

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN ACTUARÍA

**Pensión promedio de trabajadores cotizantes del IMSS, generación AFORE.
Aplicando el modelo Vasicek en la proyección de rendimientos**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN ACTUARÍA

PRESENTA
NADIA ROSALÍA ALARCÓN MORALES

DIRECTOR DE TESIS
VÍCTOR HUGO VAZQUEZ GUEVARA

PUEBLA, PUE.

FEBRERO 2019

Dedicado con amor a Paco, Juana y Sam.

Agradecimientos

A Dios y al Universo.

A Paco, mi papá, por ser la inspiración en mis decisiones, especialmente en este trabajo.

A Juana, mi mamá, por su tiempo, dedicación, amor y corrección hacía mi.

A mi hermana, Sam, por ser quien es, mi confidente y mi cómplice.

A mis amigas¹ y amigos² por estar en los buenos, malos, mejores y peores momentos.

A Gus por acompañarme en la dicha y en la adversidad.

A mis profesores cuya enseñanza no se limitó a un temario.

Al Dr. Victor Hugo Vazquez Guevara por su amistad, paciencia, guía y enseñanza durante mi vida universitaria, en especial en el último año.

y por último al Dr. Hugo Adán, a la Mtra. Brenda Zavala y a la Dra. Martha Miranda por su dedicación y tiempo en la revisión de este trabajo, así como por sus valiosas aportaciones.

¹ Ale, Ambar, Andy, Blanca, Itza, Mariana y Rubi.

² Andrés, Ángel, David, Jona, Luis, Paquin, Sauri, y Toño.

Introducción

El retiro es la etapa final de la trayectoria laboral, y ante las necesidades propias de esta etapa se debe contar con los recursos que ayuden a subsistir sin perder el bienestar y calidad de vida.

Para garantizar el bienestar en la edad adulta se crean los planes de pensiones, arreglos que proporcionan pagos periódicos. Estos planes pueden ser creados por instituciones públicas o privadas, y generalmente establecen requisitos para tener acceso al beneficio. Tales requisitos son establecidos a partir de las características con las que cuenta la población beneficiada, entre los más representativos están la edad de jubilación y el porcentaje o monto de aportación para constituir el fondo de retiro. Cuando el plan establece el monto que se va a pagar, se habla de un esquema de beneficio definido. Por otro lado, cuando se establece el porcentaje de aportación se llama esquema de contribución definida. Cualquier esquema establecido debe generar un equilibrio, es decir, que el financiamiento de pensión no genere un pasivo excesivo para la institución, pero que lo correspondiente al trabajador no sea imposible de cubrir.

La población ha tenido cambios estructurales asociados a los desarrollos tecnológicos, químicos, biológicos, entre otros. Es por esto que los esquemas de pensiones suelen modificarse con el fin de que se adapten mejor a las necesidades de la población objetivo.

La institución con mayor presencia en México para garantizar el bienestar de los trabajadores es el Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS). Dicha institución establece en la Ley del Seguro Social (LSS) de 1973 un esquema de pensiones de beneficio definido para los trabajadores. En 1997 se reforma la LSS y los trabajadores dados de alta a partir del 1 de julio de 1997 son beneficiados con un esquema de pensiones de contribución definida. Aquellos trabajadores cuya adscripción al Instituto fue antes del 1 de julio de 1997 y siguieron contribuyendo después de esa fecha tienen derecho a elegir su esquema de jubilación al momento de tramitar su pensión, estos asegurados son llamados Generación de Transición, y aquellos trabajadores cuya cotización ha sido exclusivamente después del 1 de julio de 1997 son llamados Generación AFORE.

Para garantizar el bienestar en la edad de retiro la LSS establece obligaciones para el trabajador, el patrón y el Estado, estas obligaciones se traducen en cuotas

VIII

que pasan a formar parte de la subcuenta individual del trabajador, en la cual se constituye el fondo destinado a la pensión. En México se establece como edad mínima de jubilación los 60 años, y la aportación tripartita del 6.5 % sobre el salario de cotización [21].

Las subcuentas individuales de los trabajadores son administradas por las Administradoras de Fondos de Ahorro para el Retiro (AFORE). Las AFORE son instituciones privadas y una de sus funciones más destacables es la inversión de los recursos del trabajador, para que éstos generen rendimientos. La inversión que hacen es supervisada por la Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro, CONSAR.

Existen a la fecha diez AFORE disponibles y el trabajador tiene el derecho de elegir la que sea de su agrado. Para elegir la mejor administradora la CONSAR recomienda considerar tres puntos:

1. Comisión.
Porcentaje respecto al fondo que cobra la AFORE por la administración de los recursos.
2. Rendimiento.
Intereses generados por el fondo.
3. Servicio al cliente.
La disposición y atención que tenga la AFORE por atender las inquietudes o necesidades del asegurado.

Objetivo

A lo largo de estos 21 años, después de la reforma de la LSS, se han presentado diversos estudios públicos, privados, nacionales e internacionales sobre si lo estipulado en la ley es suficiente para cubrir las necesidades de los trabajadores al momento del retiro. Ante esta inquietud, el presente trabajo tiene por objetivo obtener la pensión promedio de los trabajadores cotizantes del IMSS, generación AFORE, bajo las condiciones actuales.

La tasa de rendimiento es uno de los factores más importantes para constituir el fondo del retiro, y aunque la inversión es supervisada y el riesgo al que son expuestos los portafolios está establecido en la ley, el comportamiento de la

tasa contiene un factor de aleatoriedad. Por ello el presente trabajo se enfoca en el análisis y presentación del modelo estocástico Vasicek, cuya aplicación en la proyección de tasas de interés es utilizada por las instituciones financieras [5]. A partir del histórico de la tasas de rendimiento reportadas ante la CONSAR por las AFORE se estiman los parámetros del modelo, el cual a través de simulaciones permite conocer los posibles rendimientos futuros.

Una vez aplicado el modelo Vasicek y obtenidos los rendimientos proyectados, se plantea el modelo a seguir para la construcción del fondo de pensiones, dicho modelo considera ingresos por aportaciones y rendimientos, y egresos únicamente por comisiones. Se toman como datos iniciales los registrados al cierre de diciembre de 2017 en el reporte de valuación actuarial edición 2018, puesto a disposición por el IMSS, y se establecen algunos supuestos para el comportamiento del fondo. Con el fondo final obtenido se busca ver el impacto de cada uno de los factores que influyen en el fondo de pensiones, así como observar la suficiencia de la pensión proyectada para las generaciones futuras.

Índice general

Introducción	VII
1. Pensiones	1
1.1. Panorama Internacional	3
1.2. México en la Actualidad	10
1.3. Sistema de Pensiones en México	14
1.3.1. Instituto Mexicano del Seguro Social	16
2. Preliminares	25
2.1. Probabilidad	25
2.2. Movimiento Browniano	26
2.3. Integral de Itô	27
2.3.1. Propiedades de la Integral Estocástica de Itô	33
2.4. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas	34
2.5. Formula de Itô	35
2.5.1. Fórmula de Itô [I]	35
2.5.2. Fórmula de Itô [II]	36
2.5.3. Fórmula de Itô [III]	37
2.6. Teorema de Existencia y Unicidad	37
2.7. Modelo Vasicek	39
2.7.1. Estimación de Parámetros	43
3. Aplicación	47
3.1. Constitución del Fondo de Pensiones	47
3.1.1. Generación AFORE	50
3.1.2. Datos Iniciales	51
3.1.3. Comisiones	52
3.1.4. Aportaciones	53

3.1.5. Rendimientos	56
3.1.6. Fondo	62
3.2. Resultados	69
Conclusión	79
Apéndice	81
A. Resultados comparativos sobre pensiones	81
B. Aplicación del Modelo Vasicek	85
C. Código VBA	89
Bibliografía	92

**Pensión promedio para trabajadores cotizantes del
IMSS, generación AFORE. Aplicando el modelo
Vasicek en la proyección de rendimientos**

Nadia Alarcón

Febrero 2019

Capítulo 1

Pensiones

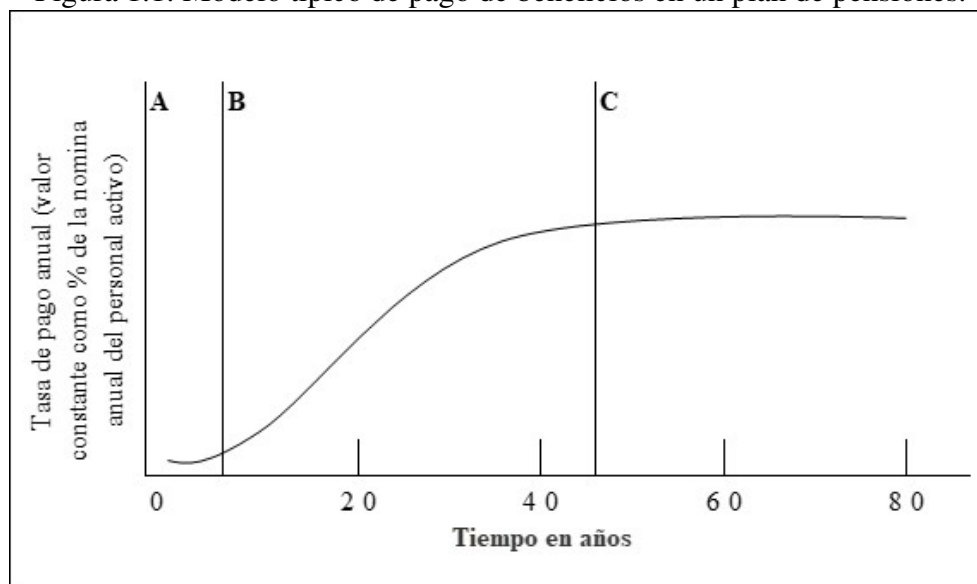
Una pensión es una cantidad periódica, temporal o vitalicia que la seguridad social paga por razón de jubilación, viudez, orfandad o incapacidad [33]. Una pensión no es estrictamente de índole pública, algunas empresas también brindan planes privados a sus trabajadores.

Uno de los primeros datos históricos de este beneficio data del siglo XIX en Prusia, donde Otto Von Bismarck otorgó a los ancianos de la época una pensión con el fin de evitar que éstos vivieran en la pobreza, siendo uno de los requisitos para obtenerla tener 70 años; aun cuando la esperanza de vida era de 45, de esta manera las pensiones financiadas eran pocas y no generaban un problema para el gobierno.

El principal requisito para otorgar una pensión de retiro es la edad, la cual oscila entre los 60 y 68 años dependiendo del diseño del plan y la política que rige al país. Otro de los requisitos a considerar son los años de antigüedad o de servicio.

Cuando se introduce un plan de pensiones, si el patrón decide hacer el pago conforme se van generando las pensiones, está usando el método «pay-as-you-go», pago-al-retiro. Inicialmente son pocas las personas que cumplirán con el requisito y para la organización no hay dificultad en cubrir el pago, pero conforme avanza el tiempo son más los individuos que tendrán acceso a la pensión por lo que para la organización, el pago de la pensión se incrementará de manera significativa.

Figura 1.1: Modelo típico de pago de beneficios en un plan de pensiones.



Fuente: Pension Mathematics for actuaries [1]

La sección A de la Figura 1.1 muestra cómo los gastos aumentan de manera moderada los primeros años, una vez que se pasa al área B, los gastos ya pueden empezar a preocupar a la organización ya que más empleados están recibiendo su pensión y, si además de las grandes pensiones se agrega una tasa de salida menor a la de entrada, el plan estará pasando por su peor etapa, pero una vez que el plan sobreviva al área B, se pasará al área C donde el plan se estabilizará [1].

En los países anglosajones, de acuerdo a [15], los esquemas son de dos tipos:

- Esquema de beneficio definido. Consiste en establecer desde el inicio el monto del que gozará el individuo al momento de pensionarse, éste puede estar en función del último salario.
- Esquema de contribución definida. Consiste en aportar al fondo de pensión un porcentaje del salario y al final del periodo el fondo se pagará en mensualidades.

Existen también planes híbridos y mixtos, en los primeros los beneficios están ligados a una tasa de rendimiento acreditada a las contribuciones, ya sea que esta tasa se defina en las reglas del plan, o bien se calcule con referencia al rendimiento

real de los activos. El esquema mixto está compuesto por el esquema de beneficio definido y el de contribución definida.

La parte más difícil en el diseño de un plan de pensiones es poder predecir los cambios en las hipótesis iniciales y poder asignarle un costo a esos márgenes de error. El esquema que se escoja dependerá siempre de las condiciones que afectan al grupo beneficiado como su economía, geografía, demografía, política, cultura, entre otros.

El objetivo de una pensión por retiro es que la persona beneficiada, en edad de retiro pueda seguir gozando de la calidad de vida que tenía antes de su retiro laboral.

1.1. Panorama Internacional

Actualmente, existen diversas organizaciones que se dedican a la valoración de los planes de pensiones, la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) es una de las más importantes a nivel mundial ya que cuenta con 35 países miembros. La misión de la OCDE es promover políticas que mejoren el bienestar económico y social de las personas alrededor del mundo [30].

De acuerdo con la OCDE existen tres pilares en la arquitectura de los sistemas de pensiones, el primero de ellos está conformado por los programas dirigidos a la prevención de la pobreza:

- **Pensión básica.**- Se otorga a cualquiera, independientemente de sus contribuciones, aunque usualmente requieren de un criterio de residencia.
- **Pensión mínima.**- Puede referirse al monto mínimo hablando de un esquema de contribución definida o hablando de todos los esquemas definidos.
- **Asistencia social.**- Paga un beneficio mayor a los individuos retirados con menos recursos.

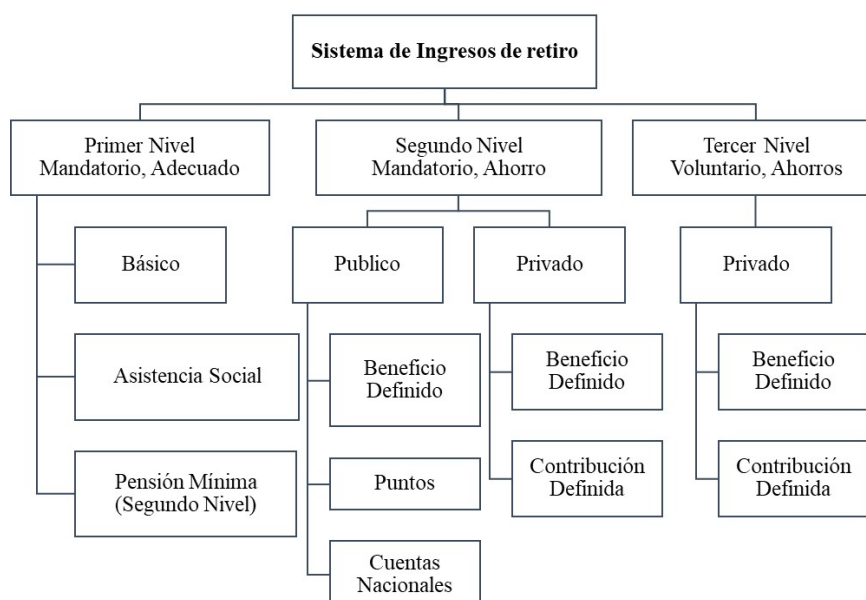
En el segundo pilar existen cuatro esquemas:

- **Beneficio definido (BD).**- Otorga el beneficio, generalmente, en función del último salario y el número de años de contribución.

- Esquema de **puntos**.- Consiste en que los trabajadores ganen puntos basados en sus ingresos de cada año. Al retiro la suma de los puntos de retiro son multiplicados por el valor del punto de pensión y así convertirlo en el pago de una pensión regular.
- **Contribución definida (CD)**.- Consiste en tener cuentas individuales y el fondo acumulado más los intereses se convierte en una pensión al momento del retiro.
- Esquema de **cuentas nocionales**.- Las contribuciones son registradas en cuentas individuales y se aplica una tasa de retorno al fondo. Las cuentas son «nocionales» y los fondos existen sólo en los libros de las instituciones administradoras. Al retiro, el capital nocional acumulado es convertido en pago de pensiones basadas en la esperanza de vida. Dado que está diseñado como un esquema de contribución definida son llamados planes de contribución definida nacional (NDC).

El tercer pilar se compone de los ahorros voluntarios y/o adicionales.

Figura 1.2: Taxonomía: Diferentes tipos de ingresos al retiro



Fuente: OCDE [30]

De acuerdo a su entorno social, cada país establece sus propias políticas de seguridad social y su modelo de pensiones. Para poder tener un panorama más amplio a nivel internacional se presentan tres indicadores clave de algunos países, en su mayoría miembros de la OCDE.

Edad de jubilación anticipada y normal.

El Cuadro 1.1 muestra la edad anticipada y normal para pensionarse en algunos países, además de especificar el género y tipo de plan. La edad de jubilación es un indicador importante ya que en función de ésta y la esperanza de vida se pueden calcular los años esperados que la pensión debe pagarse al beneficiario.

Cuadro 1.1: Edad de jubilación anticipada y normal para una persona que se pensiona en 2016 por tipo de esquema.

		Esquema	Edad anticipada	Normal
Australia		T	n.a.	65
		DC	55	..
Austria	Hombres	DB(ER)	64.9	65
	Mujeres	DB(ER)	59.9	60
Canadá		Básica/T	n.a.	65
		DB(ER)	60	65
Chile		Básica/T	n.a.	65
	Hombres	DC	Cualquier edad	65
	Mujeres	DC	Cualquier edad	60
Dinamarca		Básica/T	n.a.	65
		DC(ATP)	n.a.	65
		DC(Occ)	60	..
Estonia		Puntos	60	63
Finlandia		Min	63	65
		DB	63	65
Francia		DB	61.6	61.6
		Puntos	56.7	61.6
Alemania		Puntos	65	65
Hungría	Hombres	DB	n.a.	63
	Mujeres	DB	cualquiera con 40 años	63
Islandia		Básica/T	n.a.	67
		DB(Occ)	65	67
Irlanda		Básica/T	n.a.	66
		DB(Occ)	50	..

Israel	Hombres	Básica/T	n.a.	67
	Mujeres	Básica/T	n.a.	62
Italia	Hombres	NDC	62.8	66.6
	Mujeres	NDC	61.8	65.6
Corea		DB	57	61
Letonia		NDC/DC	60.75	62.75
		T	n.a.	67.75
Luxemburgo		DB	60	60
México		T	n.a.,	65
		DC	Cualquier edad/60	65
Países Bajos		Básica	n.a.	65.5
		DB(Occ)		65
Nueva Zelanda		Básica	n.a.	65
		DC	Flexible	..
Noruega		Min	67	67
		NDC/DB	62	67
Polonia	Hombres	NDC/Mín	n.a.	66
	Mujeres	NDC/Mín	n.a.	61
Portugal		DB	65	66.2
		Min	n.a.	66.2
República Eslovaca	Hombres	DB	Nivel de subsistencia	62
	Mujeres	DB	Nivel de subsistencia	62-58.25 ¹
España		DB	61	65
Suecia		Básica	n.a.	65
		NDC/DC	61	..
Suiza	Hombres	DB	63	65
	Mujeres	DB	62	64
Turquía	Hombres	DB	n.a.	60
	Mujeres	DB	n.a.	58
Reino Unido	Hombres	Básica(SP)	n.a.	65
	Mujeres	Básica(SP)	n.a.	63
		T(PC)	n.a.	63
		DC	55	..
Estados Unidos		DB	62	66
		T		65

Nota: DB: Beneficio Definido, DC: Contribución Definida, n.a.: no disponible; Occ: Ocupacional; T: Dirigido ¹ en República Eslovaca la edad de jubilación para mujeres con hijos se reduce dependiendo la cantidad de hijos que tengan.

Fuente: OCDE

Porcentaje de aportación

En el Cuadro 1.2, se muestra el porcentaje del salario que se aporta al fondo de retiro para constituir la pensión. La importancia de este indicador radica en que mientras más alto sea el porcentaje de aportación mayor será el monto que se destinará al fondo. Para definir este porcentaje se debe estudiar la afectación financiera que tendrá en cada beneficiario. Hablando de un plan de «Beneficio Definido» el fondo colectivo tendrá mayor suficiencia para cubrir los beneficios de cada asegurado y si hablamos de un plan de «Contribución Definida» el individuo logrará tener un mayor fondo de pensión a lo que se le atribuye una mejor pensión.

Cuadro 1.2: Tasa obligatoria de contribución para retiro de un trabajador en 2016.

País	Público		Privado		Total
	Empleador	Empleado	Empleador	Empleado	
Australia	0	9.5			9.5
Bélgica	7.5	8.86			16.36
Canadá	4.95	4.95			9.9
Chile			11.23	1.15	12.18
Finlandia	7.2	18			25.2
Francia	7.25	10.4	3.1	4.65	25.4
Alemania	9.35	9.35			18.7
Hungría	10	20.75			30.75
Islandia	0	7.35	4	8	19.35
Israel	3.75	3.75	5.5	12	25
Italia	9.19	23.81			33
Corea	4.5	4.5			9
Luxemburgo	8	8			16
Países Bajos	4.9	0	16		20.9
México			1.125	5.15	6.275
Polonia	9.76	9.76			19.52
República					
Eslovaca	4	14			18
Suecia	7	11.38	0	4.5	22.88
Suiza	4.2	4.2	3.9	3.9	16.2
Turquía	9	11			20

Fuente: OCDE

Tasa de reemplazo.

Es el porcentaje del último salario que se recibe por concepto de pensión. En el Cuadro 1.3 se muestra la tasa de reemplazo segmentando a la población en tres grupos de acuerdo a los niveles de ganancias diferentes: los que tienen 0.5, 1 y 1.5 veces las ganancias promedio del trabajador (AW). Este rango permite un análisis de la futura jubilación, es decir, los beneficios de los trabajadores más pobres y más ricos.

El Cuadro 1.3 muestra también la tasa neta de pensión de reemplazo, es decir, se hace comparación con respecto al salario después de impuestos. Por ejemplo, si el salario mensual de un trabajador es de 1,000 pesos y se le hace una retención de impuestos de 50 pesos tiene un salario neto de 950 pesos. Si la pensión mensual es de 700 pesos se tiene una tasa de reemplazo de 70 % y una tasa neta de reemplazo de 73.68 %.

Cuadro 1.3: Tasa neta de pensión de reemplazo por ganancia.

Ganancia individual, múltiplo de la media para hombres (Mujeres)				
	Edad de jubilación	0.5	1	1.5
Australia	67	95.0 (91.8)	42.6 (38.8)	45.4 (41.4)
Austria	65	92.2	91.8	90.9
Bélgica	65	62.64	66.1	50.1
Canadá	65	62.17	53.44	38.5
Chile	65	48.3 (45.6)	40.12 (36.3)	40.56 (36.7)
Republica Checa	65	88.3	59.98	48.65
Dinamarca	74	110.3	80.22	76.24
Estonia	65	73.67	57.35	51.05
Finlandia	68	66.87	64.98	65.08
Francia	64	70.35	74.45	70.3
Alemania	65	54.67	50.46	49.77
Grecia	62	60.69	53.66	54.14
Hungría	65	89.58	89.58	89.58
Islandia	67	85.5	75.72	77.81
Irlanda	68	70.03	42.34	32.38
Israel	67 (64)	100.38 (91.9)	75.11 (67.4)	54.88 (49.3)
Italia	71	93.02	93.18	93.8
Japón	65	52.64	40.01	35.27
Corea	65	63.79	45.11	33.7

Luxemburgo	60	98.3	88.4	83.57
México	65	35.1	29.56 (27.7)	29.31 (27.5)
Países Bajos	71	105.14	100.64	100.22
Nueva Zelanda	65	80.68	43.15	30.51
Noruega	67	64.8	48.81	41.34
Polonia	65 (60)	37.18 (35.3)	38.57 (34.1)	37.85 (33.8)
Portugal	68	92.86	94.93	93.14
República				
Eslovaca	68	84.99	83.82	83.47
Eslovenia	60	57.25 (60.3)	56.65 (59.2)	54.09 (56.6)
España	65	79.26	81.79	81.68
Suecia	65	62.42	54.92	67.61
Suiza	65 (64)	57.44 (56.8)	44.91 (44.5)	31.45 (31.2)
Turquía	61 (59)	99.12 (95.0)	102.11 (97.9)	105.79 (101.4)
Reino Unido	68	52.14	28.95	20.67
Estados Unidos	67	59.92	49.13	42.4
OECD	65.8 (65.5)	69 (72.7)	60.65 (62.2)	57.5 (58.2)
Argentina	65 (60)	98.9 (90.3)	91 (83.1)	89.31 (81.3)
Brasil	55 (50)	92.39	76.37 (58.1)	76.37 (58.1)
China	60 (55)	104.37 (89.7)	83.02 (71.3)	77.01 (66.3)
India	58	99.3 (94.4)	99.3 (94.4)	99.3 (94.4)
Federación Rusa	60 (55)	53.03 (47.2)	38.77 (32.9)	33.5 (27.7)
Sudáfrica	60	32.08	17.1	11.9
EU28	65.8 (65.5)	79.7 (79.6)	70.62 (70.4)	66.79 (66.6)

Fuente: OCDE

Los planes de pensiones buscan adecuar la edad de jubilación y tasa de aportación con el objetivo de optimizar la tasa de reemplazo.

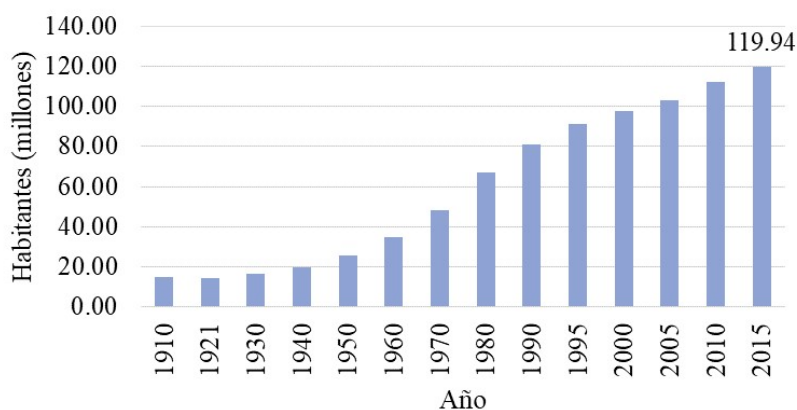
Cabe destacar que México tiene una de las menores tasas de reemplazo dentro de los países de estudio, proveniente de muchos factores siendo uno de ellos la menor tasa de contribución dentro del grupo. Una política para incrementar la tasa de reemplazo en México debe considerar además de una mayor tasa de contribución también una mayor edad de jubilación.

1.2. México en la Actualidad

La seguridad social es una institución nacida de la solidaridad humana, que se manifiesta en la reacción de ayudar a personas o grupos en estado de necesidad [32].

La población de un país, así como su crecimiento, es uno de los factores más importantes al momento de otorgar a la población la seguridad social, lo que permite estimar el número de beneficiarios. En la Figura 1.3 se puede apreciar el crecimiento poblacional en México de 1910 a 2015. La población total estimada a 2015 fue de **119, 939, 473** habitantes, de acuerdo con la última encuesta intercensal hecha en 2015.

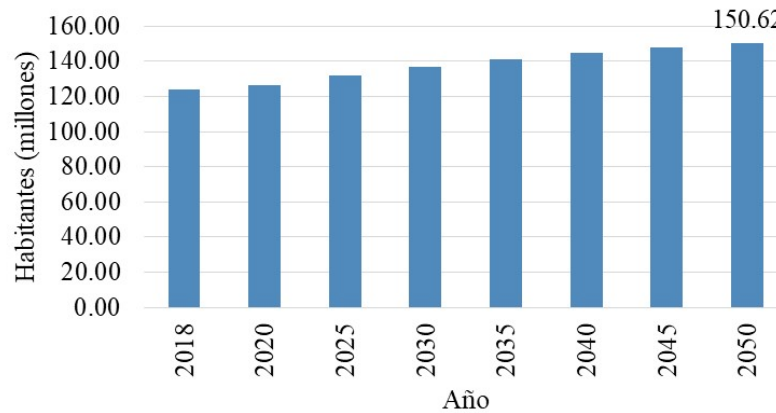
Figura 1.3: Población en México 1910-2015



Fuente: INEGI

Por otro lado, el Consejo Nacional de Población (CONAPO) ha trabajado en la proyección del crecimiento poblacional hasta el año 2050, como se muestra en la Figura 1.4.

Figura 1.4: Proyección del crecimiento poblacional en México 2015-2050



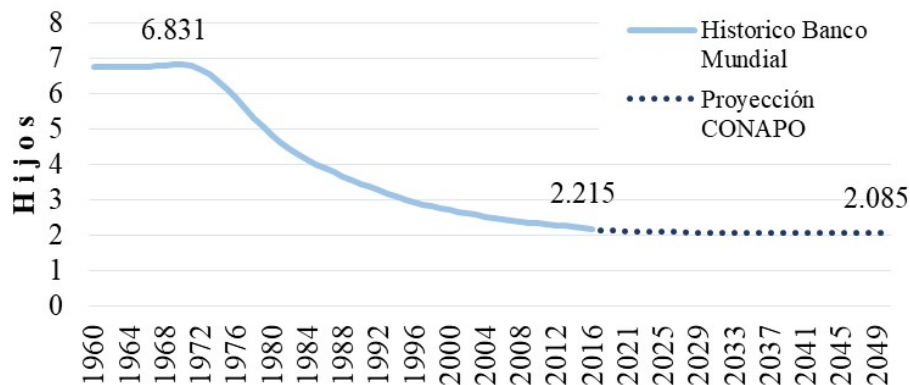
Fuente: CONAPO

El crecimiento poblacional es definido principalmente por dos factores: Fecundidad y Mortalidad.

Fecundidad

La tasa de fecundidad mide el número promedio de hijos que tiene una mujer en edad reproductiva (15-49 años) [18]. Este indicador es importante ya que de esta manera se mide a los individuos entrantes a la población, sin considerar la inmigración.

Figura 1.5: Tasa de Fecundidad



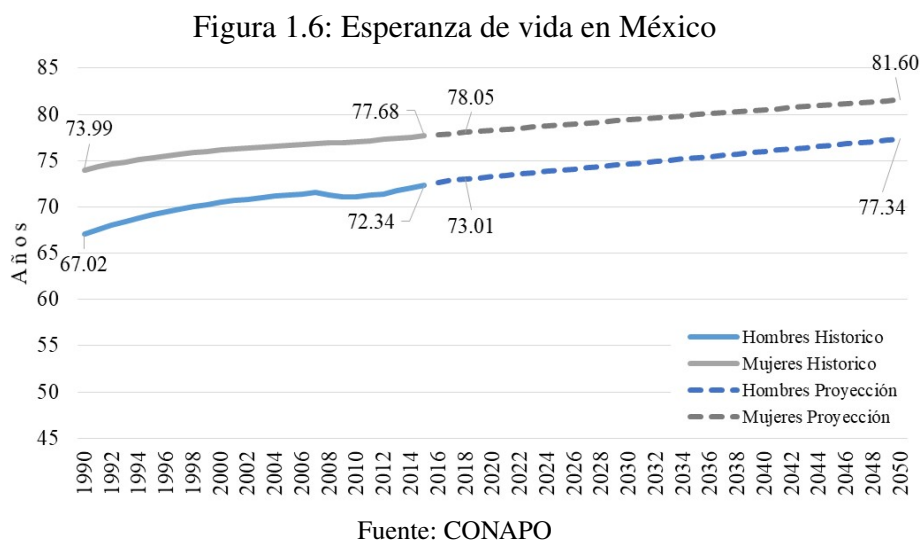
Fuente: Banco Mundial/CONAPO

Como se puede observar en la Figura 1.5, la tasa de fecundidad ha disminuido en 67.7% de 1960 a 2017 y se estima que se reducirá 3.1% en los próximos 32 años.

Mortalidad

La mortalidad se define como la cantidad de personas que mueren en un lugar y en un periodo de tiempo determinados en relación con el total de la población. Derivado de la mortalidad se tiene la esperanza de vida, que es una medida resumen sobre el nivel de la mortalidad que expresa el promedio de años que se espera viva una persona bajo las condiciones de mortalidad del periodo en que se calcula [31]. La mortalidad muestra la dinámica en que los individuos abandonan a la población, sin considerar la emigración.

En la Figura 1.6 se muestra la esperanza de vida en México de 1990 a 2015, donde se aprecia el incremento de 3.69 años en mujeres y 5.32 años en hombres. La tendencia va en aumento lo que significa que se espera que los individuos prevalezcan por más tiempo dentro del grupo.



La distribución por edad de la población es la base del comportamiento económico del país. La edad en México considerada económicamente activa es el rango de 15 a 60 años, es decir, se espera que las personas pertenecientes a este grupo

de edad se encuentre activamente laborando.

En la Figura 1.7 se observa la distribución por edad y género de la población en México a 2015, mientras que en la Figura 1.8 se observa los datos proyectados por la CONAPO para el año 2050.

Figura 1.7: Distribución de la población por edad y género (millones) 2015

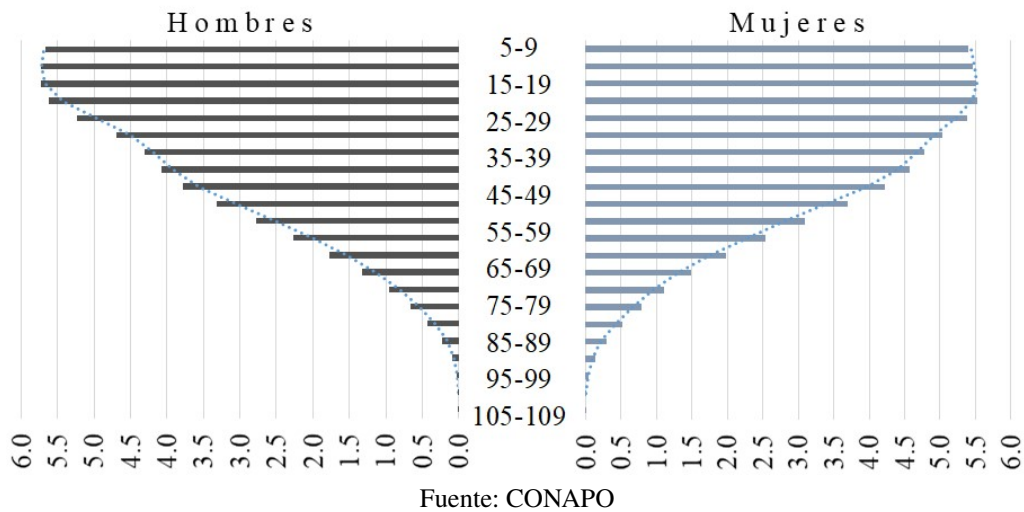
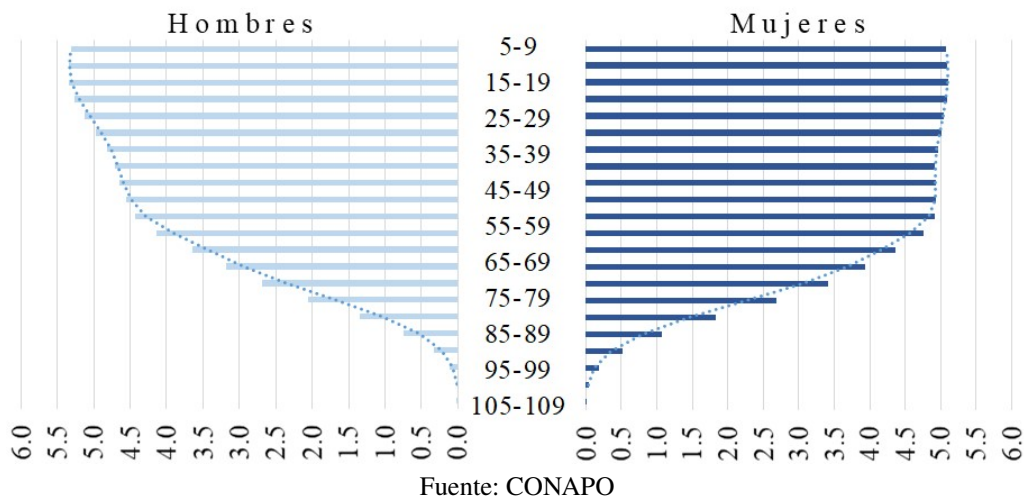


Figura 1.8: Distribución de la población por edad y género (millones) 2050



En el plan pensiones de beneficio definido se vuelve fundamental considerar la distribución por edad de la población, ya que la Población Económicamente Activa (PEA) es la que costea las pensiones de los que se encuentran retirados.

La PEA se enfrenta a otras circunstancias, tan solo al segundo trimestre del 2018 se tiene que **55, 643, 417** personas pertenecen a este sector, es decir, 59.8 % de la población total. De las cuales 1.9 millones de personas se encuentran desocupadas, es decir, declaran no laborar ni una hora a la semana.

Las personas ocupadas se dividen en dos grupos, los pertenecientes al trabajo formal, que se define como aquellas personas que tienen al menos las prestaciones de ley, y el trabajo informal el cual establece las siguientes modalidades: trabajo no protegido en la actividad agropecuaria, servicio doméstico remunerado en los hogares y los trabajadores subordinados que, aunque trabajan para unidades económicamente formales lo hacen bajo modalidades que eluden el registro ante la seguridad social. El 56.6 % de la población ocupada, es decir, 30.5 millones de personas se encuentran en el sector informal [26].

El trabajo informal y la desocupación son factores que afectan al sistema de pensiones ya que las personas pertenecientes a estos grupos no contribuyen a su retiro, al menos no dentro del sistema financiero mexicano.

1.3. Sistema de Pensiones en México

“La seguridad social tiene por finalidad garantizar el derecho a la salud, la asistencia médica, la protección de los medios de subsistencia y los servicios sociales necesarios para el bienestar individual y colectivo, así como el otorgamiento de una pensión que, en su caso y previo cumplimiento de los requisitos legales, será garantizada por el Estado.”

Artículo 2 de la Ley del Seguro Social, 1997.

En 1943 con el presidente Manuel Ávila Camacho al frente, se funda el Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS), institución con mayor presencia en la atención de la salud y en la protección social de los mexicanos. Con la administración de los recursos de los asegurados brinda tranquilidad y estabilidad a los

trabajadores y sus familias, ante cualquiera de los riesgos especificados en la Ley del Seguro Social(LSS)[21].

En 1992 se crea el Sistema de Ahorro para el Retiro (SAR) y para dar surgimiento a éste, el Congreso de la Unión reforma las leyes del IMSS y del Instituto del Fondo Nacional de la Vivienda para los Trabajadores (INFONAVIT). La reforma a la Ley del Seguro Social en 1997 hace un cambio drástico en el esquema de pensiones en México, que pasa de un sistema de Beneficio Definido, donde se maneja un riesgo colectivo, a un plan de Contribución Definida y cuentas individuales donde a cada asegurado se le asigna una cuenta en la que debe contribuir para su pensión. El SAR abarca el sector público y privado, se constituye por las cuentas individuales a las que contribuye el trabajador y tiene por objetivo dar viabilidad financiera, incrementar la cobertura, e incrementar el ahorro.

La CONSAR tiene como labor fundamental regular el SAR y las AFORE, las cuales gestionan las cuentas individuales de los trabajadores.

Con el fin de fortalecer el sistema pensionario, la LSS ofrece incentivos a empresas para que éstas brinden planes privados a sus empleados. De acuerdo con los datos del Sistema de Registro Electrónico de Planes de Pensiones (SIREPP) de la CONSAR, en México se tienen registrados de enero a mayo de 2017, **2,045** planes. De los más representativos se encuentran los trabajadores cotizantes del Instituto Mexicano del Seguro Social, Instituto de Seguridad y Servicios Sociales de los Trabajadores del Estado (ISSSTE), PEMEX, Secretaría de la Defensa Nacional (SEDENA) y Secretaría de la Marina (SM). Además la Secretaría de Hacienda y Crédito Público otorga beneficios fiscales tanto a las empresas que benefician a sus empleados con planes privados como a las personas físicas que adquieren productos en el sistema financiero cuyo objetivo es incrementar su patrimonio al momento del retiro.

Se tienen dos tipos de pensiones: las contributivas que son aquellas que obtienen las personas que contribuyeron o cotizaron al sistema de pensiones a lo largo de su vida laboral, el cual se atribuye a trabajadores del sector formal, y las pensiones no contributivas derivadas de aquellas personas cuya contribución fue mínima o nula. La pensión no contributiva se crea para que los adultos mayores cuenten con un ingreso mínimo y prevenir que experimenten situación de pobreza.

De acuerdo con datos de la CONSAR, al 2016 en México se tenían al menos

9.6 millones de personas de al menos 65 años, 7.07 millones (74 %) de ellas con al menos una pensión ya sea contributiva o no contributiva, y el 26 % restante no cuentan con pensión de ningún tipo. Del total de adultos mayores únicamente el 31 % (2.9M) tiene ingreso por concepto de pensión o jubilación principalmente de los organismos de seguridad social: IMSS, ISSSTE, Fuerzas Armadas, PEMEX, entre otros y el 49% recibe ingresos por algún programa social de pensión no contributivo [12].

En México, a través de la Secretaría de Desarrollo Social (SEDESOL) a partir de 2007 se implementó el programa de Pensión para Adultos Mayores (PAM) dirigido a los adultos a partir de 65 años, mexicanos o que tengan al menos 25 años de residencia en México, que no reciban una pensión mayor a 1,092 pesos mensuales. El programa beneficia a los adultos con 1,160 pesos bimestrales.

Nota: El gobierno federal correspondiente al periodo 2018-2024 propone cambios al programa PAM. Algunos de los detalles se encuentran en [16] y se plantea beneficiar a los adultos mayores con el monto doble, siendo la edad mínima para obtener el beneficio 68 años.

1.3.1. Instituto Mexicano del Seguro Social

Por la importancia de tener los recursos suficientes para hacer frente a todas las coberturas, el 12 de marzo de 1973 se publica en el diario oficial de la federación la Ley del Seguro Social [20], la cual en términos de retiro declara para los asegurados del IMSS un plan de pensiones de beneficio definido. Los requisitos para ser acreedor a una pensión bajo el régimen de 1973 son:

- Haber cotizado ante el IMSS antes del 1 de julio de 1997.
- Tener mínimo 500 semanas de cotización reconocidas ante el Instituto.
- La pensión se determina tomando en cuenta el salario promedio de los últimos cinco años (250 semanas aproximadamente) y el nivel salarial, pero dependiendo de la edad en que se decide pensionarse corresponde el porcentaje descrito en el Cuadro 1.4.

Cuadro 1.4: Cuantía de la pensión

Tipo de pensión	Edad	Porcentaje de pensión
Pensión de vejez	65	100 %
	64	95 %
	63	90 %
Pensión por cesantía	62	85 %
	61	80 %
	60	75 %

Fuente: Ley del Seguro Social 1973.

También se hace entrega de otros recursos en efectivo y en una sola exhibición:

1. SAR 92-97 el cual incluye SAR IMSS 1992 y SAR INFONAVIT 1992 (en caso de no haber tenido un crédito de vivienda).
2. Retiro 97 a la fecha de retiro.
3. INFONAVIT 1997 de acuerdo con los lineamientos del INFONAVIT.

En caso de que se tengan 60 años y el IMSS determine que no se cumplen los requisitos para una pensión se hará entrega de los recursos de la AFORE y a los 65 años, se hará entrega de los recursos del primer punto, en caso de que los hubiera.

Con la nueva ley entran en funcionamiento las AFORE. En la Figura 1.9 se muestran las 10 administradores existentes a Diciembre 2018. Los trabajadores tienen el derecho de transferir sus recursos a la AFORE que prefieran.

Figura 1.9: AFORE disponibles (Diciembre 2018)

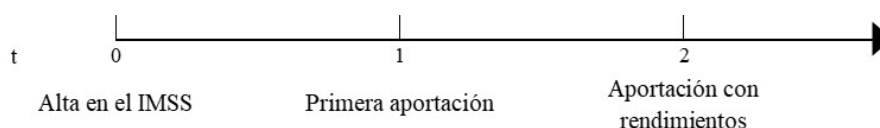


Fuente: CONSAR

Se puede deducir que el comportamiento del fondo sigue la siguiente expresión:

$$Fondo_{t+1} = Fondo_t + Aportaciones\ Obligatorias_t + Aportaciones\ Adicionales_t \\ + Rendimientos_t - Comisiones_t - Retiros_t.$$

Para $t \geq 0$, donde t es el periodo.



El fondo inicial es igual a cero (al momento en que es dado de alta el trabajador ante el IMSS). El trabajador hace su primera aportación (en $t = 1$), al finalizar el periodo se le hacen los ajustes de movimientos. En caso de que el trabajador cotice al IMSS y no haya elegido AFORE, la cuenta es asignada a la AFORE que haya generado mayores rendimientos. Cuando el trabajador es registrado en alguna AFORE puede hacer aportaciones voluntarias; monto extraordinario al designado por la ley, y retiros, lo cuales se pueden realizar bajo tres modalidades: retiro por matrimonio, desempleo y a las aportaciones adicionales. El monto que se retire bajo estas modalidades será descontado del fondo acumulado.

Aportaciones Obligatorias

La nueva ley decreta una aportación tripartita a la cuenta individual, es decir, aportan tres figuras: El Estado, el trabajador y el patrón, el porcentaje correspondiente a cada uno es descrito en el Cuadro 1.5.

Cuadro 1.5: Porcentaje de aportación

Figura	Aportación
Trabajador	1.125 %
Patrón	5.15 %
Estado	0.225 %

Fuente: Ley del Seguro Social 1997.

Siendo un total del 6.5 % del salario base de cotización aportado a la cuenta individual del trabajador por concepto de retiro.

El diseño actual del sistema de pensiones está ligado al número de cotizaciones que se deben tener para el acceso a una pensión. Aquí entra un nuevo factor:

densidad de cotización, el cual se define como la proporción de periodos con aportación que el trabajador ha realizado al sistema respecto del total de tiempo que ha permanecido en el mercado laboral:

$$\text{Densidad de cotización} = \frac{\text{Tiempo cotizado al SAR}}{\text{Tiempo total en el mercado laboral}} * 100.$$

La CONSAR también presenta la relación de la densidad de cotización con algunos otros factores como la edad, género, sector laboral, rango salarial, entre otros. Un trabajador que está integrado al sector formal incrementará su densidad de cotización. Este aspecto se vuelve un reto para las autoridades ya que alrededor del 60 % de la PEA se encuentra en el sector informal [7].

El gobierno federal además hace la aportación de una cuota social correspondiente al 5.5 % del salario mínimo general para la Ciudad de México vigente al día 1 de julio de 1997, actualizado trimestralmente conforme al Índice Nacional de Precios al Consumidor (INPC). La cuota social es una aportación mensual del Gobierno Federal para los trabajadores que ganan hasta quince veces el salario mínimo general vigente en el Distrito Federal. Esta cuota se actualiza trimestralmente de acuerdo al INPC.

Aportaciones Adicionales

La pensión que corresponde a cada trabajador depende del fondo que tenga acumulado en su cuenta individual, y dado que algunos estudios han demostrado lo bajo que es el ahorro obligatorio[37], el trabajador tiene la opción de incrementar su saldo con aportaciones o ahorro voluntario, mismo que puede ser invertido a corto, mediano o largo plazo. El ahorro voluntario al formar parte del fondo también es afectado por las comisiones.

Rendimientos

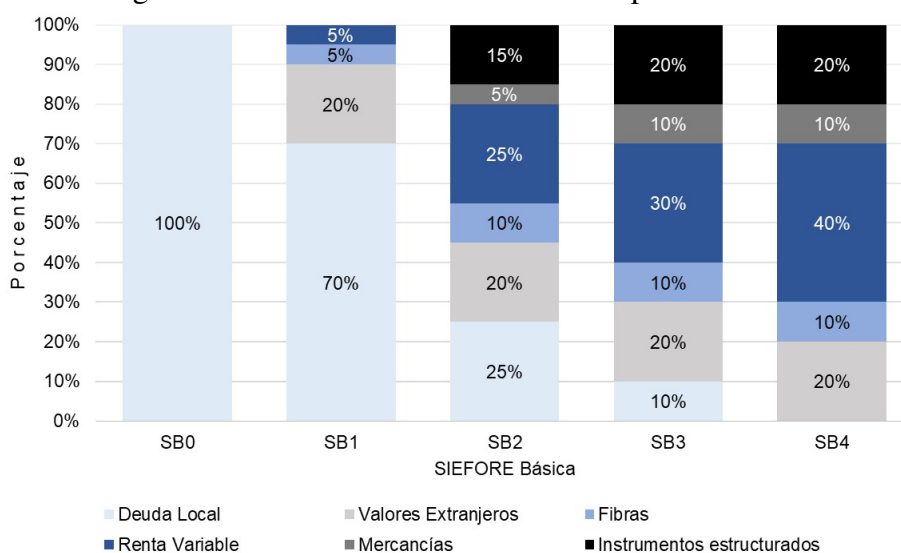
Es el interés que ganan los recursos del trabajador a través de la inversión que hace la AFORE. Cada AFORE se encuentra dividida en SIEFORE (Sociedades de Inversión Especializadas en Fondos para el Retiro), que son fondos de inversión con características específicas. Cada ahorrador, de acuerdo a su edad, y al tiempo que le falta para pensionarse le corresponde reglas de inversión distintas.

- SIEFORE Básica 4 (SB4): 36 años y menores.

- SIEFORE Básica 3 (SB3): entre 37 y 45 años.
- SIEFORE Básica 2 (SB2): entre 46 y 59 años.
- SIEFORE Básica 1 (SB1): 60 años y mayores.
- SIEFORE Básica 0 (SB0): 60 años y mayores. Trabajadores que están próximos a realizar retiros totales por pensión o negativa de pensión.

Los rendimientos varían en cada SIEFORE y en cada AFORE debido a que cada administradora maneja su propia estrategia de inversión. La inversión del portafolio correspondiente a cada SIEFORE es regulada por la Ley del Sistema de Ahorro para el Retiro, y está pensada de tal manera que los trabajadores de menor edad sean expuesto a más riesgo debido a que si existiera una caída en el mercado, su periodo de recuperación es mayor, contrario a las personas próximas a retirarse donde su fondo está casi en su totalidad invertido en deuda pública para evitar pérdidas significativas que pongan en riesgo su fondo de retiro.

Figura 1.10: Distribución de la inversión por SIEFORE



Fuente: CONSAR

Además, cuatro de las AFORE ponen a disposición del trabajador SIEFORE adicionales para el manejo únicamente de ahorro adicional.

Por defecto, el ahorro voluntario de los trabajadores registrados es invertido en la SIEFORE básica a la que pertenecen de acuerdo a su edad. Si el trabajador lo decide, puede invertir su ahorro adicional en otra SIEFORE ya sea básica o adicional.

Comisiones

Es el porcentaje que cobra la AFORE por la administración de la cuenta. Éste porcentaje es respecto al fondo, es decir, incluye aportaciones obligatorias y rendimientos. Las SIEFORE adicionales cuentan con su propio porcentaje de comisión el cual es descontado del ahorro voluntario.

Retiros

El fondo constituido por aportaciones obligatorias puede tener retiros parciales previos al retiro laboral únicamente por dos conceptos:

- Retiro parcial por desempleo.
Se puede acceder a este beneficio cada cinco años y por cada que se haga uso de éste se descontarán semanas de cotización.
- Retiro parcial por matrimonio.
Se puede hacer uso de éste sólo una vez.

Los trabajadores pueden hacer retiro de las aportaciones voluntarias de manera parcial o total y al momento del retiro se le hará la retención de impuestos de acuerdo a la Ley del Impuesto Sobre la Renta [35].

Requisitos para obtención de pensión bajo el régimen de 1997

Los requisitos para obtener el beneficio bajo el nuevo esquema son los siguientes:

- Haber empezado a cotizar al IMSS a partir del 1 de julio de 1997.
- Tener reconocidas ante el IMSS 1250 semanas de cotización.
- Tener de 60 a 64 años para pensión por cesantía.

- Tener 65 años para pensión por vejez.

Una vez que se cumplan todos los requisitos para la obtención de una pensión, existen tres modalidades para pensionarse:

- Renta Vitalicia. La pensión la paga una aseguradora.
- Retiro Programado. La pensión la paga la AFORE.
- Pensión Mínima Garantizada. El gobierno federal paga la pensión.

INFONAVIT

Como parte de las prestaciones establecidas por la Ley Federal del Trabajo, el patrón debe hacer una aportación bimestral del 5 % del salario base de cotización destinada al fondo de vivienda del trabajador. Con este fondo el trabajador puede adquirir una vivienda, o en caso de no hacer uso de estos recursos, el trabajador puede retirarlos y usarlos para su pensión al momento del retiro. Si un trabajador hace uso de su crédito, el INFONAVIT le cobra intereses que se traducen en rendimientos que el Instituto genera a los fondos individuales.

IMSS: Pensiones

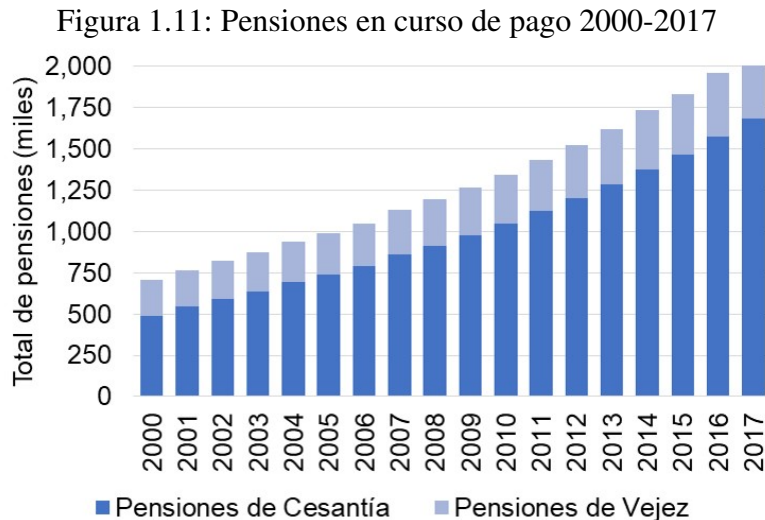
Al cierre de 2017, el IMSS otorgaba **2, 096, 033** pensiones por cesantía y vejez. Distribución mostrada en el Cuadro 1.6.

Cuadro 1.6: Pensiones otorgadas por el IMSS 2017

	Total Pensiones	Cuantía mensual promedio	Edad promedio
Cesantía	1,686,741	4,896	69
Vejez	409, 292	5,062	76

Fuente: Prestaciones económicas, memoria estadística [22].

El IMSS tiene bajo su cargo por concepto de «Pensiones en curso de pago» el pago de pensiones otorgadas bajo el régimen de 1973. En la Figura 1.3.1 se muestra el incremento de pensiones del 2000 al 2017.



Fuente: IMSS

De acuerdo con la CONSAR el gasto público por pensiones seguirá creciendo durante las siguientes décadas debido a que la Generación de Transición obtendrá pensiones mayores que las de la Generación de AFORE, por los beneficios altamente subsidiados que ofrece la ley de 1973. Los miembros más jóvenes pertenecientes a la Generación de Transición, a 2017 contaban con apenas 35 años y la proyección demográfica de la población de los trabajadores de la Generación de Transición, prevé que dicha generación se cerrará hasta el 2080 [8].

En México el tema del retiro laboral es crucial, y la CONSAR busca hacerlo de interés público. La concientización en el tema compete a numerosas instituciones tanto de índole pública como privada, y coordinar a todas ellas hacia un mismo fin es uno de los desafíos más grandes por parte del SAR.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se busca presentar algunas de las herramientas matemáticas, tales como definiciones y teoremas de probabilidad que serán de utilidad en el cálculo de Itô. Éstas fungen como apoyo para el análisis de ecuaciones diferenciales estocásticas, para finalmente presentar el modelo Vasicek cuya aplicación principal es en la predicción de tasas de interés.

2.1. Probabilidad

El modelo matemático para el estudio de variables aleatorias es la terna

$$(\Omega, \mathcal{F}, P),$$

llamada *espacio de probabilidad*, donde Ω es un conjunto que tiene como elementos a todos los posibles resultados del experimento aleatorio de estudio, llamado espacio muestral, $\mathcal{F}$ es una σ -álgebra de subconjuntos Ω , y P es una medida de probabilidad definida sobre $\mathcal{F}$.

Una **variable aleatoria** es una transformación $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cualquier número real x :

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}.$$

Consideremos ahora un sistema que puede caracterizarse por estar en cualquiera de un conjunto de estados previamente especificado. Suponga que el sistema evoluciona o cambia de un estado a otro a lo largo del tiempo de acuerdo con cierta una ley de movimiento, y sea X_t el estado del sistema al tiempo t . Si se considera que la forma en la que el sistema evoluciona no es determinista, sino

provocada por algún mecanismo azaroso, entonces puede considerarse que X_t es una variable aleatoria para cada valor del índice t . Esta colección de variables aleatorias es conocida como un proceso estocástico y sirve como modelo para representar la evolución aleatoria de un sistema a lo largo del tiempo.

Formalmente, un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias $\{X_t : t \in T\}$ parametrizada por un conjunto T , llamado espacio parametral, en donde las variables toman valores en un conjunto S llamado espacio de estados. Un proceso estocástico puede considerarse como una función de dos variables $X : T \times \Omega \rightarrow S$, tal que a la pareja (t, ω) se le asocia el valor o estado $X(t, \omega)$ lo cual también puede escribirse como $X_t(\omega)$.

Para cada valor de t en T , el mapeo $\omega \rightarrow X_t(\omega)$ es una variable aleatoria mientras que para cada ω en Ω fijo, la función $t \rightarrow X_t(\omega)$ es llamada una trayectoria o realización del proceso.

2.2. Movimiento Browniano

El primer registro que se tiene del fenómeno natural conocido como Movimiento Browniano data de 1828 cuando el botánico Robert Brown publicó *Una breve descripción de las observaciones microscópicas realizadas sobre las partículas contenidas en el polen de las plantas*. En este estudio relata las observaciones que hizo con un microscopio simple a las partículas contenidas en los granos de polen de la planta *Clarkia Pulchella*. Observó que las partículas inmersas en agua mostraban un evidente movimiento. Estos movimientos no consistían únicamente en el cambio de posición en el fluido sino también con menor frecuencia se veían cambios en la forma de la partícula misma. Brown expandió sus observaciones y en todas las plantas observó la misma forma general del movimiento.

Posteriormente, el 29 de marzo de 1900 Louis Bachelier defendió exitosamente su tesis doctoral *Teoría de la especulación*, en la cual se presenta un estudio de finanzas con el uso del Movimiento Browniano. Bachelier es considerado el fundador de las Matemáticas Financieras modernas.

Poco después, Einstein en 1905 hace la publicación del artículo *Sobre el movimiento de pequeñas partículas suspendidas en un líquido estacionario*, estudio basado en la publicación de Brown sobre el movimiento de las partículas de polen. Einstein plantea que los movimientos de las moléculas de polen suspendidas en un líquido y observables con un microscopio son debido al calor.

En 1966 se hace una publicación póstuma del matemático Norbert Wiener donde formaliza el Movimiento Browniano como un proceso estocástico. Las observaciones reales del movimiento de grano de polen a través del microscopio sugieren que las trayectorias son continuas y que los desplazamientos son independientes en intervalos de tiempo disjuntos.

Finalmente, se tiene la siguiente definición:

Definición 2.1. *Un Movimiento Browniano o Proceso de Wiener unidimensional con parámetro $\sigma^2 > 0$ es un proceso estocástico $\{B_t : t \geq 0\}$ con valores en $\mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades.*

1. $P(B_0 = 0) = 1$
2. *La variable incremento $B_t - B_s$, para cualesquiera $0 \leq s < t$, tiene distribución $N(0, \sigma^2(t - s))$.*
3. *El proceso tiene incrementos independientes, es decir, para cualesquiera $0 < t_1 < \dots < t_n$, los incrementos $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, B_{t_{n-1}} - B_{t_{n-2}}, \dots, B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_1}$, son variables aleatorias independientes.*
4. *Las trayectorias $t \rightarrow B_t$ son continuas en P casi seguramente.*

Observación: Se dice que un Movimiento Browniano es estándar cuando $\sigma^2 = 1$. A través del cambio de variable $\tau = \sigma^2 t$ un Movimiento Browniano no estándar puede transformarse en uno estándar.

2.3. Integral de Itô

En esta sección se expone la teoría básica alrededor de la integral de Itô.

Sean $\{B_t : 0 \leq t \leq T\}$ un Movimiento Browniano y $\{F_t : 0 \leq t \leq T\}$ una filtración, con $T > 0$, tales que:

- a) Para cada $t \in [0, T]$, B_t es $\{F_t\}$ -medible.
- b) Para cualquier $0 \leq s \leq t \leq T$, la variable aleatoria $B_t - B_s$ es independiente de la σ -álgebra $\{F_s\}$.

Por notación, se usa $L_{ad}^2([0, T] \times \Omega)$ para denotar el espacio de todos los procesos estocásticos $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$, que satisfacen las siguientes condiciones:

1. X_t es adaptado a la filtración $\{F_t : 0 \leq t \leq T\}$.
2. $\int_0^T E(|X_t|^2) dt < \infty$.

La integral estocástica se define para $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ en tres pasos:

- Paso 1: Se define la integral estocástica para un proceso escalonado en $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$.
- Paso 2: Se prueba un lema de aproximación a un proceso $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ mediante una sucesión $\{f_n\}$ de procesos escalonados.
- Paso 3: Se define la integral estocástica para un proceso estocástico general en $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$.

PASO 1: f es un proceso estocástico escalonado en $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$.

Suponga que f es un proceso estocástico escalonado dado por:

$$f(t, w) = \sum_{i=1}^n \xi_{i-1}(w) 1_{[t_{i-1}, t_i)}(t), \quad (2.1)$$

en donde ξ_{i-1} es una variable aleatoria $F_{t_{i-1}}$ medible, tal que $E(\xi_{i-1}^2) < \infty$.

$$I(f) = \sum_{i=1}^n \xi_{i-1} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}). \quad (2.2)$$

Se puede ver que $I(af + bg) = aI(f) + bI(g)$, para $a, b \in \mathbb{R}$ y procesos estocásticos escalonados f y g . Además, se tiene el siguiente lema:

Lema 2.1. Sea $I(f)$ definida como en (2.2). Entonces $E\{I(f)\} = 0$ y

$$E\{|I(f)|^2\} = \int_a^b E\{|f(t)|^2\} dt. \quad (2.3)$$

Demostración. Para cada $1 \leq i \leq n$ en la ecuación (2.2),

$$\begin{aligned} E\{\xi_{i-1}(B(t_i) - B(t_{i-1}))\} &= E\{E\{\xi_{i-1}(B(t_i) - B(t_{i-1})) | F_{t_{i-1}}\}\} \\ &= E\{\xi_{i-1} E\{B(t_i) - B(t_{i-1}) | F_{t_{i-1}}\}\} \\ &= E\{\xi_{i-1} E\{B(t_i) - B(t_{i-1})\}\} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Entonces $E\{I(f)\} = 0$. Además se tiene:

$$|I(f)|^2 = \sum_{i,j=1}^n \xi_{i-1} \xi_{j-1} (B(t_i) - B(t_{i-1}))(B(t_j) - B(t_{j-1})).$$

Por un lado si $i \neq j$, digamos $i < j$,

$$\begin{aligned} & E\{\xi_{i-1} \xi_{j-1} (B(t_i) - B(t_{i-1}))(B(t_j) - B(t_{j-1}))\} \\ &= E\{E\{\xi_{i-1} \xi_{j-1} (B(t_i) - B(t_{i-1}))(B(t_j) - B(t_{j-1})) | F_{t_{j-1}}\}\} \\ &= E\{\xi_{i-1} \xi_{j-1} (B(t_i) - B(t_{i-1})) E\{B(t_j) - B(t_{j-1}) | F_{t_{j-1}}\}\} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

y $E\{B(t_j) - B(t_{j-1}) | F_{t_{j-1}}\} = E\{B(t_j) - B(t_{j-1})\} = 0$, como se vio anteriormente.

Por otro lado, para $i = j$, se tiene que:

$$\begin{aligned} E\{\xi_{i-1}^2 (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2\} &= E\{E\{\xi_{i-1}^2 (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 | F_{t_{i-1}}\}\} \\ &= E\{\xi_{i-1}^2 E\{(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2\}\} \\ &= E\{\xi_{i-1}^2 (t_i - t_{i-1})\} \\ &= (t_i - t_{i-1}) E\{\xi_{i-1}^2\}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Se sigue de las ecuaciones (2.5) y (2.6) que $E\{|I(f)|^2\} = \int_a^b E\{|f(t)|^2\} dt$.

PASO 2: Un Lema de Aproximación

Se necesita probar un lema de aproximación para poder definir la integral estocástica $\int_a^b f(t) dB(t)$, para un proceso estocástico $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$.

Lema 2.2. *Se supone que $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$. Entonces existe una sucesión $\{f_n : n \geq 1\}$ de procesos estocásticos escalonados en $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ tal que:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b E\{|f(t) - f_n(t)|^2\} dt = 0. \tag{2.7}$$

Demostración. La prueba se dividirá en casos especiales y uno general.

Caso1: Cuando $E\{f(t)f(s)\}$ es una función continua de $(t, s) \in [a, b]^2$.

Sea $\Pi_n = \{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\}$ una partición de $[a, b]$ y definimos un proceso estocástico $f_n(t, w)$ como

$$f_n(t, w) = f(t_{i-1}, w), \quad t_{i-1} < t \leq t_i \quad (2.8)$$

Entonces $\{f_n(t, w)\}$ es una sucesión de procesos estocásticos escalonados adaptados. Por la continuidad de $E\{f(t)f(s)\}$ sobre $[a, b]^2$, tenemos que:

$$\lim_{s \rightarrow t} E\{|f(t) - f(s)|^2\} = 0, \quad (2.9)$$

que implica que para cada $t \in [a, b]$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{|f(t) - f_n(t)|^2\} = 0. \quad (2.10)$$

Además, usando la desigualdad $|\alpha - \beta|^2 \leq 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)$ obtenemos que:

$$|f(t) - f_n(t)|^2 \leq 2(|f(t)|^2 + |f_n(t)|^2). \quad (2.11)$$

Por lo tanto, para todo $a \leq t \leq b$, tenemos que:

$$\begin{aligned} E\{|f(t) - f_n(t)|^2\} &\leq 2(E\{|f(t)|^2\} + E\{|f_n(t)|^2\}) \\ &\leq 4 \sup_{a \leq s \leq b} E\{|f(s)|^2\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Por consiguiente de las ecuaciones (2.10) y (2.12), se puede aplicar el teorema de convergencia Dominada de Lebesgue [28] para concluir que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b E\{|f(t) - f_n(t)|^2\} dt = 0. \quad (2.13)$$

Caso 2: Cuando f es acotada.

Se define un proceso estocástico g_n por:

$$g_n(t, w) = \int_0^{n(t-a)} e^{-\tau} f\left(t - \frac{\tau}{n}, w\right) d\tau. \quad (2.14)$$

donde $t \in [0, T]$ y $w \in [0, T]$.

Notar que g_n es adaptado a $\{F_t : 0 \leq t \leq T\}$ y $\int_a^b E\{|g_n(t)|^2\} dt < \infty$.

(I) Para cada n , $E\{g_n(t)g_n(s)\}$ es una función continua de (t, s) . Para probar esto, se pone $u = t - \frac{\tau}{n}$ para reescribir $g_n(t, w)$ como:

$$g_n(t, w) = \int_a^t e^{-n(t-u)} n f(u, w) du \quad (2.15)$$

que puede ser usado para verificar que:

$$\lim_{t \rightarrow s} E\{g_n(t) - g_n(s)\}^2 = 0. \quad (2.16)$$

(II) $\int_a^b E\{|f(t) - g_n(t)|^2\} dt \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Para probarlo, notar que:

$$f(t) - g_n(t) = \int_0^\infty e^{-\tau} \left(f(t) - f\left(t - \frac{\tau}{n}\right) \right) d\tau, \quad (2.17)$$

donde $f(t) = 0$ para $t < a$. Como $e^{-\tau} d\tau$ es una función de densidad sobre $[0, \infty)$, se puede aplicar la desigualdad de Schwartz para obtener:

$$|f(t) - g_n(t)|^2 \leq \int_0^\infty e^{-\tau} \left(f(t) - f\left(t - \frac{\tau}{n}\right) \right) d\tau. \quad (2.18)$$

Además

$$\begin{aligned} \int_a^b E\{|f(t) - g_n(t)|^2\} dt &\leq \int_a^b \int_0^\infty e^{-\tau} E\left\{f(t) - f\left(t - \frac{\tau}{n}\right)\right\} d\tau dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\tau} \left(\int_a^b E\left\{|f(t) - f\left(t - \frac{\tau}{n}\right)|^2\right\} dt \right) d\tau \quad (2.19) \\ &= \int_0^\infty e^{-\tau} E\left\{ \int_a^b |f(t) - f\left(t - \frac{\tau}{n}\right)|^2 dt \right\} d\tau. \end{aligned}$$

Como se asume que f es acotada, entonces

$$\int_a^b |f(t, \cdot) - f(t - \frac{\tau}{n}, \cdot)|^2 dt \rightarrow 0, c.s. \quad (2.20)$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces (II) se sigue de las ecuaciones (2.19) y (2.20). Por (I) se puede aplicar el *Caso 1* a g_n para cada n y así obtener un proceso estocástico escalonado adaptado $f_n(t, w)$ tal que:

$$\int_a^b E\{|g_n(t) - f_n(t)|^2\} dt \leq \frac{1}{n}. \quad (2.21)$$

Por (II) y la ecuación (2.21) se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b E\{|f(t) - f_n(t)|^2\} dt = 0, \quad (2.22)$$

que completa la prueba del segundo caso.

Caso 3: El caso general para $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$.

Sea $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$. Para cada n , se define

$$g_n(t, w) = \begin{cases} f(t, w) & \text{si } |f(t, w)| \leq n, \\ 0 & \text{si } |f(t, w)| > n. \end{cases}$$

Entonces, por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue,

$$\int_a^b E\{|f(t) - g_n(t)|^2\} dt \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \quad (2.23)$$

Ahora, para cada n , se aplica el *Caso 2*) a g_n para tener un proceso estocástico escalonado adaptado $f_n(t, w)$ tal que

$$\int_a^b E\{|g_n(t) - f_n(t)|^2\} dt \leq \frac{1}{n}. \quad (2.24)$$

La ecuación (2.7) se sigue de las ecuaciones (2.23) y (2.24), por tanto queda probado el lema.

PASO 3: Integral estocástica $\int_a^b f(t)dB_t$ para $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$.

Se usa lo probado en los Pasos 1 y 2 para definir la integral estocástica

$$\int_a^b f(t)dB_t, \quad f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega). \quad (2.25)$$

Aplicando el lema (2.2) del Paso 2 para obtener la sucesión $\{f_n(t, \omega) : n \geq 1\}$ de procesos estocásticos escalonados adaptados tal que satisfaga la (2.7).

Para cada n , $I(f_n)$ está definida por el Paso 1. Por el Lema 2.1 se tiene que:

$$E\{|I(f_n) - I(f_m)|^2\} = \int_a^b E\{|f_n(t) - f_m(t)|^2\}dt \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n, m \rightarrow \infty. \quad (2.26)$$

Entonces la sucesión $\{I(f_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega)$ que es un espacio cerrado. Se define

$$I(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n), \quad \text{en } L^2(\Omega). \quad (2.27)$$

Así, $I(f)$ queda definida.

Definición 2.2. El límite $I(f)$ definido en la ecuación (2.27) se llama la **Integral de Itô** de f y es denotada por $\int_a^b f(t)dB(t)$.

2.3.1. Propiedades de la Integral Estocástica de Itô

Las demostraciones de las propiedades presentadas en esta sección pueden ser encontradas en [27].

Teorema 2.1. (Propiedad de Isometría) Si $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$, entonces la integral de Itô $I(f) = \int_a^b f(t)dB(t)$ es una variable aleatoria tal que:

$$E\{I(f)\} = 0$$

y

$$E(|I(f)|^2) = \int_a^b E(|f(t)|^2)dt.$$

Lo anterior dice que la Integral de Itô considerada como una función $I: L_{ad}^2([a, b] \times \Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ es una isometría.

Teorema 2.2. (*Propiedad de Martingala*)

Si $f \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$ entonces el proceso estocástico

$$X_t = \int_a^t f(s) dB_s, \quad a \leq t \leq b,$$

es una martingala con respecto a la filtración $\{F_t : a \leq t \leq b\}$, en donde $F_t = \sigma\{X_s : 0 \leq s < t\}$.

Teorema 2.3. (*Propiedad de Continuidad*)

Si $f \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$ entonces el proceso estocástico

$$X_t = \int_a^t f(s) dB_s, \quad a \leq t \leq b$$

es continuo casi seguramente, es decir, casi todas sus trayectorias son funciones continuas en el intervalo $[a, b]$.

2.4. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Se asume a (Ω, F, P) como un espacio de probabilidad y a $\{B_t : t \geq 0\}$ un Movimiento Browniano unidimensional adaptado a la filtración $\{F_t : t \geq 0\}$, en donde $F_t = \sigma\{X_s : 0 \leq s < t\}$.

Definición 2.3. Sean $\mu(t, x)$ y $\sigma(t, x)$ dos funciones $[0, T] \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Una ecuación diferencial estocástica es una ecuación de la forma:

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t,$$

en donde $\mu(t, X_t)$ se le llama tendencia y a $\sigma(t, X_t)$ volatilidad, definidas para valores en el intervalo $[0, T]$, y con condición inicial la variable aleatoria X_0 que se supone F_0 -medible e independiente del Movimiento Browniano. La ecuación anterior se interpreta como la ecuación integral:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$$

en donde la primera es una integral de Riemann, mientras que la segunda es una integral estocástica de Itô. Al proceso $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ se le llama proceso de Itô.

2.5. Formula de Itô

A continuación se enuncian algunos teoremas referentes a la fórmula de Itô, y la demostración se puede encontrar en [27].

2.5.1. Fórmula de Itô [I]

En el cálculo ordinario, una regla básica de derivación es la regla de la cadena utilizada para obtener la derivada de $f(g(t))$. Si f y g son funciones diferenciables, entonces $f(g(t))$ es diferenciable y su derivada es:

$$\frac{d}{dt}(f(g(t))) = f'(g(t))g'(t),$$

la cual equivale a

$$f(g(t)) - f(g(a)) = \int_a^t f'(g(s))g'(s)ds.$$

por el teorema fundamental del cálculo.

En el cálculo de Itô se trabaja con variables aleatorias por lo que lo anterior no sirve para dar solución. Si $\{B_t : t \leq 0\}$ es un Movimiento Browniano, la igualdad $\frac{d}{dt}(f(B(t))) = f'(B(t))B'(t)$ no cobra sentido ya que las trayectorias no son diferenciables.

Se considera una partición $\Pi_n = \{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\}$ de $[a, t]$. Se tiene que

$$f(B(t)) - f(B(a)) = \sum_{i=1}^n \{f(B(t_i)) - f(B(t_{i-1}))\}. \quad (2.28)$$

Sea f dos veces diferenciable y f'' continua, por la expansión de Taylor se tiene que:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0 + \lambda(x - x_0))(x - x_0)^2,$$

en donde $0 < \lambda < 1$. Se aplica la ecuación (2.28) por lo que queda:

$$f(B(t)) - f(B(a)) = \sum_{i=1}^n f'(B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f''(B_{t_{i-1}} + \lambda_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}))(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2,$$

en donde $0 < \lambda_i < 1$ y $B_t = B(t)$.

Para el primer sumando se tiene que:

$$\lim_{\|\Pi_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f'(B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = \int_a^t f'(B(s))dB(s),$$

y para el segundo sumando

$$\lim_{\|\Pi_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f''(B_{t_{i-1}} + \lambda_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}))(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \rightarrow \int_a^t f''(B(s))ds,$$

Lo anterior se traduce en:

Teorema 2.4. *Sea f una función de la clase $C^2(\mathbb{R})$. Entonces:*

$$f(B(t)) - f(B(a)) = \int_a^t f'(B(s))dB(s) + \frac{1}{2} \int_a^t f''(B(s))ds, \quad (2.29)$$

en donde la primera integral es una integral de Itô, y la segunda es una integral de Riemann.

2.5.2. Fórmula de Itô [II]

Si $f(t, x)$ es una función de t y x , y $x = B_t$. Se presenta una generalización de la fórmula de Itô para el proceso $f(t, B_t)$ enunciado en el siguiente teorema:

Teorema 2.5. *Sea $f(t, x)$ una función continua con derivadas parciales f_t, f_x y f_{xx} continuas. Entonces:*

$$f(t, B_t) - f(a, B_a) = \int_a^t f_x(s, B_s)dB_s + \int_a^t \left(f_t(s, B_s) + \frac{1}{2}f_{xx}(s, B_s) \right) ds. \quad (2.30)$$

donde $t \in [0, T]$ y $a \in [0, T]$

2.5.3. Fórmula de Itô [III]

Recordemos que $L_{ad}(\Omega, L^1[a, b])$ y $L_{ad}(\Omega, L^2[a, b])$ para denotar el espacio de todos los procesos estocásticos que son $\{F_t\}$ -adaptados y tales que $\int_a^b |f(t)| dt < \infty$ y $\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty$, respectivamente.

Definición 2.4. *Un proceso de Itô es un proceso estocástico de la forma*

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s) ds + \int_0^t b(s) dB_s, \quad 0 \leq t \leq b,$$

en donde X_0 es F_t -medible, $a(s) \in L_{ad}(\Omega, L^1[a, b])$ y $b(s) \in L_{ad}(\Omega, L^2[a, b])$.

Una forma más simple de reescribir la forma del proceso de Itô es mediante la ecuación diferencial estocástica (EDE):

$$dB_t = a(t)dt + b(t)dB_t.$$

El siguiente teorema da la forma de la fórmula de Itô.

Teorema 2.6. *Sea X_t , un proceso de Itô dado por:*

$$X_t = X_0 + \int_a^t a(s) ds + \int_a^t b(s) dB_s, \quad a \leq t \leq b$$

Suponga que θ es una función continua con derivadas parciales θ_t, θ_x y θ_{xx} continuas.

Entonces $\theta(t, X_t)$ es también un proceso de Itô y

$$\begin{aligned} \theta(t, X_t) - \theta(a, X_a) &= \int_a^t \theta_x(s, X_s) b(s) dB_s \\ &+ \int_a^t \left(\theta_t(s, X_s) + \theta_x(s, X_s) a(s) + \frac{1}{2} \theta_{xx}(s, X_s) b(s)^2 \right) ds. \end{aligned} \quad (2.31)$$

2.6. Teorema de Existencia y Unicidad

A continuación se expone el teorema de existencia y unicidad, cuya demostración se puede encontrar en [27].

Definición 2.5. Una función medible $g(t, x)$ en $[a, b] \times \mathbb{R}$ se dice que satisface la condición de Lipschitz en x si existe una constante $K > 0$ tal que:

$$|g(t, x) - g(t, y)| \leq K|x - y|, \quad \forall a \leq t \leq b, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Definición 2.6. Un proceso estocástico conjuntamente medible $\{X_t : a \leq t \leq b\}$ es una solución de la ecuación integral estocástica:

$$X_t = \xi + \int_a^t \sigma(s, X_s) dB(s) + \int_a^t f(s, X_s) ds, \quad t \in [a, b], \quad (2.32)$$

si satisface las siguientes condiciones:

1. El proceso estocástico $\sigma(t, X_t)$ satisface:

- $\sigma(t, X_t)$ es adaptado a la filtración $\{F_t : 0 \leq t \leq T\}$
- $\int_a^t |\sigma(s, X_s)|^2 ds < \infty$,

entonces $\int_a^t \sigma(s, X_s) dB(s)$ es una integral de Itô para cualquier $t \in [a, b]$.

2. Casi todas las trayectorias del proceso estocástico $f(t, X_t)$ pertenecen a $L^1[a, b]$.

3. Para cada $t \in [a, b]$, la ecuación (2.32) se satisface casi seguramente.

Lema 2.3. Sean $\sigma(t, x)$ y $f(t, x)$ funciones medibles en $[a, b] \times \mathbb{R}$ que satisfacen la condición de Lipschitz en x . Supongamos que ξ es una variable aleatoria F_a -medible con $E(\xi^2) < \infty$. Entonces la ecuación integral estocástica (2.32) tiene a lo más una solución en X_t .

Teorema 2.7. (Existencia y Unicidad) Sean $\sigma(t, x)$ y $f(t, x)$ funciones medibles en $[a, b] \times \mathbb{R}$ que satisfacen la condición de Lipschitz y la condición de crecimiento lineal en x . Suponga que ξ es una variable aleatoria F_a -medible con $E[\xi^2] < \infty$. Entonces la ecuación integral

$$X_t = \xi + \int_a^t \sigma(s, X_s) dB(s) + \int_a^t f(s, X_s) ds, \quad t \in [a, b]$$

tiene una única solución continua.

2.7. Modelo Vasicek

La tasa de interés, conocida también como costo del dinero, es lo que se paga al pedir prestado dinero y es lo que se cobra al prestar dinero. Ésta se expresa como porcentaje en un periodo determinado.

Cuando se habla de inversión, el porcentaje de ganancia o pérdida con respecto al valor inicial se llama rendimiento. Lo que se espera al hacer una inversión es obtener la mayor ganancia posible, sin embargo, existen periodos en que los rendimientos pueden ser negativos, es decir, hay pérdidas. Todos estos cambios en la tasa son fruto de extensas variaciones, tales como políticas públicas, políticas fiscales, inflación, entre otras.

A lo largo de las décadas se han buscado instrumentos que ayuden a conocer el posible valor de las tasas futuras, existen modelos deterministas y modelos estocásticos. Estos últimos contienen un factor que ayuda a medir la aleatoriedad.

En 1977 Oldrich Vasicek publicó un modelo matemático para el rendimiento de tasas a corto plazo cuya base es el Movimiento Browniano, el cual permite introducir aleatoriedad al modelo [36]. Esta aleatoriedad no corresponde directamente con el Movimiento Browniano sino con su diferencial, lo que genera un nuevo proceso estocástico que también es Gaussiano y se le denomina Ruido Blanco.

Modelo determinista de la tasa de interés

Consideremos la siguiente notación:

- $x(t)$ tasa de interés al instante t .
- μ tasa de interés media a largo plazo.
- k constante que medirá la velocidad de ajuste de la tasa de interés ($k > 0$).
- $x(0) = x_0$ tasa de interés inicial.

Finalmente, se obtiene que:

$$\begin{aligned} x'(t) &= k(\mu - x(t)) & k > 0, \quad \mu \in \mathbb{R}, \\ x(0) &= x_0 & x_0 > 0. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Si $\mu > x(t) \Rightarrow x'(t) > 0 \Rightarrow x(t)$ es creciente.

Si $\mu < x(t) \Rightarrow x'(t) > 0 \Rightarrow x(t)$ es decreciente.

La tasa de interés aunque fluctúe, a largo plazo tiende a regresar a un valor medio μ . La solución de la ecuación diferencial ordinaria es:

$$\left. \begin{array}{l} x'(t) = ax(t) + b \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right\} \Rightarrow x(t) = \left(x_0 + \frac{b}{a} \right) e^{a(t-t_0)} - \frac{b}{a}, \quad (2.34)$$

si $a \neq 0$.

Se identifican los parámetros del modelo general (2.34) con el determinístico (2.33), y se deduce que:

$$\left. \begin{array}{l} x'(t) = ax(t) + b \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right\} \Rightarrow x'(t) = k\mu - kx(t) \quad (2.35)$$

Por lo tanto

$$a = -k \neq 0 \quad b = k\mu \quad x(0) = x_0 \quad t_0 = 0$$

Teniendo en cuenta que $k > 0$, la solución del modelo determinista está dada por:

$$x(t) = (x_0 - \mu)e^{-k(t-t_0)} + \mu, \quad t > 0 \quad (2.36)$$

Modelo estocástico Vasicek

Para el modelo estocástico, el parámetro μ pasa a ser aleatorio y motiva la siguiente expresión:

$$\mu \rightarrow \mu + \lambda \hat{B}(t), \lambda > 0 \quad (2.37)$$

siendo:

- μ el valor medio de la tasa de interés.
- $\hat{B}(t)$ un proceso de ruido blanco.
- $\lambda > 0$ la intensidad de $\hat{B}(t)$.

Por lo que sustituyendo (2.37) en (2.33) se obtiene que:

$$\begin{aligned} dX_t &= k(\mu - X_t)dt + k\lambda dB(t), \\ X(0) &= X_0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Se identifican los parámetros:

$$\alpha = k > 0, \quad \sigma = k\lambda, \quad \lambda > 0$$

Finalmente, se tiene que:

$$\begin{aligned} dX_t &= \alpha(\mu - X_t)dt + \sigma dB(t) \\ X(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

Este modelo es el llamado de Vasicek o de Ornstein-Uhlenbeck [34].

Al ser una ecuación diferencial estocástica de tipo Itô, se resolverá con el cálculo de Itô, por lo que se calculará X_t .

Para esto, se introduce el cambio de variable:

$$R_t = X_t - \mu. \quad (2.40)$$

De esta manera

$$\begin{aligned} X_t &= R_t + \mu \\ dX_t &= dR_t. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Al sustituir (2.41) en

$$dR_t = -\alpha R_t dt + \sigma dB(t). \quad (2.42)$$

Tenemos que la condición inicial está dada por:

$$R_0 = X_0 - \mu = x_0 - \mu. \quad (2.43)$$

Se aplicará ahora la fórmula de Itô. Para ello se considera

$$F(t, r) = e^{\alpha t} r.$$

Para la aplicación de la fórmula de Itô se hace el cálculo de las derivadas parciales:

$$\frac{\partial F(t, r)}{\partial t} = \alpha e^{\alpha t} r, \quad \frac{\partial F(t, r)}{\partial r} = e^{\alpha t}, \quad \frac{\partial^2 F(t, r)}{\partial r^2} = 0,$$

y así

$$dF(t, r) = \frac{\partial F(t, r)}{\partial t} dt + \frac{\partial F(t, r)}{\partial r} dR_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(t, r)}{\partial r^2} (dr(t))^2. \quad (2.44)$$

Utilizando álgebra operacional se obtiene que:

$$\begin{aligned} dF(t, r) &= d(e^{\alpha t} R_t) \\ d(e^{\alpha t} R_t) &= \alpha e^{\alpha t} R_t dt + e^{\alpha t} (-\alpha R_t dt + \sigma dB(t)) \\ &\quad + \frac{1}{2} (0) (-\alpha R_t dt + \sigma dB(t))^2 \\ d(e^{\alpha t} R_t) &= (\alpha e^{\alpha t} R_t dt - \alpha e^{\alpha t} R_t dt + \sigma e^{\alpha t} dB(t)) \\ d(e^{\alpha t} R_t) &= \sigma e^{\alpha t} dB(t), \end{aligned}$$

integrando ambos lados entre $[0, t]$ con $t < T$, se obtiene que:

$$\int_0^t d(e^{\alpha s} R_s) = \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dB(s) e^{\alpha t} R_t - R_0 = \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dB(s).$$

Despejando R_t , se llega a:

$$R_t = e^{-\alpha t} \left((r_0) + \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dB(s) \right).$$

Se hace el cambio de variable respectivo para hallar a X_t :

$$\begin{aligned}
X_t - \mu &= e^{\alpha t} \left(x_0 - \mu + \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dB(s) \right), \\
X_t &= \mu + e^{\alpha t} (x_0 - \mu + \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dB(s)), \\
X(0) &= x_0.
\end{aligned}$$

Finalmente, se obtiene que:

$$X_t = x_0 e^{-\alpha t} + \mu(1 - e^{-\alpha t}) + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(s)} dB(s).$$

2.7.1. Estimación de Parámetros

En esta sección se busca estimar los parámetros de la EDE del modelo Vasicek, para ello se usa el método de máxima verosimilitud como se describe en [14] y [29].

Para llevar a cabo la estimación de los parámetros se considera que $\{X_t : t \geq 0\}$ es observada directamente en tiempos discretos $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_j < \dots < t_n = T$ y se denota por x_i a la observación al tiempo t_i y $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$.

Además, se denota a p_x como la función de densidad de $(x_1, \dots, x_n)$ dado θ , en donde θ es el vector de parámetros a estimar. Por la propiedad de Markov, p_x es el producto de las $n - 1$ funciones de transición. De esta manera la función de verosimilitud $L(\theta|x_0, \dots, x_n)$ es:

$$L(\theta|x_0, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n p_{x_i}(x_i|x_{i-1}) \quad (2.45)$$

en donde la distribución inicial es degenerada en x_0 .

La función de transición del modelo Ornstein-Uhlenbeck tiene la siguiente distribución [27]:

$$p(x_i|x_{i-1}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi\sigma^2(1-e^{-2\alpha\Delta_i})}{2\alpha}}} \exp(\psi),$$

en donde

$$\psi = \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{x_i - (\mu(1 - e^{-\alpha\Delta t}) + e^{-\alpha\Delta t} x_{i-1})}{\sqrt{\frac{\sigma^2(1 - e^{-2\alpha\Delta t})}{2\alpha}}} \right]^2 \right\}$$

sigue una distribución

$$N \left(\mu(1 - e^{-\alpha\Delta t}) + e^{-\alpha\Delta t} x_{i-1}, \frac{\sigma^2(1 - e^{-2\alpha\Delta t})}{2\alpha} \right).$$

Los parámetros a estimar son: α, μ y σ . Antes de continuar se considera el siguiente cambio de variable:

$$r^2 = \sigma^2 \frac{(1 - e^{-2\alpha\Delta t})}{2\alpha},$$

de esta manera la función de verosimilitud queda expresada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} L(\theta | x_0, \dots, x_n) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi r^2}} \exp \left\{ -\frac{(x_i - x_{i-1} e^{-\alpha\Delta t} - \mu(1 - e^{-\alpha\Delta t}))^2}{2r^2} \right\} \\ &= (2\pi r^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^n [x_i - x_{i-1} e^{-\alpha\Delta t} - \mu(1 - e^{-\alpha\Delta t})]^2}{2r^2} \right\}. \end{aligned}$$

en donde $\theta = (\alpha, \mu, r)$.

Si se usa la función log-verosimilitud tenemos que:

$$\begin{aligned} \ln(L(\theta | x_0, \dots, x_n)) &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(r^2) \\ &\quad - \frac{1}{2r^2} \sum_{i=1}^n [x_i - x_{i-1} e^{-\alpha\Delta t} - \mu(1 - e^{-\alpha\Delta t})]^2. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Para la obtención de los parámetros se procede a derivar la función log-verosimilitud (2.46) con respecto de los parámetros, igualar a cero estas derivadas y posteriormente despejar los parámetros.

Se tiene entonces que:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1} e^{-\alpha \Delta t})}{n(1 - e^{-\alpha \Delta t})}, \quad (2.47)$$

$$\alpha = -\frac{1}{\Delta t} \ln \left[\frac{[(x_i - \mu)(x_{i-1} - \mu)]}{\sum_{i=1}^n (x_{i-1} - \mu)^2} \right], \quad (2.48)$$

$$r^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[(x_i - \mu) - e^{-\alpha \Delta t} (x_{i-1} - \mu) \right]^2. \quad (2.49)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones anterior será necesario encontrar el valor de μ , para ello consideremos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} S_x &= \sum_{i=1}^n x_{i-1}, \\ S_y &= \sum_{i=1}^n x_i, \\ S_{xx} &= \sum_{i=1}^n x_{i-1}^2, \\ S_{yy} &= \sum_{i=1}^n x_i^2, \\ S_{x,y} &= \sum_{i=1}^n x_{i-1} x_i. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Al hacer el cambio de notación y sustituir con (2.47) y (2.48), tenemos que:

$$\hat{\mu} = \frac{S_y S_{xx} - S_{xy} S_x}{n(S_{xx} - S_{xy}) - (S_x^2 - S_y S_x)} \quad (2.51)$$

$$\hat{\alpha} = -\frac{1}{\Delta t} \ln \left[\frac{S_{xy} - \hat{\mu} S_y - \hat{\mu} S_x + n \hat{\mu}^2}{S_{xx} - 2 \hat{\mu} S_x + n \hat{\mu}^2} \right] \quad (2.52)$$

Al pasar r^2 a la notación (2.50) se obtiene que:

$$\begin{aligned} \hat{r}^2 &= \frac{1}{n} \left[S_{yy} - 2 \hat{\mu} S_y + n \hat{\mu}^2 - 2 e^{-\alpha \Delta t} (S_{xy} - \hat{\mu} S_y - \hat{\mu} S_x + n \hat{\mu}^2) \right] \\ &\quad + \frac{1}{n} \left[e^{-2 \hat{\alpha} \Delta t} (S_{xx} - 2 \hat{\mu} S_x + n \hat{\mu}^2) \right]. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Recordando que

$$r^2 = \sigma^2 \frac{1 - e^{-2\alpha\Delta t}}{2\alpha},$$

al despejar σ^2 se obtiene una estimación para el último parámetro

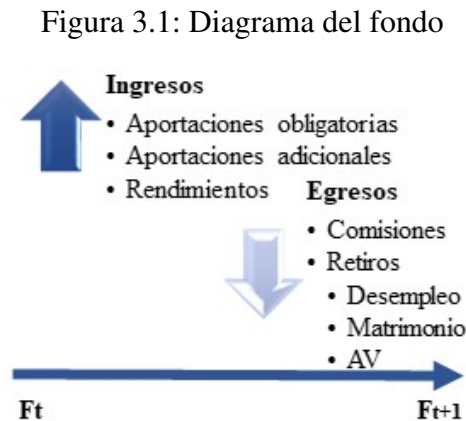
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{2\hat{\alpha}^2}{(1 - e^{-2\hat{\alpha}\Delta t})} \hat{r}^2. \quad (2.54)$$

Capítulo 3

Aplicación

3.1. Constitución del Fondo de Pensiones

El comportamiento del fondo de pensiones, como se vio en el Capítulo 1, es afectado directamente por cuatro variables: Aportaciones, Rendimientos, Retiros y Comisiones.



Como se muestra en la Figura 3.1 el fondo al tiempo $t \geq 0$ corresponde a:

$$\begin{aligned}
 F_{t+1} = & F_t + \text{Aportaciones obligatorias}_t + \text{Aportaciones voluntarias}_t \\
 & + \text{Rendimientos}_t - \text{Comisiones}_t - \text{Retiro por desempleo}_t \\
 & - \text{Retiro por matrimonio}_t - \text{Retiro de aportacion voluntaria}_t
 \end{aligned}$$

Es decir, el fondo al tiempo $(t + 1)$ corresponde al fondo final del periodo anterior (t) , más las aportaciones tanto obligatorias como voluntarias y los rendimientos que éstas generan. Y se le restan las comisiones y retiros correspondientes. Todos éstos dentro del periodo t a $t + 1$.

La población estudio son los asegurados del IMSS, el grupo más representativo en la sociedad mexicana. La información a utilizar se tiene a detalle en los datos abiertos y estadísticas del Instituto. La mayoría de los datos son con corte a Diciembre de 2017, a menos que se especifique lo contrario. Para el manejo de los datos se usa Excel y en algunos casos se programan instrucciones en Visual Basic for Application para Excel.

El objetivo de esta tesis es mostrar bajo las actuales condiciones la pensión promedio alcanzada por los trabajadores cotizantes del IMSS generación AFORE. Aunque actualmente existen trabajadores generación AFORE de hasta cien años; según reporta el IMSS, la población de estudio es reducida a trabajadores de 15 a 55 años de edad. El fondo que se va a constituir es el de Retiro, Cesantía en Edad Avanzada y Vejez (RCV), además del fondo INFONAVIT y se presentan algunos escenarios de Ahorro Voluntario (AV) con el fin de mostrar su contribución a la pensión final.

Debido a la magnitud de los datos que se trabajan y a que las condiciones de los factores cambian constantemente es un reto inclusive para las instituciones designadas dar una conclusión infalible. A pesar de que los datos a trabajar corresponden a un programa público, éstos se adecuan y trabajan bajo algunos supuestos que no son propios en la seguridad social, pero para fines del trabajo se usan y enuncian a continuación:

Supuestos generales

- Se considera el número de asegurados constante¹, es decir, no hay nuevos integrantes y la mortalidad para el grupo es cero, así como su deserción. Ejemplo: inician 1000 asegurados de 15 años, se asume que estos mismos asegurados llegarán a los 16, 17, y hasta los 65 años de edad.
- Las aportaciones obligatorias para el fondo de RCV (Retiro, Cesantía y Vejez) e INFONAVIT se consideran de manera bimestral.
- Los trabajadores en edad de pensionarse, lo harán al finalizar el año calendario, cuando todo el grupo ya tiene dicha edad.
- Las aportaciones se capitalizan desde el primer día del mes.

¹Asegurados en vigor a corte diciembre 2017.

- Se consideran nulos los retiros por desempleo, matrimonio y al ahorro voluntario.
- Se considera una inflación de 3.5 % anual.²
- El ahorro voluntario es capitalizado considerando la tasa de rendimiento de las SIEFORE adicionales disponibles.

Obtención de los datos

La información es obtenida principalmente de IMSS y CONSAR.

- Valuación actuarial. Es un informe presentado por el IMSS al cierre de cada año [24]. El cual, entre otros datos, proporciona:
 - El número de asegurados por edad.
 - El saldo promedio por edad de los asegurados en su cuenta de RCV e INFONAVIT.
 - La separación de asegurados por generación: Generación de Transición (GT) y Generación AFORE (GA). Este dato fue reportado por última vez en el informe correspondiente a 2015 [23].

Dado que el interés para este trabajo está en los trabajadores que aún no están retirados, son tomadas en cuenta únicamente cuatro SIEFORE: SB1, SB2, SB3 y SB4. En adelante se considera AFORE-SIEFORE cuando se hace referencia a las 40 SIEFORE, cuatro SIEFORE por cada AFORE.

- La **información estadística** de la CONSAR, pone a disposición información histórica, la cual es actualizada casi cada mes con los datos proporcionados de las AFORE [9]. La información que se puede encontrar en esa sección es:
 - Número de cuentas por AFORE-SIEFORE.
 - Recursos y activos por AFORE-SIEFORE.
 - Comisiones.
 - Rendimientos.

²Se toma el 3.5 % de acuerdo a lo documentado en [4] y [19]

3.1.1. Generación AFORE

Se debe recordar que los asegurados que fueron dados de alta ante el IMSS a partir del 1 de julio de 1997 pertenecen a la generación AFORE, es decir, su esquema de pensión es de contribución definida.

El informe del IMSS con corte a 2015 fue el último que reportó la información diferenciada por generación, como puede observarse en la Figura 3.2. Para el presente trabajo se considera la proporción de asegurados, saldo promedio RCV e INFONAVIT pertenecientes a cada generación, tomada de Figura 3.3.

Figura 3.2: Saldo promedio por generación a diciembre 2015

2015						
Edad	Generación Transición			Generación Actual		
	Asegurados	RCV (Pesos)	INFONAVIT (Pesos)	Asegurados	RCV (Pesos)	INFONAVIT (Pesos)
15	0	0	0	3,809	1,612	780
16	0	0	0	19,319	2,232	1,084
17	0	0	0	56,716	2,271	1,068
18	0	0	0	227,721	2,388	1,153
19	0	0	0	369,399	3,940	1,970
20	0	0	0	450,857	6,268	3,186
•						
•						
•						
50	224,275	168,932	48,369	34,519	55,705	22,258
51	211,729	170,121	50,174	31,127	54,407	22,389
52	199,510	171,128	51,698	28,201	54,258	22,538
53	185,766	170,690	53,163	25,469	54,640	23,148
54	172,769	173,041	54,207	22,865	54,314	22,981
55	166,105	169,175	54,322	21,234	52,757	22,507

Fuente: IMSS

Figura 3.3: Proporción por generación con corte a Diciembre 2017

Edad	Asegurados		Saldo RCV		INFONAVIT	
	GT	GA	GT	GA	GT	GA
15	0.00	1.00	0.00	1.00	0.00	1.00
16	0.00	1.00	0.00	1.00	0.00	1.00
17	0.00	1.00	0.00	1.00	0.00	1.00
18	0.00	1.00	0.00	1.00	0.00	1.00
19	0.00	1.00	0.00	1.00	0.00	1.00
⋮						
51	0.86	0.14	0.75	0.25	0.68	0.32
52	0.87	0.13	0.75	0.25	0.68	0.32
53	0.87	0.13	0.76	0.24	0.69	0.31
54	0.88	0.12	0.76	0.24	0.70	0.30
55	0.88	0.12	0.76	0.24	0.70	0.30

Fuente: IMSS/ Elaboración propia

3.1.2. Datos Iniciales

En la Figura 3.4 se puede apreciar el resultado de actualizar los datos a 2017, generación conjunta.

Figura 3.4: Datos corte a Diciembre 2017

2017		Saldo RCV promedio y total acumulado(Generación conjunta).		Saldo INFONAVIT promedio y total acumulado(Generación conjunta).	
Edad	Número de asegurados	PROMEDIO	TOTAL	PROMEDIO	TOTAL
		RCV (Pesos)	RCV (Millones de pesos)	INFONAVIT (Pesos)	INFONAVIT (Millones de pesos)
15	1,003	1,535	1.54	719	0.72
16	14,312	2,050	29.34	971	13.90
17	42,483	2,841	120.69	1,358	57.69
18	187,835	2,838	533.08	1,384	259.96
19	373,030	4,329	1,614.85	2,171	809.85
⋮					
51	298,505	185,773	55,454.17	68,764	20,526.40
52	278,252	186,364	51,856.16	69,859	19,438.41
53	268,198	187,343	50,245.02	71,136	19,078.53
54	250,835	187,513	47,034.82	72,006	18,061.63
55	235,079	186,502	43,842.70	72,428	17,026.30

Fuente: IMSS

Número de asegurados, Fondo RCV, Fondo INFONAVIT: Generación AFORE

El dato correspondiente a cada edad se multiplica por la proporción perteneciente a la generación AFORE. Finalmente los datos iniciales con los que se va a trabajar pueden apreciarse en la Figura 3.5.

Figura 3.5: Datos iniciales

2017			
Saldo en las cuentas de los asegurados por edad (Generación AFORE).			
Edad	GA		
	Asegurados	RCV (Millones)	INFONAVIT (Millones)
15	1,003	1.54	0.72
16	14,312	29.34	13.90
17	42,483	120.69	57.69
18	187,835	533.08	259.96
19	373,030	1,614.85	809.85
20	397,429	2,774.85	1,405.31
		⋮	
50	45,005	14,918.35	6,957.45
51	41,441	13,964.39	6,548.79
52	37,114	12,859.18	6,125.99
53	34,375	12,175.23	5,886.60
54	31,064	11,322.87	5,483.50
55	28,343	10,631.36	5,164.72

Fuente: IMSS

3.1.3. Comisiones

De acuerdo con la Ley de los Sistemas de Ahorro para el Retiro, a la junta de gobierno designada le corresponde determinar el régimen de las comisiones que las instituciones podrán cobrar por los servicios que presten. Las administradoras deberán presentar a la Junta de Gobierno de la Comisión sus comisiones para autorización cada año dentro de los primeros diez días hábiles del mes de noviembre, para ser aplicadas en el año calendario siguiente.

En la Figura 3.6 se presentan las comisiones anuales sobre el saldo de la cuenta individual, con entrada en vigor a partir de enero de 2019.

Figura 3.6: Comisión anual reportada a enero de 2019

AFORE		SIEFORE	
	Comisión		Comisión
Azteca	1.04	Citibanamex AV Plus	0.98
Citibanamex	0.96	Profuturo CP	1.25
Coppel	1.04	Profuturo LP	1.25
Inbursa	0.95	SURA AV1	1.40
Invercap	1.04	SURA AV2	1.30
PensionISSSTE	0.82	SURA AV3	1.25
Principal	1.04	XXI Banorte Ahorro Individual (SIAY)	0.99
Profuturo	0.99	XXI Banorte Previsión 1 (SPS1)	0.99
SURA	0.98	XXI Banorte Previsión 2 (SPS2)	0.99
XXI Banorte	0.96		
Promedio	0.984	Promedio	1.16

Fuente: CONSAR

Para el presente trabajo, éstas se manejan constantes a través del tiempo, ya que toda proyección o estudio realizado por la CONSAR maneja este mismo supuesto. Se sabe que si éstas disminuyen será en favor del trabajador. Finalmente, para una mayor precisión en torno a la comisión retenida con respecto al fondo acumulado de todos los trabajadores, se considera un promedio ponderado.

3.1.4. Aportaciones

Las aportaciones que se hacen al fondo son bajo dos conceptos: aportaciones obligatorias y ahorro voluntario (AV). Dentro de las aportaciones obligatorias se hará la segmentación de aportación tripartita, cuota social e INFONAVIT.

Aportaciones obligatorias

Como se vio en el Capítulo 1, por ley se hace la aportación tripartita del 6.50 %, está aportación está en función del salario base de cotización del trabajador. Para este ejercicio no se tiene con exactitud el salario de cada trabajador, pero el IMSS proporciona la distribución de asegurados por veces de salario mínimo por edad, misma que se puede observar en la Figura 3.7.

Figura 3.7: Distribución de asegurados por rango salarial y edad

		Rango Salarial							
		W1	W2	W3	W4		W23	W24	W25
Rango Edad	E1	0.172	0.607	0.141	0.035		0.000	0.000	0.002
	E2	0.071	0.624	0.236	0.049		0.000	0.000	0.000
	E3	0.050	0.436	0.266	0.120		0.000	0.000	0.000
	E4	0.043	0.318	0.211	0.134		0.001	0.001	0.004
	E5	0.044	0.291	0.183	0.123		0.002	0.002	0.014
	E6	0.047	0.290	0.173	0.115	...	0.002	0.002	0.023
	E7	0.051	0.296	0.166	0.107		0.003	0.002	0.028
	E8	0.056	0.305	0.160	0.101		0.003	0.003	0.031
	E9	0.064	0.314	0.151	0.093		0.003	0.003	0.031
	E10	0.077	0.358	0.161	0.094		0.003	0.003	0.028
	E11	0.081	0.379	0.161	0.094		0.002	0.003	0.029
	E12	0.098	0.419	0.158	0.085		0.002	0.002	0.024
	E13	0.115	0.440	0.154	0.078		0.002	0.002	0.019
	E14	0.132	0.436	0.144	0.070		0.001	0.001	0.018

Fuente: IMSS/ Elaboración propia

Donde: W_i = salario entre $(i-1, i]$ veces el salario mínimo vigente para $\{0 \leq i \leq 25\}$ y E_j = edad entre $[max(15, 5(j+1)), 5(j+2))$ para $\{1 \leq j \leq 14\}$ con $i, j \in \mathbb{E}$

Figura 3.8: Densidad de cotización por rango salarial

Nivel salarial			Densidad		
[)			[)		
			12	13	76%
0	1	13%	13	14	75%
1	2	35%	14	15	77%
2	3	47%	15	16	78%
3	4	57%	16	17	79%
4	5	64%	17	18	78%
5	6	68%	18	19	78%
6	7	71%	19	20	77%
7	8	73%	20	21	78%
8	9	74%	21	22	77%
9	10	74%	22	23	77%
10	11	74%	23	24	75%
11	12	75%	24	25	72%

Fuente: CONSAR

Uno de los factores que más influye en la aportación es la densidad de cotización. Para el presente trabajo se toma la relación de la densidad de cotización con el rango salarial, mostrada en la Figura 3.8.

Cuota social

Como se mencionó anteriormente, la cuota social es una aportación mensual del Gobierno Federal. La cuota a usar en el presente trabajo corresponde a la cuota establecida en el artículo 168 de la LSS. Dicha cuota actualizada con el INPC a diciembre de 2018 [25] como se muestra en la Figura 3.9.

Figura 3.9: Cuota social diaria

Salario base de cotización del trabajador	Cuota social	Cuota social actualizada
1 salario mínimo	3.87077	5.41229
1.01 a 4 salarios mínimos	3.70949	5.18678
4.01 a 7 salarios mínimos	3.54820	4.96126
7.01 a 10 salarios mínimos	3.38629	4.73487
10.01 a 15 salarios mínimos	3.22564	4.51024

Fuente: IMSS/ Elaboración propia

INFONAVIT

De acuerdo a lo expuesto en el Capítulo 1, el fondo correspondiente al INFONAVIT se va a constituir del 5 % del salario base de cotización.

Ahorro Voluntario

La CONSAR junto con otras instituciones (IMSS, AMAFORE, ISSSTE, etc.), busca estimular el ahorro adicional destinado al fondo de retiro. Actualmente el fondo de AV es considerado más un fondo de ahorro que un fondo de retiro. La información disponible en cuanto a la inversión de activos es demasiado limitada, por lo que para este trabajo se consideran cinco escenarios de AV, detallados en la Figura 3.10. Suponiendo que el fondo inicial de los trabajadores es cero.

Figura 3.10: Escenarios que se suponen para ahorro voluntario

SUPUESTOS		
Escenario	Aportación mensual por trabajador	Incremento mensual cuentas
1	0	100%
2	150	100%
3	300	100%
4	500	100%
5	1000	100%

Elaboración propia

En el primer escenario se asume que el 100 % de los trabajadores estará ahorrando 100 pesos desde el primer mes. Análogamente para los demás escenarios.

3.1.5. Rendimientos

A través de su página de internet, la CONSAR pone a disposición los rendimientos mensuales históricos de todas las AFORE-SIEFORE desde su fecha de creación hasta el corte del último mes. En el presente trabajo los rendimientos a ocupar son con precios de gestión, estos rendimientos no consideran el cobro de comisiones. Este rendimiento es diferente al que se muestra en los estados de cuenta. Los estados de cuenta muestran el rendimiento neto, es decir, el rendimiento después de contabilizar la comisión.

Para la proyección de los rendimientos se aplica el modelo Vasicek estudiado en el Capítulo 2, de acuerdo a [3] y [17]. Además de que se asume que estos datos cumplen con los supuestos del modelo:

- Las tasas siguen un proceso de difusión, es decir, las trayectorias del proceso estocástico son continuas.
- Las tasas de mueven bajo un mercado eficiente, es decir, todos tienen el acceso a la misma información.

La proyección de las tasas abarca desde octubre de 2018 hasta diciembre de 2068, ya que los trabajadores que a corte 2017 tenían 15 años tendrán 65 en 2068.

Una vez introducidos y acomodados los datos en excel se procede; de acuerdo al modelo, a la estimación de los parámetros (2.51), (2.52) y (2.54). Los parámetros estimados para las SIEFORE básicas se muestran en la Figura 3.11.

Figura 3.11: Parámetros estimados para la proyección de las tasas de rendimiento de SIEFORE básicas

	$\hat{\mu}$				$\hat{\alpha}$				$\hat{\sigma}^2$			
	SB4	SB3	SB2	SB1	SB4	SB3	SB2	SB1	SB4	SB3	SB2	SB1
Azteca	7.47	6.85	7.54	6.49	0.38	0.37	0.41	0.31	0.76	0.73	0.64	0.31
Citibanamex	7.94	7.21	7.88	5.25	0.26	0.28	0.24	0.14	1.12	0.93	0.48	0.17
Coppel	8.39	7.95	7.52	5.79	0.40	0.40	0.47	0.27	0.54	0.55	0.52	0.23
Inbursa	6.33	5.61	5.63	4.80	0.15	0.13	0.20	0.13	0.04	0.02	0.03	0.01
Invercap	6.91	6.59	7.31	6.83	0.37	0.42	0.47	0.29	2.89	2.86	2.16	0.81
PensionISSSTE	3.40	3.87	4.55	5.19	0.16	0.17	0.20	0.25	0.38	0.39	0.38	0.30
Principal	6.97	6.77	7.44	5.39	0.27	0.31	0.23	0.14	0.78	0.76	0.37	0.18
Profuturo	9.88	8.72	8.61	6.81	0.50	0.50	0.27	0.23	2.20	1.70	0.55	0.33
SURA	8.17	7.08	8.14	6.18	0.25	0.23	0.24	0.15	1.20	0.83	0.47	0.19
XXI Banorte	6.05	5.43	7.07	5.49	0.25	0.24	0.19	0.14	0.76	0.58	0.29	0.15

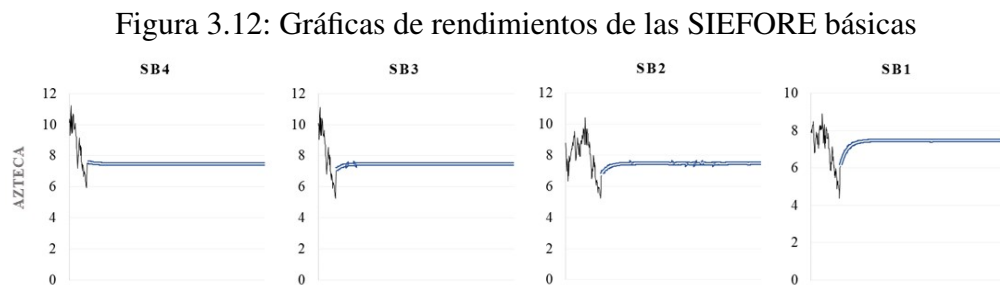
Los valores de los parámetros estimados corresponden a las tasas anualizadas.

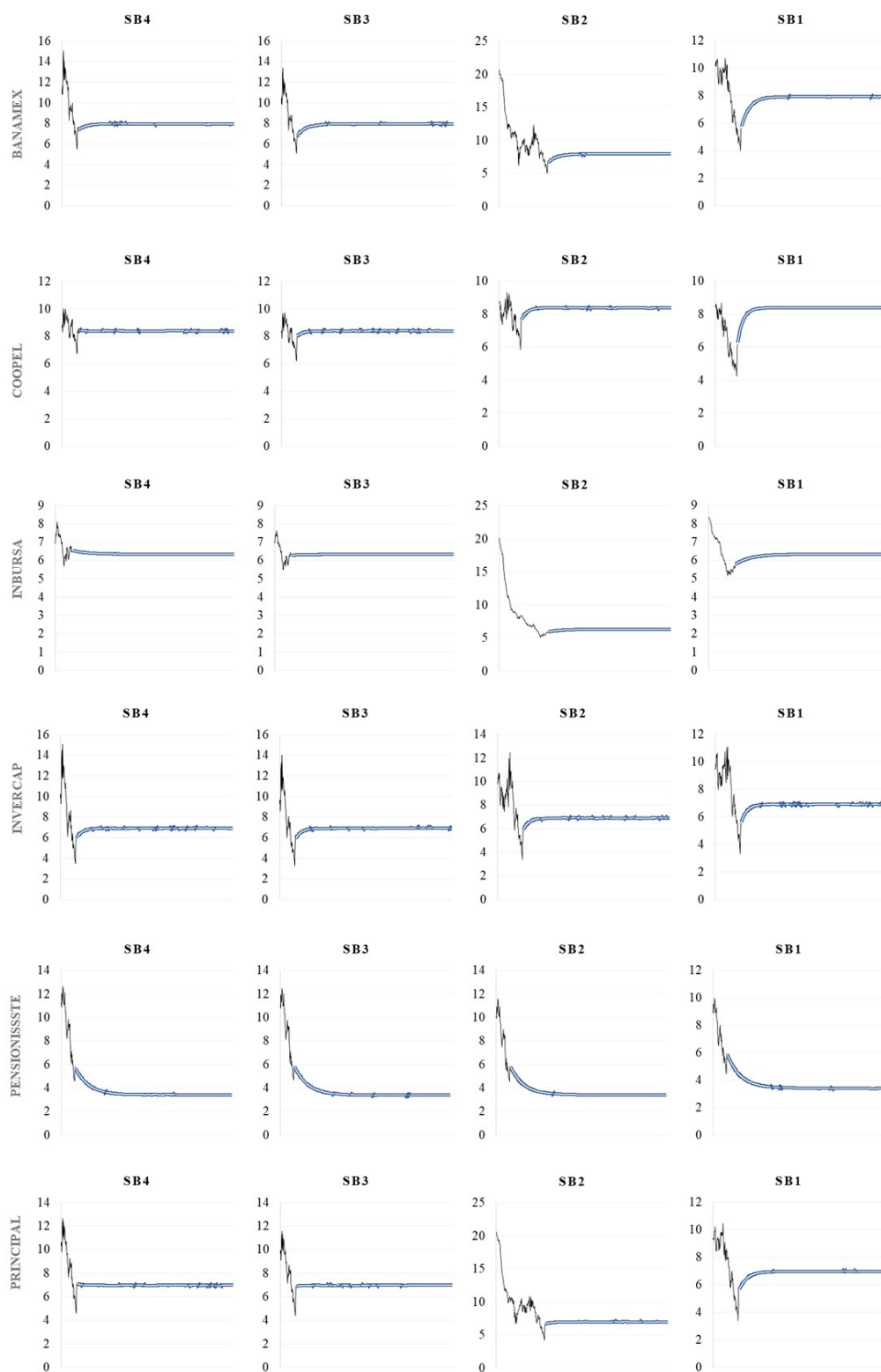
Elaboración propia

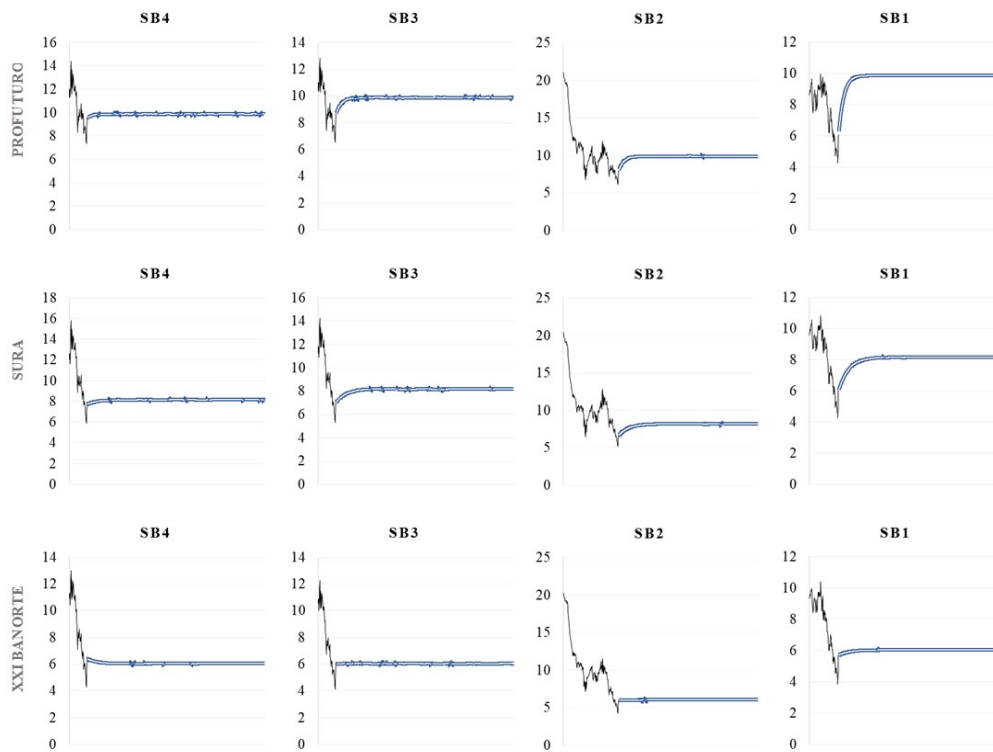
En total se realizan 40 simulaciones, una para cada AFORE-SIEFORE. Y a su vez se hacen 30,000 iteraciones para cada simulación. La descripción completa del procedimiento se encuentra en Apéndice B. Las gráficas del comportamiento de las tasas de rendimientos se ven en 3.12.

Donde:

— Historico — Proyección







Elaboración propia

La única tasa de rendimientos que muestra una tendencia hacia abajo significativa es PENSIONISSSTE. Se observa que este comportamiento se origina del histórico, donde; de acuerdo a la gráfica inició muy bien pero su tasa de rendimiento ha ido a la baja.

Análogamente, se hace la estimación de los parámetros para la proyección de rendimientos de las SIEFORE adicionales. Los parámetros estimados se presentan en la Figura 3.13 y las gráficas del comportamiento en la Figura 3.14

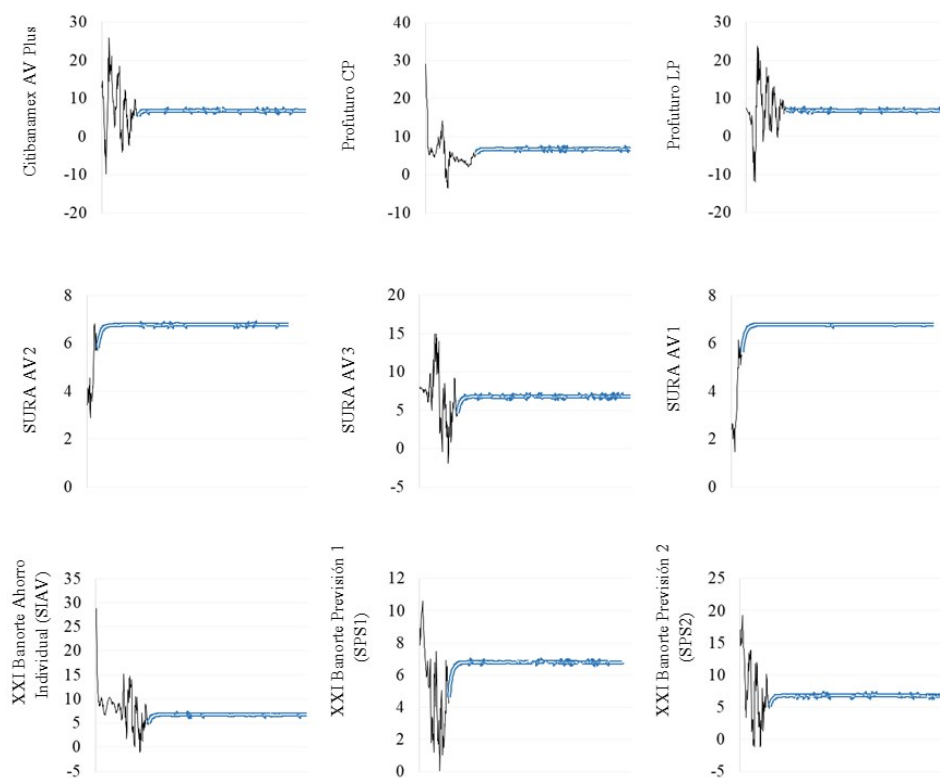
Figura 3.13: Parámetros estimados de las tasas de rendimiento de SIEFORE adicionales

	$\hat{\mu}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma}^2$
Citibanamex AV Plus	6.78	0.87	65.60
Profuturo CP	4.46	0.84	7.38
Profuturo LP	7.04	1.00	83.22
SURA AV1	7.65	0.20	0.28
SURA AV2	5.69	0.52	1.03
SURA AV3	6.42	1.06	26.87
XXI Banorte Ahorro Individual (SIAV)	7.17	1.19	23.70
XXI Banorte Previsión 1 (SPS1)	4.51	0.72	6.03
XXI Banorte Previsión 2 (SPS2)	6.29	0.83	27.48

Los valores de los parámetros estimados corresponden a las tasas anualizadas.

Elaboración propia

Figura 3.14: Gráficas de rendimientos de las SIEFORE adicionales e INFONAVIT



Elaboración propia

Para la proyección de la tasa de rendimiento del INFONAVIT se sigue el mismo algoritmo. Los parámetros se pueden apreciar en la Figura 3.15, mientras que la gráfica del comportamiento en la Figura 3.16

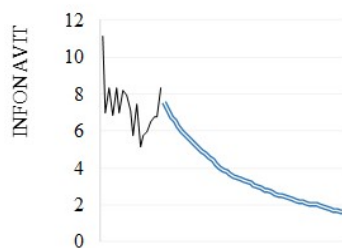
Figura 3.15: Parámetros estimados y gráfica de las tasas de rendimiento de INFONAVIT

	$\hat{\mu}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma}^2$
INFONAVIT	0.0108	0.5348	0.0003

Los valores de los parámetros estimados corresponden a las tasas anualizadas.

Elaboración propia

Figura 3.16: Gráfica de rendimientos del INFONAVIT



Elaboración propia

En la Figura 3.17 se exponen las tasas a usar. Para las SIEFORE básicas es el promedio ponderado, con el objetivo de que los rendimientos correspondientes al fondo sean más precisos. Para los fines de este trabajo para las SIEFORE adicionales se usa el promedio simple, ya que se asume que la tasa con la que se acreditan las aportaciones voluntarias corresponde a las SIEFORE adicionales (proporcionadas únicamente por cuatro AFORE).

Figura 3.17: Tasa anualizada de rendimiento proyectada

Año	Mes	Promedio SIEFORE básica					Promedio SIEFORE Adicional	INFONAVIT	
		t	SB4	SB3	SB2	SB1		Año	Tasa
2018	8	20	6.68	6.94	6.75	6.96	5.94	2037	3.68
2018	9	21	5.98	6.29	6.17	6.86	5.54	2038	3.56
2018	10	22	7.51	7.14	6.88	6.31	5.66	2039	3.47
2018	11	23	7.51	7.16	6.90	6.35	5.77	2040	3.39
2018	12	24	7.52	7.18	6.93	6.40	5.88	2041	3.32
2019	1	25	7.52	7.19	6.95	6.44	5.97	2042	3.25
2019	2	26	7.53	7.21	6.97	6.48	6.05	2043	3.18
2019	3	27	7.53	7.23	6.99	6.52	6.12	2044	3.08
•									
•									
•									
2068	5	617	7.67	7.68	7.53	7.46	6.77	2063	1.95
2068	6	618	7.67	7.68	7.53	7.46	6.77	2064	1.92
2068	7	619	7.67	7.68	7.53	7.46	6.78	2065	1.83
2068	8	620	7.67	7.68	7.53	7.46	6.78	2066	1.79
2068	9	621	7.67	7.68	7.53	7.46	6.77	2067	1.72
2068	10	622	7.67	7.68	7.53	7.46	6.77	2068	1.68
2068	11	623	7.67	7.68	7.53	7.46	6.77	2069	1.63
2068	12	624	7.67	7.68	7.53	7.46	6.77	2070	1.60

Elaboración propia

Todas las aportaciones son capitalizadas con la tasa de rendimiento real, es decir, se ajustan a la inflación.

3.1.6. Fondo

Para la constitución del fondo se generan por separado las aportaciones obligatorias, cuota social e INFONAVIT, y lo que correspondería a cada escenario de ahorro voluntario. El fondo RCV se constituye por la aportación tripartita, cuota social y sus respectivos rendimientos.

El fondo a constituir es para asegurados en el rango de edad de 15 a 55 años. Dado que los de 55 años son los más próximos a retirarse se tomará cada edad de manera descendiente. En la Figura 3.18 se muestra el año correspondiente a la jubilación considerando la edad actual.

Figura 3.18: Año de jubilación para personas de 55 a 15 años

Año			Año			Año			Año		
Edad	60	65	Edad	60	65	Edad	60	65	Edad	60	65
55	2023	2028									
54	2024	2029	44	2034	2039	34	2044	2049	24	2054	2059
53	2025	2030	43	2035	2040	33	2045	2050	23	2055	2060
52	2026	2031	42	2036	2041	32	2046	2051	22	2056	2061
51	2027	2032	41	2037	2042	31	2047	2052	21	2057	2062
50	2028	2033	40	2038	2043	30	2048	2053	20	2058	2063
49	2029	2034	39	2039	2044	29	2049	2054	19	2059	2064
48	2030	2035	38	2040	2045	28	2050	2055	18	2060	2065
47	2031	2036	37	2041	2046	27	2051	2056	17	2061	2066
46	2032	2037	36	2042	2047	26	2052	2057	16	2062	2067
45	2033	2038	35	2043	2048	25	2053	2058	15	2063	2068

Elaboración propia

Para comenzar a calcular el fondo se considera a los asegurados que en el tiempo cero tienen 55 años y se le da seguimiento hasta los 65 años, es decir, se registra el comportamiento del fondo año a año por diez periodos ($t = 10$), como se muestra en la Figura 3.19.

Figura 3.19: Ejemplo fondo para los asegurados de 55 años

						Aportación Obligatoria			
						Empleador	5.15%		INFONAVIT
						Estado	0.225%		5%
						Empleado	1.125%		
t	Año	Edad	Número de asegurados	Fondo Inicial RCV (millones)	Fondo INFONAVIT (millones)	RCV (millones)	Cuota social (millones)	Fondo al final del año	INFONAVIT (millones)
0	2018	55	28,343	10,631.36	5,164.72	172.80	22.66	11,092.05	5,473.87
1	2019	56	28,343	11,092.05	5,473.87	373.61	45.32	11,573.03	5,789.44
2	2020	57	28,343	11,573.03	5,789.44	574.41	67.99	12,084.27	6,094.84
3	2021	58	28,343	12,084.27	6,094.84	775.22	90.65	12,620.41	6,394.14
4	2022	59	28,343	12,620.41	6,394.14	976.02	113.31	13,177.90	6,685.22
5	2023	60	28,343	13,177.90	6,685.22	1,163.55	135.70	13,726.66	6,960.63
6	2024	61	28,343	13,726.66	6,960.63	1,351.09	158.10	14,295.70	7,227.97
7	2025	62	28,343	14,295.70	7,227.97	1,538.62	180.49	14,883.51	7,485.55
8	2026	63	28,343	14,883.51	7,485.55	1,726.15	202.88	15,489.95	7,735.85
9	2027	64	28,343	15,489.95	7,735.85	1,913.69	225.28	16,114.68	7,976.48
10	2028	65	28,343	16,114.68	7,976.48	2,074.42	247.09	16,729.25	8,189.92

Elaboración propia

Lo que transcurre a lo largo de un año se evalúa en una hoja auxiliar, como se muestra en la Figura 3.20.

Figura 3.20: Cálculo de las aportaciones

APORTACIONES OBLIGATORIAS								
1	Edad	65	4	# Asegurados por edad	28,343	6	Salario diario	102.68
2	Rango de edad	E12	5	SIEFORE	SB1	7	Salario anual	37,478
3	Año a evaluar	2028						
8	Rango salarial	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7
9	Promedio de veces salario mínimo	1	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5
10	Salario anual correspondiente al rango	37,478	56,217	93,696	131,174	168,652	206,130	243,608
11	Cuota social diaria por rango salarial	5.41229	5.18678	5.18678	5.18678	4.96126	4.96126	4.96126
12	Distribución de asegurados por edad y rango salarial	9.79%	41.89%	15.81%	8.50%	5.66%	3.58%	2.71%
13	Número de asegurados en el rango	2,776	11,874	4,482	2,409	1,605	1,014	768
14	Salario por rango por el total de trabajadores	104,039,489	667,524,200	419,941,080	316,058,795	270,666,093	209,099,138	187,036,009
15	Salario total anual	4,055,248,467						
16	Densidad de cotización por rango salarial	13%	35%	47%	57%	64%	68%	71%
17	Salario cotizado	13,525,134	233,633,470	197,372,308	180,153,513	173,226,300	142,187,414	132,795,567
18	Salario anual cotizado	2,472,888,722	19	Cuota social total anual	21,813,327			
22	Porcentaje de aportación obligatoria	6.50%	20	Aportación anual obligatoria (millones)	160.74			
	Aportación mensual obligatoria y cuota social (millones)	15.21	21	Aportación anual de cuota social (millones)	21.81			

Elaboración propia

Se desglosa a lo que corresponde cada número:

- La primera sección corresponde a los datos que se requieren para poder hacer el cálculo del periodo:
 1. Es la edad que le corresponde a los asegurados dependiendo del periodo t que se está evaluando, es decir, para los asegurados de 55 años la celda correrá de 55 a 65 años.

2. Es el rango de edad correspondiente a la edad que se está evaluando.
 3. Es el año que corresponde al periodo t que se está evaluando.
 4. El número de asegurados es el mismo para cada t ya que se supone que es grupo cerrado.
 5. La SIEFORE es la correspondiente a la edad que se está evaluando.
 6. El salario mínimo diario corresponde al salario mínimo vigente a 2019 y se mantiene constante.
 7. Corresponde al salario mínimo diario por los 365 días del año. Se mantiene constante durante todos los periodos ya que para los rendimientos se considera una tasa real.
- La segunda sección sirve para hacer el cálculo del salario cotizado:
8. Se manejan todos los rangos salariales de W1 a W25.
 9. Corresponde el promedio de veces del salario mínimo. Por ejemplo, W2 son los asegurados cuyo salario es de 1 a 2 veces el salario mínimo por lo que el promedio es 1.5 veces.
 10. El salario anual correspondiente al rango es el producto del salario anual mínimo (7) y el promedio de veces salario mínimo (9).
 11. La cuota social se maneja de acuerdo a la Figura 3.9.
 12. La distribución de asegurados por rango salarial se completa con la Figura 3.7 dependiendo de la edad que se está evaluando en (1).
 13. El número de asegurados es el producto de (4) y (12).
 14. El salario correspondiente al rango por el total de trabajadores es el producto de (10) y (13).
 15. El salario total anual corresponde a la suma de todas las celdas de (14).
 16. La densidad de cotización por rango salarial se mantiene constante durante todos los periodos de acuerdo a la Figura 3.8.
 17. El salario cotizado corresponde al producto de (14) y (16).
 18. El salario anual cotizado corresponde a la suma de todas las celdas de (17).
 19. La cuota social total anual corresponde al producto escalar de (11), (13), (16) y 365. Este último correspondiente a los días del año.

- La parte tres determina la aportación que se va a tomar para cada periodo:
 20. Es el producto de (18) y 6.5 % en millones de pesos.
 21. Es (19) en millones de pesos.
 22. Es la suma de (20) y (21) entre 12. Este último correspondiente a los doce meses del año.

Una vez que se tienen las aportaciones, se prosigue con el cálculo de los rendimientos que generan las AFORE para estos recursos:

Figura 3.21: Cálculo de los rendimientos

23	Inflación		3.50%	24	Comisión mensual		0.0008204
			Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo
	Tasa	Año/Mes	206801	206802	206803	206804	206805
25		Tasa de interés	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07
26		Tasa de interés descontando inflación	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04
27		Tasa mensual	0.30%	0.30%	0.30%	0.30%	0.30%
		Factor de interés descontando comisión	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002
28							
29	Aportación del periodo con intereses (millones)		1.08	1.08	2.16	2.17	3.25
30	Aportación al final del año		6.5608				
31	Fondo del periodo anterior		710.13	33	Fondo final del periodo		735.74
32	Fondo anterior con intereses		729.18				

Elaboración propia

23. Inflación constante de acuerdo al supuesto.
24. La comisión mensual es calculada de acuerdo a la metodología usada en la calculadora de pensión del IMSS, correspondiente a:

$$\frac{\text{Comisión anual}}{12}.$$

25. Es la tasa de interés correspondiente al año en (3) y el mes descrito en la Figura 3.21.
26. Corresponde a la tasa real:

$$(1 + (25)) \cdot (1 - (23)).$$

27. La tasa mensual es calculada:

$$(1 + (26))^{(1/12)} - 1.$$

28. Factor descontando comisión:

$$(1 + (27)) \cdot (1 - (24)).$$

29. Es el valor acumulado de la aportación.

30. La aportación corresponde al valor acumulado de diciembre.

31. Fondo correspondiente al periodo t anterior.

32. Es el fondo anterior (31) con los rendimientos acreditados.

33. Es la suma de (30) y (32).

Figura 3.22: Cálculo de INFONAVIT

INFONAVIT					
38	Fondo INFONAVIT periodo anterior	7976.48	34	% Aportación INFONAVIT	5.00%
	Fondo del periodo	8189.92	36	Tasa	5.06%
				35	Aportación bimestral (millones)
				37	Tasa bimestral real
					20.61
					0.23%

Elaboración propia

34. Corresponde al porcentaje de aportación del patrón.

35. La aportación bimestral corresponde al producto del salario anual cotizado (18) y la aportación (34) entre seis. Éste último correspondiente al número de bimestres.

36. Es la tasa de rendimiento anual proyectada del INFONAVIT correspondiente al periodo que se está calculando.

37. Es la tasa bimestral real, es decir, ya descontada la inflación.

38. Es el valor acumulado de las aportaciones y el fondo del periodo anterior.

A continuación se presentan los resultados de los cinco escenarios que se proponen de ahorro voluntario.

Figura 3.23: Cálculo de ahorro voluntario

APORTACIONES ADICIONALES						
Escenario		1	2	3	4	5
Incremento cuentas		100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%
Aportación mensual		100	200	500	1000	2000
Aportación adicional acumulada del periodo anterior		373.187	746.374	1865.935	3731.871	7463.742
Cuentas con ahorro voluntario del periodo anterior		28343	28343	28343	28343	28343

Año		2028	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo
39	Tasa de interés real anual		0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
40	Factor de interés mensual (considerando comisión e inflación)		1.002	1.002	1.002	1.002	1.002
Escenario	1	Número de cuentas	28343	28343	28343	28343	28343
		Ahorro Voluntario	2.834	2.83	2.83	2.83	2.83
		Aportación Adicional anual	376.60	380.02	383.44	386.87	390.31
	2	Número de cuentas	28343	28343	28343	28343	28343
		Ahorro Voluntario	5.669	5.67	5.67	5.67	5.67
		Aportación Adicional con intereses	753.20	760.04	766.89	773.74	780.61
	3	Número de cuentas	28343	28343	28343	28343	28343
		Ahorro Voluntario	14.172	14.17	14.17	14.17	14.17
		Aportación Adicional con intereses	1883.01	1900.09	1917.21	1934.36	1951.53
	4	Número de cuentas	28343	28343	28343	28343	28343
		Ahorro Voluntario	28.343	28.34	28.34	28.34	28.34
		Aportación Adicional con intereses	3766.01	3800.18	3834.43	3868.72	3903.06
	5	Número de cuentas	28343	28343	28343	28343	28343
		Ahorro Voluntario	56.686	56.69	56.69	56.69	56.69
		Aportación Adicional con intereses	7532.02	7600.36	7668.85	7737.44	7806.12

Escenario		1	2	3	4	5
44	Monto	414.49	828.98	2072.44	4144.89	8289.78
45	Cuentas	28343	28343	28343	28343	28343

Elaboración propia

39. Corresponde a la tasa de interés real, considerando inflación.
40. Es el factor de interés mensual (39) considerando la comisión.
41. Son las cuentas que en ese periodo realizan ahorro voluntario.
42. Es el monto ahorrado en ese mes por todos los que realizan ahorro voluntario (41).
43. Es el valor acumulado de la aportación.

44. Es el valor acumulado a diciembre del periodo en curso.
45. Es el número de cuentas que realizan ahorro voluntario a diciembre del periodo que se está evaluando.

3.2. Resultados

El resultado que se presenta tras la constitución del fondo es el fondo total acumulado por todos los trabajadores en millones de pesos. Considerando la edad de jubilación a los 60 y 65 años:

Figura 3.24: Fondo total acumulado por todos los trabajadores (millones de pesos)

60 AÑOS									
Edad Actual	Año	Asegurados	Fondo	INFONAVIT	AV (Escenario 1)	AV (Escenario 2)	AV (Escenario 3)	AV (Escenario 4)	AV (Escenario 5)
55	2023	28,343	13,179	6,685	0	323	646	1,077	2,153
54	2024	31,064	14,729	7,448	0	417	834	1,390	2,781
53	2025	34,375	16,634	8,379	0	533	1,065	1,776	3,551
52	2026	37,114	18,440	9,130	0	653	1,307	2,178	4,355
51	2027	41,441	21,040	10,224	0	818	1,637	2,728	5,456
50	2028	45,005	23,572	11,317	0	987	1,974	3,291	6,582
49	2029	51,126	27,777	13,103	0	1,235	2,471	4,118	8,235
48	2030	56,759	31,714	14,719	0	1,500	3,000	5,000	10,000
47	2031	62,388	36,493	16,809	0	1,793	3,586	5,976	11,952
46	2032	70,274	41,557	18,494	0	2,185	4,370	7,283	14,566

65 AÑOS									
Edad Actual	Año	Asegurados	Fondo	INFONAVIT	AV (Escenario 1)	AV (Escenario 2)	AV (Escenario 3)	AV (Escenario 4)	AV (Escenario 5)
55	2028	28,343	16,117	7,976	0	622	1,243	2,072	4,145
54	2029	31,064	18,008	8,798	0	751	1,501	2,502	5,004
53	2030	34,375	20,323	9,803	0	908	1,817	3,028	6,056
52	2031	37,114	22,502	10,592	0	1,067	2,133	3,555	7,110
51	2032	41,441	25,646	11,765	0	1,288	2,577	4,295	8,590
50	2033	45,005	28,683	12,905	0	1,507	3,014	5,024	10,048
49	2034	51,126	33,729	14,806	0	1,837	3,674	6,124	12,247
48	2035	56,759	38,450	16,485	0	2,181	4,361	7,269	14,538
47	2036	62,388	44,130	18,629	0	2,555	5,110	8,516	17,033
46	2037	70,274	50,226	20,386	0	3,059	6,119	10,198	20,396

Elaboración propia

El fondo es el total acumulado por todos los trabajadores tomando en cuenta las aportaciones obligatorias, rendimientos y descontando comisiones. El fondo correspondiente al INFONAVIT considera que los trabajadores no hacen uso de estos recursos para la adquisición de una vivienda sino lo que ahorran para agregarlo a su fondo para el retiro.

Para obtener la pensión promedio correspondiente a cada trabajador se considera el fondo promedio y se divide entre el producto de 12 y la Unidad de Renta Vitalicia (URV), de acuerdo a [11]. La URV sirve para estimar el pago de pensión correspondiente al pago mensual del primer año de un retiro programado [13].

En el presente trabajo se usa la URV reportada al 31 de diciembre de 2018. Ésta al ser diferenciada por género se usa un promedio ponderado, de acuerdo al porcentaje de cuentas por género reportado por la CONSAR. En la Figura 3.25 se muestra la Unidad usada para cada edad.

Figura 3.25: Unidad de Renta Vitalicia

	Hombres	Mujeres	Promedio
Porcentaje de cuentas por género	60.40%	39.60%	-----
60 años	15.9027	17.0163	16.3437
65 años	14.7754	15.7973	15.1801

Elaboración propia

Se considera la pensión bajo dos escenarios: considerando únicamente el fondo RCV y otro considerando el fondo RCV + fondo INFONAVIT. De ambos escenarios se desencadenan dos cálculos, uno suponiendo que los asegurados se pensionan a los 60 años y otro a los 65.

No se debe olvidar que el gobierno federal bajo previo cumplimiento de la ley garantiza a los trabajadores del IMSS la pensión mínima mensual, la cual para términos de este trabajo se calcula con el producto del Salario Mínimo Nacional Vigente por los 30 días de los que se compone un mes, dando un total de 3,080.40 pesos.

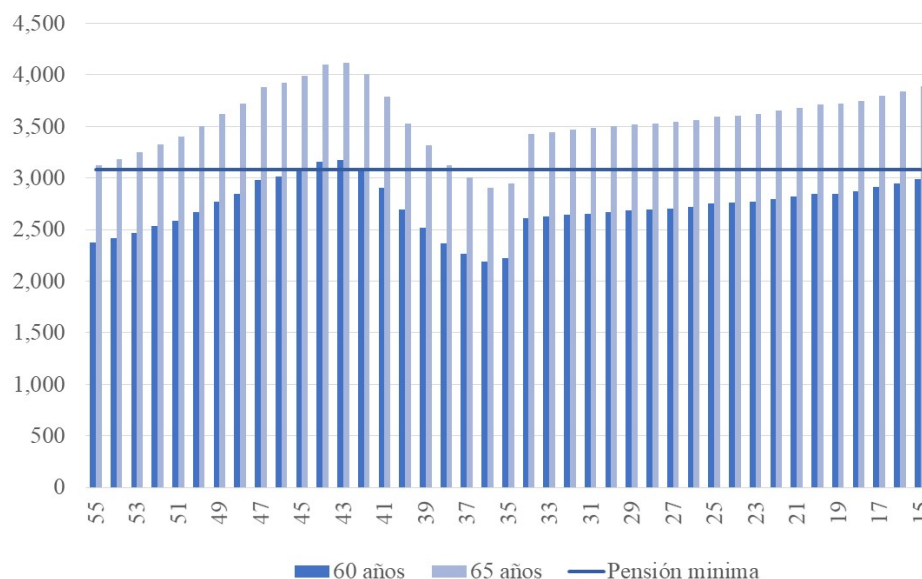
Nota: Se considera el Salario Mínimo Vigente General, es decir, sin considerar la zona norte fronteriza, zona que maneja otro Salario Mínimo de acuerdo al régimen a partir de 2019.

Figura 3.26: Pensión promedio de los trabajadores

Edad actual	Año	Fondo		Año	Fondo + INFONAVIT	
		Pensión promedio mensual			Pensión promedio mensual	
		60 años	65 años		60 años	65 años
55	2023	2,371	3,122	2028	3,574	4,667
54	2024	2,418	3,182	2029	3,640	4,737
53	2025	2,467	3,246	2030	3,710	4,811
52	2026	2,533	3,328	2031	3,788	4,895
51	2027	2,589	3,397	2032	3,847	4,956
50	2028	2,671	3,499	2033	3,953	5,073
49	2029	2,770	3,622	2034	4,077	5,211
48	2030	2,849	3,719	2035	4,171	5,313
47	2031	2,982	3,883	2036	4,356	5,522
46	2032	3,015	3,924	2037	4,357	5,516
45	2033	3,067	3,987	2038	4,405	5,565
44	2034	3,158	4,099	2039	4,497	5,669
43	2035	3,173	4,117	2040	4,479	5,643
42	2036	3,081	4,004	2041	4,317	5,449
41	2037	2,903	3,786	2042	4,054	5,133
40	2038	2,692	3,527	2043	3,761	4,781
39	2039	2,518	3,314	2044	3,515	4,486
38	2040	2,365	3,125	2045	3,299	4,227
37	2041	2,266	3,004	2046	3,158	4,058
36	2042	2,188	2,908	2047	3,048	3,924
35	2043	2,222	2,950	2048	3,081	3,961
34	2044	2,612	3,428	2049	3,570	4,539
33	2045	2,626	3,446	2050	3,582	4,550
32	2046	2,641	3,464	2051	3,594	4,561
31	2047	2,656	3,482	2052	3,604	4,571
30	2048	2,671	3,501	2053	3,613	4,580
29	2049	2,687	3,521	2054	3,621	4,589
28	2050	2,693	3,528	2055	3,615	4,581
27	2051	2,705	3,542	2056	3,615	4,581
26	2052	2,723	3,565	2057	3,623	4,590
25	2053	2,749	3,597	2058	3,642	4,612
24	2054	2,758	3,607	2059	3,637	4,606
23	2055	2,771	3,624	2060	3,639	4,609
22	2056	2,794	3,652	2061	3,652	4,625
21	2057	2,818	3,682	2062	3,668	4,644
20	2058	2,842	3,711	2063	3,682	4,662
19	2059	2,847	3,717	2064	3,675	4,655
18	2060	2,868	3,743	2065	3,686	4,669
17	2061	2,914	3,799	2066	3,727	4,718
16	2062	2,947	3,839	2067	3,738	4,734
15	2063	2,985	3,887	2068	3,777	4,780

Elaboración propia

Figura 3.27: Pensión constituida con el fondo RCV



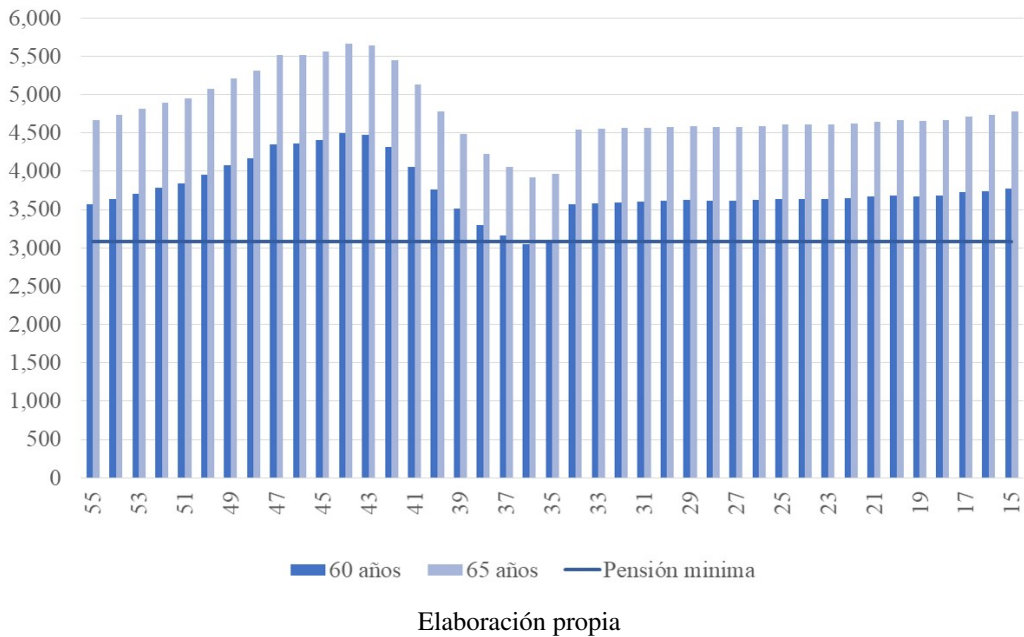
Elaboración propia

Se puede observar que si el trabajador se retira a los 60 años, únicamente con el fondo RCV disponible. La pensión promedio de los trabajadores en la mayoría de los casos no cubre el mínimo, por lo que de cumplir con las 1,250 semanas cotizadas, el gobierno tendrá que financiar la diferencia para garantizar la pensión mínima.

Desde hace tiempo varios expertos han puesto sobre la mesa el aumento en la edad de jubilación mínima de 60 a 65 años. Dicho cambio podría significar una disminución en el presupuesto destinado a cubrir las pensiones. En la Figura 3.27 se observa la diferencia que podría generar el cambio de la edad mínima.

En las Figuras 3.27 y 3.28 se puede apreciar una convexidad, la cual es asociada a los primeros asegurados bajo el nuevo régimen cuya edad en 1997 era de 15 años, hoy tienen 36 años, por lo que de jubilarse a los 60 años, su retiro será efectivo en el año 2038.

Figura 3.28: Pensión constituida considerando los fondos: RCV e INFONAVIT



Si los trabajadores decidieran usar el fondo de INFONAVIT como parte de su fondo de retiro, su pensión aumentaría en promedio 38 % si la jubilación fuera a los 60 años y en 34 % si fuera a los 65.

La diferencia de porcentajes radica en que cinco años más de inversión generan más rendimientos para el fondo RCV que para el INFONAVIT.

Uno de los datos más destacables de este estudio y que estudios anteriores han resaltado, es la importancia de los rendimientos que dan las AFORE. Las Figuras 3.29 y 3.30 tienen como objetivo mostrar la participación de la cuota social, las aportaciones obligatorias y el impacto que tienen los rendimientos en el fondo, a los 60 y 65 años respectivamente.

Figura 3.29: Composición del fondo acumulado por todos los trabajadores a los 60 años (millones de pesos)

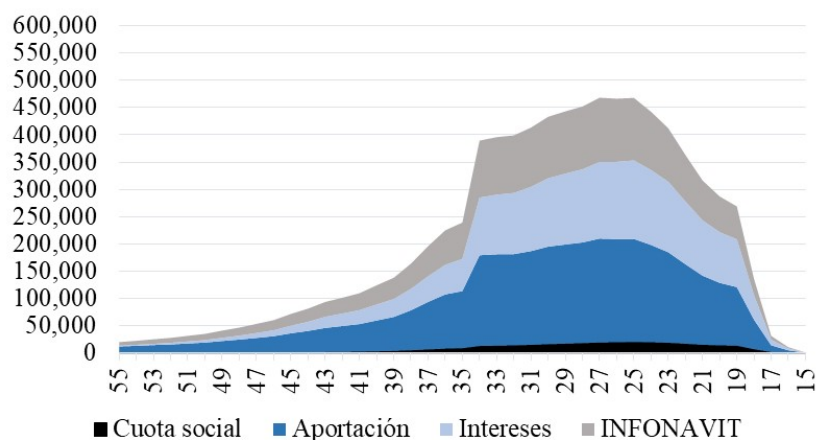
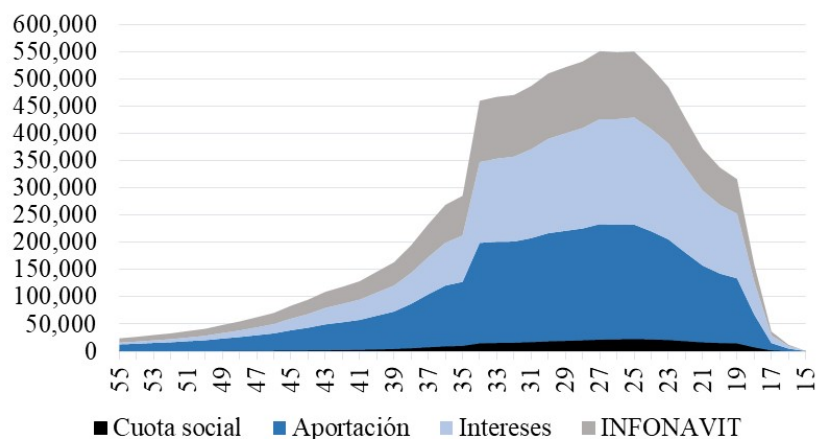


Figura 3.30: Composición del fondo acumulado por todos los trabajadores a los 65 años (millones de pesos)



Elaboración propia

En caso de jubilarse a los 60 años, en promedio el 47 % del fondo corresponde a rendimientos. Y si la jubilación es a los 65 años el 52 % del fondo es de rendimientos.

Otro punto controversial con las AFORE es la comisión cobrada. En la Figura 3.31 y 3.32 se expone el porcentaje del fondo de retiro actual con respecto al fondo en caso de que las comisiones fueran nulas, a los 60 y 65 años respectivamente.

Figura 3.31: Impacto de las comisiones en el fondo final RCV a los 60 años

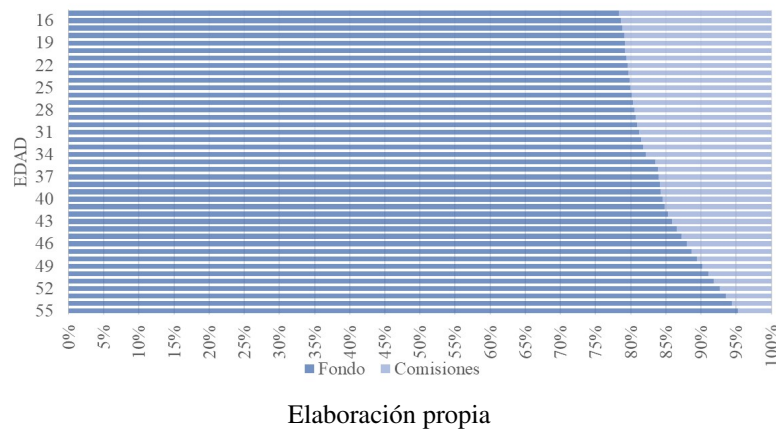
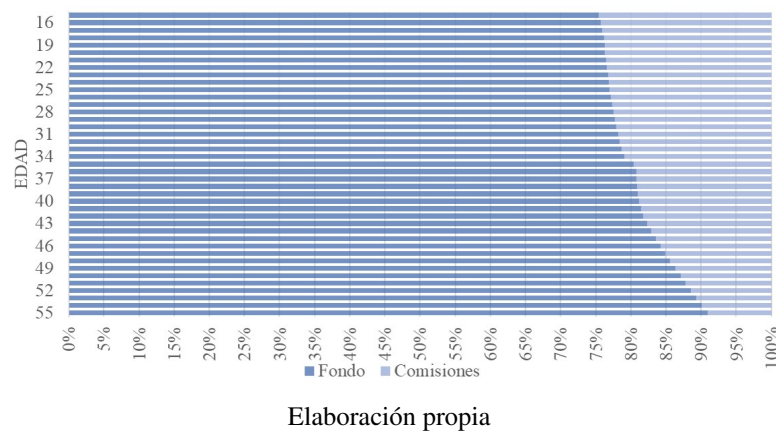


Figura 3.32: Impacto de las comisiones en el fondo final RCV a los 65 años



El fondo para los trabajadores, si la jubilación fuera a los 60 años, incrementaría un promedio de 16% y si la jubilación fuera a los 65 años, el incremento sería del 19%.

Además se expone el resultado obtenido para el ahorro voluntario. Donde se expresa el monto que se incrementaría mensualmente dependiendo del escenario de ahorro voluntario:

Figura 3.33: Monto de incremento a la pensión mensual según escenario de AV

Edad actual	Incremento mensual de la pensión por AV					Incremento de la pensión por AV				
	60 años					65 años				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
55	0	58	116	194	387	0	120	241	401	803
54	0	68	137	228	456	0	133	265	442	884
53	0	79	158	263	527	0	145	290	484	967
52	0	90	180	299	598	0	158	315	526	1,052
51	0	101	201	336	671	0	171	341	569	1,138
50	0	112	224	373	746	0	184	368	613	1,226
49	0	123	246	411	821	0	197	395	658	1,315
48	0	135	269	449	898	0	211	422	703	1,406
47	0	147	293	488	977	0	225	450	749	1,499
46	0	159	317	528	1,057	0	239	478	797	1,593
45	0	171	342	569	1,138	0	253	507	845	1,689
44	0	183	366	611	1,221	0	268	536	894	1,787
43	0	196	392	653	1,306	0	283	566	944	1,887
42	0	209	418	696	1,392	0	298	597	994	1,989
41	0	222	444	740	1,480	0	314	628	1,046	2,092
40	0	235	471	785	1,569	0	330	659	1,099	2,198
39	0	249	498	830	1,660	0	346	692	1,153	2,305
38	0	263	526	876	1,753	0	362	724	1,207	2,414
37	0	277	554	924	1,847	0	379	758	1,263	2,526
36	0	292	583	972	1,944	0	396	792	1,320	2,639
35	0	306	612	1,021	2,041	0	413	827	1,378	2,755
34	0	321	642	1,071	2,141	0	431	862	1,436	2,873
33	0	336	673	1,121	2,243	0	449	898	1,496	2,993
32	0	352	704	1,173	2,346	0	467	935	1,558	3,115
31	0	368	735	1,226	2,451	0	486	972	1,620	3,239
30	0	384	768	1,279	2,559	0	505	1,010	1,683	3,366
29	0	400	800	1,334	2,668	0	524	1,049	1,748	3,495
28	0	417	834	1,390	2,780	0	544	1,088	1,813	3,627
27	0	434	868	1,447	2,893	0	564	1,128	1,880	3,761
26	0	451	903	1,504	3,009	0	585	1,169	1,948	3,897
25	0	469	938	1,563	3,126	0	605	1,211	2,018	4,035
24	0	487	974	1,623	3,246	0	627	1,253	2,089	4,177
23	0	505	1,011	1,684	3,368	0	648	1,296	2,161	4,321
22	0	524	1,048	1,746	3,493	0	670	1,340	2,234	4,468
21	0	543	1,086	1,810	3,619	0	693	1,385	2,309	4,618
20	0	562	1,124	1,874	3,748	0	716	1,431	2,385	4,770
19	0	582	1,164	1,940	3,880	0	739	1,478	2,463	4,926
18	0	602	1,204	2,007	4,013	0	763	1,525	2,542	5,084
17	0	622	1,245	2,075	4,150	0	787	1,573	2,622	5,245
16	0	643	1,287	2,144	4,289	0	811	1,623	2,704	5,408
15	0	665	1,329	2,215	4,430	0	836	1,673	2,788	5,575

Elaboración propia

Figura 3.34: Pensión constituida con fondo RCV + AV (60 años)

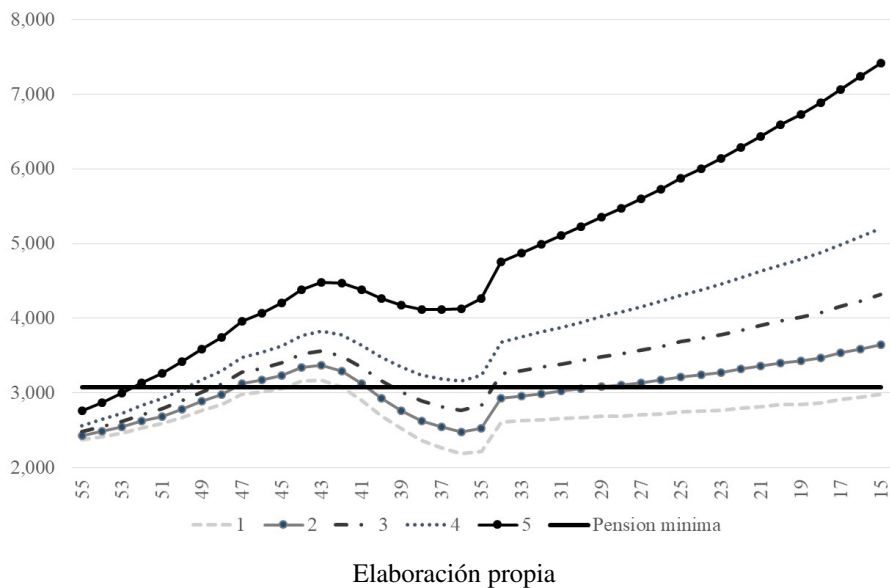
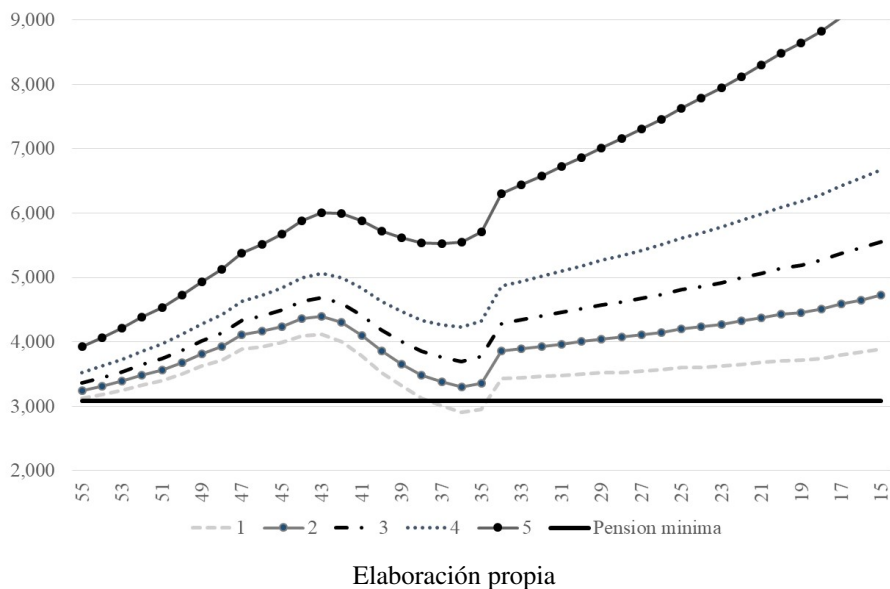


Figura 3.35: Pensión constituida con fondo RCV + AV (65 años)



Es decir, para los asegurados de 55 años que mensualmente incrementan 150 pesos a su ahorro, si se pensionarán a los 60 años estarían incrementando 58 pe-

sos a su pensión, mientras que los de 15 años estarían aumentando 665 pesos a su pensión. Pero si decidieran hacerlo a los 65 años, su pensión incrementaría 120 y 836 respectivamente.

Figura 3.36: Pensión promedio mensual RCV + AV

Escenario AV	0	150	300	500	1000
60 años	2,722	3,048	3,373	3,807	4,891
65 años	3,563	3,999	4,435	5,016	6,469

Fuente: Elaboración propia

Para obtener un panorama más amplio la Figura 3.36 muestra la pensión promedio de los trabajadores, de acuerdo a los escenarios de AV. A los 60 años el ahorro de 300 pesos mensuales es el que pone la pensión mensual por arriba de la mínima, mientras que de retirarse a los 65 años desde el escenario uno es suficiente, es decir, sin ahorro adicional.

Conclusión

La metodología ³ usada en la presente tesis, así como los resultados ⁴ obtenidos no discrepa de manera significativa con estudios presentados por las autoridades como la CONSAR, IMSS, etc. (Apéndice B). Si bien, las instituciones trabajan de manera coordinada para que los trabajadores gocen de un retiro lleno de tranquilidad y estabilidad económica, aquellos asegurados cuya jubilación está planeada a corto plazo generan pasivo al estado.

Como se ha demostrado, la participación de las AFORE en el fondo de retiro tiene un impacto positivo cuando se habla de rendimiento y un impacto negativo cuando se habla de comisión. Sin embargo, el beneficio adquirido por los rendimientos no sobrepasa el cobro de la comisión, tan solo el papel que juegan los rendimientos en el fondo de 60 años es en promedio de 48 % cuando la comisión es del 16 %, mientras que a los 65 años, los rendimientos generan el 53 % del fondo y la comisión representa el 19 %.

El esfuerzo por una mejor pensión concierne a las autoridades y a los trabajadores. Las instituciones ponen a disposición de los trabajadores herramientas que facilitan el ahorro como portales, aplicaciones y páginas de internet, así como informes y reportes del sistema de ahorro para el retiro. A los trabajadores les corresponde su participación en pláticas, foros, seminarios, etc., que se ponen a disposición de ellos. Así como conocer y hacer valer sus derechos como asegurados y exigir a las instituciones se haga cumplir lo estipulado en la ley.

De acuerdo con [2] el ahorro en México es demasiado bajo y este comportamiento se debe, entre otros factores, al número de individuos en las familias y al bajo nivel educativo de la cabeza familiar, además de las intermitencias en el sector formal. Por lo que a más de una institución le concierne fomentar el ahorro. Razón por la cual el ahorro voluntario es un tema que la CONSAR no ha quitado de la mesa, y es que ante la aportación obligatoria que no parece ser suficiente para la pensión mínima, los trabajadores deben buscar otras opciones que complementen su fondo de retiro. Además del ahorro voluntario, existen también fondos de inversión, seguros, entre otros instrumentos.

³Ver[11]

⁴Ver[10]

El retiro laboral no es un tema que deba considerarse cerca de la edad de jubilación, debería ser un plan de vida, iniciado desde el primer día en el sistema laboral. Haciendo un esfuerzo por pertenecer al sector formal y asignando prioridades de ahorro.

Apéndice A

Resultados comparativos sobre pensiones

Resultado I

En el cuarto informe trimestral del 2017 de la CONSAR [6], se expone el resultado de la pensión obtenida, aunque para fines de ese resultado lo que se hace es ajustar las variables para obtener la Tasa de Remplazo (TR) de 70 %.

Supuestos:

Densidad de cotización de 75%

Rendimiento: 4% real antes de comisiones y Comisión: 1.02%, promedio simple de 2018

Edad de jubilación: 65 años. Carrera laboral: 40 años. Carrera salarial plana.

Aportación: 6.5% del SBC + Cuota Social

URV al 15 de enero de 2018.

Cifras preliminares

Nota: El ahorro voluntario reportado se refiere a la aportación voluntaria que el trabajador debería hacer de manera mensual durante el 75% del periodo de tiempo reportado. Esto último debido a que se considero una densidad de cotización de 75%

Fuente: CONSAR

Cuadro IV-22
Ahorro voluntario y solidario de las AFORE

Nivel salarial ¹	Saldo acumulado		Pensión mensual (TR=70%)	Ahorro voluntario mensual necesario a la edad indicada			
	sin Ahorro Voluntario	para alcanzar una TR=70%		25 años (pesos)	40 años (pesos)	50 años (pesos)	60 años (pesos)
1	\$2,651	\$226,309	\$363,716	\$1,856	NA	NA	NA
2	\$4,804	\$316,758	\$659,102	\$3,363	\$504	\$1,037	\$2,027
3	\$7,205	\$422,751	\$988,652	\$5,044	\$834	\$1,714	\$3,350
4	\$9,607	\$528,743	\$1,318,203	\$6,725	\$1,163	\$2,392	\$4,673
5	\$12,009	\$630,181	\$1,647,754	\$8,406	\$1,499	\$3,083	\$6,024
6	\$14,411	\$736,173	\$1,977,305	\$10,088	\$1,828	\$3,760	\$7,347
7	\$16,813	\$842,166	\$2,306,855	\$11,769	\$2,157	\$4,438	\$8,670
8	\$19,214	\$943,603	\$2,636,406	\$13,450	\$2,493	\$5,129	\$10,021
9	\$21,616	\$1,049,596	\$2,965,957	\$15,131	\$2,823	\$5,806	\$11,344
10	\$24,018	\$1,155,589	\$3,295,508	\$16,813	\$3,152	\$6,483	\$12,667
11	\$26,420	\$1,257,026	\$3,625,058	\$18,494	\$3,488	\$7,174	\$14,018
12	\$28,822	\$1,363,019	\$3,954,609	\$20,175	\$3,817	\$7,852	\$15,341
13	\$31,223	\$1,469,011	\$4,284,160	\$21,856	\$4,146	\$8,529	\$16,664
14	\$33,625	\$1,575,004	\$4,613,711	\$23,538	\$4,476	\$9,206	\$17,988
15	\$36,027	\$1,680,996	\$4,943,261	\$25,219	\$4,805	\$9,884	\$19,311
20	\$48,036	\$2,119,853	\$6,591,015	\$33,625	\$6,586	\$13,546	\$26,467
25	\$60,045	\$2,649,816	\$8,238,769	\$42,032	\$8,232	\$16,933	\$33,084

Reciben Pensión Mínima Garantizada de \$2,857.94 equivalente a una tasa de reemplazo de 126%

¹A partir del segundo nivel, el salario se calcula multiplicando la cifra correspondiente por el valor actual de la UMA (\$80.06)

Resultado II

En una nota de «El economista» el 3 de julio de 2017, se comparte el resultado de un análisis emitido por Lockton.

Retirados por afores tendrán una pensión de \$2,300 en promedio

Para el 2021 lo mejor para aquellas personas a las que les falte la mitad de semanas cotizadas (12 años) será que generen un ahorro.

Los trabajadores que cotizan en el Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS) desde el 1 de julio de 1997, y que por tanto tienen una cuenta en una administradora de fondos para el retiro (afore), cuando se retiren recibirán una pensión de aproximadamente 2,300 pesos mensuales, estima Ana María Montes, directora de Consultoría Actuarial de Lockton.

Casi 75% de los mexicanos cotiza con menos de cinco salarios mínimos. Entonces, al tener bajas aportaciones, su pensión será menor a 30% de su último salario, con lo que el gobierno los tendrá que apoyar para completar una pensión mínima garantizada de 2,300 pesos, expuso en entrevista.

Ejemplificó: si una persona gana cuatro salarios mínimos, logra registrar las 1,250 semanas de cotización -que equivalen a 24 años de trabajo en la formalidad- y las aportaciones son de 6.5%, su pensión será de 1,000 pesos. Al ser muy bajo este monto el gobierno le entregará cada mes 1,300 pesos para que tenga una pensión de 2,300 pesos.

Apéndice B

Aplicación del Modelo Vasicek

A continuación se detalla la generación de las tasas proyectadas.

1 Se acomodan los datos obtenidos

2 Se obtiene:

$$S_x = \sum_{i=1}^n x_{i-1},$$

$$S_y = \sum_{i=1}^n x_i,$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n x_{i-1}^2,$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

$$S_{x,y} = \sum_{i=1}^n x_{i-1}x_i.$$

Donde:

n= número de valores que se tiene

3 Ejemplo

AFORE	SURA			
SIEFORE	SB4	SB3	SB2	SB1 y SB0
S _x	660.17	600.02	2,058.27	841.85
S _y	655.90	595.83	2,044.50	838.26
S _{xx}	7434.34	6141.14	24156.39	7257.42
S _{yy}	7349.89	6064.60	23783.79	7201.41
S _{xy}	7374.36	6089.53	23947.05	7221.50
n	63	63	193	103
Δt	0.0833	0.0833	0.0833	0.0833
μ	8.17	7.08	8.14	6.18
α	2.5E-01	2.3E-01	2.4E-01	1.5E-01
r ²	0.55198396	0.41400592	0.224495	0.15138587
σ ²	1.19877043	0.83113314	0.46819523	0.19182223

Donde : $\Delta t = \frac{1}{12} = \frac{\text{correspondiente a un año}}{\text{número de meses}}$

4 Se obtiene la varianza, desviación estándar y la media.

$$N\left(\mu(1 - e^{-\alpha\Delta t}) + e^{-\alpha\Delta t}x_{i-1}, \frac{\sigma^2(1 - e^{-2\alpha\Delta t})}{2\alpha}\right)$$

Ejemplo

		SB4	SB3	SB2	SB1
Parámetros	μ	8.17	7.08	8.14	6.18
	α	0.2509686	0.23249823	0.2412826	0.14821558
	σ ²	1.19877043	0.83113314	0.46819523	0.19182223
$\frac{\sigma^2(1 - e^{-2\alpha\Delta t})}{2\alpha}$	Varianza	0.13853064	0.09625564	0.05416674	0.02243774
	Desv.Est	0.37219704	0.31025094	0.23273749	0.14979234
$\mu(1 - e^{-\alpha\Delta t}) + e^{-\alpha\Delta t}x_{i-1}$	Media				

La media depende de x_{i-1}

5 En VBA se hace la programación para generar la tasa de rendimiento:

```
Sub sim_()
    n = 615
    For k = 1 To 4
        desvest = Cells(7, 18 + k)
        For i = 1 To n
            val_x_1 = 0
            val_x_2 = 0
            media = Cells(203 + i, 18 + k)
            For j = 1 To 30000
                Otravez:
                num_alea = Rnd()
                If num_alea = 0 Then
                    GoTo Otravez
                End If
                Z = Application.WorksheetFunction.Norm_Inv(num_alea, media, desvest)
                val_x = Z
                val_x_1 = val_x + val_x_1
                Next
                val_x_2 = val_x_1 / 30000
                Cells(203 + i, 1 + k) = val_x_2
            Next
        Next
    End Sub
```

*Application.WorksheetFunction.Norm_Inv(num_alea, media, desvest)

Devuelve el inverso de la distribución acumulativa normal para la media y la desviación estándar especificadas.

Argumento 1 Probabilidad: probabilidad correspondiente a la distribución normal.

Argumento 2 Media: media aritmética de la distribución.

Argumento 3 Desv_estándar: desviación estándar de la distribución.

Apéndice C

Código VBA

Código fondo.

```
Sub fondo()
```

```
    edades_a_evaluar = 41 'se evalúan de 15 a 55 años
```

```
    For i = 1 To edades_a_evaluar 'este ciclo pasa por todas las edades
```

```
        'quita los datos que sirven para evaluar cada edad
```

```
        Sheets("Fondo").Select
```

```
        'Range("H7:G68").Select
```

```
        'Selection.ClearContents
```

```
        Range("J7:U68").Select
```

```
        Selection.ClearContents
```

```
        Range("D7").Select
```

```
        Selection.ClearContents
```

```
        Sheets("AUX").Select
```

```
        Range("F49:J50").Select
```

```
        Selection.ClearContents
```

```
    Sheets("Fondo").Select
```

```
    edad_evaluada = Sheets("Datos").Cells(i + 4, 2)
```

```
    Sheets("Fondo").Cells(7, 4) = edad_evaluada
```

```
    Sheets("AV").Cells(15, 8) = edad_evaluada
```

```
    'se mete otro ciclo que por cada edad haga la evaluación hasta los 65 años
```

```

años_de_seguimiento = 65 - edad_evaluada + 1
For j = 1 To años_de_seguimiento
    Sheets("AUX").Cells(8, 5) = Sheets("Fondo").Cells(j + 6, 3) 'año
    Sheets("AUX").Cells(6, 5) = Sheets("Fondo").Cells(j + 6, 4) 'edad
    Sheets("AUX").Cells(6, 8) = Sheets("Fondo").Cells(j + 6, 5) 'número de
asegurados
    Sheets("AUX").Cells(38, 5) = Sheets("Fondo").Cells(j + 6, 6) 'fondo anterior
    Sheets("Fondo").Cells(j + 6, 26) = Sheets("AUX").Cells(22, 9) 'aportacion RCV
sin intereses
    Sheets("Fondo").Cells(j + 6, 27) = Sheets("AUX").Cells(23, 9) 'aportacion cuota
social sin intereses
    Sheets("Fondo").Cells(j + 6, 10) = Sheets("AUX").Cells(38, 9) 'saldo final
    'se agrega el monto de infonavit ya que va con cada salario
    Sheets("AUX").Cells(42, 5) = Sheets("Fondo").Cells(j + 6, 7)
    Sheets("Fondo").Cells(j + 6, 11) = Sheets("AUX").Cells(43, 5)
    'tambien se hace la valuación del AV
    If j = 1 Then
        Sheets("AUX").Cells(50, 6) = 0
        Sheets("AUX").Cells(49, 6) = 0
        Sheets("AUX").Cells(50, 7) = 0
        Sheets("AUX").Cells(49, 7) = 0
        Sheets("AUX").Cells(50, 8) = 0
        Sheets("AUX").Cells(49, 8) = 0
        Sheets("AUX").Cells(50, 9) = 0
        Sheets("AUX").Cells(49, 9) = 0
        Sheets("AUX").Cells(50, 10) = 0
        Sheets("AUX").Cells(49, 10) = 0
    Else
        Sheets("AUX").Cells(49, 6) = Sheets("Fondo").Cells(j + 5, 13) 'Aportacion
escenario 1
        Sheets("AUX").Cells(50, 6) = Sheets("Fondo").Cells(j + 5, 12) 'cuentas
escenario1
        Sheets("AUX").Cells(49, 7) = Sheets("Fondo").Cells(j + 5, 15) 'Aportacion
escenario 2
        Sheets("AUX").Cells(50, 7) = Sheets("Fondo").Cells(j + 5, 14) 'cuentas
escenario2
        Sheets("AUX").Cells(49, 8) = Sheets("Fondo").Cells(j + 5, 17) 'Aportacion
escenario 3
        Sheets("AUX").Cells(50, 8) = Sheets("Fondo").Cells(j + 5, 16) 'cuentas
escenario3
        Sheets("AUX").Cells(49, 9) = Sheets("Fondo").Cells(j + 5, 19) 'Aportacion
escenario 4
        Sheets("AUX").Cells(50, 9) = Sheets("Fondo").Cells(j + 5, 18) 'cuentas
escenario4
        Sheets("AUX").Cells(49, 10) = Sheets("Fondo").Cells(j + 5, 21) 'Aportacion
escenario 5
        Sheets("AUX").Cells(50, 10) = Sheets("Fondo").Cells(j + 5, 20) 'cuentas
escenario5
    End If

```



```
Sheets("Fondo").Cells(j + 6, 12) = Sheets("AUX").Cells(73, 6)
Sheets("Fondo").Cells(j + 6, 13) = Sheets("AUX").Cells(72, 6)
Sheets("Fondo").Cells(j + 6, 14) = Sheets("AUX").Cells(73, 7)
Sheets("Fondo").Cells(j + 6, 15) = Sheets("AUX").Cells(72, 7)
Sheets("Fondo").Cells(j + 6, 16) = Sheets("AUX").Cells(73, 8)
Sheets("Fondo").Cells(j + 6, 17) = Sheets("AUX").Cells(72, 8)
Sheets("Fondo").Cells(j + 6, 18) = Sheets("AUX").Cells(73, 9)
Sheets("Fondo").Cells(j + 6, 19) = Sheets("AUX").Cells(72, 9)
Sheets("Fondo").Cells(j + 6, 20) = Sheets("AUX").Cells(73, 10)
Sheets("Fondo").Cells(j + 6, 21) = Sheets("AUX").Cells(72, 10)
```

Next

Next

End Sub

Bibliografía

- [1] Anderson, Arthur W. (1992). Pension mathematics for actuaries. Connecticut, EU. ACTEX Publications.
- [2] Attanasio O. and Székely M. (1998). Household Savings and Income Distribution in Mexico. Recuperado de <https://poseidon01.ssrn.com/delivery.php?ID=937027118025007084065068093079086002047011046006095011102125112016073124127071015047059010029068094109086120095107120093106082065123024069010065109002001027094000007119&EXT=pdf>
- [3] Buru W.and Yajie Z. (2017). Short-Term Interest Rate Models. Recuperado de <http://lup.lub.lu.se/luur/download?func=downloadFile&recordId=8913006&fileId=8913009>
- [4] Centro de Estudios de las Finanzas Públicas. (2018). Aspectos Relevantes Pre-Criterios 2019. Recuperado de <http://www.cefp.gob.mx/new/buscador.php>
- [5] Comisión Nacional de Seguros y Fianzas. (2013). Circular Única de Seguros y Fianzas. Ley de Instituciones de Seguros y Fianzas, Anexo 6.3.3. Recuperado de https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/73545/ANEXO_6.3.3.pdf
- [6] CONSAR. (2018). Cuarto informe trimestral. Recuperado de <https://www.gob.mx/consar/documentos/informes-trimestrales-de-la-consar>
- [7] CONSAR. (2018). Densidades de Cotización en el Sistema de Ahorro para el Retiro en México. Recuperado de https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/192977/densidad_vf.pdf
- [8] CONSAR. (2018). El reto de financiar las pensiones de la «Generación de Transición». Recuperado de <https://www.gob.mx/consar/articulos/el-reto-de-financiar-las-pensiones-de-la-generacion-de-transicion?idiom=es>
- [9] CONSAR. (2018). Información Estadística. Recuperado de <https://www.gob.mx/consar/articulos/informacion-estadistica-61314>
- [10] CONSAR. (2014). Las comisiones que cobran las AFORE importan...y mucho. Recuperado de <https://www.gob.mx/consar/articulos/las-comisiones-que-cobran-las-afore-importan-y-mucho>

- [11] CONSAR. (2017). Metodología de la Calculadora de ahorro y retiro para trabajadores que cotizan al IMSS. Recuperado de https://www.consar.gob.mx/gobmx/Aplicativo/calculadora/imss/PDF/Metodolog%C3%ADa_Calculadora_de_Retiro.pdf
- [12] CONSAR. (2017). ¿Quiénes y cuántos mexicanos tienen acceso a una pensión?. Recuperado de <https://www.gob.mx/consar/articulos/quienesycuantosmexicanostienenaccesoaunapension>
- [13] CONSAR. (2018). Unidad de Renta Vitalicia. Recuperado de <https://www.gob.mx/consar/articulos/valores-de-la-unidad-de-renta-vitalicia-60403?idiom=es>
- [14] Ditlevsen Susanne and Samson Adeline. (2010). Introduction to Stochastic Models in Biology. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/281947144_Introduction_to_Stochastic_Models_in_Biology
- [15] Dufresne, D. (1994). Mathématiques des caisses de retraite. Montréal, Canada. Éditions supremum.
- [16] El Universal. (2019). Lo que sabemos de las pensiones a adultos mayores que dará AMLO. Recuperado de <https://www.eluniversal.com.mx/nacion/politica/loquesabemosde-laspensionesadultosmayoresquedaraamlo>
- [17] Gala Ribera E. (2014). Estudio y desarrollo del modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés “short term”. Recuperado de <https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/36852/TMF%20GALA%20RIBERA.pdf?sequence=1>
- [18] Grupo Banco Mundial. (2018). Tasa de fertilidad, total (nacimientos por cada mujer). Recuperado de <https://datos.bancomundial.org/indicador/SP.DYN.TFRT.IN?locations=MX>
- [19] IMSS. (2017). Informe Financiero y Actuarial. Recuperado de <http://www.imss.gob.mx/sites/all/statics/pdf/estadisticas/ifa/ifa-2016.pdf>
- [20] IMSS. (1973). Ley del Seguro Social 12 de marzo de 1973. Recuperado de <http://www.imss.gob.mx/sites/all/statics/pdf/leyes/4129.pdf>
- [21] IMSS. (1997). Ley del Seguro Social 21 de diciembre de 1995. Recuperado de <http://www.imss.gob.mx/sites/all/statics/pdf/leyes/LSS.pdf>
- [22] IMSS. (2017). Memoria estadística, Capítulo X. Prestaciones económicas. Recuperado de <http://www.imss.gob.mx/conocealimss/memoriaestadistica2017>
- [23] IMSS. (2016). Valuación Actuarial del Seguro de Invalidez y Vida al 31 de diciembre de 2015. Recuperado de <http://www.imss.gob.mx/conocealimss/valuacionesactuariales>
- [24] IMSS. (2018). Valuación Actuarial del Seguro de Invalidez y Vida al 31 de diciembre de 2017. Recuperado de <http://www.imss.gob.mx/conocealimss/valuacionesactuariales>
- [25] INEGI. (2018). Índice Nacional de Precios al Consumidor. Recuperado de <https://www.inegi.org.mx/temas/inpc/>

- [26] Instituto Nacional de Estadística y Geografía. (2018). Resultados de la encuesta nacional de ocupación y empleo cifras durante el segundo trimestre de 2018. Recuperado de http://www.beta.inegi.org.mx/contenidos/saladeprensa/boletines/2018/enoe_ie/enoe_ie2018_08.pdf
- [27] Kuo, Hui-Hsiung. (2006). Introduction to stochastic integration. Springer. USA. Editorial Board.
- [28] Montalvo. (2018). El teorema de la convergencia dominada. Recuperado de http://matematicas.unex.es/montalvo/Analisis_Varias_Variables/apuntes2010/cap22.pdf
- [29] Moreno Trujillo J. (2011). Estimación de parámetros en ecuaciones diferenciales estocásticas aplicadas a finanzas. Recuperado de <https://revistas.uexternado.edu.co/index.php/odeon/article/view/3325>
- [30] OECD. (2017). Pension at a Glance 2017:OECD and G20 Indicators. Recuperado de http://dx.doi.org/101787/pension_glance-2017-en
- [31] Oficina Nacional de Estadística (ONE). (2018). La Esperanza de Vida ¿Cómo se calcula? ¿Qué significa?. Recuperado de <http://www.one.cu/publicaciones/preguntasfrecuentes/esperanz%20de%20vida.pdf>
- [32] Procuraduría Federal de la Defensa del Trabajador. (2018). La seguridad social y sus beneficios. Recuperado de <https://www.gob.mx/profedet/articulos/seguridad-social>
- [33] Real Academia Española. (2017). Diccionario de la lengua española. Recuperado de <http://dle.rae.es/>
- [34] Rincón, L. (2012). Introducción a los procesos estocásticos. Coyoacan, Ciudad de México. Las prensas de ciencias.
- [35] Secretaría Hacienda y Crédito Público. (2013).Ley del Impuesto Sobre la Renta 11 de diciembre de 2013. Recuperado de http://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/pdf/LISR_301116.pdf
- [36] Vasicek, Oldrich. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. Journal of Financial Economics 5.
- [37] Villagómez F. (2014). El ahorro para el retiro Una reflexión para México. Recuperado de <http://www.scielo.org.mx/pdf/ete/v81n323/2448-718Xete8132300549.pdf>