



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD  
AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

EL SISTEMA DE AHORRO PARA EL  
RETIRO EN MÉXICO PARA  
TRABAJADORES DEL IMSS A  
TRAVÉS DE SIMULACIÓN  
MONTECARLO

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
LICENCIADO EN ACTUARÍA

PRESENTA:

**MIGUEL ÁNGEL GONZÁLEZ RAMÍREZ**

DIRECTOR DEL TRABAJO:  
DR. José Raúl Castro Esparza



PUEBLA, PUE. DICIEMBRE 2017



*A mis padres, que gracias a Dios  
siempre han estado presentes.*

*A mi hermano, que sin tú saberlo has sido el ejemplo  
y me has puesto la vara muy alta.*

*A mi abuela, que tu invaluable amor y cariño  
ha sido una motivación para este trabajo.*



## Agradecimientos

A Dios, por permitirme llegar hasta el día de hoy y cumplir uno de mis objetivos.

A mis padres, por los valores que me inculcaron y me han permitido ser la persona que hoy soy, por el mayúsculo esfuerzo que han realizado, del que me siento muy orgulloso y hoy finalmente soy consciente.

A mi asesor de tesis, Dr. José Raúl Castro Esparza, por todo su apoyo, así como por compartir sus conocimientos y guiarme en este trabajo. A mis sinodales, M.C. Brenda Zavala López, M.C. Ángel Tejeda Moreno y M.F. José Asunción Hernández, por la enorme disposición que mostraron desde el primer día, sus consejos y aportaciones.

A todos los profesores, que con su sapiencia me hicieron crecer intelectualmente.

A la vida, que me permitió conocer personas en este trayecto y el día de hoy puedo llamar amigos.



# Introducción

De acuerdo a datos del INEGI, aproximadamente el 58 % de la población económicamente activa ocupada labora en la informalidad, es decir, 6 de cada 10 mexicanos no contribuyen a ningún instituto de seguridad social, lo cual significa que de seguir así, no tendrán derecho a obtener una pensión.

Por otro lado, para el porcentaje restante que sí labora en la formalidad, a partir de la reforma al Sistema de Salud en 1997, forma parte del actual sistema de ahorro para el retiro en México, el cual establece que cada trabajador cotizante a alguna institución de Seguridad Social contará con una cuenta individual administrada por una AFORE, en la que se depositarán las aportaciones que éste realice en conjunto con su empleador y el gobierno.

El objetivo es que al final de la vida laboral del trabajador, los recursos que haya ahorrado así como los rendimientos reportados por la AFORE elegida, financien su pensión siempre que cumpla con los requisitos para obtenerla. Sin embargo, para los trabajadores del IMSS, el 6.5 % de aportación obligatoria dista mucho del de otros países con un modelo similar.

Tal es el caso de Chile, primer país latinoamericano en implementar el modelo de cuentas individuales en los años ochenta y cuya aportación obligatoria es del 10 %. Al día de hoy, los resultados de la implementación de este modelo no son los esperados, por lo que se han comenzado a llevar a cabo algunas propuestas para mejorarlo.

El reto para México es aún mayor, pues si bien restan alrededor de 5 años para comenzar a pagar las primeras pensiones a través del nuevo sistema, la mayoría de los rubros que intervienen en él son inferiores a los del país andino.

La tasa de reemplazo se refiere al porcentaje que representa la pensión respecto al salario percibido por el trabajador en algún periodo, por ejemplo, el promedio de los últimos 5 años. La OCDE manifiesta que una tasa de reemplazo del 70 % es suficiente para dignificar la vida del trabajador en el retiro, no obstante, bajo las condiciones actuales, se estima que la tasa de reemplazo de los trabajadores del IMSS será de alrededor del 30 %, lo

que significaría una pensión realmente baja y carente de la calidad de vida acostumbrada.

Diversas autoridades manifiestan que el Ahorro Voluntario es clave para mejorar la tasa de reemplazo de los trabajadores, sin embargo, de acuerdo a estadísticas de la CONSAR, institución responsable de la supervisión y correcto funcionamiento de las AFORE, del total de recursos ahorrados en ellas, únicamente alrededor del 1 % corresponde a aportaciones voluntarias, lo que significa que no se está tomando consciencia de la importancia de este rubro.

Propuestas como las de incrementar el porcentaje obligatorio, incentivar a los trabajadores a realizar aportaciones voluntarias así como elegir adecuadamente la AFORE que administrará la cuenta del trabajador, son consideradas en el presente trabajo y se muestran los resultados bajo las condiciones anteriores. A pesar de ello, muchos otros factores son igual de importantes para mejorar la situación actual.

Por ello, en la presente tesis, se consideró la información publicada en la página de la CONSAR para llevar a cabo ejercicios de simulación Montecarlo a través de distintos escenarios, y determinar medidas para mejorar la tasa de reemplazo y por ende la pensión de los trabajadores, pues México es el país con el más bajo porcentaje de aportación obligatoria y tasa de reemplazo de los países miembros de la OCDE.





# Índice general

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introducción</b>   | <b>I</b>  |
| <b>1. Sistema de Ahorro para el Retiro en México</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1. Antecedentes . . . . .   | 1         |
| 1.2. SAR '97 . . . . .  | 2         |
| 1.3. Aspectos generales de las AFORE . . . . .  | 4         |
| <b>2. Análisis de Series de Tiempo</b>  | <b>9</b>  |
| 2.1. Conceptos fundamentales . . . . .  | 9         |
| 2.1.1. Procesos estocásticos . . . . .  | 9         |
| 2.1.2. Procesos estocásticos estacionarios en tendencia (ET)<br>y estacionarios en diferencias (ED) . . . . . | 13        |
| 2.1.3. Procesos estocásticos integrados . . . . .   | 13        |
| 2.1.4. Proceso estocástico de raíz unitaria . . . . .   | 14        |
| 2.2. Pruebas de estacionariedad . . . . .   | 14        |
| 2.3. Pronósticos . . . . .  | 16        |
| 2.3.1. Enfoques de los pronósticos económicos . . . . .   | 16        |
| 2.3.2. Creación de modelos ARIMA . . . . .  | 17        |
| 2.4. Metodología Box-Jenkins (BJ) . . . . .   | 20        |
| 2.4.1. Identificación . . . . .   | 21        |
| 2.4.2. Estimación del modelo ARIMA . . . . .  | 23        |
| 2.4.3. Verificación de diagnóstico . . . . .  | 23        |
| 2.4.4. Pronóstico . . . . .   | 24        |
| 2.5. Modelos ARCH y GARCH . . . . .   | 25        |
| <b>3. Aplicación de la metodología y resultados</b>   | <b>29</b> |
| 3.1. Recopilación de información . . . . .  | 29        |
| 3.2. Series de tiempo y proyecciones . . . . .  | 30        |
| 3.3. Procesamiento de datos (Cálculo de pensiones) . . . . .  | 31        |

|   |           |
|---|-----------|
| 3.4. Algunos ejemplos específicos. . . . .  | 37        |
| <b>4. Conclusión</b>                        | <b>47</b> |
| <b>A. Representación gráfica</b>            | <b>51</b> |
| <b>B. Modelos de ajuste y correlogramas</b> | <b>55</b> |
| <b>C. Código fuente del programa</b>        | <b>61</b> |
| <b>Bibliografía</b>                         | <b>71</b> |

**EL SISTEMA DE AHORRO PARA EL RETIRO  
EN MÉXICO PARA TRABAJADORES DEL  
IMSS A TRAVÉS DE SIMULACIÓN  
MONTECARLO**

**MIGUEL ÁNGEL GONZÁLEZ RAMÍREZ**

DICIEMBRE 2017



# Capítulo 1

## Sistema de Ahorro para el Retiro en México

El primero de julio de 1997 entró en vigor la reforma a la Ley del Seguro Social, la cual modificó el funcionamiento del sistema pensionario mexicano, pasando de un sistema de beneficio definido a uno de contribución definida, en donde cada trabajador posee una cuenta individual que es administrada por una AFORE.

### 1.1. Antecedentes

Hasta antes de 1997, en México, el sistema pensionario funcionaba a través del formato de beneficio definido, en el cual, los trabajadores en activo, a través de sus aportaciones, sostenían el pago de las pensiones que obtenían los trabajadores retirados. Sin embargo, los cambios demográficos mermaron el sistema, que ya era insostenible, pues la esperanza de vida iba en aumento y la tasa de natalidad disminuía; es decir, con el tiempo, habría menos trabajadores aportando al sistema y personas retiradas con derecho a obtener pensión viviendo más años.

Por ello, se reformó el sistema en 1997 y se adoptó el llamado modelo chileno de pensiones<sup>1</sup>, con lo cual, cada trabajador es responsable del monto que obtendrá al momento del retiro.

---

<sup>1</sup>Conocido así por ser el primer país latinoamericano en implementar el sistema de cuentas individuales.

## 1.2. SAR '97

Tras la reforma de 1997, las aportaciones de cada trabajador se registran en una cuenta individual, la cual es personal, única e intransferible. Toda cuenta individual es administrada por una entidad financiera privada llamada Administradora de Fondos para el Retiro (AFORE), la cual está regulada por la Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro (CONSAR), y autorizada para funcionar por la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP).

Como su nombre lo dice, las AFORE administran los fondos de retiro y ahorro de los trabajadores, y su finalidad es que todos ellos puedan contar con una pensión al momento del retiro. No es su función invertir los recursos, para ello existen sociedades de inversión especializadas.

Las aportaciones a la cuenta individual de cada trabajador se realizan de manera tripartita entre el patrón, el gobierno y el propio trabajador. Éstas se llevan a cabo de manera bimestral los meses de enero, marzo, mayo, julio, septiembre y noviembre, en función del salario base de cotización (SBC).

La cuenta individual se divide en cuatro subcuentas:

- Retiro, cesantía en edad avanzada y vejez.

El patrón aporta el 2% del SBC por concepto de retiro, y 3.150% del SBC por concepto de cesantía en edad avanzada y vejez. Para un total de 5.150%.

El gobierno aporta el siete punto ciento cuarenta y tres por ciento de la cuota patronal por concepto de cesantía en edad avanzada y vejez, es decir, el 0.225% del SBC. Adicionalmente, aportará una cantidad extra por concepto de Cuota Social siempre que el trabajador no perciba más de 15 salarios mínimos.

Por su parte, el trabajador aportará el 1.125% del SBC.

En conjunto, se aporta un total de 6.5% a la cuenta individual del trabajador.

- Aportaciones voluntarias.

En esta subcuenta se concentrarán las aportaciones (independientes de las obligatorias) que el trabajador realice a lo largo de su vida laboral para incrementar el monto de la pensión. No existe una cantidad mínima ni máxima de aportación, las puede realizar el trabajador directamente o solicitar al empleador que lo haga a través de un descuento en su salario, y se pueden depositar cada 2 o 6 meses dependiendo de la AFORE en la que se encuentre.

Existen beneficios fiscales para dichas aportaciones, y los recursos de esta subcuenta se pueden retirar en cualquier momento.<sup>2</sup>

- Vivienda.

Las aportaciones de esta subcuenta son realizadas únicamente por el patrón, equivalentes al 5 % del SBC del trabajador. Los recursos son destinados al INFONAVIT, y en caso de que el trabajador no utilice el saldo de dicha cuenta para solicitar un crédito para la vivienda, este servirá para complementar el monto de la pensión.

Los recursos de esta cuenta son administrados por el INFONAVIT, la AFORE en la que se encuentre el trabajador sólo registra las aportaciones, no tiene responsabilidad sobre estas.

- Aportaciones adicionales o complementarias.

De manera similar a las aportaciones voluntarias, el objetivo de esta subcuenta es incrementar el monto de la pensión del trabajador. En este caso, las aportaciones las puede llevar a cabo el patrón o el trabajador en cualquier momento, y los recursos solamente estarán disponibles al momento del retiro.

Una vez realizadas las aportaciones, la AFORE en la que se encuentre inscrito el trabajador depositará los recursos en una Sociedad de Inversión Especializada en Fondos para el Retiro (SIEFORE), cuyo objetivo es generar rendimientos para incrementar el saldo total de la cuenta del trabajador al momento del retiro.

---

<sup>2</sup>Para mayor información sobre esta subcuenta, visite <https://www.gob.mx/consar/articulos/retiro-de-ahorro-voluntario-imss?idiom=es>

Existen 5 siefores básicas:

- Siefore Básica 0 y Siefore Básica 1: Para trabajadores de 60 años y más.
- Siefore Básica 2: Para trabajadores entre 46 y 59 años.
- Siefore Básica 3: Para trabajadores entre 37 y 45 años.
- Siefore Básica 4: Para trabajadores de 36 años y menores.

Las reglas de inversión de cada SIEFORE cambian conforme los trabajadores se encuentren más cerca del retiro: entre más jóvenes mayor exposición a instrumentos de inversión de largo plazo con mayor rendimiento y a su vez mayor grado de riesgo, mientras que para personas más cercanas al retiro, los recursos serán invertidos en modalidades de corto plazo, con un menor nivel de riesgo y por ende menor rendimiento.

De manera automática, se asignará cada trabajador a la SIEFORE que le corresponda de acuerdo a su edad, sin embargo, se puede solicitar el cambio a la SIEFORE que se desee cada 3 años.

### **1.3. Aspectos generales de las AFORE**

De acuerdo a cifras de la CONSAR, hasta marzo de 2017, existen 11 Afores, que en total administran 57.4 millones de cuentas individuales. Mientras que, al cierre de 2016, se contaba con una cartera total de 2,754,092 millones de pesos.

Cuando una persona ingresa a trabajar de manera formal, tiene la opción de elegir la AFORE que crea conveniente para comenzar a ahorrar para el retiro, sin embargo, por desconocimiento o desinterés no ocurre de esa manera con algunas personas.

Por ello, la CONSAR, desde hace algunos años, lleva a cabo un proceso de Asignación y reasignación de cuentas, en el cual, de manera general, asigna todas aquellas cuentas individuales de trabajadores que no eligieron AFORE a las administradoras de mejor rendimiento neto, esto con el fin de que

los recursos de los trabajadores no se vean afectados de manera importante.<sup>3</sup>

Por otra parte, si el trabajador conoce en qué AFORE se encuentra pero desea pertenecer a otra por algún motivo, puede solicitar el cambio una vez al año, o máximo dos veces por año siempre que el cambio sea a una AFORE que de manera consistente y a lo largo del tiempo haya mostrado rendimientos mayores.<sup>4</sup>

Si por alguna razón el trabajador deja de laborar y cuenta con AFORE, sus recursos permanecen en la cuenta individual, continuarán generando rendimientos y nadie puede hacer uso de ellos.

Uno de los beneficios de contar con AFORE son las modalidades de retiro que se pueden realizar adicionales a los que por ley el trabajador obtiene al momento de pensionarse cuando cumple los requisitos.

#### 1. Retiros parciales.

##### a) Retiro por desempleo

El retiro por desempleo es aplicable a partir del día 46 de inactividad laboral, se requiere tener al menos 3 años de estar registrado en una AFORE y tener 2 años o más cotizados ante el IMSS. Este tipo de retiro se puede realizar cada 5 años y se debe de tomar en cuenta que se descontarán semanas cotizadas<sup>5</sup>, lo que podría afectar la pensión futura.

##### b) Retiro por matrimonio

Se puede realizar solamente una vez, se requiere tener un mínimo de 150 semanas cotizadas y estar vigente como asegurado. En este caso, no se descuentan semanas cotizadas, pero se reduce el total de recursos acumulados.<sup>6</sup>

---

<sup>3</sup>Para obtener más información al respecto, visite <https://www.gob.mx/consar/articulos/asignar-y-reasignar-cuentas-que-gana-el-trabajador-una-evaluacion-sobre-el-mecanismo-de-asignacion-y-reasignacion-de-cuentas?idiom=es>

<sup>4</sup>Para solicitar el segundo cambio de AFORE, el trabajador deberá esperar por lo menos un año para realizar otro.

<sup>5</sup>Si se reintegran los recursos retirados, se recuperarán las semanas cotizadas.

<sup>6</sup>Para obtener la información completa, visite <http://www.gob.mx/consar/articulos/retiros-parciales-97089?state=draft>

## 2. Retiro por beneficiarios

El retiro por beneficiarios ocurre en caso de que el trabajador titular de la cuenta AFORE fallezca. Los recursos de la cuenta se heredarán a los beneficiarios legales (viuda o viudo, hijos menores de 16 años, o mayores de 16 que continúen estudiando hasta los 25 años y que no estén casados, los padres, o concubina o concubino), o, a falta de éstos, los beneficiarios sustitutos, que será la ley quien se encargue de nombrarlos.<sup>7</sup>

## 3. Retiros por Ahorro Voluntario

Se trata de la modalidad que permite retirar los recursos de la subcuenta de Ahorro Voluntario.

## 4. Retiros totales

Al final de la vida laboral, el trabajador podrá retirarse por Cesantía en edad avanzada o Vejez. Existirá pensión por Cesantía en edad avanzada a partir de los 60 años y hasta los 64, mientras que de los 65 años en adelante se otorgará pensión por Vejez. Para ambas pensiones se requiere tener un mínimo de 1250 semanas cotizadas ante el IMSS.

Bajo el régimen actual, existen 2 modalidades para pensionarse; por Renta Vitalicia o Retiro Programado. Cabe aclarar que la pensión otorgada depende exclusivamente de los recursos acumulados en la cuenta AFORE.

### a) Renta Vitalicia

Se trata de una pensión de por vida que se contrata con una Aseguradora, el monto mensual de la pensión dependerá del saldo acumulado en la cuenta del trabajador, que se actualizará anualmente de acuerdo al INPC. Sin embargo, se debe adquirir el Seguro de Supervivencia, que permitirá a los beneficiarios del trabajador obtener una pensión en caso de fallecimiento.

### b) Retiro Programado

En este caso, el pensionado mantiene la propiedad de sus recursos a través de la AFORE, pues continuarán invertidos en ella y será ésta la que se encargue de pagar la pensión al trabajador.

Se debe de adquirir el Seguro de Supervivencia, y el monto de la pensión dependerá del saldo acumulado en la cuenta, de los rendimientos que se obtengan y de la esperanza de vida calculada para el ahorrador.

---

<sup>7</sup>Consulte la información completa en <https://www.gob.mx/consar/articulos/retiro-por-beneficiarios-imss?state=draft>

Cabe hacer notar que en este caso, lo ahorrado en la cuenta individual del trabajador se le entregará en forma fraccionada, mes a mes, y será otorgada hasta que se agoten los recursos en la cuenta AFORE, por lo que si el pensionado vive más años que los calculados en la esperanza de vida, no habrá más recursos para otorgarle.

En caso de que el trabajador cumpla con los requisitos de ley pero los recursos de su cuenta AFORE no sean suficientes para contratar una Renta Vitalicia o efectuar el Retiro Programado, se otorgará la Pensión Mínima Garantizada (PMG), que corresponde a un salario mínimo actualizado con la inflación cada año.

Por otra parte, si el trabajador no cumple con el requisito mínimo de semanas cotizadas, se le otorgará resolución de Negativa de Pensión, con lo cual podrá retirar los recursos acumulados en su cuenta en una sola exhibición.

El trabajador podrá tener conocimiento en todo momento de los movimientos en su cuenta, pues la AFORE tiene la obligación, entre otros, de enviar un estado de cuenta cuando menos tres veces al año al domicilio que el trabajador indique.



## Capítulo 2

# Análisis de Series de Tiempo

En la práctica, los pronósticos de determinados indicadores representan una parte importante para algunas personas. Pronosticar variables económicas como el PIB, inflación, tasas de interés, entre otras, es fundamental para la toma de decisiones. Sin embargo, trabajar con series de tiempo no es una tarea sencilla; debe cumplir ciertos requisitos para ser modelada y en función de ello obtener valores para periodos futuros.

### 2.1. Conceptos fundamentales

Para comprender el análisis de series de tiempo, es necesario conocer algunos términos primordiales.<sup>1</sup>

#### 2.1.1. Procesos estocásticos

**Definición 2.1.** *Un proceso estocástico es una sucesión de variables aleatorias  $\{y_t\}$ ,  $-\infty < t < \infty$ .*

Es decir, un proceso estocástico o aleatorio es una colección de variables aleatorias ordenadas en el tiempo. Aunque el subíndice  $t$  a priori no tiene una interpretación concreta, se utiliza este concepto con la intención de identificar el periodo al que corresponde la variable aleatoria  $y_t$ .

La definición anterior es muy general, pues cada una de las variables aleatorias  $y_t$  no precisa satisfacer ninguna propiedad. Cada  $y_t$  tendrá su

---

<sup>1</sup>La intención de este capítulo es dar una idea del análisis de series de tiempo, lo expuesto aquí no es absoluto, pues para ello existe literatura especializada.

propia función de distribución con sus correspondientes momentos, del mismo modo que cada par de esas variables tendrá su correspondiente función de distribución conjunta y sus funciones de distribución marginales. Lo mismo ocurrirá para conjuntos cada vez más grandes de esas variables aleatorias.

Con lo cual, de acuerdo a las propiedades que satisfagan las variables  $y_t$  se tendrá un proceso estocástico de uno u otro tipo.

### Procesos estocásticos estacionarios

**Definición 2.2.** *Un proceso estocástico  $\{y_t\}$  es estacionario en sentido estricto si para toda  $m$ -tupla  $\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$  y todo entero  $k$ , el vector de variables  $\{y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_m}\}$  tiene la misma distribución de probabilidad conjunta que el vector  $\{y_{t_1+k}, y_{t_2+k}, \dots, y_{t_m+k}\}$ .*

En otras palabras, un proceso estocástico es estacionario si las funciones de distribución conjuntas son invariantes con respecto a un desplazamiento en el tiempo. Es decir, si  $t, t+1, \dots, t+k$  representan periodos sucesivos,  $F(Y_t, Y_{t+1}, \dots, Y_{t+k}) = F(Y_{t+m}, Y_{t+1+m}, \dots, Y_{t+k+m})$  para cualquier  $t, k$  y  $m$ .

Lo anterior se conoce como estacionariedad en sentido estricto o fuerte, sin embargo, este tipo de proceso implica el cumplimiento de un número excesivo de condiciones, pues para fines prácticos, funciona de buena manera el proceso estocástico débilmente estacionario.

**Definición 2.3.** *Un proceso estocástico  $\{y_t\}$  es débilmente estacionario si se cumple lo siguiente:*

- $E[Y_t] = E[Y_{t+m}], \forall m.$
- $Var[Y_t] = Var[Y_{t+m}], \forall m.$
- $Cov[Y_t, Y_s] = Cov[Y_{t+m}, Y_{s+m}], \forall m.$

Es decir, un proceso estocástico es débilmente estacionario si su media y su varianza son constantes en el tiempo, y si el valor de la covarianza entre dos periodos depende sólo de la distancia o rezago entre estos dos periodos y no del tiempo en el cual se calculó la covarianza.

La importancia de trabajar con una serie de tiempo estacionaria radica en que ésta tenderá a regresar a su media (llamada reversión media) y las fluctuaciones alrededor de esta media (medida por su varianza) tendrán una

amplitud constante en términos generales. Se debe señalar que la velocidad de la reversión media depende de las autocovarianzas: será rápida si las autocovarianzas son pequeñas y lenta cuando sean grandes.

### Proceso puramente aleatorio

**Definición 2.4.** *Se dice que un proceso estocástico es puramente aleatorio o de ruido blanco si tiene media igual a cero, varianza constante, y no está serialmente correlacionado.*<sup>2</sup>

En la Figura 2.1 se muestra un proceso gaussiano de ruido blanco, el cual se caracteriza por ser independiente e idénticamente distribuido como una distribución normal con media cero y varianza  $\sigma^2$ .

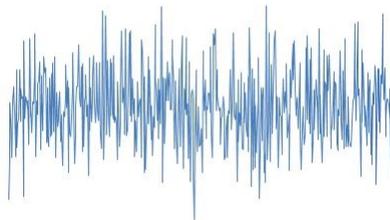


Figura 2.1: Proceso gaussiano de ruido blanco:  $\mu=0$  y  $\sigma^2=1$ .

### Procesos estocásticos no estacionarios

Aunque el interés es trabajar con series de tiempo estacionarias, comúnmente las series de tiempo son no estacionarias<sup>3</sup>, un ejemplo de ello es el modelo de caminata aleatoria (MCA).

Existen dos tipos de caminatas aleatorias: 1) caminata aleatoria sin deriva (sin término constante o de intercepto), y 2) caminata aleatoria con deriva (existe término constante).

---

<sup>2</sup>Si también es independiente, tal proceso se conoce como estrictamente de ruido blanco.

<sup>3</sup>Si una serie de tiempo no es estacionaria en el sentido antes definido, se denomina serie de tiempo no estacionaria.

## 1. Caminata aleatoria sin deriva.

Suponga que  $u_t$  es un término de error de ruido blanco con media 0 y varianza  $\sigma^2$ . Se dice que la serie  $Y_t$  es una caminata aleatoria si

$$Y_t = Y_{t-1} + u_t.$$

Como se observa, el valor de  $Y$  en el tiempo  $t$  es igual a su valor en el tiempo  $t - 1$  más un choque aleatorio.

Si se inicia con  $Y_0$  en el tiempo cero, se puede escribir

$$Y_1 = Y_0 + u_1$$

$$Y_2 = Y_1 + u_2 = Y_0 + u_1 + u_2$$

$$Y_3 = Y_2 + u_3 = Y_0 + u_1 + u_2 + u_3.$$

De manera general,  $Y_t = Y_0 + \sum u_t$ .

Una característica importante del MCA es la persistencia de los choques aleatorios, como es evidente en la última igualdad:  $Y_t$  es la suma de  $Y_0$  más la suma de los choques aleatorios, por lo cual se dice que la caminata aleatoria tiene memoria infinita. La suma  $\sum u_t$  se conoce como tendencia estocástica.

Se puede demostrar que  $E(Y_t) = Y_0$  y  $Var(Y_t) = t\sigma^2$ , es decir, mientras que la media permanece constante a lo largo del tiempo, la varianza va incrementando conforme  $t$  lo hace, por lo que el modelo de caminata aleatoria sin deriva es un proceso estocástico no estacionario.

Por otro lado, si se expresa el MCA sin deriva como

$$Y_t - Y_{t-1} = u_t = \Delta Y_t,$$

donde  $\Delta$  representa el operador de primeras diferencias, resulta que mientras  $Y_t$  es no estacionaria, sí lo es la serie en primeras diferencias.

## 2. Caminata aleatoria con deriva

Si se escribe

$$Y_t = \delta + Y_{t-1} + u_t,$$

se tiene el modelo de caminata aleatoria con deriva, donde  $\delta$  es el parámetro de deriva.

En este caso,  $E(Y_t) = Y_0 + t\delta$  y  $Var(Y_t) = t\sigma^2$ , con lo cual se concluye que el MCA con deriva es también un proceso estocástico no estacionario.

### 2.1.2. Procesos estocásticos estacionarios en tendencia (ET) y estacionarios en diferencias (ED)

La distinción entre procesos estocásticos estacionarios y no estacionarios es de suma importancia para saber si una serie de tiempo presenta tendencia determinista o estocástica. De manera general, una serie de tiempo presentará tendencia determinista si dicha tendencia es predecible y no variable, mientras que presentará tendencia estocástica si ésta no es predecible.

Considere el siguiente modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 Y_{t-1} + u_t,$$

donde  $u_t$  es un término de error de ruido blanco y  $t$  es el tiempo medido cronológicamente.

Si en el modelo  $\beta_1=0$ ,  $\beta_2=0$  y  $\beta_3=1$ , se obtiene  $Y_t = Y_{t-1} + u_t$ , que como se sabe es un MCA sin deriva, por lo tanto es no estacionario.

Como se observó antes, tal modelo es estacionario en primeras diferencias, por lo cual se dice que un MCA sin deriva es un proceso estacionario en diferencias (PED).

Por otra parte, si en el modelo inicial se toma  $\beta_1 \neq 0$ ,  $\beta_2 \neq 0$  y  $\beta_3 = 0$ , se obtiene:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + u_t.$$

La media de  $Y_t$  es  $\beta_1 + \beta_2 t$  no constante, mientras que la varianza sí lo es. Una vez que se conocen los valores para  $\beta_1$  y  $\beta_2$ , se puede pronosticar la media. Luego, si se resta la media de  $Y_t$  de  $Y_t$ , la serie resultará ser estacionaria, por lo cual se dice que es un proceso estacionario en tendencia, pues ésta se *elimina* del modelo.

### 2.1.3. Procesos estocásticos integrados

El modelo de caminata aleatoria es un caso específico de una clase más general de procesos estocásticos conocidos como procesos integrados.

Como ya se ha observado, el MCA sin deriva es un proceso no estacionario, pero la serie en primeras diferencias es estacionaria. Así, se dice que el MCA sin deriva es un proceso integrado de orden 1, y se denota por  $I(1)$ . Si una serie de tiempo se tiene que diferenciar dos veces para hacerla estacionaria, se dirá que tal serie es integrada de orden 2. De este modo, si una serie de tiempo  $Y_t$  debe diferenciarse  $d$  veces para hacerla estacionaria, se dice que la serie  $Y_t$  es integrada de orden  $d$ , y se denota por  $Y_t \sim I(d)$ .

Por otro lado, si la serie de tiempo es estacionaria desde el comienzo, se dice que la serie es integrada de orden 0, y se denota por  $Y_t \sim I(0)$ . Por tanto, los términos serie de tiempo estacionaria y serie de tiempo integrada de orden cero darán a entender el mismo concepto.

#### 2.1.4. Proceso estocástico de raíz unitaria

Considere el siguiente modelo:

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + u_t, -1 \leq \rho \leq 1.$$

Si  $\rho = 1$ , el modelo se convierte en un MCA sin deriva, con lo cual se tiene lo que se conoce como problema de raíz unitaria, es decir, se enfrenta el problema de no estacionariedad.

El nombre de raíz unitaria se debe a que  $\rho = 1$ . Por lo tanto, los términos no estacionariedad, caminata aleatoria y raíz unitaria se consideran sinónimos.

## 2.2. Pruebas de estacionariedad

En la práctica, existen muchas pruebas para la estacionariedad de una serie de tiempo, sin embargo, aquí se mostrarán solamente dos: 1) el análisis gráfico y 2) la prueba del correlograma.

### 1. Análisis gráfico.

Antes de efectuar una prueba formal, se aconseja graficar la serie de tiempo en estudio, pues ello ayudará de manera intuitiva a detectar algunas características de la serie. Por ejemplo, se puede observar una tendencia ascendente o descendente, lo que indicaría que quizá la media esté variando a lo largo del tiempo.

## 2. Función de autocorrelación (FAC) y correlograma.

Una prueba sencilla de estacionariedad se basa en la denominada función de autocorrelación (FAC). La FAC en el rezago  $k$ , denotada por  $\rho_k$ , se define como

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

$$= \frac{\text{covarianza en el rezago } k}{\text{varianza}}$$

La gráfica de  $\rho_k$  respecto de  $k$  se llama correlograma poblacional.<sup>4</sup>

Sin embargo, debido a que en la práctica se tiene una muestra de la serie de tiempo, sólo se puede calcular la función de autocorrelación muestral,  $\hat{\rho}_k$ , la cual está en función de la covarianza muestral en el rezago  $k$ ,  $\hat{\gamma}_k$ , y la varianza muestral  $\hat{\gamma}_0$ .

De este modo,

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0},$$

donde

$$\hat{\gamma}_k = \frac{\sum (Y_t - \bar{Y})(Y_{t+k} - \bar{Y})}{n - k}$$

y

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{\sum (Y_t - \bar{Y})^2}{n - 1},$$

con  $n$  el tamaño de la muestra y  $\bar{Y}$  la media muestral.

Al gráfico de  $\hat{\rho}_k$  respecto de  $k$  se le llama correlograma muestral.

Una vez obtenido el correlograma, se procede a observar la función de autocorrelación; si los valores de ésta se encuentran alrededor del cero, se puede decir que la serie de tiempo quizá es estacionaria, mientras que si los valores de la función de autocorrelación son muy altos y disminuyen de manera muy lenta hacia cero, se podría tratar de una serie de tiempo no

<sup>4</sup>Al igual que cualquier coeficiente de correlación,  $\rho_k$  se encuentra entre -1 y 1.

estacionaria.

En la Figura 2.2, se muestra el correlograma hasta el rezago 13 para un proceso de ruido blanco (estacionario) y un MCA (no estacionario). La línea central de cada gráfica representa al eje cero; las observaciones por encima de este son valores positivos, y los valores que se encuentran por debajo, son negativos.

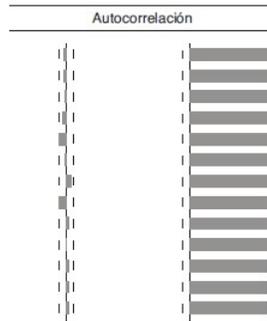


Figura 2.2: Correlograma para un proceso de ruido blanco (izquierda) y un MCA (derecha).

## 2.3. Pronósticos

El pronóstico de una serie de tiempo significa que los valores históricos se extienden hacia el futuro, en donde aún no se han hecho mediciones. Para ello, es necesario definir un periodo (mensual, trimestral, semestral, etc.) y un horizonte (1 año, 5 años, 10 años, etc.), valores que serán determinantes para el análisis y la posterior toma de decisiones.

### 2.3.1. Enfoques de los pronósticos económicos

De manera general, existen 5 enfoques para pronósticos económicos basados en series de tiempo:

1. Métodos de suavizamiento exponencial
2. Modelos de regresión uniecuacionales
3. Modelos de regresión de ecuaciones simultáneas
4. Modelos autorregresivos integrados de promedios móviles (ARIMA)

## 5. Modelos de vectores autorregresivos

En este caso, la atención se centrará en la metodología popularmente llamada Box-Jenkins (BJ), pero técnicamente conocida como metodología ARIMA. El interés de este método es analizar las propiedades probabilísticas o estocásticas de las serie de tiempo para que, de manera técnica, los datos *hablen* por sí mismos. En los modelos de series de tiempo del tipo BJ,  $Y_t$  se explica por valores rezagados de sí misma y por términos de error estocásticos.

### 2.3.2. Creación de modelos ARIMA

Para la presentación de los modelos autorregresivos integrados de promedios móviles, se necesitará primero mostrar dos clases de modelos que le integran, en conjunto con un concepto definido anteriormente, y a los cuales les debe el nombre.

#### Proceso autorregresivo (AR)

Un proceso autorregresivo para una serie temporal será caracterizado por observaciones de ella misma correspondientes a periodos pasados añadiéndose un término de error.

**Definición 2.5.** *Sea la serie de tiempo  $Y_t$ , si se modela como*

$$(Y_t - \delta) = \alpha_1(Y_{t-1} - \delta) + u_t,$$

*donde  $\delta$  es la media de  $Y$  y  $u_t$  es un término de error aleatorio no correlacionado con media cero y varianza constante  $\sigma^2$ , se dice que  $Y_t$  sigue un proceso estocástico autorregresivo de primer orden o  $AR(1)$ .*

Como puede observarse, el valor de  $Y$  en el tiempo  $t$  depende de su valor en el periodo anterior más un choque aleatorio; expresando los valores de  $Y$  como desviaciones de su valor medio. Es decir, este modelo muestra que el valor de pronóstico de  $Y$  en el periodo  $t$  es alguna proporción ( $=\alpha_1$ ) de su valor en el periodo  $(t-1)$  más un término aleatorio o perturbación en el tiempo  $t$ ; nuevamente, los valores de  $Y$  están expresados alrededor del valor de su media.

Si se considera el siguiente modelo:

$$(Y_t - \delta) = \alpha_1(Y_{t-1} - \delta) + \alpha_2(Y_{t-2} - \delta) + u_t$$

se dice que  $Y_t$  sigue un proceso autorregresivo de segundo orden o AR(2).

Es decir, el valor de  $Y$  en el tiempo  $t$  depende de sus valores en los dos periodos anteriores; nuevamente, los valores de  $Y$  están expresados alrededor del valor de su media  $\delta$ .

De manera general,

$$(Y_t - \delta) = \alpha_1(Y_{t-1} - \delta) + \alpha_2(Y_{t-2} - \delta) + \dots + \alpha_p(Y_{t-p} - \delta) + u_t$$

será un proceso autorregresivo de orden  $p$  o AR( $p$ ).

### Procesos de medias móviles (MA)

Un modelo de medias móviles estará expresado en función de un término independiente y una sucesión de errores correspondientes a periodos anteriores ponderados convenientemente.<sup>5</sup>

**Definición 2.6.** *Suponga que la serie de tiempo  $Y$  en el tiempo  $t$  es generada por el siguiente modelo:*

$$Y_t = \mu + \beta_0 u_t + \beta_1 u_{t-1},$$

donde  $\mu$  es una constante y  $u$  es el término de error estocástico de ruido blanco. Se dice entonces que  $Y$  sigue un proceso de promedios móviles de primer orden, o MA(1).

En este caso,  $Y$  en el periodo  $t$  es igual a una constante más un promedio móvil de los términos de error presente y pasado.

Si  $Y$  se expresa por:

$$Y_t = \mu + \beta_0 u_t + \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2}$$

se dice que sigue un proceso de promedios móviles de segundo orden, o MA(2).

---

<sup>5</sup>Se puede observar también como combinación lineal de términos de error de ruido blanco.

De forma general, si  $Y$  se expresa como:

$$Y_t = \mu + \beta_0 u_t + \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2} + \dots + \beta_q u_{t-q}$$

se dirá que es un proceso de promedios móviles de orden  $q$ , o  $MA(q)$ .

### Proceso autorregresivo y de promedios móviles (ARMA)

Hasta ahora, se han considerado dos modelos que pueden explicar la estructura de una serie de tiempo. Sin embargo, puede ocurrir que un proceso estocástico presente características autorregresivas y de promedios móviles.

**Definición 2.7.** *Considere el siguiente modelo:*

$$Y_t = \theta + \alpha_1 Y_{t-1} + \beta_0 u_t + \beta_1 u_{t-1}.$$

*El proceso anterior se conoce como ARMA(1, 1), pues existe un término autorregresivo y uno de promedios móviles.  $\theta$  representa un término constante.*

En general, un proceso ARMA( $p, q$ ) mostrará  $p$  términos autorregresivos y  $q$  términos de promedios móviles.

### Proceso autorregresivo integrado de promedios móviles (ARIMA)

Los modelos de series de tiempo mencionados anteriormente parten del supuesto de que las series de tiempo consideradas cumplen con el requisito de estacionariedad, al menos en el sentido débil; sin embargo, en la práctica, la mayoría de las series de tiempo económicas son no estacionarias, es decir, integradas<sup>6</sup>.

Recordar que si una serie de tiempo es estacionaria en primeras diferencias, se denotará por  $I(1)$ , si es estacionaria en segundas diferencias, será  $I(2)$ , y de manera general,  $I(d)$  si después de diferenciarla  $d$  veces se obtiene una serie estacionaria ( $I(0)$ ).

**Definición 2.8.** *Si debe diferenciarse  $d$  veces una serie de tiempo para hacerla estacionaria y luego aplicarle el modelo ARMA( $p, q$ ), se dice que la serie de tiempo original es ARIMA( $p, d, q$ ), es decir, una serie de tiempo autorregresiva integrada de promedios móviles, donde  $p$  denota el número*

<sup>6</sup>En el sentido antes definido.

de términos autorregresivos,  $d$  el número de veces que la serie debe diferenciarse para hacerla estacionaria, y  $q$  el número de términos de promedios móviles.

Así, una serie de tiempo ARIMA(2, 1, 2) tiene que diferenciarse una vez ( $d = 1$ ) antes de que se haga estacionaria, y la serie de tiempo estacionaria (en primeras diferencias) puede modelarse como un proceso ARMA(2, 2), es decir, tiene dos términos AR y dos términos MA.

Por otro lado, si  $d = 0$  (es decir, la serie de tiempo es estacionaria desde el principio), ARIMA( $p, d = 0, q$ ) = ARMA( $p, q$ ). Observe que un proceso ARIMA( $p, 0, 0$ ) significa un proceso estacionario AR( $p$ ) puro, y un ARMA(0, 0,  $q$ ) significa un proceso estacionario MA( $q$ ) puro. En otras palabras, con los valores  $p, d$  y  $q$ , se puede saber de qué proceso se está haciendo el modelo.

## 2.4. Metodología Box-Jenkins (BJ)

Cuando se trabaja con una serie de tiempo, el interés radica en conocer el proceso que sigue, ya sea un proceso AR, un proceso MA, un proceso ARMA o un proceso ARIMA. Naturalmente, es de suma importancia conocer la cantidad de términos involucrados en cada uno de los procesos anteriores.

La metodología Box-Jenkins es útil para el problema en cuestión. Dicha metodología consta de cuatro pasos:

1. Identificación. Se trata de identificar los valores de  $p, d$  y  $q$  en los procesos mostrados antes. El *correlograma* y *correlograma parcial* ayudarán en esta tarea.
2. Estimación. Una vez identificados los valores de  $p$  y  $q$ , es necesario estimar los parámetros de los términos autorregresivos y de promedios móviles. Algunas veces, tales estimaciones se llevan a cabo por medio de mínimos cuadrados simples a través de estimaciones no lineales. Actualmente, diversos paquetes estadísticos llevan a cabo esta labor de manera eficiente.
3. Examen de diagnóstico. En este punto de la metodología, se somete a evaluación el proceso que se eligió previamente para la serie de tiempo. Se trata de observar si el modelo seleccionado se ajusta de manera adecuada a los datos, pues puede existir otro modelo que también lo haga. Una prueba simple del modelo seleccionado es ver si los residuos estimados a

partir de este modelo son de ruido blanco; si lo son, se acepta el ajuste particular, si no, se debe comenzar de nuevo.

4. Pronóstico. Finalmente, se puede llevar a cabo el pronóstico de la serie de tiempo. Una razón para utilizar la metodología BJ es que a menudo, los pronósticos a través de este método son más confiables que otros, en particular para el corto plazo.

### 2.4.1. Identificación

Anteriormente, se definió la función de autocorrelación (FAC) poblacional  $\rho_k$ , pero debido a que en la práctica sólo se tiene una muestra de la serie de tiempo, se tomó en cuenta la función de autocorrelación muestral  $\hat{\rho}_k$ .

En adición a la función anterior, la función de autocorrelación parcial (FACP) y los correlogramas resultantes son herramientas que ayudarán en la identificación de los valores  $p$ ,  $d$  y  $q$  del primer paso de la metodología BJ.

La función de autocorrelación parcial  $\rho_{kk}$  mide la correlación entre observaciones separadas  $k$  periodos mientras mantiene constante las correlaciones en los rezagos intermedios. En otras palabras, la autocorrelación parcial es la correlación entre  $Y_t$  y  $Y_{t-k}$  después de eliminar el efecto de las  $Y$  intermedias. Por otro lado, los correlogramas resultantes son la representación gráfica de FAC y FACP respecto a la longitud del rezago.

Para observar lo anterior y como ejemplo de la metodología BJ<sup>7</sup>, considere la Figura 2.3. En ella, se observa el correlograma y el correlograma parcial de la serie de tiempo Logaritmo del PIB de Estados Unidos (LPIB) del primer trimestre de 1947 al cuarto trimestre de 2007. La FAC decrece muy lentamente y hasta el rezago 23 es estadísticamente diferente de cero<sup>8</sup>, mientras que, después del primer rezago, la FACP decrece de forma considerable, y todas las FACP después del primer rezago son estadísticamente no significativas, salvo quizá por el rezago 13.

Como parecían indicar tales correlogramas, la serie de tiempo LPIB resultó no ser estacionaria, por lo que para aplicar la metodología BJ se debe

<sup>7</sup>Ejemplo tomado de Damodar N. Gujarati, D. C., *Econometría*, (Quinta ed.), 2010, p. 778.

<sup>8</sup>La zona en color gris representa el área al 95% de confianza.

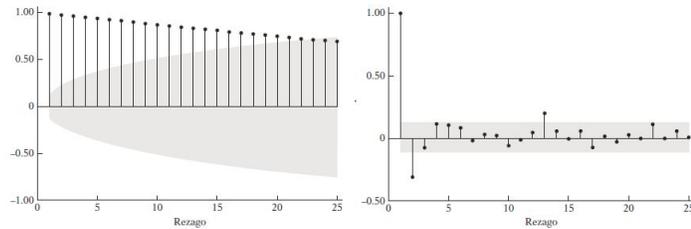


Figura 2.3: FAC y FACP para la serie de tiempo LPIB.

transformar primero en estacionaria. Se tomarón primeras diferencias de la serie LPIB y a través de pruebas formales se comprobó que la serie resultó estacionaria, lo cual se observa también en los correlogramas FAC y FACP de la Figura 2.4.

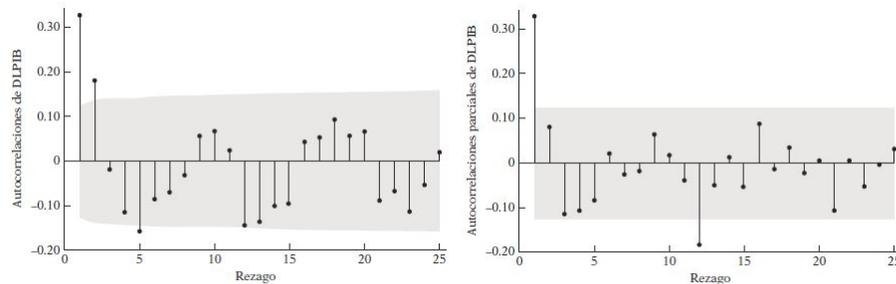


Figura 2.4: FAC y FACP para la serie de tiempo LPIB en primeras diferencias.

Las FACs en los rezagos 1, 2 y 5 son estadísticamente diferentes de cero, pero en todos los demás rezagos no son estadísticamente diferentes de cero. Para las autocorrelaciones parciales, sólo los rezagos 1 y 12 son estadísticamente diferentes de cero.

Una forma de hallar el patrón ARMA de una serie de tiempo estacionaria, es considerar la FAC, FACP y los correlogramas de un número determinado de procesos ARMA, como AR(1), AR(2), MA(1), MA(2), ARMA(1, 1), ARMA(2, 2), etcétera. Como cada proceso estocástico presenta patrones habituales de FAC y de FACP, si la serie de tiempo en estudio se ajusta a alguno de ellos, se puede identificar con tal proceso. Por supuesto, debe aplicarse una prueba de diagnóstico para determinar si el modelo seleccionado es adecuado.

De forma general, se presenta el Cuadro 2.1 con el objetivo de ayudar a identificar los distintos procesos, aunque se debe advertir que debido a que en la práctica sólo se tiene una muestra de la serie de tiempo, las FAC y FACP estimadas no concordarán exactamente con sus contrapartes teóricas. Afortunadamente, los paquetes estadísticos facilitan la labor de identificación de modelo.

| Tipo de modelo | Patrón típico de FAC                      | Patrón típico de FACP                     |
|----------------|---|---|
| AR( $p$ )      | Decrece rápidamente sin llegar a anularse | Se anula para rezagos superiores a $p$    |
| MA( $q$ )      | Se anula para rezagos superiores a $q$    | Decrece rápidamente sin llegar a anularse |
| ARMA( $p, q$ ) | Decrece rápidamente sin llegar a anularse | Decrece rápidamente sin llegar a anularse |

Cuadro 2.1: Patrones teóricos de FAC y FACP.

Como se puede notar, las FAC y FACP de los procesos AR( $p$ ) y MA( $q$ ) tienen patrones opuestos: para un proceso AR( $p$ ) la FAC decrece geométrica o exponencialmente y la FACP se corta después de cierto número de rezagos, mientras que ocurre lo opuesto para un proceso MA( $q$ ).

Continuando con el ejemplo del PIB de Estados Unidos, se optó por un proceso MA(2) después de observar los correlogramas, aunque elegir un modelo sin un proceso de ensayo y error es complicado.

#### 2.4.2. Estimación del modelo ARIMA

De acuerdo con lo descrito hasta ahora, la elección del proceso MA(2) significa que la serie de tiempo en primeras diferencias LPIB se puede ajustar a través del siguiente modelo:

$$Y_t^* = \mu + \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2},$$

obteniendo  $\mu = 0.00822$ ,  $\beta_1 = 0.2918$  y  $\beta_2 = 0.2020$ .

#### 2.4.3. Verificación de diagnóstico

Una vez elegido el modelo de ajuste de los datos, se pueden obtener los residuos de éste y observar los correlogramas de FAC y FACP. Si los co-

rreogramas dan la impresión de que los residuos estimados son puramente aleatorios, quizá no será necesario buscar otro modelo ARIMA.

Para el ejemplo, la Figura 2.5 muestra los correlogramas para la FAC y FACP de los residuos del modelo MA(2) elegido previamente. Como se observa, ninguna de las autocorrelaciones y autocorrelaciones parciales es estadísticamente significativa, por lo cual, el modelo MA(2) luce apropiado.

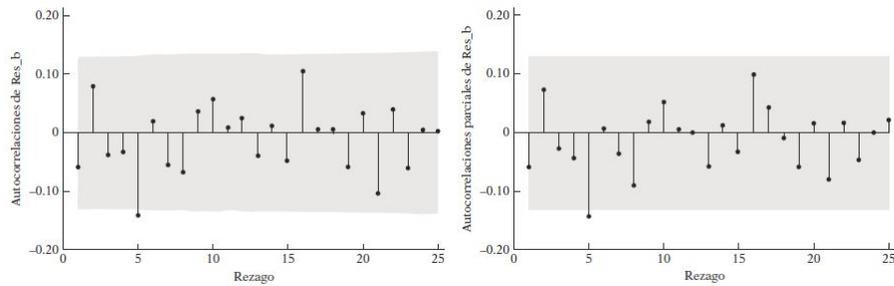


Figura 2.5: FAC y FACP para los residuos del modelo MA(2) de la serie de tiempo LPIB en primeras diferencias.

#### 2.4.4. Pronóstico

Finalmente, una vez que se obtuvo el modelo para ajustar los datos, y se han estimado los parámetros, en sencillo obtener el pronóstico para el periodo deseado, aunque se habrá de tomar en cuenta algunas cuestiones.

En el ejemplo del PIB de Estados Unidos del primer trimestre de 1947 al cuarto trimestre de 2007, para la elección del modelo, previamente se debió volver estacionaria la serie de tiempo a través de primeras diferencias. Sucede entonces que el modelo MA(2) en realidad se ajusta al cambio en el LPIB en el trimestre anterior; por lo cual, si se desea obtener el pronóstico para el primer trimestre del año 2008, se deberá *deshacer* la transformación en primeras diferencias.

De este modo, de acuerdo al modelo elegido, se tiene lo siguiente:

$$Y_{2008-I} - Y_{2007-IV} = \mu + \beta_1 u_{2007-IV} + \beta_2 u_{2007-III} + u_{2008-I}$$

Es decir, para el primer trimestre de 2008 se tendría lo siguiente:

$$Y_{2008-I} = \mu + \beta_1 u_{2007-IV} + \beta_2 u_{2007-III} + u_{2008-I} + Y_{2007-IV}$$

Con los parámetros estimados anteriormente y la información del PIB para los correspondientes periodos, se tiene que  $Y_{2008-I} = 9.3741$ .<sup>9</sup>

## 2.5. Modelos ARCH y GARCH

Hasta aquí, se ha estudiado la metodología Box-Jenkins, en donde se trabaja bajo el supuesto de estacionariedad, al menos en el sentido débil, el cual involucra varianza constante en el tiempo.

No obstante, una de las características de las series de tiempo financieras es presentar amplias variaciones durante periodos prolongados para después retomar intervalos de calma relativa, lo que indica que la varianza de las series de tiempo de este tipo se ve modificada. Por ejemplo, en el mercado de valores, cualquier tipo de información puede afectar el precio de algún activo, por lo que se dice entonces que el comportamiento de este tipo de variables en el momento actual responde a una expectativa generada sobre el valor del bien producida anteriormente.

Por ello, los modelos de series de tiempo tradicionales que suponen varianza homocedástica no son siempre adecuados para modelar dichas series de tiempo financieras.

El modelo de heteroscedasticidad condicional autorregresivo (ARCH) desarrollado por Robert F. Engle, considera que la varianza desigual puede tener una estructura autorregresiva en la que la heteroscedasticidad observada a lo largo de diferentes periodos quizá esté autocorrelacionada. La forma de medir la volatilidad en este modelo es a través del cuadrado de las perturbaciones anteriores, por lo que su valor será alto en periodos en que se observen grandes cambios en los precios de los bienes, y relativamente pequeño cuando sucedan cambios modestos en los precios de dichos bienes.

---

<sup>9</sup>Recordar que se trabajó con el logaritmo del PIB (LPIB), por lo cual la estimación real aproximada correspondiente al PIB para I-2008 es  $\text{Exp}(9.3741)$ .

Por lo tanto, la varianza condicionada a la información pasada no es constante, y depende del cuadrado de las perturbaciones, es decir, un valor esperado condicionado por la varianza del periodo anterior.

### Modelos ARCH

Sea la variable aleatoria  $y_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, n$ , con función de densidad condicional  $f(y_t|\psi_{t-1})$ , el pronóstico del valor actual de la variable condicionado a la información pasada  $\psi_{t-1}$  es  $\mu_t = E(y_t|\psi_{t-1})$ . La media puede modelarse, por ejemplo, a través del modelo  $\mu_t = x_t\beta'$ , donde  $x_t = (1, x_{t1}, \dots, x_{tk})$  es el vector de observaciones de las variables independientes, y  $\beta' = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)$  es un vector de parámetros desconocidos.

La varianza condicional  $Var(y_t|\psi_{t-1})$  depende de la información pasada, y esta dependencia puede modelarse mediante una función  $h_t = h(\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots, \epsilon_{t-q}, \alpha)$ , teniendo en cuenta que la varianza es positiva y  $\alpha' = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q)$  es un vector de parámetros desconocidos. En este modelo,  $\epsilon_t = y_t - x_t\beta$  para  $t = 1, 2, \dots, n$ .

Un proceso  $\{y_t\}$ ,  $t = 1, 2, \dots, n$ , obedece al modelo de heteroscedasticidad condicional autorregresivo de orden  $q$ , ARCH( $q$ ) si:

- $y_t|\psi_{t-1} \sim N(\mu_t, h_t)$
- $\mu_t = x_t\beta$
- $h_t = \alpha_0 + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q\epsilon_{t-q}^2$
- $\epsilon_t = y_t - x_t\beta$

Con  $\alpha_0 > \alpha_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, q$ .

De los supuestos del modelo, se deduce que  $\epsilon_t|\psi_{t-1} \sim N(0, h_t)$ , y si el proceso  $y_t|\psi_{t-1}$  tiene media  $\mu_t = 0$ ,  $\epsilon_t = y_t$ .

En este caso, el modelo puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \epsilon_t | \psi_{t-1} &\sim N(0, h_t) \\ h_t &= \alpha_0 + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q\epsilon_{t-q}^2 \end{aligned}$$

Que es el modelo ARCH( $q$ ) propuesto inicialmente por Engle.

Además, la varianza de  $h_t$  puede modelarse mediante un proceso autorregresivo de orden  $AR(q)$  en las variables  $u_t = \epsilon_t^2$ .

De igual forma, las esperanzas y varianzas no condicionales para el último modelo son:

$$E[\epsilon_t] = E[E(\epsilon_t|\psi_{t-1})] = 0,$$

$$\text{Var}[\epsilon_t] = E[\epsilon_t^2] = E[E(\epsilon_t^2|\psi_{t-1})] = E[h_t] = \sigma_t^2.$$

Y si la varianza condicional  $h_t$  está dada como antes, al sustituirla en la ecuación  $\text{Var}[\epsilon_t] = E[h_t]$ , se obtiene:

$$\text{Var}[\epsilon_t] = \alpha_0 + \alpha_1 \text{Var}[\epsilon_{t-1}] + \dots + \alpha_q \text{Var}[\epsilon_{t-q}].$$

Dado que el proceso  $\{\epsilon_t\}$  es estacionario,  $\text{Var}[\epsilon_t] = \text{Var}[\epsilon_{t-k}]$  para todo  $k$ . Despejando, la varianza no condicional está dada por:

$$\text{Var}[\epsilon_t] = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_q} = \sigma_t^2.$$

Por lo anterior, se tiene una restricción más para los parámetros de la varianza:  $\sum \alpha_i < 1$ .

### Modelos GARCH

A pesar de su funcionalidad, los modelos ARCH pueden presentar dificultades de estimación. Por ejemplo, en las series financieras, el número de retardos a utilizar puede ser muy elevado, y ello llevaría a realizar una gran cantidad de iteraciones para alcanzar una solución, pudiéndose dar el caso de no encontrar nunca una.

Tim P. Bollerslev introduce los modelos GARCH (Modelo Condicional Autorregresivo Generalizado con Heteroscedasticidad), los cuales tratan una clase más general de los modelos ARCH. En éstos, la estructura de la varianza condicional depende, además del cuadrado de los errores retrasados  $q$  períodos (como en el modelo  $ARCH(q)$ ), de las varianzas condicionales retrasadas  $p$  períodos.

Sea  $\{y_t\}$  un proceso estocástico,  $t = 1, 2, \dots, n$ , y sean  $\beta' = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)$  y  $\omega' = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q, \gamma_1, \dots, \gamma_p)$  vectores de parámetros para modelar la media y la varianza respectivamente.

Además,  $z_t = (1, \epsilon_{t-1}^2, \dots, \epsilon_{t-q}^2, h_{t-1}, \dots, h_{t-p})$  el vector de variables para la varianza,  $x_t = (1, x_{t1}, \dots, x_{tk})$  el vector de variables explicativas observadas en el tiempo  $t$ . En este modelo,  $\epsilon_t = y_t - x_t\beta$  y  $\psi_{t-1}$  es la información disponible hasta el tiempo  $t - 1$ .

El modelo GARCH( $p, q$ ) está dado por:

- $y_t | \psi_{t-1} \sim N(\mu_t, h_t)$
- $\mu_t = x_t\beta$
- $h_t = z_t\omega = \alpha_0 + \sum \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum \gamma_j h_{t-j}$
- $\epsilon_t = y_t - x_t\beta$

Con  $i = 1, 2, \dots, q$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ ,  $\alpha_0 \geq 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$  y  $\gamma_j \geq 0$ .

La varianza condicional depende tanto del cuadrado de los errores como de las varianzas condicionales retrasadas  $p$  periodos. Observar que si  $p=0$ , se tiene el modelo ARCH( $q$ ).

## Capítulo 3

# Aplicación de la metodología y resultados

El indicador de rendimiento neto (IRN) representa la diferencia entre el rendimiento bruto que reporta la AFORE y la comisión que cobra por el manejo de cuenta del trabajador. La CONSAR reporta el rendimiento neto de todas las AFORE para cada una de las SIEFORE y se puede utilizar para comparar las AFORE entre sí. Naturalmente, entre más cercana se encuentre una persona del retiro, el rendimiento neto será menor.

### 3.1. Recopilación de información

En la página web de la CONSAR<sup>1</sup> se puede consultar el Indicador de Rendimiento Neto histórico mensual a partir del año 2011 para todas las AFORE existentes. Para el presente trabajo, se consideraron las series de tiempo de Enero de 2011 a Diciembre de 2016 para cada una de las AFORE actuales y 4 Siefores Básicas <sup>2</sup>, por lo cual, se cuenta con un total de 3,168 datos históricos mensuales.

Como se mencionó en el Capítulo 1, conforme una persona se va acercando a la edad de retiro, el rendimiento obtenido por la Siefore será menor.

Por lo anterior, y como se mostrará más adelante, el resultado final dependerá de manera importante de dichos factores.

---

<sup>1</sup><https://www.gob.mx/consar>

<sup>2</sup>No se consideró la Siefore Básica 0 por no contar con información histórica suficiente.

### 3.2. Series de tiempo y proyecciones

Una vez que se obtuvieron los rendimientos históricos, se procedió a graficar la información para observar características de cada una de las series de tiempo.

En su mayoría, el comportamiento de la series de tiempo de cada Siefore para cada una de las AFORE mostró similitudes, además de la tendencia recientemente descendente del indicador de rendimiento neto.

En el Apéndice A, se puede observar la representación gráfica de los rendimientos obtenidos, de donde se especularía que ninguna de las series de tiempo refleja estacionariedad.

De acuerdo a lo presentado en el Capítulo 2, es necesario someter las series de tiempo a algunas pruebas para estudiar su estacionariedad, para posteriormente obtener el modelo que mejor se ajuste a cada una de ellas y poder proyectarlas.

De este modo, se hizo uso del software @Risk en su versión 7.5, el cual automáticamente somete a evaluación la serie de tiempo y arroja como resultado el modelo con el mejor ajuste.

Al tratarse el IRN de un reflejo de los resultados de productos de inversión, a priori se esperaría que la varianza de la mayoría de las series de tiempo no presente estacionariedad, por lo que los modelos estudiados en el Capítulo 2 son adecuados para el ajuste de las mismas.

Se pueden observar todas las series de tiempo transformadas en el Apéndice B, así como el mejor modelo de ajuste que arrojó el software con ayuda de los correlogramas. Sin embargo, a manera de ejemplo, se muestran los correlogramas de la FAC y FACP de la serie original de la Siefore Básica 1 para la AFORE Azteca (Figura 3.1), así como para la FAC y FACP de la serie transformada (Figura 3.2), además del modelo ajustado (Figura 3.3).

Se procedió a proyectar cada una de las series de tiempo 5 años hacia adelante, es decir, hasta el año 2021. Cabe aclarar que las estimaciones presentadas hasta este momento son escenarios posibles en el futuro de acuerdo a los parámetros y modelo ajustado, si se deseara un dato puntual para algún periodo proyectado, sería necesario llevar a cabo simulación Montecarlo. Se

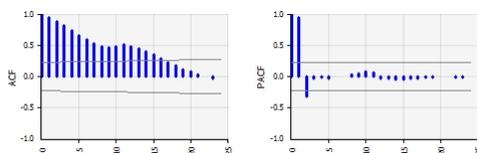


Figura 3.1: FAC y FACP de la serie original de la SB1 para la AFORE Azteca.

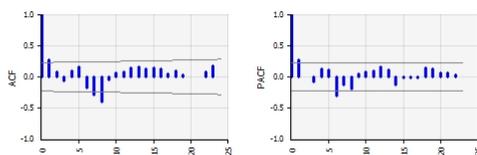


Figura 3.2: FAC y FACP de la serie transformada de la SB1 para la AFORE Azteca.

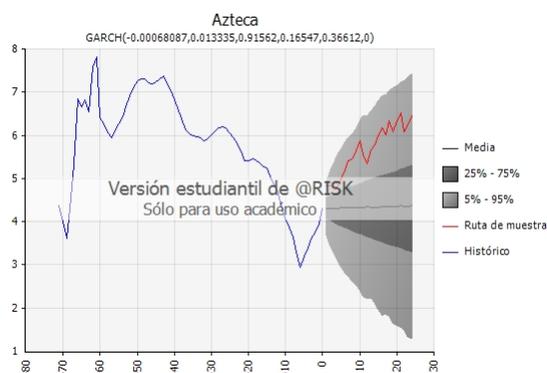


Figura 3.3: Modelo de ajuste y pronósticos de la SB1 para la AFORE Azteca.

explicará el porqué de lo anterior más adelante.

### 3.3. Procesamiento de datos (Cálculo de pensiones)

La idea en general de la presente tesis es utilizar la información anterior para calcular el saldo final de un trabajador en su cuenta individual a través de distintos escenarios, desde los factores estipulados en la ley hasta un incremento en los mismos.

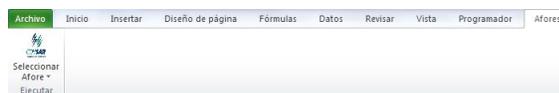


Figura 3.4: Nueva ficha en la barra de menús.

Por tanto, se elaboró un programa en Visual Basic Application (VBA) para Microsoft Excel, que considera el rendimiento neto de cada una de las AFORE y las condiciones pactadas en la ley, así como presentar opciones para incrementar el saldo final.

De este modo, se explica el funcionamiento del programa y los supuestos bajo los cuales actúa el mismo.

De manera inicial, se muestra una nueva ficha en la barra de menús de Microsoft Excel llamada “Afores”, la cual contiene el grupo llamado “Ejecutar”, y a su vez, éste contiene el botón “Seleccionar Afore” (Figura 3.4), en el que al momento de desplegarse mostrará la imagen de las once Afores actuales en el mercado (Figura 3.5).



Figura 3.5: Opciones del botón “Seleccionar Afore”.

Al elegir cualquiera de las opciones (AFORE) del botón desplegado, se muestra automáticamente un formulario (Figura 3.6), en donde se introduce la información del trabajador para poder realizar la evaluación respecto al rendimiento reportado por la AFORE elegida, y presentar el saldo final acumulado. Cabe aclarar que no es necesario estar ubicado en alguna hoja de trabajo en específico, el programa funcionará no importando la hoja activa.



Figura 3.6: Formulario del programa.

El formulario solicita la siguiente información:

- Salario Base de Cotización. Representa el promedio del sueldo percibido a lo largo del periodo laboral a evaluar del trabajador.
- Edad. Edad actual del trabajador. La edad mínima considerada por el programa para funcionar es de 18 años.
- Años cotizados. Representa los años que el trabajador ha contribuido a su cuenta individual. Si bien la ley realiza la medición de contribución en semanas, de manera general, se traduce lo anterior en 25 años como mínimo para poder tener derecho a pensión. Evidentemente, los años cotizados no pueden ser mayores a la diferencia entre la edad actual y los 18 años.
- Monto inicial. Es la cantidad de dinero acumulado en la cuenta individual del trabajador. Puede ocurrir que una persona no haya cotizado hasta el momento ningún año, pero cuando comience a hacerlo desee depositar un monto inicial.
- Edad de retiro. La edad mínima de retiro estipulada por la ley es de 60 años, o antes si se cumplen ciertos requisitos. Para el presente trabajo, se supone como edad mínima de retiro 60 años y como edad máxima 65; es decir, se considera el supuesto de que ninguna persona deseará retirarse más allá de los 65 años.

- Aportación adicional. Representa las aportaciones extras que el trabajador desee realizar aunado a la aportación obligatoria del 6.5 % del salario base de cotización. En este caso, se debe desplegar la lista para elegir una de las opciones, que van desde cero pesos (no se aporta cantidad alguna extra) hasta \$300 mensuales. Cabe aclarar que al decidir aportar una cantidad adicional de ahorro, el programa considerará constante tal aportación, es decir, se ahorrará de manera adicional la misma cantidad mensual para todos los años de cotización próximos.

Una vez introducida la información, ésta se somete a un proceso de validación, en donde se considera cada dato proporcionado para ser evaluado y arrojar un mensaje en caso de error. Por ejemplo, no se pueden proporcionar datos negativos, edades fraccionadas, dejar casillas vacías, etc. Cuando la información es correcta, al dar clic en el botón “Calcular” el programa comenzará a computar.

El algoritmo general del programa es el siguiente: Considera la edad del trabajador para determinar en qué Siefore Básica se debe ubicar, pues no mostrará, por ejemplo, los rendimientos de la SB1 para una persona que por su edad debe ubicarse en la SB4. Una vez hecho esto, determina si el trabajador de acuerdo a su salario es apto para percibir Cuota Social, como lo estipula la ley. Posteriormente, considera dos variables; la primera de ellas representa los años laborables del trabajador, calculados por la diferencia entre la edad que desee retirarse y la edad actual, mientras que la segunda, se refiere a los años que el trabajador requiere para tener derecho a obtener pensión, pues como ya se ha mencionado, se necesita mínimo el equivalente a 25 años cotizados. En este punto, pueden ocurrir 3 opciones; que los años disponibles para laborar sean suficientes para alcanzar los 25 años de cotización, que no sean suficientes para percibir pensión pero sí una Negativa de Pensión, o por último, que ya haya cotizado los años mínimos requeridos y le resten años disponibles para laborar. Todo ello lo considera el programa y lo muestra en el concepto del resultado final.

Luego, calcula para cada uno de los años laborables los montos acumulados por aportación obligatoria, cuota social en caso de ser apto, y aportación voluntaria en caso de haber optado por esta opción. En seguida, el algoritmo buscará hallar el año en el que el trabajador alcance los 25 años de cotización dentro de los años laborables del mismo. Aquí, el programa considera las tres opciones mencionadas anteriormente; si los años necesarios para obtener una pensión son menores a los años laborables, se ubicará justo en el

año en el que alcance los años de cotización mínimos, mientras que, si lo que le corresponde al trabajador es el concepto de Negativa de Pensión, es decir, los años requeridos para obtener pensión son mayores a los años disponibles para laborar, o si ya ha alcanzado los años mínimos de cotización y aún cuenta con años por laborar, se calculará el saldo acumulado al último de estos años, lo que equivale al año que haya estipulado para retirarse.

Posteriormente, una vez que se ha ubicado en el año necesario, el programa sumará los conceptos por los cuales haya ahorro acumulado, es decir, sumará los conceptos que individualmente calculó por concepto de ahorro obligatorio, cuota social y ahorro voluntario. Estos dos últimos en caso de valer.

Después, se hace uso nuevamente del software @Risk. Una vez que se tiene la suma anterior, se procede a simular el monto acumulado con 10,000 iteraciones. Es aquí en donde toma relevancia el hecho de no haber estimado un valor puntual para los rendimientos proyectados, pues de ser así, lo anterior se volvería un proceso determinista y no aleatorio. En lugar de eso, a través de la simulación Montecarlo, se consideran al mismo tiempo distintos escenarios para los rendimientos proyectados y por ende para el saldo acumulado final.

Al terminar la simulación Montecarlo, el programa finalmente arrojará el saldo acumulado final bajo las condiciones que el usuario haya estipulado al principio. Mostrará en un reporte (Figura 3.7) la información del trabajador, el saldo acumulado, la pensión mensual estimada o concepto correspondiente y la tasa de reemplazo, además de la imagen de la AFORE elegida y una gráfica representativa de la tasa de reemplazo.

Aunado a ello, en la parte inferior, mostrará tres opciones adicionales para observar el cambio en el saldo final si se consideran parámetros distintos: La primera de ellas mostrará el año en el que se calculó el saldo acumulado reportado, identificado como “Idéntico”, así como los años posteriores en caso de ser válido. Por ejemplo, si una persona declaró haber tenido 30 años al momento del cálculo, deseó retirarse a los 65 años de edad y aún no había cotizado al sistema, esta opción mostrará 10 años adicionales.

La segunda opción muestra el porcentaje de ahorro obligatorio así como otros tres porcentajes. ¿Qué sucedería si en lugar de ahorrar sólo el 6.5% obligatorio se ahorra un 8%, un 10% o un 12%? Esta opción ayuda a que

**Reporte de ahorro para el retiro: Trabajadores IMSS**

**Información del trabajador**

| Salario mensual | Edad | Años cotizados | Monto inicial | Edad de retiro | % aportación | Aportación voluntaria |
|-----------------|------|----------------|---------------|----------------|--------------|-----------------------|
|                 |      |                |               |                |              |                       |

**Resultados**

|                          |  |
|--------------------------|--|
| <b>Saldo acumulado</b>   |  |
| <b>Concepto</b>          |  |
| <b>Tasa de reemplazo</b> |  |

**Ejercicio opcional**

|                  |              |                       |
|------------------|--------------|-----------------------|
| Años adicionales | % aportación | Aportación voluntaria |
|------------------|--------------|-----------------------|

**Ejecutar**

**AFORE**

Figura 3.7: Hoja de reporte final.

el trabajador observe qué cambio representa en el saldo final un porcentaje de ahorro obligatorio mayor.

Finalmente, la tercera opción trata sobre el ahorro voluntario. Si bajo las condiciones actuales el trabajador decide ahorrar de manera voluntaria \$100 mensuales, \$200 o \$300, ¿en qué proporción cambiaría el saldo acumulado final? <sup>3</sup>

Naturalmente, se pueden combinar las tres opciones anteriores conforme el usuario decida para observar el cambio en el saldo final que podría suceder si se consideran condiciones distintas. Por ejemplo, si el trabajador tiene 5 años más disponibles para laborar y decide cotizar hasta el final, ¿en qué porcentaje incrementaría el saldo acumulado? Si aunado a ello decide un ahorro voluntario mensual de \$200, ¿en qué proporción incrementará el saldo acumulado y por ende la pensión del trabajador? Ciertamente estas opciones son muy interesantes y tienen la intención de hacer notar al usuario si se puede mejorar el ahorro para el retiro o no.

Para mostrar el resultado bajo las nuevas condiciones, bastará con dar clic al botón “Ejecutar” en la hoja. Si no se ha dejado ningún dato vacío, el

<sup>3</sup>Las opciones anteriores son cerradas, por lo que si el trabajador desde un inicio decidió aportar voluntariamente, al elegir una cantidad menor en este punto, el ahorro acumulado podría ser menor.

programa volverá a simular bajo las nuevas condiciones, y nuevamente arrojará el resultado, no será necesario volver a introducir toda la información como al principio.

Se debe mencionar que la ley estipula que el trabajador deberá contratar un Seguro de Sobrevivencia al momento de solicitar la pensión, sin embargo, para el presente trabajo, no se tomó en cuenta tal factor, además de que de acuerdo a la Metodología de la Calculadora de Retiro de la CONSAR, la pensión correspondiente para el trabajador será la duodécima parte del resultado de dividir el Saldo Acumulado entre la Unidad de Renta Vitalicia.<sup>4</sup>

La Unidad de Renta Vitalicia depende del género de la persona así como de su edad, además de que la información se actualiza constantemente. De este modo, haciendo uso de datos de la CONSAR para hombres y mujeres de 60 a 65 años de edad, se encontró que, en promedio, las personas vivirán hasta los 81 años. De aquí que, para efectos del programa, el número de años que una persona gozará de su pensión será simplemente la diferencia entre 81 y la edad de retiro. Por lo cual, la pensión mostrada es únicamente con fines ilustrativos, pues ésta en la práctica puede ser mayor o menor, de acuerdo a las condiciones de cada trabajador.

### 3.4. Algunos ejemplos específicos.

**Ejemplo 3.1.** *Considere a una persona de 32 años que comenzará a cotizar ante el Seguro Social. Desea conocer el monto aproximado que ahorraría con cada una de las AFORE si decide retirarse a los 65 años, cuenta con un salario base de cotización de \$10,000 mensuales y no realiza aportaciones voluntarias.*

Para el ejercicio anterior, se procede a introducir la información en el formulario del programa (Figura 3.8) para estimar aproximadamente el saldo acumulado al momento del retiro para cada una de las AFORE.

En este caso, dado que el trabajador comienza a cotizar ante el Instituto, y no se menciona que realice una aportación inicial, los Años Cotizados así como el Monto Inicial serán 0.

---

<sup>4</sup>La Unidad de Renta vitalicia representa el valor presente del total de pagos estimados. Para calcularla se utilizan tablas de mortalidad así como la tasa de interés que establezca la normatividad de la misma.



The image shows a software window titled "Información del trabajador" with a blue border and a close button in the top right corner. The window has a green background with a decorative pattern. It contains several input fields and a button:

| Field                      | Value |
|----------------------------|-------|
| Salario Base de Cotización | 10000 |
| Edad                       | 32    |
| Años cotizados             | 0     |
| Monto inicial              | 0     |
| Edad de retiro             | 65    |
| Aportación adicional       | 0     |

At the bottom center of the window is a button labeled "Calcular".

Figura 3.8: Datos para el Ejemplo 3.1.

Puesto que el trabajador cuenta con 32 años y desea retirarse a los 65 años, tendrá un total de 33 años para poder cumplir con los requisitos de ley y de ese modo poder contar con una pensión.

Se define la Densidad de Cotización como el porcentaje de años que un trabajador permanece cotizando a su cuenta individual respecto del total de años laborados. De este modo, para este caso, suponiendo que el trabajador labora los 33 años disponibles, el porcentaje mínimo de cotización para tener derecho a una pensión es de aproximadamente 76%. Naturalmente, mientras menos años laborables disponibles en la formalidad, requerirá una mayor densidad de cotización.

Se calculó el saldo acumulado al año correspondiente al 76% de densidad de cotización.

De lo anterior, se muestran los resultados en el Cuadro 3.1 bajo las condiciones estipuladas al inicio.

Como se observa, bajo las condiciones actuales del Sistema, ninguna de las AFORE alcanzaría siquiera una tasa de reemplazo del 50%, lo cual está por debajo de la recomendación de la OCDE del 70%. La AFORE con mejor tasa de reemplazo es PensionISSSTE con un 49%. Banamex, Profuturo, SURA y XXI Banorte muestran resultados similares, al igual que Azteca y Coppel, e Invercap, Metlife y Principal. En conjunto, el promedio de tasa de reemplazo obtenida bajo las circunstancias actuales es del 39%.

| Saldo acumulado final aportación obligatoria |                 |            |                   |
|--|-----------------|------------|-------------------|
| Afore  | Saldo acumulado | Pensión    | Tasa de reemplazo |
| Azteca                                       | \$662,396.32    | \$3,449.98 | 34 %              |
| Banamex                                      | \$832,088.76    | \$4,333.80 | 43 %              |
| Coppel                                       | \$626,156.07    | \$3,261.23 | 33 %              |
| Inbursa                                      | \$445,711.88    | \$2,857.94 | 29 %              |
| Invercap                                     | \$744,065.09    | \$3,875.34 | 39 %              |
| Metlife                                      | \$722,588.17    | \$3,763.48 | 38 %              |
| PensionISSSTE                                | \$943,583.26    | \$4,914.50 | 49 %              |
| Principal                                    | \$745,316.64    | \$3,881.86 | 39 %              |
| Profuturo                                    | \$839,055.38    | \$4,370.08 | 44 %              |
| SURA   | \$837,428.09    | \$4,361.60 | 44 %              |
| XXI Banorte                                  | \$831,537.98    | \$4,330.93 | 43 %              |

Cuadro 3.1: Resultados Ejemplo 3.1.

Cabe hacer notar que la única AFORE que no presentó un resultado mayor a la Pensión Mínima Garantizada que actualmente ronda los \$2,857.94, es Inbursa, que como se puede observar en su indicador de rendimiento neto, es la AFORE que menores rendimientos reporta.

¿Qué ocurriría si el trabajador decide realizar aportaciones voluntarias de manera constante a lo largo del periodo de cotización?

Antes de responder a la pregunta anterior, se debe dejar en claro que en la realidad, si la AFORE en la que se encuentre inscrito el trabajador cuenta con Siefore Adicional, será ahí en donde se depositarán las aportaciones adicionales. Para este trabajo, no se tomaron en cuentas las Siefores Adicionales por no contar con información histórica suficiente sobre ellas, por lo cual, se supone que todas las aportaciones de este tipo serán depositadas en la Siefore Básica correspondiente.

De este modo, se hizo uso de las opciones del programa para agregar el escenario en el que el trabajador realiza aportaciones voluntarias. En este caso, se consideró una aportación adicional de \$300 mensuales (en conformidad con la campaña de la CONSAR “De 10 en 10”). Aunado a ello, y bajo el contexto actual, se consideran 2 escenarios extras: 1) El trabajador aporta adicionalmente \$350, lo que en total representaría el 10 % del SBC (\$650 por aportación obligatoria más \$350)<sup>5</sup>, y 2) El trabajador aporta adi-

<sup>5</sup>Se puede considerar este escenario como aquel en el que el porcentaje obligatorio de aportación sea del 10 % y no se adicione ninguna otra cuota.

cionalmente \$550<sup>6</sup>.

Así, se muestran los resultados para los escenarios anteriores en el Cuadro 3.2.

Con una aportación adicional constante de \$300, la mayoría de las AFORE muestran mejoras interesantes, siendo PensionISSSTE la de mejor resultado, cercano a la recomendación de la OCDE del 70%. Banamex y SURA muestran prácticamente el mismo resultado, ubicándose Profuturo esta vez ligeramente por debajo de ellas. Invercap, Principal y XXI Banorte reportan también prácticamente el mismo resultado; Metlife está por poco debajo de ellas. Azteca y Coppel reportan resultados similares, mientras que Inbursa es la AFORE que menor resultado muestra.

Exceptuando a Inbursa, el promedio de mejora en el porcentaje de la tasa de reemplazo es del 15%, traduciéndose lo anterior en una tasa de reemplazo promedio del 54%, lo que significa que sí se puede mejorar la pensión para el futuro a través del ahorro voluntario constante.

Por otro lado, si el trabajador ahorrara el equivalente al 10% de su SBC, los resultados no muestran grandes variaciones respecto a los últimos resultados, esto debido a que únicamente se adicionan \$50 más. PensionISSSTE se sigue manteniendo como la AFORE de mejor resultado siendo la única que rebasa la recomendación de la OCDE para la tasa de reemplazo. Banamex, Profuturo y SURA se encuentran en el mismo nivel de resultados, siguiéndoles XXI Banorte, Invercap, Principal, Metlife, Azteca, Coppel y finalmente Inbursa. En este caso, el promedio de mejora respecto al porcentaje obligatorio de cotización es del 18%, y respecto al porcentaje obligatorio y una aportación adicional constante de \$300, es del 3%.

Los resultados son superiores si se considera una aportación equivalente al 12% del SBC, en donde el orden de las AFORE respecto al resultado se mantiene de manera general como hasta los ejercicios previos. A pesar de que el porcentaje promedio de tasa de reemplazo es del 66%, bajo el escenario actual, 4 de las 11 AFORE rebasan el 70% en la tasa de reemplazo (Banamex, PensionISSSTE, Profuturo y Sura), mientras que Azteca, Invercap, Metlife, Principal y XXI Banorte reportan una tasa de reemplazo igual o superior al 60%.

---

<sup>6</sup>Equivalente a una aportación obligatoria de 12%.

| Saldo acumulado distintos escenarios |                   |                |                |                |
|--------------------------------------|-------------------|----------------|----------------|----------------|
| Afore                                | Concepto          | 6.5 %+\$300    | 10 %           | 12 %           |
| Azteca                               | Saldo acumulado   | \$921,844.22   | \$961,905.99   | \$1,155,602.70 |
|                                      | Pensión           | \$4,801.27     | \$5,009.93     | \$6,018.76     |
|                                      | Tasa de reemplazo | 48 %           | 50 %           | 60 %           |
| Banamex                              | Saldo acumulado   | \$1,162,271.38 | \$1,216,671.13 | \$1,437,345.11 |
|                                      | Pensión           | \$6,053.50     | \$6,336.83     | \$7,486.17     |
|                                      | Tasa de reemplazo | 61 %           | 63 %           | 75 %           |
| Coppel                               | Saldo acumulado   | \$874,647.57   | \$916,173.81   | \$1,081,298.46 |
|                                      | Pensión           | \$4,555.46     | \$4,771.74     | \$5,631.76     |
|                                      | Tasa de reemplazo | 46 %           | 48 %           | 56 %           |
| Inbursa                              | Saldo acumulado   | \$622,459.36   | \$651,942.11   | \$769,788.32   |
|                                      | Pensión           | \$3,241.98     | \$3,395.53     | \$4,009.31     |
|                                      | Tasa de reemplazo | 32 %           | 34 %           | 40 %           |
| Invercap                             | Saldo acumulado   | \$1,035,995.31 | \$1,085,327.43 | \$1,283,688.62 |
|                                      | Pensión           | \$5,395.81     | \$5,652.75     | \$6,685.88     |
|                                      | Tasa de reemplazo | 54 %           | 57 %           | 67 %           |
| Metlife                              | Saldo acumulado   | \$1,007,593.25 | \$1,064,638.28 | \$1,250,070.38 |
|                                      | Pensión           | \$5,247.88     | \$5,544.99     | \$6,510.78     |
|                                      | Tasa de reemplazo | 52 %           | 55 %           | 65 %           |
| PensionISSSTE                        | Saldo acumulado   | \$1,317,827.55 | \$1,380,194.73 | \$1,629,659.51 |
|                                      | Pensión           | \$6,863.69     | \$7,188.51     | \$8,487.81     |
|                                      | Tasa de reemplazo | 69 %           | 72 %           | 85 %           |
| Principal                            | Saldo acumulado   | \$1,041,279.02 | \$1,086,580.61 | \$1,289,171.27 |
|                                      | Pensión           | \$5,423.33     | \$5,659.27     | \$6,714.43     |
|                                      | Tasa de reemplazo | 54 %           | 57 %           | 67 %           |
| Profuturo                            | Saldo acumulado   | \$1,125,578.80 | \$1,224,550.03 | \$1,392,502.43 |
|                                      | Pensión           | \$5,862.39     | \$6,377.86     | \$7,252.62     |
|                                      | Tasa de reemplazo | 59 %           | 64 %           | 73 %           |
| SURA                                 | Saldo acumulado   | \$1,168,729.35 | \$1,224,217.19 | \$1,446,780.64 |
|                                      | Pensión           | \$6,087.13     | \$6,376.13     | \$7,535.32     |
|                                      | Tasa de reemplazo | 61 %           | 64 %           | 75 %           |
| XXI Banorte                          | Saldo acumulado   | \$1,035,951.13 | \$1,168,486.08 | \$1,264,544.90 |
|                                      | Pensión           | \$5,395.58     | \$6,085.87     | \$6,586.17     |
|                                      | Tasa de reemplazo | 54 %           | 61 %           | 66 %           |

Cuadro 3.2: Resultados Ejemplo 3.1 distintos escenarios.

Por lo anterior, al día de hoy, se recomendaría al trabajador elegir la AFORE PensionISSSTE al mostrar los mejores resultados en cada uno de los escenarios anteriores.

**Ejemplo 3.2.** *Considere ahora a una persona de 60 años que cuenta con el equivalente a 20 años cotizados ante el Instituto. Para poder tener derecho a obtener una pensión, el trabajador sabe que deberá cotizar lo siguientes 5 años, por lo que deberá retirarse a los 65 años. Afortunadamente, en sus años más productivos realizó depósitos que al día de hoy le permiten tener un acumulado de \$700,000. Actualmente, su cuenta individual es administrada por la AFORE Metlife, sin embargo, el trabajador busca maximizar su pensión al momento del retiro, por lo cual está dispuesto a cambiar de AFORE si es necesario, empero no está dispuesto a realizar aportaciones adicionales más allá de \$300. ¿Será factible para el trabajador permanecer en la AFORE actual si estima percibir un salario de \$8,000 mensuales para los siguientes 5 años?*

Para atender el ejercicio anterior, primero se procede a introducir la información en el formulario del programa como en la Figura 3.9, considerando que inicialmente el trabajador no realiza aportaciones adicionales.



The image shows a software window titled "Información del trabajador" with a close button in the top right corner. The window contains a form with the following fields and values:

| Label                      | Value  |
|----------------------------|--------|
| Salario Base de Cotización | 8000   |
| Edad                       | 60     |
| Años cotizados             | 20     |
| Monto inicial              | 700000 |
| Edad de retiro             | 65     |
| Aportación adicional       | 0      |

At the bottom of the form is a button labeled "Calcular".

Figura 3.9: Datos para el Ejemplo 3.2.

Después del proceso de cálculo del programa, éste arrojó los resultados del Cuadro 3.3.

Como se puede observar, Coppel, PensionISSSTE y Profuturo son las únicas AFORE que muestran un resultado mayor al de Metlife, siendo PensionISSSTE la de mejor resultado con una tasa de reemplazo del 64 % y con la cual se maximiza la pensión del trabajador bajo las condiciones actuales.

| Saldo acumulado final aportación obligatoria |                 |            |                   |
|--|-----------------|------------|-------------------|
| Afore  | Saldo acumulado | Pensión    | Tasa de reemplazo |
| Azteca                                       | \$915,866.30    | \$4,770.14 | 60 %              |
| Banamex                                      | \$859,648.24    | \$4,477.33 | 56 %              |
| Coppel                                       | \$931,295.12    | \$4,850.50 | 61 %              |
| Inbursa                                      | \$835,178.89    | \$4,349.89 | 54 %              |
| Invercap                                     | \$899,764.61    | \$4,686.27 | 59 %              |
| Metlife                                      | \$924,208.79    | \$4,813.59 | 60 %              |
| PensionISSSTE                                | \$981,624.28    | \$5,112.63 | 64 %              |
| Principal                                    | \$904,627.09    | \$4,711.60 | 59 %              |
| Profuturo                                    | \$938,502.83    | \$4,888.04 | 61 %              |
| SURA   | \$900,124.55    | \$4,688.15 | 59 %              |
| XXI Banorte                                  | \$893,847.24    | \$4,655.45 | 58 %              |

Cuadro 3.3: Resultados Ejemplo 3.2.

A pesar de ello, dado que con ninguna de las AFORE se alcanza la tasa de reemplazo recomendada del 70 %, se puede considerar como un buen resultado el obtenido con PensionISSSTE, ya que el trabajador realizó aportaciones pasadas que le permitieron alcanzar este nivel, pues si durante los veinte años anteriores de cotización se hubiera limitado a aportar solamente el porcentaje obligatorio, la tasa de reemplazo actual sería mucho menor y difícilmente se podría mejorar en los cinco años restantes del trabajador por laborar.

Si además de ello se toma en cuenta que el trabajador está dispuesto a realizar aportaciones adicionales como máximo de \$300, los resultados serían como en el Cuadro 3.4.

En este caso, Azteca, Coppel, PensionISSSTE y Profuturo presentan mejores resultados que Metlife, sin embargo, PensionISSSTE se sigue mostrando como la AFORE de mejores resultados.

Si bien el cambio promedio respecto a la tasa de reemplazo en el escenario en el que únicamente se aporta el porcentaje obligatorio es de 1 %, al buscar el trabajador maximizar su pensión, sería recomendable que cambie de AFORE a PensionISSSTE y realice aportaciones adicionales de \$300 (bajo lo estipulado por él) de manera constante por los cinco años que le restan de cotización.

| Saldo acumulado final aportación obligatoria y adicional |                 |            |                   |
|--|-----------------|------------|-------------------|
| Afore  | Saldo acumulado | Pensión    | Tasa de reemplazo |
| Azteca   | \$982,569.01    | \$5,117.55 | 64 %              |
| Banamex  | \$879,427.52    | \$4,580.35 | 57 %              |
| Coppel   | \$951,727.29    | \$4,956.91 | 62 %              |
| Inbursa  | \$854,454.93    | \$4,450.29 | 56 %              |
| Invercap   | \$919,688.39    | \$4,790.04 | 60 %              |
| Metlife  | \$945,255.50    | \$4,923.21 | 62 %              |
| PensionISSSTE  | \$1,003,134.79  | \$5,224.66 | 65 %              |
| Principal  | \$925,034.69    | \$4,817.89 | 60 %              |
| Profuturo  | \$959,034.78    | \$4,994.97 | 62 %              |
| SURA   | \$920,226.88    | \$4,792.85 | 60 %              |
| XXI Banorte  | \$913,929.87    | \$4,760.05 | 60 %              |

Cuadro 3.4: Resultados Ejemplo 3.2 con escenario de aportación extra.

**Ejemplo 3.3.** *Imagine el escenario en el que un trabajador de 60 años de edad ha cotizado ya ante el Instituto el equivalente a 25 años, por lo cual, cumple con los requisitos mínimos para tener derecho a una pensión. Sin embargo, si decidiera retirarse en este momento, el acumulado de \$500,000 en su cuenta individual no sería suficiente para superar la Pensión Mínima Garantizada (PMG) de \$2,857.94, por lo que el trabajador está dispuesto a laborar los siguientes 5 años para incrementar el monto de su pensión. No obstante, el monto máximo de aportación que el trabajador puede depositar es el equivalente al 12 % de su SBC, por lo que una diferencia de alrededor de \$1,000 respecto a la PMG la considera buena opción. De acuerdo a las opciones ofrecidas por el programa, ¿qué montos alcanzaría con cada una de las AFORE si actualmente percibe un salario de \$7,000?*

Inicialmente, se observará el cambio en el saldo acumulado del trabajador si sólo aportara el porcentaje obligatorio. Se procede entonces a introducir la información correspondiente en el formulario del programa como en la Figura 3.10.

El programa arrojó los resultados del Cuadro 3.5.

Bajo las condiciones actuales, PensionISSSTE presenta el mejor resultado con una tasa de reemplazo del 53 % y una diferencia en la pensión de \$837.91 respecto a la PMG. Como se observa, difícilmente el trabajador lograría mejorar de manera importante la tasa de reemplazo en los cinco años que está dispuesto a seguir laborando con la aportación obligatoria.

Información del trabajador

Salario Base de Cotización: 7000

Edad: 60

Años cotizados: 25

Monto inicial: 500000

Edad de retiro: 65

Aportación adicional: 0

Calcular

Figura 3.10: Datos para el Ejemplo 3.3.

| Saldo acumulado final aportación obligatoria |                 |            |                   |
|--|-----------------|------------|-------------------|
| Afore  | Saldo acumulado | Pensión    | Tasa de reemplazo |
| Azteca                                       | \$661,099.78    | \$3,443.23 | 49 %              |
| Banamex                                      | \$621,643.74    | \$3,237.73 | 46 %              |
| Coppel                                       | \$672,895.17    | \$3,504.66 | 50 %              |
| Inbursa                                      | \$603,968.77    | \$3,145.67 | 45 %              |
| Invercap                                     | \$650,809.02    | \$3,389.63 | 48 %              |
| Metlife                                      | \$668,627.34    | \$3,482.43 | 50 %              |
| PensionISSSTE                                | \$709,603.43    | \$3,695.85 | 53 %              |
| Principal                                    | \$653,826.86    | \$3,405.35 | 49 %              |
| Profuturo                                    | \$677,916.57    | \$3,530.82 | 50 %              |
| SURA   | \$650,807.58    | \$3,389.62 | 48 %              |
| XXI Banorte                                  | \$646,068.84    | \$3,364.94 | 48 %              |

Cuadro 3.5: Resultados Ejemplo 3.3.

Si se considera el monto máximo de aportación que el trabajador está dispuesto a depositar en su cuenta individual, los resultados son los presentados en el Cuadro 3.6.

Con un incremento promedio en la pensión del 2 % respecto a la aportación obligatoria, PensionISSSTE se muestra una vez más como la AFORE de mejores resultados. Si se considera la condición del trabajador de tomar el resultado que represente una diferencia de alrededor de \$1,000 respecto a la PMG, PensionISSSTE es la más cercana con una diferencia de \$982.40.

| Saldo acumulado final aportación obligatoria y adicional |                 |            |                   |
|--|-----------------|------------|-------------------|
| Afore  | Saldo acumulado | Pensión    | Tasa de reemplazo |
| Azteca   | \$685,886.46    | \$3,572.33 | 51 %              |
| Banamex  | \$646,921.64    | \$3,369.38 | 48 %              |
| Coppel   | \$699,548.04    | \$3,643.48 | 52 %              |
| Inbursa  | \$628,707.79    | \$3,274.52 | 47 %              |
| Invercap   | \$676,805.94    | \$3,525.03 | 50 %              |
| Metlife  | \$695,030.51    | \$3,619.95 | 52 %              |
| PensionISSSTE  | \$737,344.56    | \$3,840.34 | 55 %              |
| Principal  | \$680,055.59    | \$3,541.96 | 51 %              |
| Profuturo  | \$704,772.36    | \$3,670.69 | 52 %              |
| SURA   | \$676,691.78    | \$3,524.44 | 50 %              |
| XXI Banorte  | \$672,217.70    | \$3,501.13 | 50 %              |

Cuadro 3.6: Resultados Ejemplo 3.3 con aportación del 12 %.

Como se observó en los ejemplos previos, es importante la planificación del retiro, pues de no hacerlo, mejorar los resultados en los últimos años sería complicado. Además de ello, las aportaciones adicionales son importantes de igual manera.

## Capítulo 4

# Conclusión

Los resultados obtenidos con la presente tesis son congruentes con la información preliminar y con aquello que se pretendía demostrar. Evidentemente, no son cantidades exactas al tratarse de estimaciones y escenarios futuros, sin embargo, se logró evidenciar lo expuesto anticipadamente y dar noción del escenario general del actual sistema de pensiones en México.

De manera inicial, cada uno de los ejemplos del capítulo anterior se llevó a cabo bajo el escenario de la aportación obligatoria y sin aportaciones adicionales. Con ello, se demostró que las contribuciones del 6.5 % obligatorio actual a la cuenta de ahorro del trabajador es insuficiente para obtener la tasa de reemplazo del 70 % recomendada por la OCDE. En el ejemplo 1, aquel en donde un trabajador comenzará a ahorrar en su cuenta individual, en promedio se obtuvo una tasa de reemplazo del 39 %.

A pesar de ello, se lograron mejorar los resultados con aportaciones adicionales constantes, lo que muestra que sí se pueden obtener tasas de reemplazo superiores. Claro es que el supuesto importante bajo el que se obtuvieron esos resultados fue el de aportaciones adicionales constantes, sin embargo, la realidad es que el porcentaje de trabajadores que realiza este tipo de contribuciones es sumamente pequeño.

Adicional a lo anterior, se consideraron escenarios en los cuales los porcentajes de aportación obligatoria son mayores. En el ejemplo 1, la tasa de reemplazo promedio con un porcentaje de aportación obligatoria del 10 % fue de 57 %, mientras que con el 12 % obligatorio en promedio se obtuvo una tasa de reemplazo del 66 %.

Por supuesto, el tiempo de cotización es crucial. Primero, porque se debe de cumplir con un periodo para tener derecho a pensión, y segundo, mientras más tiempo permanezca un trabajador en el sector formal, acumulará más tiempo de cotización y por ende más recursos.

Otro tema importante es la elección de la AFORE, pues se observó que existen administradoras con mejores rendimientos que otras, lo que al final de la vida laboral del trabajador se verá reflejado en el saldo acumulado. Lo anterior es notorio es el ejemplo 2, en donde el trabajador busca maximizar su pensión, y uno de los requisitos para que ello ocurra es la necesidad de cambiar de AFORE.

También, se hizo evidente que de no ocuparse en la planificación del retiro, difícilmente se podría mejorar la situación en los últimos años laborables del trabajador. Como se mostró en el ejemplo 3, a pesar de que el trabajador tiene derecho a obtener una pensión, ésta no rebasa siquiera la Pensión Mínima Garantizada, y los años restantes no son suficientes para mejorar de manera importante la pensión.

Las condiciones bajo las cuales se llevaron a cabo las estimaciones anteriores son deseables, pues se tomó en cuenta que en ningún momento se hizo uso de los retiros parciales por desempleo o matrimonio, además de no considerar el gasto por el seguro de sobrevivencia, lo que en conjunto disminuiría el saldo acumulado final.

Por lo anterior, es necesario tomar medidas para mejorar la situación actual, algunas de las cuales se enlistan a continuación:

- Incrementar gradualmente la tasa de aportación obligatoria. Con ello incrementaría el saldo acumulado y por ende la pensión del trabajador. Se debe de llevar a cabo el proceso paulatinamente, pues incluso al día de hoy, algunos trabajadores consideran la aportación como un impuesto y no como un ahorro para su retiro.
- Educar financieramente a la población, así como concientizarla sobre la importancia de la planificación del retiro. Resultados recientes de la CONSAR muestran que 4 de cada 10 mexicanos cambiaron de AFORE a una de menor rendimiento de la que provenían, lo cual invariablemente afectará el saldo acumulado. Mientras que de no ocuparse en

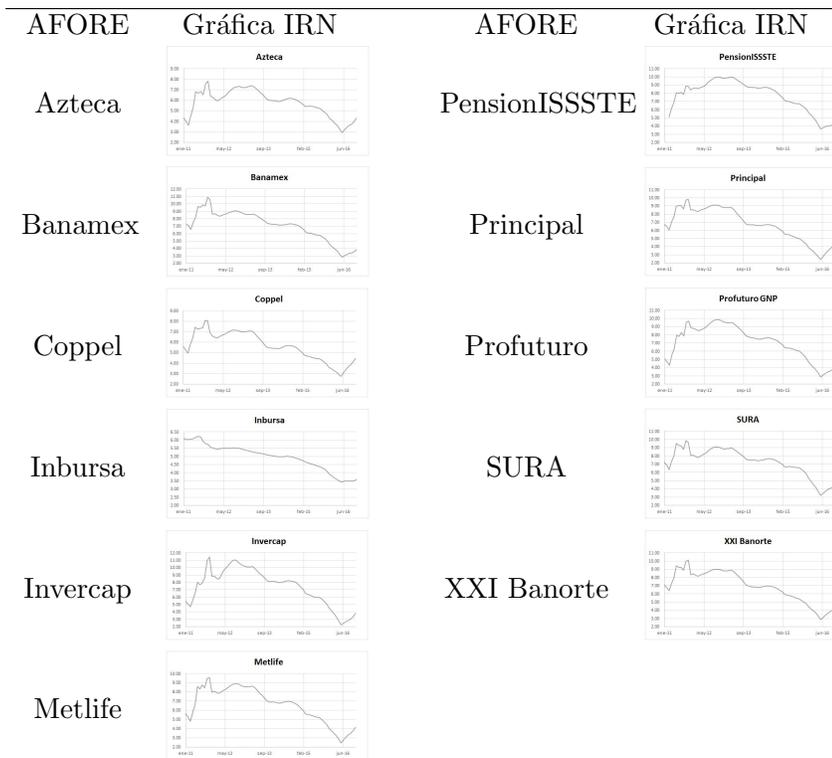
planificar el retiro, las consecuencias a largo plazo cobrarán factura al trabajador y no contará con tiempo suficiente para revertir la situación.

- Incentivar a los trabajadores a realizar aportaciones voluntarias para mejorar la tasa de reemplazo. Es, al día de hoy, quizá la medida más oportuna para mejorar las pensiones, pues las demás requerirán de tiempo para ser implementadas.
- Impulsar el empleo formal. Mientras más tiempo permanezca una persona aportando a su cuenta individual, mayor será el saldo acumulado.
- Diversificar los portafolios de inversión de las AFORE. Actualmente, alrededor del 52.8% de los recursos son invertidos en valores gubernamentales. De diversificarse los portafolios de inversión de las AFORE, los rendimientos podrían ser mayores.

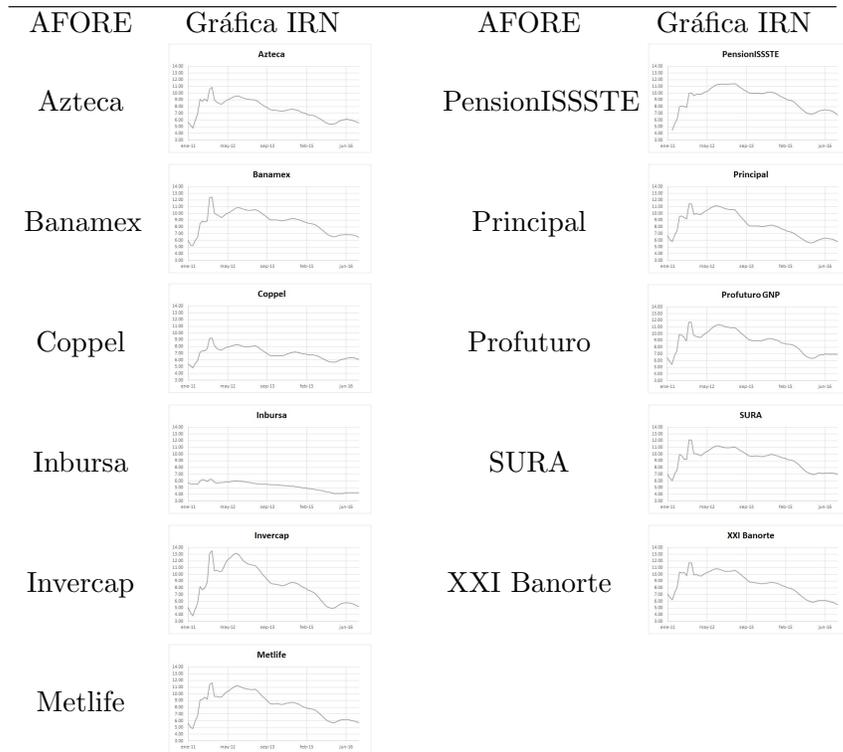


# Apéndice A

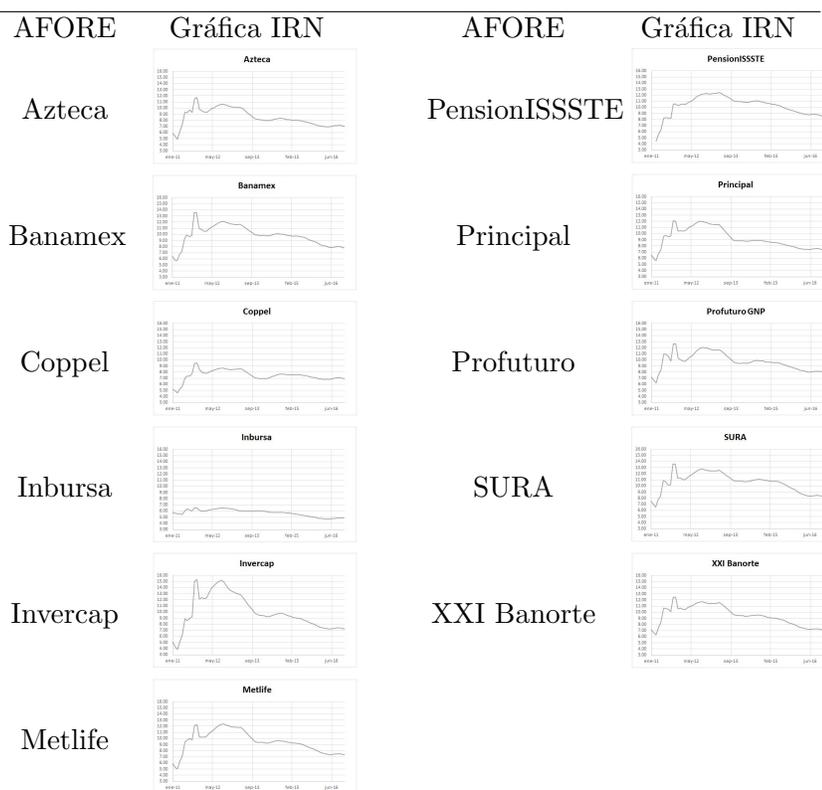
## Representación gráfica



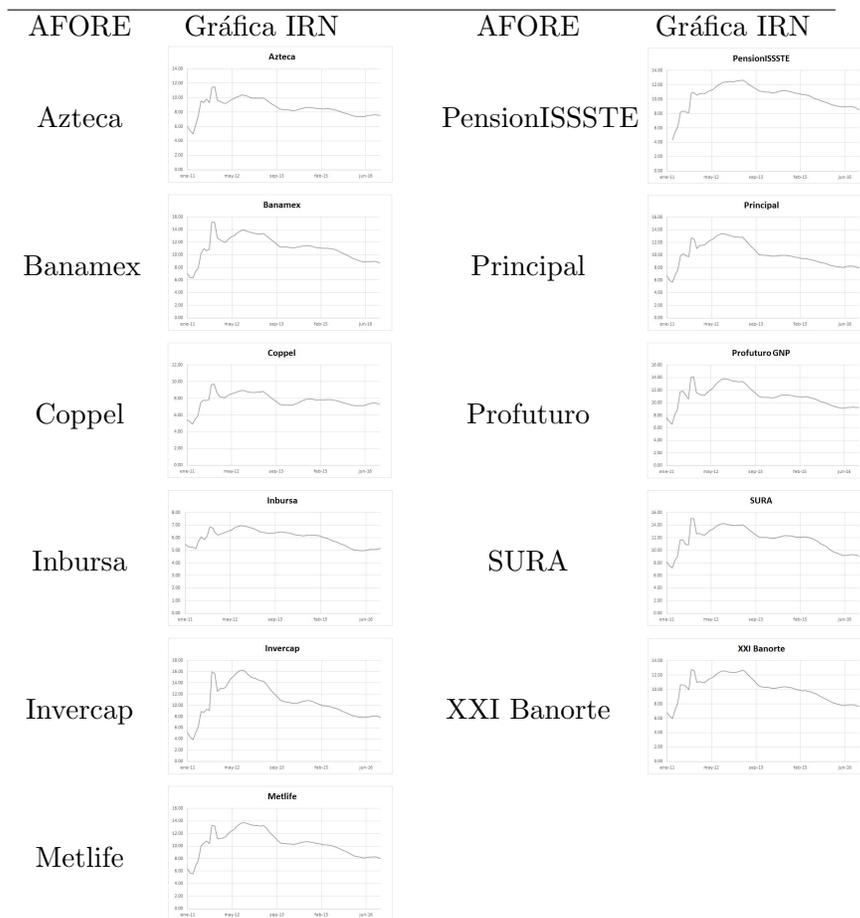
Cuadro A.1: Gráficas Indicador de Rendimiento Neto SB1.



Cuadro A.2: Gráficas Indicador de Rendimiento Neto SB2.



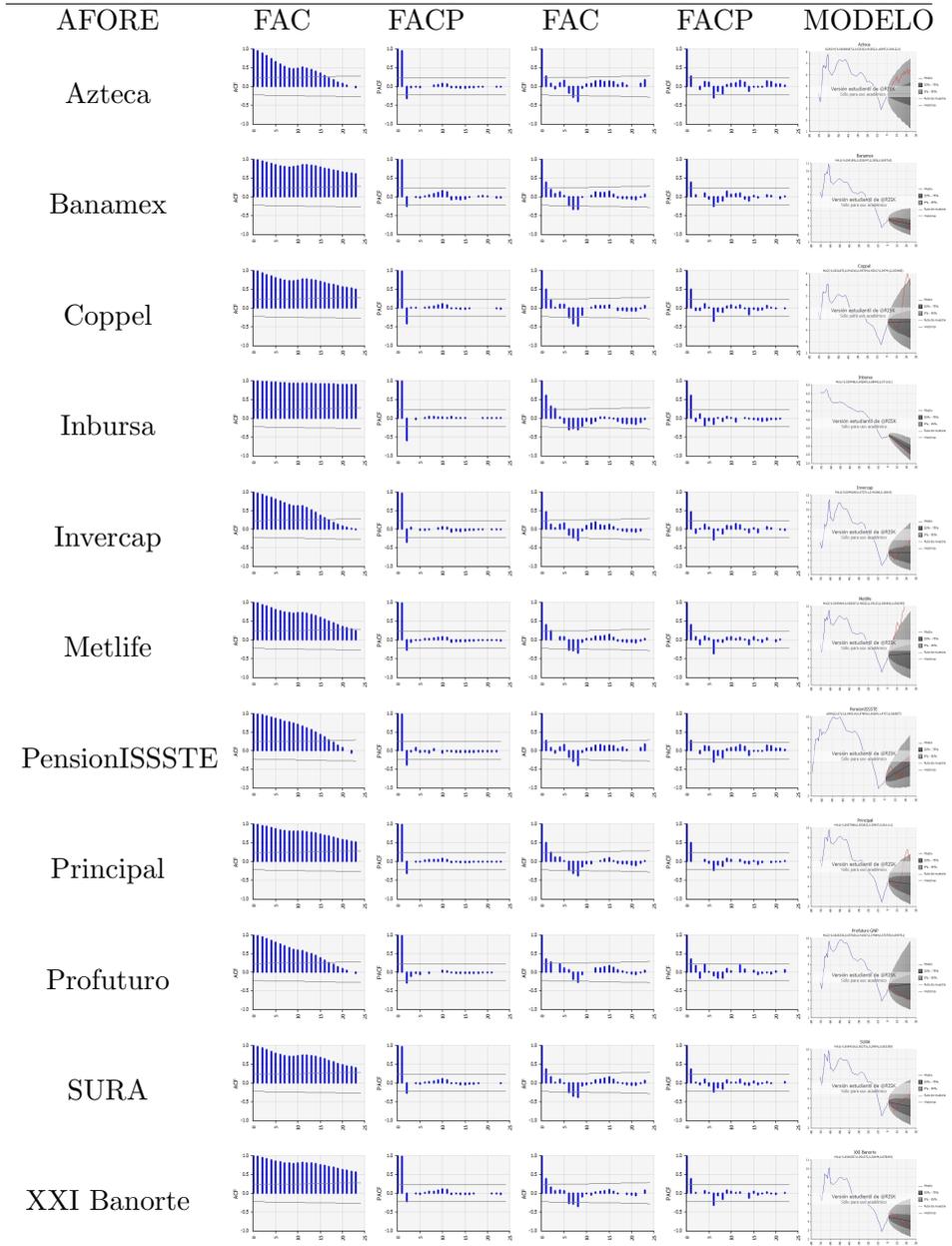
Cuadro A.3: Gráficas Indicador de Rendimiento Neto SB3.



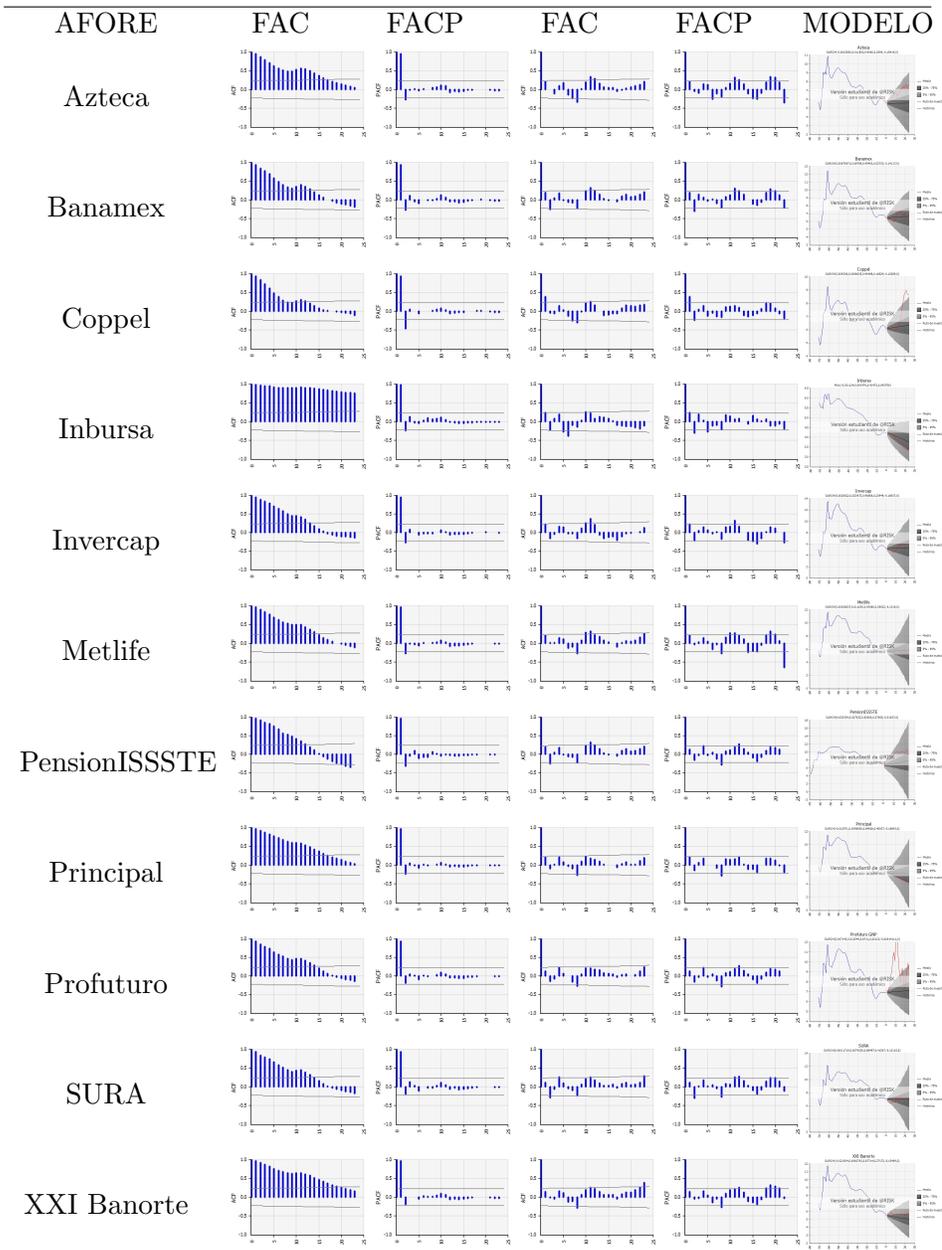
Cuadro A.4: Gráficas Indicador de Rendimiento Neto SB4.

## Apéndice B

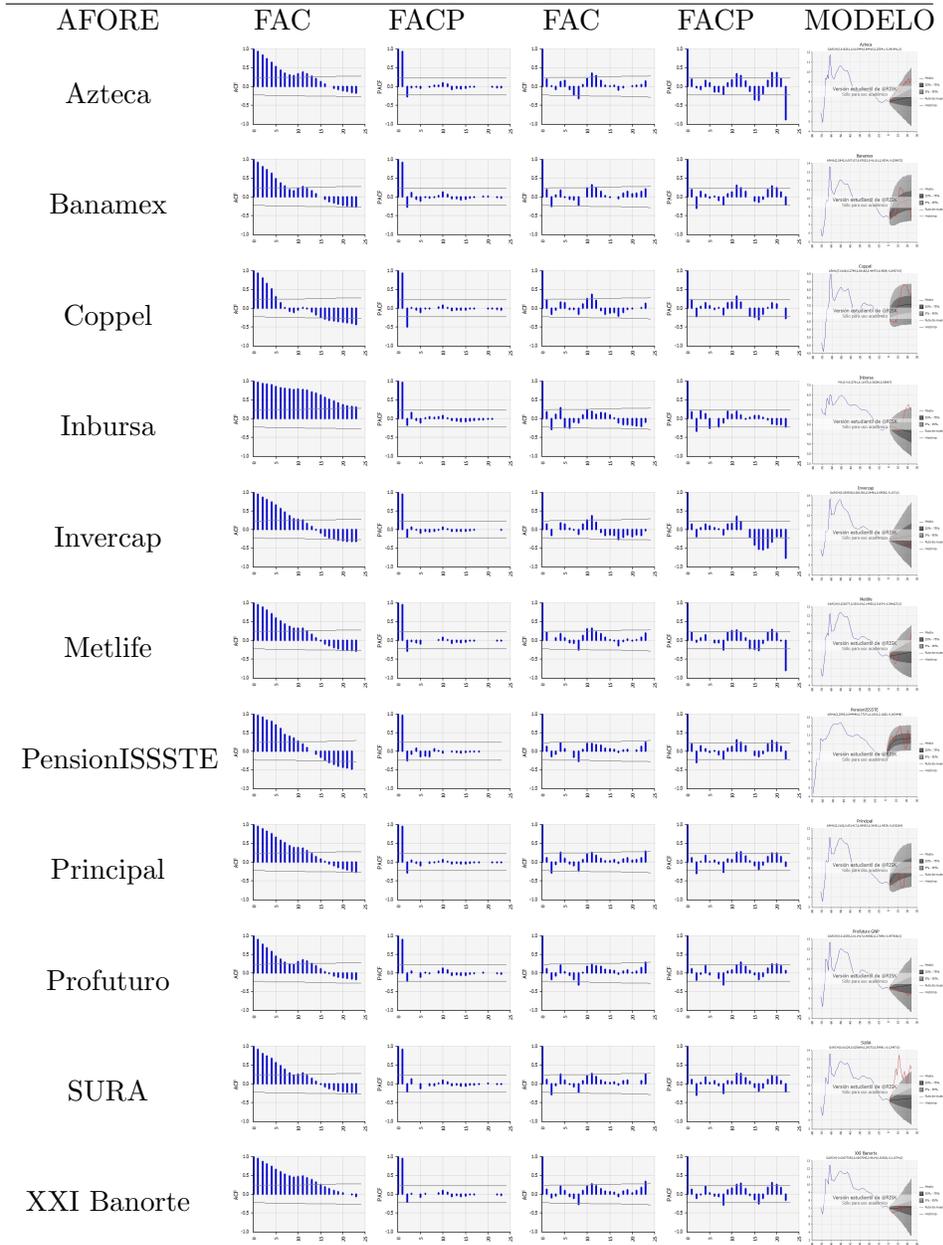
# Modelos de ajuste y correlogramas



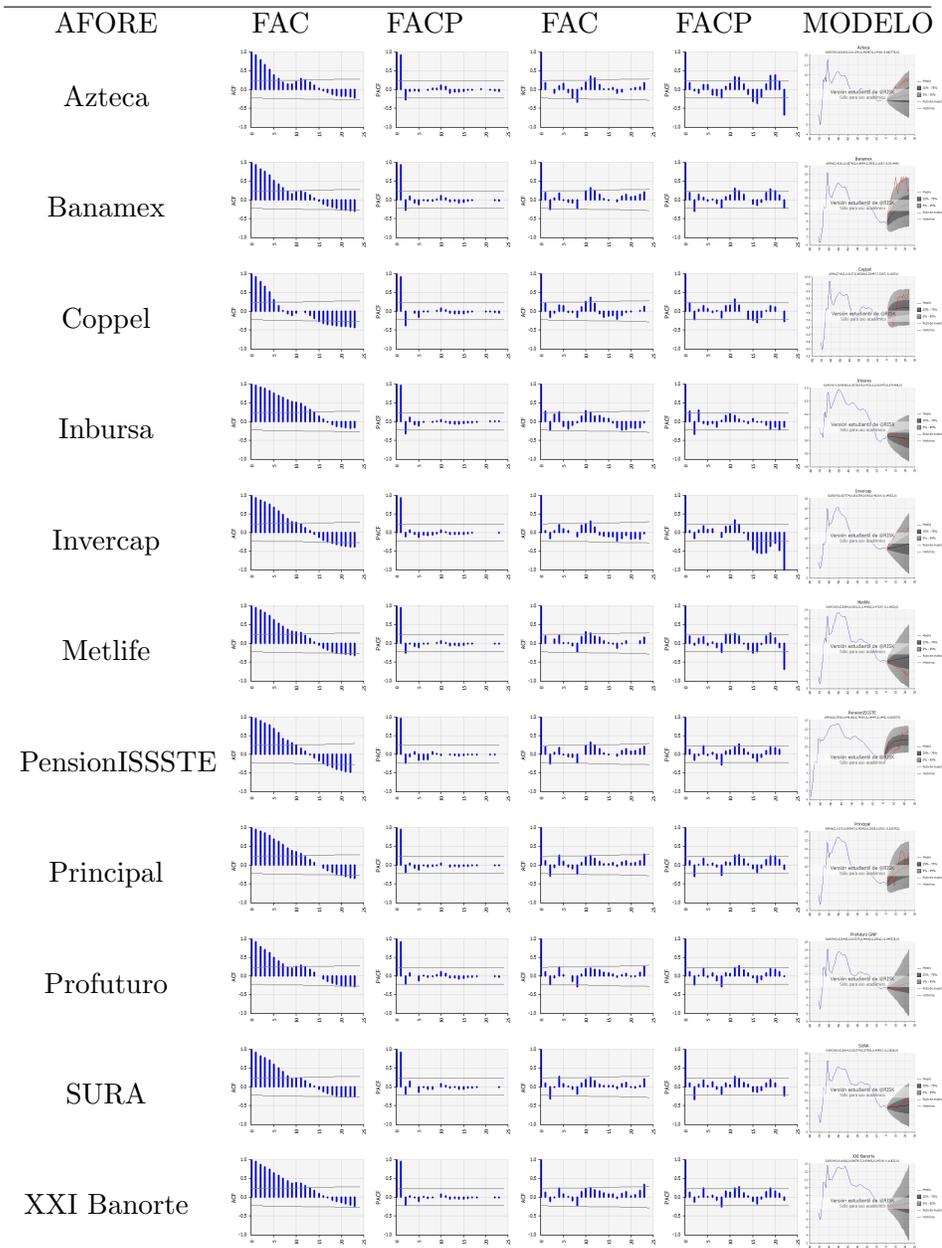
Cuadro B.1: FAC, FACP y Modelo de ajuste SB1.



Cuadro B.2: FAC, FACP y Modelo de ajuste SB2.



Cuadro B.3: FAC, FACP y Modelo de ajuste SB3.



Cuadro B.4: FAC, FACP y Modelo de ajuste SB4.



## Apéndice C

# Código fuente del programa

```
Sub Mensaje(control As IRibbonControl, id As String, index As Integer)

If index = 0 Then
    ColumnaAfore = 2
    Imagen = "1"
Elseif index = 1 Then
    ColumnaAfore = 3
    Imagen = "2"
Elseif index = 2 Then
    ColumnaAfore = 4
    Imagen = "3"
Elseif index = 3 Then
    ColumnaAfore = 5
    Imagen = "4"
Elseif index = 4 Then
    ColumnaAfore = 6
    Imagen = "5"
Elseif index = 5 Then
    ColumnaAfore = 7
    Imagen = "6"
Elseif index = 6 Then
    ColumnaAfore = 8
    Imagen = "7"
Elseif index = 7 Then
    ColumnaAfore = 9
    Imagen = "8"
Elseif index = 8 Then
    ColumnaAfore = 10
    Imagen = "9"
Elseif index = 9 Then
    ColumnaAfore = 11
    Imagen = "10"
Else
    ColumnaAfore = 12
    Imagen = "11"
End If

Principal.Show

End Sub
```

Figura C.1: Imágenes en el botón desplegable.

```

Private Sub UserForm_Initialize()
    Sheets("Cuenta Individual").Visible = True
    Sheets("Hoja1").Visible = False
    Sheets("Cuenta Individual").Activate
    Rows("1:1").RowHeight = 15
    Cells Clear
    Application.ScreenUpdating = False

    Principal.AportacionAdicional.AddItem (0)
    Principal.AportacionAdicional.AddItem (100)
    Principal.AportacionAdicional.AddItem (200)
    Principal.AportacionAdicional.AddItem (300)
End Sub

```

Figura C.2: Cargar comandos al inicializar el formulario.

```

Private Sub Calcular_Click()

If IsNumeric(Principal.SalarioMensual) = True And IsNumeric(Principal.Edad) = True _
And IsNumeric(Principal.ACotizados) = True And IsNumeric(Principal.MontoInicial) = True _
And IsNumeric(Principal.EdadRetiro) = True And IsNumeric(Principal.AportacionAdicional) = True Then

    If Val(Principal.SalarioMensual) < 0 Or Val(Principal.Edad) < 0 Or Val(Principal.ACotizados) < 0 Or _
    Val(Principal.MontoInicial) < 0 Or Val(Principal.EdadRetiro) < 0 Or Val(Principal.AportacionAdicional) < 0 Then
        MsgBox "No se aceptan valores negativos.", vbInformation, "Información"

    ElseIf Val(Principal.SalarioMensual) < 2401.2 Then
        MsgBox "Debe percibir al menos un salario mínimo.", vbInformation, "Información"

    ElseIf Val(Principal.Edad) < 18 Then
        MsgBox "La edad mínima requerida es de 18 años.", vbInformation, "Información"

    ElseIf Val(Principal.Edad) >= Val(Principal.EdadRetiro) Then
        MsgBox "No cuenta con años para cotizar.", vbInformation, "Información"

    ElseIf Int(Principal.Edad) <> Val(Principal.Edad) Then
        MsgBox "Sólo edades enteras.", vbInformation, "Información"

    ElseIf Val(Principal.ACotizados) > (Principal.Edad - 18) Then
        MsgBox "Años cotizados no válidos.", vbInformation, "Información"

    ElseIf Int(Principal.ACotizados) <> Val(Principal.ACotizados) Then
        MsgBox "Sólo años de cotización enteros.", vbInformation, "Información"

    ElseIf Val(Principal.EdadRetiro) < 60 Then
        MsgBox "La edad mínima de retiro es de 60 años.", vbInformation, "Información"

    ElseIf Val(Principal.EdadRetiro) > 65 Then
        MsgBox "La edad máxima de retiro es de 65 años.", vbInformation, "Información"

    ElseIf Int(Principal.EdadRetiro) <> Val(Principal.EdadRetiro) Then
        MsgBox "Sólo edad de retiro entera.", vbInformation, "Información"

    ElseIf Principal.AportacionAdicional <> 0 And Principal.AportacionAdicional <> 100 _
    And Principal.AportacionAdicional <> 200 And Principal.AportacionAdicional <> 300 Then
        MsgBox "Seleccionar una de las opciones disponibles para aportación adicional.", vbInformation, "Información"

```

Figura C.3: Valoración de información e inicio del programa parte 1.

```

Else
Principal.Hide

Cells(1, 1) = "Año"
Cells(1, 2) = "Rendimiento"
Cells(1, 3) = "Aportación anual"

Cells(2, 6) = "Salario mensual"
Cells(2, 7) = Principal.SalarioMensual.Value
Cells(3, 6) = "Edad"
Cells(3, 7) = Principal.Edad.Value
Cells(4, 6) = "Años cotizados"
Cells(4, 7) = Principal.ACotizados.Value
Cells(5, 6) = "Monto inicial"
Cells(5, 7) = Principal.MontoInicial.Value
Cells(6, 6) = "Edad de retiro"
Cells(6, 7) = Principal.EdadRetiro.Value
Cells(7, 6) = "Cuota social"
CuotaSocial
Cells(8, 6) = "% aportación"
Cells(8, 7) = 0.065
Cells(9, 6) = "Aportacion voluntaria"
Cells(9, 7) = Principal.AportacionAdicional.Value
Siefore
End If
Else
MsgBox "Sólo se permiten números.", vbInformation
End If
End Sub

```

Figura C.4: Valoración de información e inicio del programa parte 2.

```

Sub CuotaSocial()
x = ((Sheets("Cuenta Individual").Cells(2, 7) / 30) / 80.04)
For l = 1 To 4
Min = Sheets("CuotaSocial").Cells(l, 2)
Max = Sheets("CuotaSocial").Cells(l + 1, 2)
If x > 15 Then
Cells(7, 7) = 0
Else
If Val(x) = 1 Then
Cells(7, 7) = 3.87077
Else
If x > Min And x <= Max Then
Cells(7, 7) = Val(Sheets("CuotaSocial").Cells(l + 1, 3))
End If
End If
End If
Next
End Sub

```

Figura C.5: Cálculo de Cuota Social.

```

Sub Siefore()

y = Sheets("Cuenta Individual").Cells(3, 7)
For r = 8 To 10

    Min = Sheets("CuotaSocial").Cells(r, 1).Value
    Max = Sheets("CuotaSocial").Cells(r + 1, 1)

    If y >= Min And y < Max Then
        SB = 12 - r
        AñosEnSiefore = Max - Principal.Edad.Value
        InicioRango = ((11 - AñosEnSiefore) * 12) + 2
        If AñosEnSiefore > 11 Then
            AñosEnSiefore = 11
            InicioRango = 2
        End If
    Exit For
    Else
        SB = 1
        AñosEnSiefore = Principal.EdadRetiro.Value - Principal.Edad.Value
        InicioRango = ((11 - AñosEnSiefore) * 12) + 2
        If AñosEnSiefore > 11 Then
            AñosEnSiefore = 11
            InicioRango = 2
        End If
    End If
Next

Proceso
End Sub

```

Figura C.6: Cálculo de Siefore.

```

Sub Proceso()

InicioTabla = 1
FinalTabla = 11
contador = 0
For l = 1 To SB

    InicioRango = InicioRango
    FinalRango = InicioRango + 11
    For j = InicioTabla To AñosEnSiefore
        Cells(j + 1, 1) = j
        Cells(j + 1, 2) = "=Average(" & SB & " - contador & " & "!" & _
            Worksheets("SB" & SB - contador).Cells(InicioRango, ColumnaAfore).Address & "*" & _
            Worksheets("SB" & SB).Cells(FinalRango, ColumnaAfore).Address & ")*"
        If j = 1 Then
            Cells(j + 1, 3) = "=" & Cells(5, 7).Address & "*(12** & Cells(2, 7).Address & " & " & _
                Cells(8, 7).Address & ")*(1+(" & Cells(j + 1, 2).Address & " / 100))"
            If Cells(7, 7) <> 0 Then
                Cells(1, 4) = "Cuota Social anual"
                Cells(j + 1, 4) = "(12*30** & Cells(7, 7).Address & ")*(1+(" & Cells(j + 1, 2).Address & " / 100))"
                If Principal.AportacionAdicional <> 0 Then
                    Cells(1, 5) = "Aportación voluntaria"
                    Cells(j + 1, 5) = "(12** & Cells(9, 7).Address & ")*(1+(" & Cells(j + 1, 2).Address & " / 100))"
                End If
            Else
                If Principal.AportacionAdicional <> 0 Then
                    Cells(1, 4) = "Aportación voluntaria"
                    Cells(j + 1, 4) = "(12** & Cells(9, 7).Address & ")*(1+(" & Cells(j + 1, 2).Address & " / 100))"
                End If
            End If
        End If
    Next
End Sub

```

Figura C.7: Generación de tabla de saldo acumulado parte 1.

```

Else
Cells(j + 1, 3) = "=" & Cells(j, 3).Address & "+(12** & Cells(2, 7).Address & "" & _
Cells(8, 7).Address & *)*(1+* & Cells(j + 1, 2).Address & "/100))"
If Cells(7, 7) <> 0 Then
Cells(j + 1, 4) = "=" & Cells(j, 4).Address & "+(12*30** & Cells(7, 7).Address & _
")*(1+* & Cells(j + 1, 2).Address & "/100))"
If Principal.AportacionAdicional <> 0 Then
Cells(j + 1, 5) = "=" & Cells(j, 5).Address & "+(12** & Cells(9, 7).Address & _
")*(1+* & Cells(j + 1, 2).Address & "/100))"
End If
Else
If Principal.AportacionAdicional <> 0 Then
Cells(j + 1, 4) = "=" & Cells(j, 4).Address & "+(12** & Cells(9, 7).Address & _
")*(1+* & Cells(j + 1, 2).Address & "/100))"
End If
End If
End If
InicioRango = FinalRango + 1
FinalRango = FinalRango + 12
Next
InicioRango = 2
InicioTabla = AñosEnSiefore + 1

If l = SB - 1 Then
AñosEnSiefore = InicioTabla + (Cells(6, 7) - Cells(3, 7)) - j
Else
AñosEnSiefore = InicioTabla + 10
End If

If Cells(6, 7) - Cells(3, 7) > 44 Then
For q = 1 To (Cells(6, 7) - Cells(3, 7)) - 44
Aleatorio = WorksheetFunction.RandBetween(1, 11)
Cells(45 + q, 2) = "-" & Cells(34 + Aleatorio, 2).Address
Next
End If

contador = contador + 1
Next

Formato
Simular

End Sub

```

Figura C.8: Generación de tabla de saldo acumulado parte 2.

```

Sub Formato()

    Rows("1:1").RowHeight = 30.75

    r = Cells(1, 1).CurrentRegion.Rows.Count
    c = Cells(1, 1).CurrentRegion.Columns.Count

    If Cells(9, 7) <> 0 And Cells(7, 7) <> 0 Then
        c = c - 2
    End If

    Range(Cells(1, 1), Cells(1, c)).Select
    Selection.Interior.Color = 10066176
    Selection.Font.Bold = True
    Selection.Font.ThemeColor = xlThemeColorDark1
    Selection.VerticalAlignment = xlCenter
    Selection.HorizontalAlignment = xlCenter
    Selection.WrapText = True

    Range(Cells(2, 1), Cells(r, 1)).Select
    Selection.HorizontalAlignment = xlCenter

    Range(Cells(2, 2), Cells(r, 2)).Select
    Selection.NumberFormat = "0.00"
    Selection.HorizontalAlignment = xlCenter

    Range(Cells(2, 3), Cells(r, c)).Select
    Selection.Style = "Comma"

End Sub

```

Figura C.9: Asignación de formato a tabla.

```

Sub Simular()

    AñosLaborables = Cells(6, 7) - Cells(3, 7)
    Sheets("Hoja1").Cells(1, 1000) = AñosLaborables
    AñosFalta = 25 - Cells(4, 7)
    Sheets("Hoja1").Cells(1, 1001) = AñosFalta
    If AñosFalta > 0 Then
        If AñosFalta <= AñosLaborables Then
            Cells(AñosFalta + 1, 8) = "=RiskOutput("Saldo acumulado")+SUM(" & Cells(AñosFalta + 1, 3).Address _
            & " & Cells(AñosFalta + 1, 5).Address & ")"
            Cells(AñosFalta + 1, 9) = "=RiskMean(" & Cells(AñosFalta + 1, 8).Address & ")"
            Sheets("Reporte").Cells(14, 6) = "=Cuenta Individual!" & Cells(AñosFalta + 1, 9).Address
            Referencia = AñosFalta + 1
        End If
    End If
End Sub

```

Figura C.10: Proceso de simulación del saldo acumulado parte 1.

```

Else
Cells(AñosLaborables + 1, 8) = "=RiskOutput(""Saldo acumulado")+SUM(" & _
Cells(AñosLaborables + 1, 3).Address & "" & Cells(AñosLaborables + 1, 5).Address & ")"
Cells(AñosLaborables + 1, 9) = "=RiskMean(" & Cells(AñosLaborables + 1, 8).Address & ")"
Sheets("Reporte").Cells(14, 6) = "=Cuenta Individual" & Cells(AñosLaborables + 1, 9).Address
Referencia = AñosLaborables + 1
End If
Else
Cells(AñosLaborables + 1, 8) = "=RiskOutput(""Saldo acumulado")+SUM(" & _
Cells(AñosLaborables + 1, 3).Address & "" & Cells(AñosLaborables + 1, 5).Address & ")"
Cells(AñosLaborables + 1, 9) = "=RiskMean(" & Cells(AñosLaborables + 1, 8).Address & ")"
Sheets("Reporte").Cells(14, 6) = "=Cuenta Individual" & Cells(AñosLaborables + 1, 9).Address
Referencia = 2
End If
Sheets("Hoja1").Cells(1, 1002) = Referencia

Risk.Simulation.Start

Sheets("Reporte").Visible = True
Sheets("Reporte").Activate
Reporte
End Sub

```

Figura C.11: Proceso de simulación del saldo acumulado parte 2.

```

Sub Reporte()
Cells(9, 1) = Sheets("Cuenta Individual").Cells(2, 7).Value
Cells(9, 2) = Sheets("Cuenta Individual").Cells(3, 7).Value
Cells(9, 3) = Sheets("Cuenta Individual").Cells(4, 7).Value
Cells(9, 4) = Sheets("Cuenta Individual").Cells(5, 7).Value
Cells(9, 5) = Sheets("Cuenta Individual").Cells(6, 7).Value
Cells(9, 6) = Sheets("Cuenta Individual").Cells(8, 7).Value
Cells(9, 7) = Sheets("Cuenta Individual").Cells(9, 7).Value

If AñosFalta > AñosLaborables Then
Cells(15, 1) = "Negativa de pensión"
Cells(15, 6) = Cells(14, 6)
Cells(16, 6) = ""

```

Figura C.12: Generación de reporte parte 1.

```

Else
If ((Cells(14, 6) / (81 - Cells(9, 5))) / 12) < 2857.94 Then
Cells(15, 1) = "Pensión Mínima Garantizada (PMG)"
Cells(15, 6) = 2857.94
Else
Cells(15, 1) = "Pensión mensual"
Cells(15, 6) = "(" & Cells(14, 6).Address & ")" & 81 - Cells(9, 5) & ") / 12"
End If
Cells(16, 6) = "=" & Cells(15, 6).Address & "*" & Cells(9, 1).Address
End If

Cells(20, 2).Select
Cells(20, 2).Clear

If (AñosFalta > 0 And AñosFalta <= AñosLaborables) Then

Sheets("Cuenta Individual").Cells(AñosFalta + 1, 10) = "Idéntico"
contador = 1
For k = AñosFalta + 2 To AñosLaborables + 1
Sheets("Cuenta Individual").Cells(k, 10) = contador
contador = contador + 1
Next

With Selection.Validation
.Delete
.Add Type:=xlValidateList, AlertStyle:=xlValidAlertStop, Operator=_
xlBetween, Formula1:="=" & "Cuenta Individual!" & "$J$" & AñosFalta + 1 & "*" & "$J$" & AñosLaborables + 1 & ""
.IgnoreBlank = True
.InCellDropdown = True
.ShowInput = True
.ShowError = True
End With

Else

If AñosFalta <= 0 Then
Sheets("Cuenta Individual").Cells(AñosLaborables + 1, 10) = "Idéntico"
With Selection.Validation
.Delete
.Add Type:=xlValidateList, AlertStyle:=xlValidAlertStop, Operator=_
xlBetween, Formula1:="=" & "Cuenta Individual!" & "$J$" & AñosLaborables + 1 & ""
.IgnoreBlank = True
.InCellDropdown = True
.ShowInput = True
.ShowError = True
End With

Else
If AñosFalta > AñosLaborables Then
Sheets("Cuenta Individual").Cells(AñosLaborables + 1, 10) = "Idéntico"
With Selection.Validation
.Delete
.Add Type:=xlValidateList, AlertStyle:=xlValidAlertStop, Operator=_
xlBetween, Formula1:="=" & "Cuenta Individual!" & "$J$" & AñosLaborables + 1 & ""
.IgnoreBlank = True
.InCellDropdown = True
.ShowInput = True
.ShowError = True
End With
Else
Cells(20, 2) = ""
End If

End If

End If

```

Figura C.13: Generación de reporte parte 2.

```

ActiveSheet.Shapes.Range(Array("CUADRO")) Select
Selection.ShapeRange.ZOrder msoBringToFront
For Each x In ActiveSheet.Pictures
    Nombre = x.Name
    If Nombre = Imagen Then
        x.Select
        Selection.ShapeRange.ZOrder msoBringToFront
    Exit For
End If
Next

Cells(20, 4) = ""
Cells(20, 7) = ""
Cells(1, 1).Select
Unload Principal
End Sub

```

Figura C.14: Generación de reporte parte 3.

```

Sub ReporteAdicional()

If Cells(20, 2) = "" Or Cells(20, 4) = "" Or Cells(20, 7) = "" Then
    MsgBox "Complete todos los campos.", vbInformation, "Atto"
Else

Sheets("Cuenta Individual").Cells(8, 7) = Cells(20, 4)
Sheets("Cuenta Individual").Cells(9, 7) = Cells(20, 7)

r = Sheets("Cuenta Individual").Cells(1, 1).CurrentRegion.Rows.Count

Sheets("Cuenta Individual").Activate
Sheets("Cuenta Individual").Range(Cells(2, 8), Cells(48, 9)).Select
Selection.ClearContents

For v = 2 To r

If Cells(7, 7) <> 0 Then
If Sheets("Reporte").Cells(20, 7) <> 0 Then
    If v = 2 Then
        Range(Cells(1, 4), Cells(r, 4)).Select
        Selection.Copy
        Range(Cells(1, 5), Cells(r, 5)).Select
        Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteFormats
    Cells(v - 1, 5).Select
    Cells(v - 1, 5) = "Aportación voluntaria"
    Cells(v, 5) = "=" & (12** & Cells(9, 7).Address & ")*(1+(" & Cells(v, 2).Address & "/100))"
    Else
    Cells(v, 5) = "=" & Cells(v - 1, 5).Address & _
        "&*(12** & Cells(9, 7).Address & ")*(1+(" & Cells(v, 2).Address & "/100))"
    End If
Else
Range(Cells(2, 5), Cells(48, 5)).Select
Selection.ClearContents
Cells(1, 5).Select
Selection.Interior.Pattern = xlNone
End If
Else

```

Figura C.15: Generación de reporte adicional parte 1.

```

If Sheets("Reporte").Cells(20, 7) <> 0 Then
  If v = 2 Then
    Range(Cells(1, 3), Cells(r, 3)).Select
    Selection.Copy
    Range(Cells(1, 4), Cells(r, 4)).Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteFormats
    Cells(v - 1, 4).Select
    Cells(v - 1, 4) = "Aportación voluntaria"
    Cells(v, 4) = "(12** & Cells(9, 7).Address & ")*(1+( & Cells(v, 2).Address & "/100))"
  Else
    Cells(v, 4) = "( & Cells(v - 1, 4).Address & "+(12** & Cells(9, 7).Address & ")*(1+( & Cells(v, 2).Address & "/100))"
  End If
Else
  Range(Cells(2, 4), Cells(48, 4)).Select
  Selection.ClearContents
  Cells(1, 4).Select
  Selection.Interior.Pattern = xlNone
End If
End If

If Sheets("Cuenta Individual").Cells(v, 10) = Sheets("Reporte").Cells(20, 2) Then
  f = v
  Sheets("Cuenta Individual").Cells(v, 8) = "RiskOutput("Saldo acumulado")+SUM(" _
  & Cells(v, 3).Address & "*" & Cells(v, 5).Address & ")"
  Sheets("Cuenta Individual").Cells(v, 9) = "RiskMean(" & Cells(v, 8).Address & ")"
End If
Next

RiskSimulation.Start

Sheets("Reporte").Activate

Cells(9, 6) = Sheets("Cuenta Individual").Cells(8, 7).Value
Cells(9, 7) = Sheets("Cuenta Individual").Cells(9, 7).Value

Sheets("Reporte").Cells(14, 6) = "Cuenta Individual" & Cells(f, 9).Address
End If

If AñosFalta > AñosLaborables Then
  Cells(15, 1) = "Negativa de pensión"
  Cells(15, 6) = Cells(14, 6)
  Cells(16, 6) = ""
Else
  If ((Cells(14, 6) / (81 - Cells(9, 5))) / 12) < 2857.94 Then
    Cells(15, 1) = "Pensión Mínima Garantizada (PMG)"
    Cells(15, 6) = 2857.94
  Else
    Cells(15, 1) = "Pensión mensual"
    Cells(15, 6) = "( & Cells(14, 6).Address & "*" & 81 - Cells(9, 5) & ") / 12"
  End If
  Cells(16, 6) = " & Cells(15, 6).Address & "*" & Cells(9, 1).Address
End If
End Sub

```

Figura C.16: Generación de reporte adicional parte 2.

# Bibliografía

- [1] Aguirre Farías, F. M. (2012). Pensiones... ¿y con qué? México: FINEO.
- [2] AMAFORE Asociación Mexicana de Afores. (s.f.). Obtenido de AMAFORE: <http://www.amafore.org/>
- [3] Bruce L. Bowerman, R. T. (2007). Pronósticos, series de tiempo y regresión. Un enfoque aplicado (Cuarta ed.). THOMSON.
- [4] Casas Monsegny, M., Cepeda Cuervo , E. (Enero - Junio de 2008). SCIELO Scientific Electronic Library Online. Obtenido de <http://www.scielo.org.co>
- [5] Cinca, A. N. (s.f.). Econometría (Segunda ed.). Mc Graw Hill.
- [6] CONSAR. (Noviembre de 2014). Metodología de la Calculadora de Retiro. Trabajador IMSS. Obtenido de Gob.mx: <http://www.consar.gob.mx>
- [7] CONSAR. (18 de Julio de 2016). El reto de la cobertura pensionaria: Experiencias Internacionales. Obtenido de Gob.mx: <http://www.gob.mx/consar/documentos/el-reto-de-la-cobertura-pensionaria-experiencias-internacionales>
- [8] CONSAR Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro. (s.f.). Obtenido de Gob.mx: <https://www.gob.mx/consar>
- [9] Damodar N. Gujarati, D. C. (2010). Econometría (Quinta ed.). Mc Graw Hill.
- [10] de Arce, R. (Diciembre de 1998). UAM Universidad Autónoma de Madrid. Obtenido de <https://www.uam.es/otroscentros/klein/doctras/doctra9806.pdf>

- [11] INEGI Instituto Nacional de Estadística y Geografía. (s.f.). Obtenido de INEGI: <http://www.inegi.org.mx/>
- [12] Moreno, Á. G. (2013). Las AFORE El sistema de ahorro y pensiones mexicano (Sexta ed.). México: PORRÚA.
- [13] Ornelas, N. A. (1997). Las AFORES paso a paso (Tercera ed.). SICCO.