BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Tesis presentada como requisito para obtener el título de la Licenciatura en Actuaría

“MODELACIÓN DE LAS VARIACIONES DEL TIPO DE CAMBIO PESO-DÓLAR”

Presenta: Omar Valencia Magos

Director de Tesis: Dr. José Raúl Castro Esparza

Noviembre 2016

A mis padres y hermanos. Los amo

Agradecimientos

A mis padres por darme la oportunidad de poder estudiar una carrera y que, gracias a su esfuerzo y dedicación, pude lograrlo.

Un agradecimiento especial a mi director de tesis, el Dr. José Raúl Castro Esparza, por todo el apoyo incondicional, así como su profesionalismo y los conocimientos compartidos durante estos años de aprendizaje.

A mis sinodales, el Mtro. Ignacio Trujillo Mazorra, el Mtro. Ángel Tejeda Moreno y el Mtro. José Asunción Hernández, que con la aportación de sus conocimientos y la dedicación en ellos, se pudo hacer un mejor trabajo, así como sus consejos para crecer personal y profesionalmente.

A todos los profesores de la FCFM, que gracias a su tiempo y esfuerzo contribuyeron gran parte a mi formación académica y profesional.

A todos mis amigos y compañeros de la FCFM que gracias a su amistad y apoyo durante mi vida universitaria, hicieron una de las etapas más importantes y felices de mi vida.

A toda mi familia, primos, tíos, abuelos, hermanos que siempre han confiado en mí, este logro es para ustedes.

A todos mis familiares fallecidos que fueron muy importantes en mi vida, que influyeron mucho para ser una mejor persona al día de hoy.

A todos y cada uno de ustedes, muchas gracias.

Introducción

Para enfrentar la inestabilidad de los mercados financieros en nuestro país, el Gobierno Federal y el Banco de México han establecido una serie de medidas, cuyo propósito es establecer el buen funcionamiento de dichos mercados y preservar la estabilidad financiera en el país.

La Comisión de Cambios, integrada por la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP) y el Banco de México (Banxico), tomó la decisión de intervenir en el mercado cambiario por primera vez desde Septiembre de 2008. La presencia del Banco de México se ha llevado a cabo mediante una oferta de dólares, principalmente a través de subastas.

Las acciones que toma la Comisión de Cambios, no se diseñaron para defender un nivel predeterminado de tipo de cambio, sino que han buscado proveer la liquidez necesaria para atender las demandas que han surgido a través del propio movimiento del tipo de cambio. Dichas acciones se basan en las ventas de dólares por subastas extraordinarias, ventas de dólares por subastas diarias y ventas directas de dólares.

A finales de 1994, dicha comisión acordó que el tipo de cambio fuera determinado libremente por las fuerzas de mercado: oferta y demanda simple (llamado tipo de cambio flexible o flotante).

Tipo de cambio "FIX"

Desde el 11 de Noviembre de 1991, el Banco de México publica un tipo de cambio de referencia, conocido como el tipo de cambio "FIX". Ésta referencia puede ser utilizada por particulares en sus transacciones que involucren el intercambio de divisas, aunque es importante destacar, que las partes son libres de acordar cualquier otra referencia para sus contratos.

El tipo de cambio FIX es determinado por el Banco de México con base en un promedio de cotizaciones del mercado de cambios al mayoreo para operaciones liquidables al segundo día hábil bancario siguiente y que son obtenidas de plataformas de transacción cambiaria y otros medios electrónicos con representatividad en el mercado de cambios.

El Banco de México da a conocer el FIX a partir de las 12 horas de todos los días hábiles bancarios, se publica en el Diario Oficial de la Federación (DOF) un día hábil bancario después de la fecha de determinación y es utilizado para solventar obligaciones denominadas en dólares liquidables en la República Mexicana al día siguiente de la publicación en el DOF.

Un nivel competitivo de tipo de cambio se relaciona con la situación económica de un país, ya que a medida que una moneda tenga mayor fortaleza respecto a otras puede tener como base la confianza de los inversionistas en dicho país.

Los datos que se manejan para este trabajo, se obtuvieron de la página oficial del Banco de México (http://www.banxico.org.mx/portal-mercado-cambiario/index.html). Ésta base de datos contiene información diaria del tipo de cambio peso-dólar en tres columnas: el tipo de cambio FIX, la publicación en el Diario Oficial de la Federación y el tipo de cambio que se debe utilizar al día de hoy para calcular el equivalente en pesos del monto de las obligaciones de pago denominadas en dólares de E.U.A para ser cumplidas en la República Mexicana. Tomaremos en cuenta la información publicada por el Diario Oficial de la Federación para realizar el análisis.

El objetivo principal de ésta tesis es hacer un análisis de la serie de tiempo y así poder crear un modelo estadístico que nos ayude a determinar el comportamiento de la serie del tipo de cambio peso-dólar, tener una idea más clara de su naturaleza, predecir dichos valores futuros a una fecha determinada y tomar acciones al respecto.

Se analizarán los distintos modelos para el estudio de las series de tiempo, se realizarán y presentarán los resultados para cada uno de ellos, además se dará como sugerencia una estrategia mediante derivados financieros con los resultados obtenidos.

Las limitaciones para este trabajo de tesis es que, sólo manejaremos los valores de la serie de tiempo que se publican en el Diario Oficial de la Federación, así como las variables que tomen en cuenta para el cálculo del tipo de cambio (como son: inflación, tasas de interés, flujos de capital, importación y exportación de bienes, etc.), por consiguiente, no se están tomando en cuenta otros factores o variables externas que afecten a estos valores.

En este trabajo se manejan cinco capítulos para su desarrollo: en el capítulo uno se explica brevemente la teoría básica y necesaria ´para poder entender la estructura, composición y análisis de las series de tiempo; en el capítulo dos se habla sobre el modelo ARIMA, como uno de los modelos básicos para estudiar las series temporales; en el capítulo tres se desarrolla la teoría de los modelos ARCH y GARCH para medir la volatilidad en el comportamiento del tipo de cambio que se va a estudiar; en el capítulo cuatro se aplica toda la metodología que se vio en los tres capítulos anteriores a la serie de tiempo en estudio y se dan resultados de lo obtenido; en el capítulo cinco se explica la estrategia mediante derivados financieros; por último, en el capítulo 6 se dan las conclusiones a las que se llegará con el análisis y realización de este trabajo, además de la bibliografía correspondiente.

Índice General

Modelación de las variaciones del tipo de cambio peso-dólar

Omar Valencia Magos

Noviembre 2016

Capítulo 1. Marco Teórico

1.1 Conceptos básicos de las series de tiempo

1.1.1 Proceso Estocástico

Un proceso estocástico, también llamado proceso aleatorio, es una colección de variables aleatorias ordenadas en el tiempo $\{X_t: t \in T\}$ parametrizada para un conjunto T, llamado espacio parametral, en donde las variables toman valores en un conjunto S llamado espacio de estados.

En los casos más sencillos, se toma como espacio parametral el conjunto discreto $T = \{0,1,2,\dots\}$ y éstos números se interpretan como tiempos. En este caso, se dice que el proceso es a tiempo discreto, y en general, este tipo de procesos se denotará por $X_n: n = \{0,1,2,\dots\}$, o explícitamente, $X_0, X_1, X_2 \dots$ Así, para cada n, X_n es el valor del proceso o estado del sistema al tiempo n, como se muestra en la siguiente figura. Un ejemplo claro de este proceso es el PIB, IPC, etc.

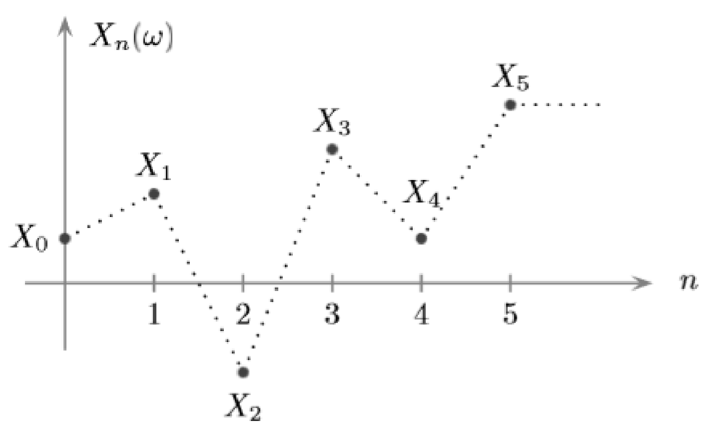


Figura 1. Ejemplo de un proceso estocástico a tiempo discreto.

El espacio parametral también puede tomarse como el conjunto continuo $T = [0, \infty)$. Entonces se dice que el proceso es a tiempo continuo y se denotará por $\{X_t : t \geq 0\}$, como se muestra en la siguiente figura. Un ejemplo para el proceso estocástico continuo es un electrocardiograma.

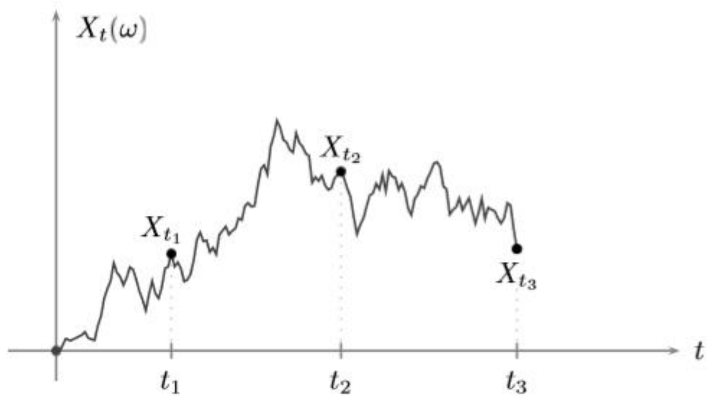


Figura 2. Ejemplo de un proceso estocástico a tiempo continuo.

En resumen, si el subíndice es n, entonces el tiempo es discreto, y si el subíndice es t, el tiempo se mide de manera continua.

1.1.2 Serie de tiempo

Una serie de tiempo es una realización finita de variables aleatorias de un proceso estocástico referidas en el tiempo. Las series temporales económicas y financieras que se manejan para el análisis de las series de tiempo están constituidas por observaciones históricas, es decir, no proceden de la experimentación y son irrepetibles.

1.1.3 Tendencia

Es el movimiento gradual (ascendente, descendente o estacionario) de los datos de la serie a través del tiempo. Gráficamente se muestra de la siguiente forma:

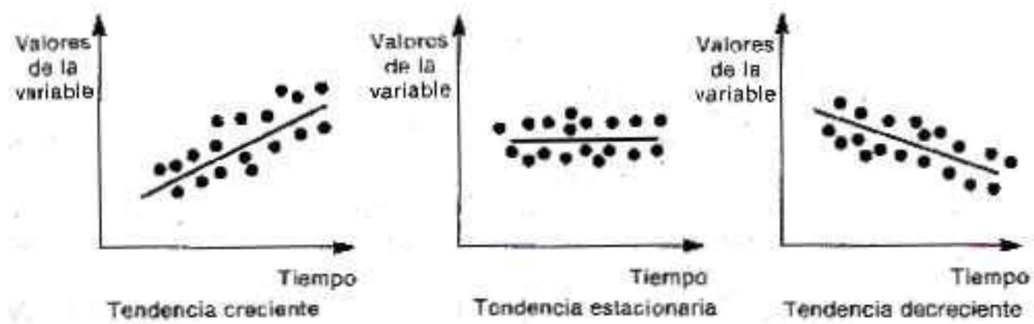


Figura 3. Diferentes tipos de tendencia.

1.1.4 Procesos estocásticos estacionarios y no estacionarios

Un proceso estocástico es estacionario si su media y su varianza son constantes en el tiempo, y si el valor de la covarianza depende sólo de la distancia (o rezago) entre estos períodos, y que no dependen del tiempo en el cual se calculó la covarianza. En las series de tiempo, un proceso estocástico como éste, se conoce como *proceso estocástico débilmente estacionario, estacionario de segundo orden o proceso estocástico en amplio sentido.*

Para explicar la estacionariedad débil, se tiene lo siguiente: Sea Y_t una serie de tiempo con estas propiedades:

$$Media: E(Y_t) = \mu$$

$$Varianza: Var(Y_t) = E(Y_t - \mu)^2 = \sigma^2$$

$$Covarianza:\ \gamma_k = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+k} - \mu)]$$

Donde γ_k, la covarianza (o autocovarianza) en el rezago k, es la covarianza entre los valores Y_t y Y_{t+k}, es decir, entre los valores Y separados k periodos. Si k=0, obtenemos γ_0, que es simplemente la varianza de Y. Si k=1, es la covarianza entre dos valores adyacentes de Y.

En resumen, si una serie de tiempo es estacionaria, su media, su varianza y su autocovarianza permanecen iguales (en los diferentes rezagos), sin importar el momento en el cual se calculen, es decir, son invariantes respecto al tiempo. Un ejemplo claro de un proceso estacionario es llamado **proceso de ruido blanco.**

Si una serie de tiempo no es estacionaria en el sentido antes definido, se denomina **serie de tiempo no estacionaria** (hablando de estacionariedad débil); es decir, tendrá una media que cambia con respecto al tiempo o una varianza que varía en el mismo, o ambas. Un ejemplo clásico de un proceso estocástico no estacionario es llamado **caminata aleatoria (MCA).**

1.1.5 Proceso puramente aleatorio o de ruido blanco (Estacionario)

Un proceso es puramente aleatorio (proceso de ruido blanco) si tiene una media igual a cero, una varianza constante σ^2 y no está serialmente correlacionado. Cabe mencionar que el proceso de ruido blanco no requiere que las variables aleatorias sean independientes, ya que la correlación cero no implica independencia de variables aleatorias, excepto cuando las variables aleatorias tienen una distribución normal. Un ejemplo claro de un proceso de ruido blanco es el siguiente:

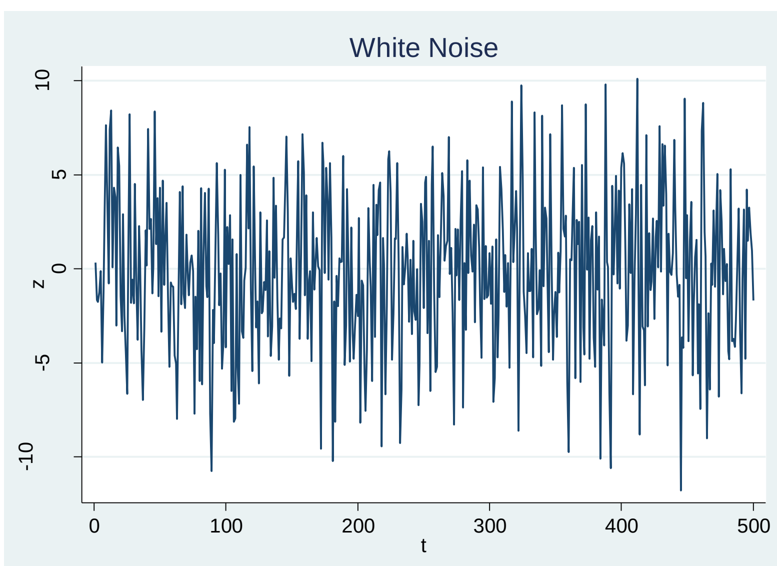


Figura 4. Proceso de ruido blanco.

1.1.6 Caminata aleatoria (No Estacionario)

Una caminata aleatoria simple sobre el conjunto de números enteros es un proceso estocástico a tiempo discreto $X_n: n = \{0,1,2,\ldots\}$, que evoluciona como se muestra en el esquema mostrado.

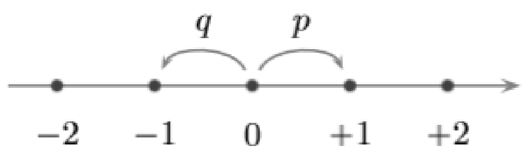


Figura 5. Dinámica de una caminata aleatoria.

Es decir, iniciando en el estado 0, al siguiente tiempo el proceso puede pasar al estado +1 con probabilidad p, o al estado -1 con probabilidad q, en donde $p + q = 1$. El valor de X_n es el estado del proceso al tiempo n.

Existen dos tipos de caminata aleatoria:

1. Caminata aleatoria sin tendencia, es decir, sin un término constante o de intercepto.
2. Caminata aleatoria con tendencia, esto es, hay un término constante.

1.1.6.1 Caminata aleatoria sin tendencia

Suponemos que u_t es un término de error de ruido blanco, con media 0 y varianza σ^2. Entonces se dice que la serie Y_t es una caminata aleatoria si:

$$Y_t = Y_{t-1} + u_t$$

En este modelo, el valor de Y en el tiempo t es igual a su valor en el tiempo (t - 1) más un choque aleatorio. Ahora podemos escribir lo siguiente:

$$Y_1 = Y_0 + u_1$$

$$Y_2 = Y_1 + u_2 = Y_0 + u_1 + u_2$$

$$Y_3 = Y_2 + u_3 = Y_0 + u_1 + u_2 + u_3$$

En general, si el proceso comenzó en el tiempo 0 con un valor de Y_0, entonces se tiene:

$$Y_t = Y_0 + \sum u_t$$

Por lo tanto:

$$E(Y_t) = E\left(Y_0 + \sum u_t\right) = Y_0$$

$$Var(Y_t) = t\sigma^2$$

La media va a ser igual a su valor inicial (que es constante) pero conforme se incrementa t, su varianza aumenta de manera indefinida, por lo que viola una condición de la estacionariedad. En la práctica, casi siempre $Y_0 = 0$, por lo tanto, $E(Y_t) = 0$.

Una característica importante del MCA es la persistencia de choques aleatorios (también llamados errores aleatorios), donde Y_t es la suma de Y_0 inicial más la suma de estos choques. Así, esto hace que la serie tome direcciones no predecibles.

Ahora si tomamos:

$$(Y_t - Y_{t-1}) = \Delta Y_t = u_t$$

Donde Δ es el operador de primeras diferencias, resulta fácil probar que mientras que Y_t no es estacionaria, la serie si lo será en sus primeras diferencias, es decir, las primeras diferencias de una serie de tiempo de caminata aleatoria son estacionarias.

1.1.6.2 Caminata aleatoria con tendencia

Tomamos de nuevo la fórmula de la sección anterior y se modifica de la siguiente manera:

$$Y_t = \delta + Y_{t-1} + u_t$$

Donde δ se conoce como tendencia. Éste término proviene si escribimos la ecuación como:

$$(Y_t - Y_{t-1}) = \Delta Y_t = \delta + u_t$$

Se demuestra que Y_t se deriva o se desvía hacia arriba o hacia abajo, según δ sea positiva o negativa. Así entonces tenemos que:

$$E(Y_t) = Y_0 + t\delta$$

$$Var(Y_t) = t\sigma^2$$

Para este caso, la media y la varianza se incrementan con el tiempo, por lo que este modelo también viola los supuestos de estacionariedad. Por lo tanto, el MCA con o sin tendencia, son procesos estocásticos no estacionarios.

Para que estos conceptos queden mejor explicados, se dará una idea más clara de la caminata aleatoria, con y sin término constante. Consideramos el modelo MCA sin tendencia:

$$Y_t = Y_{t-1} + u_t$$

Donde los u_t son términos de error de ruido blanco $u_t \sim N(0,1)$, es decir, cada uno de los términos siguen una distribución normal estándar.

Ejemplo: Mediante un generador de números aleatorios se obtuvieron 500 valores de u y se generó Y_t, donde suponemos que $Y_0=0$, como se muestra a continuación:

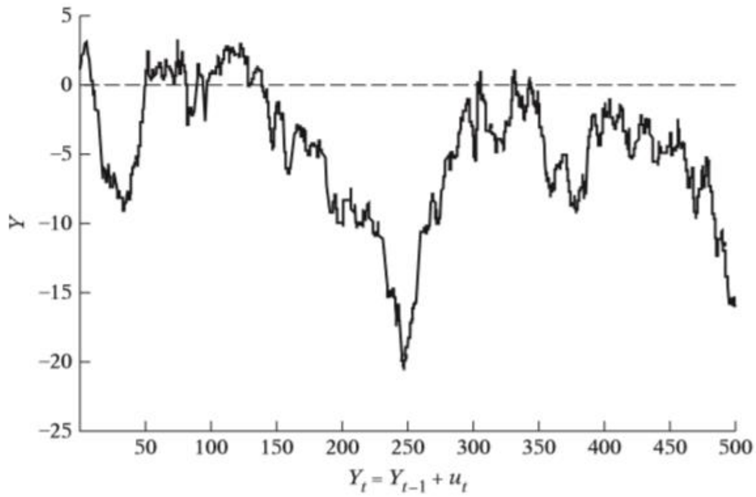


Figura 6. Ejemplo de un MCA sin tendencia.

Ahora consideramos el modelo MCA con tendencia:

$$Y_t = \delta + Y_{t-1} + u_t$$

Donde suponemos los mismos valores de Y_0 y u_t, pero agregando el valor de $\delta = 2$, dando como resultado lo siguiente:

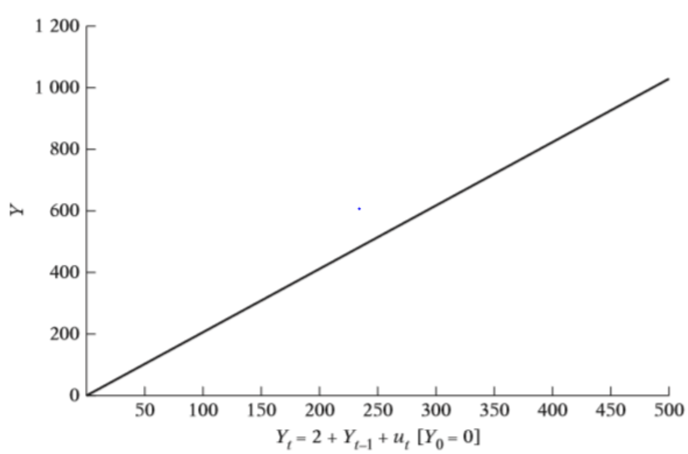


Figura 7. Ejemplo de un MCA con tendencia.

1.1.7 Proceso estocástico de raíz unitaria

Tenemos el Modelo de Caminata Aleatoria siguiente:

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + u_t$$

Si $\rho = 1$, se tiene un MCA sin tendencia, por lo que se conoce también como problema de raíz unitaria, donde nos enfrentamos a un problema de no estacionariedad.

El nombre de raíz unitaria se debe a que $\rho = 1$. Sin embargo si $|\rho| < 1$, es decir, si el valor absoluto de ρ es menor que 1, se puede demostrar que la serie de tiempo Y_t es estacionaria.

1.1.8 Proceso estocástico estacionario en tendencia (ET) y estacionario en diferencia (ED)

La distinción entre las series de tiempo (o procesos estocásticos) estacionarias y no estacionarias, es saber si la tendencia observada es **determinista o estocástica.**

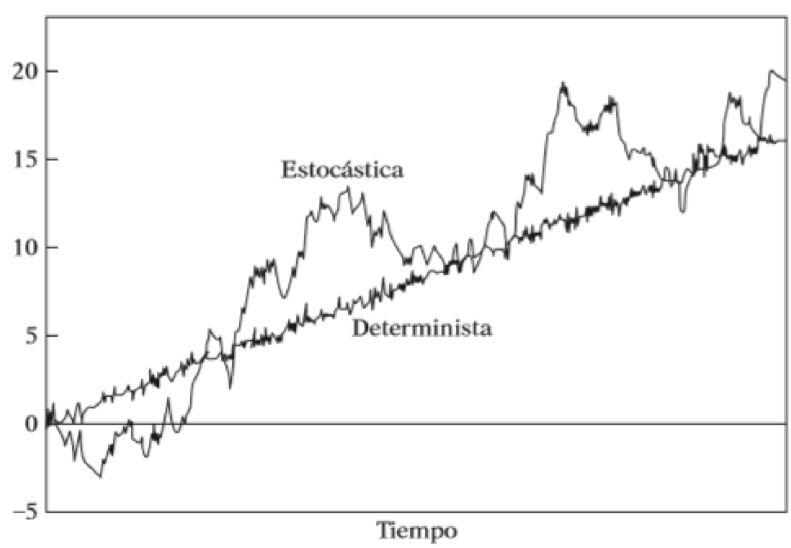


Figura 8. Tendencia estocástica y tendencia determinista.

En general, si la tendencia de una serie de tiempo es predecible y no variable, se le llama **tendencia determinista**; por el contrario, sino es predecible, se le llama **tendencia estocástica**.

Para ver esto, se determina el siguiente modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 Y_{t-1} + u_t$$

Donde u_t es un término de error de ruido blanco y t es el tiempo medido.

Ahora, si hacemos que $\beta_1 = 0, \beta_2 = 0, \beta_3 = 1$ entonces tenemos:

$$Y_t = Y_{t-1} + u_t$$

Donde se ve que es un MCA sin tendencia, por lo tanto, no es estacionario. Pero si lo expresamos de la siguiente manera (restando Y_{t-1} en ambos lados):

$$\Delta Y_t = (Y_t - Y_{t-1}) = u_t$$

Se convierte en estacionaria, por lo tanto, un MCA sin tendencia es un **proceso estacionario en diferencias (PED).**

Ahora si hacemos que $\beta_1 \neq 0, \beta_2 = 0, \beta_3 = 1$ se tiene:

$$Y_t = \beta_1 + Y_{t-1} + u_t$$

Es una caminata aleatoria con tendencia, y por lo tanto, no es estacionaria. Si la expresamos de la siguiente manera:

$$\Delta Y_t = (Y_t - Y_{t-1}) = \beta_1 + u_t$$

Esto es, que Y_t mostrará una tendencia, ya sea positiva o negativa (depende de β, que sea mayor o menor que 0). A este fenómeno se le conoce como tendencia estocástica. Es un PED, ya que la no estacionariedad se elimina sacando las primeras diferencias para las series de tiempo.

Ahora, si hacemos que $\beta_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0, \beta_3 = 0$ se tiene:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + u_t$$

Aunque sabemos que la media de Y_t es $\beta_1 + \beta_2 t$ (no constante), su varianza sí lo es. Ya que sepamos los valores de β_1 y β_2, podemos calcular la media sin problema alguno, entonces, si restamos la media de la variable Y_t, la serie que resulta es estacionaria, por lo tanto, le llamaremos **proceso estacionario en tendencia (PET).**

1.1.9 Estacionalidad

Es el patrón de datos que se repite a si mismo después de un periodo de días, semanas, meses, trimestres, estaciones, etc., pero dentro del mismo año.

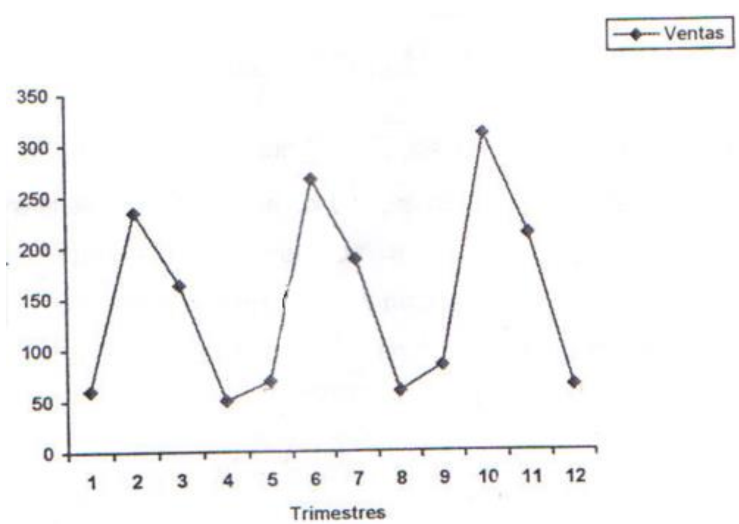


Figura 9. Ejemplo de estacionalidad de los datos.

1.2 Análisis de series de tiempo

Una serie temporal (también llamada serie cronológica) se define como la evolución de una variable a lo largo del tiempo, es decir, una secuencia de observaciones ordenadas en base al tiempo.

Hay algunos casos en los que la variable observada de la serie tiene un patrón de comportamiento fijo, al cual se llama serie determinista. Por el contrario, se tienen series que resultan ser impredecibles y su comportamiento no corresponde a un patrón fijo, por lo que son llamadas series aleatorias.

Varios de los objetivos principales que se persiguen con el estudio de las series de tiempo son:

- Obtener una descripción apropiada del fenómeno generado de la serie de datos.
- Construir un modelo que aproxime de la forma más precisa posible el comportamiento de la serie de datos.
- Predecir valores desconocidos de la serie (en el futuro), a partir de la información que se tenga disponible.
- Controlar el proceso generador de la serie, examinando qué puede ocurrir cuando se alteran algunos parámetros del modelo.

Una característica fundamental de una serie de tiempo es que sus observaciones son dependientes o correlacionadas y, por tanto, el orden en que se recogen las observaciones es muy importante.

Podemos dirigirnos a diferentes enfoques en el análisis de series de tiempo, como lo son:

- **Técnicas tradicionales**. Se basan en descomponer la serie en varias partes, asemejándose a alguna función ya conocida (generalmente sumadas o multiplicadas, llamados esquema aditivo o multiplicativo, respectivamente). También se consideran como técnicas clásicas las de alisamiento exponencial, donde el objetivo es predecir el valor de la serie de forma sencilla y automática.

- **Modelos de procesos estocásticos (Box-Jenkins)**. Se fundamenta en ajustar un modelo a los datos seleccionándolo de una cierta familia. La predicción en este caso se realiza suponiendo que la estructura del modelo permanece invariante en el tiempo, es decir, que en el futuro, el modelo sigue siendo adecuado para modelizar la serie.
- **Métodos univariantes y multivariantes**. Estos métodos tienen el interés de estudiar la causalidad entre las variables y los modelos matriciales.
- **Análisis en el tiempo y las frecuencias**. Explotan las características fundamentalmente de la función de correlación y densidad. Aunque existe una relación entre ellas, ambas ponen de manifiesto características complementarias en el análisis de la serie.

Nos basaremos en la metodología de Box-Jenkins, en el cual el análisis estadístico se realiza a partir de un proceso estocástico estacionario (en sentido amplio o débil) y también para procesos que se puedan convertir en estacionarios mediante transformaciones.

Cuando se produce la ausencia de la tendencia (determinista o aleatoria), hay un numeroso conjunto de teorías y desarrollos matemáticos centrados en la diferenciabilidad de la serie y en la existencia o no de raíces unitarias a partir de los conocidos test de Dickey y Fuller, de Mackinon o de Phillips y Perron. Estas series se pueden describir con los modelos ARIMA o SARIMA.

Sin embargo, el estudio de la componente de varianza constante es un fenómeno menos extendido y, de manera que el no tener en cuenta una posible no constancia de esta componente, puede suponer diversos problemas estadísticos cuando se estiman modelos (problemas ligados con la eficiencia de los parámetros estimados y su fuerte volatilidad ante el amplio intervalo de confianza en el que se mueven).

Por tanto, para determinar un patrón de comportamiento estadístico para la varianza, se encuentran los **Modelos Autorregresivos Condicionales Heteroscedásticos: ARCH.**

Engle es el autor de una primera aproximación a la varianza condicional. Para justificar el desarrollo de estos modelos heteroscedásticos condicionales autorregresivos, éste autor, cita tres situaciones para exponer por qué estos modelos fueron propuestos para explicar ciertas propiedades que no pueden ser explicados por los modelos ARIMA y que aparecen con frecuencia en series temporales estacionarias de datos financieros y ambientales de alta frecuencia:

1. La experiencia empírica nos lleva a contrastar períodos de amplia varianza de error seguidos de otros de varianza más pequeña. Es decir, el valor de la dispersión del error respecto a su media cambia en el pasado, por lo que es lógico pensar que un modelo que atienda en la predicción a los valores de dicha varianza en el pasado servirá para realizar estimaciones más precisas.

2. En segundo lugar, Engle expone la validez de estos modelos para determinar los criterios de mantenimiento o venta de activos financieros. Los agentes económicos deciden esta cuestión en función de la información proveniente del pasado respecto al valor medio de su rentabilidad y la volatilidad que ésta ha tenido. Con los modelos ARCH se tendrían en cuenta estos dos condicionantes.

3. El modelo de regresión ARCH puede ser una aproximación a un sistema más complejo en el que no hubiera factores innovacionales con heteroscedasticidad condicional. Los modelos estructurales admiten, en varias ocasiones, una especificación tipo ARCH infinito que determina con parámetros cambiantes, lo que hace a este tipo de modelos capaces de contrastar la hipótesis de permanencia estructural que supone una de las hipótesis de partida y condición necesaria para la validez del modelo econométrico tradicional.

Esta series tienen poca estructura en la media y siguen paseos aleatorios o procesos AR de orden bajo y coeficiente pequeño. Además puede ocurrir que aunque la serie de rendimientos parezca un ruido blanco, su distribución no sea normal, y que los datos estén casi no correlacionados, pero al calcular las autocorrelaciones de los cuadrados se observa una fuerte estructura de dependencia.

Otra propiedad es que la varianza de los residuos no es constante y aparecen rachas de mayor variabilidad seguida de rachas de menor variabilidad. Por eso se plantean este tipo de modelos, es decir, van a ser modelos con varianza marginal constante, y varianza condicionada a los valores del pasado de la serie no constante, ya que depende de los valores previos que se tengan.

El modelo ARCH (Modelos Autorregresivos con Heteroscedasticidad Condicional), supone que la varianza condicional depende del pasado con estructura autorregresiva.

Estos modelos fueron generalizados por Bollerslev (1986) para dar lugar a los **Modelos Autorregresivos Condicionales Heteroscedásticos Generalizados: GARCH**, que incorporan a esta dependencia términos de media móvil. Proporcionan buenos ajustes con p y q pequeños (la mayoría de las series temporales financieras pueden modelizarse correctamente con un GARCH(1,1)). Bollerslev proporciona la justificación teórica de esta última afirmación expresando los procesos GARCH(p,q) como un ARCH(∞).

En resumen, al considerar la volatilidad como un proceso estocástico, se busca ajustar un modelo que permita describir y analizar su comportamiento presente, y a partir de éste, su comportamiento futuro. Para el caso de procesos de varianza constante la metodología de Box-Jenkins ha sido ampliamente utilizada, sin embargo, este supuesto no es sostenible en varias áreas, por lo que se deben consideran otras alternativas. Dentro de estas alternativas, se destacan los modelos ARCH y GARCH propuestos por Engle (1982) y Bollerslev (1986) respectivamente, modelos que permiten especificar el comportamiento de la varianza en la serie de tiempo.

1.3 Pruebas de estacionariedad

En la práctica, nos enfrentamos a dos preguntas importantes: 1) ¿Cómo sabemos si una serie de tiempo determinada es estacionaria? Y 2) Si tenemos que la serie de tiempo es no estacionaria, ¿hay alguna forma para convertirla en estacionaria?

Serie estacionaria en media: Una serie se dice que es estacionaria en media cuando los valores de la serie oscilan en torno a un valor promedio en la serie.

Serie estacionaria en varianza: Una serie será estacionaria en varianza cuando se mantenga el supuesto de que la variabilidad de la serie en torno a su media, se mantenga constante a lo largo del tiempo.

Para esto, se presentan formas básicas de saber si una serie es estacionaria o no lo es como lo son: *el Análisis Gráfico, la Función de Autocovarianza y la Función de Autocorrelación (Simple y Parcial).*

1.3.1 Análisis gráfico

Antes de aplicar cualquier prueba para el análisis de la serie, lo recomendable es poder graficar la serie de tiempo en estudio. Ésta gráfica proporciona una pista inicial respecto a la posible naturaleza de dicha serie.

Es suficiente observar el gráfico de la serie para diagnosticar si su valor medio se mantiene constante, o si crece o decrece (existencia de alguna tendencia), así como la presencia de estacionalidad en los datos.

1.3.2 Función de Autocovarianza

La función de autocovarianza (o también llamada covarianza) indica el grado de variación conjunta de dos variables aleatorias, para determinar si existe una dependencia entre ambas variables. La función de autocovarianza está dada de la siguiente forma:

$$\gamma(t_1, t_2) = Cov(Y_{t_1}, Y_{t_2})$$

Se supone que $t_1 \leq t_2$; entonces también podemos decir que $t_1 = t_2 + h$. Cuando $t_1 = t_2$, la autocovarianza $\gamma(t_1, t_2)$ es la varianza de la variable aleatoria con la que se está trabajando. La distinción de esto, es porque no es necesario que las variables aleatorias tengan la misma varianza con respecto al tiempo t.

1.3.3 Función de Autocorrelación (FAC)

Cuando se quiere analizar la serie de tiempo, es necesario identificar la estructura que la genera, es decir, cómo influyen las observaciones del pasado en las observaciones del futuro. Para poder identificar ésta dependencia, utilizamos dos fuentes de información: la Función de Autocorrelación Simple (FAS) y la Función de Autocorrelación Parcial (FAP).

La **Función de Autocorrelación Simple (FAS)** de una serie de tiempo nos proporciona la estructura de dependencia de la misma serie.

Si denominamos como y_t a la serie temporal, los valores que se observarán van a ser los siguientes:

$$y_1, y_2, \dots, y_{t-2}, y_{t-1}, y_t, y_{t+1}, y_{t+2}, \dots$$

Dónde y_1 representa el primer valor de la serie, y_2 representa el segundo valor de la serie y, y_t representa el valor actual de la serie. Así, y_{t+1} representa el valor de la serie para un próximo periodo (un valor futuro).

La FAS proporciona el coeficiente de correlación entre las observaciones separadas un número determinado de periodos. Entonces será una sucesión de números: $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_{k-1}, \rho_k, \dots$ que representan la influencia de la observación sobre la siguiente (ρ_1), sobre la segunda (ρ_2) o sobre la k periodos adelante (ρ_k). Es decir:

ρ_1: Influencia de una observación y_i sobre y_{i+1}

ρ_2: Influencia de una observación y_i sobre y_{i+2}

ρ_3: Influencia de una observación y_i sobre y_{i+3}

Y así sucesivamente.

Por ejemplo: El coeficiente de autocorrelación entre la variable y_t y la misma variable en un periodo anterior, y_{t-1} , al que denominaremos coeficiente de autocorrelación de primer orden, se presenta de la siguiente manera:

$$\rho_1 = \frac{cov(y_t, y_{t-1})}{\sqrt{var(y_t) * var(y_{t-1})}}$$

Dado el supuesto de estacionariedad, se tiene que la $var(y_t) = var(y_{t-1})$ por lo que:

$$\rho_1 = \frac{cov(y_t, y_{t-1})}{var(y_t)}$$

En general, para un desfase de k periodos, se tiene:

$$\rho_k = \frac{cov(y_t, y_{t-k})}{var(y_t)}$$

Y cuando el valor de k=0, entonces tenemos:

$$\rho_0 = \frac{cov(y_t, y_t)}{var(y_t)} = \frac{var(y_t)}{var(y_t)} = 1$$

Estos coeficientes de la FAS, $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_k, \dots$ están acotados entre [-1,1].

1. Si ρ_i vale cero, quiere decir que no existe efecto entre una observación y la i posiciones posteriores.
2. Si ρ_i es cercano a 1, quiere decir que hay mucha relación entre una observación y la i posiciones posteriores, y que esa relación es positiva.
3. Si ρ_i es cercano a -1, quiere decir que hay mucha relación entre una observación y la i posiciones posteriores, y que esa relación es negativa.

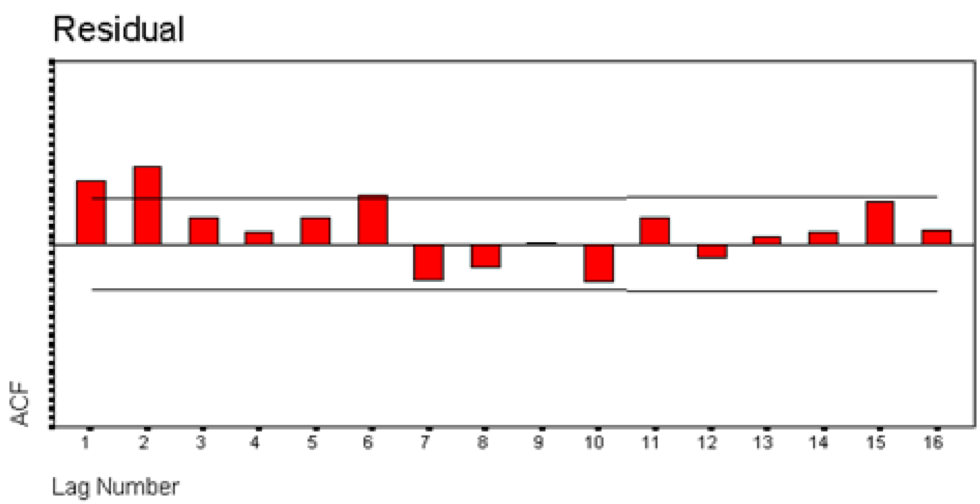


Figura 10. Diseño de una FAS.

En la imagen anterior, se muestra una FAS. Se observa que la función de autocorrelación presenta los coeficientes de correlación de la serie consigo misma (por eso se le llama Autocorrelación). Aquí se nota que los coeficientes (también llamados palos de la función) son significativos para retardos bajos. Las bandas horizontales proporcionan los límites para considerar si un retardo es significativo o no lo es. Esto quiere decir que si un palo está dentro de las bandas, será no significativo.

Hay un problema con la FAS, ya que si ρ_1 es distinto de cero, entonces $y_1\ influye\ sobre\ y_2, y_2\ influye\ sobre\ y_3, \dots\ y_t\ influye\ sobre\ y_{t+1}$, es decir, existe una cadena de influencia separada por un retardo. Pero si $y_1\ influye\ sobre\ y_2$, y $y_2\ influye\ sobre\ y_3$ entonces $y_1\ influye\ sobre\ y_3$. Por lo tanto, se construye la Función de Autocorrelación Parcial.

La **Función de Autocorrelación Parcial (FAP)** proporciona la relación directa que existe entre observaciones separadas por k retardos. Ésta información es valiosa para la serie, ya que elimina el problema que se tenía en la FAS (que si $y_1\ influye\ sobre\ y_2,\ y,\ y_2\ influye\ sobre\ y_3$ entonces $y_1\ influye\ sobre\ y_3$)

En la FAS, el primer palo será significativo, además el segundo también lo será ya que si $y_1\ influye\ sobre\ y_2$, y $y_2\ influye\ sobre\ y_3$ entonces $y_1\ influye\ sobre\ y_3$. Esto no ocurre en la FAP, ya que el primer palo será significativo pero el segundo ya no lo será, como se muestra en la siguiente figura:

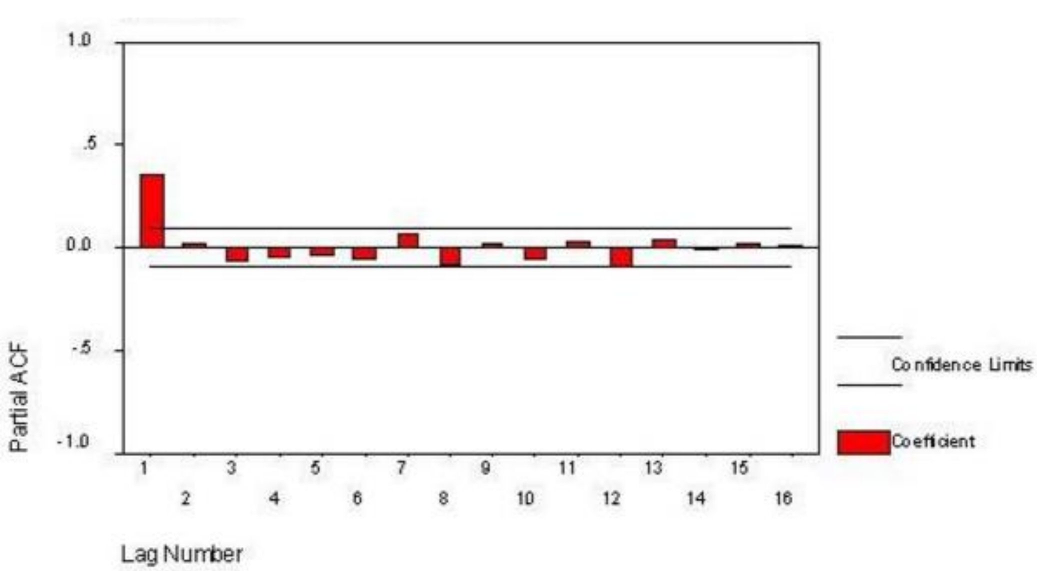


Figura 11. Estructura de una FAP.

Así, se puede observar que el primer retardo es significativo, mientras que ninguno de los demás lo es. Es decir, la serie presenta relación directa entre una observación y la siguiente, pero ya no existe ninguna otra relación directa.

Capítulo 2. Modelos para series de tiempo

En general, existen 5 modelos de pronósticos económicos basados en las series de tiempo:

1. Modelos de suavizamiento exponencial.
2. Modelos de regresión uniecuacionales.
3. Modelos de regresión de ecuaciones simultáneas.
4. Modelos autorregresivos integrados de promedios móviles (ARIMA).
5. Modelos de vectores autorregresivos (VAR).

Como ya habíamos dicho, nos basaremos en la metodología de los modelos ARIMA (metodología de Box-Jenkins).

En un modelo de series de tiempo, la serie se descompone en dos términos: la parte sistemática y la parte del error (también llamado innovación).

La parte sistemática es toda la información que se tiene del pasado y del cual se construye nuestro modelo, y la innovación, es la parte aleatoria que indica el término de error que se tiene entre la serie observada y la serie modelada.

El interés de estos métodos de pronósticos está en el análisis de las propiedades probabilísticas, o estocásticas, de las series de tiempo económicas por sí mismas, esto es, que los datos hablen por sí mismos. Es decir, en estos modelos de series de tiempo, la variable Y_t se explica por valores pasados o rezagados de sí misma y por los términos de error estocásticos. Nos basaremos en los modelos ARIMA univariados, es decir, los modelos que pertenecen a una sola serie de tiempo.

2.1 Modelos AR, MA y ARMA

2.1.1 Proceso Autorregresivo (AR)

Un proceso estocástico autorregresivo es aquel, en donde el valor de la variable se expresa en función de su propio pasado más un término de error o innovación al tiempo t.

Sea Y_t la variable que se denota de la siguiente manera:

$$(Y_t - \delta) = \alpha_1(Y_{t-1} - \delta) + u_t$$

Donde δ es la media de Y y u_t es un término de error aleatorio no correlacionado con media cero y varianza constante σ^2 (ruido blanco), se dice que Y_t sigue un proceso estocástico autorregresivo de primer orden, un AR(1).

Este modelo dice que el valor de la variable Y al tiempo t es una proporción (α_1) de su valor en el periodo anterior (t-1) más un choque aleatorio en el tiempo t, donde los valores de Y están expresados alrededor de su media.

Ahora si consideramos el siguiente modelo de la variable Y:

$$(Y_t - \delta) = \alpha_1(Y_{t-1} - \delta) + \alpha_2(Y_{t-2} - \delta) + u_t$$

Decimos que Y_t sigue un proceso estocástico autorregresivo de orden 2, un AR(2). Es decir, el valor de Y en el tiempo t depende de sus valores en los dos periodos anteriores, los valores de Y son expresados alrededor de su media δ.

En general, se tiene:

$$(Y_t - \delta) = \alpha_1(Y_{t-1} - \delta) + \alpha_2(Y_{t-2} - \delta) + \cdots + \alpha_p\big(Y_{t-p} - \delta\big) + u_t$$

Entonces, se dice que Y_t es un proceso estocástico autorregresivo de orden p, un AR(p).

Aquí se puede notar, como este proceso considera sólo los valores actuales y anteriores de Y, por eso, decimos que los datos hablan por sí mismos.

2.1.2 Proceso de Medias Móviles (MA)

Un proceso estocástico de medias o promedios móviles, es aquel, en donde el valor de la variable se expresa en función de los términos de error presentes y pasados al tiempo t.

Tenemos el siguiente modelo de Y:

$$Y_t = \mu + \beta_0 u_t + \beta_1 u_{t-1}$$

Donde μ es una constante y u, al igual que antes, es un término de error de ruido blanco. Así, la variable Y en el tiempo t es igual a una constante más un promedio móvil de los términos de error, tanto presentes como pasados. Entonces se dice que Y sigue un proceso estocástico de promedios móviles de primer orden, o un MA(1).

Ahora si tenemos:

$$Y_t = \mu + \beta_0 u_t + \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2}$$

Entonces se dice que la variable Y sigue un proceso de medias móviles de segundo orden, o un MA(2).

En general, si tenemos:

$$Y_t = \mu + \beta_0 u_t + \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2} + \cdots + \beta_q u_{t-q}$$

Entonces si dice que la variable Y sigue un proceso de medias móviles de orden q, o un MA(q).

En resumen, un proceso de promedios móviles es una combinación lineal de los términos de error de ruido blanco.

2.1.3 Proceso Autorregresivo y de Medias Móviles (ARMA)

Es muy probable que la variable Y tenga características de un AR y un MA al mismo tiempo, por lo que, será un proceso autorregresivo y de medias móviles, conocido como ARMA.

Por lo tanto, si tenemos:

$$Y_t = \theta + \alpha_1 Y_{t-1} + \beta_0 u_t + \beta_1 u_{t-1}$$

Donde θ representa una constante, se dice que la variable Y sigue un proceso ARMA(1,1), ya que contiene un término autorregresivo y un término de medias móviles.

En general, un proceso ARMA(p,q) tendrá p términos autorregresivos y q términos de medias móviles.

2.2 Modelos Autorregresivos Integrados y de Medias Móviles (ARIMA)

Los modelos de serie de tiempo analizados se basan en el supuesto de que las series de tiempo consideradas son débilmente estacionarias, esto es, la media y la varianza de una serie débilmente estacionaria son constantes y su covarianza es invariante con respecto al tiempo. Se sabe que muchas series de tiempo económicas son no estacionarias, es decir, son integradas.

Sin embargo, si una serie de tiempo es integrada de orden 1 (es I(1)), sus primeras diferencias son I(0), es decir, son estacionarias. De igual manera, si una serie de tiempo es integrada de orden 2, I(2), sus segundas diferencias serán I(0). Por lo tanto, si una serie de tiempo es I(d), después de diferenciarla d veces, obtendremos una serie I(0).

Por consiguiente, si se debe diferenciar una serie d veces para hacerla estacionaria y luego aplicar el modelo ARMA(p,q), diremos que la serie original es un modelo ARIMA(p,d,q), donde p denota el número de términos autorregresivos, d el número de veces que la serie debe diferenciarse para hacerse estacionaria y q el número de términos de medias móviles. Así, un modelo ARIMA(2,1,1) tiene que diferenciarse una vez (d=1) puede modelarse como un proceso ARMA(2,1), es decir, con dos términos autorregresivos y un término de medias móviles. Desde luego, si d=0, donde la serie desde un principio es estacionaria, el modelo ARIMA(p,d=0,q)=ARMA(p,q). Si se tiene un modelo ARIMA(0,0,q) tendremos un modelo MA(q) y si tenemos un modelo ARIMA(p,0,0) tendremos un modelo AR(p).

Ésta metodología de Box-Jenkins consiste en las siguientes 4 etapas:

1. **Identificación**. Se trata de elegir uno o más modelos ARIMA como candidatos que puedan representar adecuadamente el comportamiento de la serie. En ésta etapa deben determinarse las transformaciones necesarias para conseguir estacionariedad, estacionalidad, inclusión de un término de tendencia y elegir los órdenes p y q para cada uno de los modelos estudiados.

2. **Estimación**. Consiste en inferir sobre los parámetros de cada uno de los modelos identificados anteriormente.
3. **Validación**. Tratar de determinar si los modelos identificados y estimados son adecuados para representar a los datos.
4. **Predicción**. Ya que los modelos han sido diagnosticados favorablemente, se pueden realizar las predicciones necesarias.

Para evaluar la calidad del ajuste teniendo en cuenta el número de parámetros estimados en el modelo y la verosimilitud, tenemos el criterio AIC (Criterio de Información de Akaike), cuánto más pequeño sea el valor de criterio de información, será mejor el modelo propuesto.

Se hará un análisis inicial de la serie de tiempo. Identificaremos las principales características de la serie: **comportamiento no estacionario y presencia de estacionalidad de los datos**.

Para la corrección de la no estacionariedad, se pueden realizar dos tipos de transformaciones sobre la serie original de los datos:

1. Para estabilizar la media, se toman diferenciaciones del tipo:

$$\nabla_s X_t = (1 - B^s)X_t = X_t - X_{t-s} \qquad t = s + 1, \dots, T$$

2. Para estabilizar la varianza, usualmente se usan transformaciones de Box-Cox: logarítmica, inversa, cuadrática, raíz cuadrada, etc. Con esto, también nos ayuda a obtener normalidad en los datos.

Capítulo 3. Modelos ARCH y GARCH

3.1 Modelos ARCH

En la práctica, los modelos del tipo lineal de series de tiempo como ARIMA o los de regresión, no siempre resultan los más adecuados para analizar y predecir adecuadamente. Por eso, se han propuesto modelos no lineales para desarrollar métodos de estimación apropiados para poder validar dichos resultados.

Muchas de las series de tiempo económicas, en especial las financieras, muestran cambios en los momentos condicionados de segundo orden (presencia positiva en la serie de los cuadrados). Estos cambios tienden a estar correlacionados, donde los cambios de gran magnitud en el valor de la serie son seguidos por grandes cambios (periodos donde hay mucha volatilidad) y pequeños cambios en el valor de la serie son seguidos por pequeños cambios (periodos en donde hay poca volatilidad). Fue Engle, quién proporcionó una serie de modelos que tratan de representar este comportamiento en la serie temporal.

La formulación básica de estos modelos es modelizar la serie e_t:

$$e_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

Donde σ_t es el factor denominado volatilidad y ε_t es un proceso de ruido blanco formado por variables aleatorias normales independientes con media cero y varianza uno.

La condición de independencia entre estos dos valores (σ_t y ε_t), garantiza que ésta serie tenga media marginal y media condicional nula. Esto es:

$$E(e_t) = E(\sigma_t \varepsilon_t) = E(\sigma_t)E(\varepsilon_t) = 0$$

$$E(e_t|e_{t-1}) = E(\sigma_t|e_{t-1})E(\varepsilon_t) = 0$$

Para la varianza marginal (o varianza incondicional) y la varianza condicionada, se tiene lo siguiente:

$$E(e_t^2) = E(\sigma_t^2 \varepsilon_t^2) = E(\sigma_t^2)E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2 * 1 = \sigma^2$$

$$Var(e_t^2|e_{t-1}) = E(\sigma_t^2|e_{t-1})E(\varepsilon_t^2|e_{t-1}) = E(\sigma_t^2|e_{t-1})E(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2$$

Esto es, que la varianza marginal tiene que ser constante, pero la varianza condicionada no lo es. Por tanto, σ_t^2 representa la varianza condicionada de la serie en cada instante, que va variando con una estructura estacionaria.

La condición de independencia entre σ_t y ε_t, nos garantiza que la serie e_t carezca de autocorrelación y forme un proceso de ruido blanco. Además, la serie e_t es de variables dependientes.

Ahora analizaremos el comportamiento del modelo ARCH para casos simples: el modelo ARCH(1), donde la varianza condicional depende de un solo retardo. Después consideraremos el estudio para cuando se tengan r retardos (modelo ARCH(r)).

3.2 Modelo ARCH(1)

Para el modelo ARCH(1), la varianza condicional σ_t^2, tiene una estructura similar a un modelo AR(1), dónde sólo depende del último valor observado:

$$\sigma_t^2 = E(e_t^2|e_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2$$

Donde $\alpha_0 > 0$ (mínima varianza condicional observada) y $0 \leq \alpha_1 \leq 1$ (condición necesaria y suficiente para la existencia de la varianza condicional e incondicional). Esto es, que si el valor de e_t^2 es alto, la varianza σ_t^2 de la siguiente observación condicionada a este valor, también será alto. Con esto, se va a producir una correlación entre los cuadrados de la serie, provocando rachas de valores de magnitud elevada o con mayor varianza.

Dado que la media marginal y la media condicionada valen cero, aunque la varianza condicionada sea elevada, siempre es posible que aparezca un valor pequeño de e_t^2, que disminuiría la varianza condicionada de la observación siguiente y facilitaría que la observación sea pequeña en valor absoluto. De esta manera, la serie puede presentar rachas de valores muy altos, pero en general será estacionaria.

La varianza marginal de la serie temporal es el promedio de las varianzas condicionadas, que debe ser mayor que α_0 y será tan mayor como sea el valor de α_1, que impacta en el valor de la última observación. Si llamamos a $\sigma^2 = E(e_t^2)$ a la varianza marginal, entonces tenemos:

$$\sigma^2 = E[E(e_t^2|e_{t-1})] = \alpha_0 + \alpha_1 E(e_{t-1}^2)$$

Dónde $E(e_{t-1}^2) = E(e_t^2) = \sigma^2$ y sustituyendo en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \ , \ \ 0 \leq \alpha_1 < 1$$

El modelo ARCH(1) establece dependencia de tipo AR(1) entre los cuadrados de las observaciones, por lo tanto:

$$e_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1} + v_t$$

Donde $v_t = e_t^2 - \sigma_t^2$ es un proceso de ruido blanco, formado por variables estacionarias no correlacionadas con media cero y varianza marginal constante.

Si llamamos $\rho_c(k)$ a la función de autocorrelación de los cuadrados de la serie, donde c se refiere a los cuadrados, se obtiene:

$$\rho_c(k) = \alpha_1 \rho_c(k-1)$$

Que indican que las autocorrelaciones de los cuadrados de la serie tienen la estructura de un AR(1) con parámetro α_1.

En resumen:

1. La esperanza marginal y condicional son iguales a cero.
2. La varianza marginal es constante
3. La varianza condicional depende de los valores que haya tomado e_{t-1}^2, por lo que no es constante.

3.3 Modelo ARCH(r)

Para el modelo ARCH(1) se puede generalizar, asumiendo una dependencia de la varianza condicional con r retardos. De manera que el modelo ARCH(r) para $e_t = \sigma_t \varepsilon_t$, la varianza condicional es:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_r e_{t-r}^2$$

Donde $\alpha_0 > 0$, que corresponde a la mínima varianza condicional observada y $0 \leq \alpha_1 \leq 1$, donde corresponde a la condición necesaria y suficiente para la existencia de la varianza condicional e incondicional. En este proceso, las posibilidades de rachas de alta volatilidad dependen de los últimos r valores.

La varianza marginal se define:

$$Var(e_t) = E(e^2) = E[E(e_t^2|e_{t-1})] = \alpha_0 + \sum \alpha_i E(e_{t-i}^2)$$

Siendo $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i < 1$

Por lo tanto:

$$Var(e_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \cdots - \alpha_r}$$

Si tomamos en cuenta a $v_t = e_t^2 - \sigma_t^2$, como en el proceso ARCH(1), será un proceso de ruido blanco, formado por variables estacionarias no correlacionadas con media cero y varianza marginal constante, y que se puede expresar la dependencia de los cuadrados de la siguiente manera:

$$e_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_r e_{t-r}^2 + v_t$$

Así, en resumen se tiene que el modelo ARCH(r):

1. Es un proceso de ruido blanco pero no es independiente y no está idénticamente distribuido.
2. La esperanza condicional y la esperanza marginal son iguales a cero.
3. La varianza marginal es constante.
4. La varianza condicional depende de $e_{t-1}, e_{t-2}, \dots, e_{t-r}$, luego no es constante.

3.4 Modelo GARCH

Una característica de los modelos ARCH es que requieren un gran número de parámetros autorregresivos y, para representar mejor el comportamiento de la varianza, se imponía una estructura fija de retardos. Con el propósito de hacer más flexible estas restricciones, Bollerslev propuso el modelo ARCH generalizado o GARCH.

La generalización del modelo ARCH al modelo GARCH, tiene una gran similitud con la extensión de los procesos autorregresivos (AR) a los procesos de medias móviles (ARMA), permitiendo así, una representación más clara de la volatilidad.

Bollerslev considera que la varianza, σ_t^2, además de que depende de las observaciones pasadas de e_t, también lo hace de su propio pasado. Esta dependencia se expresa incluyendo cierto número de retardos p de σ_t^2, de forma que la varianza condicional se expresa de la siguiente manera:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Donde $\alpha_0 > 0,\ \alpha_i \geq 0,\ i = 1, \dots, r,\ \beta_j \geq 0,\ j = 1, \dots, p$. El nuevo modelo se denomina GARCH(p,r) y se reduce al conocido ARCH(r) cuando p=0. Bollerslev establece las condiciones de estacionariedad, probando que e_t es débilmente estacionario con:

$$E(e_t) = 0$$

$$Var(e_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i - \sum_{j=1}^{p} \beta_j}$$

$$Cov(e_t, e_s) = 0 \; para \; s \neq t \; \Leftrightarrow \sum\nolimits_{i=1}^{r} \alpha_i + \sum\nolimits_{j=1}^{p} \beta_j < 1$$

Cabe destacar la importante relación que existe entre los modelos GARCH y los modelos ARMA ya que, si definimos $v_t = e_t^2 - \sigma_t^2$ será un proceso de ruido blanco formado por variables estacionarias no correlacionadas con media cero y varianza marginal constante, podemos expresar la dependencia de los cuadrados de las observaciones del modelo GARCH como un proceso ARMA, como se muestra a continuación:

$$e_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\max(p,r)} (\alpha_i + \beta_i) e_{t-i}^2 + v_t - \sum_{j=1}^{p} \beta_j v_{t-j}$$

3.5 Modelo GARCH(1,1)

Para varios trabajos con series financieras, muestran que el caso más sencillo del modelo GARCH, el GARCH(1,1), es suficiente para modelizar con éxito los cambios temporales de la varianza condicional, incluso sobre periodos muestrales largos.

El modelo GARCH(1,1) se obtiene cuando $p = r = 1$, de forma que la varianza condicionada queda de la siguiente forma:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

Con $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0$. Si $\alpha_1 + \beta_1 < 1$, la serie e_t tiene varianza finita, y por ser una martingala en diferencias, es ruido blanco con media cero y varianza:

$$Var(e_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1}$$

Si $p = r = 1$, la ecuación se escribe:

$$e_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) e_{t-1}^2 + v_t - \beta_1 v_{t-1}$$

El modelo GARCH(1,1) puede interpretarse como un proceso ARMA(1,1) para la serie e_t^2, cuya función de autocorrelación será:

$$\rho_c = \frac{\alpha_1(1 - \alpha_1\beta_1 - \beta_1^2)}{(1 - 2\alpha_1\beta_1 - \beta_1^2)}$$

Mientras que:

$$\rho_c(k) = (\alpha_1 + \beta_1)^{k-1} \rho_c(1)$$

Capítulo 4. Aplicación de la metodología y resultados

En este capítulo, se aplicará toda la metodología vista en los capítulos anteriores, con la ayuda de dos software estadísticos, Forecast Pro XE y @Risk, que nos ayudarán con el análisis del comportamiento de la serie.

Para empezar con el estudio de la serie, se tienen los datos históricos diarios de todos los días hábiles sobre el valor del tipo de cambio peso-dólar, desde el 13 de Noviembre de 1991 hasta el 2 de Septiembre de 2016. Sólo tomaremos en cuenta los valores partiendo del 4 de Agosto de 2015 a la fecha del 2 de Septiembre de 2016 (precios diarios) y del último día hábil de Agosto de 2013 al último día de Agosto del 2016 (precios mensuales).

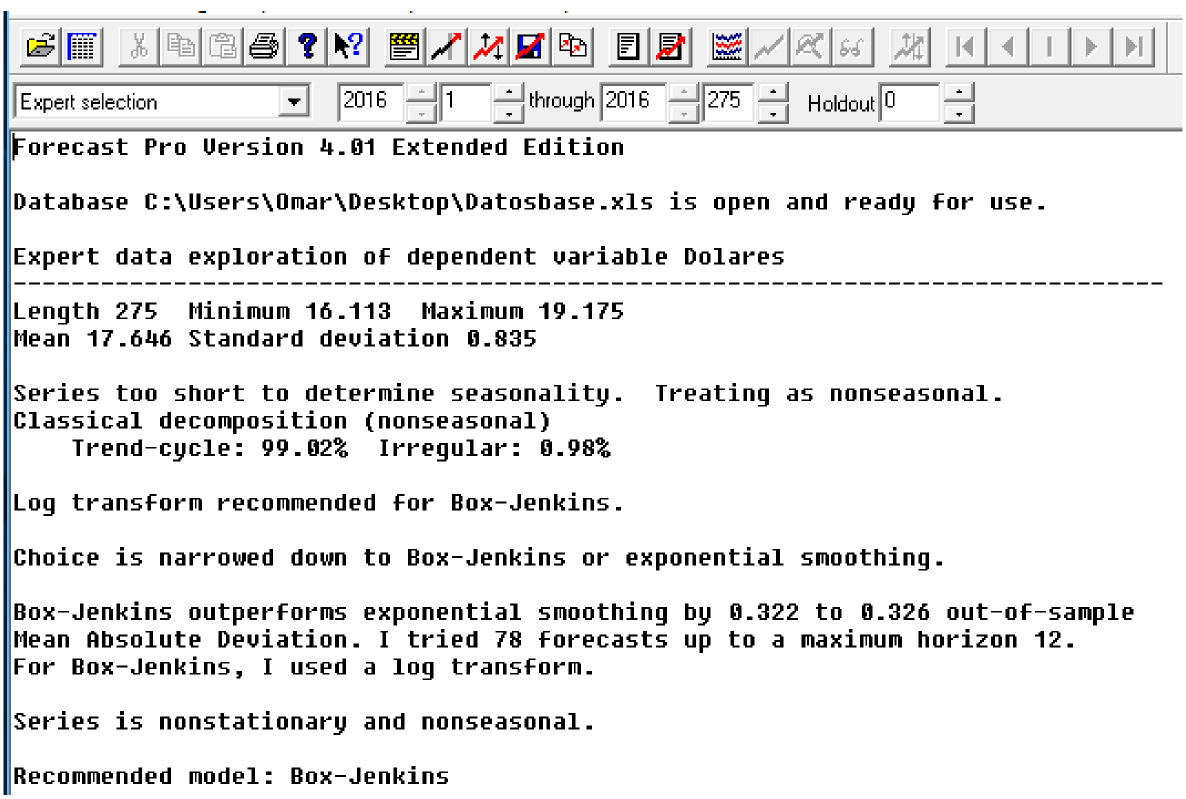
En primer lugar, graficaremos todos los valores de los datos históricos y veremos cómo se comporta la gráfica de la serie de tiempo:

Figura 12. Gráfica de los datos históricos del tipo de cambio peso-dólar realizada en Excel.

La gráfica nos muestra que la serie parece ser no estacionaria en media y no estacionaria en varianza. Para verificar esto, en primera instancia, introduciremos los precios diarios en el software Forecast Pro XE para el análisis de los datos, después haremos lo mismo por medio del software @Risk. Teniendo esto realizado, se hará de igual manera para los precios mensuales de la serie de tiempo.

4.1 Análisis y pronóstico para el tipo de cambio diario con Forecast Pro XE.

En éste análisis, el software toma en cuenta varios modelos para serie de tiempo, seleccionando el que mejor se ajuste a la serie. El resultado obtenido es el siguiente:




```
Forecast Pro Version 4.01 Extended Edition

Database C:\Users\Omar\Desktop\Datosbase.xls is open and ready for use.

Expert data exploration of dependent variable Dolares
-------------------------------------------------------------------------------
Length 275  Minimum 16.113  Maximum 19.175
Mean 17.646 Standard deviation 0.835

Series too short to determine seasonality.  Treating as nonseasonal.
Classical decomposition (nonseasonal)
    Trend-cycle: 99.02%  Irregular: 0.98%

Log transform recommended for Box-Jenkins.

Choice is narrowed down to Box-Jenkins or exponential smoothing.

Box-Jenkins outperforms exponential smoothing by 0.322 to 0.326 out-of-sample
Mean Absolute Deviation. I tried 78 forecasts up to a maximum horizon 12.
For Box-Jenkins, I used a log transform.

Series is nonstationary and nonseasonal.

Recommended model: Box-Jenkins
```

Figura 13. Análisis del software para la base de datos diarios.

El reporte que realiza el software nos habla de lo siguiente:

1. Proporciona un resumen sobre la base de datos: el tamaño o longitud, el valor mínimo y máximo, así como la media y desviación estándar.
2. Indica que la serie es demasiado corta para que se determine la no estacionalidad, por lo que se tratará a la serie como no estacional.
3. El software nos muestra dos métodos como opciones para realizar el análisis: el modelo ARIMA (Box-Jenkins) o por medio del método de suavizamiento exponencial. Se hará una transformación logarítmica, para Box-Jenkins.
4. Al final, la serie es no estacionaria y no estacional, por lo que recomienda realizar el modelo ARIMA para su estudio.

```
Recommended model: Box-Jenkins

Forecast Model for Dolares
ARIMA(0,1,1) with log transform

Term          Coefficient  Std. Error  t-Statistic  Significance
-------------------------------------------------------------------------------
b[1]          -0.1536       0.0596      -2.5775       0.9900

Within-Sample Statistics
------------------------------------------------------------
Sample size 275                  Number of parameters 1
Mean 2.869                       Standard deviation 0.04756
R-square 0.9716                  Adjusted R-square 0.9716
Durbin-Watson 2.035              * Ljung-Box(18)=29 P=0.9516
Forecast error 0.008008          BIC 0.1423
MAPE 0.00608                     RMSE 0.1431
MAD 0.108
```

Figura 14. Valores estadísticos del software para la base de datos diarios.

En efecto, el software recomienda un modelo ARIMA(0,1,1); haciendo una transformación logarítmica para que la serie se vuelva estacionaria en varianza y una transformación de primeras diferencias (d=1) para que la serie sea estacionaria en media, así se tiene un proceso de medias móviles de orden 1 (q=1).

Con esto, revisamos los valores de la R-cuadrada: 0.9716 que es muy cercano a 1 (muy aceptable), además del estadístico Durbin-Watson: 2.035 que es muy cercano a 2.

En resumen, hay suficiente prueba estadística para decir que el modelo ARIMA es el que mejor se ajusta a la serie de tiempo para su análisis, con ello se realizaron transformaciones (logarítmica y diferencias) para la estacionariedad de la serie.

Teniendo la estacionariedad en media y la estacionariedad en varianza de la serie de tiempo, ahora procedemos al pronóstico del tipo de cambio peso-dólar al último día hábil del año 2016 (viernes 30 de Diciembre de 2016).

Antes de calcular los valores pronosticados, se muestran los datos históricos de la serie, así como los valores de la serie ajustada a la serie del tipo de cambio mediante Box-Jenkins. Notaremos que la serie ajustada se acopla muy bien a los datos históricos de la serie y así poder realizar un pronóstico adecuado.

Box-Jenkins model for Dolares
Analysis of Historic Fit Set

Date	Historic	Fitted
2016-01	16.113	
2016-02	16.174	16.114
2016-03	16.376	16.183
2016-04	16.353	16.406
2016-05	16.164	16.345
2016-06	16.165	16.136
2016-07	16.324	16.169
2016-08	16.298	16.348
2016-09	16.354	16.290
2016-10	16.366	16.364
2016-11	16.399	16.366
2016-12	16.432	16.404
2016-13	16.491	16.436
2016-14	16.718	16.499
2016-15	16.917	16.752
2016-16	17.097	16.943
2016-17	16.986	17.121
2016-18	17.107	16.965
2016-19	16.886	17.129
2016-20	16.768	16.849

Figura 15. Valores iniciales de los precios históricos y la serie ajustada.

2016-259	18.348	18.362
2016-260	18.268	18.346
2016-261	18.246	18.256
2016-262	18.036	18.244
2016-263	17.987	18.004
2016-264	18.260	17.984
2016-265	18.083	18.303
2016-266	18.267	18.049
2016-267	18.302	18.301
2016-268	18.320	18.302
2016-269	18.497	18.323
2016-270	18.446	18.524
2016-271	18.283	18.434
2016-272	18.577	18.260
2016-273	18.795	18.626
2016-274	18.861	18.821
2016-275	18.852	18.867

Figura 16. Valores finales de los precios históricos y la serie ajustada.

Para realizar el pronóstico de la serie, se calculan los días hábiles que restan desde la fecha de hoy (2 de Septiembre de 2016) al último día hábil del año (30 de diciembre de 2016) y obtenemos 84 días restantes. Así, tenemos los valores futuros:

Box-Jenkins model for Dolares

Forecasted Values

Date	2.5 Lower	Forecast	97.5 Upper
2016-276	18.556	18.850	19.148
2016-277	18.403	18.850	19.307
2016-278	18.292	18.850	19.424
2016-279	18.200	18.850	19.522
2016-280	18.120	18.850	19.609
2016-281	18.049	18.850	19.686
2016-282	17.983	18.850	19.758
2016-283	17.923	18.850	19.824
2016-284	17.867	18.850	19.887
2016-285	17.813	18.850	19.946
2016-286	17.763	18.850	20.003
2016-287	17.715	18.850	20.057
2016-288	17.669	18.850	20.109
2016-289	17.626	18.850	20.159
2016-290	17.583	18.850	20.207
2016-291	17.543	18.850	20.254
2016-292	17.503	18.850	20.300
2016-293	17.465	18.850	20.344

Figura 17. Valores iniciales del pronóstico del tipo de cambio peso-dólar.

2016-352	16.085	18.850	22.090
2016-353	16.068	18.850	22.113
2016-354	16.052	18.850	22.135
2016-355	16.035	18.850	22.158
2016-356	16.019	18.850	22.180
2016-357	16.003	18.850	22.203
2016-358	15.987	18.850	22.225
2016-359	15.971	18.850	22.247
2016-360	15.956	18.850	22.269

Figura 18. Valores finales del pronóstico del tipo de cambio peso-dólar.

El valor del pronóstico para el tipo de cambio peso-dólar diario al último día hábil del año 2016 (30 de Diciembre) será de $18.850, teniendo como valor mínimo $15.956 y en el peor de los casos, un valor máximo de $22.269 con un nivel de confianza del 95%.

El pronóstico del precio del tipo de cambio que se generó con este modelo se mantiene constante, ya que el software no toma la parte del error que se generaría aleatoriamente, por eso no cambia mucho con respecto al último valor. Esto pasa gracias a que la desviación estándar de la serie de tiempo es muy pequeña y esto hace que se mantenga casi igual al último día del año.

Graficando los valores de la serie de tiempo junto con los valores del pronóstico que se obtuvieron anteriormente, se tiene el siguiente esquema:

Ésta gráfica muestra los valores de la serie de tiempo en color negro, junto con el pronóstico obtenido de color rojo, además de las bandas de confianza al 95% en color azul.

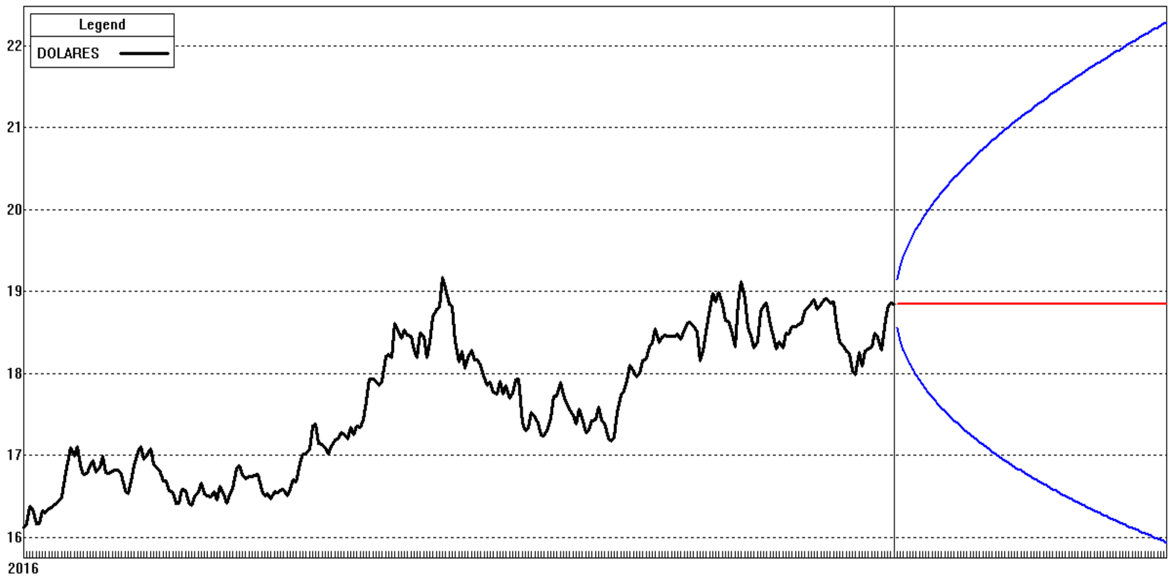


Figura 19. Valores de la serie de tiempo y el pronóstico realizado.

Ahora, añadimos la parte del modelo que se ajusta a la serie de tiempo en color rojo, junto con los valores históricos en color negro, las bandas de confianza del modelo al 95% en color azul y el pronóstico obtenido:

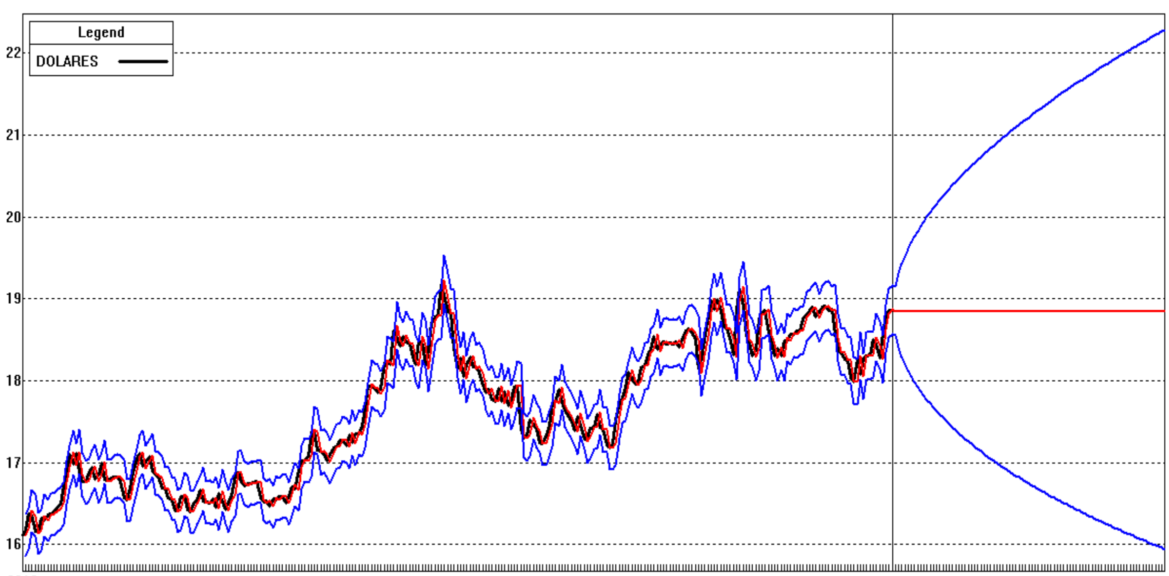


Figura 20. Valores de la serie de tiempo, el pronóstico realizado y el modelo ajustado a la serie de tiempo.

4.2 Análisis y pronóstico para el tipo de cambio diario con @Risk.

Ahora, haremos el análisis de la serie de tiempo con el software @Risk. Para esto, introducimos los valores de la serie del tipo de cambio peso-dólar diario desde el 4 de Agosto de 2015 al 2 de Septiembre de 2016.

Teniendo los datos de la serie en Excel, corremos el software, seleccionando todos los valores de la serie y obtenemos la siguiente ventana:

Figura 21. Ventana de opciones para el análisis de la serie de tiempo.

En esta imagen, se aprecia el ajuste que se hará a la serie de tiempo. Daremos el nombre de la variable y el rango que contiene los datos de la serie de tiempo. Después, aparecen las opciones para hacer estacionaria a la serie (en dado caso que no lo sea), siendo las siguientes:

1. Función: Se realizan transformaciones para que la serie se vuelva estacionaria en varianza (logarítmica o raíz cuadrada).
2. Deshacer la tendencia: Aquí se harán transformaciones en diferencias para hacer que la serie se vuelva estacionaria en media (diferenciación de primer o segundo orden).
3. Desestacionalizar: En dado caso que la serie muestre estacionalidad, se manejan varias opciones para que la serie no sea estacional (diferenciación de primer orden, de segundo orden o aditivo).

Para seleccionar el mejor ajuste, tomaremos el Criterio de Información de Akaike (AIC). El gráfico muestra los valores históricos de la serie de tiempo, indicando que en la serie todavía no se ha hecho ninguna transformación, así como la Función de Autocorrelación Simple y la Función de Autocorrelación Parcial. Además, aparece una pequeña leyenda, en donde nos dice que parece ser que la serie no es estacionaria en media y tendremos que hacer los ajustes necesarios.

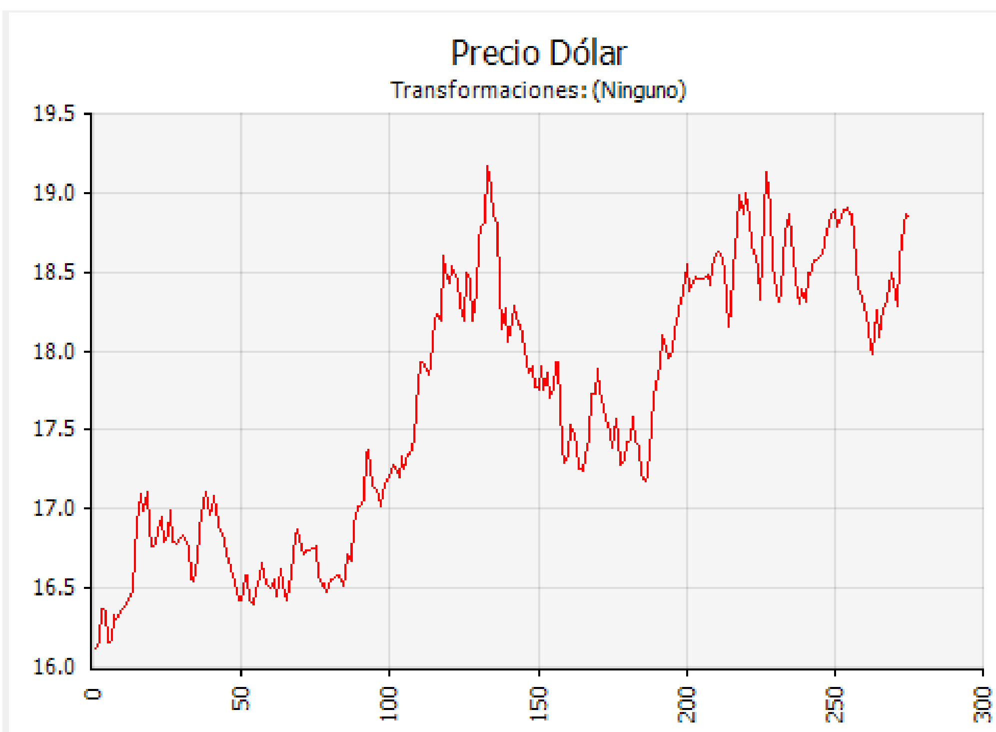


Figura 22. Gráfica de los valores históricos de la serie de tiempo sin transformaciones.

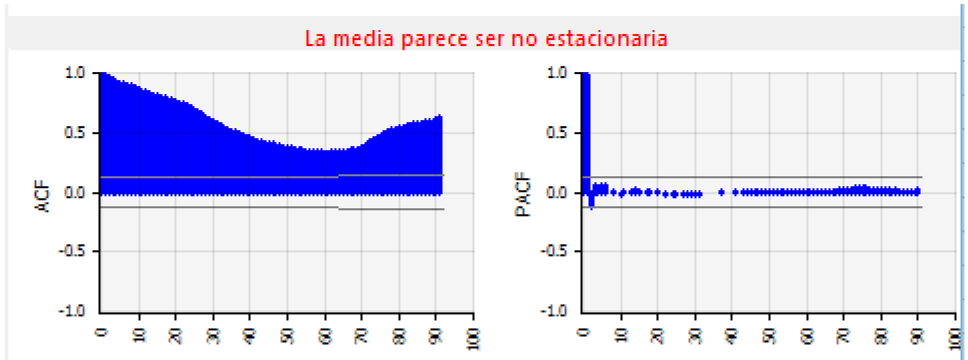


Figura 23. FAS y FAP de la serie de tiempo.

Para que el software haga los ajustes automáticamente como crea conveniente, seleccionamos la opción de "Auto Detectar", obteniendo el siguiente resultado:

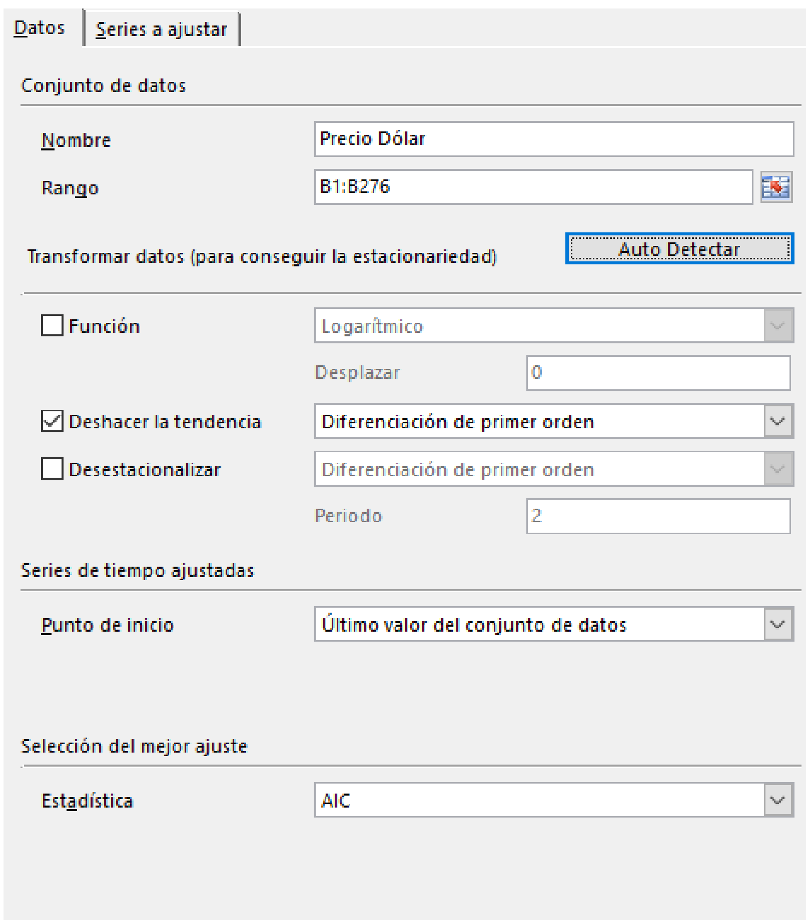


Figura 24. "Auto Detectar" del software para hacer estacionaria a la serie.

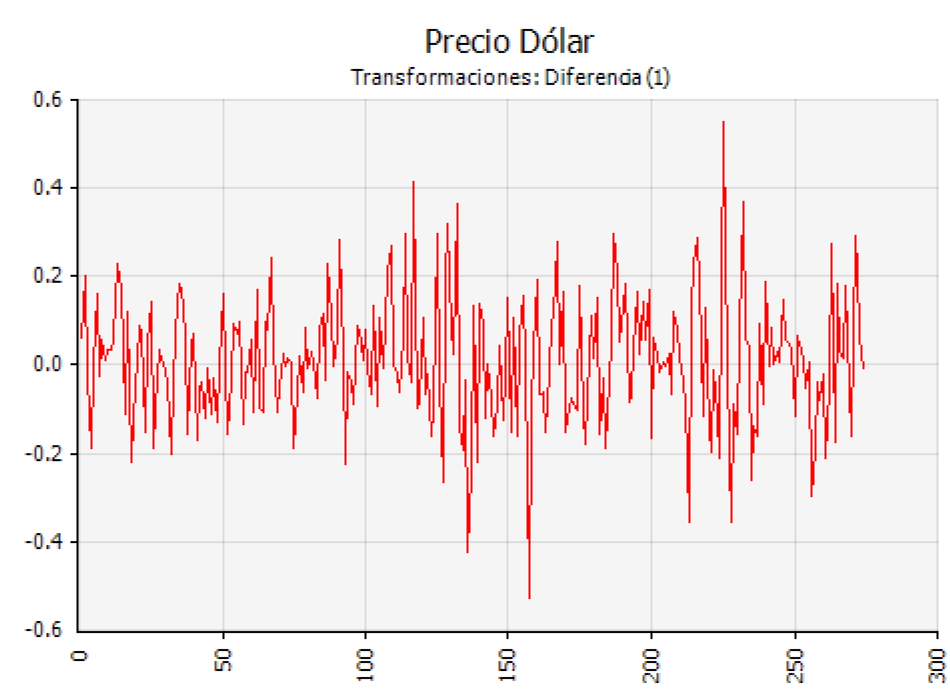


Figura 25. Gráfica de la serie transformada con diferenciación de primer orden.

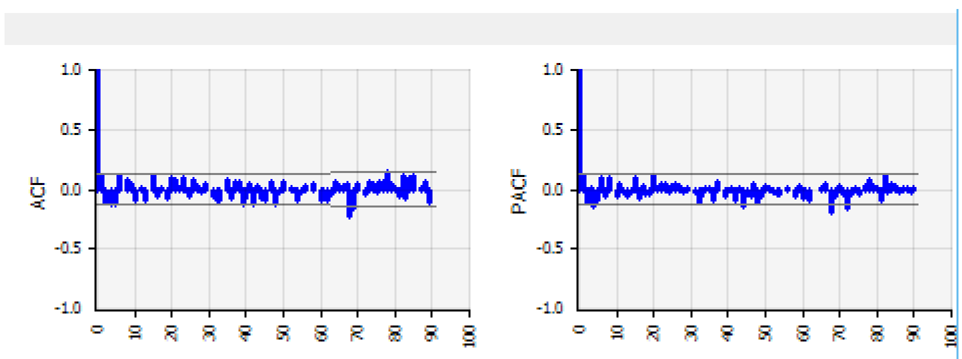
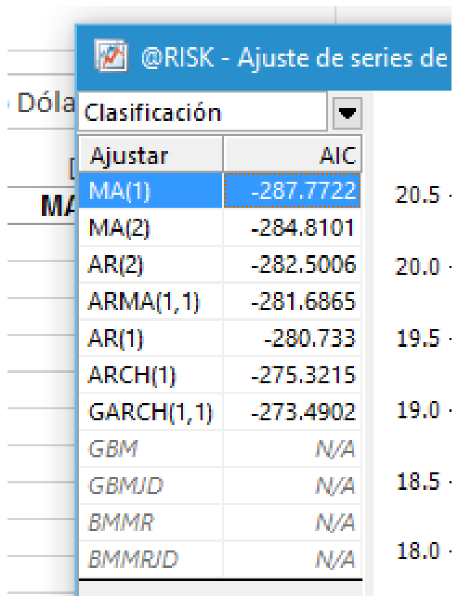


Figura 26. FAS y FAP de la serie de tiempo transformada.

Con la transformación realizada (diferenciación de primer orden), la serie de tiempo ya es estacionaria, tanto en media como en varianza; así, podemos hacer ahora el pronóstico de los valores futuros de la serie.

Para esto, seleccionaremos los modelos a los que se quiere ajustar y dejaremos que el software nos indique cuales son los adecuados o más apropiados para la serie.

Como ya sabemos, tenemos el Criterio de Información de Akaike (AIC) para saber cuál es el modelo que mejor se ajusta a la serie de tiempo del tipo de cambio diario (entre más pequeño, es mejor), teniendo los siguientes resultados:



Ajustar	AIC
MA(1)	-287.7722
MA(2)	-284.8101
AR(2)	-282.5006
ARMA(1,1)	-281.6865
AR(1)	-280.733
ARCH(1)	-275.3215
GARCH(1,1)	-273.4902
GBM	N/A
GBMJD	N/A
BMMR	N/A
BMMRJD	N/A

Figura 27. AIC de los modelos a ajustar.

Como nos indica el cuadro anterior, el modelo que mejor se ajusta es un ARIMA(0,1,1), esto es, un modelo MA(1) con diferenciación de orden 1, lo mismo que se había obtenido con el análisis en el software Forecast Pro XE. Esto vuelve a demostrar que la serie de tiempo se ajusta mejor con este modelo mencionado.

Con esto, haremos un análisis completo con todos los modelos que se mostraron en la lista anterior, realizando el pronóstico de los valores del tipo de cambio para cada uno de ellos. Con @Risk, ahora sí tomaremos en cuenta la parte aleatoria de los valores futuros que se van a calcular.

A	B	C	D	E	F	G	H	I
Fecha	**Precio Dólar**	**MA(1)**	**MA(2)**	**AR(2)**	**ARMA(1,1)**	**AR(1)**	**ARCH(1)**	**GARCH(1,1)**
25/08/2016	18.4971							
26/08/2016	18.446							
29/08/2016	18.283							
30/08/2016	18.5773							
31/08/2016	18.7953							
01/09/2016	18.8611							
02/09/2016	18.8523							
05/09/2016		18.711259	19.0679878	18.9688349	18.67314	18.8683106	18.7376184	18.8785735
06/09/2016		18.6692921	19.0785013	18.9807303	18.8701122	18.7685605	18.743535	19.1581139
07/09/2016		18.6447026	18.6326376	19.1499103	18.7239255	18.9895184	18.9876719	18.8816536
08/09/2016		18.6124647	18.5134308	19.3268421	18.7876572	19.0298318	18.8993543	18.7603622

Figura 28. Valores iniciales del pronóstico para cada uno de los modelos.

A	B	C	D	E	F	G	H	I
Fecha	**Precio Dólar**	**MA(1)**	**MA(2)**	**AR(2)**	**ARMA(1,1)**	**AR(1)**	**ARCH(1)**	**GARCH(1,1)**
20/12/2016		20.4286181	17.3734794	19.8268468	18.642322	17.8970394	18.2189856	18.0291284
21/12/2016		20.4591338	17.5052707	19.7936087	18.7707813	18.0497497	18.2412586	17.9919806
22/12/2016		20.5888922	17.5179699	19.6357822	18.6057469	18.1175579	18.2154151	18.0078286
23/12/2016		20.5623265	17.4862298	19.7587218	18.6457909	18.2983419	18.0872265	18.070376
26/12/2016		20.5280988	17.5817177	19.7362287	18.3861389	18.3273164	17.9815499	18.2218983
27/12/2016		20.5680667	17.650917	19.7183979	18.469127	18.633674	17.8801844	18.2010059
28/12/2016		20.6499295	17.6751194	19.6703311	18.6396888	18.938694	17.8691615	18.5293043
29/12/2016		20.8230792	17.5522585	19.6534138	18.567067	18.6666682	17.8523794	18.4641688
30/12/2016		**20.8089194**	**17.5822172**	**19.5136801**	**18.5507839**	**18.7512111**	**18.0315089**	**18.4822726**

Figura 29. Valores finales del pronóstico para cada uno de los modelos.

Ahora, como sólo toma un posible valor del pronóstico al último día hábil del año, tendremos que hacer una simulación para 10,000 escenarios posibles sobre el último valor del pronóstico.

Así, podremos tomar el valor promedio o la media como el valor más probable que suceda en el último día del año.

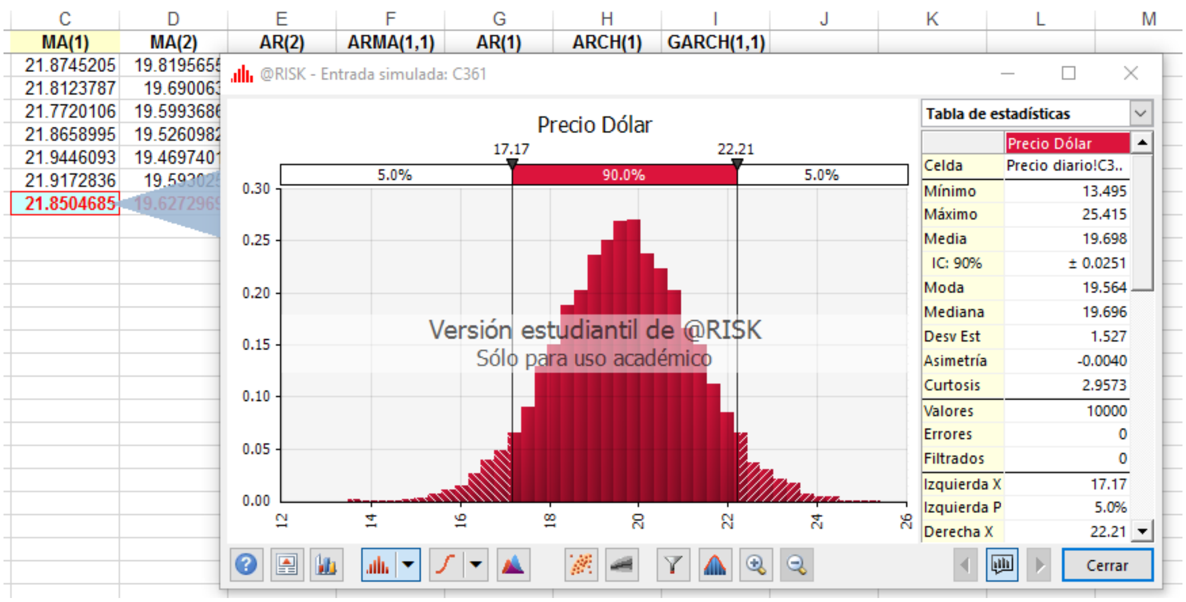


Figura 30. Simulación con 10,000 escenarios para el modelo MA(1).

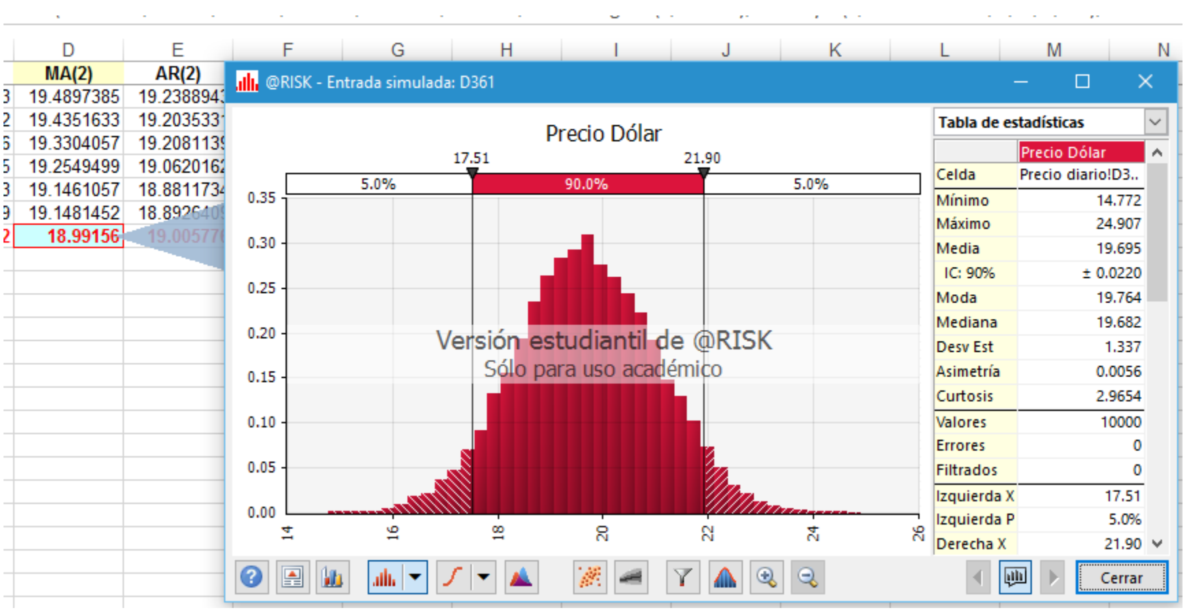


Figura 31. Simulación con 10,000 escenarios para el modelo MA(2).

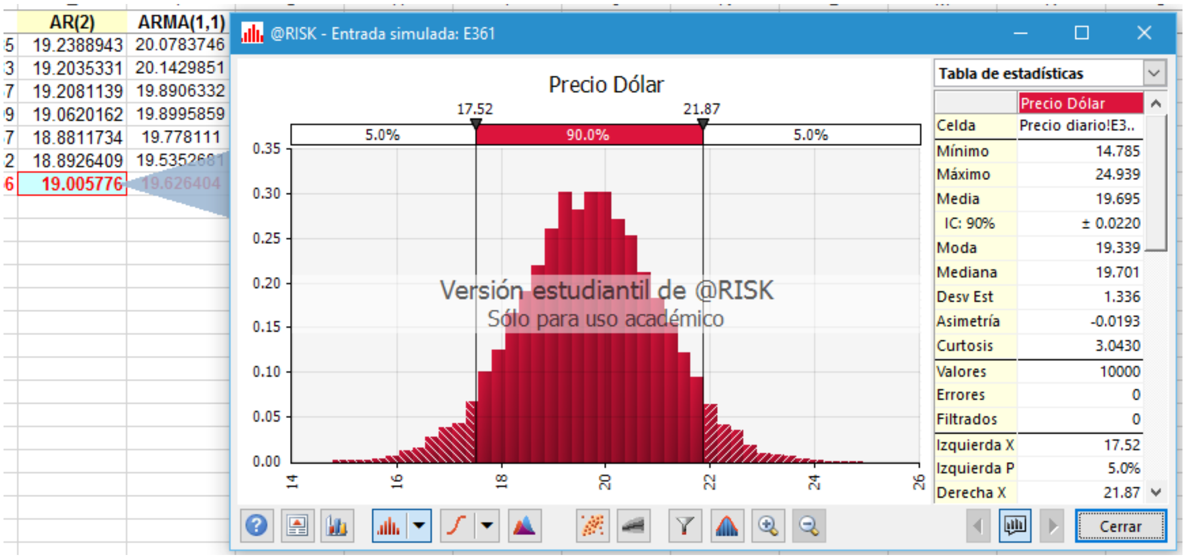


Figura 32. Simulación con 10,000 escenarios para el modelo AR(2).

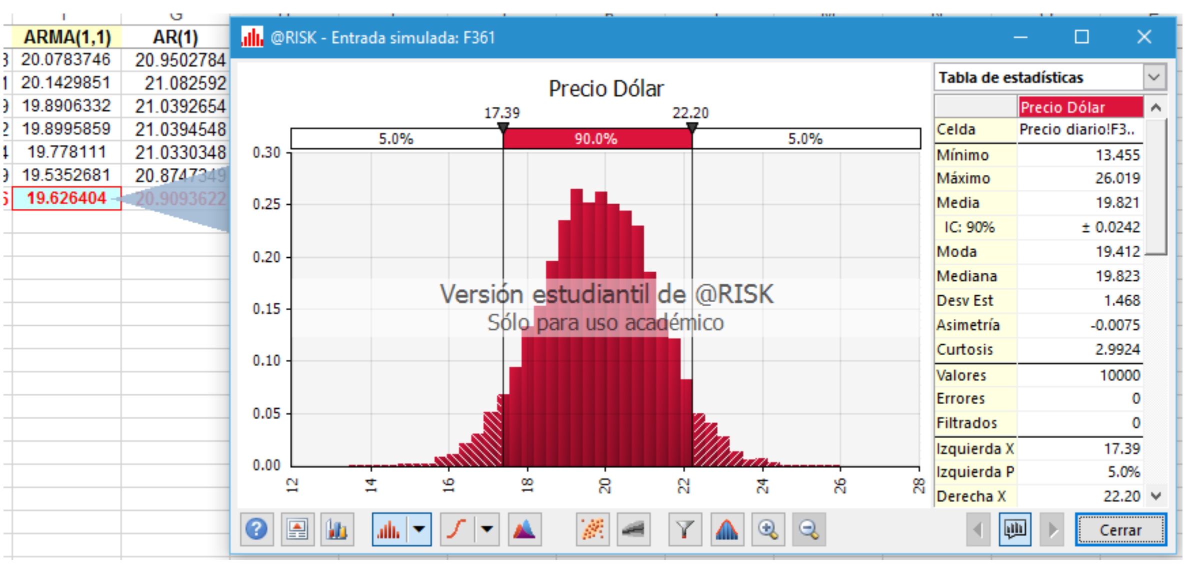


Figura 33. Simulación con 10,000 escenarios para el modelo ARMA(1,1).

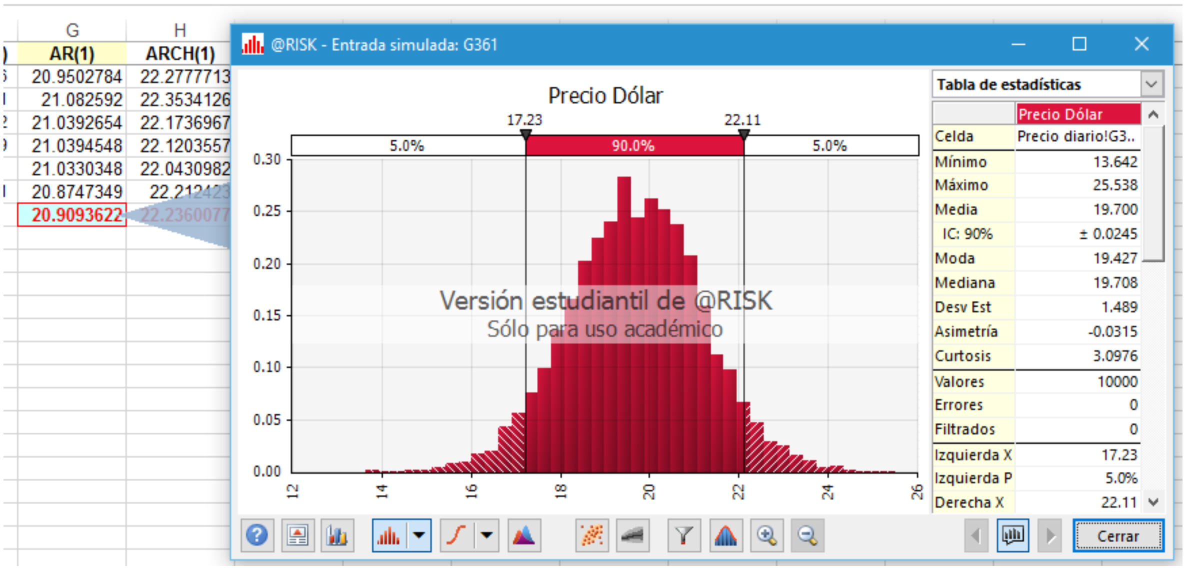


Figura 34. Simulación con 10,000 escenarios para el modelo AR(1).

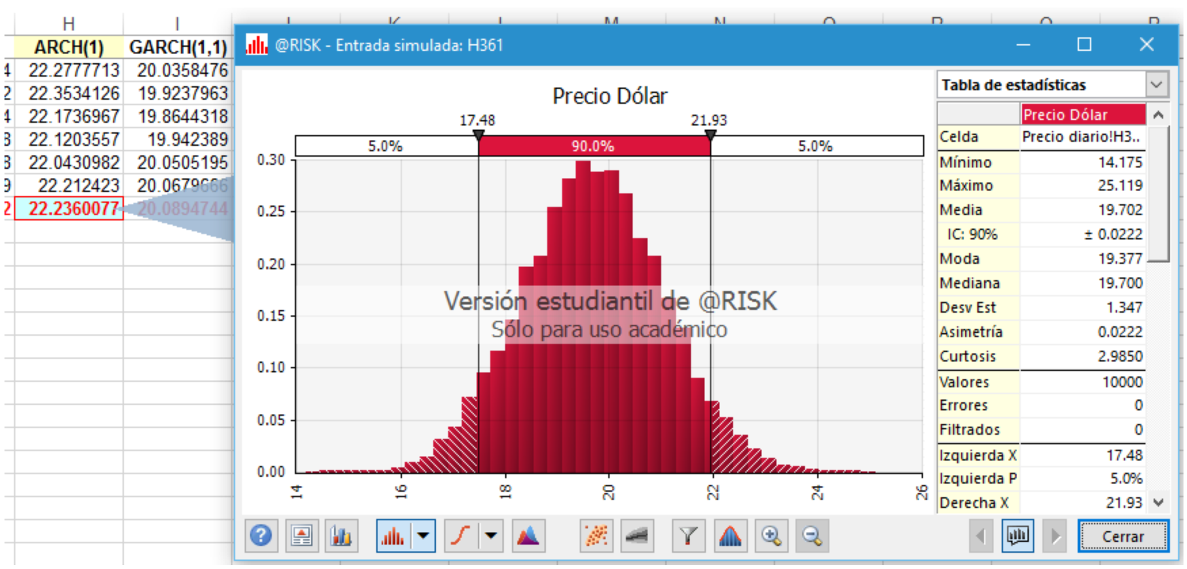


Figura 35. Simulación con 10,000 escenarios para el modelo ARCH(1).

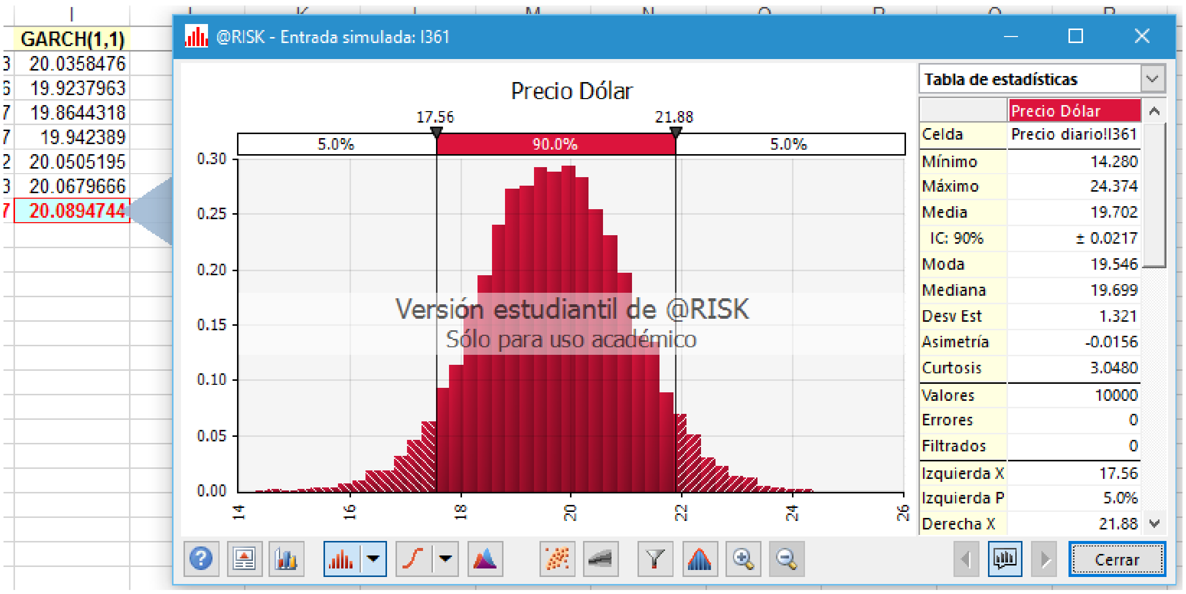


Figura 36. Simulación con 10,000 escenarios para el modelo GARCH(1,1).

Teniendo la simulación para cada uno de los modelos, podemos saber el valor promedio o valor esperado para cada uno de ellos, así como los valores mínimos y máximos de los intervalos de confianza al 95%.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Fecha	Precio Dólar	MA(1)	MA(2)	AR(2)	ARMA(1,1)	AR(1)	ARCH(1)	GARCH(1,1)
57	26/12/2016		$ 20.9920	$ 16.9304	$ 18.8637	$ 18.3531	$ 19.6014	$ 19.3744	$ 19.2027
58	27/12/2016		$ 21.0449	$ 17.0210	$ 18.9118	$ 18.3489	$ 19.6172	$ 19.4343	$ 19.1575
59	28/12/2016		$ 21.1395	$ 17.0391	$ 18.8388	$ 18.4738	$ 19.5597	$ 19.2682	$ 19.0758
60	29/12/2016		$ 21.3701	$ 17.0912	$ 18.8764	$ 18.6515	$ 19.9040	$ 19.0413	$ 19.1288
61	30/12/2016		$ 21.5031	$ 17.1062	$ 18.8200	$ 18.6426	$ 19.6915	$ 19.0028	$ 19.0421
62									
63	Media		$ 19.6983	$ 19.6945	$ 19.6954	$ 19.8208	$ 19.6998	$ 19.7021	$ 19.7021
64	Percentil 2.5%	IC al 95%	$ 16.7301	$ 17.0435	$ 17.0842	$ 16.9759	$ 16.6889	$ 17.0850	$ 17.0739
65	Percentil 97.5%		$ 22.6284	$ 22.3507	$ 22.2875	$ 22.6776	$ 22.6568	$ 22.2699	$ 22.2799

Figura 37. Valores de las medias e IC al 95%.

Donde el modelo mejor ajustado a la serie de tiempo nos dice que en promedio el precio del dólar estará en $19.6983, además el precio para el mejor escenario de $16.73 y en el peor de $22.6284 por dólar.

4.3 Análisis y pronóstico para el tipo de cambio mensual con Forecast Pro XE.

Se hace el mismo análisis para los datos mensuales que se tienen. Se toman los datos desde el mes de Agosto de 2013 a Agosto de 2016. Después de realizar el análisis, se tiene el siguiente resultado:

```
Forecast Pro Version 4.01 Extended Edition

Database C:\Users\Omar\Desktop\Datosbase2.xls is open and ready for use.

Expert data exploration of dependent variable DM
-------------------------------------------------------------------------------
Length 37  Minimum 12.846  Maximum 18.898
Mean 15.232 Standard deviation 2.062

Classical decomposition (multiplicative)
    Trend-cycle: 95.30%  Seasonal: 1.50%  Irregular: 3.20%

Log transform recommended for Box-Jenkins.

Choice is narrowed down to Box-Jenkins or exponential smoothing.

Exponential smoothing outperforms Box-Jenkins by 0.694 to 0.723 out-of-sample
Mean Absolute Deviation. I tried 21 forecasts up to a maximum horizon 6.
For Box-Jenkins, I used a log transform.

Series is trended and seasonal.
```

Figura 38. Análisis del software para la serie de datos mensuales.

El reporte para los precios mensuales nos dice:

1. Proporciona un resumen sobre la base de datos: el tamaño o longitud, el valor mínimo y máximo, así como la media y desviación estándar.
2. El software selecciona dos métodos como opciones viables para realizar el análisis de la serie: suavizamiento exponencial o el modelo ARIMA. Se hará una transformación logarítmica para Box-Jenkins.
3. Al final, la serie es no estacionaria y no estacional, por lo que recomienda realizar el modelo ARIMA para su estudio.
4. La serie muestra estacionalidad y tendencia.

Ahora, haremos el mismo análisis pero sólo tomando en cuenta el modelo de Box-Jenkins. Las estadísticas para este modelo son:

```
Forecast Model for DM
ARIMA(0,1,1)*(0,1,0) with log transform

Term          Coefficient  Std. Error  t-Statistic  Significance
-------------------------------------------------------------------
b[1]          -0.2436      0.1969      -1.2369      0.7714 <-

Try alternative model ARIMA(0,1,0)*(0,1,0)

Within-Sample Statistics
--------------------------------------------------------------
Sample size 37                     Number of parameters 1
Mean 2.714                         Standard deviation 0.1352
R-square 0.9619                    Adjusted R-square 0.9619
Durbin-Watson 2.125                Ljung-Box(18)=15.65 P=0.3833
Forecast error 0.02639             BIC 0.4127
MAPE 0.01751                       RMSE 0.4308
MAD 0.2904
```

Figura 39. Valores estadísticos del software para la serie mensual.

El software recomienda un modelo ARIMA(0,1,1); haciendo una transformación logarítmica para que la serie se vuelva estacionaria en varianza y una transformación de primeras diferencias (d=1) para que la serie sea estacionaria en media y así obtener un proceso de medias móviles de orden 1 (q=1).

Con esto, revisamos los valores de la R-cuadrada: 0.9619 que es muy aceptable (casi 1), además del estadístico Durbin-Watson: 2.125 que es muy cercano a 2.

En resumen, hay suficiente prueba estadística para decir que el modelo ARIMA es el que mejor se ajusta a la serie de tiempo para su análisis, con ello se realizaron transformaciones (logarítmica y diferencias) para la estacionariedad de la serie.

Ahora procedemos al pronóstico del tipo de cambio peso-dólar al último día hábil del último mes del 2016 (viernes 30 de Diciembre de 2016).

Antes de calcular los valores pronosticados, se muestran los datos históricos de la serie, así como los valores de la serie ajustada a la serie del tipo de cambio mediante Box-Jenkins antes mencionado.

Box-Jenkins model for DM
Analysis of Historic Fit Set

Date	Historic	Fitted
2013-08	13.310	
2013-09	13.145	
2013-10	12.864	
2013-11	13.084	
2013-12	13.065	
2014-01	13.321	
2014-02	13.307	
2014-03	13.084	
2014-04	13.104	
2014-05	12.846	
2014-06	13.000	
2014-07	13.136	
2014-08	13.111	
2014-09	13.489	12.976
2014-10	13.432	13.326
2014-11	13.767	13.687
2014-12	14.735	13.767
2015-01	14.841	15.274
2015-02	14.962	14.722
2015-03	15.243	14.770
2015-04	15.204	15.383
2015-05	15.374	14.863
2015-06	15.660	15.687
2015-07	16.451	15.817
2015-08	16.768	16.578
2015-09	17.077	17.300
2015-10	16.622	16.951
2015-11	16.578	16.956
2015-12	17.340	17.647
2016-01	18.291	17.391
2016-02	18.171	18.668
2016-03	17.251	18.390
2016-04	17.212	16.942
2016-05	18.478	17.472
2016-06	18.555	19.080
2016-07	18.898	19.361
2016-08	18.795	19.149

Figura 40. Valores históricos de la serie y valores de la serie ajustada.

Ahora procedemos al cálculo de los 4 valores mensuales a pronosticar para estimar el precio del dólar al final del año.

Forecasted Values

Date	2.5 Lower	Forecast	97.5 Upper
2016-09	17.885	19.055	20.301
2016-10	16.763	18.547	20.520
2016-11	16.273	18.498	21.028
2016-12	16.645	19.348	22.489

Figura 41. Valores pronosticados del tipo de cambio peso-dólar mensual.

Por lo tanto, se tiene el precio pronosticado del tipo de cambio peso-dólar mensual al último mes del año, que es de $19.348, así como los valores del intervalo de confianza al 95%: un valor máximo de $22.489 y un valor mínimo de $16.645 con el modelo seleccionado.

Ahora graficaremos los valores históricos en color negro, los valores de la serie ajustada y los valores pronosticados que se realizaron en color rojo, así como las bandas de confianza al 95% de color azul.

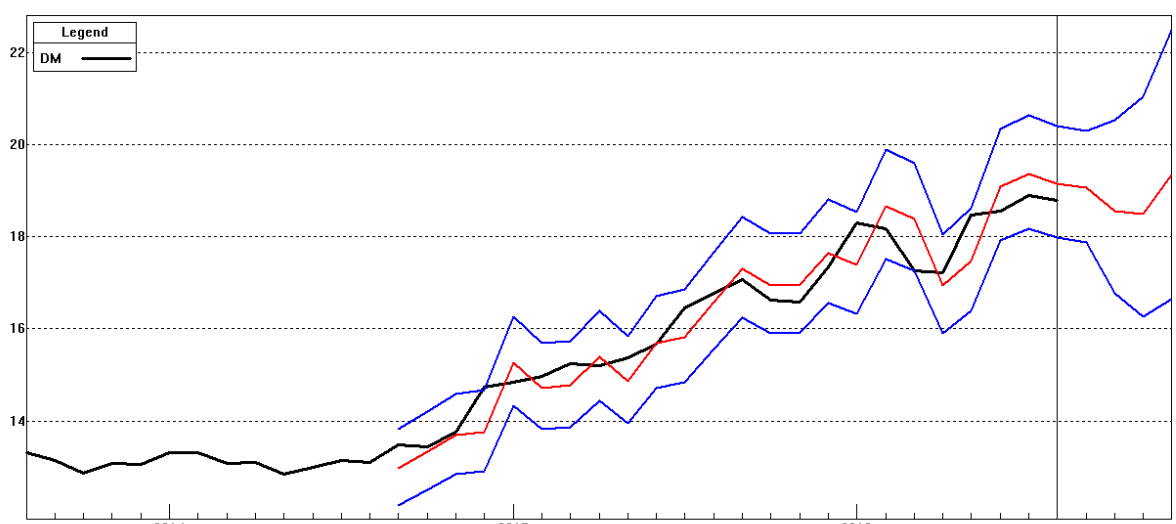


Figura 42. Valores de la serie de tiempo mensual, el pronóstico realizado y el modelo ajustado.

4.4 Análisis y pronóstico para el tipo de cambio mensual con @Risk.

Ya que tenemos los datos mensuales del tipo de cambio, se analizarán con el software @Risk. Los datos son desde el mes de Agosto de 2013 al mes de Agosto del 2016, teniendo la siguiente ventana:

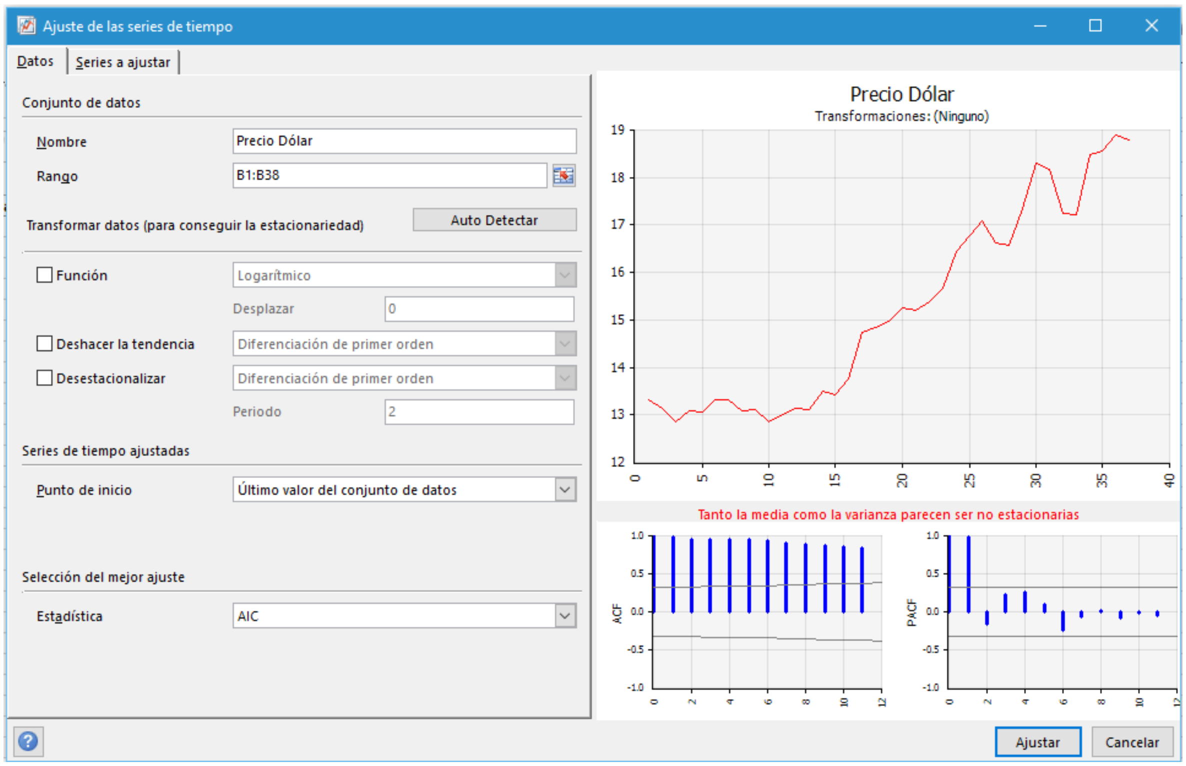


Figura 43. Ventana de opciones para el análisis de la serie de tiempo.

Antes de realizar el análisis, daremos el nombre de la variable y seleccionamos el rango de los datos de la serie. Además, se encuentran las opciones para transformar los datos de la serie:

1. Función: Se realizan transformaciones para que la serie se vuelva estacionaria en varianza (logarítmica o raíz cuadrada).
2. Deshacer la tendencia: Aquí se harán transformaciones en diferencias para hacer que la serie se vuelva estacionaria en media (diferenciación de primer o segundo orden).

3. Desestacionalizar: En dado caso que la serie muestre estacionalidad, se manejan varias opciones para que la serie no sea estacional (diferenciación de primer orden, de segundo orden o aditivo).

Para seleccionar el mejor ajuste, se tomará el Criterio de Información de Akaike (AIC). Parece ser que la serie de tiempo mensual no es estacionaria en media y no es estacionaria en varianza, entonces verificaremos esto.

La gráfica de la serie de tiempo, y las FAS y FAP, aparecen de la siguiente manera:

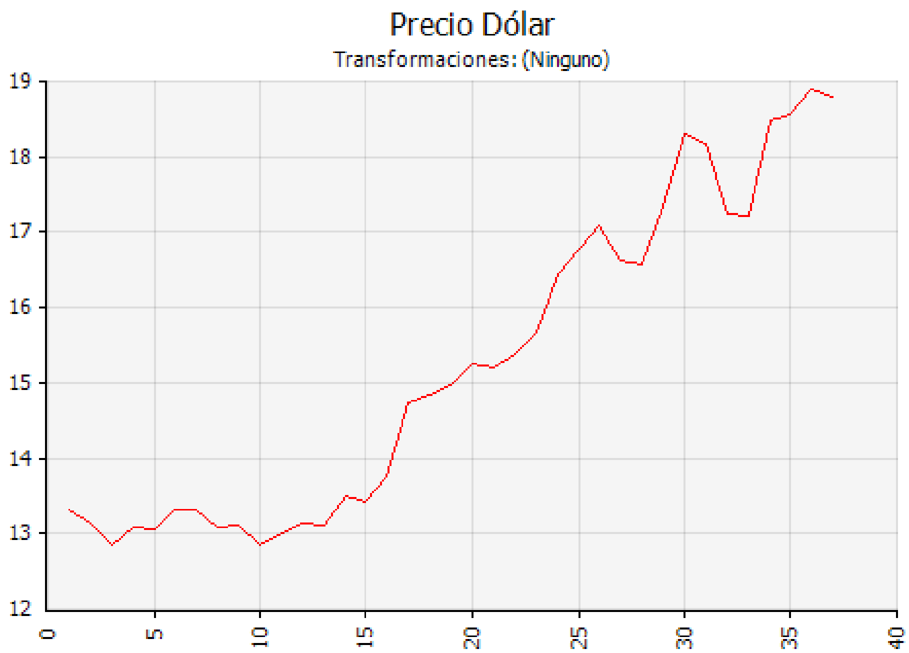


Figura 44. Gráfica de los valores históricos de la serie de tiempo mensual sin transformaciones.

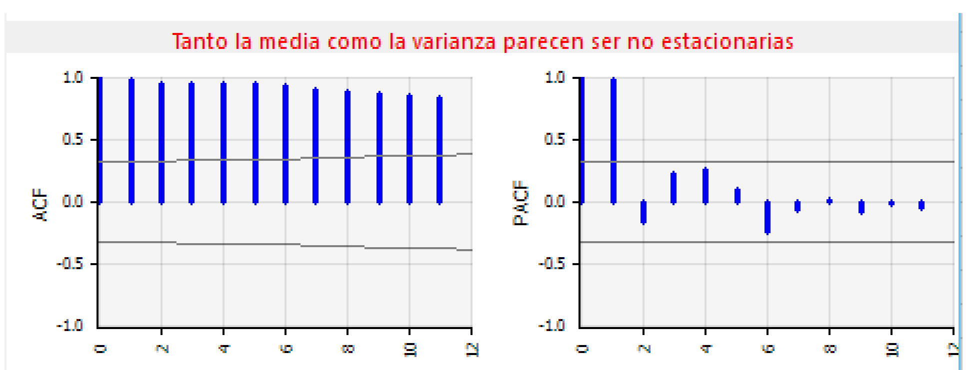


Figura 45. FAS y FAP de la serie de tiempo mensual.

Cómo se había dicho anteriormente, la serie de tiempo es no estacionaria en media y no estacionaria en varianza. Para resolver esto, haremos las transformaciones necesarias, seleccionando la opción de “Auto Detectar”:

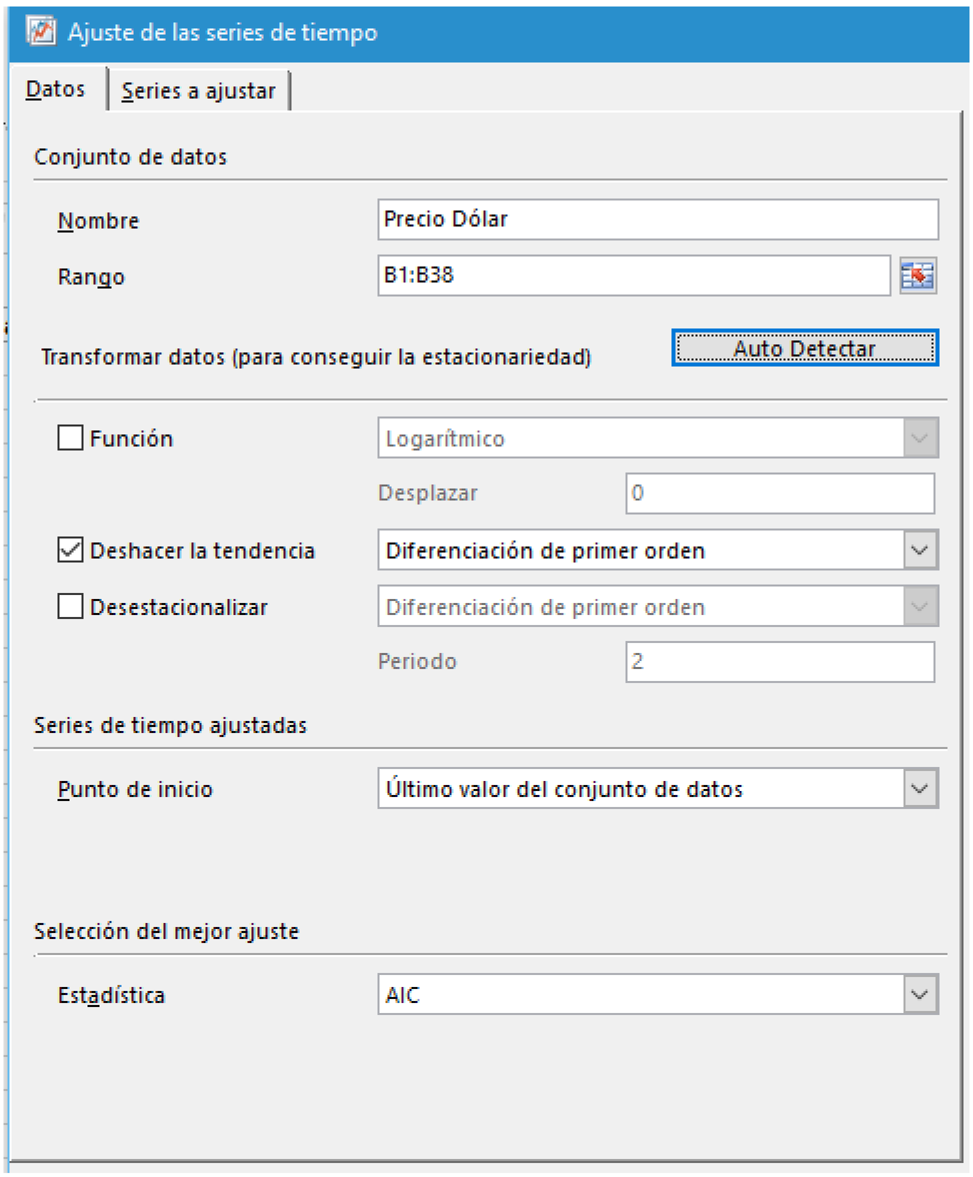


Figura 46. Función “Auto Detectar” del software para hacer estacionaria a la serie.

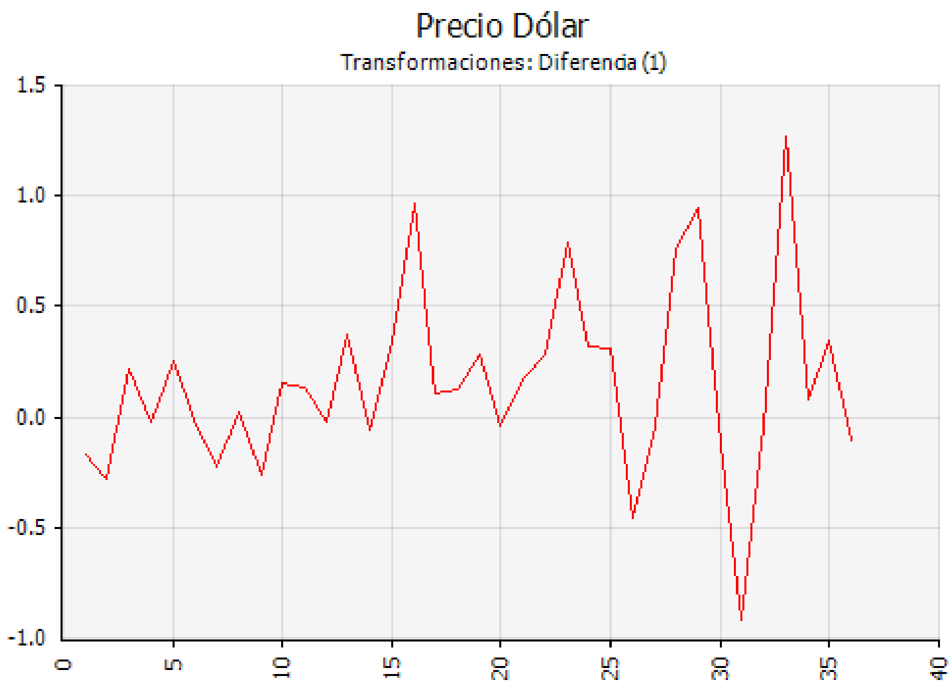


Figura 47. Gráfica de la serie transformada con diferenciación de primer orden.

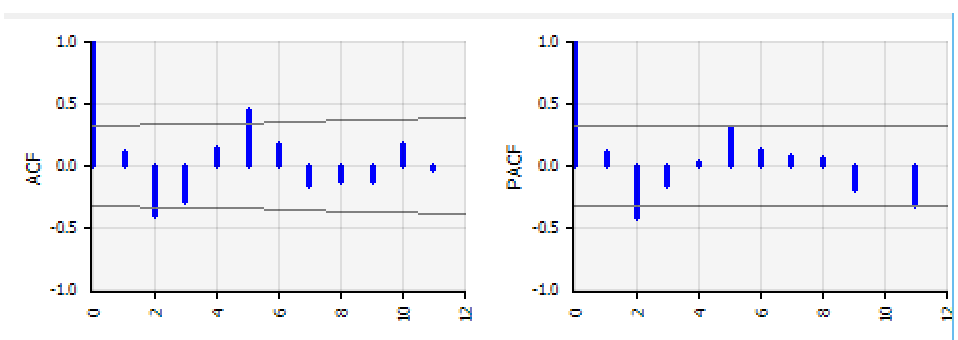
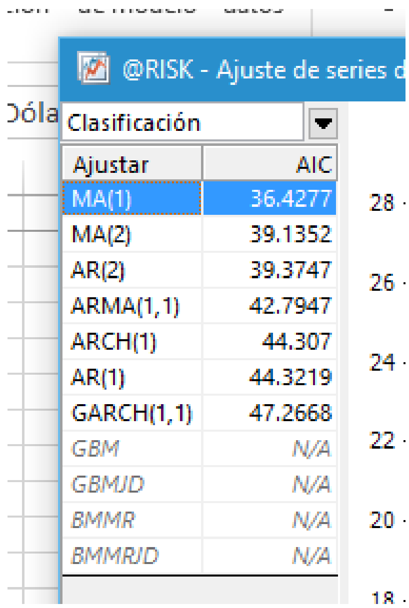


Figura 48. FAS y FAP de la serie de tiempo transformada.

Con la transformación realizada (diferenciación de primer orden), la serie de tiempo ya es estacionaria, tanto en media como en varianza; así, podemos realizar el pronóstico de los valores futuros de la serie.

Para esto, seleccionaremos los modelos a los que se quiere ajustar y dejaremos que el software nos indique cuales son los adecuados o más apropiados para la serie.

Como ya sabemos, tenemos el Criterio de Información de Akaike (AIC) que nos ayudará a saber cuál es el modelo que mejor se ajusta a la serie de tiempo del tipo de cambio mensual (entre más pequeño, es mejor), teniendo los siguientes resultados:



Ajustar	AIC
MA(1)	36.4277
MA(2)	39.1352
AR(2)	39.3747
ARMA(1,1)	42.7947
ARCH(1)	44.307
AR(1)	44.3219
GARCH(1,1)	47.2668
GBM	N/A
GBMJD	N/A
BMMR	N/A
BMMRJD	N/A

Figura 49. AIC de los modelos a ajustar.

Como nos indica el cuadro anterior, el modelo que mejor se ajusta es un ARIMA(0,1,1), esto es, un modelo MA(1) con diferenciación de orden 1, lo mismo que se había obtenido con el análisis en el software Forecast Pro XE. Esto vuelve a demostrar que la serie de tiempo se ajusta mejor con este modelo mencionado.

Con esto, haremos un análisis completo con todos los modelos que se mostraron en la lista anterior, realizando el pronóstico de los valores del tipo de cambio para cada uno de ellos. Con @Risk, se tomará en cuenta la parte aleatoria de los valores futuros que se van a calcular.

	Fecha	Precio Dólar	MA(1)	MA(2)	AR(2)	ARMA(1,1)	ARCH(1)	AR(1)	GARCH(1,1)
32	feb-16	18.1706							
33	mar-16	17.2509							
34	abr-16	17.2125							
35	may-16	18.4777							
36	jun-16	18.555							
37	jul-16	18.8979							
38	ago-16	18.7953							
39	sep-16		18.59941707	18.56774732	19.00904386	18.9582401	18.8073628	18.499612	19.1904203
40	oct-16		18.55284595	18.74584064	19.87949041	18.841196	18.7040767	17.4705242	19.2292967
41	nov-16		18.70064832	19.42489772	19.42298364	18.572999	19.5682439	17.7986374	18.6697127
42	dic-16		19.14283152	19.80177005	18.8373693	18.8927023	20.3809547	17.483828	19.0802022

Figura 50. Valores finales de la serie y valores del pronóstico para cada uno de los modelos.

Ahora, como sólo toma un posible valor del pronóstico al último día hábil del año, tendremos que hacer una simulación para 10,000 escenarios posibles sobre el último valor del pronóstico.

Así, podremos tomar el valor promedio o la media como el valor más probable que suceda en el último día del año.

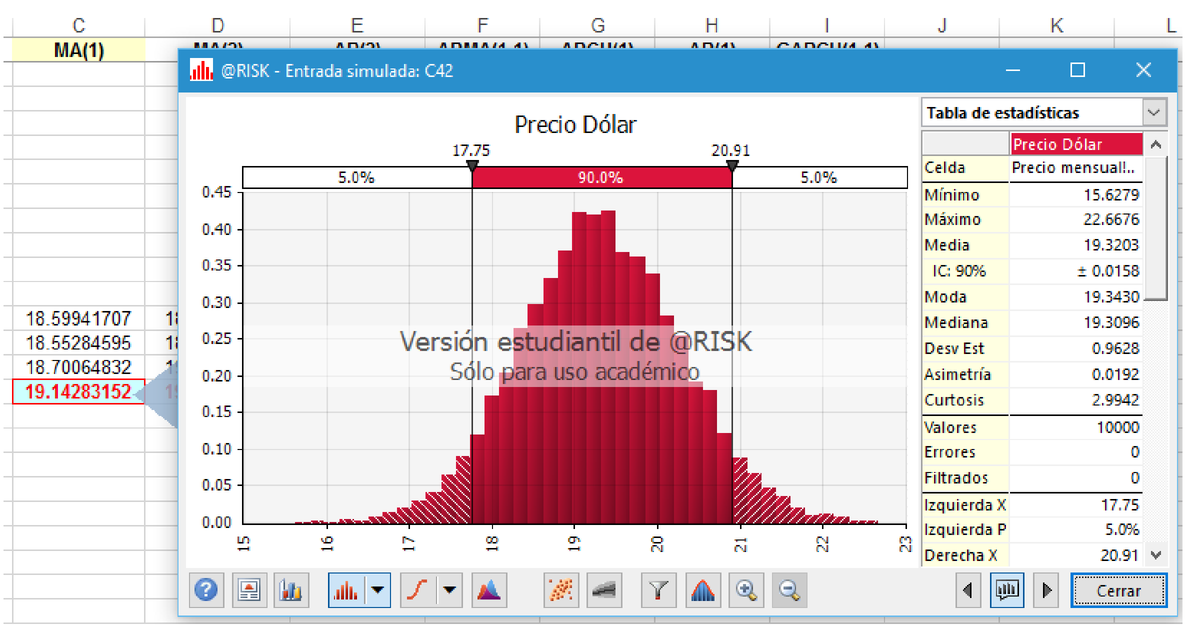


Figura 51. Simulación con 10,000 escenarios para el modelo MA(1).

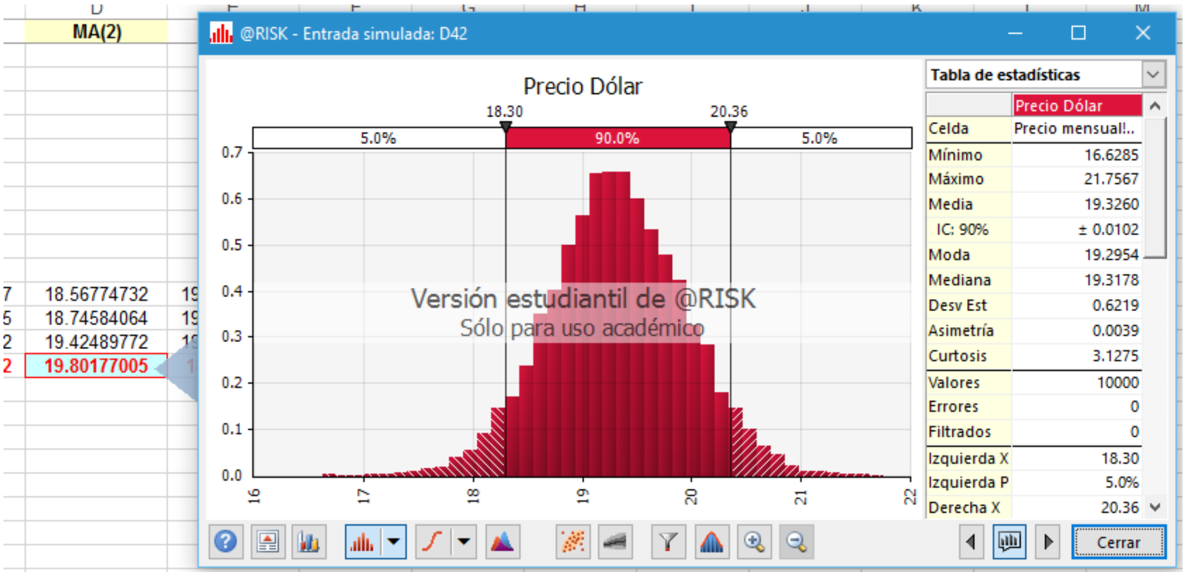


Figura 52. Simulación con 10,000 escenarios para el modelo MA(2).

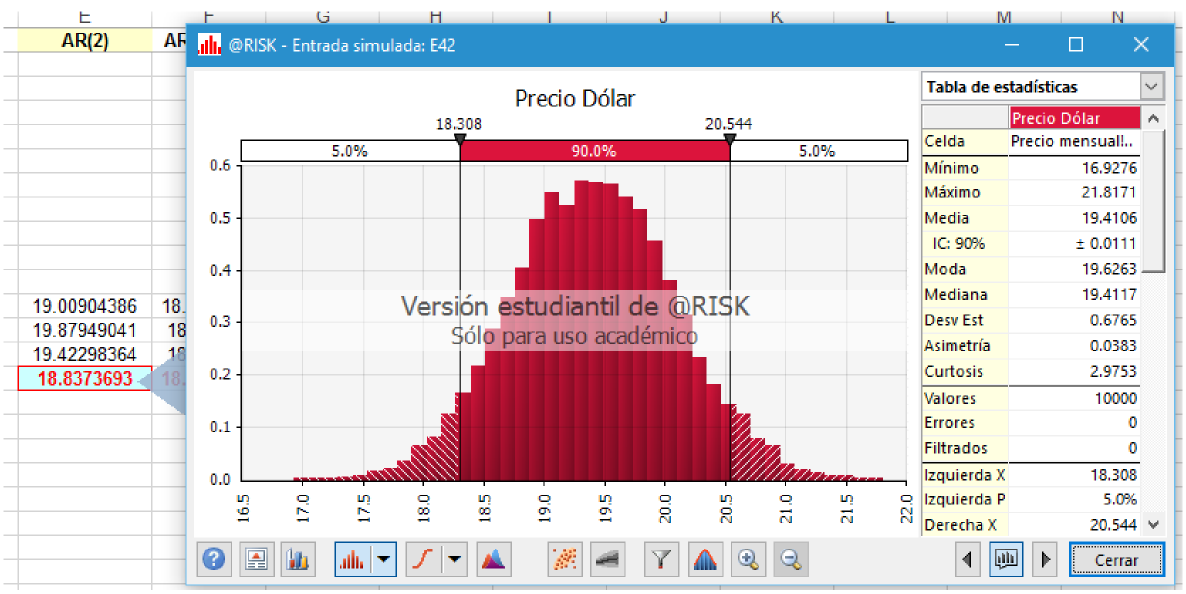


Figura 53. Simulación con 10,000 escenarios para el modelo AR(2).

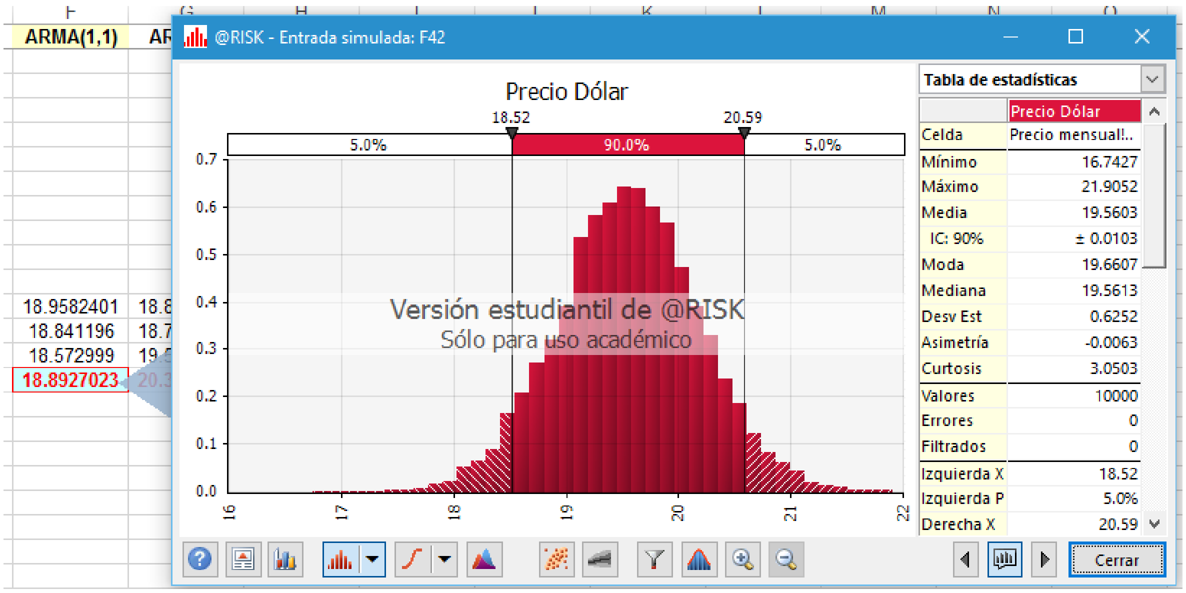


Figura 54. Simulación con 10,000 escenarios para el modelo ARMA(1,1).

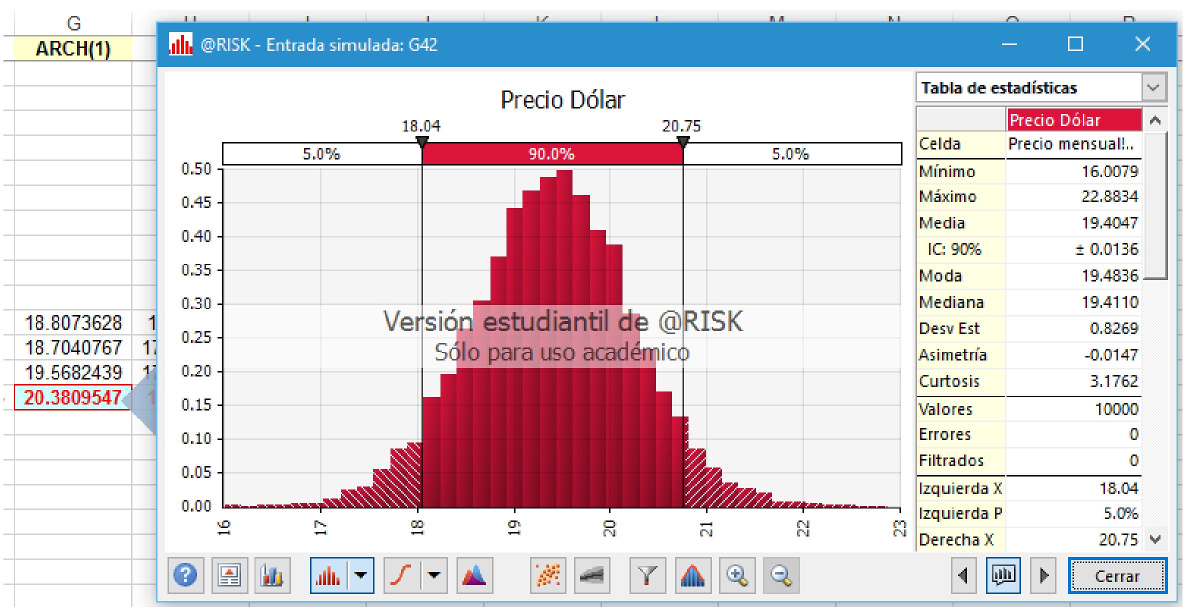


Figura 55. Simulación con 10,000 escenarios para el modelo ARCH(1).

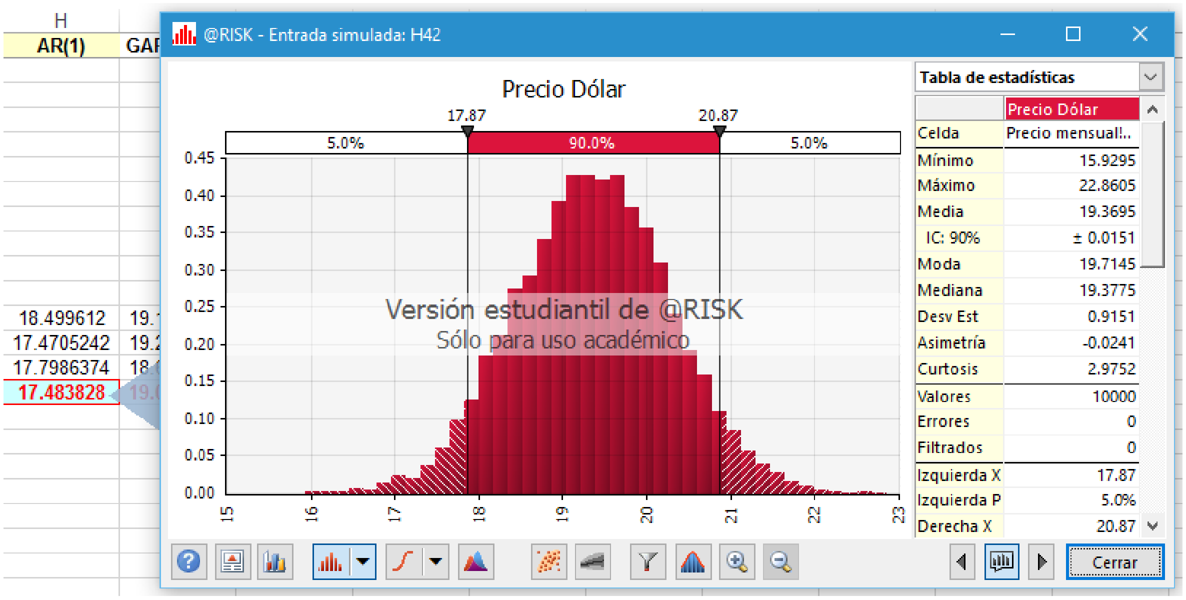


Figura 56. Simulación con 10,000 escenarios para el modelo AR(1).

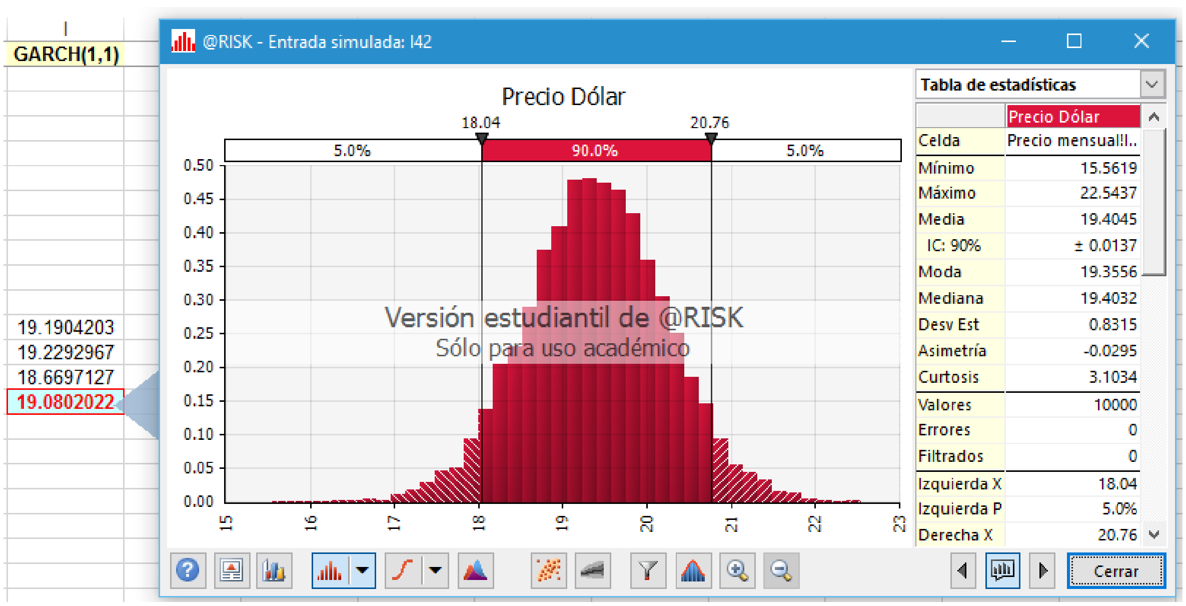


Figura 57. Simulación con 10,000 escenarios para el modelo GARCH(1,1).

Ya que tenemos la simulación para cada uno de los modelos, ahora podemos saber el valor promedio para cada uno de ellos, así como los valores mínimos y máximos de los intervalos de confianza al 95%.

Fecha	Precio Dólar	MA(1)	MA(2)	AR(2)	ARMA(1,1)	ARCH(1)	AR(1)	GARCH(1,1)
may-16	$ 18.4777							
jun-16	$ 18.5550							
jul-16	$ 18.8979							
ago-16	$ 18.7953							
sep-16		$ 19.8446	$ 18.5467	$ 18.2682	$ 18.7029	$ 19.0918	$ 19.3499	$ 19.0682
oct-16		$ 20.9775	$ 18.7325	$ 18.6550	$ 19.4002	$ 19.0793	$ 19.6101	$ 19.1164
nov-16		$ 20.9705	$ 18.7441	$ 19.6144	$ 19.3471	$ 18.7592	$ 19.4349	$ 19.5945
dic-16		$ 20.7745	$ 18.6350	$ 19.6350	$ 20.0486	$ 18.9941	$ 20.0916	$ 20.4132
Media		$ 19.3203	$ 19.3260	$ 19.4106	$ 19.5603	$ 19.4047	$ 19.3695	$ 19.4045
Percentil 2.5%	IC al 95%	$ 17.4249	$ 18.0885	$ 18.1001	$ 18.3437	$ 17.7881	$ 17.5905	$ 17.7935
Percentil 97.5%		$ 21.1760	$ 20.5379	$ 20.7497	$ 20.7663	$ 21.0615	$ 21.1278	$ 21.0113

Figura 58. Valores de las medias e IC al 95%.

Donde el modelo que mejor se ajusta a la serie de tiempo nos dice que en promedio el precio del dólar estará en $19.3203, además el precio para el mejor escenario sería un mínimo de $17.42 y en el peor de los casos un máximo de $21.176 por dólar.

Capítulo 5. Estrategia de cobertura con derivados financieros

Un derivado es un instrumento financiero (o de manera más sencilla, un acuerdo entre dos personas) que tiene un valor determinado (prima o pago a realizar) por el precio de algo más.

Así, un derivado puede verse como una apuesta sobre el precio de algo. En la práctica, no es el contrato en sí mismo, sino cómo es usado y quién lo usa, lo que determina si este contrato reduce el riesgo.

¿Cuáles son las razones que alguien podría utilizar los derivados financieros? Aquí se muestran algunos motivos:

1. Administración de riesgos: Un contrato puede ofrecer una cobertura de riesgo (hedging) cuando el valor de dicho contrato es incierto (cuando es susceptible a esa "apuesta". Así, se puede decir que cualquier seguro es un derivado.
2. Especulación: Un derivado puede ser utilizado como instrumento de inversión. La ganancia o pérdida obtenida de la apuesta sobre un contrato puede ser grande en comparación a esa apuesta.
3. Costos reducidos de transacción: En la práctica, es posible intercambiar derivados como alternativa a la venta de acciones, donde el "broker" (o intermediario) cobra una comisión por dicha venta.
4. Arbitraje: Al intercambiar es posible el ahorro en pago de impuestos que de otra manera habría que pagar en la venta de acciones.

En resumen, los derivados financieros ofrecen alternativas adicionales a la compra o venta de activos de tal manera que un inversionista pueda alcanzar sus metas financieras de manera más segura.

La idea principal detrás de la creación de los derivados es el poder crear productos financieros a partir de productos de otro tipo con el fin de generar utilidades.

Las perspectivas de las partes que conforman los derivados financieros se establecen de la siguiente forma:

1. Perspectiva del usuario final (End User): Los usuarios finales de los derivados financieros son los inversionistas o las empresas que acceden a un contrato de derivados para sus fines.
2. Perspectiva del creador de mercado (Market Maker): El creador de mercado es un intermediario que compra derivados de clientes que quieren vender y vende derivados de clientes que quieren comprar, donde su objetivo es comprar a un precio bajo y vender a un precio alto.
3. Perspectiva del observador económico: Aquí entran todos los organismos regladores de dichas transacciones.

5.1 Opciones Call

Una opción Call es un contrato donde el comprador tiene el derecho de comprar, más no la obligación de hacerlo.

Si consideramos una opción Call donde el comprador acuerda comprar un activo en $1,000 dentro de 1 año. Los posibles escenarios son:

1. El activo vale más de $1,000 dentro de un año (supongamos que $1,100), lo que significa que el comprador aplica la opción y lo compra en $1,000.
2. El activo vale menos de $1,000 dentro de un año (supongamos que $900), lo que significa que el comprador no aplica la opción, ya que prefiere comprarla en el mercado para pagar menos.

Al momento de que el comprador y el vendedor acuerdan firmar el contrato Call, el comprador debe pagar una prima, o también llamado “Payoff”. Dicho pago inicial compensa al vendedor por estar en desventaja al momento del tiempo de expiración por asumir un riesgo de posible pérdida en la transacción.

La terminología para las opciones Call son:

1. Precio Strike o Precio de Ejercicio (Exercise Price): Es el precio acordado entre el comprador y el vendedor para adquirir un activo.
2. Precio Spot o Precio de Mercado: Es el precio que se tiene establecido en el mercado para la adquisición del activo.
3. Ejercicio: Representa el acto de pagar al Precio Strike para recibir el activo.
4. Expiración: Es la fecha límite para la cual una opción debe ser ejercida antes de que ésta no tenga valor.
5. Estilo de Ejercicio: Determina la manera en que puede llevarse a cabo el ejercicio. Existen 3 posibles casos:
    - Opción Europea: Es aquella en donde el comprador sólo puede ejercer la opción en la fecha de expiración.
    - Opción Americana: Es aquella en donde el comprador tiene el derecho de ejercer la opción en cualquier momento precio al plazo fijado por la fecha de expiración.
    - Opción Bermuda: Es aquella en donde el comprador puede ejercer la opción en determinados momentos entre la fecha de compra y la fecha de expiración.

Pago (Payoff) a la compra de una opción Call

El pago o prima de una opción Call que ha sido comprada es:

$$P_t = \max(0, Precio\ Spot - Precio\ Strike)$$

Donde t es la fecha de expiración. Si el Precio Spot es mayor al Precio Strike, el comprador de la opción Call la ejerce, mientras que si es lo contrario, donde el Precio Spot es menor al Precio Strike, no se ejercerá ya que en el mercado es más barato.

Como tenemos diferentes escenarios para el Precio Spot o Precio de Mercado a la fecha de expiración, se calculará el valor esperado o media del Payoff a pagar, siendo:

$$P_t = E[\max(0, Precio\ Spot - Precio\ Strike)]$$

Para saber el monto del Payoff al momento de la compra de la opción Call, sólo tenemos que traer esa cantidad a Valor Presente (VP):

$$P_0 = e^{-rt} * E[\max(0, Precio\ Spot - Precio\ Strike)]$$

Donde r es la tasa libre de riesgo y t es la fecha de expiración.

Ya que tenemos como calcular el valor del Payoff a la compra de la opción Call, se aplicará para cada uno de los escenarios los Precios Spot obtenidos para todos los modelos calculados en el capítulo anterior.

Se establecerán dos Precios Strike para el cálculo de los Payoff (\$19 y \$19.5) como sugerencias para la cobertura mediante este tipo de derivados financieros, así se calculará el valor de la prima a la fecha de expiración y ese precio se traerá a Valor Presente (VPP).

Los resultados son:

t =	84							
K =	\$ 19.50	**MA(1)**	**MA(2)**	**AR(2)**	**ARMA(1,1)**	**AR(1)**	**ARCH(1)**	**GARCH(1,1)**
r =	0.143%	\$ -	\$ 0.3325	\$ 1.1768	\$ 0.2044	\$ 0.9136	\$ 0.6651	\$ 0.8777
	Payoff	\$ 0.7131	\$ 0.6458	\$ 0.6314	\$ 0.7557	\$ 0.7047	\$ 0.6394	\$ 0.6432
	VPP	**\$ 0.6324**	**\$ 0.5727**	**\$ 0.5600**	**\$ 0.6702**	**\$ 0.6249**	**\$ 0.5670**	**\$ 0.5704**
K =	\$ 19.00	**MA(1)**	**MA(2)**	**AR(2)**	**ARMA(1,1)**	**AR(1)**	**ARCH(1)**	**GARCH(1,1)**
r =	0.143%	\$ -	\$ 0.8325	\$ 1.6768	\$ 0.7044	\$ 1.4136	\$ 1.1651	\$ 1.3777
	Payoff	\$ 1.0199	\$ 0.9590	\$ 0.9482	\$ 1.0823	\$ 1.0141	\$ 0.9539	\$ 0.9589
	VPP	**\$ 0.9044**	**\$ 0.8504**	**\$ 0.8409**	**\$ 0.9598**	**\$ 0.8993**	**\$ 0.8459**	**\$ 0.8504**

Figura 59. Cálculo del Payoff y VPP para el tipo de cambio diario.

t =	4							
K =	$ 19.50	MA(1)	MA(2)	AR(2)	ARMA(1,1)	ARCH(1)	AR(1)	GARCH(1,1)
r =	4.29%	$ 0.6318	$ 1.2039	$ 0.1009	$ 1.2918	$ -	$ -	$ -
	Payoff	$ 0.2970	$ 0.1731	$ 0.2286	$ 0.2781	$ 0.2895	$ 0.2992	$ 0.2807
	VPP	**$ 0.2501**	**$ 0.1458**	**$ 0.1926**	**$ 0.2342**	**$ 0.2439**	**$ 0.2520**	**$ 0.2365**
K =	$ 19.00	MA(1)	MA(2)	AR(2)	ARMA(1,1)	ARCH(1)	AR(1)	GARCH(1,1)
r =	4.29%	$ 1.1318	$ 1.7039	$ 0.6009	$ 1.7918	$ 0.1949	$ -	$ 0.0529
	Payoff	$ 0.5622	$ 0.4475	$ 0.5239	$ 0.6218	$ 0.5727	$ 0.5748	$ 0.5694
	VPP	**$ 0.4735**	**$ 0.3770**	**$ 0.4413**	**$ 0.5237**	**$ 0.4824**	**$ 0.4842**	**$ 0.4796**

Figura 60. Cálculo del Payoff y VPP para el tipo de cambio mensual.

Donde los valores en color rojo indican un escenario posible donde se calcula el Payoff al día de expiración, los valores en color verde muestran los valores promedios o valores esperados con la realización de la simulación con 10,000 escenarios y el VPP se calcula al día de hoy y ese sería el pago de la prima al día de la compra de la opción Call para cada uno de los modelos estudiados.

Por ejemplo: Si queremos cubrirnos con un precio Strike de $19.5 por dólar, con el análisis del tipo de cambio diario, en el peor de los casos estaríamos pagando una prima alrededor de 67 centavos por cada dólar cubierto y de 56 centavos por dólar cubierto en el mejor de los escenarios.

Capítulo 6. Conclusiones

Con el trabajo que se realizó es esta tesis para el estudio de la serie de tiempo del tipo de cambio peso-dólar (diario y mensual), pudimos modelar el comportamiento con la metodología de Box-Jenkins (ARIMA). Con esto, se alcanza el objetivo principal de este trabajo, poder estudiar el comportamiento de la serie y crear un modelo estadístico que nos ayudara a predecir los valores futuros al último día hábil del año 2016.

Con esto, se tomaron estrategias de cobertura que ayude a la conveniencia de los usuarios finales, como los inversionistas o empresas, y con ello, alcanzar sus metas financieras con los precios que se mostraron en los diferentes modelos estudiados.

Es difícil poder realizar un estudio con exactitud sobre el precio del tipo de cambio, ya que hay otros factores externos al cálculo de éste que afectan a dicho precio, como el caso de Gran Bretaña y el Brexit, algún ataque terrorista o algún suceso importante como las elecciones a la presidencia de los Estados Unidos el 8 de Noviembre del presente año. Estos factores externos no se pueden medir de una manera eficaz para incorporarlos en el análisis de este tipo de datos financieros.

Como trabajo futuro a realizar en esta tesis, se puede implementar el estudio de los comportamientos de las variables que afectan directamente el cálculo del valor de tipo de cambio a través del tiempo como son: las tasas de interés, la inflación, etc. Analizar sus datos obtenidos a lo largo del tiempo y poder incorporarlos para ver su comportamiento y qué tanto afecta al cálculo de la serie.

Bibliografía

Banco de México. (2016). Obtenido de http://www.banxico.org.mx/index.html

Bruce L. Bowerman, R. T. (2006). *Forecasting, time series and regression* (Fourth ed.). Cengage Learning.

Cuatro claves para entender el tipo de cambio. (25 de Enero de 2016). Obtenido de El Financiero: http://www.elfinanciero.com.mx/economia/puntos-sobre-el-tipo-de-cambio.html

Damodar N. Gujarati, D. C. (2010). *Econometría* (Quinta ed.). McGraw Hill Educación.

Forecast Pro Manual. (2000). Massachusetts, USA.

Gottman, J. M. (1984). *Time-series analysis: a comprehensive introduction for social scientists.* New York, NY, USA: Cambridge University Press.

Guía para el uso de @Risk: Programa de complemento para el análisis y simulación en Microsoft Excel (Versión 7 ed.). (2016). New York, USA: Palisade Corporation.

Hull, J. C. (s.f.). *Options, futures and other derivatives* (Sixth ed.). Pearson Education.

Kellison, S. G. (2009). *The Theory of Interest* (Third ed.). McGraw Hill.

McDonald, R. L. (2013). *Derivatives Markets* (Second ed.). USA: Pearson Education.

R. Carter Hill, W. E. (2011). *Principles of Econometrics* (Fourth ed.). Wiley.

Terence C. Mills, R. N. (2008). *The Econometric Modelling of Financial Time Series* (Third ed.). Cambridge, United Kingdom.

Wei, W. W. (2006). *Time series analysis: Univariate and Multivariate Methods* (Second ed.). Pearson Education.