Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN ACTUARÍA

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE EN EL CÁLCULO DE LA PROBABILIDAD DE RUINA

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN ACTUARÍA

PRESENTA
VANESA LADINO ROJAS

DIRECTOR DE TESIS
FRANCISCO SOLANO TAJONAR SANABRIA

PUEBLA, PUE. 5 JULIO 2018

A mis padres, por su empeño de salir adelante.
Por todo su apoyo y su amor incondicional.
Y a mis hermanas, por sus consejos.

Agradecimientos

A Dios, por llegar hasta hoy y tener a mis seres queridos que más amo.

A mis padres Fidel Ladino y A. Benicia Rojas con su fortaleza y su empeño de salir adelante han sido un ejemplo a seguir. Gracias a ustedes estoy aquí culminando una meta más.

A mis hermanas Viridiana y Maricela, que no solo la sangre nos une sino también la amistad, la complicidad, la confianza y el apoyo, ambas me han alentado a no rendirme.

A mi abuelitos Guadalupe Rojas y Braulia Martínez.

Introducción

En la actualidad uno se encuentra con sucesos o eventos no deseados y que están fuera de nuestro control, así como, accidentes, eventos catastróficos, eventos de la naturaleza, etc., en otras palabras, diariamente nos enfrentamos al riesgo de sufrir un evento, por lo cual uno se ve en la necesidad de contratar un seguro que nos permita ampararnos contra este tipo de eventos.

Es complicado tener el control absoluto de lo que sucederá en el futuro, por lo cual las empresas necesitan hacer predicciones para maximizar sus recursos. Una compañía de seguros brinda el servicio de protección, en la cual trabajan con un grupo de personas que están expuestos a un determinado riesgo, cada una de éstas personas paga una cantidad fija de dinero por unidad de tiempo, llamada “prima”. Cuando ocurra dicho evento, la aseguradora tiene la obligación de pagar el daño. Un aspecto de importancia para la aseguradora es prever este tipo de sucesos y saber como medirlos.

Las reservas se forman por el exceso de ingresos sobre los egresos, que por concepto de prima se cobra a los asegurados.

En el ámbito actuarial o en la ciencia actuarial, una de sus principales funciones es el análisis de la solvencia de las empresas, a través del tiempo se han mejorado las técnicas actuariales con las cuales se lleva a cabo un análisis más cuidadoso.

En la teoría del riesgo, un caso particular, es la teoría de ruina, que nos proporciona herramientas matemáticas para llevar dicho análisis, este problema inicialmente lo estudió Lundberg y posteriormente Cramér. Lundberg introdujo un modelo donde se estudia el flujo del capital de una compañía de seguros conocido como el modelo clásico de riesgo [15].

El funcionamiento de una aseguradora es que ella pueda solventar el monto de las reclamaciones, así como de cuidar que no vaya a la ruina. Para prevenir este tipo de situación se requiere determinar la probabilidad de ruina.

En la literatura se encuentran técnicas para determinar la probabilidad de ruina, la más usada es la que utiliza ecuaciones integro-diferenciales [2].

En este trabajo se estudia y se utiliza la técnica de la transformada de Laplace que permite obtener de forma más sencilla la probabilidad de ruina bajo el modelo clásico de riesgo.

Además, se determina una expresión para obtener los momentos de la ruina que nos permite conocer cuando las reservas de una aseguradora no son suficientes para cumplir sus obligaciones.

La estructura de la tesis consta de cuatro capítulos.

En el primer Capítulo se presentan los conceptos básicos de probabilidad que nos permiten comprender el modelo de Cramér-Lundberg.

En el segundo Capítulo se inicia con el concepto de Proceso de Poisson y Proceso de Poisson compuesto, también, se introduce el modelo de Cramér-Lundberg, así como, el concepto de probabilidad de ruina.

En el tercer Capítulo se trabaja con la transformada de Laplace y algunas de sus propiedades. Está técnica nos permite calcular la probabilidad de ruina de forma más sencilla, también se determina los momentos de ruina.

En el cuarto Capítulo se dan algunos ejemplos para los cuales se determina la probabilidad de ruina y los momentos de ruina.

Finalmente, se presentan las conclusiones obtenidas del desarrollo de este trabajo.

Índice general

La Transformada de Laplace en el Cálculo de la Probabilidad de Ruina

Vanesa Ladino Rojas

Julio 2016

Capítulo 1

Aspectos Básicos de Probabilidad

La teoría de la probabilidad es una rama de las matemáticas que tiene diversas aplicaciones en distintas áreas y se encarga del estudio de los fenómenos o experimentos aleatorios. Un experimento aleatorio ϵ se entiende como todo aquel experimento que se repite bajo las mismas condiciones y el resultado obtenido no siempre es el mismo, por ejemplo, el lanzamiento de una moneda en el cual se puede obtener cara o cruz, o bien, el tiempo en el que una máquina en operación sufre su primera descompostura, así también el tiempo de vida de un foco eléctrico, entre otros.

En este capítulo se presentan algunos conceptos básicos de la teoría de la probabilidad tales como; el de variable aleatoria, función de densidad (discreta o continua) de una variable aleatoria, función de distribución de una variable aleatoria, esperanza matemática, etc., que permitirá llevar a cabo el desarrollo del presente trabajo.

1.1. Variables aleatorias

Considérese un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, donde Ω es llamado espacio muestral o espacio muestra asociado a un experimento aleatorio, $\mathfrak{F}$ es conocido como la σ-álgebra de eventos y $\mathbb{P}$ es una medida de probabilidad definida para cada evento.

Definición 1.1. *Sea ϵ un experimento aleatorio y Ω el espacio muestra asociado a ϵ. Para cada evento $A \in \mathfrak{F}$, se le asigna un número real $P(A)$ llamado* *probabilidad de A, que satisface las siguientes propiedades*

- $0 \leq P(A) \leq 1$, *para cualquier evento* $A \in \mathfrak{F}$.
- $P(\Omega) = 1$.
- *Si* $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ *son eventos mutuamente excluyentes dos a dos, es decir,* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *si* $i \neq j$, *entonces* $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

De la definición se puede notar que

$$\begin{aligned} \mathbb{P} :& \mathfrak{F} \to [0,1] \\ & A \to \mathbb{P}(A). \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2. *El experimento consiste en el lanzamiento de una moneda balanceada y observar la cara superior de la moneda una vez que cae. El espacio muestra de este experimento es*

$$\Omega = \{cara, cruz\},$$

la σ*-álgebra es*

$$\mathfrak{F} = \big\{\{\Omega\}, \{\emptyset\}, \{cara\}, \{cruz\}\big\}, \tag{1.1}$$

y la probabilidad para cada elemento de Ω *es*

$$P(cara) = P(cruz) = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 1.3. *Los posibles resultados de un experimento basado en el lanzamiento de un dado, donde se observa el número de la cara superior. El espacio muestra es*

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\},$$

la σ*-álgebra es*

$$\mathfrak{F} = \big\{\{\Omega\}, \{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \ldots\big\},$$

y la probabilidad de cada uno de los eventos es

$$P(\{1\}) = \ldots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}.$$

Ejemplo 1.4. *El experimento consiste en contar el número necesario de inspecciones hasta que ocurra el primer foco defectuoso, su espacio muestra es*

$$\Omega = \{D, ND, NND, NNND, \ldots\},$$

la σ-álgebra en este caso es

$$\mathfrak{F} = \big\{\{\Omega\}, \{\emptyset\}, \{D\}, \{ND\}, \{D, ND\}, \ldots\big\},$$

puesto que Ω es un conjunto infinito y numerable, el número de elementos de la σ-álgebra es igual a $2^{\#(\Omega)}$.

Observación 1.5. *De los ejemplos anteriores se puede notar que el espacio muestra no necesariamente es finito, éste puede ser infinito numerable o infinito no numerable.*

Un concepto importante en probabilidad y que nos permitirá seguir con el desarrollo del trabajo es el de variable aleatoria.

Definición 1.6. *Sea un experimento aleatorio ϵ y Ω un espacio muestra asociado al experimento. Una función X que asigna a cada uno de los elementos $\omega \in \Omega$, un número real $X(\omega)$, es decir,*

$$\begin{aligned} X :&\Omega \to \mathbb{R} \\ &\omega \to X(\omega) = x \end{aligned}$$

tal que, $\forall r \in \mathbb{R}$, $A_r = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq r\} \in \mathfrak{F}$ se le llama variable aleatoria.

Notación: Denotaremos a una variable aleatoria X como v.a. X.

Observación 1.7. *Al conjunto de posibles valores que puede tomar X se le llama Rango o Recorrido de X y se denota con R_X.*

Observación 1.8. *Como R_X es un conjunto este puede ser finito, infinito numerable o infinito no numerable.*

Ejemplo 1.9. *Continuando con el Ejemplo 1.2, se puede definir a la variable aleatoria X de la siguiente forma*

$$\begin{aligned} X :&\Omega \to \mathbb{R} \\ &\{cara\} \to 0 \\ &\{cruz\} \to 1 \end{aligned}$$

entonces el recorrido de X es $R_X = \{0, 1\}$.

Ejemplo 1.10. *Del Ejemplo 1.3, la variable aleatoria X que se puede definir es*

$$\begin{aligned} Id = X : &\Omega \to \mathbb{R} \\ &\{1\} \to 1 \\ &\{2\} \to 2 \\ &\dots \end{aligned}$$

por lo tanto, el rango de X es $R_X = \{1, \dots, 6\}$.

Ejemplo 1.11. *Del Ejemplo 1.4 la variable aleatoria X que se puede definir es*

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to \mathbb{R} \\ \{D\} &\to 1 \\ \{ND\} &\to 2 \\ \{NND\} &\to 3 \\ &\dots \end{aligned}$$

entonces el recorrido de X es $R_X = \{1, 2, \dots\}$.

En probabilidad se estudian dos tipos de variables aleatorias, las cuales se clasifican en discretas y continuas.

Definición 1.12. *Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria, se dice que X es una variable aleatoria discreta si su recorrido es finito o infinito numerable, es decir, el recorrido de X es $R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ y además, para todo $x_i \in R_X$ se le asocia un número real $p(x_i) = P(X = x_i)$ llamado probabilidad de x_i tal que:*

- *$p(x_i) \geq 0$, para todo $x_i \in R_X$.*
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1.$

A $p(x_i)$ se le conoce como función de probabilidad puntual (que denotaremos con fdpp) de X.

Definición 1.13. *Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria, se dice que X es una variable aleatoria continua si su recorrido R_X es infinito y no numerable, es decir, R_X puede ser: $(a, b), [a, b), (a, b], [a, b], (-\infty, \infty)$, con $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ y además, existe una función $f(x)$ llamada función de densidad tal que cumple las siguientes condiciones*

- *$f(x) \geq 0$, para todo $x \in R_X$.*
- *$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.*

De la definición anterior se puede notar que

$$P[a < X < b] = P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x)dx.$$

Otra función importante que puede asociarse a una variable aleatoria es la siguiente.

Definición 1.14. *Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria (discreta o continua) definida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. La función de distribución o función de distribución acumulada de X, se denota con $F(\cdot)$ y se define como*

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x), \ \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \\ F :&\mathbb{R} \to [0, 1] \\ &x \to F(x) = P[X \leq x]. \end{aligned}$$

Si X es una variable aleatoria discreta, entonces la función de distribución se expresa como

$$F(x) = P[X \leq x] = \sum_{x_i \leq x} p(x_i). \tag{1.2}$$

Por otro lado, si X es una variable aleatoria continua su función de distribución acumulada (fda) se escribe de la siguiente manera

$$F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds. \tag{1.3}$$

La función de distribución $F(x)$ tiene las siguientes propiedades

- $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.
- F es una función no decreciente, es decir, sean x_1, x_2 números reales tal que $x_1 \leq x_2$ entonces $F(x_1) \leq F(x_2)$.
- F es una función continua por la derecha.

Observación 1.15. *Si F es derivable entonces la función de densidad de una variable aleatoria X se puede encontrar por medio de la derivada de la función acumulada, esto es,*

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{P[X \leq x+h] - P[X \leq x]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{P(x < X \leq x+h)}{h} \\ &\cong f(x) \end{aligned}$$

Es decir, $f(x)$ es aproximadamente igual a la probabilidad de que X este en el intervalo $(x, x+h)$.

1.2. Esperanza de una variable aleatoria

La esperanza de una variable aleatoria X también conocida como media de X, valor esperado o valor promedio se define a continuación.

Definición 1.16. *Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria discreta con función de probabilidad puntual $p(x_j)$ y recorrido $R_x = \{x_1, x_2, \ldots\}$. La esperanza matemática de X se denota con $E[X]$ y se define como*

$$E[X] = \sum_{j=1}^{\infty} x_j p(x_j), \tag{1.4}$$

siempre que la serie infinita (1.4) sea absolutamente convergente, es decir, $\sum |x_j| p(x_j) < \infty$.

Por otro lado, cuando X es una v.a. continua se tiene la siguiente definición.

Definición 1.17. *Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ es una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad $f(x)$, la esperanza matemática de X se define por*

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \tag{1.5}$$

siempre que la integral impropia (1.5) sea absolutamente convergente, es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx < \infty$.

Generalmente, la esperanza matemática de X se le denota con $\mu = E[X]$. Además, si la serie infinita o la integral impropia no son absolutamente convergentes, se dice que la variable aleatoria X no tiene esperanza finita [11].

Propiedades de la Esperanza

- Si $X = c$ donde c es constante, entonces $E[X] = c$.
- Sean X e Y v.a. y c una constante entonces $E[cX+Y] = cE[X]+E[Y]$.
- Sean X e Y v.a. independientes, entonces $E[XY] = E[X]E[Y]$.

Para las pruebas de estas propiedades consultar [11].

A continuación se presenta otra forma de obtener la esperanza para una variable aleatoria continua Y.

Teorema 1.18. *Sea Y una v.a. continua con función de densidad $f(y)$, entonces*

$$E[Y] = \int_0^{\infty} P(Y > y)dy - \int_0^{\infty} P(Y \leq -y)dy.$$

Demostración. Se sabe que $P(Y = y) = P(y < Y) - P(Y \geq -y)$ entonces observe que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} P(y < Y)dy &= \int_0^{\infty}\int_y^{\infty} f_Y(t)dtdy \\
&= \int_0^{\infty}\left[\int_0^t dy\right] f_Y(t)dt \\
&= \int_0^{\infty} tf_Y(t)dt,
\end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty P(Y \leq -y)dy &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^{-y} f_Y(t)dtdy \\ &= \int_{-\infty}^0 \left[\int_0^{-t} dy\right] f_Y(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^0 tf_Y(t)dt.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^\infty tf_Y(t)dt + \int_{-\infty}^0 tf_Y(t)dt = \int_{-\infty}^\infty tf_Y(t)dt = E[Y].$$

$\square$

1.3. Función de variables aleatorias

Sea X una variable aleatoria y $y = g(x)$ una función real de x entonces $Y = g(X)$ resulta ser una variable aleatoria. Puesto que Y es una variable aleatoria, un aspecto de interés es determinar su función de densidad de probabilidad, para lo cual se tiene el siguiente resultado.

En [11] para determinar la fdpp de Y usa la técnica de la función de distribución, esto es

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(g(X) \leq y).\end{aligned}$$

Si X es una v.a. discreta con función de probabilidad puntual $p(x_i)$ entonces Y es discreta y su función de distribución está dada por

$$F_Y(y) = P(g(X) \leq y) = \sum_{\{x|g(x)\leq y\}} p_X(x).$$

Por otro lado, si X es una v.a. continua y $g(x)$ una función monótona creciente (o estrictamente decreciente), es decir, si $x_1 \leq x_2$ entonces $g(x_1) \leq g(x_2)$, por lo tanto, Y es continua y su función de distribución está dada por

$$\begin{aligned}F_Y(y) = P(g(X) \leq y) = P(X < g^{-1}(y)) &= F_X(g^{-1}(y)) \\ &= \int_{\{x|g^{-1}(y)>x\}} f_X(x)dx,\end{aligned}$$

ahora, si X es una v.a. continua y $g(x)$ una función monótona decreciente (o estrictamente decreciente), es decir, $x_1 \leq x_2$ entonces $g(x_1) \geq g(x_2)$, Y sigue siendo una variable aleatoria continua y su función de distribución es

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P(g(X) \leq y) = P(X > g^{-1}(y)) &= 1 - P(X \leq g^{-1}(y)) \\ &= 1 - F_X(g^{-1}(y)) \\ &= 1 - \int_{\{x|g^{-1}(y)>x\}} f_X(x)dx. \end{aligned}$$

El siguiente teorema nos permite obtener la función de densidad de probabilidad de Y con respecto a la función de distribución.

Teorema 1.19. *Sean X una v.a. continua con fdp $f_X(x)$ y F.d. F_X y $g(X)$ una función monótona entonces la función de densidad de Y está dada como*

$$\begin{aligned} f_Y(y) = F_Y'(y) &= F_X'(g^{-1}(y)) \\ &= f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right|. \end{aligned}$$

Pero si g no es monótona creciente ni decreciente, pero para cada $y = g(x)$ tiene un número finito de raíces entonces la función de densidad de Y está dada como

$$\begin{aligned} f_Y(y) = F_Y'(y) &= F_X'(g^{-1}(y)) \\ &= \sum_i f_X(g_i^{-1}(y)) \left| \frac{dg_i^{-1}(y)}{dy} \right|. \end{aligned}$$

Para su prueba ver [13].

1.4. Esperanza de una función de variables aleatorias

De lo anterior se tiene que si $Y = g(X)$ es una función que depende de la variable aleatoria X, se tiene que Y resulta ser una variable aleatoria con función de densidad puntual $p_Y(y_j)$ o función de densidad de probabilidad $f_Y(y)$. En esta sección se presenta el siguiente teorema que permite obtener la esperanza de la variable Y.

Teorema 1.20. *Sean X una variable aleatoria y g una función de X, tal que $Y = g(X)$, entonces*

a) Si X es una v.a. discreta entonces el valor esperado de Y está dado por

$$E[Y] = E[g(X)] = \sum_{j=1}^{\infty} g(x_j)p(x_j)$$

donde $p(x_j)$ es la función de probabilidad puntual de X.

b) Si X es una v.a. continua con función de probabilidad $f(x)$, entonces el valor esperado de Y es

$$E[Y] = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx.$$

Demostración. a) Sean $y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots$ valores que tiene Y y $p(y_i)$ su fdpp. De la definición de valor esperado se tiene que

$$E[Y] = \sum_i y_i p(y_i) = \sum_i y_i P(Y = y_i).$$

Se sabe que si $Y = g(X)$, entonces existe algún $x_j \in R_X$ tal que $y_i = g(x_j)$, por lo tanto,

$$P(Y = y_i) = \sum_{\{j:g(x_j)=y_i\}} p(x_j),$$

entonces la esperanza matemática de Y se escribe como

$$\begin{aligned} E[Y] &= \sum_i y_i \sum_{\{j:g(x_j)=y_i\}} p(x_j) \\ &= \sum_i \sum_{\{j:g(x_j)=y_i\}} g(x_j)p(x_j) \\ &= \sum_i \sum_{\{j:g(x_j)=y_i\}} g(x_j)p(x_j) \\ &= \sum_j g(x_j)p(x_j). \end{aligned}$$

b) Usando el Teorema (1.18) tenemos que

$$
\begin{aligned}
E[Y] &= \int_0^\infty P(Y > y)dy + \int_{-\infty}^0 P(Y \leq -y)dy \\
&= \int_0^\infty P(g(X) > y)dy + \int_{-\infty}^0 P(g(X) \leq -y)dy \\
&= \int_0^\infty \left[\int_{\{x|g(x)>y\}} f_X(x)dx \right] dy + \int_{-\infty}^0 \left[\int_{\{x|g(x)\leq -y\}} f_X(x)dx \right] dy \\
&= \int_{\{x|g(x)>0\}} \left[\int_0^{g(x)} dy \right] f_X(x)dx + \int_{\{x|g(x)\leq 0\}} \left[\int_{-g(x)}^0 dy \right] f_X(x)dx \\
&= \int_{\{x|g(x)>0\}} g(x)f_X(x)dx + \int_{\{x|g(x)\leq 0\}} g(x)f_X(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^\infty g(x)f_X(x)dx.
\end{aligned}
$$

□

1.5. Modelos de distribución de probabilidad

En esta sección se presentan las distribuciones de probabilidad que usualmente se usan en la teoría de riesgo.

Distribución Binomial: Sea X la variable aleatoria que determina el número de éxitos en n repeticiones independientes de un experimento aleatorio. Se dice que X tiene una distribución binomial con parámetros n y p que se denota con $X \sim Bin(n, p)$ si su función de probabilidad puntual es

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, ..., n, \quad n > 0.$$

Además,

$$E[X] = np,$$

$$\text{Var}[X] = npq,$$

donde $q = 1 - p$.

Distribución Poisson: Se dice que una variable aleatoria X tiene una distribución Poisson con parámetro λ ($\lambda > 0$) si su función de densidad de probabilidad de X es

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, ...$$

Además,

$$E[X] = \lambda,$$

$$\text{Var}[X] = \lambda.$$

La variable aleatoria X representa el número de éxitos o fallos en un intervalo de tiempo unitario. Usualmente se denota con $X \sim Poi(\lambda)$.

Distribución Exponencial: Se dice que la variable aleatoria X se distribuye exponencialmente con parámetro $\lambda > 0$ denotada con $X \sim exp(\lambda)$, si su función de densidad de probabilidad es,

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

Además,

$$E[X] = \frac{1}{\lambda},$$

$$\text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

La variable aleatoria X se puede interpretar como el tiempo de espera hasta que se produce el primer éxito o falla, también se puede verificar que es la distribución de la longitud de los intervalos de una variable entre dos sucesos de una distribución Poisson [13].

Distribución Gamma: Una variable aleatoria X tiene una distribución gamma con parámetros $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, donde $\alpha > 0$ es un parámetro de forma y $\beta > 0$ es un parámetro de escala, denotada con $X \sim G(\alpha, \beta)$ si su función de densidad de probabilidad es la siguiente

$$f(x) = \beta e^{-\beta x}\frac{(\beta x)^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x > 0.$$

Además,

$$P(X \leq x) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \int_0^x u^{\alpha-1} e^{\frac{u}{\beta}} du,$$

$$E[X] = \alpha\beta,$$

$$\mathrm{Var}[X] = \alpha\beta^2,$$

donde $\Gamma(\alpha)$ es la función gamma, definida como

$$\Gamma(\alpha) = \int_1^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Se puede ver que si α es un entero positivo se tiene que la función $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$, a esto se le conoce como la generalización del modelo exponencial, es decir, la variable aleatoria X se interpreta como el tiempo necesario hasta que se incluye el α-ésimo éxito.

La distribución de X cuando α es un entero positivo, se conoce como distribución Erlang, la cual se denota con $X \sim E(n, \lambda)$, donde $n = \alpha - 1$ y $\lambda = \frac{1}{\beta}$.

Para probar lo anterior, es necesario la integración por partes la función de distribución acumulada de la distribución gamma, para lo cual se considera a $u = y^{\alpha-1}$ y $dv = e^{-\frac{y}{\beta}} dy$ entonces $du = (\alpha-1)y^{\alpha-2}dy$ y $v = -\beta e^{-\frac{y}{\beta}}$, con esto se tiene que

$$\begin{aligned}
F(x) = P(X \leq x) &= \frac{1}{\beta^{\alpha}(\alpha-1)!} \int_0^x y^{\alpha-1} e^{-\frac{y}{\beta}} dy. \qquad\qquad .\\
&= \frac{1}{\beta^{\alpha}(\alpha-1)!} \left[-\beta y^{\alpha-1} e^{-\frac{y}{\beta}} \Big|_0^x - (-\beta)(\alpha-1) \int_0^x y^{\alpha-2} e^{-\frac{y}{\beta}} dy \right] \\
&= -e^{-\frac{x}{\beta}} \sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{x^i}{\beta^i i!} + 1.
\end{aligned}$$

Considerando $\lambda = \frac{1}{\beta}$ y $n = \alpha - 1$, entonces

$$F(x) = 1 - \sum_{i=0}^{n} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^i}{i!}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}^+, \quad x \geq 0.$$

Por lo tanto, $X \sim E(n, \lambda)$.

Se puede verificar también que

$$\int_0^\infty f(x)dx = 1 \quad \text{y} \quad \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\alpha x}dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha},$$

para más detalles ver [3].

1.6. Función generadora de momentos

Se presenta en esta sección un concepto importante de la probabilidad la cual se llama la función generadora de momentos (fgm), así como algunas de sus propiedades.

Definición 1.21. *Sea X una variable aleatoria (discreta o continua) y k un número positivo, a la esperanza $E[X^k]$ se le llama el k-ésimo momento de X alrededor del* 0.

En particular, cuando $k = 1$ se tiene $E[X]$ que se le conoce como media o primer momento de X.

Observación 1.22. *Se dice que el momento k-ésimo de X existe si y sólo si $E[|X|^k] < \infty$, [10].*

Observación 1.23. *Si la variable aleatoria X está acotada, es decir, si existen números reales a y b tales que $P(a \leq X \leq b) = 1$, entonces todos los momentos de X existen. Sin embargo, también puede ocurrir que todos los momentos de X existan aunque X no esté acotado, ver [10].*

Definición 1.24. *Sea X una variable aleatoria, la función generadora de momentos de X denotada con M_X, se define por*

$$M_X(t) = E[e^{tX}]. \tag{1.6}$$

Se puede observar que la función generadora de momentos de X es el valor esperado de la función e^{tX}.

De la definición anterior se tiene la siguiente.

Definición 1.25. *a) Si X es una v.a. discreta con función de probabilidad puntual $p(x_i) = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, la función generadora de momentos de X, está definida por*

$$M_X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{tx_i} p(x_i). \tag{1.7}$$

b) Ahora, si X es una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad (fdp) $f(x)$, la función generadora de momentos M_X, está dada por,

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx. \tag{1.8}$$

La función generadora de momentos M_X genera cada uno de los momentos de X alrededor de 0 siempre que exista, por lo que se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1.26. *Supongamos que $M_X^{(n)}(t)$ existe, entonces*

$$M_X^{(n)}(0) = E[X^n]$$

esto es, la n-ésima derivada de $M_X(t)$ cuando t=0 es $E[X^n]$.

Para su demostración ver [11].

Del teorema anterior, otra forma de escribir la función generadora de momentos es,

$$M_X(t) = M_X(0) + tM_X'(0) + \frac{t^2 M_X''(0)}{2!} + \ldots + \frac{t^n M_X^{(n)}(0)}{n!} + \ldots.$$

Más detalles, ver [11].

Capítulo 2

Teoría de Ruina en el Modelo Clásico

2.1. Introducción

Este capítulo se inicia con el concepto de riesgo, que es la posibilidad de que ocurra un siniestro, daño, contratiempo o desgracia, así como la posibilidad de una pérdida económica ante un suceso desfavorable no esperado. Así, se puede relacionar el riesgo con la incertidumbre, es decir, que no se sabe exactamente lo que sucederá en el futuro. Por ejemplo, el riesgo financiero es la posible pérdida de una inversión ocasionada por los cambios que se producen en el mercado. Por otra parte, el riesgo de seguro, es la posibilidad de que una aseguradora no pueda cumplir con sus obligaciones.

Los derechohabientes o clientes de una aseguradora tienen la obligación de pagar una prima a la compañía por la transferencia de riesgos bajo las coberturas que ofrece a sus clientes durante el período de vigencia del contrato (pólizas).

A los fondos combinados de todas las pólizas retenidas para cubrir las reclamaciones que se susciten se le llama reserva. Cuando la reserva no es suficiente para cubrir el monto de las reclamaciones o el monto total de las reclamaciones de sus clientes es más grande que el capital, se dice que la cartera no tiene solvencia.

De lo anterior es necesario contar con métodos y/o estrategias para el manejo adecuado del capital, así mismo, se debe contar con ingresos suficientes para hacer frente a sus obligaciones y obtener un rendimiento que permita seguir con sus actividades.

En esta parte, se trata con la Teoría Clásica de Riesgo que considera principalmente a las variables aleatorias básicas: número de siniestros, cuantía del siniestro y la estabilidad del proceso asegurador.

El proceso asegurador se caracteriza primordialmente por la variable aleatoria "siniestralidad" y cuando los efectos de las variaciones de la siniestralidad son muy altos pueden llevar a la empresa aseguradora a la ruina. Por lo que es importante llevar a cabo el cálculo de la probabilidad de ruina.

En este trabajo se estudian algunos métodos que nos permiten obtener expresiones y/o aproximaciones para obtener la probabilidad de ruina de una compañía de seguros cuando el capital de la compañía se modele con el proceso clásico de riesgo, al cual también se le conoce como Proceso de Cramér-Lundberg.

El modelo de Cramér-Lundberg se relaciona con el Proceso de Poisson compuesto, que trabajó Lundberg considerando un portafolio homogéneo, es decir, una cartera de pólizas con riesgos similares y posteriormente fue tratado con más detalle por Harald Cramér.

2.2. Probabilidad de ruina

Para el funcionamiento de una compañía aseguradora se requiere de un buen manejo de sus recursos financieros, lo que implicaría una revisión integral de los productos que ofrece, tales como, la determinación de las primas de riesgo que se ajusten con precisión a la siniestralidad, es decir, se debe calcular o estimar la probabilidad de ruina de la aseguradora, también se debe cuidar la dependencia de la ruina con los parámetros del proceso tales como; capital inicial, número de reclamaciones y el tamaño de los mismos con el objetivo de establecer mecanismos que permitan tener suficientes reservas por concepto de primas, así como conservar la solvencia en los portafolios.

Dicho de otra forma, la aseguradora no tiene la certeza de cuántas personas requerirán de la protección que ofrece, así pues, el capital obtenido de las primas más el capital inicial de la compañía deben de ser suficientes para solventar los gastos que tenga la aseguradora.

2.2.1. Proceso de Poisson

Para determinar el número de reclamaciones es necesario el estudio del Proceso de Poisson, para entender dicho proceso se requiere de la siguiente definición.

Definición 2.1. *Un proceso estocástico* $X = \{X(t), t \in T\}$ *es una colección de variables aleatorias. Es decir, para cada* t *en el conjunto de índices* T*,* $X(t)$ *es una variable aleatoria.*

Usualmente, se interpreta a t como el tiempo y $X(t)$ denota el estado en que se encuentra el proceso X al tiempo t. Si el conjunto de índices T es un conjunto contable, o bien, finito o numerable, se dice que X es un proceso estocástico a tiempo discreto y si T es continuo, es decir, T es infinito y no numerable, se dice que X es un proceso estocástico a tiempo continuo.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $X = \{X(t), t \in T\}$ tiene incrementos independientes si para todo $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, las variables aleatorias

$$X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

son independientes.

Se dice que el proceso X posee incrementos estacionarios si $X(t+s) - X(t)$ tiene la misma distibución para todo t, para más detalles ver [17].

Otro concepto necesario para entender el Proceso de Poisson, es el de un proceso de renovación que tiene como característica esencial, la suma de variables aleatorias independientes con la misma distribución de probabilidad, es decir, sea $W_n = T_1 + T_2 + ... + T_n$ donde T_k representa el tiempo de vida de un componente o artículo, donde cada vez que el componente falla se reemplaza inmediatamente por otro, a este proceso de reemplazar una variable por otra se le conoce como renovación. Esto es, que el proceso se reinicia en cada renovación [14]. A continuación se define formalmente un proceso de renovación.

Definición 2.2. *Un proceso de renovación es una sucesión infinita de variables aleatorias* $T_1, T_2, \ldots$ *que son no negativas, independientes e idénticamente distribuidas con una distribución arbitraria* $F(t)$*.*

Una definición alternativa de un proceso de renovación es la siguiente.

Definición 2.3. *Dado un proceso de renovación* $\{T_1, T_2, ...\}$ *se definen los tiempos reales de renovación de la siguiente forma*

$$\begin{aligned} W_0 &= 0 \\ W_n &= T_1 + \ldots + T_n, \ \textit{para } n \geq 1. \end{aligned}$$

El proceso de conteo de renovaciones está dado por

$$N(t) = \text{máx}\{n \geq 0 : W_n \leq t\}, \qquad \textit{para todo } t \geq 0.$$

La variable W_n representa el tiempo en el que se realiza la n-ésima renovación, entonces, $N(t)$ nos indica el número de renovaciones efectuadas, o bien, el total de incidencias hasta el tiempo t.

Consideremos a $F(t)$ como la función de distribución de los tiempos de vida, entonces, la función de distribución de W_n está dada mediante la convolución de $F(t)$, es decir,

$$\begin{aligned} F_{W_n}(t) &= P(W_n \leq t) \\ &= P(T_1 + T_2 + \ldots + T_n \leq t) \\ &= (F * \cdots * F)(t) \\ &= F^{*n}(t), \end{aligned}$$

donde $F^{*1} = F(t)$ y para $n = 0$

$$F^{*0} = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad t < 0, \\ 1, & \text{si} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Proposición 2.4. *Para cualquier* $n \geq 0$

$$P(N(t) = n) = F^{*n}(t) - F^{*(n+1)}(t)$$

Su demostración se encuentra en [14].

Como se mencionó anteriormente, el proceso de conteo de renovaciones $N(t)$ representa el total de incidencias hasta el tiempo t, un caso particular, es el Proceso de Poisson.

Se dice que un Proceso de Poisson es un proceso contador o un proceso de conteo que satisface ciertas propiedades, a continuación se presenta la definición de un proceso de conteo.

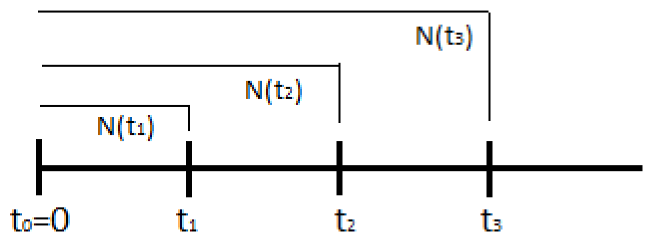

Figura 2.1: Proceso de Conteo

Definición 2.5. *Sea* $\{N(t) : t \geq 0\}$ *un proceso estocástico, se dice que es un proceso de conteo si,* $N(t)$ *representa el número total de eventos que ocurren hasta el tiempo* t*, esto es,* $N(t)$ *es un proceso de conteo si cumple lo siguiente,*

- $N(0) = 0$*, c.s.*
- $N(t) > 0$ *para todo* $t > 0$*, c.s.*
- *Si* $s < t$ *entonces* $N(s) \leq N(t)$*, c.s.*
- *Para* $s < t$*,* $N(t) - N(s)$ *es el número de eventos de interés que ocurren en el intervalo* $(s, t]$*.*

En [4] se tiene las siguientes definiciones.

Definición 2.6. *Se dice que un proceso de conteo posee incrementos independientes, si el número de eventos que ocurren en intervalos de tiempo disjuntos, son independientes, esto es, el número de eventos observados hasta el tiempo* t*,* $N(t)$*, es independiente del número de eventos ocurridos entre el tiempo* t *y* $t + s$*,* $N(t + s) - N(t)$*, para cada* $s \geq 0$*.*

Definición 2.7. *Se dice que un proceso de conteo posee incrementos estacionarios, si la distribución del número de eventos que ocurren en cualquier intervalo de tiempo, depende sólo de la longitud del intervalo, es decir, si el número de eventos en el intervalo* $(t_1 + s, t_2 + s]$*,* $(N(t_2 + s) - N(t_1 + s))$*, tiene la misma distribución que el número de eventos en el intervalo* $(t_1, t_2]$*,*$(N(t_2) - N(t_1))$*, para cada* $t_1 < t_2$ *y* $s > 0$

Uno de los procesos más importante dentro de un proceso de conteo es el Proceso de Poisson. El siguiente resultado establece cuando un proceso estocástico $N(t)$ es un Proceso de Poisson.

Definición 2.8. *Se dice que el proceso de conteo* $\{N(t) : t \geq 0\}$ *es un Proceso de Poisson con intensidad* λ *si cumple lo siguiente,*

- $N(0) = 0$, *c.s.*
- $N(t+s) - N(s) \sim Poi(\lambda t)$.
- $\{N(t)\}$ *tiene incrementos independientes y estacionarios.*

A continuación se menciona otra definición alterna para un Proceso de Poisson.

Definición 2.9. *Sean* $W_1, W_2, ..., W_n$ *variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d) con distribución exp(*λ*), donde* W_n *representa el tiempo transcurrido entre el evento* $(n-1)$*-ésimo y el evento* n*-ésimo. El Proceso de Poisson está dado por*

$$N(t) = m\acute{a}x\{n \geq 1 : W_1 + W_2 + W_3 + ... + W_n \leq t\},$$

es decir, $N(t)$ *indica el número de eventos que ocurren hasta el tiempo* t.

El Proceso de Poisson es un proceso estocástico que nos permite contar el número de eventos que ocurren en un intervalo de tiempo $(0, t]$. Un ejemplo usual, es el número de llamadas telefónicas que entran a un centro de servicio al cliente en un determinado lapso de tiempo, otro ejemplo, es el número de clientes que llegan a un banco, o bien, el tiempo de espera de un cliente para que sea atendido en ventanilla.

Proposición 2.10. *Si consideramos a* $T_n = W_1 + W_2 + ... + W_n$ *como el tiempo transcurrido desde que inicia el conteo hasta el* n*-ésimo evento, entonces* $T_n \sim \Gamma(n, \lambda)$.

Demostración. Nótese que cuando $n = 0$ se tiene que $T_0 = 0$, además que $\{N(t) \geq n\} = \{T_n \leq t\}$, por lo tanto, la función acumulada de T_n está dada por,

$$\begin{aligned} F_{T_n}(t) &= P(T_n \leq t) = P(N(t) \geq n) \\ &= 1 - P(N(t) < n) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Derivando la expresión (2.1) se obtiene a la función de densidad de probabilidad, esto es,

$$
\begin{aligned}
f_{T_n}(t) &= \frac{dF_{T_n}(t)}{dt} \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}(\lambda e^{-\lambda t} k(\lambda t)^{k-1} - \lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^k) \\
&= -\lambda e^{-\lambda t} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{(k)!} \right) \\
&= -\lambda e^{-\lambda t} \left(\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{(k)!} \right) \\
&= -\lambda e^{-\lambda t} \left(-\frac{(\lambda t)^{n-1!}}{(n-1)!} \right) \\
&= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda t}.
\end{aligned}
$$

Por consiguiente se tiene que

$$T_n \sim \Gamma(n, \lambda). \tag{2.2}$$

□

El anterior resultado será de utilidad para demostrar la siguiente proposición.

Proposición 2.11. *La variable $N(t)$ tiene una distribución Poisson con parámetro λt denotada con $N(t) \sim Poi(\lambda t)$, entonces su función de probabilidad está dada por*

$$P(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Demostración. Supóngase que $T_n \leq t < T_{n+1}$, utilizando el Teorema de la Probabilidad Total y condicionando con respecto al instante en que ocurre el n-ésimo evento se tiene,

$$\begin{aligned}
P(N(t)=n) &= \int_0^t P(T_{n+1}>t|T_n=s)P(T_n=s)ds \\
&= \int_0^t P(T_{n+1}>t|T_n=s)f_{T_n}(s)ds \\
&= \int_0^t P(W_{n+1}>t-s)\frac{\lambda^n}{(n-1)!}s^{n-1}e^{-\lambda s}ds \\
&= \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^t (1-P(W_{n+1}\leq t-s))s^{n-1}e^{-\lambda s}ds \\
&= \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^t (1-(1-e^{-\lambda(t-s)}))s^{n-1}e^{-\lambda s}ds \\
&= \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}s^{n-1}e^{-\lambda s}ds \\
&= \frac{\lambda^n e^{-\lambda t}}{(n-1)!}\int_0^t s^{n-1}ds \\
&= \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$

Así, $N(t) \sim Poi(\lambda t)$. □

2.2.2. Proceso de Poisson compuesto

Sea $\{N(t) : t \geq 0\}$ un proceso de conteo y sea $\{Y_1, Y_2, \ldots,\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución común $F(y)$. Suponga además, que el proceso $\{N(t) : t \geq 0\}$ y la sucesión $\{Y_1, Y_2, ...\}$ son independientes. Entonces el proceso definido para $t \geq 0$, mediante

$$S(t) = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{N(t)}$$

con $S(t) = 0$ cuando $N(t) = 0$ es llamado un proceso estocástico compuesto. De lo anterior se tiene la siguiente definición.

Definición 2.12. *Sea $\{N(t), t \geq 0\}$ un Proceso de Poisson y sea $\{Y_1, Y_2, ...\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución F y la sucesión de las variables $Y_i's$ son independientes* *del proceso* $\{N(t), t \geq 0\}$ *con parámetro* $\lambda > 0$. *El Proceso de Poisson compuesto se define de la siguiente forma*

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i = Y_1 + Y_2 + ... + Y_{N(t)}. \tag{2.3}$$

De la Definición 2.12, nuevamente se puede observar que si $N(t) = 0$ entonces $S(t) = 0$. Enseguida se presenta un resultado que establece que debe satisfacer $S(t)$ para que sea un Proceso de Poisson compuesto.

Proposición 2.13. *El Proceso de Poisson compuesto tiene las siguientes propiedades:*

a. $E[S(t)] = \lambda t E[Y]$.

b. $Var[S(t)] = \lambda t E[Y^2]$.

c. $Cov(S(t)) = \lambda E[Y^2] min\{s, t\}$.

d. $M_{N(t)}(u) = e^{\lambda t(M_Y(u)-1)}$.

Demostración. A continuación se demuestran los incisos a) y b). Los incisos c) y d) se prueban de manera similar.

$$\begin{aligned} a) \qquad E[S(t)] =& E[E(S(t)|N(t))] \\ =& \sum_{n=1}^{\infty} E(Y_1 + \ldots + Y_n | N(t) = n) P(N(t) = n) \\ =& \sum_{n=1}^{\infty} n E[Y] P(N(t) = n) \\ =& E[Y] \sum_{n=1}^{\infty} n P(N(t) = n) \\ =& E[Y] E(N(t)) \\ =& \lambda t E[Y]. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b) \qquad \operatorname{Var}[S(t)] &= E[\operatorname{Var}\big(S(t)|N(t)\big)] + \operatorname{Var}[E\big(S(t)|N(t)\big)] \\
&= E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} \operatorname{Var}\big(Y_i|N(t)\big)\right] + \operatorname{Var}\left[\sum_{i=1}^{N(t)} E\big(Y_i|N(t)\big)\right] \\
&= E\left[\sum_{i=i}^{N(t)} \operatorname{Var}(Y_i)\right] + \operatorname{Var}\left[\sum_{i=1}^{N(t)} E(Y_i)\right] \\
&= E[N(t)\operatorname{Var}(Y)] + \operatorname{Var}[N(t)E[Y]] \\
&= \operatorname{Var}(Y)E[N(t)] + \operatorname{Var}[N(t)]E[Y]^2 \\
&= (E[Y^2] - E[Y]^2)\lambda t + \lambda t E[Y]^2 \\
&= \lambda t E[Y^2].
\end{aligned}
$$

□

2.2.3. Proceso de riesgo

Los modelos de riesgo describen la variación aleatoria de la variable **siniestralidad**, por tal razón, las aseguradoras intentan estimar el nivel mínimo de capital aceptable que corresponde al riesgo de la ruina, así como, determinar un nivel para sus riesgos, el cual se llama protección del capital, o bien, factor de carga.

A continuación, se define un proceso de riesgo a tiempo continuo llamado Modelo de Riesgo de Cramér-Lundberg, el cual nos permitirá conocer el momento y el número de siniestros que ocurren de forma aleatoria [15].

Definición 2.14. *Sea $R(t)$ un proceso estocástico, se define a $R(t)$ como un proceso de riesgo también llamado proceso de superávit, si*

$$R(t) = u + ct - S(t), \tag{2.4}$$

donde $u \geq 0$ es el capital inicial, ct es el ingreso de primas del asegurador con $c > 0$ y $S(t)$ es el monto total de las reclamaciones de un portafolio de asegurados.

Por la Definición 2.12, se tiene que $S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j$ conocido como proceso de la siniestralidad agregada o proceso de reclamos agregados, la ecuación (2.4) se puede expresar de la forma siguiente

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i,$$

donde $N(t)$ representa el número de reclamos hasta el tiempo t, Y_i denota el monto del i-ésimo siniestro o reclamación. Por lo tanto, $R(t)$ es el capital de la compañía aseguradora al tiempo t.

2.2.4. Condición de ganancia neta

Como se ha mencionado, la prima es un pago adelantado por la transferencia de riesgos. En [4] denota la prima "c" como $c = (1+\theta)\lambda p_1$, donde p_1 es el primer momento de la distribución de las $Y_i's$ y $\theta > 0$ es una constante llamada factor de recargo o carga de seguridad.

Es llamada factor de recargo porque es la reclamación promedio más un porcentaje, en el cual se encuentran inmersos los costos administrativos y comerciales del seguro, así como los márgenes de utilidad de la aseguradora [5].

En el siguiente teorema se enuncia la condición necesaria para que una cartera de asegurados sea rentable.

Teorema 2.15. *El modelo de Cramér-Lundberg satisface la condición de ganancia neta, esto es*

$$\theta = \frac{c}{\lambda p_1} - 1 > 0,$$

tal que $c > \lambda p_1$.

Demostración. Primero calculamos la esperanza del proceso de superávit, esto es,

$$\begin{aligned} E[R(t)] &= E\left[u + ct - \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j\right] \\ &= u + ct - \lambda t p_1. \end{aligned}$$

Por otra parte, el límite del proceso de superávit es

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[R(t)]}{t} = c - \lambda p_1.$$

Por la Ley de los Grandes Números ver [4], se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R(t)}{t} = c - \lambda p_1 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{S(t) - ct}{t} = \lambda p_1 - c,$$

donde $S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j$ y $S(t) - ct$ se le conoce como la pérdida agregada (siniestralidad) o excedente de reclamación.

Observemos que si $c < \lambda p_1$, entonces $\lim_{t\to\infty} \frac{R(t)}{t} = c - \lambda p_1 < 0$ y $\lim_{t\to\infty} \frac{(S(t) - ct)}{t} = \lambda p_1 - c > 0$.

Lo cual implica que $\lim_{t\to\infty} (S(t) - ct) = \infty$ y $\sup_{0\le t\le\infty} (S(t) - ct) = \infty$, entonces, la $P(\sup_{0\le t\le\infty} (S(t) - ct) > u) = 1$, esto es, cuando $c < \lambda p_1$ la probabilidad de que el monto de las reclamaciones que no fue cubierto por los ingresos obtenidos de las primas sea mayor que el capital inicial, es 1, en otras palabras, en un determinado tiempo ni los ingresos obtenidos por medio de las primas ni el capital inicial serán suficientes para cubrir el monto de las reclamaciones, esto es, que la aseguradora no tendrá solvencia.

Entonces, la condición necesaria para la solvencia de una empresa es que $c > \lambda p_1$, dicho de otra manera, se requiere que el ingreso de las primas sea mayor al monto esperado de los siniestros para poder cubrir todas las reclamaciones sin tener pérdidas, esto significa que $E[R(t)]$ es positivo cuando t es grande. □

2.2.5. Probabilidad de ruina

Se dice que el portafolio de una empresa se encuentra en ruina cuando las primas no son suficientes para cubrir los montos de las reclamaciones, o bien, las reservas del asegurador sean negativas, por lo que es necesario medir la probabilidad de riesgo o ruina que tiene el portafolio de obtener una utilidad negativa y en que momento se presenta.

En otras palabras, se dice que el proceso de superávit se encuentra en ruina cuando $\{R(t) \le 0\}$ para todo $t \ge 1$. Entonces, denotemos el primer momento en que se presenta la ruina como τ, definiendolo de la siguiente forma

$$\tau = \inf\{t \ge 1 : R(t) \le 0\},$$

y cuando la ruina nunca se presenta, en este caso se tiene casi seguramente que

$$\tau = \infty.$$

De esto se puede definir a la probabilidad de ruina de la siguiente forma

$$\psi(u) = P(\tau \in \{1, 2, ...\} | R_0 = u) = P(\tau < \infty | R_0 = u).$$

Observación 2.16. *Si $u \to \infty$ entonces $\psi(\infty) = \lim_{u\to\infty} \psi(u) = 0$, es decir, entre más grande sea nuestro capital inicial la probabilidad de ruina se aproxima a cero.*

Observación 2.17. *De la observación anterior, se puede notar que ψ es monótona decreciente, es decir, si $u_1 \leq u_2$ entonces $\psi(u_2) \leq \psi(u_1)$, más detalles en [15].*

A la probabilidad de que nunca se presente la ruina se denota con $\delta(u)$ y está dada por

$$\delta(u) = 1 - \psi(u).$$

Observación 2.18. *La ruina no puede producirse antes del momento de ocurrencia del primer siniestro, ya que el Proceso de Poisson es un proceso de renovación.*

Una vez definida la probabilidad de ruina y algunas observaciones que se relaciona con ella, enseguida se enuncia un resultado importante que será utilizado para el desarrollo de uno de los objetivos de la tesis, el cálculo de la probabilidad de ruina.

Proposición 2.19. *El modelo clásico de Cramér-Lundberg es un proceso estocástico a tiempo continuo. Suponga a $F(y)$ como la función de distribución de una reclamación, por lo tanto,*

1. $\dfrac{d}{du}\delta(u) = \dfrac{\lambda}{c}\left[\delta(u) - \displaystyle\int_0^u \delta(u-y) f(y) dy\right].$

2. $\psi(0) = \dfrac{\lambda\mu}{c}.$

3. $\psi(u) = \dfrac{\lambda}{c}\left[\displaystyle\int_u^\infty \overline{F}(y) dy + \int_0^u \psi(u-y)\overline{F}(y) dy\right].$

Demostración. Para la demostración del inciso 1) se condicionará con respecto al primer siniestro Y_1 y al primero momento T_1 el cual se distribuye exponencialmente con parámetro λ, suponiendo que hasta el tiempo T_1 no ocurre la ruina, entonces

$$
\begin{aligned}
\delta(u) =& P(''\text{No ruina en } (0,\infty)'') \\
=& P(u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i > 0 \text{ para todo } t > 0 | R(0) = u) \\
=& \int_0^\infty \int_0^\infty P(u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i > 0,\ t > 0 | Y_1 = y, T_1 = t_1) f_Y(y) f_{T_1}(t) dy dt \\
=& \int_0^\infty \int_0^{u+ct} P(u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i > 0,\ t > 0 | Y_1 = y, T_1 = t) f_Y(y) f_{T_1}(t) dy dt \\
=& \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} P(u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i > 0,\ t > T_1 | Y_1 = y, T_1 = t) \bullet \\
& \bullet\ f_Y(y) dy dt \\
=& \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} \delta(u + ct - y) f_Y(y) dy dt.
\end{aligned}
$$

Realizando un cambio de variable, esto es, sea $s = u+ct$ entonces $ds = cdt$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\delta(u) &= \int_u^\infty \lambda e^{-\lambda\left(\frac{s-u}{c}\right)} \int_0^s \delta(s-y) f_Y(y) dy \frac{ds}{c} \\
&= \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda u}{c}} \int_u^\infty e^{-\frac{\lambda s}{c}} \int_0^s \delta(s-y) f_Y(y) dy ds,
\end{aligned}
$$

ahora, derivando con respecto a u se tiene,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{du}\delta(u) =& \frac{\lambda}{c} \big[\frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda u}{c}} \int_0^\infty e^{-\frac{\lambda s}{c}} \int_0^s \delta(s-y) f_Y(y) dy ds \\
& + e^{\frac{\lambda u}{c}} \big(- e^{-\frac{\lambda u}{c}} \big) \int_0^s \delta(s-y) f_Y(y) dy \big] \\
=& \frac{\lambda}{c} \left[\delta(u) - \int_0^u \delta(u-y) f_Y(y) dy \right]. \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

Con esto se prueba el inciso 1).

Para probar el inciso 2) primero se integra de $[0,t]$ la ecuación (2.5), obteniendo lo siguiente

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{d}{du}\delta(u)du &= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \left[\delta(u) - \int_0^u \delta(u-y)f_Y(y)dy\right]du \\
\delta(u)\Big|_0^t &= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \delta(u)du - \frac{\lambda}{c}\int_0^t\int_0^u \delta(u-y)dF_Y(y)du \\
\delta(t)-\delta(0) &= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \delta(u)du - \frac{\lambda}{c}\int_0^t\int_y^t \delta(u-y)du\; dF_Y(y) \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \delta(u)du - \frac{\lambda}{c}\int_0^t\int_0^{t-y} \delta(u)du\; dF_Y(y) \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \delta(u)du - \frac{\lambda}{c}\int_0^t\int_0^{t-u} \delta(u)dF_Y(y)\; du \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \left[\delta(u) - \int_0^{t-u}\delta(u)dF_Y(y)\right]du \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \left[\delta(u)\left(1-\int_0^{t-u}dF_Y(y)\right)\right]du \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \delta(u)\left(1-F_Y(y)\Big|_0^{t-u}\right)du \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \delta(u)\big(1-F_Y(t-u)+F_y(0)\big)du \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \delta(u)\overline{F}_Y(t-u)du. \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \delta(t-u)\overline{F}_Y(u)du.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\delta(t) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^t \delta(t-u)\overline{F}_Y(u)du. \tag{2.6}$$

Cuando t tiende a infinito se tiene

$$1 = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \overline{F}_Y(u)du = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\mu.$$

Por lo tanto,

$$\delta(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c}, \tag{2.7}$$

y

$$\psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c}. \tag{2.8}$$

Al sustituir la expresión (2.7) en (2.6), se obtiene el inciso 3), esto es

$$\delta(t) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} + \frac{\lambda}{c}\int_0^t \delta(t-u)\overline{F}_Y(u)du,$$
$$\delta(u) = 1 - \psi(t) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} + \frac{\lambda}{c}\int_0^t \delta(t-u)\overline{F}_Y(u)du.$$

Simplificando la ecuación anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \frac{\lambda\mu}{c} - \frac{\lambda}{c}\int_0^t \delta(t-u)\overline{F}_Y(u)du. \\ &= \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty \overline{F}(y)dy - \frac{\lambda}{c}\int_0^t \delta(t-u)\overline{F}_Y(u)du,\end{aligned}$$

lo cual prueba el resultado. □

2.3. Tiempo de ruina

En esta sección se analizan las reservas de la empresa cuando éstas sean negativas, es decir, cuando se produce la ruina. Debido a que la empresa aseguradora tiene pérdidas inesperadas causadas por el tamaño de la siniestralidad, por lo que es de interés estudiar la variable aleatoria "tiempo de ruina", en virtud de que nos indica cuando la cartera se arruinará o bien las reservas no sean suficientes para cubrir los gastos de los asegurados.

Definición 2.20. *Se dice ruina cuando la reserva en el instante t debe ser menor que cero, es decir,*

$$\textit{Ruina} = \{U(t) < 0 \ \textit{para todo}\ t > 0\}.$$

Definición 2.21. *Sea τ una variable aleatoria, se define a τ como el tiempo de ruina o momento de ruina, si*

$$\tau = \text{ínf}\{t > 0 | R(t) < 0\}.$$

A τ se le conoce como el primer momento en el que se presenta la ruina.

Se observa que $R(\tau)$ es el nivel de reservas negativas en el momento de la ruina. Es necesario mencionar que aunque $R(t) < 0$ en un instante t no significa que la compañía vaya a quebrar, toda vez que la compañía sigue trabajando con capital prestado, esperando recuperarse en un futuro.

Se ha definido a la probabilidad de ruina como

$$\psi(u) = P(\tau < \infty | R(0) = u) = P\{\text{Ruina} | R(0) = u\},$$

tal que $0 \leq \psi(u) \leq 1$, donde se usa el hecho de que

$$\text{Ruina} = \bigcup_{t \geq 0} \{R(t) < 0\} = \left\{ \inf_{t \geq 0} R(t) < 0 \right\} = \{\tau < \infty\}.$$

Analizando el proceso de riesgo $R(t)$, la ruina puede ocurrir sólo en los tiempos $t = T_n$ para algún $n \geq 1$ ya que R aumenta linealmente en los intervalos $[T_n, T_{n+1}]$, por lo que se puede expresar a la ruina en términos de los tiempos de inter-arribo W_n, es decir,

$$\begin{aligned} \text{Ruina} &= \left\{ \inf_{t > 0} R(t) < 0 \right\} = \left\{ \inf_{n \geq 1} R(T_n) < 0 \right\} \\ &= \left\{ \inf_{n \geq 1} [u + cT_n - S(T_n)] < 0 \right\}, \end{aligned}$$

ahora, usando el hecho de que $N(T_n) = \text{máx}\{i \geq 1 : T_i \leq T_n\} = n$, se tiene

$$\text{Ruina} = \left\{ \inf_{n \geq 1} \left[u + cT_n - \sum_{i=1}^{n} Y_i \right] < 0 \right\}.$$

Ahora, denotando a $Z_n = Y_n - cW_n$ y $X_n = Z_1 + \ldots + Z_n$ para $n \geq 1$, $X_0 = 0$. Las variables aleatorias Y_k, $k = 1, ..., n$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que denotan los montos de las reclamaciones, y W_n con Y_k son variables aleatorias independientes. Definamos una forma alternativa de la probabilidad de ruina,

$$\psi(u) = P\left(\inf_{n\geq 1}(-X_n) < -u\right) = P\left(\sup_{n\geq 1} Z_n > u\right).$$

La expresión anterior se puede encontrar en [1].

2.4. Desigualdad de Cramér-Lundberg

En esta sección se analiza algunas aproximaciones de interés para la probabilidad de ruina conocidas como Coeficiente de Ajuste de Lundberg y la Desigualdad de Lundberg, para lo cual se hace uso del proceso de renovación y la condición de ganancia neta, así como algunos conceptos vistos en el primer capítulo.

Para ello, es necesario suponer que el monto de las reclamaciones sea pequeño, tal que existe una función generadora de momentos de la distribución del tamaño de las reclamaciones dada en una vecindad del origen, la cual es definida por

$$m_{Y_1}(h) = E[e^{hY_1}], \quad h \in (-h_0, h_0) \text{ para cualquier } h_0 > 0,$$

es decir, se trabaja bajo la condición de que los reclamos tienden a tener colas ligeras, ésta es una condición del modelo de Cramér-Lundberg, lo cual asegura la existencia de la función generadora de momentos de la variable aleatoria que denota los montos de las reclamaciones [9].

2.4.1. Coeficiente de ajuste

El coeficiente de ajuste es un número que aparece en el problema de calcular o estimar probabilidades de ruina.

Definición 2.22. *Suponga que la función generadora de momentos de Z_k existe en alguna vecindad $(-h_0, h_0)$, $h_0 > 0$, del origen. Si además, existe una única solución positiva r a la ecuación*

$$m_{Z_k}(h) = E[e^{h(Y_k - cW_k)}] = 1, \tag{2.9}$$

este es llamado el Coeficiente de Ajuste o de Lundberg.

Para verificar la existencia de la función generadora de momentos $m_{Y_k}(h)$ para $h \in (-h_0, h_0)$, sólo basta probar que $m_{Z_k}(h) = m_{Y_k}(h)m_{cW_k}(-h)$ existe, observemos que para $h \in [0, h_0)$ la función generadora de momentos $m_{Z_k}(h) = m_{Y_k}(h)m_{cW_k}(-h)$ existe, ya que $m_{cW_k}(-h) \leq 1$ para todo $h \geq 0$. Por otro lado, cuando $h \in (-h_0, 0)$, $m_{Z_k}(h)$ existe si $m_{cW_k}(-h)$ es finito. Por lo tanto, la función generadora de momentos de Z_k existe en una vecindad de cero si las funciones generadoras de momentos de Y_k y cW_k existen.

Ahora, veamos que en el modelo de Cramér-Lundberg con intensidad λ $\big(W_k \sim Exp(\lambda)\big)$ para el proceso del número de reclamos N se tiene que

$$m_{cW_k}(h) = \frac{\lambda}{\lambda - ch}, \quad \text{para} \quad h < \frac{\lambda}{c}. \tag{2.10}$$

En la definición se menciona implícitamente que r es única, siempre que exista como la solución de la ecuación (2.9), para probarlo se observa que la función $f(h) = m_{Z_k}(h)$ tiene derivadas de todo orden en $(-h_0, h_0)$ y algunas propiedades como

i. $f'(0) = E[Z_k] < 0$ por la condición de ganancia neta.

ii. $f''_{Z_k}(h) = E[Z_k^2 e^{hZ_k}]$ >0 ya que $Z_k \neq 0$, para todo $h > 0$.

La propiedad (i) y la continuidad de f implica que f es decreciente en algúna vecindad de cero. La segunda propiedad implica que f es convexa. De esta forma existe algún $h_c \in (0, h_0)$ tal que $f'(h_c) = 0$, entonces f cambia su comportamiento monótono decreciente a creciente en h_c. Para $h > h_c$, f es creciente. Por lo tanto, la solución $h = r$ de la ecuación $f(h) = 1$ es única, siempre que la función generadora de momentos exista en una vecindad del origen suficientemente grande. Una condición suficiente para que esto suceda es que exista $0 < h_k \leq \infty$, tal que $f(h) < \infty$ para $h < h_k$ y $\lim_{h \to h_k} f(h) = \infty$. Esto significa que la función generadora de momentos $f(h)$ crece continuamente a infinito. En particular, suponga el valor 1 para un h suficientemente grande.

De lo anterior, se puede decir que la existencia del coeficiente de ajuste como la solución de la ecuación (2.9) no es automática y la existencia de la función generadora de momentos de Z_k en alguna vecindad del origen no es suficiente para asegurar que hay algún $r > 0$ con $f(r) = 1$.

2.4.2. Desigualdad de Lundberg

Para la prueba del siguiente resultado se requerirá la desigualdad de Markov, ver [11].

Teorema 2.23. *(Desigualdad de Lundberg) Suponga que existe el coeficiente de ajuste r, tal que para todo $u > 0$ se cumple la siguiente desigualdad*

$$\psi(u) \leq e^{-ru} \tag{2.11}$$

Demostración. Probaremos la ecuación (2.11) por inducción. Para esto, denotaremos a

$$\psi_n(u) = P\left(\max_{1\leq k\leq n} X_k > u\right) = P(X_k > u \text{ para algún } k \in \{1,\ldots,n\}).$$

Note que el $\lim_{n\to\infty} \psi_n(u) = \psi(u)$ para todo $u > 0$.

Por lo que basta probar que

$$\psi(u) \leq e^{-ru}, \quad \text{para todo } n \geq 1 \text{ y } u > 0. \tag{2.12}$$

Iniciemos cuando $n = 1$. Por desigualdad de Markov y la definición de coeficiente de ajuste, se tiene que

$$\psi_1(u) \leq e^{-ru} m_{Z_1}(R) = e^{-ru}.$$

Por lo tanto, se cumple la ecuación (2.12) para $n = 1$.

Ahora, supongamos que (2.12) se cumple para $n = k \geq 1$, y su prueba cuando $n = (k+1)$, se procede de la forma siguiente

$$\begin{aligned}
\psi_{k+1}(u) &= P\left(\max_{1\leq n\leq k+1} X_n > u\right) \\
&= P(Z_1) + P\left(\max_{2\leq n\leq k+1} (Z_1 + (X_n - Z_1)) > u, Z_1 \geq u\right) \\
&= \int_{-\infty}^{u} P\left(\max_{1\leq n\leq k} [x + Sn] > u\right) dF_{Z_1}(x) + \int_{u}^{\infty} dF_{Z_1}(x) \\
&= p_2 + p_1.
\end{aligned}$$

Primero veamos p_2, usando la inducción cuando $n = k$, se tiene

$$\begin{aligned} p_2 &= \int_{-\infty}^{u} P\left(\max_{1\leq n\leq k} S_n > u - x\right) dF_{Z_1}(x) \\ &= \int_{-\infty}^{u} \psi_k(u-k) dF_{Z_1}(x) \\ &\leq \int_{-\infty}^{u} e^{r(x-u)} dF_{Z_1}(x). \end{aligned}$$

Similarmente, de la desigualdad de Markov se sigue que

$$p_1 \leq \int_{u}^{\infty} e^{r(x-u)} dF_{Z_1}(x).$$

Por lo tanto, de la definición del coeficiente de ajuste r se tiene que

$$p_1 + p_2 \leq e^{-ru} m_{Z_1}(R) = e^{-ru}$$

por lo que (2.11) se cumple para $n = k + 1$. □

Observe que cuando el capital inicial u es grande, el límite de la exponencial de la desigualdad es pequeña por lo que la probabilidad de ruina es muy pequeña, pero también podemos notar que si el coeficiente de ajuste r es pequeño entonces la cartera o portafolio es muy arriesgada, por lo tanto, concluimos que el límite de la exponencial depende tanto del capital inicial u y de la magnitud de r.

2.5. Modelo de Sparre-Andersen

El modelo de Sparre-Andersen de la teoría de riesgo es un modelo general para el proceso de superávit (proceso de riesgo), donde utiliza el proceso de ocurrencia de las reclamaciones como un proceso de renovación, es decir, los tiempos de inter-arribo no son necesariamente exponenciales.

El modelo de Sparre-Andersen tiene las siguientes características

1. Las reclamaciones ocurren en los momentos T_i donde $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$, conocidos como tiempos de reclamación o tiempo de llegada de las reclamaciones.

2. El proceso del tamaño de las reclamaciones se denota con $\{Y_i\}$ para $i = 0, 1, \ldots$, de tal manera que las $Y_i's$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y no negativas con función de distribución F, media μ y varianza σ^2.

3. Los tamaños de las reclamaciones $\{Y_i\}$ son independientes del proceso de los tiempos de reclamación $\{T_i\}$.

4. Los tiempos de inter-arribo, son los tiempos que transcurren entre dos reclamaciones sucesivas, los cuales son denotados por
$W_1 = T_1, \quad W_k = T_k - T_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots.$

Se define el proceso de ocurrencia de las reclamaciones como

$$N(t) = \text{máx}\{i \geq 1 : T_i \leq t\}, \quad t > 0,$$

donde $N(t)$ es el número de reclamaciones que ocurren hasta el tiempo t, o bien, representa el número de reclamaciones en el intervalo $[0, t]$, entonces, se dice que $\{N(t)\}_{t>0}$ es un proceso de conteo en $[0, \infty)$.

El modelo de Sparre-Andersen define el proceso de excedente de reclamación de la siguente manera.

Definición 2.24. *Sea $S(t)$ un proceso estocástico, se define $S(t)$ como el proceso del monto total de reclamaciones o proceso del monto de reclamaciones agregado o el proceso agregado de siniestros como*

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i I_{[0,t](T_i)}, \quad t \geq 0.$$

Observe cuando $N(t) = 0$ entonces $S(t) = 0$. Se dice que en el proceso agregado de siniestros, la sucesión $\{Y_i\}$ de los tamaños de reclamaciones con función de distribución F es independiente de la sucesión de llegada de las reclamaciones T_n dada por el proceso de renovación.

El siguiente teorema nos permitirá obtener la función de distribución de $S(t)$.

Teorema 2.25. *La función de distribución del proceso $S(t)$ para $t \geq 0$ está dada por*

$$G_{S(t)}(x) = P(S(t) \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x) P(N(t) = n),$$

donde $F^{*n}(x)$ es la distribución de la n-ésima convolución del monto de las reclamaciones.

Demostración.

$$\begin{aligned}
G_{S(t)}(x) &= P(S(t) \leq x) \\
&= P\left(\sum_{i=0}^{N(t)} Y_i \leq x\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\sum_{i=0}^{N(t)} Y_i \leq x | N(t) = n\right) P(N(t) = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\sum_{i=0}^{n} Y_i \leq x\right) P(N(t) = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x) P(N(t) = n).
\end{aligned}$$

□

De lo anterior se puede notar que $S(t)$ es un proceso estocástico compuesto, a continuación se menciona las siguientes propiedades.

Proposición 2.26. *Sea $S(t)$ un proceso estocástico, se dice que $S(t)$ es un proceso compuesto si cumple las siguientes propiedades*

- *E[S(t)]*$=E[N(t)]E[Y]$.
- *Var[S(t)]* $=E[N(t)]\mathit{Var}[Y_i] + \mathit{Var}[N(t)](E[Y_i])^2$.
- $M_{N(t)}(r)=M_{N(t)}(\ln M_{Y_i}(r))$.

Demostración.

- E[S(t)]$=E[\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i]=E[E[\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i|N(t) = n]]=E[N(t)]E[Y]$.
- $\mathrm{Var}[S(t)] = E[N(t)\mathrm{Var}[Y_i]] + \mathrm{Var}[N(t)E[Y_i]^2]$
  $=\mathrm{E}[N(t)]\mathrm{Var}[Y_i]+\mathrm{Var}[N(t)](E[Y_i])^2$.

- $$\begin{aligned} M_{N(t)}(r) =& E[e^{rS(t)}] = E[e^{r\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i}] \\ =& \sum_{j=0}^{\infty} E[e^{r\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i} | N(t) = j] P(N(t) = j) \\ =& \sum_{j=0}^{\infty} E[e^{r\sum_{i=1}^{j} Y_i}] P(N(t) = j) \\ =& \sum_{j=0}^{\infty} E\left[\prod_{i=1}^{j} e^{rY_i}\right] P(N(t) = j) \\ =& M_{N(t)}(\ln M_{Y_i}(r)). \end{aligned}$$

$\square$

Observe que el modelo de Cramér -Lundberg es un caso particular del modelo de Sparre-Andersen, ya que los montos de las reclamaciones siguen una distribución exponencial.

Capítulo 3

Transformada de Laplace en el Modelo Clásico de Ruina

3.1. Introducción

La transformada de Laplace toma su nombre en honor de Pierre Simon Marquéz Laplace, la cual es una técnica utilizada para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Esta técnica no solo es utilizada en el área de las matemáticas sino también en otras ciencias como física, actuaría, electrónica, ingenierías, etc.

La transformada de Laplace está definida en términos de integrales, lo cual facilita la solución de ecuaciones tales como: ecuaciones integro-diferenciales, ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones algebraicas, etc.

En este capítulo se utiliza la técnica de la transformada de Laplace para obtener la probabilidad de ruina en una empresa aseguradora. Esta técnica nos permite obtener la probabilidad de ruina de forma más simple que la obtenida a través de ecuaciones integro-diferenciales del modelo de Cramér-Lundberg.

Otra aportación de este trabajo fue encontrar una expresión que nos permita determinar los momentos de ruina.

Este capítulo inicia con la definición de la transformada de Laplace, se enuncia algunas de sus propiedades que se usarán en el calculo de la probabilidad de ruina, también se define la transformada inversa de Laplace con algunas de sus propiedades y la transformada de una derivada. Esto nos permitirá obtener la probabilidad de ruina de una empresa aseguradora, además, se dan algunos ejemplos utilizando las distribuciones exponencial, Erlang e hiperexponencial para los montos de las reclamaciones. Finalmente, se obtienen los momentos de ruina.

3.2. Transformada de Laplace

Se inicia la sección con la definición de la transformada de Laplace, después con algunas de sus propiedades que nos permitiran obtener la probabilidad de ruina y una expresión que nos permite determinar los momentos de ruina.

Definición 3.1. *Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función integrable para $t \geq 0$. La integral*

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \lim_{\tau \to \infty} \int_0^\tau f(t)e^{-st}dt, \tag{3.1}$$

se llama transformada de Laplace de f, siempre que la integral impropia converja para un valor de s, con $s \in \mathbb{R}$.

Otra forma de denotar a la transfomada de Laplace de $f(t)$ es $\mathcal{L}_{[f]}(s)$. A continuación se enuncian dos definiciones que nos ayudaran a establecer el siguiente resultado.

Definición 3.2. *Se dice que una función $f(t)$ es continua a trozos en $[0, \infty)$ si, en cualquier intervalo $0 \leq \alpha \leq t \leq \beta$ hay, cuando mucho, una cantidad finita de puntos t_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, donde $t_{k-1} < t_k$, en los cuales f tiene discontinuidades y es continua en todo intervalo abierto $t_{k-1} < t < t_k$.*

Definición 3.3. *Sea f una función, se dice que f es de orden exponencial si existen las constantes c, $M > 0$ y $T > 0$ tales que*

$$|f(t)| \leq Me^{ct},$$

para todo $t \geq T$.

Teorema 3.4. *Sea $f(t)$ una función continua a trozos para $t \geq 0$. Si*

$$|f(t)| \leq Me^{ct}, \text{ para todo } t > T, \tag{3.2}$$

para alguna constante c y $T > 0$, entonces $\mathcal{L}[f(t)]$ existe para $s > c$.

Demostración. Suponga que $s > c$, entonces

$$|e^{-st}f(t)| = e^{-st}|f(t)| \leq Me^{-st+ct} = Me^{-t(s-c)}.$$

Por otro lado, al desarrollar la integral se tiene

$$\int_0^\infty e^{-t(s-c)}dt = \lim_{z\to\infty}\int_0^z e^{-t(s-c)}dt \leq \lim_{z\to\infty} M\frac{e^{(z-1)(c-s)}}{c-s} = \frac{M}{c-s}.$$

Por el criterio de comparación de Weierstrass para integrales impropias [12], la integral $\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ es absolutamente convergente, por lo tanto, la transformada de Laplace existe para todo $s > c$. □

Suponga que $f(t)$ cumple las condiciones del Teorema 3.4, entonces la transformada de Laplace cumple lo siguiente.

Proposición 3.5. *Se dice que la transformada de Laplace es lineal, esto es, sean $f(t)$ y $g(t)$ funciones cuyas transformadas de Laplace son $\mathcal{L}[f](s)$ y $\mathcal{L}[g](s)$ respectivamente, entonces se tiene que*

$$\mathcal{L}[\alpha f + \beta g](s) = \alpha\mathcal{L}[f](s) + \beta\mathcal{L}[g](s), \tag{3.3}$$

donde α y β son constantes.

Demostración. Por definición de la transformada se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\alpha f + \beta g](s) &= \int_0^\infty (\alpha f(t) + \beta g(t))\, e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty \alpha f(t)e^{-st}dt + \int_0^\infty \beta g(t)e^{-st}dt \\ &= \alpha\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt + \beta\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt \\ &= \alpha\mathcal{L}[f](s) + \beta\mathcal{L}[g](s).\end{aligned}$$

Esto es lo que se quería probar. □

Proposición 3.6. *(1^{ra} propiedad de traslación) Si a es un número real cualquiera, entonces*

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a),$$

donde $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. A esto se le conoce como desplazamiento de s.

Demostración. De la definición de transformada de Laplace, note que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{at}f(t)] &= \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt\\ &= \int_0^\infty e^{-t(s-a)}f(t)dt\\ &= F(s-a).\end{aligned}$$

Por lo tanto, queda demostrada la proposición. □

Proposición 3.7. *(2^{da} propiedad de traslación) Si $a > 0$ y*

$$g(t)=\begin{cases} f(t-a), & si \quad t > a,\\ 0, & si \quad t < a,\end{cases}$$

entonces $\mathcal{L}[g(t)] = e^{sa}F(s)$, donde $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$.

Demostración. De la definición de la tansformada de Laplace, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[g(t)] &= \int_a^\infty e^{-s(t-a)}f(t-a)dt + \int_0^a e^{-s(t-a)}0dt\\ &= e^{sa}\int_0^\infty e^{-st}f(t-a)dt\\ &= e^{sa}F(s).\end{aligned}$$

□

Observe que la Proposición 3.7 indica el desplazamiento en el tiempo.

Proposición 3.8. *Si $a > 0$ y $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, entonces*

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a}),$$

es conocida como propiedad de cambio de escala.

Demostración. De la definición de la transformada de Laplace, note que

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^\infty e^{-st}f(at)dt.$$

Realizando un cambio de variable con $u = at$ y $du = adt$, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(at)] &= \int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}u} f(u)\frac{1}{a}du \\ &= \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}u} f(u)du = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).\end{aligned}$$

Entonces, se tiene que

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

□

3.3. Transformadas de derivadas e integrales

Nuestro propósito es usar la transformada de Laplace para resolver ciertos tipos de ecuaciones diferenciales. Para tal fin se necesita calcular expresiones como $\mathcal{L}[dy/dt]$ y $\mathcal{L}[d^2y/d^2t]$.

Proposición 3.9. *Si $f(t)$ es una función continua para $t \geq 0$ y de orden exponencial, y $f'(t)$ es continua a trozos para $t \geq 0$, entonces $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$.*

Demostración. Integrando por partes, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'(t)] &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = e^{-st}f(t)|_0^\infty - \int_0^\infty -se^{-st}f(t)dt \\ &= -f(0) + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \\ &= sF(s) - f(0).\end{aligned}$$

□

A la transformada de Laplace de $f'(t)$ se le conoce como la transformada de la derivada [12].

Proposición 3.10. *Si $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ entonces $\mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$.*

Demostración. Sean $u = e^{-st}$ y $dv = f''(t)dt$ entonces $du = -se^{st}dt$ y $v = f'(t)$, integrando por partes se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f''(t)] &= \int_0^\infty e^{-st} f''(t)dt \\
&= e^{-st} f'(t)|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt \\
&= -f'(0) + s\int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt \\
&= -f'(0) + s\mathcal{L}[f'(t)].
\end{aligned}$$

De la Proposición 3.9, se obtiene que

$$\mathcal{L}[f''(t)] = -f'(0) + s^2 F(s) - sf(0).$$

□

En base a lo anterior se enuncia el caso general, de la siguiente manera.

Proposición 3.11. *Si $f(t)$, $f'(t)$, ..., $f^{(n-1)}(t)$ son funciones continuas para $t \geq 0$ y de orden exponencial, y si $f^{(n)}(t)$ es conitnua a trozos para $t \geq 0$, entonces*

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

donde $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$.

Demostración. La demostración es similar a la Proposición 3.10, ver [12]. □

Proposición 3.12. *Para $n = 1, 2, \ldots$, se tiene que*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[t^n f(t)] &= (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}[f(t)] \\
&= (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s),
\end{aligned}$$

donde $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$.

Para su demostración ver [12].

Proposición 3.13. *Sea f una función de t y $g(t) = \int_0^t f(t)dt$ una función continua y de orden exponencial, entonces su transformada de Laplace de $g(t)$ está dada por*

$$\mathcal{L}[g(t)] = G(s) = \frac{1}{s}F(s),$$

está propiedad se conoce como transformada de Laplace de la integral de una función.

Ver demostración en [7].

3.4. Transformada inversa de Laplace y fracciones parciales

En este apartado se estudiará la transformada inversa de Laplace que nos ayudará a invertir el proceso y con ello encontrar una solución sencilla de las ecuaciones, la cual se usará en la mayoría del procedimiento que se llevará a cabo más adelante, así mismo, el uso de la transformada de Laplace para fracciones parciales.

Definición 3.14. *Si la transformada de Laplace de una función $f(t)$ es $F(s)$, es decir, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, entonces a $f(t)$ se le llama transformada inversa de Laplace de $F(s)$, donde $\mathcal{L}^{-1}$ es el operador de la transformada inversa de Laplace, es decir,*

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}_{[f]}(s) = f(t).$$

La transformada inversa de Laplace cumple propiedades similares vistas anteriormente como son; la linealidad, primera propiedad de traslación, segunda propiedad de traslación y cambio de escala, para más detalle ver [7].

A continuación, se define la transformada de Laplace para polinomios que será útil para la aplicación de algunos ejemplos que se desarrollaran más adelante.

Definición 3.15. *Una función f es llamada función racional si se puede expresar como cociente de polinomios, tales que el polinomio del numerador es de un grado menor al del denominador, es decir,*

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

donde $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$ y $Q_m = \sum_{i=0}^{m} \beta_i x^i$ para $n < m$.

Proposición 3.16. *(Fórmula de expansión de Heaviside). Sean $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ polinomios y considere que se tiene una transformada de Laplace racional, dada por*

$$\mathcal{L}(s) = \frac{P_n(s)}{Q_m(s)}.$$

Si $Q_m(x)$ tiene raices distintas de cero denotadas con r_k para $k = 1, \ldots, m$, es decir, $Q_m(r_k) = 0$ entonces

$$\mathcal{L}^{-1}(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{P_n(r_k)}{Q'_m(r_k)} e^{r_k x},$$

Para su demostración ver [12].

Proposición 3.17. *Cuando $f(t)$ es una serie entonces su transformada de Laplace puede calcularse tomando la suma de la transferencia de cada uno de los sumandos de la serie, esto se debe a la propiedad de linealidad, esto es,*

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

entonces,

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \frac{2! a_2}{s^3} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! a_n}{s^{n+1}}.$$

Más detalles ver [7].

Observación 3.18. *Después de estudiar la definición de la función generadora de momentos y la transformada de Laplace, se puede decir que $M_T(-s)$ es precisamente la Transformada de Laplace de una función $f(t)$; esto se puede verificar de la definición de la fgm, es decir,*

$$M_T(-s) = E[e^{-st}] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t).dt = \mathcal{L}[f(t)].$$

Se cumple siempre que la variable aleatoria T sea absolutamente continua con función de densidad de probabilidad f.

3.5. Cálculo de la probabilidad de ruina y no ruina

La importancia de estudiar la probabilidad de no ruina y ruina es porque las instituciones (aseguradoras) deben contar con la solvencia necesaria para hacer frente a sus obligaciones y obtener rendimiento sobre su capital.

Una de las aplicaciones de la teoría de riesgo es determinar la distribución del proceso de superávit.

Así que un elemento de importancia para el funcionamiento de las instituciones aseguradoras es la probabilidad de ruina.

El tiempo de ruina es el primer momento en el que las reservas se hacen negativas, lo cual se expresa como

$$\tau = \text{ínf}\{t > 0 : R(t) < 0\}.$$

De acuerdo con el modelo clásico de riesgo el proceso de las reservas, está dado por

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i,$$

donde $\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ es un Proceso de Poisson Compuesto, por lo que el número de reclamaciones se distribuye con una función de probabilidad de Poisson $(N(t) \sim Poi(\lambda))$.

Usando la Proposición 2.19, donde $f(y)$ es la función de densidad de los montos de las reclamaciones y $F(y)$ la función acumulativa. Aquí se presenta la técnica de la transformada de Laplace que permite obtener la probabilidad de ruina de forma simple, para esto se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.19. *La transformada de Laplace para la probabilidad de ruina, $\psi(u)$, y la probabilidad de no ruina, $\delta(u)$, denotado respectivamente por $\mathcal{L}_{[\psi]}(s)$ y $\mathcal{L}_{[\delta]}(s)$ se expresan como*

$$\mathcal{L}_{[\psi]}(s) = \frac{1}{s} - \frac{c - \lambda\mu}{sc - \lambda\big(1 - \mathcal{L}_{[f]}(s)\big)}, \tag{3.4}$$

$$\mathcal{L}_{[\delta]}(s) = \frac{c - \lambda\mu}{sc - \lambda\big(1 - \mathcal{L}_{[f]}(s)\big)}, \tag{3.5}$$

donde $\mathcal{L}_{[f]}(s) = \int_0^\infty e^{-sy} f(y)dy$.

Demostración. Aplicando la transformada de Laplace en ambos lados de la Proposición 2.19 inciso 1), se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{[\delta']}(s) &= \mathcal{L}\left[\frac{\lambda}{c}\left\{\delta(u) - \int_0^u \delta(u-y)dF(y)\right\}\right](s) \\
&= \mathcal{L}[\frac{\lambda}{c}\delta(u)](s) - \mathcal{L}\left[\frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-y)dF(y)\right](s) \\
&= \frac{\lambda}{c}\left\{\mathcal{L}_{[\delta]}(s) - \mathcal{L}_{[\delta]}(s)\mathcal{L}_{[f]}(s)\right\}.
\end{aligned}$$

Por la Proposición 3.9 sabemos que

$$\mathcal{L}_{[\delta']}(s) = s\mathcal{L}_{[\delta]}(s) - \delta(0).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
s\mathcal{L}_{[\delta]}(s) - \delta(0) &= \frac{\delta}{c}\mathcal{L}_{[\delta]}(s)(1-\mathcal{L}_{[f]}(s)), \\
s\mathcal{L}_{[\delta]}(s) - \mathcal{L}_{[\delta]}(s)\frac{\lambda}{c}\big(1-\mathcal{L}_{[f]}\big) &= \delta(0), \\
\mathcal{L}_{[\delta]}(s)\left(s - \frac{\lambda}{c}\big(1-\mathcal{L}_{[f]}\big)\right) &= \delta(0), \\
\mathcal{L}_{[\delta]}(s)\big(sc - \lambda(1-\mathcal{L}_{[f]}(s))\big) &= c\delta(0).
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\mathcal{L}_{[\delta]}(s) = \frac{c\delta(0)}{sc - \lambda\big(1-\mathcal{L}_{[f]}(s)\big)}.$$

Por otro lado, sabemos que $\delta(u) = 1 - \psi(u)$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{[1]}(s) - \mathcal{L}_{[\psi]}(s) &= \frac{c\big(1-\psi(0)\big)}{sc - \lambda\big(1-\mathcal{L}_{[f]}(s)\big)}, \\
\frac{1}{s} - \mathcal{L}_{[\psi]}(s) &= \frac{c - c\psi(0)}{sc - \lambda\big(1-\mathcal{L}_{[f]}(s)\big)}, \\
\mathcal{L}_{[\psi]}(s) = \frac{1}{s} &- \frac{c - c\frac{\lambda\mu}{c}}{sc - \lambda\big(1-\mathcal{L}_{[f]}(s)\big)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}_{[\psi]}(s) = \frac{1}{s} - \frac{c - \lambda\mu}{sc - \lambda\big(1 - \mathcal{L}_{[f]}(s)\big)},$$

con lo cual se tiene el resultado. □

Observación 3.20. *De la Observación 3.18 se pueden reescribir las ecuaciones 3.4 y 3.5 del Teorema 3.19 como*

$$\mathcal{L}_{[\delta]}(s) = \frac{c - \lambda\mu}{sc - \lambda\big(1 - M_Y(-s)\big)}, \tag{3.6}$$

$$\mathcal{L}_{[\psi]}(s) = \frac{1}{s} - \frac{c - \lambda\mu}{sc - \lambda\big(1 - M_Y(-s)\big)}. \tag{3.7}$$

Ejemplo 3.21. *Una de las aplicaciones de la transformada de Laplace en la probabilidad de ruina es cuando los reclamos siguen una distribución exponencial ($Y_i \sim Exp(\alpha)$), cuya fgm es $M_Y(-s) = \left(1 + \frac{s}{\alpha}\right)^{-1}$, entonces*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{[\delta]}(s) &= \frac{c\delta(0)}{sc - \lambda + \frac{\lambda\alpha}{s+\alpha}} \\
&= \frac{c\delta(0)(s+\alpha)}{(sc-\lambda)(s+\alpha) + \lambda\alpha} \\
&= \frac{c\delta(0)(s+\alpha)}{s^2c - \lambda s + sc\alpha - \lambda\alpha + \lambda\alpha} \\
&= \frac{c\delta(0)(s+\alpha)}{s^2c - \lambda s + sc\alpha} \\
&= \frac{c\delta(0)(s+\alpha)}{cs^2 + (\alpha c - \lambda)s}.
\end{aligned}$$

Utilizando la fórmula general para funciones cuadráticas en el denominador, se obtiene dos raíces $r_1 = 0$ y $r_2 = \frac{\lambda - \alpha c}{c}$, así mismo, usando fracciones parciales se tiene que

$$\mathcal{L}_{[\delta]}(s) = \frac{A_1}{s - r_1} + \frac{A_2}{s - r_2}.$$

Ahora, utilizando la Transformada inversa de Laplace en la anterior ecuación, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\big[\mathcal{L}_{[\delta]}(s)\big] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A_1}{s - r_1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A_2}{s - r_2}\right] \\
&= A_1 e^{r_1 u} + A_2 e^{r_2 u}.
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\delta(u) = A_1 + A_2 e^{r_2 u}. \tag{3.8}$$

Puesto que el $\lim_{u \longrightarrow \infty} \delta(u) = 1$ *y dado que* $r_2 < 0$*, entonces*

$$\lim_{u \longrightarrow \infty} \{A_1 + A_2 e^{r_2 u}\} = A_1,$$

por lo tanto,

$$A_1 = 1.$$

Se puede notar que $\delta(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} = \frac{c-\lambda\mu}{c}$ *y de la ecuación (3.8) se tiene que*

$$\delta(0) = 1 + A_2 e^{r_2 \cdot 0} = 1 + A_2,$$

entonces,

$$\begin{aligned} \frac{c - \lambda\mu}{c} &= 1 + A_2, \\ \frac{c - \lambda\mu}{c} - 1 &= A_2, \\ \frac{-\lambda\mu}{c} &= A_2. \end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo los valores obtenidos de A_1 *y* A_2 *en la ecuación (3.8) se obtiene lo siguiente*

$$\delta(u) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} e^{\frac{\lambda - \alpha c}{c} u}, \tag{3.9}$$

y

$$\psi(u) = \frac{\lambda\mu}{c} e^{\frac{\lambda - \alpha c}{c} u}. \tag{3.10}$$

Ejemplo 3.22. *Cuando la cuantía de siniestros sigue una distribución Erlang con parámetros* n *y* α*, es decir,* $Y_i \sim Erlang(n, \alpha)$*, su fgm de la distribución Erlang es* $M_Y(t) = \left(1 - \frac{t}{\alpha}\right)^{-n}$*. Observe, cuando* $n = 1$ *la fgm es* *la distribución exponencial. Para este ejemplo consideramos a $n = 2$, pero primero verifiquemos que*

$$\mathcal{L}_{[f]}(s) = \left(1 + \frac{s}{\alpha}\right)^{-n} = M_Y(-s).$$

De la definición de la transformada de Laplace se tiene que

$$\mathcal{L}_{[f]}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\alpha^2 x e^{-\alpha x} dx.$$

Integrando por partes se tiene,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{[f]}(s) &= \alpha^2 \left[x \frac{e^{-(s+\alpha)}}{-(s+x)}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-(s+\alpha)x}}{-(s+\alpha)} dx \right] \\
&= \frac{\alpha^2}{(s+\alpha)} \int_0^\infty e^{-(s+\alpha)x} dx = -\frac{\alpha^2}{(s+\alpha)^2} e^{-(s+\alpha)x}\Big|_0^\infty \\
&= \frac{\alpha^2}{(s+\alpha)^2}. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Sustituyendo (3.11) en (3.5) se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{[\delta]}(s) &= \frac{c\delta(0)}{sc + \lambda\left(1 - \frac{\alpha^2}{(s+\alpha)^2}\right)} \\
&= \frac{(c - \lambda\mu)(s+\alpha)^2}{sc(s+\alpha)^2 + \lambda((s+\alpha)^2 - \alpha^2)} \\
&= \frac{s^2(c - \lambda\mu) + 2s(c\alpha - \lambda\mu\alpha) - \alpha^2(c - \lambda\mu)}{s^3 c + s^2(2c\alpha - \lambda) - s(\alpha^2 - 2\lambda\alpha)}.
\end{aligned}$$

Note que es un cociente de polinomios, donde el denominador es un grado más que el numerador entonces se puede obtener 3 raíces, es decir,

$$\begin{aligned}
s^3 c + s^2(2c\alpha - \lambda) - s(\alpha^2 - 2\lambda\alpha) = 0, \\
s\big(s^2 c + s(2c\alpha - \lambda) - (\alpha^2 - 2\lambda\alpha)\big) = 0.
\end{aligned}$$

Entonces, las raíces denotadas con r_k son

$$r_1 = 0, \qquad r_{2,3} = \frac{\lambda - 2c\alpha \pm \sqrt{4c\lambda\alpha + \lambda^2}}{2c}.$$

Utilizando la Proposición 3.16, la transformada inversa de la probabilidad de no ruina es la siguiente

$$\delta(u) = \mathcal{L}^{-1}_{[f]}(s) = \sum_{k=1}^{3} \frac{P_2(r_k)}{Q'_3(r_k)} e^{r_k u}, \tag{3.12}$$

donde,
$P_2(r_k) = r_k^2(c - \lambda\mu) + 2r_k(\alpha c - \lambda\mu\alpha) - \alpha^2(c - \lambda\mu)$, *y*
$Q_3(r_k) = r_k^3 c + r_k^2(2c\alpha - \lambda) + r_k(c\alpha^2 - 2\lambda\alpha)$,
por lo tanto, la derivada es,
$Q'_3(r_k) = 3r_k^2 c + 2r_k(2c\alpha - \lambda) + (c\alpha^2 - 2\lambda\alpha)$.

Desarrollando y sustituyendo las ecuaciones anteriores en (3.12) y simplicando se obtiene que

$$\begin{aligned}\delta(u) =& 1 + \frac{\alpha c\lambda^2 + \lambda\sqrt{4\alpha\lambda c + \lambda^2}(c\alpha - 2\lambda) - 2\lambda^3 + 2c^2\alpha^2\lambda - 4\lambda^2 c}{\lambda^2 c\alpha + c\alpha\sqrt{4c\lambda\alpha + \lambda^2}(\lambda - 2c\alpha) + 4\lambda\alpha^2 c^2} e^{r_2 u} \\ &+ \frac{\alpha c\lambda^2 - \lambda\sqrt{4\alpha\lambda c + \lambda^2}(c\alpha - 2\lambda) - 2\lambda^3 + 2c^2\alpha^2\lambda - 4\lambda^2 c}{\lambda^2 c\alpha - c\alpha\sqrt{4\alpha\lambda c + \lambda^2}(\lambda - 2c\alpha) + 4\lambda\alpha^2 c^2} e^{r_3 u},\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}\psi(u) =& -\frac{\alpha c\lambda^2 + \lambda\sqrt{4\alpha\lambda c + \lambda^2}(c\alpha - 2\lambda) - 2\lambda^3 + 2c^2\alpha^2\lambda - 4\lambda^2 c}{\lambda^2 c\alpha + c\alpha\sqrt{4c\lambda\alpha + \lambda^2}(\lambda - 2c\alpha) + 4\lambda\alpha^2 c^2} e^{r_2 u} \\ &- \frac{\alpha c\lambda^2 - \lambda\sqrt{4\alpha\lambda c + \lambda^2}(c\alpha - 2\lambda) - 2\lambda^3 + 2c^2\alpha^2\lambda - 4\lambda^2 c}{\lambda^2 c\alpha - c\alpha\sqrt{4\alpha\lambda c + \lambda^2}(\lambda - 2c\alpha) + 4\lambda\alpha^2 c^2} e^{r_3 u}.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Ejemplo 3.23. *El monto de las reclamaciones sigue una distribución hiperexponencial, la cual su función de densidad de probabilidad está dada como* $f_X(x) = \sum_{i=1}^{n} f_Y(x)p_i$ *donde* Y_i *es una v.a. distribuida exponencialmente con parámetro* λ_i, p_i *es la probabilidad de que* X *tome la forma de la distribución exponencial con la tasa* λ_j, *por lo tanto, su función generadora de momentos está dada por*

$$M_X(t) = E[e^{tx}] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_i - t} p_i. \tag{3.15}$$

Sustituyendo la fgm en (3.6), se tiene que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{[\delta]}(s) =& \frac{c-\lambda\mu}{sc-\lambda\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda_i+s}p_i\right)}\\
=& \frac{c-\lambda\mu}{sc-\lambda+\lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda_i+s}p_i}\\
=& \frac{\left(c-\lambda\mu\right)\prod_{i=1}^{n}(s+\lambda_i)}{sc\prod_{i=1}^{n}(s+\lambda_i)-\lambda\prod_{i=1}^{n}(s+\lambda_i)+\lambda\sum_{i=1}^{n}\lambda_i p_i\prod_{i\neq j}^{n}(s+\lambda_j)}.
\end{aligned}
$$

Observemos que el denominador tiene una ecuación de grado $n+1$, por lo tanto, tiene $n+1$ raíces denotadas con r_k donde $k=1,\ldots,n+1$, entonces la transformada de la probabilidad de no ruina se puede escribir como una suma de fracciones parciales

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{[\delta]}(s) =& \frac{A_1}{s-r_1}+\frac{A_2}{s-r_2}+\ldots+\frac{A_{n+1}}{s-r_{n+1}}\\
=& \sum_{i=1}^{n+1}\frac{A_i}{s-r_i}.
\end{aligned}
$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace a la ecuación anterior se tiene

$$
\delta(u)=A_1e^{r_1u}+A_2e^{r_2u}+\ldots+A_{n+1}e^{r_{n+1}u}=\sum_{i=1}^{n+1}A_ie^{r_iu}. \tag{3.16}
$$

Para hallar $A_1,\ldots,A_{n+1}$ se consideran las siguientes ecuaciones

$$
\delta(0)=A_1+A_2+\ldots+A_{n+1}=\sum_{i=1}^{n+1}A_i, \tag{3.17}
$$

$$
\delta'(u)=A_1r_1e^{r_1u}+\ldots+A_{n+1}r_{n+1}e^{r_{n+1}u}=\sum_{i=1}^{n+1}A_ir_ie^{r_iu}. \tag{3.18}
$$

Recordemos que $\delta(0) = \frac{c-\lambda\mu}{c}$, entonces tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n+1} A_i = \frac{c-\lambda\mu}{c}.$$

Una vez determinado los valores de $A_1, \ldots, A_{n+1}$, se sustituyen en la ecuación (3.16) obteniendo la ecuación de la probabilidad de no ruina y con ello se puede encontrar la probabilidad de ruina utilizando la igualdad de la Proposición 2.19 inciso 2).

3.6. Fórmula de Pollaczek-Khinchine

En esta sección se estudiará la fórmula Pollaczek-Khinchine, el cual es otro método de encontrar la probabilidad de no ruina y esta relacionada con la transformada de Laplace. La fórmula Pollaczek-Khinchine es usada en el estudio de la teoría de colas.

La fórmula describe la probabilidad de no ruina de una compañía aseguradora, la cual también usa la condición de solvencia $\theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 > 0$ vista en el Capítulo 2. Así mismo, la fórmula de Pollaczek-Khinchine expresa la probabilidad de ruina en términos de una serie infinita de convoluciones y para eso se necesita conocer la transformada de Laplace de una distribución geométrica compuesta, es decir, una variable aleatoria X tiene una distribución geométrica compuesta si

$$X = \sum_{j=1}^{N} U_j,$$

donde $N \sim geo(1-p)$, es decir, para todo $n \geq 0$

$$P(N = n) = p^n(1-p),$$

y las variables $U_1, U_2, \ldots$ son independientes e idénticamente distribuidas y no negativas. Con lo anterior se tiene la siguiente definición.

Definición 3.24. *Sea Z un v.a. con fda F, entonces la integral de la cola de la distribución es definida como*

$$F_Z^s(y) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}_Z(y)dy, \quad x \geq 0, \tag{3.19}$$

donde $\overline{F}_Z(y) = 1 - F(y)$ denota el área de la cola de la distribución F.

Teorema 3.25. *(Fórmula de Pollaczek-Khinchine) Considerando el modelo clásico de riesgo de Cramér-Lundberg, la probabilidad de no ruina para todo $u \geq 0$ está dada por*

$$\delta(u) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n (F_Z^s)^{*n}(u). \tag{3.20}$$

Demostración. Para demostrar el teorema se aplica la transformada de Laplace a la ecuación (3.20)

$$\int_0^{\infty} e^{-su}\delta(u)du = \int_0^{\infty} e^{-su} \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n (F_Z^s)^{*n}(u)du. \tag{3.21}$$

Por la ecuación (3.5), se tiene la siguiente igualdad

$$\frac{c - \lambda\mu}{sc - \lambda(1 - \mathcal{L}_{[f]}(s))} = \int_0^{\infty} e^{-su} \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n (F_Z^s)^{*n}(u)du.$$

Por lo que entonces, basta demostrar que la igualdad anterior se cumple. Integrando por partes la parte derecha de la ecuación (3.6), se tiene que

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} e^{-su} \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \left(F_z^s\right)^{*n}(u)du \\
&= \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \int_0^{\infty} e^{-su} \left(F_z^s\right)^{*n}(u)du \\
&= \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \left[(F_z^s)^{*n}(u) \left(-\frac{1}{s}\right) e^{-su}\Big|_0^{\infty} - \right. \\
&\left. \left(-\frac{1}{s}\right) \int_0^{\infty} e^{-su} d\big[(F_z^s)^{*n}(u)\big]\right] \\
&= \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \left(\frac{1}{s}\right) \int_0^{\infty} e^{-su} d(F_z^s)^{*n} \\
&= \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \left(\frac{1}{s}\right) \int_0^{\infty} e^{-su} d(X_1 + ... + X_n)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\left(1-\frac{\lambda\mu}{c}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n\left(\frac{1}{s}\right)\int_0^{\infty}e^{-su}\big(d(X_1)+d(X_2)+...+d(X_n)\big)\\
&=\left(1-\frac{\lambda\mu}{c}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n\left(\frac{1}{s}\right)\int_0^{\infty}\big(e^{-su}dX_1+e^{-su}dX_2+...+e^{-su}dX_n\big)\\
&=\left(1-\frac{\lambda\mu}{c}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n\left(\frac{1}{s}\right)E\big[exp(-s(X_1+...+X_n))\big]\\
&=\left(1-\frac{\lambda\mu}{c}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n\left(\frac{1}{s}\right)E\big[exp(-sX_1)\big]E\big[exp(-sX_2)\big]\cdots E\big[exp(-sX_n)\big]\\
&=\left(1-\frac{\lambda\mu}{c}\right)\left(\frac{1}{s}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n\mathcal{L}_{[F_Z^s]}(s)\cdots\mathcal{L}_{[F_Z^s]}(s)\\
&=\left(1-\frac{\lambda\mu}{c}\right)\left(\frac{1}{s}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda\mu}{c}\mathcal{L}_{[F_Z^s]}(s)\right)^n\\
&=\left(1-\frac{\lambda\mu}{c}\right)\left(\frac{1}{s}\right)\frac{1}{1-\frac{\lambda\mu}{c}\mathcal{L}_{[F_Z^s]}s}\\
&=\left(\frac{c-\lambda\mu}{c}\right)\left(\frac{c}{s[c-\lambda\mu\mathcal{L}_{[F_Z^s]}s]}\right)\\
&=\frac{c-\lambda\mu}{s[c-\lambda\mu\mathcal{L}_{[F_Z^s]}s]}.
\end{aligned}
$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
s\mu\mathcal{L}_{[F_Z^s]}(s)&=s\mu\int_0^{\infty}e^{-su}d(F_Z^s)(s)\\
&=s\mu\int_0^{\infty}e^{-su}d\left(\frac{1}{\mu}\int_0^u\overline{F}(y)dy\right)\\
&=s\int_0^{\infty}e^{-su}\overline{F}(u)du\\
&=s\int_0^{\infty}e^{-su}(1-F(u))du\\
&=s\int_0^{\infty}e^{-su}du-s\left[-\frac{1}{s}e^{-su}F(u)\Big|_0^{\infty}+\frac{1}{s}\int_0^{\infty}e^{-su}dF(u)\right]
\end{aligned}
$$

$$= 1 - \int_0^\infty e^{-su} dF(u)$$
$$= 1 - \mathcal{L}_{[f]}(s).$$

Por lo tanto,

$$\frac{c - \lambda\mu}{sc - \lambda(1 - \mathcal{L}_{[f]}(s))} = \int_0^\infty e^{-su} \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n (F_Z^s)^{*n}(u) du,$$

mostrando así, el resultado. □

Con lo anterior, se puede resaltar que la transformada de Laplace es una herramienta que transforma una ecuación o integral compleja en una más sencilla, lo que facilita su solución.

3.7. Desigualdad de Lundberg bajo la transformada de Laplace-Stieltjes

En este apartado, se enunciará y demostrará el teorema de Cramér-Lundberg utilizando la transformada de Laplace-Stieltjes; también, usando los teoremas y definiciones de la sección anterior, nos serán de utilidad para la demostración de uno de los teoremas importantes dentro de la teoría de ruina.

La desigualdad de Lundberg se puede considerar una medida de riesgo para la compañía de seguros, cuanto más grande es r, más pequeña es la probabilidad de ruina, donde r se le conoce como coeficiente de ajuste.

Teorema 3.26. *Si existe $r > 0$ tal que*

$$f_I(-r) = \int_0^\infty e^{rx} dF_Z^s(y) = \frac{c}{\lambda\mu} = 1 + \theta, \tag{3.22}$$

es equivalente a que exista una raíz positiva r tal que $M_Z(r) = 1$, donde $Z_k = Y_k - cW_k$.

Demostración. Por la Definición 3.24, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{rx} dF_Z^s(y) &= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{rx}\overline{F}(x)dx \\
&= \frac{1}{r\mu}\left(\overline{F}(x)e^{rx}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{rx}f(x)dx\right) \\
&= \frac{1}{r\mu}\big(M_Y(r)-1\big).
\end{aligned}$$

Entonces de la ecuación (3.22) tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{c}{\lambda\mu} &= \frac{1}{r\mu}\big(M_Y(r)-1\big), \\
\frac{rc}{\lambda} &= M_Y(r)-1, \\
M_Y(r) &= \frac{rc}{\lambda}+1 = \frac{rc+\lambda}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, de la Sección 2.4.1 se sabe que

$$\begin{aligned}
M_Z(r) &= E[e^{Z_k r}] = E[e^{Y_k r - crW_k}] \\
&= M_{Y_k}(r)M_{W_k}(-cr).
\end{aligned}$$

De la ecuación 2.4 se tiene que $M_{W_k}(-cr) = \frac{\lambda}{\lambda+cr}$, entonces

$$\begin{aligned}
M_Z(r) &= M_{Y_k}(r)\left(\frac{\lambda}{\lambda-cr}\right) \\
&= \left(\frac{rc+\lambda}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+cr}\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

A continuación se enuncia un teorema de la teoría de riesgo, el cual establece que existe una cota para la probabilidad de ruina, llamada desigualdad de Lundberg donde se considera el modelo de Cramér-Lundberg y la condición de ganancia neta.

Teorema 3.27. *Suponga que existe $r>0$ tal que se cumple el Teorema 3.26, entonces para todo $u \geq 0$ se tiene que*

$$\psi(u) \leq e^{-ru}.$$

Demostración. Considere la variable aleatoria $Z_k = Y_k - cW_k$ para $k = 0, 1, ...$ la cual tiene una función de distribución $H(z)$, y su función generadora de momentos es

$$M_Z(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sZ} dH(Z) = E[e^{sZ}].$$

Sea $M_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$. Usando la esperanza condicional y el Teorema de la Probabilidad Total, la función generadora de momentos de M_n es

$$\begin{aligned}
E[e^{sM_n}] &= P(\tau \leq n)E[e^{sM_n}|\tau \leq n] + P(\tau > n)E[e^{sM_n}|\tau > n] \\
&= \psi(u,n)E[e^{s(M_n+M_\tau-M_\tau)}|\tau \leq n] + \delta(u,n)E[e^{sM_n}|\tau > n] \\
&= \psi(u,n)\sum_{k=1}^{n} E[e^{s(M_n-M_k)+sM_k)}|\tau = k]P(\tau = k|\tau \leq n) \\
&\quad + \delta(u,n)E[e^{sM_n}|\tau > n] \\
&= \psi(u,n)\sum_{k=1}^{n} E[M_z(s)^{n-k}e^{sM_k})|\tau = k]P(\tau = k|\tau \leq n) \\
&\quad + \delta(u,n)E[e^{sM_n}|\tau > n] \\
&= \psi(u,n)E[M_z(s)^{n-\tau}e^{sM_\tau})|\tau \leq n] + \delta(u,n)E[e^{sM_n}|\tau > n]. \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

Por definición de la función generadora de momentos note que $E[e^{sM_n}] = (M_z(s))^n$, multiplicando $(M_z(s))^{-n}$ en ambos lados de la igualdad (3.23), se tiene que

$$1 = \psi(u,n)E[M_z(s)^{-\tau}e^{sM_\tau})|\tau \leq n] + \delta(u,n)E[e^{sM_n}(M_z(s))^{-n}|\tau > n].$$

Ahora, suponga que si $s = r$, por la Proposición 2.11 se cumple que $M_Z(r) = 1$, el cual se llama coeficiente de ajuste, reemplazando r se tiene que

$$1 = \psi(u,n)E[e^{rM_\tau}|\tau \leq n] + \delta(u,n)E[e^{rM_n}|\tau > n].$$

Observe que la ecuación $\delta(u,n)E[e^{sM_n}|\tau > n] \geq 0$, dejándonos con una desigualdad. Por la definición de τ nos dice que el proceso de riesgo en ese instante de tiempo es negativo, es decir, la diferencia entre los egresos por pago de reclamaciones y los ingresos vía prima es mayor que el capital inicial u, entonces la cantidad M_τ indica el valor de la ruina mayor que u, si reemplazamos $M_\tau = u$, tenemos que

$$\begin{aligned}
1 &\geq \psi(u,n)E[e^{rM_\tau}|\tau \leq n] \\
&\geq \psi(u,n)E[e^{ru}|\tau \leq n] \\
&\geq \psi(u,n)e^{ru}
\end{aligned}$$

de esta desigualdad, se obtiene que

$$\psi(u,n) \leq e^{-ru}.$$

Entonces, como n es un número positivo y $\psi(u) = \lim_{n\to\infty} \psi(u,n)$ ver [4], se tiene que

$$\psi(u) = \lim_{n\to\infty} \psi(u,n) \leq \lim_{n\to\infty} e^{-ru} = e^{-ru}.$$

□

Con la desigualdad de Lundberg se puede decir que la probabilidad de ruina se anula cuando el capital inicial crece a infinito siempre y cuando la desigualdad sea válida. Como hemos visto en la Sección 2.4.1, el coeficiente de ajuste no siempre existe, y aún cuando conozcamos su existencia no siempre es fácil calcularlo [15], por tal razón a continuación se presentan unas cotas para el coeficiente r.

Proposición 3.28. *Si el coeficiente de ajuste r existe para la distribución de probabilidad de las reclamaciones en el modelo de Cramér-Lundberg, entonces*

$$r < \frac{2(c-\lambda\mu)}{\lambda\mu_2}.$$

Demostración. Sabemos que

$$\begin{aligned} M_Z &= E[e^{r(Y-cW)}] \\ &= E[e^{rY}]E[e^{rcW}] \\ &= M_Y(r)M_{cW}(-r) \\ &= M_Y(h)\left(\frac{\lambda}{\lambda-cr}\right) = 1. \end{aligned}$$

Recordemos que la condición de ganancia neta está dada por $c = (1+\theta)\lambda p_1$, donde $p_1 = \mu = E(Y)$, entonces sustituyendo $c = (1+\theta)\lambda\mu$ en la anterior igualdad y despejando tenemos

$$\begin{aligned} M_Y(r)\left(\frac{\lambda}{\lambda+(1+\theta)\lambda p_1 r}\right) &= 1, \\ \lambda M_Y(r) &= \lambda + (1+\theta)\lambda\mu r, \\ \lambda M_Y(r) &= \lambda(1+(1+\theta)\mu r), \\ M_Y(r) &= 1+(1+\theta)\mu r. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Note que el ingreso de las primas es un múltiplo de la tasa de reclamos λ, el coeficiente de ajuste r es independiente de λ. La función generadora de momentos de Y se puede desarrollar de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
M_Y(r) &= \int e^{ry} f_Y(y)dy \\
&\geq \int_0^\infty \left[1 + ry + \frac{r^2y^2}{2}\right] f_Y(y)dy \\
&= 1 + rE(Y) + \frac{r^2E(Y^2)}{2}. && (3.25) \\
&= 1 + r\mu + \frac{r^2\mu_2}{2}. && (3.26)
\end{aligned}
$$

Sustituyendo (3.26) en la ecuación (3.24) y despejando tenemos

$$
\begin{aligned}
1 + r\mu + \frac{r^2\mu_2}{2} &\geq 1 + (1+\theta)\mu r, \\
r\mu + \frac{r^2\mu_2}{2} &\geq (1+\theta)\mu r,
\end{aligned}
$$

multiplicando por $(\mu r)^{-1}$ se obtiene que

$$
\begin{aligned}
1 + \frac{r\mu_2}{2\mu} &\leq 1 + \theta, \\
r &\leq \frac{2\theta\mu}{\mu_2}.
\end{aligned}
$$

Sustituyendo $\theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1$ se tiene que

$$
r < \frac{2(c - \lambda\mu)}{\lambda\mu_2}. \tag{3.27}
$$

Con lo anterior se puede decir que hay un límite superior que no depende de λ para el coeficiente de ajuste r. De hecho, la ecuación del lado derecho de la desigualdad (3.27) es una aproximación de r cuando r es muy pequeña.

□

3.8. Transformada del momento de ruina

El evento de sufrir una pérdida menor a cierta cantidad específica puede ocurrir de distintas maneras, una es que no ocurran ningún siniestro, otra es que ocurra solo un reclamo cuyo monto es menor a la cantidad especificada, también que ocurra dos siniestros cuya suma de los montos sea menor a la cantidad determinada y así sucesivamente, pueden ocurrir un gran número de siniestros siempre y cuando la suma sea menor a la cantidad especificada.

Sin embargo, es de interés analizar la variable momento de ruina en una empresa aseguradora considerando el riesgo de siniestralidad.

En esta sección se plantea la obtención de la transformada de Laplace del momento de ruina ϕ, si los tiempos de inter-ocurrencia entre dos siniestros consecutivos siguen una distribución exponencial y Erlang.

Definición 3.29. *Sea $\phi_\delta(u)$ una función que cumple las condiciones del modelo clásico de Cramér-Lundberg, definida como*

$$\phi_\delta(u) = E[e^{-\delta\tau} \cdot I_{(\tau<\infty)}], \tag{3.28}$$

donde $I_{(\tau<\infty)}$ es la función indicadora, que es igual a 1 cuando ocurre la ruina y 0 para otros casos, es decir,

$$I_{(\tau<\infty)} = \begin{cases} 1, & si \quad \tau < \infty, \\ 0, & si \quad \tau = 0. \end{cases}$$

La función $\phi_\delta(u)$ se puede interpretar de diferentes maneras. En [7] interpreta la función $\phi_\delta(u)$ como el valor esperando de la función de penalizacion descontada, definida como

$$\phi_\delta(u) = E\big[w\big(R(\tau-), |R(\tau)|\big)e^{-\delta\tau} \cdot I_{(\tau<\infty)}\big],$$

donde $R(\tau-)$ es el superávit antes de la ruina y $R(\tau)$ es el superávit en la ruina. Cuando la función de penalización es de una unidad monetaria, es decir, $w(R(\tau-), |R(\tau)|) = 1$, se obtiene la función 3.28.

Otra interpretación que se le da a la función $\phi_\delta(u)$ es; el valor esperado del valor actual de una unidad monetaria que se hace efectiva en el instante de ruina, donde δ es la tasa financiera o la fuerza de interés [3].

O bien, en el contexto de la transformada se interpreta como la transformada de Laplace del momento de ruina, donde τ es el momento de ruina y δ es el parámetro de la transformada. Es de nuestro interés utilizar ésta última interpretacion.

Note que cuando $\delta = 0$,

$$\phi_0(u) = \psi(u),$$

más detalle ver [7].

Para encontrar $\phi_\delta(u)$ se usa la técnica de condicionar sobre el primer momento y el monto de la primera reclamación, teniendo en cuenta la variable δ, se tiene que

$$\begin{aligned}\phi_\delta(u) = &\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} e^{-\delta t} \int_0^{u+ct} p(x)\phi_\delta(u+ct-x)dxdt \\ &+ \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} e^{-\delta t} \int_{u+ct}^\infty p(x)dxdt.\end{aligned}$$

Usando el cambio de variable $s = u + ct$, $\quad ds = cdt$, entonces

$$\begin{aligned}\phi_\delta(u) =&\frac{\lambda}{c}\int_u^\infty e^{-(\lambda+\delta)\frac{s-u}{c}} \int_0^s p(x)\phi_\delta(s-x)dxds \\ &+ \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty e^{-(\lambda+\delta)\frac{s-u}{c}} \int_s^\infty p(x)dxds \\ =&\frac{\lambda}{c}e^{\frac{(\lambda+\delta)u}{c}}\Big[\underbrace{\int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)s}{c}} \int_0^s p(x)\phi_\delta(s-x)dxds + \int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)s}{c}} \int_s^\infty p(x)dxds}_{A}\Big]\end{aligned} \tag{3.29}$$

Despejando A se tiene que

$$A = \phi_\delta(s)\frac{c}{\lambda}e^{-\frac{(\lambda+\delta)u}{c}}. \tag{3.30}$$

Derivando A con respecto a u de la ecuación (3.29) se obtiene que

$$\frac{d}{du}A = e^{-\frac{(\lambda+\delta)u}{c}}\left(-\int_0^u p(x)\phi_\delta(u-x)dx - \int_u^\infty p(x)dx\right) \tag{3.31}$$

Por otro lado, observe la derivada de A con respecto a u de la ecuación (3.30) es

$$\frac{d}{du}A = \frac{c}{\lambda}e^{-\frac{(\lambda+\delta)u}{c}}\left(\phi_\delta'(u) - \frac{\lambda+\delta}{c}\phi_\delta(u)\right) \tag{3.32}$$

Igualando la ecuación (3.31) y (3.32), se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{c}{\lambda}e^{-\frac{(\lambda+\delta)u}{c}}\left(\phi_\delta'(u) - \frac{\lambda+\delta}{c}\phi_\delta(u)\right) =& e^{-\frac{(\lambda+\delta)u}{c}}\left(-\int_0^u p(x)\phi_\delta(u-x)dx\right.\\
&\left.-\int_u^\infty p(x)dx\right)\\
&= e^{-\frac{(\lambda+\delta)u}{c}}\left(-\int_0^u p(x)\phi_\delta(u-x)dx - 1\right.\\
&\left.+\int_0^u p(x)dx\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\phi_\delta(u) = \frac{\lambda}{\lambda+\delta}\left[\int_0^u p(x)\phi_\delta(u)dx + 1 - \int_0^u p(x)dx + \frac{c}{\lambda}\phi_\delta'(u)\right]. \tag{3.33}$$

Usando la transformada de Laplace se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{[\phi_\delta]}(s) =& \frac{\lambda}{\lambda+\delta}\left[\mathcal{L}\left(\int_0^u p(x)\phi_\delta(u-x)dx\right) + \mathcal{L}(1) - \mathcal{L}\left(\int_0^u p(x)dx\right)\right.\\
&\left.+\frac{c}{\lambda}\mathcal{L}[\phi_\delta'(u)]\right].
\end{aligned}$$

Utilizando las propiedades de la transformada de Laplace, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{[\phi_\delta]}(s) =& \frac{\lambda}{\lambda+\delta}\left[\mathcal{L}_{[f]}(s)\mathcal{L}_{[\phi_\delta]}(s) + \frac{1}{s} - \frac{\mathcal{L}_{[f]}(s)}{s} + \frac{c}{\lambda}\mathcal{L}_{[\phi_\delta']}(s)\right]\\
=& \frac{\lambda}{\lambda+\delta}\mathcal{L}_{[f]}(s)\mathcal{L}_{[\phi_\delta]}(s) + \frac{\lambda}{s(\lambda+\delta)} - \frac{\lambda}{s(\lambda+\delta)}\mathcal{L}_{[f]}(s) + \frac{cs}{\lambda+\delta}\mathcal{L}_{[\phi_\delta]}(s)\\
&- \frac{c}{\lambda+\delta}\mathcal{L}_{[\phi_\delta]}(0).
\end{aligned}$$

Despejando y agrupando en la anterior ecuación se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{[\phi_\delta]}(s)\left[1-\frac{\lambda}{\lambda+\delta}\mathcal{L}_{[f]}(s)-\frac{cs}{\lambda+\delta}\right] =& \frac{\lambda}{s(\lambda+\delta)}-\frac{\lambda}{s(\lambda+\delta)}\mathcal{L}_{[f]}(s)\\
&-\frac{c}{\lambda+\delta}\mathcal{L}_{[\phi_\delta]}(0),\\
\mathcal{L}_{[\phi_\delta]}(s)\left[s(\lambda+\delta)-\lambda\mathcal{L}_{[f]}(s)-cs\right] =& \lambda-\lambda\mathcal{L}_{[f]}(s)-cs\mathcal{L}_{[\phi_\delta]}(0).
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\mathcal{L}_{[\phi_\delta]}(s)=\frac{\lambda-\lambda\mathcal{L}_{[f]}(s)-cs\mathcal{L}_{[\phi_\delta]}(0)}{s(\lambda+\delta)-s\lambda\mathcal{L}_{[f]}(s)-cs^2}. \tag{3.34}$$

De esta forma, si solucionamos cada expresión con su correspondiente transformada inversa de Laplace se encontrará la función de densidad de la variable que se esta estudiando, esto es,

$$\phi_\delta(u)=E[e^{-\delta\tau}]=\int_0^\infty e^{-\delta\tau}f(\tau)d\tau=F(\delta),$$

donde $f(\tau)$ es la función de densidad para el momento de ruina, la cual se quiere determinar.

Note que la transformada de Laplace del momento de ruina está denotada como $F(\delta)$, entonces, su transformada inversa de Laplace está dada por $\mathcal{L}^{-1}[F(\delta)]$, esto es,

$$\mathcal{L}^{-1}[\phi_\delta(u)]=f(\tau).$$

Con lo anterior se puede encontrar los momentos de orden k-ésimo, es decir, $p_k=E[\tau^k]$, para el momento de ruina. Por el Teorema 1.26 se tiene que

$$E[\tau^k]=(-1)^k\phi_{\delta=0}^{(k)}(u), \tag{3.35}$$

esto es, la n-ésima derivada de $\phi_\delta(u)$ cuando $\delta=0$ es $E[\tau^k]$.

A continuación, se determina la expresión que nos permitirá encontrar los momentos de ruina para cada uno de los ejemplos dados en la sección (3.5).

Ejemplo 3.30. *En el ejemplo (3.21) recordemos que el monto de reclamaciones se distribuían como una exponencial con parámetro α y $\mathcal{L}_{[f]}(s)=\frac{\alpha}{s+\alpha}$, entonces la transformada del momento de ruina, está dada por*

$$\mathcal{L}_{[\phi_\delta]}(s) = \frac{c\mathcal{L}_{[\phi_\delta]}(0)(s+\alpha) - \lambda}{cs^2 - s(\lambda+\delta-c\alpha) - \alpha\delta}, \tag{3.36}$$

siendo $cs^2 - s(\lambda+\delta-c\alpha) - \alpha\delta = 0$, *la ecuación característica de Lundberg y sus raíces son,*

$$\begin{aligned} r_1 =& \frac{\lambda+\delta-c\alpha+\sqrt{(\lambda+\delta-c\alpha)^2+4c\alpha\delta}}{2c}, \\ r_2 =& \frac{\lambda+\delta-c\alpha-\sqrt{(\lambda+\delta-c\alpha)^2+4c\alpha\delta}}{2c}. \end{aligned}$$

Expresando la transformada del momento de ruina en fracciones parciales queda de la siguiente manera

$$\mathcal{L}_{[\phi_\delta]}(s) = \frac{A_1}{s+r_1} + \frac{A_2}{a+r_2}.$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace, se tiene que

$$\phi_\delta(u) = A_1 e^{r_i u} + A_2 e^{r_2 u}. \tag{3.37}$$

De la ecuación (3.33) se tiene que

$$\phi_\delta(u) = \frac{\lambda}{\lambda+\delta}\left[\int_0^u \alpha e^{-\alpha x}\phi_\delta(u-x)dx + 1 - \int_0^u \alpha e^{-\alpha x}dx + \frac{c}{\lambda}\phi'_\delta(u)\right].$$

Integrando y desarrollando la ecuación anterior se tiene

$$\begin{aligned} \phi_\delta(u) =& \frac{\lambda}{\lambda+\delta}\left[\frac{\alpha A_1 e^{r_1 u}}{\alpha+r_1} - \frac{\alpha A_1 e^{-\alpha u}}{\alpha+r_1} - \frac{\alpha A_2 1 e^{-\alpha u}}{\alpha+r_2} + \frac{\alpha A_2 e^{r_2 u}}{\alpha+r_2} + e^{-\alpha u}\right. \\ & \left. + \frac{c}{\alpha}A_1 r_1 e^{r_1 u} + \frac{c}{\alpha}A_2 r_2 e^{r_2 u}\right]. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Igualando las ecuaciones (3.37) y (3.38) se tiene

$$\begin{aligned} A_1 e^{r_i u} + A_2 e^{r_2 u} =& \frac{\lambda}{\lambda+\delta}\left[\frac{\alpha A_1 e^{r_1 u}}{\alpha+r_1} - \frac{\alpha A_1 e^{-\alpha u}}{\alpha+r_1} - \frac{\alpha A_2 1 e^{-\alpha u}}{\alpha+r_2} + \frac{\alpha A_2 e^{r_2 u}}{\alpha+r_2} + e^{-\alpha u}\right. \\ & \left. + \frac{c}{\alpha}A_1 r_1 e^{r_1 u} + \frac{c}{\alpha}A_2 r_2 e^{r_2 u}\right]. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Agrupando y simplificando la ecuación (3.36), se obtiene que

$$\frac{A_1}{\alpha + r_1} + \frac{A_2}{\alpha + r_2} = \frac{1}{\alpha}. \tag{3.40}$$

Para encontrar los valores de A_1 *y* A_2*, recordemos que* $\phi_{\delta=0}(u) = \psi(u)$ *entonces de la ecuación (3.37) cuando* $\delta = 0$ *se tiene*

$$\phi_{\delta=0}(u) = A_1 e^{\frac{\lambda - c\alpha}{c}u} + A_2. \tag{3.41}$$

Ahora, de la ecuación (3.10) e igualándola con la ecuación (3.41) se obtiene A_2*, es decir,*

$$\begin{aligned} A_1 e^{\frac{\lambda - c\alpha}{c}u} + A_2 &= \frac{\lambda\mu}{c} e^{\frac{\lambda - \alpha c}{c}u}, \\ A_2 &= \frac{\lambda\mu}{c} e^{\frac{\lambda - \alpha c}{c}u} - A_1 e^{\frac{\lambda - c\alpha}{c}u}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Ahora, para encontrar el valor de A_1 *se sustituye (3.42) en (3.40) y despejando* A_1*, se tiene*

$$A_1 = \frac{\lambda\alpha - \lambda e^{\frac{\lambda - c\alpha}{c}u}(\alpha + r_1)}{c\alpha\left((\alpha + r_2) - (\alpha + r_1)e^{\frac{\lambda - c\alpha}{c}u}\right)}. \tag{3.43}$$

Encontrado el valor de A_1*, ahora se reemplaza en la ecuación (3.42) para encontrar a* A_2*, simplificando se llega a que*

$$A_2 = e^{\frac{\lambda - \alpha c}{c}u}\left(\frac{\lambda r_2}{c\alpha\left((\alpha + r_2) - (\alpha + r_1)e^{\frac{\lambda - c\alpha}{c}u}\right)}\right). \tag{3.44}$$

Por último, se sustituye las ecuaciones (3.43) y (3.44) en (3.37)

$$\phi_\delta(u) = \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{\alpha e^{r_1 u} - (\alpha + r_1)e^{\left(\frac{\lambda - c\alpha}{c} + r_1\right)u} + r_2 e^{\left(\frac{\lambda - c\alpha}{c} + r_2\right)u}}{\alpha\left((\alpha + r_2) - (\alpha + r_1)e^{\frac{\lambda - c\alpha}{c}u}\right)}. \tag{3.45}$$

La ecuación anterior se deriva con respecto a δ*, luego se evalua en* 0 *para encontrar los momentos de ruina.*

Ejemplo 3.31. *En este ejemplo se encontrará la expresión para determinar los momentos de ruina, cuando los montos de reclamaciones siguen una distribución Earlang con parámetros 2 y α, $Y_i \sim Erlang(2,\alpha)$. Recordando la transformada de Laplace para la función de densidad de dicha distribución está dada como*

$$\mathcal{L}_{[f]}(s) = \left(\frac{\alpha}{\alpha+s}\right)^n. \tag{3.46}$$

Sustituyendo (3.46) en (3.37), desarrollando y simplificando se tiene la transformada del momento de ruina

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\phi_\delta}(s) =& \frac{\lambda - \lambda\left(\frac{\alpha}{\alpha+s}\right)^2 - cs\mathcal{L}_{\phi_\delta}(0)}{s(\lambda+\delta) - s\lambda\left(\frac{\alpha}{\alpha+s}\right)^2 - cs^2} \\ =& \frac{\lambda(\alpha+s)^2 - \lambda\alpha^2 - cs\mathcal{L}_{\phi_\delta}(0)(\alpha+s^2)}{s^4 - s^3(\lambda+\delta-2\alpha c) - s^2\alpha(2\lambda+2\delta-c\alpha) - s\delta\alpha^2} \\ =& \frac{\lambda(2\alpha+s^2) - c\mathcal{L}_{\phi_\delta}(0)(\alpha+s^2)}{s^3c - s^2(\alpha+\delta-2\alpha c) + s\alpha(2\lambda+2\delta-c\alpha) - s\delta\alpha^2}.\end{aligned}$$

Para encontrar una solución de la fraccion anterior, el denominador se iguala a cero, es decir, $s^3c - s^2(\alpha+\delta-2\alpha c) + s\alpha(2\lambda+2\delta-c\alpha) - s\delta\alpha^2 = 0$, por lo que la ecuación tiene 3 raíces, r_1, r_2 y r_3. Entonces, la transformada del momento de ruina se expresa en forma de fracciones parciales

$$\mathcal{L}_{\phi_\delta}(s) = \frac{A_1}{s-r_1} + \frac{A_2}{s-r_2} + \frac{A_3}{s-r_3}.$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace a la ecuación anterior, se tiene

$$\phi_\delta(u) = A_1e^{r_1u} + A_2e^{r_2u} + A_3e^{r_3u}. \tag{3.47}$$

Derivando el momento de ruina con respecto a u, se obtiene

$$\phi'_\delta(u) = A_1r_1e^{r_1u} + A_2r_2e^{r_2u} + A_3r_3e^{r_3u}. \tag{3.48}$$

Para hallar los valores de A_1, A_2 y A_3, se sabe que

$$
\begin{aligned}
\phi_\delta(u) =&\frac{\alpha}{\alpha+s}\left[\frac{c}{\lambda}\phi_\delta'(u)+\int_0^u \alpha^2 x e^{-\alpha x}+1-\int_0^u x\alpha^2 e^{-\alpha x}dx\right]\\
=&\frac{\alpha}{\alpha+s}\Big[\frac{c}{\lambda}\big(A_1r_1e^{r_1u}+A_2r_2e^{r_2u}+A_3r_3e^{r_3u}\big)+\int_0^u \big(A_1e^{r_1u}+A_2e^{r_2u}\\
&+A_3e^{r_3u}\big)\alpha^2xe^{-\alpha x}dx+1-\alpha^2\int_0^u xe^{-\alpha x}dx\Big]\\
=&\frac{c}{\lambda+\delta}\big(A_1r_1e^{r_1u}+A_2r_2e^{r_2u}+A_3r_3e^{r_3u}\big)-\frac{\lambda}{\lambda+\delta}\Big[\frac{A_1\alpha^2ue^{-\alpha u}}{\alpha+r_1}\\
&+\frac{A_1\alpha^2e^{-\alpha u}}{(\alpha+r_1)^2}+\frac{A_1\alpha^2e^{-r_1u}}{(\alpha+r_1)^2}+\frac{A_2\alpha^2ue^{-\alpha u}}{\alpha+r_2}+\frac{A_2\alpha^2e^{-\alpha u}}{(\alpha+r_2)^2}+\frac{A_2\alpha^2e^{-r_2u}}{(\alpha+r_2)^2}\\
&+\frac{A_3\alpha^2ue^{-\alpha u}}{\alpha+r_3}+\frac{A_3\alpha^2e^{-\alpha u}}{(\alpha+r_3)^2}+\frac{A_3\alpha^2e^{-r_3u}}{(\alpha+r_3)^2}+e^{-\alpha u}(u\alpha+1)\Big]. \qquad (3.49)
\end{aligned}
$$

Igualando (3.47) y (3.31) se tiene

$$
\begin{aligned}
A_1e^{r_1u}+A_2e^{r_2u}+A_3e^{r_3u} = &\frac{c}{\lambda+\delta}\big(A_1r_1e^{r_1u}+A_2r_2e^{r_2u}+A_3r_3e^{r_3u}\big)-\frac{\lambda}{\lambda+\delta}\\
&\Big[\frac{A_1\alpha^2ue^{-\alpha u}}{\alpha+r_1}+\frac{A_1\alpha^2e^{-\alpha u}}{(\alpha+r_1)^2}+\frac{A_1\alpha^2e^{-r_1u}}{(\alpha+r_1)^2}+\frac{A_2\alpha^2ue^{-\alpha u}}{\alpha+r_2}\\
&+\frac{A_2\alpha^2e^{-\alpha u}}{(\alpha+r_2)^2}+\frac{A_2\alpha^2e^{-r_2u}}{(\alpha+r_2)^2}+\frac{A_3\alpha^2ue^{-\alpha u}}{\alpha+r_3}+\frac{A_3\alpha^2e^{-\alpha u}}{(\alpha+r_3)^2}\\
&+\frac{A_3\alpha^2e^{-r_3u}}{(\alpha+r_3)^2}+e^{-\alpha u}(u\alpha+1)\Big].
\end{aligned}
$$

Si simplificamos se tiene que

$$
\begin{aligned}
0 =&\frac{\lambda}{\lambda+\delta}e^{-\alpha u}\left[-\sum_{i=1}^{3}\frac{A_i\alpha^2u}{\alpha+r_i}-\sum_{i=1}^{3}\frac{A_i\alpha^2}{(\alpha+r_i)^2}+u\alpha+1\right],\\
1 =&\sum_{i=1}^{3}\frac{A_i\alpha^2u}{\alpha+r_i}+\sum_{i=1}^{3}\frac{A_i\alpha^2}{(\alpha+r_i)^2}+u\alpha,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
1 =&\alpha^2\left[\sum_{i=1}^{3}\frac{A_i\alpha^2 u}{\alpha+r_i}+\sum_{i=1}^{3}\frac{A_i\alpha^2}{(\alpha+r_i)^2}\right]-u\alpha,\\
0 =&u\alpha\left[\sum_{i=1}^{3}\frac{A_1\alpha}{\alpha+r_i}-1\right]+\left[\sum_{i=1}^{3}\frac{\alpha^2A_1}{(r_i+\alpha)^2}-1\right]. \qquad (3.50)
\end{aligned}$$

Por otro lado, se sabe que $\phi_{\delta=0}(u)=\psi(u)$, entonces se tiene que

$$\phi_{\delta=0}(u)=A_1+A_2e^{\frac{\lambda-2\alpha c+\sqrt{\lambda^2-12\alpha c\lambda+8\alpha^2c^2}}{2c}u}+A_3e^{\frac{\lambda-2\alpha c-\sqrt{\lambda^2-12\alpha c\lambda+8\alpha^2c^2}}{2c}u}. \qquad (3.51)$$

Igualando (3.51) y (3.14) se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
pe^{\frac{\sqrt{2c\alpha\lambda+\lambda^2}}{2c}u}+qe^{-\frac{\sqrt{2c\alpha\lambda+\lambda^2}}{2c}u} =&A_1e^{-\frac{\lambda-2\alpha c}{2c}u}+A_2e^{\frac{\sqrt{\lambda^2-12\alpha c\alpha+8\alpha^2c^2}}{2c}u}\\
&+A_3e^{-\frac{\sqrt{\lambda^2-12\alpha c\alpha+8\alpha^2c^2}}{2c}u}, \qquad (3.52)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
p&=-\frac{\alpha c\lambda^2+\lambda\sqrt{4\alpha\lambda c+\lambda^2}(c\alpha-2\lambda)-2\lambda^3+2c^2\alpha^2\lambda-4\lambda^2c}{\lambda^2c\alpha+c\alpha\sqrt{4c\lambda\alpha+\lambda^2}(\lambda-2c\alpha)+4\lambda\alpha^2c^2},\\
q&=-\frac{\alpha c\lambda^2-\lambda\sqrt{4\alpha\lambda c+\lambda^2}(c\alpha-2\lambda)-2\lambda^3+2c^2\alpha^2\lambda-4\lambda^2c}{\lambda^2c\alpha-c\alpha\sqrt{4\alpha\lambda c+\lambda^2}(\lambda-2c\alpha)+4\lambda\alpha^2c^2}.
\end{aligned}$$

De la ecuación (3.50) y (3.52) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones, el cual nos servirá para hallar A_1, A_2 y A_3.

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{A_i\alpha}{\alpha+r_i}=1, \qquad (3.53)$$

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\alpha^2A_i}{(r_i+\alpha)^2}=1, \qquad (3.54)$$

$$\begin{aligned}
pe^{\frac{\sqrt{2c\alpha\lambda+\lambda^2}}{2c}u}+qe^{-\frac{\sqrt{2c\alpha\lambda+\lambda^2}}{2c}u} =&A_1e^{-\frac{\lambda-2\alpha c}{2c}u}+A_2e^{\frac{\sqrt{\lambda^2-12\alpha c\alpha+8\alpha^2c^2}}{2c}u}\\
&+A_3e^{-\frac{\sqrt{\lambda^2-12\alpha c\alpha+8\alpha^2c^2}}{2c}u}. \qquad (3.55)
\end{aligned}$$

Después de encontrar los valores de A_1, A_2 y A_3, se sustituye los valores en la ecuación (3.47) obteniendo la transformada del momento de ruina cuando el monto de reclamaciones sigue una distribución $Erlang(2,\alpha)$.

Capítulo 4

Aplicación numérica

Dado que no se puede presentar una base de datos reales ya que las aseguradoras dicen proteger sus datos. En este capítulo se presenta una aplicación numérica con diferentes valores para los parámetros correspondientes al tamaño de reclamaciones y el monto total de las reclamaciones, donde éstas últimas siguen las distribuciones tales como; exponencial, Erlang e hiperexponencial.

4.1. Distribución exponencial

Se considera el caso de una distribución del monto de reclamación como una exponencial con parámetro $\alpha = 0.5$ entonces su media es $\mu = 2$, una tasa de ingreso vía prima de $c = 2.1$ y $\lambda = 1$ que es el parámetro de la distribución del número de reclamaciones, entonces de (3.10) se tiene que la probabilidad de ruina es

$$\psi(u) = 0.952381e^{\frac{1-2.1\alpha}{2.1}}u$$

En la Figura 4.1 se ilustra el comportamiento de la probabilidad de ruina con diferentes valores de capital inicial u, en el cual se puede observar que entre más grande sea nuestro capital inicial nuestra probabilidad de que el portafolio se vaya a la ruina es cada vez más pequeña.

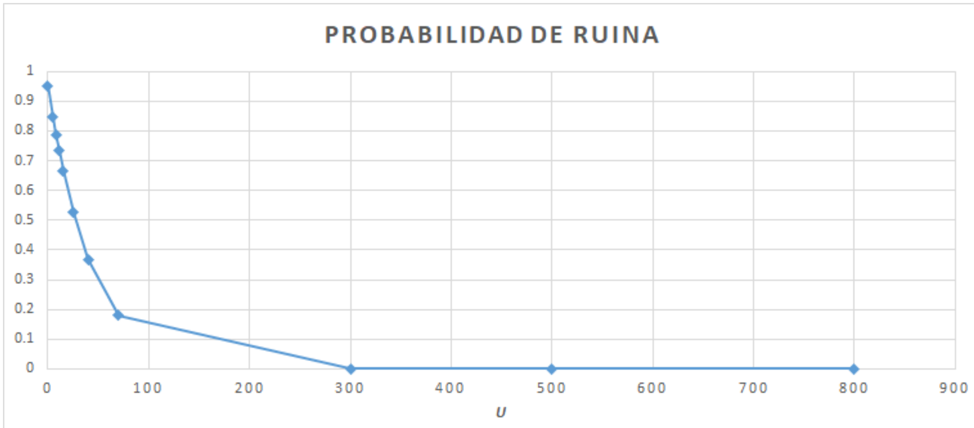

Figura 4.1: Probabilidad de ruina con reclamaciones exponenciales

Enseguida en el Tabla 1 se observa el comportamiento de la probabilidad de ruina con los mismos parámetros tanto en la prima y el número de reclamaciones, c y λ, excepto cuando la cuantía de los reclamos es distinta, es decir, para cuando $\alpha = 0.5$, 1, 1.8, 0.8, 2.3, 3.5.

Tabla 1: Probabilidad de ruina para cualquier valor de α.

u \ α	0.5	1	1.8	0.8	2.3	3.5
0	0.952380952	0.476190476	0.264550265	0.595238095	0.207039337	0.136054422
5	0.845490976	0.034701063	0.000353096	0.117909086	2.2683E-05	3.69482E-08
8	0.787205179	0.007209083	6.65461E-06	0.044633527	9.53871E-08	4.24544E-12
11	0.732937442	0.001497674	1.25416E-07	0.016895659	4.01124E-10	4.8781E-16
15	0.666354798	0.000184275	6.29014E-10	0.004626583	2.72268E-13	2.72493E-21
25	0.525172626	9.78568E-07	1.12054E-15	0.00018154	3.26808E-21	2.00964E-34
40	0.367448864	3.78684E-10	2.66429E-24	1.41105E-06	4.2977E-33	4.02496E-54
70	0.179881527	5.67087E-17	1.50621E-41	8.52477E-11	7.43231E-57	1.61453E-93
300	0.000752848	2.70088E-69	8.8218E-174	3.85553E-43	4.9537E-239	0
500	6.43633E-06	8.5899E-115	9.1395E-289	2.88633E-71	0	0
800	5.08786E-09	4.8721E-183	0	1.8696E-113	0	0

Note que cuando α es pequeña, el capital inicial se acerca a cero y cuando la condición de ganancia neta se cumple, esto es, $c > \lambda\mu$, pero la diferencia entre c y $\lambda\mu$ es insignificante, la probabilidad que ocurra la ruina es aproximadamente 1. Por otro lado, entre más grande sea el valor de α aunque el capital inicial es pequeño, la probabilidad de que ocurra la ruina se aproxima a 0.

En el Tabla 2 se presenta la probabilidad de ruina cuando los parámetros son distintos.

Tabla 2: Probabilidad de ruina con diferentes parámetros.

u	λ	μ	α	c	$\psi(u)$
2	1	2	0.5	2.1	0.908092338
45	2	5	0.2	10.5	0.62041815
10	3	1.25	0.8	4	0.568622493
85	4	2	0.5	9	0.007907012
10	5	1.4285	0.700035002	7.4	0.756532031
0	6	20	0.05	125	0.96
30	7	2.75	0.363636364	21	0.369316128
20	8	10	0.1	83	0.896637943
400	9	20	0.05	187	0.455292656
100	10	3.25	0.307692308	32.5	1
200	10	3.25	0.307692308	33	0.387643799

Observe el penúltimo renglón, que cuando el valor de la prima es igual a la multiplación del parámetro del número de reclamos por el primer momento de la distribución de los montos de reclamaciones ($c = \lambda\mu$) la probabilidad de ruina es 1, por otro lado, en el último renglon se puede observar que el valor de c es un poco más grande que $\lambda\mu$ y el capital es más grande, por lo que la probabilidad de ruina disminuye de forma considerable.

4.2. Distribución Erlang

Considere que la distribución de la cuantía de reclamación es una Erlang con parámetros $n = 2$ entonces su media es $\mu = \frac{2}{\alpha}$, donde $\alpha = 1$, y sea $c = 5$, $\lambda = 2$, entonces de (3.14) se tiene que la probabilidad de ruina es

$$\begin{aligned}\psi(u) = & \frac{5 - 4\alpha^2 - \alpha - \sqrt{8\alpha - 1}(\alpha - 1)}{8\alpha^2 + \alpha + \sqrt{8\alpha - 1}(\alpha - 4\alpha^2)} e^{r_2 u} \\ & - \frac{4\alpha^2 + \alpha - \sqrt{8\alpha - 1}(\alpha - 1) - 5}{8\alpha^2 + \alpha - \sqrt{8\alpha - 1}(\alpha - 4\alpha^2)} e^{r_3 u}.\end{aligned}$$

En la Figura 4.2 se describe el comportamiento de la probabilidad de ruina con tamaño de reclamación que se distribuye con una Erlang con parámetros $n = 2$ y $\alpha = 1$, $Y_i \sim Erlang(2, 1)$, y con diferentes valores para el capital inicial u.

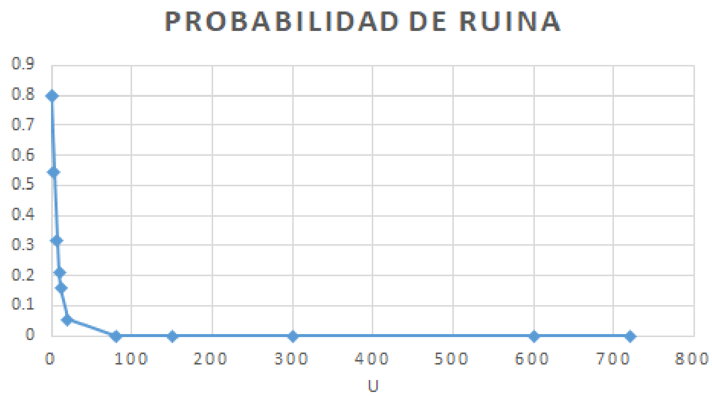

Figura 4.2: Probabilidad de ruina con reclamaciones de distribucion Erlang

Donde se puede verificar lo que se ha visto en la teoría, que entre más grande sea nuestro capítal inicial, la probabilidad de que ocurra la ruina es casi nula.

En la Tabla 3 se observa el comportamiento de la probabilidad de ruina cuando el capital inicial y el parámetro α de la distribución Erlang varian.

Tabla 3: Probabilidad de ruina con distribución Erlang

u \ α	1	1.3	2	2.6	3	4
0	0.8	0.728994083	0.466666667	0.349769888	0.298989899	0.21875
3	0.545309443	0.27741147	0.039566167	0.007512245	0.002499047	0.000161223
7	0.315814045	0.06801917	0.001155716	3.25128E-05	2.93932E-06	6.77457E-09
10	0.209585317	0.023683685	8.16157E-05	5.48441E-07	1.86639E-08	3.53533E-12
12	0.159458046	0.011721789	1.3944E-05	3.60728E-08	6.3999E-10	2.29154E-14
20	0.053430435	0.000703351	1.18809E-08	6.75123E-13	8.84822E-16	4.04504E-23
80	1.46675E-05	4.82514E-13	1.13056E-31	2.3491E-48	1.00456E-59	9.07567E-89
150	1.02648E-09	9.83041E-24	1.56606E-58	1.00617E-89	5.41E-111	2.3298E-165
300	1.28165E-18	1.21176E-46	4.3744E-116	2.2723E-178	7.4258E-221	0
600	1.99804E-36	1.84123E-92	3.413E-231	0	0	0
720	1.5057E-43	8.6653E-111	3.0905E-277	0	0	0

Se puede notar que entre más grande sea nuestro parámetro α y el capital inicial u, la probabilidad de ruina es cero.

En la Tabla 4 se muestra el comportamiento que tiene la probabilidad de ruina cuando los parámetros son aleatorios respetando la condición de ganancia neta.

Tabla 4: Probabilidad de ruina con diferentes valores para u, λ y c.

u	λ	α	c	$\psi(u)$
5	1	0.5	105	0.007329471
40	2	2	2.5	3.04108E-05
30	3	2.5	23	1.05663E-25
50	4	1	25	2.94187E-12
90	5	1.4286	21	5.29203E-29
12	6	0.1429	760	0.020255387
9	7	7	2.6	9.40673E-05
4	8	0.7	1400	0.002455445
0	9	10	3.45	0.777865613
115	10	1.667	12.25	0.741338011

Note que en los dos últimos casos, la probabilidad de ruina es casi la misma, analicemos el primer caso, el valor $\lambda\mu$ es el 52 % del valor de c y el capital inicial es 0, por lo tanto, la probabilidad de ruina es del 77 %. Mientras que en el segundo caso, $\lambda\mu$ es el 97 % del valor de c y su capital inicial es más grande, por lo que, la probabilidad de ruina es del 74 %. De ésta forma se puede decir que, para que la probabilidad de ruina se aproxime a 0, la condición de ganancia neta debe de cumplirse pero el valor de c debe ser considerablemente más grande que $\lambda\mu$ y el capítal inicial debe ser mayor que 0.

4.3. Distribución Hiperexponencial

Ahora, considere que la cuantía de las reclamaciones se comporta como una distribución hiperexponencial, la cual tiene función de densidad dada como

$$f(Y) = \frac{6}{5}e^{-3y} + \frac{7}{5}e^{-7y} + \frac{4}{5}e^{-2y}$$

observe que $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 7$ y $\lambda_3 = 2$, donde la probabilidad de que ocurra la ruina es de $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{2}{5}$ respectivamente. Entonces la media de Y es $\mu = \frac{38}{105}$. Por lo tanto, cuando $c = 2$, $\lambda = 3$ y la cuantía sigue una hiperexponencial con los parámetros ya mencionados, la probabilidad de ruina es de

$$\psi(u) = 0{,}0121179e^{-6{,}7666u} + 0{,}0248116e^{-2{,}6712u} + 0{,}5058827e^{-1{,}0623u}. \quad (4.1)$$

En la Figura 4.3 se observa el comportamiento que tiene la ecuación (4.1) respecto a diferentes valores del capital inicial u, se observa que en un cierto nivel del capital inicial la probabilidad de ruina es 0.

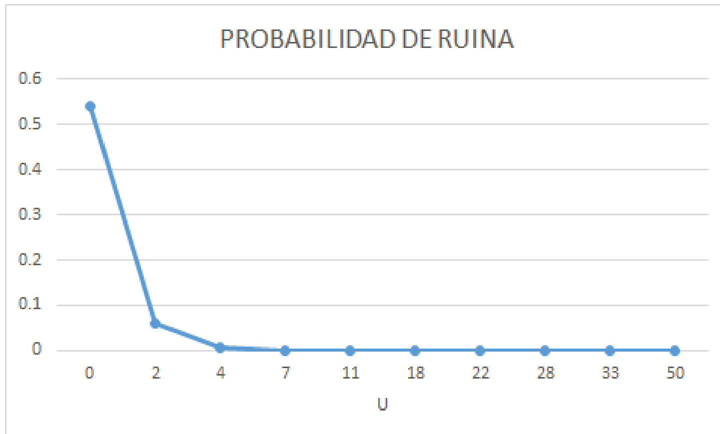

Figura 4.3: Probabilidad de ruina con reclamaciones de distribución hiperexponencial

Conclusiones

La incertidumbre a la que se enfrentan las compañías de seguro es de gran interés dentro de la teoría de riesgo, motivo por el cual, en este trabajo se estudio y mostro un método para calcular la probabilidad de ruina de una compañía de seguros basándose en el modelo de Cramér-Lundberg, que como se ha dicho durante el desarrollo de esta tesis, el modelo no considera aspectos de gastos de administración ni el tiempo que se tarda la compañía aseguradora en pagar los siniestros, pero ofrece una condición sobre la solvencia de la compañía de seguros.

Con dicho modelo y la aplicación de la transformada de Laplace, se analizaron casos en los cuales el tamaño de los reclamos se distribuyen de forma exponencial, Erlang e hiperexponencial. Donde los gráficos obtenidos permiten visualizar lo que se ha tratado téoricamente y se observa en las tablas el comportamiento cuando se modifican algunos de los valores de la probabilidad de ruina, en los cuales se puede observar que entre más grande sea el capital inicial la probabilidad de ruina es menor, o bien, cuando la condición de ganancia neta se cumple pero el valor de la prima es mucho más parecido o más cercano al valor de la multiplicación del parámetro del número de reclamos con la media de la cuantía de los reclamos, la probabilidad de ruina es más grande, ya que significa que las primas cobradas al derechohabiente apenas son suficientes para cubrir el monto de las reclamaciones.

Finalmente, se debe mencionar que la aplicación de la transformada de Laplace dentro del módelo Cramér-Lundberg hace que sea más sencillo encontrar las probabilidades de ruina y los momentos de ruina.

Un trabajo a futuro puede consistir en determinar la función de densidad de la variable del momento de ruina utilizando la transformada inversa de Laplace.

Bibliografía

[1] Asmussen S. y Albrecher H. (2010). *Ruin Probabilities. Advanced series on statistical science and applied probability*, Singapur, World Scientific.

[2] Büllhmann, H. (1970). *Mathematical Methods in Risk Theory.* Springer-Verlang, New York.

[3] Castaner i Garriga A. (S.f.). *Análisis de la Teor ía del Riesgo: La transformada del Momento de Ruina.* Universitat de Barcelona.

[4] Dickson David C. M. (2006). *Insurance Risk and Ruin*, International Series on Actuarial Science. Cambridge University Press.

[5] Feller W. (1971). *An introduction to probability theory and its applications*, vol. 1. John Wiley & Sons, New York.

[6] Gerber H. U. (1979) .*An Introduction to Mathematical Risk Theory.* S. S. Huebner Foundation Monograph No. 8, University of Pennsylvania, Philadelphia.

[7] Gerber, H. y E. Shiu. (1998). *On the time value of ruin, North American Actuarial Journal.*Society of Actuaries. Vol.2, núm. 1, EU.

[8] Kaas Rob, Goovaerts Marc, Dhaene Jan y Denuit Michael. (2001). *Modern Actuarial Risk Theory.* Second Edition, Springer.

[9] Mikosch T. (2004). *Non-Life Insurance Mathematics. An Introduction with Stochastic Processes.* Springer.

[10] Morris H. De Groot (2004). *Probability and Statistics*, agosto.

[11] Paul L. Meyer (2012). *Probabilidad y Aplicaciones Estadisticas.*

[12] Murray R. Spiegel (1970). *Transformadas de Laplace.* Mc Graw-Hill, Colombia.

[13] Rincón, L. (2012). *Introducción a la probabilidad*, Cd. de México, México.

[14] Rincón, L. (2012). *Introducción a los procesos estocásticos*, Cd. de México, México.

[15] Rincón, L. (2012). *Introducción a la teoría de riesgo*, Cd. de México, México.

[16] Rolski T., Schmidli H., Schmidt V. y Teugels J. (1999). *Stochastic Processes for Insurance and Finance.* John Wiley and Sons, England.

[17] Ross Sheldon M. (1996). *Stochastic Processes.* Second Edition, University of California, Berkely.

[18] Tajonar, F.S. (1989). *Transformada de Laplace.* Colegio de matemáticas. AUP.

[19] Willmot Gordon E. y Lin X. Sheldon. (2000). *Lundberg Approximations for Compound Distributions with Insurance Applications.* Springer.