35} = \frac{t}{65} \qquad \text{con } 0 \leq t \leq 65 $$

Así,

$$ {}_tq_{\overline{30:35}} = \left(\frac{t}{70}\right)\left(\frac{t}{65}\right) = \frac{t^2}{4550} \qquad \text{con } 0 \leq t \leq 65 $$

$$ {}_tp_{\overline{30:35}} = 1 - \left(\frac{t}{70}\right)\left(\frac{t}{65}\right) = 1 - \frac{t^2}{4550} \quad \text{con } 0 \leq t \leq 65 $$

Para este tipo de modelos el rango de valores varia de un intervalo a otro, obteniendo así las siguientes ecuaciones de acuerdo con el valor que tome t.

$$ {}_tq_{\overline{30:35}} = \begin{cases} \dfrac{t^2}{4550} & \text{con } 0 \leq t \leq 65 \\ \dfrac{t}{70} & \text{con } 65 \leq t \leq 70 \\ 1 & t > 70 \end{cases} $$

$$ {}_tp_{\overline{30:35}} = \begin{cases} 1 - \dfrac{t^2}{4550} & \text{con } 0 \leq t \leq 65 \\ 1 - \dfrac{t}{70} & \text{con } 65 \leq t \leq 70 \\ 0 & t > 70 \end{cases} $$

2.2.3 Función de densidad para $T_{\overline{xy}}$

Recordemos que para obtener más información acerca del instante de fallo, tenemos interés en esta función la cual se calcula mediante:

$$ f_{\overline{xy}}(t) = \frac{d}{dt} F_{\overline{\overline{xy}}}(t) = -\frac{d}{dt} S_{\overline{xy}}(t) $$

Si x y y son independientes tenemos:

$$f_{\overline{xy}}(t) = -\frac{d}{dt}\left({}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_x\, {}_tp_y\right)$$

$$= -\frac{d}{dt}\ {}_tp_x - \frac{d}{dt}\ {}_tp_y + \frac{d}{dt}\ {}_tp_x\, {}_tp_y$$

$$= {}_tp_x\mu_{x+t} + {}_tp_y\mu_{y+t} - {}_tp_{xy}\mu_{x+t:y+t}$$

$$= f_x(t) + f_y(t) - f_{xy}(t)$$

Ejemplo 2.5 *Considere a dos individuos de edades* $x = 30$, $y = 35$, *con* x *y* y *independientes y una distribución uniforme en* $[0,100]$. *Calcule* $f_{\overline{30:35}}(t)$.

Recordemos que:

$$f_{30}(t) = \frac{1}{70} \quad \text{con } 0 \leq t \leq 70$$

$$f_{35}(t) = \frac{1}{65} \quad \text{con } 0 \leq t \leq 65$$

$$f_{30:35}(t) = \frac{135 - 2t}{4550} \qquad \text{con } 0 \leq t \leq 65$$

Dependiendo del valor de t, la función tomará diferentes valores. Consideremos 2 casos:

- Si $0 \leq t \leq 65$

$$f_{\overline{30:35}}(t) = f_{30}(t) + f_{35}(t) - f_{30:35}(t)$$

$$f_{\overline{30:35}}(t) = \frac{1}{70} + \frac{1}{65} - \frac{135 - 2t}{4550} = \frac{t}{2275}$$

- Si $65 \leq t \leq 70$

$$f_{\overline{30:35}}(t) = \frac{1}{70}$$

Así obtenemos las siguientes funciones.

$$f_{\overline{30:35}}(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{2275} & 0 \leq t \leq 65 \\ \dfrac{1}{70} & 65 \leq t \leq 70 \end{cases}$$

2.2.4. Fuerza de fallo para $\boldsymbol{T_{\overline{xy}}}$

De manera análoga para medir la tasa de fallo condicional instantánea al tiempo t, dado que sobrevivió al tiempo t, utilizamos la fuerza de mortalidad que está dada por:

$$\lambda_{\overline{xy}}(t) = \frac{f_{\overline{xy}}(t)}{S_{\overline{xy}}(t)}$$

Utilizando la notación actuarial tenemos:

$$\lambda_{\overline{xy}}(t) = \mu_{\overline{xy}}(t)$$

2.2.5. Probabilidad condicional de $\boldsymbol{T_{\overline{xy}}}$

Consideremos el caso en el que nos interesa saber que el modelo ha sobrevivido al tiempo $t+1$ dado que sobrevivió al tiempo t, para calcular esta probabilidad tenemos la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}
{}_{t}|q_{\overline{xy}} &= \Pr\left(t < T_{\overline{xy}} \leq t+1\right) \\
&= S_{\overline{xy}}(t) - S_{\overline{xy}}(t+1) \\
&= {}_{t}p_{x} + {}_{t}p_{y} - {}_{t}p_{x}\,{}_{t}p_{y} - ({}_{t+1}p_{x} + {}_{t+1}p_{y} - {}_{t+1}p_{x}\,{}_{t+1}p_{y}) \\
&= {}_{t}p_{\overline{xy}} - {}_{t+1}p_{\overline{xy}} \\
&= {}_{t}|q_{x} + {}_{t}|q_{y} - {}_{t}|q_{xy}
\end{aligned}$$

2.2.6 Esperanza de vida completa para $\boldsymbol{T_{\overline{xy}}}$

El tiempo esperado que se estima que sobrevivirá el modelo de último superviviente está calculado mediante la esperanza de nuestra variable aleatoria $T_{\overline{xy}}$ y está dada por:

$$\begin{aligned}
e_{xy}^{o} &= E\left[T_{\overline{xy}}\right] \\
&= \int_{0}^{\infty} t \cdot f_{\overline{xy}}(t)dt
\end{aligned}$$

$$= \int_0^\infty {}_t p_{\overline{xy}} dt$$

La igualdad anterior se cumple porque nuestro modelo es para vidas humanas, en el cual la esperanza de la función de supervivencia es finita.

2.3 Seguro de vida múltiple

Existen diferentes tipos de seguros para el caso de vida múltiple, los más comunes son aquellos en los que una empresa asegura a sus trabajadores bajo una sola póliza, pero también hay diferentes compañías que ofrecen diferentes tipos de seguros para vida múltiple adaptándose a la demanda del mercado.[4]

Para el cálculo de estos seguros retomaremos nuestras variables aleatorias para el caso de vida conjunta y último superviviente.

2.3.1 Vida Conjunta

- **Caso discreto**

Denotemos a k_{xy} como la variable aleatoria que mide el tiempo del fallo de este modelo.

A partir de esto definimos a $Z_{xy} = v^{k_{xy}}$ como la variable aleatoria del valor presente de una unidad pagada al final del intervalo, calculando la esperanza de esta variable obtenemos el seguro para este caso, es decir:

$$A_{xy} = E[Z_{xy}]$$

$$= \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_{t-1|}q_{xy}$$

- **Caso continuo**

Sea $\bar{Z}_{xy}$ la variable aleatoria continua del valor presente de los pagos realizados antes del fallo, el seguro está dado por:

$$\bar{A}_{xy} = E[\bar{Z}_{xy}] = \int_0^\infty v^t f_{xy}(t)\, dt$$

[4] Las aseguradoras crean opciones personalizadas según las necesidades de la empresa, las cuales no siempre son publicadas en sus sitios web. Por esta razón es necesario consultar estos productos directamente con las aseguradoras o algún agente de seguros.

2.3.2 Último Superviviente

- **Caso discreto**

De manera análoga definimos a $Z_{\overline{xy}} = v^{k_{\overline{xy}}}$ como la variable aleatoria para el valor presente de los pagos realizados a este modelo.

$$A_{\overline{xy}} = E[Z_{\overline{xy}}] = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \, {}_{t-1}|q_{\overline{xy}}$$

Recordemos que

$${}_t|q_{\overline{xy}} = {}_t|q_x + {}_t|q_y - {}_t|q_{xy}$$

A partir de la igualdad anterior obtenemos el siguiente resultado:

$$A_{\overline{xy}} = \sum_{k=1}^{\infty} v^t \left({}_{t-1}|q_x + {}_{t-1}|q_y - {}_{t-1}|q_{xy} \right)$$

$$= \sum_{t=1}^{\infty} v^t \, {}_{t-1}|q_x + \sum_{t=1}^{\infty} v^t \, {}_{t-1}|q_y - \sum_{t=1}^{\infty} v^t \, {}_{t-1}|q_{xy}$$

$$= A_x + A_y - A_{xy}$$

- **Caso continuo**

Sea $\bar{Z}_{\overline{xy}}$ nuestra variable aleatoria para el caso continuo en este modelo, el seguro está dado por:

$$\bar{A}_{\overline{xy}} = E[\bar{Z}_{\overline{xy}}] = \int_0^{\infty} v^t f_{\overline{xy}}(t) dt$$

Tenemos la siguiente equivalencia que nos ayuda a facilitar los cálculos:

$$\bar{A}_{\overline{xy}} = \int_0^{\infty} v^t ({}_tp_x \mu_{x+t} + {}_tp_y \mu_{y+t} - {}_tp_{xy} \mu_{x+t:y+t}) \mathrm{dt}$$

$$= \bar{A}_{\bar{x}} + \bar{A}_{\bar{y}} - \bar{A}_{\overline{xy}}$$

Ejemplo 2.6 *Considere a dos individuos de edades* $x = 30$, $y = 35$, *con* x y y *independientes y una distribución uniforme en* $[0,100]$. *Calcule* $A_{30:35}$, $\bar{A}_{30:35}$ y $A_{\overline{30:35}}$ a una tasa del 5% anual.

- Para $A_{30:35}$

$${}_{t-1|}q_{30:35} = {}_{t-1}p_{30:35} - {}_{t}p_{30:35}$$

$$= \frac{(70-t+1)(65-t+1)}{4550} - \frac{(70-t)(65-t)}{4550}$$

$$= \frac{68-t}{2275}$$

$$A_{30:35} = \sum_{k=1}^{65} (1.05)^{-t} \left(\frac{68-t}{2275}\right)$$

$$= \frac{1}{2275} \sum_{k=1}^{65} (1.05)^{-t} (-t) + \frac{68}{2275} \sum_{k=1}^{65} (1.05)^{-t}$$

$$\approx 0.4198$$

- Para $\bar{A}_{30:35}$

Recordemos que $f_{30:35}(t) = \frac{135-2t}{4550}$, así:

$$\bar{A}_{30:35} = \int_0^{65} v^t \left(\frac{135-2t}{4550}\right) dt$$

$$= \frac{135}{4550} \int_0^{65} e^{-(0.05)t} dt - \frac{2}{4550} \int_0^{65} te^{-(0.05)t} dt$$

$$\approx 0.5704 - 0.1468$$

$$\approx 0.4236$$

- Para $A_{\overline{30:35}}$

$$A_{\overline{30:35}} = A_{30} + A_{35} - A_{30:35}$$

$$A_{30} = \sum_{t=1}^{70} v^t {}_{t-1|}q_{30} = \sum_{t=1}^{70} (1.05)^{-t} \left(\frac{1}{70}\right) = \frac{1-(1.05)^{-70}}{70(0.05)} \approx 0.2763$$

$$A_{35} = \sum_{t=1}^{65} v^t {}_{t-1|}q_{35} = \sum_{t=1}^{65} (1.05)^{-t} \left(\frac{1}{65}\right) = \frac{1-(1.05)^{-65}}{65(0.05)} \approx 0.2947$$

$$A_{\overline{30:35}} \approx 0.2763 + 0.2947 - 0.4198 \approx 0.1512$$

2.4 Anualidad de vida múltiple

Como sabemos una anualidad es una serie de pagos, hechos a intervalos iguales de tiempo mientras el individuo que contrata se encuentre con vida y al igual que en el modelo para una vida en el modelo para vidas múltiples estamos interesados en la probabilidad de ocurrencia de estos pagos.

2.4.1 Vida conjunta

Para la supervivencia de este modelo ambas personas deben estar vivas, es decir que su probabilidad de ocurrencia de los pagos está sujeta a que el fallo ocurra o bien alguna de las personas muera.

- **Caso discreto**

Para una anualidad vencida, es decir para pagos realizados al final del periodo tenemos la siguiente expresión:

$$a_{xy} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \ {}_tp_{xy}$$

Recordemos que cuando los pagos se realizan al principio del periodo, es decir al tiempo $t = 0$ hablamos de una anualidad anticipada:

$$\ddot{a}_{xy} = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \ {}_tp_{xy}$$

- **Caso continuo**

Una anualidad continua es aquella que en intervalos infinitamente pequeños otorgan una frecuencia de pago infinita, es decir que estos pagos se realizan de forma continua, así:

$$\bar{a}_{xy} = \int_0^{\infty} v^t \ {}_tp_{xy}\, dt$$

2.4.2 Último superviviente

- **Caso discreto**

En este modelo la definición es como en el caso de una vida, pero recordando que ahora nuestra función de probabilidad de supervivencia del modelo está dada por ${}_tp_{\overline{xy}}$. A partir de esto tenemos las siguientes igualdades para una anualidad diferida y anticipada, respectivamente.

$$a_{\overline{xy}} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \ {}_tp_{\overline{xy}} \quad y \quad \ddot{a}_{\overline{xy}} = \sum_{t=0}^{\infty} v^t \ {}_tp_{\overline{xy}}$$

- **Caso continuo**

En este caso la anualidad está dada por:

$$\bar{a}_{\overline{xy}} = \int_0^{\infty} v^t \ {}_tp_{\overline{xy}} \, dt$$

Recordemos que ${}_tp_{\overline{xy}} = {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_{xy}$

De lo anterior obtenemos la siguiente expresión:

$$\bar{a}_{\overline{xy}} = \int_0^{\infty} v^t ({}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_{xy}) dt$$

Lo cual es equivalente a: $\bar{a}_{\overline{xy}} = \bar{a}_x + \bar{a}_y - \bar{a}_{xy}$

Ejemplo 2.7 *Considere una distribución uniforme en* $[0,100]$. *Calcule* $\ddot{a}_{xy}$, $\ddot{a}_{\overline{xy}}$ y $\bar{a}_{\overline{xy}}$ *a una tasa del* 5% *anual* para *dos individuos de edades* $x = 30, y = 35$ *con* x *y* y *independientes.*

- Para $\ddot{a}_{xy}$

Sabemos que ${}_tp_{30:35} = 1 - \left(\frac{135t - t^2}{4550}\right)$ con $0 \leq t \leq 65$

$$\ddot{a}_{30:35} = \sum_{t=0}^{65} v^t \ {}_tp_{30:35}$$

$$= \sum_{t=0}^{65} v^t \left[1 - \left(\frac{135t - t^2}{4550}\right)\right]$$

$$= \sum_{t=0}^{65} v^t - \frac{135}{4550} \sum_{t=0}^{65} t v^t + \frac{1}{4550} \sum_{t=0}^{65} t^2 v^t$$

$$\approx 20.161 - 10.3208 + 2.3435$$

$$\approx 12.1837$$

- Para $\ddot{a}_{\overline{xy}}$

Recordemos que ${}_{t}p_{\overline{30:35}} = 1 - \frac{t^2}{4550}$ con $0 \leq t \leq 65$

$$\ddot{a}_{\overline{30:35}} = \sum_{t=0}^{65} v^t \ {}_{t}p_{\overline{30:35}}$$

$$= \sum_{t=0}^{65} v^t \left(1 - \frac{t^2}{4550}\right)$$

$$= \sum_{t=0}^{65} v^t - \frac{1}{4550} \sum_{t=0}^{65} t^2 v^t$$

$$\approx 20.161 - 2.3435$$

$$\approx 17.8175$$

- Para $\bar{a}_{\overline{xy}}$

$$\bar{a}_{\overline{30:35}} = \int_0^{65} v^t \ {}_{t}p_{\overline{30:35}} dt$$

$$= \int_0^{65} e^{-0.05t} \left(1 - \frac{t^2}{4550}\right) dt$$

$$\approx 17.008$$

2.5 Prima

Un grupo que quiera hacer la contratación de una póliza para mitigar riesgos deberá hacer pagos periódicos, conocidos como prima. En los cuales usualmente se hace un pago único sin importar cuantas personas pertenezcan al grupo, es decir que no suelen existir pagos individuales para cada uno de los miembros del grupo.

Estos pagos se pueden hacer de manera mensual, semestral, anual, etc. y el número de pagos y su periodicidad será acordado al momento de la contratación de la póliza.

En la *Sección 1.5* hemos introducido este concepto, el cual es aplicado en esta sección para modelos de vida múltiple.

2.5.1 Vida conjunta

En este modelo los pagos se realizarán mientras todos los miembros del grupo se encuentren con vida, una vez que algún miembro fallezca estos pagos dejarán de realizarse.

De manera análoga al caso de una vida, en vida múltiple y para este modelo tenemos las siguientes fórmulas:

- $Caso\ discreto \quad P_{xy} = \frac{A_{xy}}{\ddot{a}_{xy}}$
- $Caso\ continuto \quad \bar{P}_{xy} = \frac{\bar{A}_{xy}}{\bar{a}_{xy}}$

2.5.2 Último Superviviente

Mientras existan dos o más miembros en el grupo los pagos se seguirán realizando y en el momento en que sólo exista una persona, es decir, el último superviviente los pagos dejaran de efectuarse y así la persona podrá hacer reclamación por el beneficio acordado en la póliza.

Para este modelo tenemos las siguientes relaciones:

- $Caso\ discreto \quad P_{\overline{xy}} = \frac{A_{\overline{xy}}}{\ddot{a}_{\overline{xy}}}$
- $Caso\ continuo \quad \bar{P}_{\overline{xy}} = \frac{\bar{A}_{\overline{xy}}}{\bar{a}_{\overline{xy}}}$

2.6 Reserva

Con el dinero recaudado por las primas, las aseguradoras integran un fondo que se utilizará para hacer frente a los siniestros e indemnizaciones, es decir, que dicho dinero es el que se usará en caso de alguna reclamación por parte del asegurado. Este dinero es la reserva y que para vida múltiple la calcularemos por el método prospectivo.

2.6.1 Vida conjunta

De manera muy similar al caso de una vida, en este modelo tenemos que las primas siempre se pagarán de forma uniforme, es decir, que siempre que se haga un pago las personas dentro del grupo serán las mismas, lo cual no pasa en el modelo de último superviviente.

Así tenemos que la reserva está dada por:

$${}_tV_{xy} = A_{x+t:y+t} - P_{xy}\ddot{a}_{x+t:y+t}$$

2.6.2 Último Superviviente

Para este modelo la Reserva es un poco más compleja porque existen diversos casos: en el que todos los miembros del grupo siguen con vida, pero también el caso en el que alguno de ellos salga del grupo ya que esto cambiaría el monto de las primas pagadas a las aseguradoras generando un ingreso menor para el fondo de las reservas.

Para el caso de 2 vidas, en el que ambos miembros aún pertenecen al grupo tenemos:

$$ {}_tV_{\overline{xy}} = A_{\overline{x+t:y+t}} - P_{\overline{xy}}\ddot{a}_{\overline{x+t:y+t}} $$

Si y fallece, pero x sobrevive la reserva estará dada por:

$$ {}_tV_{\overline{xy}} = A_{x+t} - P_{\overline{xy}}\ddot{a}_{x+t} $$

Y de manera análoga para cuando y sobrevive y x fallece:

$$ {}_tV_{\overline{xy}} = A_{y+t} - P_{\overline{xy}}\ddot{a}_{y+t} $$

2.7 Generalización de modelos de vida múltiple como un proceso estocástico

En la vida diaria nos enfrentamos a diferentes situaciones que pueden verse afectadas por eventos fortuitos, que pueden modificar los resultados que esperábamos.

Consideremos una empresa que produce automóviles. Supongamos que la compañía produce 1000 autos diariamente, sin embargo, esto no significa que esas 1000 unidades se vendan diariamente porque la demanda del mercado es volátil, es decir, que no siempre se mantendrá constante. Puede ser que hoy los clientes prefieran los autos producidos por esta empresa, pero quizás mañana estos clientes prefieran los autos de otra compañía. Esta tasa de producción no puede ser fija ya que depende de la demanda y muchos otros factores.

Los procesos estocásticos nos permiten determinar la ocurrencia de este tipo de eventos porque son modelos matemáticos que estudian los fenómenos aleatorios que evolucionan en el tiempo.

2.7.1 Procesos estocásticos

La aplicación de los procesos estocásticos está presente en muchas áreas de estudio tales como: medicina, economía, meteorología, ingeniería, por mencionar algunas, es una herramienta muy útil y fácil de utilizar para aquellos modelos en los que se involucra aleatoriedad a través del tiempo.

Para efectos matemáticos su estudio se centra en la modelización de sistemas que cambian a lo largo del tiempo, donde una sucesión de variables aleatorias describe el estado del sistema en un instante de tiempo dado.

De manera más formal tenemos la siguiente definición:

Definición 2.3: *Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias* $\{X_t: t \ \in T\}$ *parametrizada por un conjunto* T*, llamado espacio parametral, y con valores en un conjunto* S *llamado espacio de estados.*

Según sea T un conjunto numerable o no, el proceso será de parámetro discreto o continuo respectivamente. En el primer caso se toma como espacio parametral al conjunto discreto $T = \{0,1,2, \dots\}$ el cual puede representar tiempo, personas, por mencionar algunos ejemplos lo cual dependerá de en qué modelo apliquemos la teoría estocástica y lo denotaremos como $\{X_n: n = 0,1,2, \dots\}$ y para el caso continuo la notación está dada por $\{X_t: t \geq 0\}$.

Existen diferentes tipos de procesos estocásticos, es decir que tienen una característica en común que puede estar dada en el espacio parametral. Por ejemplo, las relaciones de dependencia entre las variables aleatorias, etc. y a partir de aquí los podemos clasificar.

Algunos ejemplos son:

- Procesos estacionarios: su distribución de probabilidad oscila de forma más o menos constante alrededor de ciertos valores, a lo largo de algún periodo de tiempo.
- Procesos de Márkov: son un tipo de procesos discretos con la característica de que su evolución sólo depende del estado actual y no de los anteriores.
- Procesos de ensayos independientes: está constituido por variables aleatorias independientes, es decir que, el resultado del evento es independiente a cualquier proceso anterior o futuro.
- Proceso de Bernoulli: es una secuencia de ensayos independientes de Bernoulli distribuidos de forma idéntica.

2.7.2 Cadenas de Márkov a tiempo discreto

Este tipo de proceso fue desarrollado por Andrey Márkov en 1905 y tiene como principal característica que determina la ocurrencia de un evento futuro sin dependencia de la ocurrencia del evento inmediatamente anterior, es decir que, el resto de los eventos previos no son necesarios para obtener información relevante del evento futuro.[5]

El gran uso de este modelo se debe a que puede explicar procesos complejos de algunos sistemas, pero con la ventaja de que las matemáticas empleadas para su desarrollo son de fácil comprensión.

Definición 2.4: *Una cadena de Márkov es un proceso estocástico a tiempo discreto* $\{X_n: n = 0,1, \dots\}$ *con espacios de estados discreto y que satisface la propiedad de Markov, esto es, que para cualquier entero* $n \geq 0$ *y para cualesquiera estados* $X_0, \dots, X_{n+1}$ *se cumple*

[5] Luis Rincón. (2012). Introducción a los procesos estocásticos.

$$P(X_{n+1}|X_0,\dots,X_n) = P(X_{n+1}|X_n) = p^{ij}$$

Donde p^{ij}recibe el nombre de probabilidad de transición del estado i en el tiempo n, al estado j en el tiempo $n+1$, es decir que p^{ij} es la probabilidad de transición del estado i al estado j en un paso.

Los modelos en los que empleamos las cadenas de Márkov pueden tener dos o más estados, es por esta razón que emplearemos una matriz de transición denotada como P en donde i denota a las filas y j a las columnas y así facilitar su compresión para m estados.

$$P = \begin{pmatrix} p^{11} & p^{12} & \cdots & p^{1j} & \cdots & p^{1m} \\ p^{21} & p^{22} & \cdots & p^{2j} & \cdots & p^{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p^{i1} & p^{i2} & \cdots & p^{ij} & \cdots & p^{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p^{m1} & p^{m2} & \cdots & p^{mj} & \cdots & p^{mm} \end{pmatrix}$$

Definición 2.5*:* *Una matriz estocástica es aquella matriz de probabilidades de transición $P = (p^{ij})$ que cumple las siguientes propiedades:*

$a)$ $p^{ij} \geq 0$

$b)$ $\sum_j p^{ij} = 1$

Probabilidades de transición en *n* pasos

Las cadenas de Márkov tienen la característica de ser homogéneas en el tiempo, es por esto que la probabilidad de pasar del estado i al estado j, estando en un tiempo m y pasando al tiempo $m+n$, no depende de m, por lo que: $P(X_{n+m} = j|X_m = i)$ coincide con $P(X_n = j|X_0 = i)$.

A esta probabilidad se le conoce como la probabilidad de transición en n pasos y que denotaremos como ${}_np^{ij}$, otro tipo de notación que estaremos empleando es ${}_np_x{}^{ij}$ donde x simboliza la edad de una persona. Sin embargo, está última notación será muy poco empleada en este capítulo para así facilitar la compresión de cómo funciona un proceso estocástico.

Hay diferentes formas de realizar el cálculo correspondiente de ${}_{n}p^{ij}$, entre ellas tenemos la siguiente.

Definición 2.6: *Para cualesquiera números enteros* r *y* n *tales que* $0 \leq r \leq n <$ *y para cualesquiera estados* i *y* j, *se cumple*

$$ {}_{n}p^{ij} = \sum_{k} {}_{n}p^{ik}\,{}_{n-r}p^{kj} $$

La igualdad anterior es conocida como la Ecuación de Chapman-Kolmogorov, la cual es de gran utilidad para descomponer la probabilidad de pasar del estado i al j en n pasos en la suma de probabilidades de trayectorias que van de i al j y que tienen un posible recorrido por un estado k. A partir de la definición anterior tenemos la siguiente proposición como alternativa para el cálculo de ${}_{n}p^{ij}$.

Proposición 2.1 *La probabilidad de transición en n pasos* ${}_{n}p^{ij}$, *está dada por la entrada* (i, j) *de la n-ésima potencia de la matriz P, es decir,*

$$ {}_{n}p^{ij} = (P)^{n} $$

Ejemplo 2.8 *Sabemos que la probabilidad de que llueva mañana dado que llovió hoy es de 0.7 y que la probabilidad de que llueva mañana dado que no llovió hoy es de 0.4. Calcule la probabilidad de que no llueva dentro de 3 días dado que hoy no está lloviendo.*

De lo anterior podemos nombrar a los siguientes estados:

Estado 0: Llovió hoy.

Estado 1: Lloverá mañana.

Figura 2.1 Esquema de estados del ejemplo 2.8

Y con esto hacer las posibles combinaciones

p^{00}: Lloverá mañana dado que llovió hoy.

p^{01}: No lloverá mañana dado que llovió hoy.

p^{10}: Lloverá mañana dado que no llovió hoy.

p^{11}: No lloverá mañana dado que no llovió hoy.

Con la información anterior podemos obtener la siguiente matriz de transición:

$$P = {}_1p^{ij} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Para saber la probabilidad de que llueva en 3 días dado que llovió hoy es necesario hacer el cálculo de ${}_3p^{11}$ y por la proposición 2.1 tenemos lo siguiente:

$${}_3p^{11} = P^3 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0.583 & 0.417 \\ 0.556 & 0.444 \end{pmatrix}$$

Del cálculo anterior obtenemos que la probabilidad de que no llueva dentro de 3 días dado que hoy llovió es de ${}_3p^{11} = 0.444$

2.7.3 Cadenas de Márkov a tiempo continuo

De manera análoga para el caso continuo se tiene la característica de que el estado futuro solo depende del pasado inmediato, sin importar la información previa.

En el caso discreto utilizamos un tiempo continuo $n = 0,1,2$ ..., pero ahora es necesario extender nuestra definición a un tiempo continuo $t \geq 0$. Consideremos a $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq t_s$ y sus posibles estados $i_0, i_1, \dots, i_n, i_s$ como la información que tenemos de este tipo de cadena, la cual es de Márkov si es independiente de la información previa, de manera más formal tenemos la siguiente definición.

Definición 2.7: *Sea* $\{X_t : t \geq 0\}$ *un proceso estocástico de tiempo continuo cuyo espacio de estado es* $S = \{0,1, \dots\}$. *Decimos que* $\{X_t : t \geq 0\}$ *es una cadena de Márkov de tiempo continuo si*

$$P\left(X_{t+s} = j \middle| X_s = i, X_{t_n} = i_n, \dots, X_{t_0} = i_0\right) = P(X_t = j | X_0 = i)$$

Otra ecuación que es de gran utilidad es la Ecuación de Kolmogorov la cual sirve para realizar el cálculo de las probabilidades de transición de un estado a otro para una persona de edad x, y que permite expresar las probabilidades de transición para cualquier tiempo $t > 0$ en términos de probabilidades infinitesimales.

Teorema 2.1 *Sea* i *y* j *dos estados no necesariamente distintos en un modelo de estados múltiples con un total de* $n + 1$ *estados. Para* $x, t, h \geq 0$, *tenemos la siguiente fórmula:*

$${}_{t+h}p_x^{ij} = {}_tp_x^{ij} - h \sum_{k=0,\ k \neq j}^{n} \left({}_tp_x^{ij} \mu_{x+t}^{jk} - {}_tp_x^{ik} \mu_{x+t}^{kj} \right) + o(h)$$

Y como resultado de ella tenemos la Ecuación de Kolmogorov

$$\frac{d}{dt}\ {}_tp_x^{ij} = \sum_{k=0,\ \ k\neq j}^{n} \left({}_tp_x^{ik}\mu_{x+t}^{kj} - {}_tp_x^{ij}\mu_{x+t}^{jk} \right)$$

Demostración: Consideremos la probabilidad de estar en el estado j al tiempo $x+t+h$ dado que en el tiempo $x+t$ ya nos encontrábamos en el estado j o algún otro estado k y que la transición a j será antes del tiempo $x+t+h$, así:

$${}_{t+h}p_x^{ij} = {}_tp_x^{ij}\ {}_hp_{x+t}^{jj} + \sum_{k=0,\ \ k\neq j}^{n} {}_tp_x^{ik}\ {}_hp_{x+t}^{kj}$$

$${}_{t+h}p_x^{ij} = {}_tp_x^{ij}\left(1 - h\sum_{k=0,\ \ k\neq j}^{n} \mu_{x+t}^{jk} - o(h)\right) + \sum_{k=0,\ \ k\neq j}^{n} {}_tp_x^{ik}\ {}_hp_{x+t}^{kj}$$

$${}_{t+h}p_x^{ij} = {}_tp_x^{ij}\left(1 - h\sum_{k=0,\ \ k\neq j}^{n} \mu_{x+t}^{jk} - o(h)\right) + h\sum_{k=0,\ \ k\neq j}^{n} {}_tp_x^{ik}\mu_{x+t}^{kj} + \mathrm{o}(h)$$

$${}_{t+h}p_x^{ij} = {}_tp_x^{ij} - h\sum_{k=0,\ \ k\neq j}^{n+1} \left({}_tp_x^{ij}\mu_{x+t}^{jk} - {}_tp_x^{ik}\mu_{x+t}^{kj} \right) + o(h)$$

$$\frac{1}{h}\left({}_{t+h}p_x^{ij} - {}_tp_x^{ij}\right) = -\sum_{k=0,\ \ k\neq j}^{n+1} \left({}_tp_x^{ij}\mu_{x+t}^{jk} - {}_tp_x^{ik}\mu_{x+t}^{kj} \right) + \frac{1}{o(h)}$$

Calculando el límite cuando $h \to 0$

$$\frac{d}{dt}\ {}_tp_x^{ij} = \sum_{k=0,\ \ k\neq j}^{n} \left({}_tp_x^{ik}\mu_{x+t}^{kj} - {}_tp_x^{ij}\mu_{x+t}^{jk} \right)$$

Así, obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales de Kolmogorov. Es importante notar que en algunos modelos existirán estados absorbentes facilitando el cálculo del sistema, ya que ciertas probabilidades serán cero.

2.7.4 Aplicación de las Cadenas de Márkov en los seguros

En el ramo actuarial los procesos estocásticos, pero en particular las cadenas de Márkov tienen muchas aplicaciones. Se emplean para determinar volatilidad de precios, oportunidades de arbitraje, modelos de colapso de una bolsa de valores, seguros, etc.

La mayoría de los seguros pueden ser calculados a partir de las cadenas de Márkov, consideremos el siguiente caso.

Ejemplo 7.2: *En el mercado asegurador existe un seguro que ofrece una cobertura para los servicios de reparación de fallas en una casa y las empresas que los ofrecen tienen este tipo de coberturas: instalaciones eléctricas, reparación de goteras, servicios de plomería, por mencionar algunas.*

Las aseguradoras están interesadas en conocer la probabilidad de ocurrencia de ciertos eventos y así hacer el cálculo del costo de sus coberturas y con esto mitigar pérdidas. Con los conceptos previos podemos plantear este ejemplo como un modelo estocástico específicamente como una cadena de Márkov a tiempo continuo.

Cada cobertura ofrecida por una aseguradora puede ser vista como un estado, así definimos a nuestros estados de la siguiente manera:

Estado 0: La casa se encuentra en condiciones óptimas.

Estado 1: La casa necesita una instalación eléctrica.

Estado 2: La casa necesita reparación de goteras.

Estado 3: La casa necesita servicios de plomería.

Cada cambio de estado representa una incidencia o pérdida para la aseguradora y tiene alguna probabilidad de ocurrencia que puede ser representada en una matriz de transición como la siguiente:

$$P = \begin{pmatrix} p^{00} & p^{01} & p^{02} & p^{03} \\ p^{10} & p^{11} & p^{12} & p^{13} \\ p^{20} & p^{21} & p^{22} & p^{23} \\ p^{30} & p^{31} & p^{32} & p^{33} \end{pmatrix}$$

Recordemos que la principal característica de las cadenas de Márkov es que no nos interesa el historial de todos los eventos salvo el último evento, a partir de aquí podemos hacer predicciones de los eventos futuros que podrían representar una pérdida para la aseguradora y así calcular el costo de los seguros y posteriormente hacer cálculos como las anualidades, primas y reservas.

Ahora consideremos este ejemplo, pero visto desde otro enfoque. Supongamos que la aseguradora tiene 2 casas aseguradas y que en lo que estamos interesados es en conocer cuando alguna de ellas necesite una reparación sin importar cual sea la falla, ahora nuestros estados están planteados de la siguiente manera:

Estado 0: Todas las casas se encuentran en condiciones óptimas.

Estado 1: Todas las casas se encuentran en condiciones óptimas excepto la casa número 1.

Estado 2: Todas las casas se encuentran en condiciones óptimas excepto la casa número 2.

Estado 3: Ambas casas necesitan reparaciones.

Notemos que ahora estamos planteando el ejemplo como un modelo de vida múltiple, pero estamos definiendo el modelo en estados como en un proceso estocásticos, haciendo así que los siguientes cálculos sean prácticamente igual que para el caso de una vida, ya que ahora estamos trabajando el modelo como en un proceso estocástico y no solo como un modelo de vida múltiple.

Capítulo 3

La ecuación de Thiele

La Reserva que como ya hemos definido previamente es el dinero que deber guardar la aseguradora en caso de la incidencia de algún evento y así proveer los beneficios futuros de alguna póliza. Hasta ahora sabemos que se calcula fácilmente con el principio de equivalencia donde de manera general sabemos que el valor presente de las primas debe ser igual al valor presente de los beneficios.

Thorvald N. Thiele un actuario danés es quien desarrolla la ecuación de Thiele, con la cual se propone una manera alternativa para el cálculo de la reserva. Esta ecuación es utilizada para el caso de una vida, pero también en la teoría de la vida múltiple y una de sus ventajas es que nos permite obtener el monto de la reserva en cualquier instante del tiempo.[6]

Existen muchas razones para querer saber cuál es el monto de la reserva, ya que en algunas ocasiones el asegurado necesita hacer una modificación a la póliza y entre ellas podemos hablar de los siguientes: tiempo de contratación del seguro, monto asegurado, tipo de tasa, costo de primas, etc. A pesar de que la póliza establece ciertas condiciones de contratación de un seguro en las cuales no se pueden hacer cambios, este tipo de situaciones suceden. Así la aseguradora deberá hacer frente a estos eventos porque en algunos países como Estados Unidos existen leyes en las que se protege al asegurado, exigiéndole a la empresa hacer la valuación de la reserva después de los 2 primeros años de contratación, sin importar otra restricción.[7]

3.1 Estados Múltiples

En los casos anteriores hemos considerado modelos para una sola vida, es decir que sólo se han hecho cálculos para un asegurado y los posibles cambios que puede tener la reserva al ir de un estado a otro. Sin embargo, otras de las grandes ventajas de Thiele es que al poder trabajar con estados múltiples podemos plantear seguros de vida múltiple como un proceso estocástico, lo cual hemos hecho previamente. Debemos ser cuidadosos al desarrollar conceptos como la prima, seguro, etc. al plantear el principio de equivalencia ya que en ocasiones los costos pueden variar de una vida a otra. En este Capítulo consideraremos la

[6] David C. M. Dickson/ Mary R. Hardy/ Howard R. Waters. (2009). Actuarial Mathematics for Life Contingent Risk.

[7] Sthepen J. Camilli / Ian Duncan / Richard L. London. (2014). Models for Quantifying Risk Sixth Edition.

ecuación de Thiele para una vida y así facilitar los conceptos empleados, en el siguiente apartado veremos un ejemplo de vida conjunta.

3.1.1 Modelo Vida-Muerte

El caso más sencillo de estados múltiples es aquel que plantemos como un modelo de supervivencia en el primer capítulo y que cuenta con dos estados: vivo y muerto

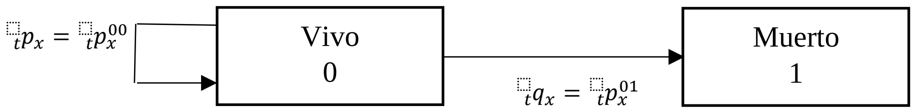

Figura 3.1 Modelo Vida – Muerte

Recordemos que la probabilidad de fallecimiento está dada por ${}_tq_x$, la cual puede ser vista como la probabilidad de ir del estado 0 al estado 1 y que denotaremos por ${}_tp_x^{01}$. Mientras que la probabilidad de supervivencia ${}_tp_x$ consiste mantenerse en el estado 0 y que esta denotada por ${}_tp_x^{00}$.

Notemos que no existe la probabilidad de ir del estado 1 al estado 0, ya que alguién que está muerto no puede resucitar es por esto por lo que ${}_tp_x^{10} = 0$.

La reserva para este ejemplo puede ser fácilmente calculada con la teoría de los modelos de supervivencia, ya que las primas serán pagadas únicamente cuando la persona se encuentre con vida, es decir, que mientras se encuentre en el estado 0 se estará guardando un monto para el fondo de las reservas y una vez que se cambie al estado 1 el asegurado ya no tendrá que hacer el pago de las primas.

Al ser pocos estados y al condicionar que no existe la probabilidad de ir del estado 0 desde el estado 1 y que no existe pago de prima en el estado 1, estaremos únicamente interesados en calcular el costo de la reserva cuando nos mantengamos en el estado 0. Además de que esta reserva no tendrá que cubrir alguna cobertura adicional a la muerte, facilitando así su cálculo pudiendo utilizar herramientas como el principio de equivalencia, sin embargo, existen muchos otros casos donde sea conveniente utilizar otras opciones.

La notación utilizada hasta ahora está dada por ${}_tV_x$, no es muy funcional para saber en qué estado estamos calculando la reserva es por eso que utilizaremos la notación ${}_tV^{(i)}$, en donde el superíndice i nos indica el estado en el que se está realizando el cálculo de la reserva y este cambiara según en el estado en el que nos encontremos.

3.1.2 Modelo de Ingresos por Incapacidad

En el mercado asegurador existen muchos tipos de seguros en donde se pueden ofrecer diferentes coberturas, donde cada una puede ser representada por un estado y es aquí cuando toma mayor relevancia saber en qué estado nos encontramos y así realizar un correcto cálculo para la reserva.

Consideremos el modelo de ingresos por incapacidad, el cual tiene 3 estados: vivo, enfermo, muerto. Para este seguro la persona paga primas mientras se encuentre en el estado 0, recibirá alguna suma en caso de muerte y tendrá algún beneficio si se enferma.

Notemos que los estados 0 y 1 se comunican entre sí, es decir, que se puede ir de un estado a otro sin embargo una vez que estemos en el estado 2, no hay manera de ir a otro estado.

En ejemplos como este con 3 o más estados toma mayor importancia saber en qué estado nos encontramos, ya que existe la posibilidad de querer calcular el dinero acumulado existente en el fondo de la reserva al tiempo k, que a diferencia del modelo de vida-muerte donde sólo era necesario calcular la reserva en el estado 0, aquí estaremos interesados en hacer el cálculo en el estado 0 o 1.

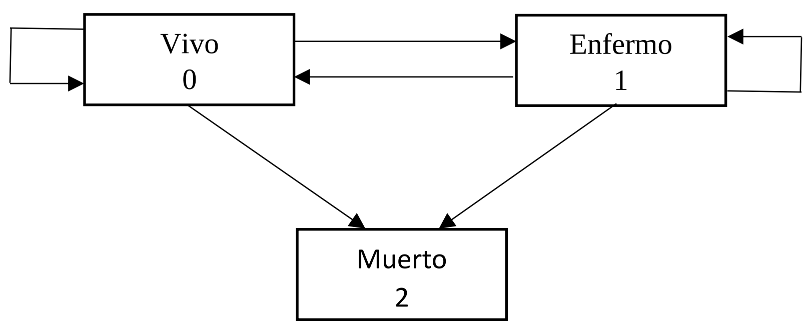

Figura 3.2 Modelo de Ingresos por Incapacidad

Usualmente los métodos tradicionales utilizados para el cálculo de la reserva sólo considera tiempos al principio de o final de un año, es decir que es calculada en donde los pagos de las primas no son de manera mensual, semestral, etcétera y en donde el pago de los beneficios es entregado al final del periodo, sin embargo en la práctica no existen estas situaciones es por esta razón que la ecuación de Thiele es de gran utilidad ya que nos permite realizar el cálculo de la reserva en cualquier instante del tiempo.

Ejemplo 3.1 *Considere el Modelo de Ingresos por Incapacidad. Calcule a)* ${}_tV^{(0)}$ *y b)* $\frac{d}{dt}\ {}_tV^{(0)}$*, suponiendo que la prima, los beneficios y la fuerza de interés* δ *son constantes.*

Para este ejemplo consideremos una póliza para una persona de edad x, que se contrata a n años, donde las primas se pagan continuamente a una tasa P mientras la persona se encuentre saludable y a la que se pagará de forma continua una tasa B mientras se encuentre enferma y en caso de fallecimiento se le entregará una suma asegurada S, que será pagada de manera inmediata.

a) Por el principio de equivalencia sabemos que la pérdida esperada de un seguro deber ser cero, así tenemos que:

$${}_tV^{(0)} = Valor\ presente\ de\ los\ beneficios - Valor\ presente\ de\ las\ primas$$

Sin embargo, recordemos que debemos considerar el estado en el que nos encontramos, así:

$${}_tV^{(0)} = \begin{matrix} Valor\ presente \\ de\ los\ beneficios \\ futuros \end{matrix} - \begin{matrix} Valor\ presente\ de\ las\ primas \\ condicionadas\ a\ estar\ en\ el \\ estado\ 0\ al\ tiempo\ t \end{matrix}$$

Los beneficios del asegurado serán en caso de discapacidad y fallecimiento, mientras que sus obligaciones únicamente serán el pago de la prima mientras se encuentre en el estado 0,es decir:

$${}_tV^{(0)} = \begin{matrix} Valor\ presente\ de\ los \\ beneficios\ futuros \\ por\ discapacidad \end{matrix} + \begin{matrix} Valor\ presente\ del \\ beneficio\ futuro \\ por\ muerte \end{matrix} - \begin{matrix} Valor\ presente\ de\ las\ primas \\ condicionadas\ a\ estar\ en\ el \\ estado\ 0\ al\ tiempo\ t \end{matrix}$$

Utilizando la notación correspondiente, sin olvidar que nos encontramos en el estado 0 tenemos que la reserva está dada por:

$${}_tV^{(0)} = B\bar{a}^{01}_{x+t:n-t} + S\bar{A}^{02}_{x+t:n-t} - P\bar{a}^{00}_{x+t:n-t} \qquad \text{con } 0 \leq t < n$$

De manera análoga para calcular ${}_tV^{(1)}$, debemos considerar que estamos en el estado 1 por lo que la reserva será:

$${}_tV^{(1)} = B\bar{a}^{11}_{x+t:n-t} + S\bar{A}^{12}_{x+t:n-t} - P\bar{a}^{10}_{x+t:n-t} \qquad \text{con } 0 \leq t < n$$

b) Para poder realizar el cálculo de $\frac{d}{dt}\ {}_tV^{(0)}$, pensemos en ${}_tV^{(0)}$ como el dinero que la aseguradora tienen al tiempo t y donde esta cantidad debe ser suficiente para cubrir futuras pérdidas.

Sea h tal que $t < t + h < n$, con h lo suficientemente pequeña. Estamos interesados en conocer que ocurre entre los tiempos t y $t + h$.

Nuestra reserva ${}_tV^{(0)}$ crecerá a razón de $e^{\delta h}$, mientras que las primas tendrán un valor acumulado dado por $\bar{S}_h$

Es decir que el dinero acumulado por la aseguradora está dado por ${}_tV^{(0)}e^{\delta h} + P\bar{S}_h$, pero recordemos que $\bar{s}_h = \frac{e^{\delta h}-1}{\delta}$ y $e^{\delta h} = 1 + \delta h + o(h)$, así:

$$
\begin{aligned}
{}_tV^{(0)}e^{\delta h} + P\bar{S}_h &= {}_tV^{(0)}(1 + \delta h + o(h)) + P\left(\frac{e^{\delta h} - 1}{\delta}\right) \\
&= {}_tV^{(0)}(1 + \delta h + o(h)) + P\left(\frac{1 + \delta h + o(h) - 1}{\delta}\right) \\
&= {}_tV^{(0)}(1 + \delta h + o(h)) + P\left(\frac{\delta h + o(h)}{\delta}\right) \\
&= {}_tV^{(0)}(1 + \delta h + o(h)) + P\left(h + \frac{o(h)}{\delta}\right)
\end{aligned}
$$

Dado que $\frac{o(h)}{\delta}$ es una función que depende de h, llegamos a la siguiente igualdad:

$$
{}_tV^{(0)}e^{\delta h} + P\bar{S}_h = {}_tV^{(0)}(1 + \delta h) + Ph + o(h)
$$

Notemos que la reserva crece de esta forma a un tiempo h, es decir que está cantidad es la reserva al tiempo $t + h$ denotada por ${}_{t+h}V^{(0)}$ la cual es el monto acumulado de ${}_tV^{(0)}$, sin embargo, debemos considerar que puede haber una posible pérdida para la aseguradora en estos casos:

i) Si el asegurado fallece, la aseguradora deberá pagar una cantidad S, con una probabilidad de ocurrencia de $h\,\mu_{x+t}^{02} + o(h)$.

ii) Si el asegurado enferma tendrá que recibir un beneficio B, con una probabilidad de ocurrencia de $h\,\mu_{x+t}^{01} + o(h)$

En cualquiera de estas situaciones recordemos que la aseguradora ya tendrá un monto acumulado dado por ${}_{t+h}V^{(0)}$ y por esta razón la posible cantidad adicional que deberá pagar al asegurado está dada por $S - {}_{t+h}V^{(0)}$ y ${}_{t+h}V^{(1)} - {}_{t+h}V^{(0)}$, respectivamente.

De esta forma el valor acumulador para ${}_{t}V^{(0)}$, debe ser equivalente a ${}_{t+h}V^{(0)}$ considerando estos gastos adicionales, es decir:

$$
\begin{aligned}
{}_{t}V^{(0)}(1+\delta h)+Ph \quad &= {}_{t+h}V^{(0)} + \left({}_{t+h}V^{(1)} - {}_{t+h}V^{(0)}\right)(h\,\mu_{x+t}^{01} + o(h)\,) \\
&\quad + \left(S - {}_{t+h}V^{(0)}\right)(h\,\mu_{x+t}^{02} + o(h)\,)
\end{aligned}
$$

Reordenando los términos llegamos a la siguiente expresión:

$$
{}_{t}V^{(0)}(1+\delta h)+Ph = {}_{t+h}V^{(0)} + h\left\{\mu_{x+t}^{02}\left(S - {}_{t+h}V^{(0)}\right) + \mu_{x+t}^{01}\left({}_{t+h}V^{(1)} - {}_{t+h}V^{(0)}\right)\right\} + o(h)
$$

Recordemos que la definición de derivada para una función f, es $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, así

$$
\frac{d}{dt}\ {}_{t}V^{(0)} = \lim_{h\to 0}\frac{(\delta\ {}_{t}V^{(0)} + P)h - \left({}_{t+h}V^{(1)} - {}_{t+h}V^{(0)}\right)(h\,\mu_{x+t}^{01}\,) - \left(S - {}_{t+h}V^{(0)}\right)(h\,\mu_{x+t}^{02}\,) + o(h)}{h}
$$

Calculando el límite tenemos:

$$
\frac{d}{dt}\ {}_{t}V^{(0)} = \delta\ {}_{t}V^{(0)} + P - \mu_{x+t}^{01}\left({}_{t}V^{(1)} - {}_{t}V^{(0)}\right) - \mu_{x+t}^{02}\left(S - {}_{t}V^{(0)}\right)
$$

De manera análoga llegamos a que la reserva estando en el estado 1, es la siguiente:

$$
\frac{d}{dt}\ {}_{t}V^{(1)} = \delta\ {}_{t}V^{(1)} - B - \mu_{x+t}^{10}\left({}_{t}V^{(0)} - {}_{t}V^{(1)}\right) - \mu_{x+t}^{12}\left(S - {}_{t}V^{(1)}\right)
$$

3.2 Caso general de Thiele

El cálculo de la reserva está sujeta al valor esperado de la variable aleatoria de pérdida futura, así la ecuación de Thiele puede ser empleada para el cálculo de reservas en modelos con múltiples estados. Como ventaja del uso de Thiele se considera el requisito adicional de que el valor de la póliza depende del estado del modelo en el que el asegurado se encuentre el asegurado, es decir, que de esta forma podemos calcular el monto de la reserva en cualquier momento.

Consideremos una póliza de seguro para una persona de edad x contratada por n años, para un modelo de $n+1$ estados, en donde la prima, los beneficios y la fuerza de interés δ, son constantes.

Numéricamente el valor de la póliza depende de: las probabilidades de transición de un estado a otro, la fuerza de interés, los gastos asumidos y los beneficios pagaderos al asegurado. Por simplicidad en los cálculos ignoraremos los gastos, sin embargo, al realizar cualquier cálculo estos pueden ser incluidos como beneficios o primas negativos, bajo la condición de que serán pagados de forma continuamente mientras el asegurado se encuentre en determinado estado.

Así, introducimos la siguiente notación:

- μ_x^{ij} *es la probabilidad de transición del estado i al estado j, para un individuo de edad x.*
- $B_t^{(i)}$ *es la tasa de pago de los beneficios para el asegurado, mientras se encuentre en el estado i .*
- δ_t *es la fuerza de interés por año al timpo t.*
- $S_t^{(ij)}$ *es el beneficio pagadero instantáneamente al tiempo t, en la transicion del estado i al estado j.*

Notemos que, en el modelo de ingresos por incapacidad, consideramos el pago una prima P, sin embargo, en esta sección generalizaremos más este concepto. Cuando la aseguradora cobre una prima, $B_t^{(i)}$ será de signo positivo y cuando tenga que pagar algún beneficio será de signo negativo, lo cual es fácil de entender ya que si la aseguradora paga algún beneficio mientras el individuo se encuentre en algún estado, estará disminuyendo el valor de la reserva y cuando reciba la prima, el monto incrementará.

De lo anterior tenemos que la generalización de la ecuación de Thiele para $i = 0,1,2 \ldots, n$ y $0 \leq t \leq n$ está dada por:

$$\frac{d}{dt}\ {}_tV^{(i)} = \delta_t\ {}_tV^{(i)} - B_t^{(i)} - \sum_{j=0, j\neq i}^{n} \mu_{x+t}^{ij} \left(S_t^{(ij)} + {}_tV^{(j)} - {}_tV^{(i)} \right)$$

Esta ecuación diferencial nos da la razón de cambio de la reserva respecto al tiempo, así el valor de ${}_tV^{(i)}$ cambia como resultado del interés obtenido por $\delta_t\ {}_tV^{(i)}$ y de los beneficios pagados por $B_t^{(i)}$ para un tiempo dado.

Notemos que el valor de la póliza puede tener un cambio de acuerdo con el estado en el que nos encontremos, cuando el asegurado va del estado i al j sus efectos son observables en:

- Una disminución de ${}_tV^{(j)}$ dado que la aseguradora tiene que establecer un valor apropiado para la póliza en el nuevo estado.
- Un aumento de ${}_tV^{(i)}$ pues está cantidad ya no será necesaria.
- Una disminución de $S_t^{(ij)}$ ya que la aseguradora está sujeta al pago de algún beneficio al ir de un estado i a un estado j.

Con la ecuación de Thiele para múltiples estados y con las observaciones hechas, bastará con plantear un sistema de ecuaciones diferenciales y utilizar algún método de resolución según nos convenga, haciendo así el cálculo de la reserva más fácil que si planteáramos el problema mediante el uso de integrales.

Capítulo 4

Seguro de vida para un matrimonio

En México el mercado asegurador ha tenido un crecimiento considerable en los últimos años, entre los que podemos destacar seguros de auto, gastos médicos mayores y de vida como los más populares. Sin embargo, nos encontramos con dos grandes limitaciones: la primera es que existen pocas compañías que ofrecen seguros de vida conjunta y la segunda es que las compañías buscan implementar nuevos procesos para efectuar el cálculo de un seguro de manera eficiente.[8]

Es cierto que existen seguros para grupos desde hace varios años, pero cuando hablamos de un grupo de sólo dos personas nuestras opciones se reducen más. Es por esta razón que estamos interesados en plantear un modelo para un matrimonio, pero particularmente buscamos obtener el valor de las reservas aplicando la ecuación de Thiele y con esta optimizar el cálculo de la reserva, lo cual resulta beneficioso para una aseguradora.

4.1 Planteamiento del modelo

Supongamos que existe un matrimonio que busca contratar una póliza conjunta que mitigue el riesgo de fallecimiento de cada uno de ellos, en la cual la edad del esposo está denotada por x y la edad de la esposa está denotada por y.

Recordemos que para implementar la ecuación de Thiele es necesario plantear el modelo como un proceso estocástico, así de esta manera tenemos los siguientes estados:

$Estado\ 0: Ambos\ individuos\ se\ encuentran\ con\ vida.$

$Estado\ 1: El\ esposo(x)\ se\ encuentra\ con\ vida\ y\ la\ esposa(y)\ está\ muerta.$

$Estado\ 2: La\ esposa(y)\ se\ encuentra\ con\ vida\ y\ el\ esposo(x)\ \ está\ muerto.$

$Estado\ 3: Ambos\ individuos\ se\ encuentran\ sin\ vida.$

Con los estados que hemos definido debemos tener algunas consideraciones porque al hablar de vida es claro que una vez que alguno de los individuos fallezca y se pase a un nuevo estado, no será posible regresar al estado del que se salió dado que no hay manera de resucitar. Para aclarar esto tenemos que:

[8] Irma Saavedra. (2006). Fundamentos y Tarificación del Seguro de Vida Grupo.

I. Al morir alguno de los individuos se saldrá del estado 0 y no se podrá regresar a él.

II. Al llegar al estado 3 no hay manera de salir de él, ya que ambas personas se encontrarán sin vida.

III. Estar en el estado 1 o 2, significa que alguno de los individuos se encuentra sin vida. Para el primer caso nos referimos a y , quien no puede revivir por lo cual no se podría ir del estado 1 al 2 y de manera análoga cuando x se encuentre sin vida.

IV. No se puede ir directamente del estado 0 al estado 3 sin antes haber pasado por el estado 1 o 2 . Con lo anterior asumimos que al menos en un instante del tiempo alguno de los individuos se encontrará con vida, es decir, que no fallecerán al mismo tiempo.

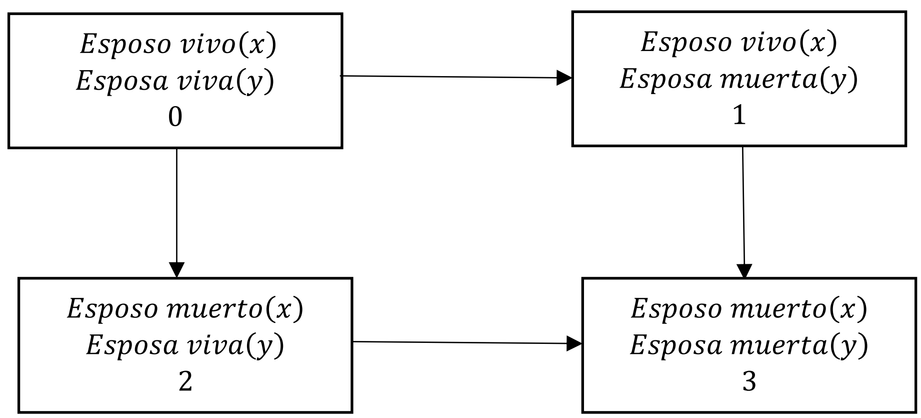

Figura 4.1 Modelo de Seguro de vida múltiple para un matrimonio

En la Figura 4.1 podemos ver el diagrama de transición de estados para nuestro modelo y así a través del sentido de las flechas podemos observar cómo se puede ir de un estado a otro y los casos mencionados anteriormente en los cuales no se puede hacer esto.

4.1.1 Fuerzas de transición

Para poder ir de un estado a otro es necesario conocer la fuerza de transición a la cual denotaremos como μ_{xy}^{ij} , donde i indica el estado en el que nos encontramos y j el estado al que entraremos. Por ejemplo μ_{xy}^{01} denota la fuerza de transición al ir del estado 0 al 1.

Con la figura 4.1 es fácil ver que sólo existen ciertas transiciones porque hay estados a los que no se puede ir estando en algún estado en particular. Por lo cual sólo nos interesan $\mu_{xy}^{01}, \mu_{xy}^{02}$, μ_{xy}^{13} y μ_{xy}^{23}.

En nuestro modelo asumiremos independencia lo que significa que el fallecimiento o supervivencia de un individuo no depende del otro, con este supuesto podemos ver que las fuerzas de transición pueden ser expresadas en términos de una vida. Es decir, para ir del estado 0 al 2 y del estado 1 al 3 estamos hablando de la probabilidad de fallecimiento del esposo y por el contrario cuando vamos del estado 0 al 1 y del estado 2 al 3 nos referimos al fallecimiento de la esposa. Así, al asumir independencia tenemos las siguientes igualdades:

$$\mu_{xy}^{01} = \mu_{xy}^{23} = \mu_{y+t}$$
$$\mu_{xy}^{02} = \mu_{xy}^{13} = \mu_{x+t}$$

Notemos que μ_{x+t} y μ_{y+t} es la notación que ha sido utilizada en el Capítulo 1 cuando hablamos de seguros para una vida, la cual es posible emplear asumiendo que no existe dependencia entre x y y.

Dada está independencia las fuerzas de transición serán calculas de manera individual y para ello utilizaremos el supuesto exponencial.

Supuesto 4.1: *Sea* ℓ_{x+t} *una función exponencial que explica el comportamiento del crecimiento poblacional entre el tiempo* x *y* $x+t$, *con* $\ell_{x+t} = \ell_x (p_x)^t$.

Tenemos que la fuerza de mortalidad está dada por:

$$\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt}\ln(\ell_{x+t})$$
$$= -\frac{d}{dt}\ln[\ell_x(p_x)^t]$$
$$= -\frac{d}{dt}[\ln(\ell_x) + \ln(p_x)^t]$$
$$= -\frac{d}{dt}[\ln(\ell_x) + t\ln(p_x)]$$
$$\mu_{x+t} \approx -\ln(p_x).$$

A partir de aquí sabemos que se cumple lo siguiente:

$$\mu_{xy}^{01} = \mu_{xy}^{23} = \mu_{y+t} \approx -\ln(p_y)$$
$$\mu_{xy}^{02} = \mu_{xy}^{13} = \mu_{x+t} \approx -\ln(p_x)$$

Hemos definido las fuerzas de transición usando conceptos para cuando hablamos de una vida asumiendo la independencia. Sin embargo, para no generar confusión durante el desarrollo del capítulo sólo utilizaremos la siguiente notación:

$$\mu_{xy}^{01} = \mu_{xy}^{23} \approx -\ln(p_y)$$
$$\mu_{xy}^{02} = \mu_{xy}^{13} \approx -\ln(p_x)$$

4.1.2 Seguro temporal a un año

El siguiente paso del modelo es hacer el planteamiento del costo del seguro por la cobertura ofrecida para el plazo de un año. Como hemos asumido que no existe dependencia entre x y y, haremos el cálculo del seguro de manera individual para cada persona.

Para cubrir el riesgo de fallecimiento del esposo existen dos posibilidades: que fallezca mientras se encuentra en el estado 0 pasando así al estado 2 o que fallezca dado que nos encontramos en el estado 1 y así pasemos al estado 3. Matemáticamente tenemos que este seguro está dado por:

$$\bar{A}_{x:1} = \int_0^1 e^{-\delta t}\left({}_tp_{\mathrm{xy}}^{00}\mu_{xy}^{02} + {}_tp_{xy}^{01}\,\mu_{xy}^{13}\right) dt$$

De manera análoga podemos hacer cálculo del seguro para la cobertura de la esposa, considerando los posibles riesgos a los que nos enfrentaremos, así tenemos que:

$$\bar{A}_{y:1} = \int_0^1 e^{-\delta t}\left({}_tp_{\mathrm{xy}}^{00}\mu_{xy}^{01} + {}_tp_{xy}^{02}\,\mu_{xy}^{23}\right) dt$$

Ahora que hemos planteado ambos seguros necesitamos el valor correspondiente de las probabilidades conjuntas y para calcular las probabilidades utilizaremos la ecuación de Kolmogorov.

Recordemos que esta ecuación está dada por:

$$\frac{d}{dt}\ {}_tp_{\mathrm{xy}}^{\mathrm{ij}} = \sum_{k=0,k\neq j}^{n}\left({}_tp_{\mathrm{xy}}^{\mathrm{ik}}\mu_{xy}^{kj} - {}_tp_{\mathrm{xy}}^{\mathrm{ij}}\mu_{xy}^{jk}\right)$$

Procederemos hacer el desarrollo para ${}_tp_{\mathrm{xy}}^{00}, p_{xy}^{01}$ y ${}_tp_{xy}^{02}$. Así:

$$\frac{d}{dt}\ {}_tp_{xy}^{00} = \sum_{k=0,k\neq j}^{3}\left({}_tp_{\mathrm{xy}}^{0\mathrm{k}}\mu_{xy}^{k0} - {}_tp_{\mathrm{xy}}^{00}\mu_{xy}^{0k}\right)$$

$$= {}_tp_{xy}^{01}\mu_{xy}^{10} - {}_tp_{\mathrm{xy}}^{00}\mu_{xy}^{01} + {}_tp_{xy}^{02}\mu_{xy}^{20} - {}_tp_{\mathrm{xy}}^{00}\mu_{xy}^{02} + {}_tp_{\mathrm{xy}}^{03}\mu_{xy}^{30} - {}_tp_{\mathrm{xy}}^{00}\mu_{xy}^{03}$$

Notemos que algunas fuerzas de transición como $\mu_{xy}^{10}, \mu_{xy}^{20}, \mu_{xy}^{30}$ son cero porque en nuestro modelo no podemos ir del estado $1, 2,$ o 3 al estado 0. De esta forma podemos reescribir la ecuación anterior como:

$$\frac{d}{dt}\ {}_tp_{xy}^{00} = -\left(\mu_{xy}^{01} + \mu_{xy}^{02}\right)\ {}_tp_{xy}^{00}$$

Así de manera análoga tenemos que:

$$\frac{d}{dt}\ {}_tp_{xy}^{01} = \sum_{k=0,k\neq j}^{3}\left(\ {}_tp_{xy}^{0k}\mu_{xy}^{k1} - \ {}_tp_{xy}^{01}\mu_{xy}^{1k}\right)$$

$$= \mu_{xy}^{01}\ {}_tp_{xy}^{00} - \mu_{xy}^{13}\ {}_tp_{xy}^{01}$$

$$\frac{d}{dt}\ {}_tp_{xy}^{02} = \sum_{k=0,k\neq j}^{3}\left(\ {}_tp_{xy}^{0k}\mu_{xy}^{k2} - \ {}_tp_{xy}^{02}\mu_{xy}^{2k}\right)$$

$$= \mu_{xy}^{02}\ {}_tp_{xy}^{00} - \mu_{xy}^{23}\ {}_tp_{xy}^{02}$$

El siguiente paso es resolver el sistema de ecuaciones obtenido:

I. $\frac{d}{dt}\ {}_tp_{xy}^{00} = -\left(\mu_{xy}^{01} + \mu_{xy}^{02}\right)\ {}_tp_{xy}^{00}$

II. $\frac{d}{dt}\ {}_tp_{xy}^{01} = \mu_{xy}^{01}\ {}_tp_{xy}^{00} - \mu_{xy}^{13}\ {}_tp_{xy}^{01}$

III. $\frac{d}{dt}\ {}_tp_{xy}^{02} = \mu_{xy}^{02}\ {}_tp_{xy}^{00} - \mu_{xy}^{23}\ {}_tp_{xy}^{02}$

Al resolver el sistema anterior tenemos la solución general de cada ecuación que está dada por:

$${}_tp_{xy}^{00} = K_1 e^{-\left(\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}\right)t}$$

$${}_tp_{xy}^{01} = \frac{\mu_{xy}^{01} e^{-\left(\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}\right)t}}{\mu_{xy}^{13} - \mu_{xy}^{01} - \mu_{xy}^{02}} + K_2 e^{-\mu_{xy}^{13}\,t}$$

$${}_tp_{xy}^{02} = \frac{\mu_{xy}^{02} e^{-\left(\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}\right)t}}{\mu_{xy}^{23} - \mu_{xy}^{01} - \mu_{xy}^{02}} + K_3 e^{-\mu_{xy}^{23}\,t}$$ con K_1, K_2, K_3 constantes.

Para obtener la solución particular notemos que al tiempo $t = 0$ el valor de ${}_tp_{xy}^{00}$ es de 1, ya que al momento de contratación es decir cuando t es 0, ambos individuos se encuentran con vida como parte del requisito de contratación para nuestro seguro. Mientras que el valor para ${}_tp_{xy}^{01}$ y ${}_tp_{xy}^{02}$ al tiempo $t = 0$ es de 0.

Con estos valores determinamos el valor de las constantes en el sistema de ecuaciones, obteniendo como resultado:

$$ {}_tp_{xy}^{00} = e^{-\left(\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}\right)\,t} $$

$$ {}_tp_{xy}^{01} = \frac{\mu_{xy}^{01} e^{-\left(\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}\right)\,t} - e^{-\mu_{xy}^{13}\,t}}{\mu_{xy}^{13} - \mu_{xy}^{01} - \mu_{xy}^{02}} $$

$$ {}_tp_{xy}^{02} = \frac{\mu_{xy}^{02} e^{-\left(\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}\right)\,t} - e^{-\mu_{xy}^{23}\,t}}{\mu_{xy}^{23} - \mu_{xy}^{01} - \mu_{xy}^{02}} $$

Ahora que sabemos el valor de las probabilidades, haremos la sustitución correspondiente. Para el seguro del esposo tenemos:

$$ \bar{A}_{x:1} = \int_0^1 e^{-\delta t}\left({}_tp_{xy}^{00}\mu_{xy}^{02} + {}_tp_{xy}^{01}\,\mu_{xy}^{13}\right) dt $$

$$ = \int_0^1 e^{-\delta t}\left[e^{-\left(\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}\right)t}\mu_{xy}^{02} + \left(\frac{\mu_{xy}^{01} e^{-\left(\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}\right)\,t} - e^{-\mu_{xy}^{13}\,t}}{\mu_{xy}^{13} - \mu_{xy}^{01} - \mu_{xy}^{02}}\right)\mu_{xy}^{13}\right] dt $$

$$ = \mu_{xy}^{02}\int_0^1 e^{-\left(\delta+\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}\right)t}\,dt + \left(\frac{\mu_{xy}^{01}\,\mu_{xy}^{13}}{\mu_{xy}^{13} - \mu_{xy}^{01} - \mu_{xy}^{02}}\right)\int_0^1 \left(e^{-\left(\delta+\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}\right)t} - e^{-\left(\delta+\mu_{xy}^{13}\right)t}\right) dt $$

$$ = \mu_{xy}^{02}\left[\frac{e^{-\left(\delta+\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}\right)t}}{-\left(\delta+\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}\right)}\Bigg|_0^1\right] + \left(\frac{\mu_{xy}^{01}\,\mu_{xy}^{13}}{\mu_{xy}^{13}-\mu_{xy}^{01}-\mu_{xy}^{02}}\right)\left[\frac{e^{-\left(\delta+\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}\right)t}}{-\left(\delta+\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}\right)}\Bigg|_0^1 + \frac{e^{-\left(\delta+\mu_{xy}^{13}\right)t}}{\delta+\mu_{xy}^{13}}\Bigg|_0^1\right] $$

$$ = \left(\frac{\mu_{xy}^{02}}{\delta + \mu_{xy}^{01} + \mu_{xy}^{02}}\right)\left(1 - e^{-\left(\delta+\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}\right)}\right) + \left(\frac{\mu_{xy}^{01}\,\mu_{xy}^{13}}{\mu_{xy}^{13} - \mu_{xy}^{01} - \mu_{xy}^{02}}\right)\left(\frac{1 - e^{-\left(\delta+\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}\right)}}{\delta + \mu_{xy}^{01} + \mu_{xy}^{02}} + \frac{e^{-\left(\delta+\mu_{xy}^{13}\right)} - 1}{\delta + \mu_{xy}^{13}}\right) $$

Mientras que para el seguro de la esposa tenemos que:

$$ \bar{A}_{y:1} = \int_0^1 e^{-\delta t}\left({}_tp_{xy}^{00}\mu_{xy}^{01} + {}_tp_{xy}^{02}\,\mu_{xy}^{23}\right) dt $$

$$ = \int_0^1 e^{-\delta t}\left[e^{-\left(\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}\right)t}\mu_{xy}^{01} + \left(\frac{\mu_{xy}^{02} e^{-\left(\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}\right)\,t} - e^{-\mu_{xy}^{23}\,t}}{\mu_{xy}^{23} - \mu_{xy}^{01} - \mu_{xy}^{02}}\right)\mu_{xy}^{23}\right] dt $$

$$= \mu_{xy}^{01} \int_0^1 e^{-(\delta+\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02})t}\, dt + \left(\frac{\mu_{xy}^{02}\, \mu_{xy}^{23}}{\mu_{xy}^{23} - \mu_{xy}^{01} - \mu_{xy}^{02}}\right) \int_0^1 \left(e^{-(\delta+\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02})t} - e^{-(\delta+\mu_{xy}^{23})t}\right) dt$$

$$= \mu_{xy}^{01} \left[\frac{e^{-\left(\delta+\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}\right)t}}{-\left(\delta+\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}\right)}\Bigg|_0^1\right] + \left(\frac{\mu_{xy}^{02}\, \mu_{xy}^{23}}{\mu_{xy}^{23}-\mu_{xy}^{01}-\mu_{xy}^{02}}\right)\left[\frac{e^{-\left(\delta+\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}\right)t}}{-\left(\delta+\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}\right)}\Bigg|_0^1 + \frac{e^{-\left(\delta+\mu_{xy}^{23}\right)t}}{\delta+\mu_{xy}^{23}}\Bigg|_0^1\right]$$

$$= \left(\frac{\mu_{xy}^{01}}{\delta + \mu_{xy}^{01} + \mu_{xy}^{02}}\right)\left(1 - e^{-\left(\delta+\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}\right)}\right) + \left(\frac{\mu_{xy}^{02}\, \mu_{xy}^{23}}{\mu_{xy}^{23} - \mu_{xy}^{01} - \mu_{xy}^{02}}\right)\left(\frac{1 - e^{-\left(\delta+\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}\right)}}{\delta + \mu_{xy}^{01} + \mu_{xy}^{02}} + \frac{e^{-\left(\delta+\mu_{xy}^{23}\right)} - 1}{\delta + \mu_{xy}^{23}}\right)$$

Hemos realizado el cálculo del costo del seguro de manera individual para cada vida. Sin embargo, estamos interesados en saber el costo total por la cobertura ofrecida. Este valor está dado por la suma de ambos seguros, pero recordemos que existe una suma asegurada, es decir el valor que deberá ser entregado en caso de fallecimiento. En nuestro modelo utilizaremos a B_1 como el beneficio en caso de fallecimiento del esposo y a B_2 para el monto asegurado si la persona que pierde la vida es la esposa, donde B_1 y B_2 no son necesariamente iguales.

Así podemos definir el costo de la cobertura total como:

$$Costo\ de\ Cobertura = B_1\bar{A}_{x:1} + B_2\bar{A}_{y:1}$$

Adicionalmente dado que nuestro modelo está planteado a través de estados podríamos definir un monto asegurado específico para cada estado. Por ejemplo, si consideramos el fallecimiento del esposo podríamos definir un beneficio de w_1 en caso de que el esposo fallezca antes que la esposa, es decir al ir del estado 0 al 2 y un beneficio de w_2 si el esposo fallece después que la esposa o bien al ir del estado 1 al 3. Lo cual resultaría en plantear el seguro para el marido como:

$$\bar{A}_{x:1} = w_1 \int_0^1 e^{-\delta t}\ {}_tp_{xy}^{00}\mu_{xy}^{02}\, dt + w_2 \int_0^1 e^{-\delta t}\ {}_tp_{xy}^{01}\, \mu_{xy}^{13}\, dt$$

Notemos que si $w_1 = w_2$, el beneficio será el que habíamos definido previamente como B_1.

Así para el planteamiento de nuestro modelo utilizaremos a B_1 como el beneficio en caso de fallecimiento del esposo sin importar si este fallece antes o después que su cónyuge, facilitando así los cálculos.

De manera análoga definimos beneficios específicos para cuando hablemos del fallecimiento de la esposa.

4.1.3 Anualidad

Ahora que sabemos el costo del seguro es necesario saber cuál será la forma de hacer frente a las obligaciones contratadas, es decir, los pagos que realizaremos y para ello haremos el cálculo de la anualidad para nuestro modelo.

Existen diferentes formas de realizar dichos pagos, pero para nuestro modelo estos se harán únicamente cuando nos encontremos en el estado 0, así de esta manera podemos definir a la anualidad del modelo como:

$$\bar{a}_{xy:1} = \int_0^1 e^{-\delta t} \ {}_tp_{xy}^{00} \, dt$$

$$= \int_0^1 e^{-\delta t} \, e^{-\left(\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}\right) t} dt$$

$$= \int_0^1 e^{-\left(\delta+\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}\right) t} dt$$

$$= \left.\frac{e^{-\left(\delta+\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}\right) t}}{-\left(\delta+\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}\right)}\right|_0^1$$

$$= \frac{1-e^{-\left(\delta+\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}\right)}}{\delta+\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}}$$

4.1.4 Prima

Al ofrecer una cobertura es necesario hacerle saber a la persona que contrata el servicio cual será la cantidad que pagará por el monto asegurado que espera recibir en caso de siniestro. Es por esta razón que necesitamos saber el valor de la prima, ya que dicho valor es el dinero que deberá pagar el asegurado.

Con la información en las secciones anteriores podemos obtener la prima anual que está dada por:

$$\bar{P}_{xy:1} = \frac{Costo\ de\ la\ cobertura}{\bar{a}_{xy:1}}$$

o bien $\bar{P}_{xy:1} = \frac{B_1\bar{A}_{x:1}+B_2\bar{A}_{y:1}}{\bar{a}_{xy:1}}$

Nuestro modelo ofrece cubrir el riesgo durante un año, por lo cual se podrá contratar el seguro con un pago único anual. Si nos interesa realizar este pago con otra periodicidad, por ejemplo, de manera mensual, quincenal, semanalmente o bien con m pagos, este escenario se observa en la Figura 4.2.

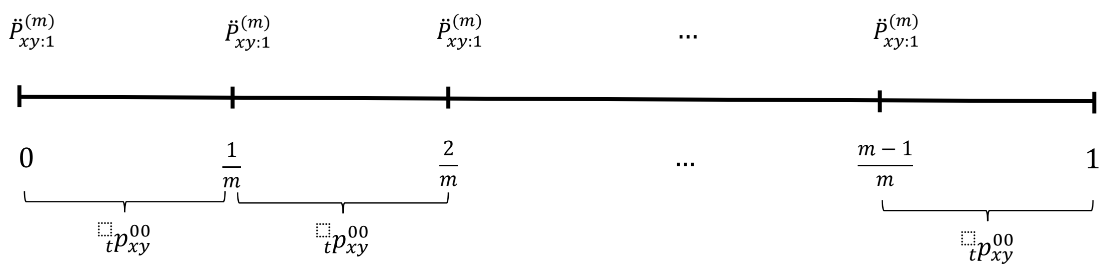

Figura 4.2 Esquema de primas pagaderas con periodicidad m

Notemos que el valor de $\bar{P}_{xy:1}$ tendrá que ser pagado al momento de contratación por la cobertura a un año. No obstante, podemos hacer dicho pago con una anualidad, es decir con pagos periódicos que serán realizados al inicio de cada periodo.

En la Figura 4.2 podemos ver que estos pagos a los que denotaremos como $\ddot{P}_{xy:1}^{(m)}$ tiene una periodicidad de $\frac{1}{m}$, los cuales serán realizados en diferentes es fechas por lo cual debemos considerar la probabilidad del pago y el interés generado.

La prima anual debe ser equivalente a estos m pagos de una prima periódica, por lo que tenemos la siguiente igualdad:

$$
\begin{aligned}
\bar{P}_{xy:1} &= \ddot{P}_{xy:1}^{(m)} \, {}_{\frac{t}{m}}p_{xy}^{00}\left(1+ v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + \cdots + v^{\frac{m-2}{m}} + v^{\frac{m-1}{m}}\right) \\
&= \ddot{P}_{xy:1}^{(m)} \sum_{t=0}^{m-1} v^{\frac{t}{m}} \, {}_{\frac{t}{m}}p_{xy}^{00} \\
&= \ddot{P}_{xy:1}^{(m)} \, \ddot{a}_{xy:1}^{(m)}
\end{aligned}
$$

Con la relación anterior es fácil obtener el valor de $P_{xy:1}^{(m)}$, que está dado por:

$$
P_{xy:1}^{(m)} = \frac{\bar{P}_{xy:1}}{\ddot{a}_{xy:1}^{(m)}}
$$

Esta última igualdad es la que nos dará la cantidad de dinero que pagará el asegurado, es decir, la prima capitalizable m veces al año.

4.1.4 Reserva

Como ya lo hemos visto en los Capítulos anteriores la reserva es el dinero que debe guardar la aseguradora para proveer los beneficios futuros de la póliza de seguro, para su cálculo emplearemos la Ecuación de Thiele de la cual hablamos en el Capítulo 3.

La Ecuación de Thiele está dada por:

$$\frac{d}{dt}\ {}_tV^{(i)} = \delta_t\ {}_tV^{(i)} - B_t^{(i)} - \sum_{j=0, j\neq i}^{n} \mu_{xy}^{ij}\left(S_t^{(ij)} + \ {}_tV^{(j)} - \ {}_tV^{(i)}\right)$$

donde

- μ_x^{ij} *es la probabilidad de transición del estado i al estado j, para un individuo de edad x.*
- $B_t^{(i)}$ *es la tasa de pago de los beneficios para el asegurado, mientras se encuentre en el estado i.*
- δ_t *es la fuerza de interés por año al timpo t.*
- $S_t^{(ij)}$ *es el beneficio pagadero instantáneamente al tiempo t, en la transicion del estado i al estado j.*

Nuestro modelo está compuesto por cuatro estados por lo cual haremos el cálculo correspondiente a ${}_tV^{(0)},\ {}_tV^{(1)},\ {}_tV^{(2)},\ {}_tV^{(3)}$. Sin embargo, notemos que para la reserva en el estado 3 este valor es cero, dado que cuando nos encontremos en este estado la aseguradora no deberá tener dinero guardado en caso de siniestro porque al encontrarnos ahí el beneficiario del seguro ya cobró el monto asegurado.

Con lo anterior tenemos que ${}_tV^{(3)} = 0$.

Mientras que para la reserva en el estado cero tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\ {}_tV^{(0)} &= \delta_t\ {}_tV^{(0)} - B_t^{(0)} - \sum_{j=0, j\neq 0}^{3} \mu_{xy}^{0j}\left(S_t^{(0j)} + \ {}_tV^{(j)} - \ {}_tV^{(0)}\right) \\ &= \delta_t\ {}_tV^{(0)} - B_t^{(0)} - \mu_{xy}^{01}\left(S_t^{(01)} + \ {}_tV^{(1)} - \ {}_tV^{(0)}\right) - \mu_{xy}^{02}\left(S_t^{(02)} + \ {}_tV^{(2)} - \ {}_tV^{(0)}\right) \\ &\quad - \mu_{xy}^{03}\left(S_t^{(03)} + \ {}_tV^{(3)} - \ {}_tV^{(0)}\right)\end{aligned}$$

Notemos que el valor de μ_{xy}^{03} no existe, haciendo que el valor de la reserva en el estado 0 sea:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\ {}_tV^{(0)} &= \left(\delta_t + \mu_{xy}^{01} + \mu_{xy}^{02}\right)\ {}_tV^{(0)} - \mu_{xy}^{01}\ {}_tV^{(1)} - \mu_{xy}^{02}\ {}_tV^{(2)} \\ &\quad - \left(B_t^{(0)} + \mu_{xy}^{01}S_t^{(01)} + \mu_{xy}^{02}S_t^{(02)}\right)\end{aligned}$$

De manera análoga para el resto de las reservas en nuestro modelo y con lo propuesto en la *Sección 4.1.1* sabemos que no podemos ir de algún estado en particular a otro. Por lo que las fuerzas de transición existentes solo son $\mu_{xy}^{01}, \mu_{xy}^{02}$, μ_{xy}^{13} y μ_{xy}^{23}, haciendo cero a cualquier otra.

Así, para el estado 1:

$$\frac{d}{dt}\ {}_tV^{(1)} = \delta_t\ {}_tV^{(1)} - B_t^{(1)} - \sum_{j=0, j\neq 1}^{3} \mu_{xy}^{1j}\left(S_t^{(1j)} + {}_tV^{(j)} - {}_tV^{(1)}\right)$$

$$= \delta_t\ {}_tV^{(1)} - B_t^{(1)} - \mu_{xy}^{10}\left(S_t^{(10)} + {}_tV^{(0)} - {}_tV^{(1)}\right) - \mu_{xy}^{12}\left(S_t^{(12)} + {}_tV^{(2)} - {}_tV^{(1)}\right) - \mu_{xy}^{13}\left(S_t^{(13)} + {}_tV^{(3)} - {}_tV^{(1)}\right)$$

$$= \left(\delta_t + \mu_{xy}^{13}\right)\ {}_tV^{(1)} - \mu_{xy}^{13}\ {}_tV^{(3)} - \left(B_t^{(1)} + \mu_{xy}^{13} S_t^{(13)}\right)$$

Y para la reserva en el estado 2 tenemos:

$$\frac{d}{dt}\ {}_tV^{(2)} = \delta_t\ {}_tV^{(2)} - B_t^{(2)} - \sum_{j=0, j\neq 2}^{3} \mu_{xy}^{2j}\left(S_t^{(2j)} + {}_tV^{(j)} - {}_tV^{(2)}\right)$$

$$= \delta_t\ {}_tV^{(2)} - B_t^{(2)} - \mu_{xy}^{20}\left(S_t^{(20)} + {}_tV^{(0)} - {}_tV^{(2)}\right) - \mu_{xy}^{21}\left(S_t^{(21)} + {}_tV^{(1)} - {}_tV^{(2)}\right) - \mu_{xy}^{23}\left(S_t^{(23)} + {}_tV^{(3)} - {}_tV^{(2)}\right)$$

$$= \left(\delta_t + \mu_{xy}^{23}\right)\ {}_tV^{(2)} - \mu_{xy}^{23}\ {}_tV^{(3)} - \left(B_t^{(2)} + \mu_{xy}^{23} S_t^{(23)}\right)$$

Lo siguiente por hacer es resolver el sistema de ecuaciones diferenciales dado por:

I. $\frac{d}{dt}\ {}_tV^{(0)} = \left(\delta_t + \mu_{xy}^{01} + \mu_{xy}^{02}\right)\ {}_tV^{(0)} - \mu_{xy}^{01}\ {}_tV^{(1)} - \mu_{xy}^{02}\ {}_tV^{(2)} - \left(B_t^{(0)} + \mu_{xy}^{01} S_t^{(01)} + \mu_{xy}^{02} S_t^{(02)}\right)$

II. $\frac{d}{dt}\ {}_tV^{(1)} = \left(\delta_t + \mu_{xy}^{13}\right)\ {}_tV^{(1)} - \left(B_t^{(1)} + \mu_{xy}^{13} S_t^{(13)}\right)$

III. $\frac{d}{dt}\ {}_tV^{(2)} = \left(\delta_t + \mu_{xy}^{23}\right)\ {}_tV^{(2)} - \left(B_t^{(2)} + \mu_{xy}^{23} S_t^{(23)}\right)$

$B_t^{(i)}$ puede ser interpretado como alguna cobertura ofrecida en la que la aseguradora tendrá que desembolsar alguna cantidad de dinero, pero para nuestro seguro añadiremos la condición de que los aseguradores no recibirán algún beneficio sin importar en qué estado se encuentren.

No obstante, tenemos que considerar que el asegurado debe hacer el pago correspondiente a la prima por contratar dicho servicio. Así mismo para nuestro modelo dicho pago será únicamente cuando ambas personas se encuentren con vida, es decir cuando nos encontremos en el estado cero.

Esto significa que el valor de $B_t^{(1)}$ y $B_t^{(2)}$ son cero. Mientras que el valor de $B_t^{(0)}$ puede ser interpretado como cierta prima $P \neq 0$, la cual será recibida con cierta periodicidad por la aseguradora. Así llegamos finalmente a que el sistema de ecuaciones diferenciales con todas las condiciones dadas está dado por:

I. $\frac{d}{dt}\ {}_tV^{(0)} = \left(\delta_t + \mu_{xy}^{01} + \mu_{xy}^{02}\right)\ {}_tV^{(0)} - \mu_{xy}^{01}\ {}_tV^{(1)} - \mu_{xy}^{02}\ {}_tV^{(2)} - \left(B_t^{(0)} + \mu_{xy}^{01} S_t^{(01)} + \mu_{xy}^{02} S_t^{(02)}\right)$

II. $\frac{d}{dt}\ {}_tV^{(1)} = \left(\delta_t + \mu_{xy}^{13}\right)\ {}_tV^{(1)} - \mu_{xy}^{13} S_t^{(13)}$

III. $\frac{d}{dt}\ {}_tV^{(2)} = \left(\delta_t + \mu_{xy}^{23}\right)\ {}_tV^{(2)} - \mu_{xy}^{23} S_t^{(23)}$

Al resolver el sistema tenemos que las reservas para el estado 1 y 2 están dadas por:

$${}_tV^{(1)} = \frac{\mu_{xy}^{13} S_t^{(13)}}{\mu_{xy}^{13} + \delta_t} + C_1 e^{(\delta_t + \mu_{xy}^{13})t}$$

$${}_tV^{(2)} = \frac{\mu_{xy}^{23} S_t^{(23)}}{\mu_{xy}^{23} + \delta_t} + C_2 e^{(\delta_t + \mu_{xy}^{23})t} \qquad \text{con } C_1, C_2 \text{ constantes}$$

Para poder encontrar el valor de C_1 y C_2 tenemos la condición inicial de que al momento de contratación el valor de todas reservas es cero, dado que no se ha hecho ningún pago y no existe algún monto en las reservas.

Es decir, ${}_0V^{(0)},\ {}_0V^{(1)},\ {}_0V^{(2)} = 0$

De lo anterior obtenemos que:

$$C_1 = -\frac{\mu_{xy}^{13} S_t^{(13)}}{\mu_{xy}^{13} + \delta_t} \qquad C_2 = -\frac{\mu_{xy}^{23} S_t^{(23)}}{\mu_{xy}^{23} + \delta_t}$$

Haciendo la sustitución de las constantes obtenemos la siguiente solución para las reservas en el estado 1 y 2.

$${}_tV^{(1)} = \frac{\mu_{xy}^{13} S_t^{(13)}}{\mu_{xy}^{13} + \delta_t}\left(1 - e^{(\delta_t + \mu_{xy}^{13})t}\right)$$

$${}_tV^{(2)} = \frac{\mu_{xy}^{23} S_t^{(23)}}{\mu_{xy}^{23} + \delta_t}\left(1 - e^{(\delta_t + \mu_{xy}^{23})t}\right)$$

Ya que hemos obtenido estos valores, la ecuación diferencial a resolver para el estado 0 es:

$$\frac{d}{dt}\ {}_tV^{(0)} = \left(\delta_t + \mu_{xy}^{01} + \mu_{xy}^{02}\right)\ {}_tV^{(0)} - \frac{\mu_{xy}^{01}\ \mu_{xy}^{13} S_t^{(13)}}{\mu_{xy}^{13} + \delta_t}\left(1 - e^{(\delta_t + \mu_{xy}^{13})t}\right) - \frac{\mu_{xy}^{02}\ \mu_{xy}^{23} S_t^{(23)}}{\mu_{xy}^{23} + \delta_t}\left(1 - e^{(\delta_t + \mu_{xy}^{23})t}\right) - \left(B_t^{(0)} + \mu_{xy}^{01} S_t^{(01)} + \mu_{xy}^{02} S_t^{(02)}\right)$$

Resolviendo la ecuación diferencial obtenemos el siguiente valor:

$$\begin{aligned} {}_tV^{(0)} = {} & \frac{\mu_{xy}^{01}\ \mu_{xy}^{13} S_t^{(13)}}{\mu_{xy}^{13} + \delta_t}\left(\frac{e^{(\delta_t + \mu_{xy}^{13})t}}{\mu_{xy}^{13} - \mu_{xy}^{01} - \mu_{xy}^{02}} + \frac{1}{\delta_t + \mu_{xy}^{01} + \mu_{xy}^{02}}\right) \\ & + \frac{\mu_{xy}^{02}\ \mu_{xy}^{23} S_t^{(23)}}{\mu_{xy}^{23} + \delta_t}\left(\frac{e^{(\delta + \mu_{xy}^{23})t}}{\mu_{xy}^{23} - \mu_{xy}^{01} - \mu_{xy}^{02}} + \frac{1}{\delta_t + \mu_{xy}^{01} + \mu_{xy}^{02}}\right) \\ & + C_0 e^{(\delta_t + \mu_{xy}^{01} + \mu_{xy}^{02})t} - \frac{B_t^{(0)} + \mu_{xy}^{01} S_t^{(01)} + \mu_{xy}^{02} S_t^{(02)}}{\delta_t + \mu_{xy}^{01} + \mu_{xy}^{02}} \qquad \text{con } C_0 \text{ constante} \end{aligned}$$

Para encontrar el valor de C_0 recordemos la condición de que ${}_0V^{(0)} = 0$, así:

$$\begin{aligned} C_0 = {} & -\frac{\mu_{xy}^{01}\ \mu_{xy}^{13} S_t^{(13)}}{\mu_{xy}^{13} + \delta_t}\left(\frac{1}{\mu_{xy}^{13} - \mu_{xy}^{01} - \mu_{xy}^{02}} + \frac{1}{\delta_t + \mu_{xy}^{01} + \mu_{xy}^{02}}\right) \\ & - \frac{\mu_{xy}^{02}\ \mu_{xy}^{23} S_t^{(23)}}{\mu_{xy}^{23} + \delta_t}\left(\frac{1}{\mu_{xy}^{23} - \mu_{xy}^{01} - \mu_{xy}^{02}} + \frac{1}{\delta_t + \mu_{xy}^{01} + \mu_{xy}^{02}}\right) \\ & + \frac{B_t^{(0)} + \mu_{xy}^{01} S_t^{(01)} + \mu_{xy}^{02} S_t^{(02)}}{\delta_t + \mu_{xy}^{01} + \mu_{xy}^{02}} \end{aligned}$$

Haciendo la sustitución correspondiente tenemos que el valor para la reserva en el estado 0 es:

$$\begin{aligned} {}_tV^{(0)} = {} & \frac{\mu_{xy}^{01}\ \mu_{xy}^{13} S_t^{(13)}}{\mu_{xy}^{13} + \delta_t}\left(\frac{e^{(\delta_t + \mu_{xy}^{13})t}}{\mu_{xy}^{13} - \mu_{xy}^{01} - \mu_{xy}^{02}} + \frac{1}{\delta_t + \mu_{xy}^{01} + \mu_{xy}^{02}}\right) \\ & + \frac{\mu_{xy}^{02}\ \mu_{xy}^{23} S_t^{(23)}}{\mu_{xy}^{23} + \delta_t}\left(\frac{e^{(\delta + \mu_{xy}^{23})t}}{\mu_{xy}^{23} - \mu_{xy}^{01} - \mu_{xy}^{02}} + \frac{1}{\delta_t + \mu_{xy}^{01} + \mu_{xy}^{02}}\right) \\ & + e^{(\delta_t + \mu_{xy}^{01} + \mu_{xy}^{02})t}\left[-\frac{\mu_{xy}^{01}\ \mu_{xy}^{13} S_t^{(13)}}{\mu_{xy}^{13} + \delta_t}\left(\frac{1}{\mu_{xy}^{13} - \mu_{xy}^{01} - \mu_{xy}^{02}} + \frac{1}{\delta_t + \mu_{xy}^{01} + \mu_{xy}^{02}}\right)\right. \\ & - \frac{\mu_{xy}^{02}\ \mu_{xy}^{23} S_t^{(23)}}{\mu_{xy}^{23} + \delta_t}\left(\frac{1}{\mu_{xy}^{23} - \mu_{xy}^{01} - \mu_{xy}^{02}} + \frac{1}{\delta_t + \mu_{xy}^{01} + \mu_{xy}^{02}}\right) \\ & \left. + \frac{B_t^{(0)} + \mu_{xy}^{01} S_t^{(01)} + \mu_{xy}^{02} S_t^{(02)}}{\delta_t + \mu_{xy}^{01} + \mu_{xy}^{02}}\right] \\ & - \frac{B_t^{(0)} + \mu_{xy}^{01} S_t^{(01)} + \mu_{xy}^{02} S_t^{(02)}}{\delta_t + \mu_{xy}^{01} + \mu_{xy}^{02}} \end{aligned}$$

4.2 Aplicación

Consideremos que tenemos un matrimonio en el que la edad del esposo es de 39 años y la edad de la esposa de 35, los cuales están interesados en contratar un seguro para mitigar el riesgo de fallecimiento de alguno de ellos. Supongamos una fuerza de interés del 3.5 % anual y que los pagos de la prima correspondiente por la contratación del seguro serán de manera quincenal durante un año. Además, consideremos que ellos quieren recibir un monto asegurado de $\$200{,}000$ en caso de que el esposo fallezca y de $\$400{,}000$ si la persona que fallece es la esposa.

Así con lo desarrollado en este Capítulo podemos saber el costo por dicho seguro. Asimismo, gracias a nuestro modelo y a la ecuación de Thiele podemos calcular el monto acumulado en las reservas para cualquier instante del tiempo.

Para ello el primer paso es calcular las fuerzas de transición, por lo cual necesitamos el valor de p_x y p_y .

Recordemos que x denota la edad del esposo mientras que y denota la de la esposa, así:

$x = 39 \;\; y = 35$

Dada las edades tenemos que:

$p_{39} = 0.9970$

$p_{35} = 0.9978$

Los valores anteriores son obtenidos de una tabla de mortalidad elaborada por la *Comisión Nacional de Seguros y Fianzas,* la cual se puede consultar en el Apéndice A.

En consecuencia, obtenemos los siguientes valores para las fuerzas de transición:

$$\mu_{xy}^{01} = \mu_{xy}^{23} \approx -\ln(p_{35}) = 0.0022$$

$$\mu_{xy}^{02} = \mu_{xy}^{13} \approx -\ln(p_{39}) = 0.0029$$

Ahora que hemos calculado dichos valores, tenemos que el costo del seguro para el esposo es:

$$\bar{A}_{x:1} = \left(\frac{\mu_{xy}^{02}}{\delta + \mu_{xy}^{01} + \mu_{xy}^{02}}\right)\left(1 - e^{-\left(\delta + \mu_{xy}^{01} + \mu_{xy}^{02}\right)}\right)$$

$$+\left(\frac{\mu_{xy}^{01}\,\mu_{xy}^{13}}{\mu_{xy}^{13} - \mu_{xy}^{01} - \mu_{xy}^{02}}\right)\left(\frac{1 - e^{-\left(\delta + \mu_{xy}^{01} + \mu_{xy}^{02}\right)}}{\delta + \mu_{xy}^{01} + \mu_{xy}^{02}} + \frac{e^{-\left(\delta + \mu_{xy}^{13}\right)} - 1}{\delta + \mu_{xy}^{13}}\right)$$

$$= \left(\frac{0.0029}{0.035 + 0.0022 + 0.0029}\right)\left(1 - e^{-(0.035+0.0022+0.0029)}\right)$$
$$+ \left(\frac{(0.0022)(0.0029)}{0.0029 - 0.0022 - 0.0029}\right)\left(\frac{1 - e^{-(0.035+0.0022+0.0029)}}{0.035 + 0.0022 + 0.0029}\right.$$
$$\left. + \frac{e^{-(0.035+0.0029)} - 1}{0.035 + 0.0029}\right)$$
$$= 0.00231$$

Y para la esposa tenemos que:

$$\bar{A}_{y:1} = \left(\frac{\mu_{xy}^{01}}{\delta + \mu_{xy}^{01} + \mu_{xy}^{02}}\right)\left(1 - e^{-(\delta+\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02})}\right)$$
$$+ \left(\frac{\mu_{xy}^{02}\,\mu_{xy}^{23}}{\mu_{xy}^{23} - \mu_{xy}^{01} - \mu_{xy}^{02}}\right)\left(\frac{1 - e^{-(\delta+\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02})}}{\delta + \mu_{xy}^{01} + \mu_{xy}^{02}} + \frac{e^{-(\delta+\mu_{xy}^{23})} - 1}{\delta + \mu_{xy}^{23}}\right)$$
$$= \left(\frac{0.0022}{0.035 + 0.0022 + 0.0029}\right)\left(1 - e^{-(0.035+0.0022+0.0029)}\right)$$
$$+ \left(\frac{(0.0029)(0.0022)}{0.0022 - 0.0022 - 0.0029}\right)\left(\frac{1 - e^{-(0.035+0.0022+0.0029)}}{0.035 + 0.0022 + 0.0029}\right.$$
$$\left. + \frac{e^{-(0.035+0.0022)} - 1}{0.035 + 0.0022}\right)$$
$$= 0.00171$$

El siguiente paso es calcular el costo de la cobertura total el cual está dado por:

$$Costo\ de\ Cobertura = B_1\bar{A}_{x:1} + B_2\bar{A}_{y:1}$$

B_1 es el monto asegurado en caso de la muerte del esposo, mientras que B_2 es el de la esposa.

Sustituyendo los valores:

$$Costo\ de\ Cobertura = (200000)(0.00231) + (400000)(0.00171)$$
$$= 1437.1144$$

Al ofrecer la cobertura al matrimonio de nuestro ejemplo tendremos que el costo de la cobertura anual es de $1437.1144.

El siguiente paso es saber la prima que deberán pagar los asegurados y para ello calculamos el valor de la anualidad, la cual es:

$$\bar{a}_{xy:1} = \frac{1 - e^{-\left(\delta + \mu_{xy}^{01} + \mu_{xy}^{02}\right)}}{\delta + \mu_{xy}^{01} + \mu_{xy}^{02}}$$

$$= \frac{1 - e^{-(0.035+0.0022+0.0029)}}{0.035 + 0.0022 + 0.0029}$$

$$= 0.9802$$

Con lo anterior sabemos que nuestra prima anual está dada por:

$$\bar{P}_{xy:1} = \frac{Costo\ de\ la\ cobertura}{\bar{a}_{xy:1}}$$

$$= \frac{1437.1144}{0.9802}$$

$$= 1466.1449$$

Nuestros asegurados deberán pagar de manera anual $\$1466.1449$. Sin embargo, ellos desean hacer pagos quincenales por lo cual deberemos calcular el valor de dichos pagos.

Notemos que se harán 24 pagos a lo largo del año, por lo cual el valor de m es de 24

Sabemos que la anualidad buscada está dada por

$$P_{xy:1}^{(24)} = \frac{\bar{P}_{xy:1}}{\ddot{a}_{xy:1}^{(24)}}$$

Al realizar el cálculo de $\ddot{a}_{xy:1}^{(24)}$, consideraremos una tasa de interés dado que esta anualidad es discreta capitalizando el interés periodo a periodo, mientras que en el resto del planteamiento hemos utilizado una fuerza de interés dado que la capitalización es de manera continua.

Para realizar el cálculo de la tasa tenemos que:

$$i = e^{\delta} - 1$$

Así la tasa anual dado que tenemos una fuerza de interés anual del 3.5% es:

$$i_{anual} = e^{0.035} - 1$$

$$= 0.0356 \quad o\ bien\ \ 3.56\%$$

$$\ddot{a}_{xy:1}^{(24)} = \sum_{t=0}^{24-1} v^{\frac{t}{24}}\ {}_{\frac{t}{24}}p_{xy}^{00}$$

$$= \sum_{t=0}^{23} (1.0356)^{-\frac{t}{24}} e^{-(\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02})\frac{t}{24}}$$

$$= \sum_{t=0}^{23} (1.0356)^{-\frac{t}{24}} e^{-(0.0022+0.0029)\frac{t}{24}}$$

$$= 23.5445$$

Como consecuencia de lo anterior:

$$P_{xy:1}^{(24)} = \frac{1437.1144}{23.5444}$$

$$= 62.2713$$

Este valor nos indica que los asegurados pagarán de forma quincenal la cantidad de $\$62.2713$ por el seguro contratado.

Hasta ahora hemos desarrollado todo el proceso para conocer el costo de cobertura y la prima correspondiente, pero para optimizar este proceso se ha elaborado un programa en VBA Excel el cual puede ser consultado en el Apéndice B.

Para hacer uso de este programa es necesario introducir la información básica, como se observa en la Figura 4.3.

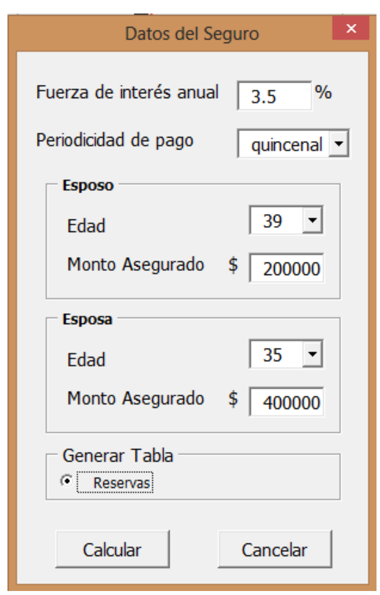

Figura 4.3 Datos del programa en VBA para el Seguro de un matrimonio

Antes de mostrar los resultados obtenidos desarrollaremos el cálculo de las reservas para el final del primer periodo.

Lo siguiente a considerar es definir los valores para $S_t^{(01)}, S_t^{(02)}, S_t^{(13)}$y $S_t^{(23)}$.

Recordemos que $S_t^{(ij)}$ es el beneficio que será pagado en la transición del estado i al estado j. Por lo que el valor de $S_t^{(02)}$y $S_t^{(13)}$ pueden ser interpretados como el beneficio que se recibirán en caso de que fallezca el esposo, mientras que $S_t^{(01)}$ y $S_t^{(23)}$ serán el beneficio recibido si la esposa fallece.

Para este ejemplo en particular $S_t^{(02)}$ y $S_t^{(13)}$ tendrán el mismo valor, y de igual manera para $S_t^{(01)}$ y $S_t^{(23)}$. Sin embargo, notemos que cada uno de los valores puede tomar un monto asegurado diferente ya que podríamos definir un beneficio diferente si alguno de los asegurados fallece antes que el otro como se ha explicado en la *Sección 4.1.2*.

De lo anterior tenemos:

$$S_t^{(02)} = S_t^{(13)} = 200000$$

$$S_t^{(01)} = S_t^{(23)} = 400000$$

Con la información anterior podemos hacer el cálculo de las reservas, para la primera quincena tenemos:

$$
\begin{aligned}
{}_{\frac{1}{24}}V^{(1)} &= \frac{\mu_{xy}^{13} S_t^{(13)}}{\mu_{xy}^{13} + \delta_t}\left(1 - e^{(\delta_t + \mu_{xy}^{13})t}\right) \\
&= \frac{(0.0029)(250000)}{0.0029 + 0.03502}\left(1 - e^{(0.03502+0.0029)}\right) \\
&= -24.5555
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{\frac{1}{24}}V^{(2)} &= \frac{\mu_{xy}^{23} S_t^{(23)}}{\mu_{xy}^{23} + \delta_t}\left(1 - e^{(\delta_t + \mu_{xy}^{23})t}\right) \\
&= \frac{(0.0022)(500000)}{0.0022 + 0.03502}\left(1 - e^{(0.03502+0.0022)t}\right) \\
&= -36.5015
\end{aligned}
$$

Adicionalmente sabemos que $B_t^{(0)}$ es el beneficio que deberá pagar la aseguradora en el estado 0, pero para este estado la aseguradora será la que recibirá este beneficio. Con esto nos referimos a que cobrará la prima pagadera quincenal, es decir:

$$B_t^{(0)} = -P_{xy:1}^{(24)}$$
$$= -62.2713$$

Observemos que $B_t^{(0)}$ es un valor negativo dado que la aseguradora no hace un desembolso, dado que recibe esta cantidad.

Con lo anterior tenemos que la reserva para el estado 0 es:

$$\begin{aligned}
{}_{\frac{1}{24}}V^{(0)} = {} & \frac{\mu_{xy}^{01}\,\mu_{xy}^{13} S_t^{(13)}}{\mu_{xy}^{13}+\delta_t}\left(\frac{e^{(\delta_t+\mu_{xy}^{13})t}}{\mu_{xy}^{13}-\mu_{xy}^{01}-\mu_{xy}^{02}}+\frac{1}{\delta_t+\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}}\right) \\
& + \frac{\mu_{xy}^{02}\,\mu_{xy}^{23} S_t^{(23)}}{\mu_{xy}^{23}+\delta_t}\left(\frac{e^{(\delta+\mu_{xy}^{23})t}}{\mu_{xy}^{23}-\mu_{xy}^{01}-\mu_{xy}^{02}}+\frac{1}{\delta_t+\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}}\right) \\
& + e^{(\delta_t+\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02})t}\left[-\frac{\mu_{xy}^{01}\,\mu_{xy}^{13} S_t^{(13)}}{\mu_{xy}^{13}+\delta_t}\left(\frac{1}{\mu_{xy}^{13}-\mu_{xy}^{01}-\mu_{xy}^{02}}+\frac{1}{\delta_t+\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}}\right)\right. \\
& - \frac{\mu_{xy}^{02}\,\mu_{xy}^{23} S_t^{(23)}}{\mu_{xy}^{23}+\delta_t}\left(\frac{1}{\mu_{xy}^{23}-\mu_{xy}^{01}-\mu_{xy}^{02}}+\frac{1}{\delta_t+\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}}\right) \\
& \left. + \frac{\mu_{xy}^{01} S_t^{(01)}+\mu_{xy}^{02} S_t^{(02)}-P_{xy:1}^{(24)}}{\delta_t+\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}}\right] \\
& - \frac{\mu_{xy}^{01} S_t^{(01)}+\mu_{xy}^{02} S_t^{(02)}-P_{xy:1}^{(24)}}{\delta_t+\mu_{xy}^{01}+\mu_{xy}^{02}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= {} & \frac{(0.0022)(0.0029)(200000)}{0.0029+0.03502}\left(\frac{e^{(0.03502+0.0029)}}{0.0029-0.0022-0.0029}\right. \\
& \left. + \frac{1}{0.03502+0.0022+0.0029}\right) \\
& + \frac{(0.0029)(0.0022)(400000)}{0.0022+0.03502}\left(\frac{e^{(0.03502+0.0022)}}{0.0022-0.0022-0.0029}+\frac{1}{0.03502+0.0022+0.0029}\right) \\
& + e^{(0.03502+0.0022+0.0029)}\left[-\frac{(0.0022)(0.0029)(200000)}{0.0029+0.03502}\left(\frac{1}{0.0029-0.0022-0.0029}\right.\right. \\
& \left. + \frac{1}{0.03502+0.0022+0.0029}\right) \\
& - \frac{(0.0029)(0.0022)(400000)}{0.0022+0.03502}\left(\frac{1}{0.0022-0.0022-0.0029}\right. \\
& \left.\left. + \frac{1}{0.03502+0.0022+0.0029}\right) + \frac{(0.0022)(400000)+(0.0029)(200000)-62.2713}{0.03502+0.0022+0.0029}\right] \\
& - \frac{(0.0022)(400000)+(0.0029)(200000)-62.2713}{0.03502+0.0022+0.0029}
\end{aligned}$$

$$= 58.4669$$

El dinero que tiene en resguardo la aseguradora en caso de que tenga que hacer frente a sus obligaciones está dado por la suma de los valores de las reservas en cada estado, es decir, el monto acumulado en las reservas que está dado por:

$$
\begin{aligned}
Monto\ Acumulado &= {}_{\frac{1}{24}}V^{(0)} + {}_{\frac{1}{24}}V^{(1)} + {}_{\frac{1}{24}}V^{(2)} \\
&= 58.4669 - 24.5555 - 36.5015 \\
&= -2.5401
\end{aligned}
$$

Hacer el cálculo para determinar el costo del seguro, la prima y el valor de las reservas, es un proceso extenso, pero al emplear el programa realizado en VBA podemos obtener la información general de nuestro modelo como se observa en la Figura 4.4.

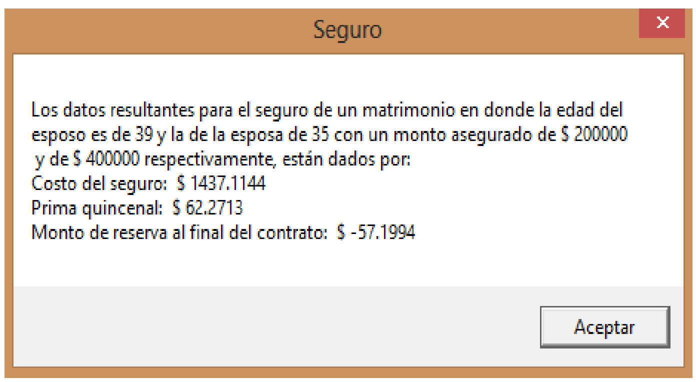

Figura 4.4 Resultados programa VBA para el Seguro de un matrimonio

Notemos que en el cuadro de resultados mostrado en la Figura 4.4 sólo muestra el monto acumulado final de las reservas, no obstante, en algunas ocasiones conocer el valor de las reservas en cada periodo es de gran utilidad para la aseguradora.

Obtener el valor de las reservas en cada periodo es una tarea que está optimizada por el programa en VBA y en la Figura 4.5 observamos la tabla resultante para nuestro ejemplo, la cual es creada al activar la casilla de generar tabla de reservas. En ella podemos ver el monto acumulado de las reservas para cada periodo y a su vez vemos el valor de cada reserva dependiendo en qué estado nos encontremos.

t	${}_{\frac{t}{24}}V^{(0)}$	${}_{\frac{t}{24}}V^{(1)}$	${}_{\frac{t}{24}}V^{(2)}$	**Monto Acumulado**
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	58.4669	-24.5555	-36.5015	-2.5901
2	117.0384	-49.1498	-73.0596	-5.1711
3	175.7146	-73.7831	-109.6744	-7.7429
4	234.4958	-98.4553	-146.3459	-10.3055
5	293.3821	-123.1666	-183.0743	-12.8589
6	352.3737	-147.9170	-219.8597	-15.4030
7	411.4708	-172.7065	-256.7021	-17.9378
8	470.6737	-197.5353	-293.6017	-20.4633
9	529.9824	-222.4033	-330.5585	-22.9794
10	589.3972	-247.3107	-367.5726	-25.4861
11	648.9183	-272.2575	-404.6441	-27.9833
12	708.5458	-297.2438	-441.7730	-30.4711
13	768.2799	-322.2696	-478.9596	-32.9493
14	828.1209	-347.3350	-516.2038	-35.4180
15	888.0688	-372.4401	-553.5058	-37.8770
16	948.1240	-397.5849	-590.8656	-40.3264
17	1008.2866	-422.7694	-628.2833	-42.7662
18	1068.5568	-447.9939	-665.7591	-45.1962
19	1128.9347	-473.2582	-703.2930	-47.6165
20	1189.4206	-498.5625	-740.8851	-50.0270
21	1250.0147	-523.9069	-778.5355	-52.4277
22	1310.7171	-549.2913	-816.2443	-54.8185
23	1371.5281	-574.7159	-854.0115	-57.1994

Figura 4.5 Reservas generadas en VBA para el Seguro de un matrimonio

Según el principio de equivalencia presentado en la *Sección 1.6* al final del periodo de contratación el monto acumulado en la reserva debe ser cero, pero notemos que el valor obtenido es diferente a cero. Para explicar esto debemos tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- Hemos utilizado el supuesto exponencial para asumir fuerzas de transición constantes para el año de contratación, es decir, estas no cambian periodo a periodo perdiendo exactitud en los valores obtenidos. Sin embargo, se ha asumido este supuesto dado que, si las fuerzas de transición cambiaran, el cálculo del seguro, anualidad, primas y reservas también cambiarían. Como consecuencia de ello la obtención de los costos deseados resultaría en cálculos repetitivos porque tendríamos que calcular un valor diferente para el seguro, anualidad y primas para cada periodo, perdiendo el objetivo de este trabajo que es mostrar la ecuación de Thiele.

- En la práctica las primas continuas no son de gran utilidad cuando se ofrece una cobertura dado que una persona que busca mitigar sus riesgos estará interesada en saber cuánto pagará periódicamente. Así el valor de la prima periódica es una aproximación del valor real para la prima que debe utilizarse en los cálculos ya que está anualidad no genera un interés de forma continua, como lo hace el seguro y las reservas empleando Thiele. De esta forma se ha hecho una aproximación con la finalidad de dar un valor más exacto considerando que los pagos serán realizados en determinados periodos del tiempo, es decir de forma discreta y no de forma continua.
- Adicionalmente este modelo es un caso particular de seguros para vida conjunta dado que se ha asumido independencia entre x y y. El no asumir dicha independencia aproximarían los datos obtenidos a los valores deseados en la reserva.

Teniendo en consideración los puntos anteriores, ahora veamos que significan los valores obtenidos en la última quincena que están dados por:

$${}_{\frac{23}{24}}V^{(0)} = 1371.5281, \qquad {}_{\frac{23}{24}}V^{(1)} = -574.7159\,, \qquad {}_{\frac{23}{24}}V^{(2)} = -854.0115$$

Para los valores dados en el estado 1 y el estado 2 podemos notar que el desembolso por parte de la aseguradora es menor para el estado 1 dado que el monto asegurado para la esposa es mayor que el beneficio asegurado para el esposo.

En el valor resultante para la reserva en el estado 0 observemos que existe una relación muy cercana al costo de la cobertura del seguro, dado que en este estado es cuando se tiene que hacer la recaudación de las primas. Calculando la diferencia de estos valores tenemos:

$$\text{Diferencia} = 1437.1144 - 1372.5281 = 65.5863$$

Este valor puede ser interpretado como un valor aproximado faltante para cumplir con las obligaciones del seguro y que a su vez tiene una gran aproximación en el monto final de la reserva.

Por otra parte, para el monto acumulado en las reservas tenemos un valor final de -57.1994, pero en la gráfica de la Figura 4.6 podemos ver como es el comportamiento de la reserva acumulada. En donde la pérdida es constantemente periodo a periodo, es decir que el margen de error es el mismo para cada tiempo y que se va acumulando con el de los periodos anteriores.

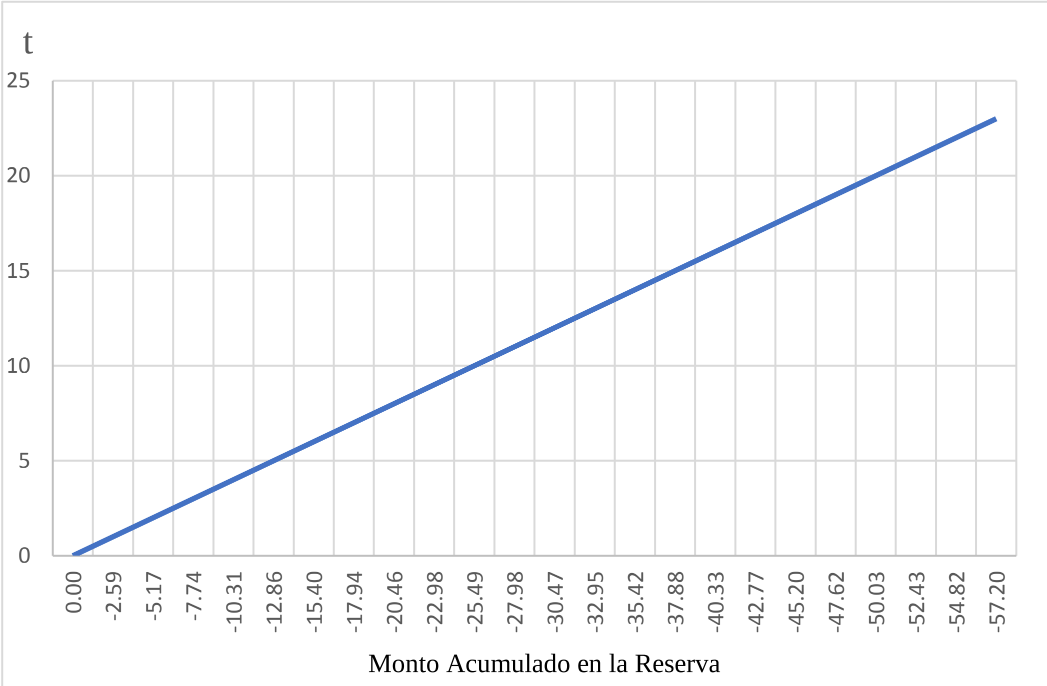

Figura 4.6 Gráfico del comportamiento de las reservas

Para poder entender lo anterior consideremos el coste para la reserva en $t = \frac{1}{24}$ que es de -2.5901, este valor puede ser interpretado como el monto que nos hace falta para hacer frente a nuestras obligaciones, el cual tiene gran relación con el monto acumulado al final de la cobertura. Supondremos que dicho valor es constante en cada periodo y que se va acumulando cada periodo, así este valor acumulado quincena a quincena nos da un total de -62.16622 el cual es muy próximo a -57.1994, que es la cantidad faltante para hacer que la reserva de cero.

Es claro que el valor de -2.5901 no puede asumirse como el valor real faltante para cada periodo dado que este número se ve afectado por factores como el tiempo, interés generado y a la probabilidad de ocurrencia de los diferentes riesgos a mitigar en el seguro. Sin embargo, nos da una idea de cómo es que se comporta el margen de error por los supuestos ocupados a lo largo del modelo.

Con la justificación anterior podemos ver en la Figura 4.7 que las reservas se comportan de la misma forma si calculamos una cobertura para diferentes edades, dicho comportamiento es el mismo al cambiar los montos asegurados o la tasa de interés, pero en esta tabla se han dejado los datos anteriores y únicamente se ha cambiado la edad de los asegurados, dejando la edad del esposo fija en treinta años.

Edad del Esposo	Edad de la Esposa	Seguro	Anualidad	Prima	Reserva al final de la cobertura	Margen de error	Margen de error acumulado
30	20	578.6171	0.9816	25.0012	-23.7805	-1.0414	-24.9935
30	21	600.2366	0.9816	25.9367	-24.6471	-1.0803	-25.9277
30	22	623.8216	0.9816	26.9574	-25.5926	-1.1228	-26.9469
30	23	648.9789	0.9815	28.0463	-26.6012	-1.1681	-28.0343
30	24	676.1016	0.9815	29.2204	-27.6890	-1.2169	-29.2067
30	25	705.5829	0.9815	30.4968	-28.8715	-1.2701	-30.4813
30	26	737.0295	0.9814	31.8585	-30.1332	-1.3267	-31.8411
30	27	770.8347	0.9814	33.3225	-31.4898	-1.3876	-33.3031
30	28	807.3915	0.9813	34.9060	-32.9572	-1.4535	-34.8844
30	29	846.6999	0.9813	36.6090	-34.5356	-1.5244	-36.5850
30	30	889.1530	0.9812	38.4486	-36.2407	-1.6009	-38.4220
30	31	934.7508	0.9812	40.4249	-38.0728	-1.6832	-40.3956
30	32	983.8865	0.9811	42.5550	-40.0477	-1.7718	-42.5228
30	33	1036.9529	0.9810	44.8561	-42.1814	-1.8675	-44.8208
30	34	1093.9503	0.9810	47.3284	-44.4741	-1.9704	-47.2897
30	35	1155.6648	0.9809	50.0060	-46.9577	-2.0818	-49.9637
30	36	1221.7033	0.9808	52.8722	-49.6166	-2.2011	-52.8260
30	37	1292.8519	0.9807	55.9612	-52.4827	-2.3296	-55.9109
30	38	1369.5039	0.9806	59.2904	-55.5722	-2.4682	-59.2356
30	39	1452.0523	0.9805	62.8771	-58.9013	-2.6174	-62.8176
30	40	1540.8902	0.9804	66.7386	-62.4864	-2.7781	-66.6741
30	41	1636.8038	0.9803	70.9097	-66.3598	-2.9517	-70.8397
30	42	1739.7931	0.9802	75.3907	-70.5220	-3.1381	-75.3149
30	43	1850.6444	0.9800	80.2163	-75.0056	-3.3389	-80.1343
30	44	1970.1439	0.9799	85.4214	-79.8432	-3.5555	-85.3328
30	45	2098.6847	0.9797	91.0237	-85.0516	-3.7887	-90.9281

Figura 4.7 Margen de error para reservas en diferentes edades

En la tabla anterior podemos observar cómo se mantiene la relación entre la columna generada para las reservas al final de la cobertura y el margen de error acumulado, dichos valores no difieren mucho. Recordemos que su relación se ha explicado con anterioridad.

Del cálculo de las reservas podemos decir que la aplicación de Thiele es de gran utilidad dado que una vez calculado el sistema de ecuaciones diferenciales de esta ecuación, podemos evaluar el valor de las reservas con la información correspondiente. De esta forma tenemos una alternativa para la obtención de una reserva en modelos de vida múltiple, la cual agiliza los cálculos en comparativa con la forma tradicional a través de los modelos de vida conjunta o último superviviente.

Conclusiones

El objetivo principal de esta tesis es plantear un seguro de modelo de vida múltiple para un matrimonio y a partir de esta cobertura emplear la ecuación de Thiele como una alternativa eficiente para el cálculo de las reservas. De este modo se utilizaron los conceptos presentados en el trabajo para plantear a este seguro como un proceso estocástico y poder hacer uso de la ecuación de Thiele para la obtención de las reservas.

Para el desarrollo de este modelo se tomó el caso particular en donde se asume independencia entre los asegurados y una fuerza de transición constante para cada periodo obtenida del supuesto exponencial.

El seguro ofrece cobertura por un año, en donde los intereses generados por el seguro, la prima y las reservas se generan a una fuerza de interés continua δ anual. La prima obtenida es anual pero el modelo ofrece pagarla periódicamente y por esta razón se ha calculado la prima pagadera m veces en el año con la finalidad de darle al asegurado el costo por la contratación de la póliza, ya que, dado el planteamiento del modelo, este es continuo y como consecuencia la prima debe ser cobrada de manera continua. Sin embargo, en la práctica las primas continuas no son representativas para el asegurado quien busca hacer pagos con cierta periodicidad.
Posteriormente se hace el planteamiento de la ecuación de Thiele, generando un sistema de ecuaciones diferenciales el cual da como resultado las ecuaciones para el cálculo de la reserva en cada estado del modelo.

En el ejemplo presentado obtenemos que el costo de la cobertura es de $\$1437.1144$ para un matrimonio en donde la edad del esposo es de 39 y la edad de la esposa de 35, quienes tendrán que pagar una prima quincenal de $\$62.2713$. El valor acumulado de las reservas al final de la cobertura es de $-\$\ 57.1994$.

El valor obtenido en la reserva es distinto a cero, sin embargo, al realizar el cálculo de las reservas cada quincena encontramos que existe un monto faltante que se va acumulado periodo a periodo, pero que se mantiene constante. El monto acumulado faltante tiene un valor aproximado de -62.16622 que coincide con el déficit en las reservas al final de la cobertura.

Al realizar el cálculo del seguro con diferentes edades mediante el programa de VBA, se encontró que el margen de error acumulado tiene el mismo comportamiento que el planteado en el ejemplo. Este error es justificable dado los supuestos que se han utilizado para el desarrollo del modelo. De lo anterior llegamos a que el uso de Thiele es eficiente dado que puede agilizar el cálculo de las reservas con un margen de error aceptable.

Bibliografía

1. Sthepen J. Camilli / Ian Duncan / Richard L. London. (2014). *Models for Quantifying Risk Sixth Edition*. United States of America, ACTEX Academic Series.
2. Marcel B. Finan. (2011). *A Reading of the Theory of Life Contigency Models: A Preparation for Exam MLC/3L*. Arkansas Tech University.
3. Michael Sherris. (2011). *Principles of Actuarial Science*. Australia, Faculty of Commerce and Economics University of New South Wales.
4. José Cosío Rodríguez. (1982). *Introducción al Seguro de Vida*. México D.F.
5. Fernando Sandoya. (2007). *Matemáticas Actuariales y Operaciones de Seguros*. ESPOL.
6. Hans U. Gerber. (1997). *Life Insurance Mathematics. Switzerland*. Springer.
7. Ragnar Norberg. (2002). *Basic Life Insurance Mathematics.*
8. Luis Rincón. (2012). *Introducción a los procesos estocásticos.* Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias UNAM.
9. Luis Rincón. (2007). *Curso intermedio de Probabilidad*. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias. UNAM.
10. Tomasz Rolski / Hanspeter Schmidli / Volker Schmidt / Jozef Teugels. (1999). *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. Wiley Editorial.
11. David C. M. Dickson / Mary R. Hardy/ Howard R. Waters. (2009). *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risk*. Cambridge.
12. Manuel Mendoza / Ana M. Madrigal/ Evangelina Martínez. (2000). *Serie Documentos de Trabajo: Tablas de Mortalidad CNFS 2000-I y CNSF 2000-G*. Comisión Nacional de Seguros y Fianzas.
13. Irma Saavedra. (2006). *Fundamentos y Tarificación del Seguro de Vida Grupo.* Comisión Nacional de Seguros y Fianzas.
14. Antonio Minzoni. (2005). *Crónica de dos siglos del Seguro en México*. Comisión Nacional de Seguros y Fianzas.
15. Jose Gutiérrez Aguilar. (2010). *El efecto de la globalización en la generación de valor de la industria aseguradora en México*. Universidad Iberoamericana.

Apéndice A

Tabla de Mortalidad Individual
Comisión Nacional de Seguros y Fianzas 2000-I (1991-1998)

Edad	qx
15	0.000495
16	0.000533
17	0.000575
18	0.000619
19	0.000667
20	0.000718
21	0.000773
22	0.000833
23	0.000897
24	0.000966
25	0.001041
26	0.001121
27	0.001207
28	0.001300
29	0.001400
30	0.001508
31	0.001624
32	0.001749
33	0.001884
34	0.002029
35	0.002186
36	0.002354
37	0.002535
38	0.002730
39	0.002940
40	0.003166
41	0.003410
42	0.003672
43	0.003954
44	0.004258
45	0.004585
46	0.004938
47	0.005317
48	0.005725

Edad	qx
49	0.006164
50	0.006637
51	0.007145
52	0.007693
53	0.008282
54	0.008915
55	0.009597
56	0.010330
57	0.011119
58	0.011967
59	0.012879
60	0.013860
61	0.014914
62	0.016048
63	0.017265
64	0.018574
65	0.019980
66	0.021490
67	0.023111
68	0.024851
69	0.026720
70	0.028724
71	0.030874
72	0.033180
73	0.035651
74	0.038300
75	0.041136
76	0.044174
77	0.047424
78	0.050902
79	0.054619
80	0.058592
81	0.062834
82	0.067362

Edad	qx
83	0.072190
84	0.077337
85	0.082817
86	0.088649
87	0.094850
88	0.101436
89	0.108424
90	0.115832
91	0.123677
92	0.131973
93	0.140737
94	0.149983
95	0.159723
96	0.169970
97	0.180733
98	0.192020
99	0.203837
100	1.000000

Apéndice B

Código de programa en VBA

```
Sub Seguro_Click()

Workbooks("Seguro de Vida Conjunta.xlsm"). Application. Visible = False

"Validación de datos

If IsNumeric(FuerzaInteresAnual) = False Then
        MsgBox "La fuerza de interés anual sólo admite datos numéricos positivos"
  Elseif  Val(FuerzaInteresAnual) = 0 Then
        MsgBox "La fuerza de interés anual debe ser diferente a cero"
  Elseif  Val(FuerzaInteresAnual) > 100 Then
        MsgBox "La fuerza de interés anual debe ser ser menor o igual a 100 %"
End If

If IsNumeric(MontoAEsposo) = False Then
        MsgBox "El monto asegurado para el esposo sólo admite datos numéricos positivos"
  Elseif  Val(MontoAEsposo) = 0 Then
        MsgBox "El monto asegurado para el esposo debe ser diferente a cero"
End If

If IsNumeric(MontoBEsposa) = False Then
        MsgBox "El monto asegurado para la esposa sólo admite datos numéricos positivos"
  Elseif  Val(MontoBEsposa) = 0 Then
        MsgBox "El monto asegurado para la esposa debe ser diferente a cero"
End If
```

```
"Datos

x = Val(EdadEsposo)
y = Val(EdadEsposa)

MontoAseguradoEsposo = Val(MontoAEsposo)
MontoAseguradoEsposa = Val(MontoBEsposa)

If Periodicidad = "semanal"  Then
            m = 52
  Elseif  Periodicidad = "quincenal" Then
            m = 24
  Elseif  Periodicidad = "mensual" Then
            m = 12
End If

fa = Val(FuerzaInteresAnual)/100

"Probabilidad de Supervivencia y Mortalidad

Sheets("Tabla de Mortalidad").Activate

For k = 15 to 100
  If  x = Cells(k − 12,1).Value Then
            qx = Cells(k − 12,2).Value
  End If
  If  y = Cells(k − 12,1).Value Then
            qy = Cells(k − 12,3).Value
  End If
Next
```

$px = 1 - qx$

$py = 1 - qy$

"Fuerzas de transición

$\mathrm{m01} = -\mathrm{Log}(py)$

$\mathrm{m02} = -\mathrm{Log}(px)$

$\mathrm{m13} = -\mathrm{Log}(px)$

$\mathrm{m23} = -\mathrm{Log}(py)$

Sheets("Reservas"). Activate

Range("A2:B5"). ClearContents

Range("D2:H55"). Clear

"Probabilidades de Supervivencia Conjunta

For i = 0 to m − 1

tp00 = Exp(−(m01 + m02) ∗ (i /m))

tp01 = (m01/(m13 − m01 − m02)) ∗ (Exp(−(m01 + m02) ∗ (i /m)) − Exp(−m13 ∗ (i /m)))

tp02 = (m02/(m23 − m01 − m02)) ∗ (Exp(−(m01 + m02) ∗ (i /m)) − Exp(−m23 ∗ (i /m)))

Next

"Calculo del Costo de Cobertura para el Seguro

"Seguro para el esposo

$$\begin{aligned}CostoCoberturaEsposo = {} & (MontoAseguradoEsposo) * ((m02/(fa + m01 + m02)) \\ & * (1 - Exp(-(fa + m01 + m02))) + ((m01 * m13)/ (m13 \\ & -m01 - m02)) * (((1 - Exp(-m01 - m02 - fa))/ (m01 \\ & +m02 + fa)) + ((Exp(-fa - m13) - 1)/(fa + m13))))\end{aligned}$$

"Seguro para la esposa

$$\begin{aligned}CostoCoberturaEsposa = {} & (MontoAseguradoEsposa) * ((m01/(fa + m01 + m02)) \\ & * (1 - Exp(-(fa + m01 + m02))) + ((m01 * m23)/ (m23 \\ & -m01 - m02)) * (((1 - Exp(-m01 - m02 - fa))/ (m01 \\ & +m02 + fa)) + ((Exp(-fa - m23) - 1)/(fa + m23))))\end{aligned}$$

$$CoberturaTotal = CostoCoberturaEsposo + CostoCoberturaEsposa$$

"Calculo de Anualidad

$$Anualidad = (1 - Exp(-fa - m01 - m02))/(fa + m01 + m02)$$

"Calculo de Prima Anual

$$PrimaAnual = CoberturaTotal/Anualidad$$

"Calculo de prima periódica

$ia = exp(fa) - 1$

For $i = 0$ to $m - 1$

  $suma = Exp(-(m01 + m02) * (t /m)) * ((1 + ia)^\wedge(-t/m))$

  $AnualidadPrima = AnualidadPrima + suma$

Next

$PrimaPeriodica = PrimaAnual/AnualidadPrima$

```
"Calculo de Reservas

    "Beneficios
S01 = MontoAseguradoEsposa
S02 = MontoAseguradoEsposo
S13 = MontoAseguradoEsposo
S23 = MontoAseguradoEsposa

For j = 0 to m − 1
  tV2 = ((m23 * S23)/(fa + m23)) * (1 − Exp((fa + m23) * (j /m)))
  tV1 = ((m13 * S13)/(fa + m13)) * (1 − Exp((fa + m13) * (j /m)))
  tV0 = ((m01 + m13 * S13)/(fa + m13)) * ((Exp((fa + m13) * (j /m)))/(m13
                − m01 − m02) + (1/(fa + m01 + m02))) + ((m02 * m23 * S23)/(fa
                + m23)) * ((Exp((fa + m23) * (j/m)))/(m23 − m01 − m02) + (1/(fa
                + m01 + m02))) − ((−PrimaPeriodica + m01 * S01 + m02 * S02)/(fa
                + m01 + m02)) + (Exp((fa + m01 + m02) * (j/m))) * (−((m01 * m13
                * S13)/(fa + m13)) * ((1/(m13 − m01 − m02)) + (1/(fa + m01
                + m02))) − ((m02 * m23 * S23)/(fa + m23)) * ((1/(m23 − m01
                − m02)) + (1/(fa + m01 + m02))) + ((−PrimaPeriodica + m01 * S01
                + m02 * S02)/(fa + m01 + m02)))

  If TablaReserva.Value = True Then
    Cells(2 + j, 4) = j
    Cells(2 + j, 5) = tV0
    Cells(2 + j, 6) = tV1
    Cells(2 + j, 7) = tV2
    Cells(2 + j, 8) = tV0 + tV1 + tV2
  End If
Next
```

```
MontoFinalReserva = tV0 + tV1 + tV2
'' Reflejar información en hoja de datos
  Cells(2,1) = "Costo Cobertura"
  Cells(3,1) = "Anualidad"
  Cells(4,1) = "Prima" & Periodicidad. Text
  Cells(5,1) = "Reserva al final del año"
  Cells(2,2) = CoberturaTotal
  Cells(3,2) = Anualidad
  Cells(4,2) = PrimaPeriodica
  Cells(5,2) = MontoFinalReserva

Range(B2:B5). Select
  Selection. NumberFormat = "0.0000"
  Selection. Style = "Currency"
  Selection. NumberFormat = _
     "_ − $ * #, ##0.0000_−; −$ * #, ##0.0000_−; _ − $ * "" − ""? ? ? ? _−; _ − @_ − "

MsgBox  "Los datos resultantes para el seguro de un matrimonio en donde la edad del esposo
 es de"  & x & "y  la de la esposa de" & y &  "con un monto asegurado de $" &
 MontoAseguradoEsposo
 & "y de $" & MontoAseguradoEsposa & "respectivamente, están dados por: " & _
 vbNewLine & "Costo del seguro: $" & Cells(2,2) & _
 vbNewLine & "Prima " & Periodicidad & ": $" & Cells(4,2) & _
 vbNewLine & "Monto de la reserva al final del contrato: $" & Cells(5,2), , "Seguro"

Cells(1,1). Select
If TablaReserva. Value = True Then
```

```
  Workbooks("Seguro de Vida Conjunta.xlsm"). Application. Visible = True
End If

End Sub

Private Sub UserForm_Initialize()
  Periodicidad. AddItem "semanal"
  Periodicidad. AddItem "quincenal"
  Periodicidad. AddItem "mensual"

For a = 15 to 100
  EdadEsposo. AddItem(a)
  EdadEsposa. AddItem(a)
Next

End Sub
```