Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Cálculo del beneficio y costo de un seguro de vida, visto como un proceso estocástico mediante el método de aproximación numérica Runge Kutta.

Tesis presentada para obtener el título de:
Licenciado en Actuaría

Presenta:
Luis Daniel Ramírez Luna

Directora de Tesis:
M.C. Brenda Zavala López

Agosto 2017

A mis padres y hermanos.
A mis abuelos.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por permitirme obtener este logro.

A mis padres, a quienes debo todo lo que soy, por apoyarme en cada momento, por todos los valores que me han inculcado. Gracias por ser el mejor ejemplo a seguir.

Un especial agradecimiento a mi asesora M.C. Brenda Zavala López, por todo su tiempo y apoyo, por la confianza y por darme la oportunidad de desarrollar este trabajo.

A mis sinodales Dra. Hortensia Reyes Cervantes, Mtro. Ángel Tejeda Moreno, Mtro. José Asunción Hernández, por sus valiosos comentarios y observaciones a esta tesis. A todos los profesores con quienes tuve la oportunidad de tomar clase, por todas sus enseñanzas, en especial al Dr. José Raúl Castro Esparza.

A mis amigos, por acompañarme en los buenos y malos momentos.

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Introducción

Los seguros sobre las personas cubren los riesgos que pueden afectar su existencia, integridad física o salud, por lo cual las compañías aseguradoras cubren estos riesgos mediante el pago de una prima en caso de su ocurrencia, sin embargo, al existir distintos estados de salud en los que se puede encontrar una persona, calcular el costo y el beneficio de esta cobertura depende del estado en que se encuentre la persona en el momento de la contratación y en el momento de la reclamación del seguro.

Existen procesos o fenómenos que pueden cambiar a través del tiempo, estos se conocen como procesos estocásticos, en los cuales no se puede predecir el resultado de dicho cambio; en un seguro sobre personas el individuo se puede encontrar en distintos estados de salud como son: supervivencia, invalidez, hospitalización, jubilación entre otros, la ciencia actuarial se auxilia de procesos estocásticos a tiempo discreto o continuo para calcular la probabilidad de que el individuo se encuentre en un estado en cierto tiempo.

Uno de los riesgos que afectan tanto física como económicamente es sin duda la pérdida de la salud, ocasionada por alguna enfermedad o accidente, para cubrir tal eventualidad existen en nuestro país los servicios de salud proporcionados por instituciones como el IMSS.
La motivación de un seguro de invalidez es ofrecer una cobertura accesible para personas saludables que se encuentren laborando pero que puedan estar expuestos a un accidente o enfermedad no profesional, debido a que la indemnización otorgada por el Instituto consiste en el 35 % del salario de la persona, esta puede quedar en una situación de inseguridad económica al ver reducidos sus ingresos.

En el presente trabajo se plantea un seguro complementario para los trabajadores afiliados al IMSS, representado como un proceso estocástico con tres estados (Saludable, Incapacitado y Fallece).
El problema principal radica en calcular las probabilidades de transición de un estado a otro, para lo cual se plantea un sistema de ecuaciones utilizando la ecuación de Kolmogorov. En caso de que el sistema no tenga una solución analítica, se aproximará la solución mediante el método numérico Runge Kutta de orden 4.

A través de los 4 capítulos se darán los conceptos básicos de teoría del interés, probabilidad, seguros y álgebra lineal necesarios para el planteamiento del problema, posteriormente se explicarán los métodos para encontrar una solución numérica o analítica, para así presentar la aplicación con dos ejemplos utilizando datos proporcionados por el IMSS en las tablas presentadas en "Valuación Actuarial del Seguro de Invalidez y Vida al 31 de diciembre de 2014" para México.

Debido a que las fuerzas de mortalidad son distintas para cada edad, el sistema de ecuaciones cambiará dependiendo de la edad de la persona al momento de la contratación, es decir, para cada edad se tendrá un sistema distinto, de este modo el cálculo para distintas edades puede ser un proceso complicado si se realizan manualmente como se verá en el ejemplo presentado, por lo cual se automatizará mediante la creación de un programa en Visual Basic for Applications (VBA) en Excel, en el que bastará con ingresar los datos necesarios para obtener el resultado.

Objetivos

Capítulo 1: Presentar conceptos básicos de teoría del interés y probabilidad, necesarios para el planteamiento y cálculo de anualidades contingentes y seguros.
Dar definiciones y algoritmos para determinar valores y vectores propios de una matriz a fin de ejemplificar el crecimiento poblacional y como auxiliares en la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales.

Capítulo 2: Definir los conceptos de probabilidad de supervivencia y fallecimiento y utilizarlos para el cálculo de anualidades contingentes y seguros de vida.

Capítulo 3: Presentar y ejemplificar algunos métodos para la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias, el método Runge Kutta de orden 4 se utilizará en el Capítulo 4 para solucionar el problema concreto del seguro de invalidez propuesto.

Capítulo 4: Demostrar la ecuación de Kolmogorov y relacionarla con el cálculo de seguros con más de dos estados.
Ejemplificar el cálculo de un seguro de invalidez complementario a la cobertura ofrecida por el IMSS.

Apéndice C: Automatizar la tarea del cálculo del seguro propuesto en el capítulo 4, utilizando VBA.

Capítulo 1

Conceptos Básicos

La mayoría de los autores coinciden en fijar como fecha de nacimiento de la ciencia actuarial el año 1693, año en que el astrónomo inglés Edmund Halley publica un estudio sobre mortalidad y cálculo de primas de anualidades, no hay que olvidar que el cálculo actuarial de vida está fundamentado primordialmente en las técnicas de las matemáticas financieras, la probabilidad y el análisis estadístico [13].

1.1. Teoría del Interés

El interés puede ser definido como la compensación que un prestatario paga a un prestamista de capital por el uso de este. Así, el interés puede ser visto como una forma de renta que el prestatario paga al prestamista para compensar la pérdida de uso del capital que tiene el prestamista mientras el capital ha sido prestado.
Una transacción financiera común es la inversión de un monto de dinero a una tasa de interés. El monto inicial de dinero (capital) invertido es llamado principal y el monto total recibido después de un periodo de tiempo es llamado valor acumulado. La diferencia entre el valor acumulado y la inversión inicial es el monto de interés, generado durante el periodo de inversión.

1.1.1. Interés compuesto

La teoría de interés compuesto asume que el interés generado es automáticamente reinvertido. La palabra “compuesto” se refiere al proceso en el cual el interés es reinvertido para generar intereses adicionales.

Definición 1.1. *: La tasa efectiva de interés i es el monto de dinero que una unidad invertida al principio de un periodo generará durante el periodo, donde el interés es pagado al final del periodo.*

Para encontrar la función asociada al interés compuesto, se considera la inversión de 1, el cual acumula $1+i$ al final del primer periodo. Este balance $1+i$ puede ser considerado como el principal al principio del segundo periodo y generará intereses de $i(1+i)$ durante el segundo periodo. El balance al final del segundo periodo es $(1+i)+i(1+i)=(1+i)^2$. Similarmente el balance $(1+i)^2$ puede ser considerado como el principal al principio del tercer periodo y generará un interés de $i(1+i)^2$ durante el tercer periodo. El balance al final del tercer periodo es $(1+i)^2+i(1+i)^2=(1+i)^3$. Continuando con este proceso indefinidamente, se obtiene

$$a(t)=(1+i)^t \text{ para } t=1,\ 2,\ 3,...$$

Esta se define como función de acumulación para el interés compuesto para valores positivos de t.

Ejemplo 1.1. *El valor acumulado de \$2000 invertidos por 4 años, a una tasa de interés compuesto de 8 % por año, es:*

$$\text{Valor acumulado} = \$2000(1.08)^4 = \$2720.98,$$

el término $1+i$ es llamado factor de acumulación, ya que acumula el valor de una inversión al principio de un periodo a su valor al final del periodo.

El monto que una persona invierte inicialmente para que el balance sea 1 al final de un periodo es $(1+i)^{-1}$. Se define:

$$v=\frac{1}{1+i}.$$

El término v es llamado factor de descuento, ya que descuenta el valor de una inversión al final de un periodo a su valor al inicio del periodo, el cual se puede generalizar para periodos de tiempo mayores a un periodo. Se define $a^{-1}(t)$ como la función de descuento

$$a^{-1}(t)=\frac{1}{(1+i)^t}= v^t.$$

Ejemplo 1.2. *: El monto que debe ser invertido a un interés compuesto del 9 % anual para acumular \$1000 al final de 3 años, es:*

$$1000v^3=\frac{1000}{(1.09)^3}=\$772.18,$$

en cierto sentido, la acumulación y el descuento son procesos opuestos. El término $(1+i)^t$ se refiere al valor acumulado de 1 al final de t periodos. El factor v^t se refiere al valor presente (o valor descontado) de 1 para ser pagado al final de t periodos.

Se ha definido la tasa efectiva de interés i como una medida del interés pagado al final de un periodo. Por otro lado, la tasa efectiva de descuento, denotada por d, es una medida del interés pagado al principio del periodo. Asumiendo que una persona presta 1 a una tasa efectiva de descuento d, entonces, en efecto, la inversión original es $1-d$ y el monto de interés (descuento) es d.

Definición 1.2. *: La tasa efectiva de descuento d es la división de la cantidad de interés generada durante el periodo entre la cantidad invertida al final del periodo.*

La tasa de interés i se puede expresar en términos de la tasa de descuento d como:

$$i = \frac{d}{1-d}.$$

Se reexpresa d como función de i:

$$\begin{aligned} i &= \frac{d}{1-d} \\ i - id &= d \\ d(1+i) &= i \\ d &= \frac{i}{1+i}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3. *: Una persona acuerda pagar \$2000 dentro de diez años, si se le aplica una tasa de descuento compuesto del 8 %. En la tabla se observa la cantidad descontada cada año por intereses y el principal que recibe el día de hoy.*

Periodo	**Fondo**	**Descuento**
0	868.78	75.54
1	944.32	82.11
2	1,026.43	89.25
3	1,115.69	97.01
4	1,212.71	105.45
5	1,318.16	114.62
6	1,432.78	124.59
7	1,557.37	135.42
8	1,692.80	147.20
9	1,840.00	160.00
10	2,000.00	

Note que usando la definición de descuento compuesto se tiene que:

$$\begin{aligned}\text{Valor presente} &= 2,000(1-0.08)^{10}\\ &= 868.77,\end{aligned}$$

sin necesidad de construir la tabla anterior.

1.1.2. Anualidades

Definición 1.3. *Una anualidad puede ser definida como una serie de pagos realizados en intervalos iguales de tiempo. El intervalo entre los pagos de la anualidad es llamado periodo de pago.*

Considerando una anualidad en la cual pagos de 1 son realizados al final de cada periodo por n periodos, donde n es un entero positivo. Tal anualidad es llamada anualidad inmediata (o posiblemente anualidad ordinaria). Se asume que la tasa de interés es i por periodo, donde $i > 0$. El valor presente de la anualidad es calculado un periodo antes de realizar el primer pago y se denota por $a_{\overline{n}|}$, mientras que el valor acumulado de la anualidad es calculado en el periodo n y se denota por $S_{\overline{n}|}$.

Se puede derivar una expresión para $a_{\overline{n}|}$ como una ecuación de valor al principio del primer periodo. El valor presente de un pago de 1 hecho al final del primer periodo es v. El valor presente de un pago de 1 hecho al final del segundo periodo es v^2. Este proceso continúa hasta el valor presente de un pago de 1 hecho al final del n-ésimo periodo es v^n. El valor presente total $S_{\overline{n}|}$ debe ser igual a la suma de los valores presentes de cada pago, es decir:

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + ... + v^{n-1} + v^n.$$

Sin embargo, esta fórmula es poco práctica para valores grandes de n. Es posible derivar una expresión más compacta tomado la fórmula anterior como una progresión geométrica.

$$\begin{aligned}a_{\overline{n}|} &= v + v^2 + ... + v^{n-1} + v^n\\ &= v\left(\frac{1-v^n}{1-v}\right)\\ &= v\left(\frac{1-v^n}{iv}\right)\\ &= \frac{1-v^n}{i}.\end{aligned}$$

Una expresión para $S_{\overline{n}|}$ puede ser calculada de manera análoga como una ecuación de valor al final del n-ésimo periodo. El valor acumulado de un pago de 1 hecho al final del primer periodo es $(1+i)^{n-1}$. El valor acumulado de un pago de 1 realizado al final del segundo periodo es $(1+i)^{n-2}$. Este proceso continúa hasta el valor acumulado de un pago de 1 realizado al final del n-ésimo periodo es 1. El valor total acumulado $S_{\overline{n}|}$ debe ser igual a la suma de valores acumulados de cada periodo, es decir

$$S_{\overline{n}|} = \ 1 + (1+i) + ... + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}.$$

De igual manera, tomando la progresión geométrica tenemos

$$\begin{aligned} S_{\overline{n}|} &= 1 + (1+i) + ... + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1} \\ &= \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \\ &= \frac{(1+i)^n - 1}{i}. \end{aligned}$$

En una anualidad anticipada, los pagos son realizados al principio de cada periodo. El valor presente de esta anualidad es calculado al tiempo en que el primer pago es realizado y se denota por $\ddot{a}_{\overline{n}|}$. El valor acumulado es calculado un periodo después de que el último pago es realizado y se denota por $\ddot{S}_{\overline{n}|}$.

Se puede encontrar una expresión para $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ de igual forma que se hizo para una anualidad inmediata como:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \ 1 + v + v^2 + ... + v^{n-1}.$$

Asumiendo la progresión geométrica

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{\overline{n}|} &= \frac{1 - v^n}{1 - v} \\ &= \frac{1 - v^n}{iv} \\ &= \frac{1 - v^n}{d}. \end{aligned}$$

Similarmente para $\ddot{S}_{\overline{n}|}$ tenemos

$$\begin{aligned} \ddot{S}_{\overline{n}|} &= (1+i) + (1+i)^2 + ... + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n \\ &= (1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \\ &= \frac{(1+i)^n - 1}{iv} \\ &= \frac{(1+i)^n - 1}{d}. \end{aligned}$$

1.2. Probabilidad

La teoría de la probabilidad es la parte de las matemáticas que se encarga del estudio de los fenómenos o experimentos aleatorios. Se entiende por experimento aleatorio todo aquel experimento tal que cuando se le repite bajo las mismas condiciones iniciales, el resultado que se obtiene no siempre es el mismo. La teoría de la probabilidad tiene el objetivo de modelar matemáticamente cualquier experimento aleatorio de interés.

Definición 1.4. *: Una variable aleatoria (generalmente denotada por X) es una función del espacio muestral en el conjunto de números reales que además satisface cierta condición de medibilidad. Representa una traducción de cada uno de los resultados del espacio muestral en números reales.*

La función de distribución acumulada o simplemente función de distribución de una variable aleatoria X es la función $F(x) : R \to [0, 1]$, definida como sigue:

$$F(x) = P[X \leq x].$$

En palabras, $F(x)$ denota la probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor menor o igual que x.

Definición 1.5. *: Una variable aleatoria X es discreta si puede tomar solo un número finito (o infinito numerable) de valores diferentes.*

Para una variable aleatoria discreta X, la función de masa de probabilidad $p(a)$ está definida por:

$$p(a) = P[X = a].$$

El conjunto de todos los valores de probabilidad constituye la distribución de la variable aleatoria. Es necesariamente cierto que:

$$\sum_x p(x) = 1.$$

Donde la suma es sobre todos los valores de x en el dominio.
El valor esperado de la variable aleatoria, denotado por $E[X]$, es un promedio ponderado de todos los valores que puede tomar X. Así tenemos

$$E[X] = \sum_x xp(x).$$

El valor esperado también es llamado como la media o el primer momento de la variable aleatoria. En general, el término $E[X^n]$, $n \geq 1$, es llamado el n-ésimo momento de la variable aleatoria y se define como:

$$E[X^n] = \sum_x x^n p(x), \text{ si existe} \sum_x |x^n| p(x) < \infty.$$

A pesar de que $E[X]$ representa un promedio ponderado de los valores posibles de X, esto no nos dice nada sobre la variación de esos valores. Por lo cual, si X es una variable aleatoria se define la varianza de X denotada por $\mathrm{Var}(X)$ como:

$$\mathrm{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = \sum_x (x - E[x])^2 p(x).$$

O una forma alternativa es

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2.$$

La función de distribución de una variable discreta es:

$$F(x) = P[X \leq x] = \sum_{t \leq x} p(y).$$

A continuación se mencionan algunas distribuciones de probabilidad conocidas.

Distribución de Poisson
Es una distribución discreta de un parámetro con función de probabilidad dada por

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

para $x = 0, 1, 2, ...,$ donde $\lambda > 0$. Y su valor esperado es:

$$E[X] = \lambda.$$

Y su varianza es también

$$\mathrm{Var}(X) = \lambda.$$

Distribución Binomial
En el modelo binomial se encuentra el concepto de repetidos ensayos independientes con cada ensayo terminando entre éxito o fracaso. La probabilidad de éxito en un solo ensayo, denotado por p, es constante sobre todos los ensayos. La variable aleatoria X, que denota el número de éxitos de n ensayos independientes, se dice que tiene una distribución binomial. La función de probabilidad es:

$$p(x) = \binom{n}{x} \mathrm{p}^x (1 - \mathrm{p})^{n-x}$$

para $x = 0, 1, 2, ..., n$, el valor esperado es:

$$E[X] = n\mathrm{p}.$$

La varianza está dada por:

$$\mathrm{Var}(X) = n\mathrm{p}(1 - \mathrm{p}).$$

Definición 1.6. *: Una variable aleatoria es continua si existe una función f no negativa, definida para todos los números reales $x \in (-\infty, \infty)$, teniendo la propiedad de que para cualquier conjunto B de números reales:*

$$P[X \in B] = \int_B f(x)dx.$$

La función f es llamada función de densidad de probabilidad de la variable X y satisface

$$\int_x f(x)dx = 1.$$

Donde la integral es sobre todos los valores que puede tomar x.
Análogamente al caso discreto, se puede considerar el promedio ponderado de la función de la variable aleatoria, el cual es el valor esperado o primer momento de la variable aleatoria, así tenemos

$$E[X] = \int_x xf(x).$$

En general tenemos

$$E[X^n] = \int_x x^n f(x), \text{ si } \int_x |x^n| f(x) < \infty$$

como el n-ésimo momento. De esta forma, la varianza está dada por

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = \int_x (x - E[x])^2 \cdot f(x)dx.$$

Otra forma es

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2.$$

Al igual que en el caso discreto, la función de distribución de la variable aleatoria X está dada por $F(x) = P[X \leq x]$. Esto significa que:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy.$$

Y se tiene la relación

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x).$$

Las siguientes dos distribuciones de probabilidad continuas son frecuentemente utilizadas en el cálculo de seguros y probabilidades de supervivencia.

Distribución uniforme
Es caracterizada por una densidad de probabilidad constante en todos los puntos del dominio. Si la variable es definida en el intervalo $a < X < b$, y si la función de densidad es constante, la función de densidad está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{b - a}.$$

para $a < x < b$. Esto significa que la función de densidad es el recíproco de la longitud del intervalo en que la variable está definida. La media de la distribución es:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}.$$

La varianza es

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Y la función de distribución es

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}.$$

Distribución exponencial
Está definida sobre todos los valores positivos de x por la función de densidad

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}.$$

con $x > 0$ y $\lambda > 0$. El valor esperado es:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

La varianza es

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2},$$

y la función de distribución se define como:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

La distribución uniforme y exponencial se utilizarán para aproximar valores de probabilidades entre dos edades enteras en la Sección 4.3.

1.3. Álgebra

Sea A una matriz de $n \times n$. La función $L : R^n \to R^n$ definida por $L(x) = Ax$, para $x \in R^n$, es una transformación lineal. Una cuestión de considerable importancia es la determinación de vectores x, si los hay, tales que x y Ax son paralelos.

1.3.1. Valores propios y vectores propios

Definición 1.7. *: Sea A una matriz de $n \times n$. El número real λ es un valor propio de A si existe un vector x distinto de cero en $\mathbb{C}^n$ tal que:*

$$Ax = \lambda x.$$

Todo vector x distinto de cero que satisfaga la ecuación anterior es un vector propio de A, asociado con el valor propio λ.

Observación: Los valores propios también se llaman valores característicos, autovalores, valores latentes o eigenvalores (del alemán eigen, que significa "propio"). De manera similar, los vectores propios también se llaman vectores característicos, autovectores, vectores latentes o eigenvectores.

Ejemplo 1.4. *:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces:

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De modo que

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es un vector propio de A asociado al valor propio $\lambda_1 = \frac{1}{2}$. Además:

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

De modo que

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

es un vector propio de A asociado al valor propio $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

Esto ilustra el hecho de que x es un vector propio de A, y por lo tanto, x y Ax son paralelos.

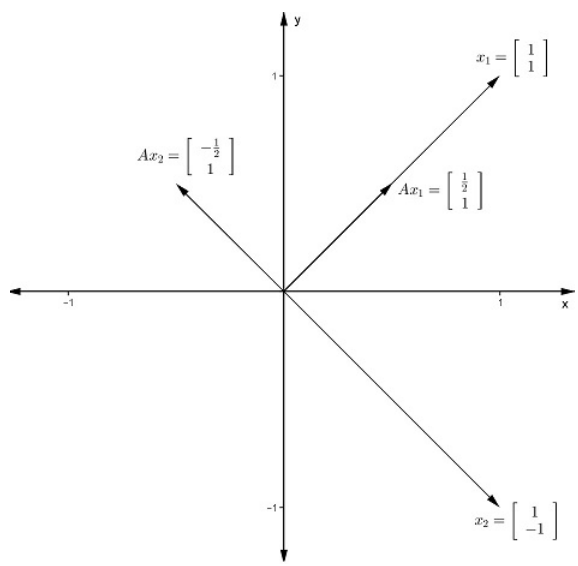


Figura 1.1: Vectores propios gráficamente [9]

Cálculo de valores propios y vectores propios.

En el ejemplo siguiente se determinan los valores y vectores propios asociados de una matriz utilizando un método sistemático.
Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Para determinar los valores y vectores propios, es decir, todos los números reales y los vectores no nulos $\left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right]$ que satisfagan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Esto se convierte en un sistema de ecuaciones

$$x_1 + x_2 = \lambda x_1$$

$$-2x_1 + 4x_2 = \lambda x_2$$

o

$$(\lambda - 1)x_1 - x_2 = 0$$
$$2x_1 + (\lambda - 4)x_2 = 0.$$

El anterior es un sistema homogéneo de dos ecuaciones en dos incógnitas, el cual tiene solución no trivial si y solo si el determinante de su matriz de coeficientes es cero; es decir, si y solo si

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Esto significa que

$$(\lambda - 1)(\lambda - 4) + 2 = 0$$

o

$$0 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 3)(\lambda - 2).$$

Por lo tanto $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$ son los valores propios de A.
Para determinar todos los vectores propios de A asociados con $\lambda_1 = 2$, se forma el sistema lineal

$$Ax = 2x$$

o

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

esto da como resultado

$$x_1 + x_2 = 2x_1$$

$$-2x_1 + 4x_2 = 2x_2$$

o también

$$x_1 - x_2 = 0$$

$$2x_1 - 2x_2 = 0.$$

Lo cual también se pudo haber obtenido sustituyendo $\lambda = 2$ en

$$(\lambda - 1)x_1 - x_2 = 0$$

$$2x_1 + (\lambda - 4)x_2 = 0.$$

Todas las soluciones de este sistema están dadas por

$$x_1 = x_2$$

$$x_2 = \text{cualquier número } r \in R \neq 0.$$

Por lo tanto, todos los vectores propios asociados con el valor propio $\lambda_1 = 2$ están dados por $\left[\begin{smallmatrix} r \\ r \end{smallmatrix}\right]$. Donde r es cualquier número real distinto de cero.
De manera análoga, para $\lambda_2 = 3$ se obtiene

$$2x_1 - x_2 = 0$$

$$2x_1 - x_2 = 0.$$

Todas las soluciones de este sistema están dados por

$$x_1 = \tfrac{1}{2}x_2$$

$$x_2 = \text{cualquier número real } r.$$

Por lo tanto, todos los vectores propios asociados con el valor propio $\lambda_2 = 3$ están dados por $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}r \\ r \end{bmatrix}$. Donde r es cualquier número real distinto de cero.

Se puede decir que λ es un valor propio de A si y solo si

$$\mathrm{p}(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0.$$

$\mathrm{p}(\lambda)$ se llama el polinomio característico de A.
En general, se pueden calcular los valores propios y vectores propios en tres pasos:

Procedimiento para calcular valores propios y vectores propios
i. Se encuentra $\mathrm{p}(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
ii. Se encuentran las raíces $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ de $\mathrm{p}(\lambda) = 0$.
ii. Se resuelve el sistema homogéneo $(A - \lambda_i I)v = 0$, correspondiente a cada valor propio λ_i.

1.3.2. Diagonalización

Definición 1.8. *: Se dice que una matriz B es semejante o similar a una matriz A, si existe una matriz no singular P de $n \times n$ tal que:*

$$B = P^{-1}AP.$$

Si A y B son matrices semejantes de $n \times n$, entonces A y B tienen el mismo polinomio característico y, por consiguiente, tienen los mismos valores propios.

Definición 1.9. *: Una matriz de $n \times n$ es diagonalizable si existe una matriz diagonal D tal que A es semejante a D.*

Una matriz A es diagonalizable si y solo si tiene n vectores característicos linealmente independientes. En tal caso, la matriz diagonal D semejante está dada por

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ son los valores propios de A. Si P es una matriz cuyas columnas son vectores propios linealmente independientes de A, entonces

$$D = P^{-1}AP.$$

Procedimiento para diagonalizar una matriz A

Paso 1 Se encuentran los valores propios

Paso 2 Para cada valor λ_j de A, de multiplicidad k_j, determinamos una base para el espacio solución de $(\lambda_j I_n - A)x = 0$. Si la dimensión del espacio vectorial propio es menor que k_j, entonces A no es diagonalizable. De acuerdo con ello, determinamos n vectores propios linealmente independientes.

Paso 3 Sea P la matriz cuyas columnas son los n vectores propios linealmente independientes determinados en el paso 2. Entonces, $P^{-1}AP = D$, es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son los valores propios de A correspondientes a las columnas de P.

1.3.3. Ejemplo de crecimiento poblacional

Ejemplo 1.5. *Se tiene al inicio del mes una pareja de conejos recién nacidos, se sabe que cada pareja de conejos adultos genera una pareja de conejos cada mes. Si los conejos tardan un mes en convertirse en adultos.*

¿Cuántas parejas de conejos hay en el n-ésimo mes?

Sea U_n el número de parejas de conejos en el mes n-ésimo, el problema se puede expresar en la siguiente relación:

$$U_{n+1} = U_n + U_{n-1}.$$

Reescribiendo lo anterior

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \quad U_n + U_{n-1} \\ U_n &= \quad U_n + 0 \cdot U_{n-1}. \end{aligned}$$

En notación matricial

$$\begin{pmatrix} U_{n+1} \\ U_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ U_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Dada la relación anterior podemos expresar para n

$$\begin{pmatrix} U_n \\ U_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{n-1} \\ U_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo y repitiendo el proceso se tiene

$$\begin{pmatrix} U_{n+1} \\ U_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} U_1 \\ U_0 \end{pmatrix}.$$

Donde la condición inicial es $U_0 = 1$ y $U_1 = 1$.

El problema se convierte en determinar la potencia n-ésima de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Para esto, calculamos los valores propios de la matriz A.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Esto es

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \lambda x_1 \\ x_1 &= \lambda x_2. \end{aligned}$$

Así tenemos el sistema

$$\begin{aligned} (1-\lambda)x_1 + \quad x_2 &= 0 \\ x_1 - \quad \lambda x_2 &= 0. \end{aligned}$$

El cual tiene solución si y solo si el determinante es diferente de cero

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$$

Usando la fórmula general para ecuaciones de segundo orden

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Resolviendo para obtener los vectores propios tenemos

$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.$$

De aquí se tiene que la matriz formada por los vectores propios es

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

Con inversa

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & -1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Sea D la matriz cuyos elementos de la diagonal son los valores propios

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

Se tiene que $A = PDP^{-1}$ esto implica que $A^n = PD^nP^{-1}$, es decir

$$A^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & -1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} & -\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \end{bmatrix}$$

Dadas las condiciones iniciales $U_0 = 1$ y $U_1 = 1$ se tiene:

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right]$$

Note que la solución obtenida es la sucesión de Fibonacci.

Capítulo 2

Matemáticas actuariales

El riesgo acompaña al hombre y es consustancial a su naturaleza, pero no todos los riesgos son iguales, podría definirse el riesgo como la posibilidad de que ocurra un acontecimiento incierto, fortuito y de consecuencias negativas o dañosas.
Una forma de prevención del riesgo es adquirir un seguro de vida o una anualidad para evitar que una persona se vea afectada por una inseguridad económica.
Las matemáticas actuariales costruyen modelos a partir de las matemáticas, probabilidad, estadística y finanzas para cuantificar las consecuencias financieras de un riesgo.

2.1. Modelos de supervivencia

Un modelo de supervivencia es una distribución de probabilidad de una variable aleatoria, frecuentemente es resumida en forma de tabla la cual es llamada tabla de vida, esta es el cuadro estadístico que resume el impacto de dicho fenómeno demográfico en una población determinada en un año o periodos de años. Usualmente nos proporciona información de cada año individual lo cual dificulta la obtención de un modelo continuo.
Denotamos T_0 una variable aleatoria continua que mide la edad de la persona hasta que ocurre el momento de su fallecimiento.
Para la edad de fallo de una variable aleatoria T_0, definimos $F_0(t)$ como la función de distribución de T_0

$$F_0(t) = P\left(T_0 \leq t\right).$$

La función de supervivencia de una variable aleatoria T_0 se denota $S_0(t)$ y es definida por:

$$S_0(t) = 1 - F_0(t) = P\left(T_0 > t\right). \tag{2.1}$$

De aquí se sigue que $S_0(0) = 1$ y se representa como ${}_tp_0 = S_0(t)$.

Sea $f_0(t)$ la función de probabilidad de la variable continua de la edad al momento del fallecimiento, en general se define la función de densidad de probabilidad como la derivada de la función de distribución acumulada es decir:

$$\begin{aligned} f_0(t) &= \tfrac{d}{dt}F_0(t) \\ &= -\tfrac{d}{dt}S_0(t) \qquad \forall t > 0. \end{aligned}$$

Esto implica que:

$$F_0(t) = \int_0^t f_0(y)dy$$

$$S_0(t) = \int_t^\infty f_0(y)dy.$$

Definimos la fuerza de mortalidad como una medida condicional del fallecimiento instantáneo a la edad y, es decir la persona llega con vida a la edad y y fallece inmediatamente después.

$$\lambda_0(y)S_0(y) = f_0(y).$$

Esto implica que

$$\lambda_0(y) = \frac{f_0(y)}{S_0(y)}$$

pero

$$\begin{aligned} \lambda_0(y) &= \frac{-\tfrac{d}{dy}S_0(y)}{S_0(y)} \\ &= -\frac{d}{dy}\ln\left(S_0(y)\right). \end{aligned}$$

Integrando ambas partes de la igualdad de 0 al t

$$S_0(t) = e^{-\int_0^t \lambda_0(y)dy}.$$

Considere ahora que una persona ha sobrevivido hasta la edad x y se desea conocer cuanto tiempo ha de transcurrir hasta su fallecimiento, este tiempo que transcurre desde que alcanza la edad x hasta su fallecimiento se denota por T_x. A partir de las definiciones anteriores

$$T_0 = x + T_x.$$

Denotaremos ${}_tp_x$ como la probabilidad de que una persona que hoy tiene x años sobreviva hasta la edad $x+t$, lo que equivale a

$$\begin{aligned} {}_tp_x &= P\left(T_x > t\right) \\ &= P\left(T_0 - x > t | T_0 > x\right) \\ &= \frac{S_0\left(x+t\right)}{S_0(x)}. \end{aligned}$$

Al definir
$$\mu_{x+t} = -\frac{1}{{}_tp_x}\frac{d}{dt}\ {}_tp_x$$
Entonces
$${}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s}ds}.$$

Dado un modelo de supervivencia, con probabilidades de supervivencia ${}_tp_x$, se puede construir la tabla de vida para el modelo desde una edad inicial x_0 a la edad máxima ω. Se define una función l_x para $x_0 \leq x \leq \omega$ como sigue:
Sea l_{x_0} un número arbitrario positivo (llamado el radix de la tabla) y, para $0 \leq t \leq \omega - x_0$, se define:

$$l_{x_0+t} = l_{x_0}\ {}_tp_{x_0}.$$

De esta definición, se ve que para $x_0 \leq x \leq \omega$

$$\begin{aligned} l_{x+t} &= l_{x_0}\ {}_{x+t-x_0}p_{x_0} \\ &= l_{x_0}\ {}_{x-x_0}p_{x_0}\ {}_tp_x \\ &= l_x\ {}_tp_x \end{aligned}$$

Así

$${}_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}.$$

Donde l_x representa el número de personas a la edad x y l_{x+t} es el número de personas que continúan con vida a la edad $x+t$.
Además:
$${}_tq_x = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}.$$

Da la probabilidad condicional de no llegar con vida a la edad $x+t$ dado que se está vivo a la edad x.

Ejemplo 2.1. *Dada la función de distribución:*

$$F_0(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{120}\right)^{\frac{1}{6}}$$

para $0 \leq x < 120$.

Se puede determinar la tasa de mortalidad, usando que $S_0(x) = \left(1 - \frac{x}{120}\right)^{\frac{1}{6}}$, al derivar

$$\frac{d}{dx}S_0(x) = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{x}{120}\right)^{-\frac{5}{6}}\left(-\frac{1}{120}\right)$$

simplificando $\lambda_0(x) = -\frac{d}{dx}S_0(x)/S_0(x)$ se tiene

$$\lambda_0(x) = \frac{1}{720}\left(1 - \frac{x}{120}\right)^{-1}.$$

También sabemos que

$$q_x = 1 - \left(1 - \frac{1}{120 - x}\right)^{\frac{1}{6}}$$

al evaluar por ejemplo q_x y $\lambda_0(x+\frac{1}{2})$ para $x = 20$ y $x = 110$ se tiene que q_{20}=0.00167, q_{110}=0.01741, $\lambda_0(20+\frac{1}{2}) = 0.00168$ y $\lambda_0(110+\frac{1}{2}) = 0.01754$. Notamos que $\lambda_0(x+\frac{1}{2})$ es una buena aproximación de q_x cuando la tasa de mortalidad es pequeña, pero no es una buena aproximación, al menos en términos absolutos, cuando la tasa de mortalidad no es cercana a 0.

Un modelo de supervivencia puede ser representado como un simple modelo de Markov de dos estados, en tiempo continuo, donde el estado 1 es continuar vivo y el estado 2 es la muerte (el cual es un estado absorbente).
El modelo es representado por el siguiente diagrama.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Estado 1}\\ \text{(Sobrevivir)}\end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l}\text{Estado 2}\\ \text{(Fallecer)}\end{array}}$$

En el proceso no se puede regresar al estado 1 una vez que se le ha dejado, esto quiere decir que el evento de estar en el estado 1 en el tiempo $x+t$, dado que se está en el estado 1 en el tiempo x solo puede ocurrir si el proceso nunca deja el estado 1.
Sea una persona con vida de edad x, dicha persona se encuentra en el estado 1. Entonces la probabilidad de continuar en el estado 1 al tiempo $x+t$ está dada por

$$_tp_x = {}_tp_x^{11}.$$

Es decir, $_tp_x^{11}$ representa la probabilidad de estar en el estado 1 al tiempo $x+t$ dado que se está en el estado 1 al tiempo x.
Así, la probabilidad de morir antes del tiempo $x+t$ dado que se está con vida al tiempo x es

$$_tq_x = {}_tp_x^{12}.$$

Lo cual se presenta de forma más explícita en el Capítulo 4.

Ley de Mortalidad Mexicana

Las probabilidades de supervivencia permiten estimar funciones matemáticas que se resumen en modelos de comportamiento que se expresan con base en la función de supervivencia y la tasa instantánea de mortalidad.

Definición 2.1. *Las leyes de mortalidad son expresiones analíticas de la función de supervivencia que pretenden estimar el comportamiento de la mortalidad en función de la edad.*

Una ley de mortalidad que sea válida para cualquier población humana probablemente no existe. Sin embargo, para determinadas poblaciones y ciertos tramos de edad, es posible encontrar el ajuste de alguna ley teórica.
La ley de Gompertz asume que cada individuo presenta una resistencia a las enfermedades (y a fallecer por causas naturales) decreciente en función de la edad, por lo que la fuerza de mortalidad crece con la edad y su crecimiento relativo es constante. Por tanto, se deduce que dicha fuerza crece exponencialmente.

$$\mu_x = BC^x \quad x \geq 0,\ B > 0,\ C > 1.$$

Posteriormente, Makeham enunció dos leyes de supervivencia. La primera ley considera la tasa instantánea de mortalidad añadiendo una constante arbitraria, que representa la mortalidad accidental a la fuerza de mortalidad de Gompertz, es decir, que además de considerar la mortalidad por causas naturales, introduce la mortalidad accidental del individuo, independiente de la edad

$$\mu_x = A + BC^x \quad x \geq 0,\ B > 0,\ C > 1,\ A > -B.$$

Esta ley presenta buenos ajustes en edades intermedias (adultas), mientras que proporciona problemas en las edades extremas, principalmente en las edades más jóvenes puesto que en las edades infantiles la mortalidad es decreciente, por lo que se formula la segunda ley más elástica y fundamentada que la anterior, añadiendo otro sumando proporcional a la edad.
Con base en la tabla de mortalidad de México entre los años 2003 y 2010, Alejandro Mina Valdés [1] estimó la función de Gompertz-Makeham ampliada, la cual es:

$$l(i) = 899360 * 0.9967^i * 0.9364^{1.601^i} * 1.0003^{i^2}$$

En la cual, con el fin de obtener la concavidad de las tendencias de los valores de las edades 0, 1, 2, 3 y 4, se desplazó el origen al valor -10.4, el cual se asocia al año 1, así -10.2, se asocia a la edad 2 años, por lo que cada dos decimales es un año de edad. Tomando un radix de $1,000,000$ personas. Así, $i = -10.4, -10.2, \ldots, 8.4$ asociados a la edad real $x = 1, 2, \ldots, 95$.

2.1.1. Supuestos de edades fraccionarias.

Una tabla de vida $\{l_x\}_{x \geq x_0}$ proporciona exactamente la misma información que la correspondiente distribución de supervivencia, S_{x_0}. Sin embargo, una tabla de vida tabulada solo en edades enteras no contiene toda la información del modelo correspondiente, dado que los valores de l_x en edades enteras x no son suficientes para poder calcular probabilidades para edades no enteras. Necesitamos hacer algunos supuestos acerca de la distribución de probabilidad para la variable aleatoria de tiempo de vida futuro entre edades enteras. Por lo cual usaremos el término supuesto de edades fraccionarias.

Distribución uniforme de muertes
El supuesto de la distribución uniforme de muertes (UDD) es el supuesto de edades fraccionarias más común. Este puede ser formulado de dos diferentes, pero equivalentes formas como sigue:
UDD1
Para un entero x que representa la edad de una persona, y para $0 \leq t < 1$, asume que:

$$ {}_tq_x = tq_x. $$

UDD2
Sea K_x la parte entera de T_x, y definiendo una nueva variable R_x tal que:

$$ T_x = K_x + R_x. $$

El supuesto UDD2 es que, para un entero x, $R_x \sim U(0,1)$, y R_x es independiente de K_x.
Para la demostración de la equivalencia entre supuestos, asumimos que UDD1 es verdadero, entonces para el entero x, y para $0 \leq t < 1$,

$$ \begin{aligned} P[R_x \leq t] &= \sum_{k=0}^{\infty} P[k \leq T_x \leq k+t] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \ {}_kp_x \ t(q_{x+k}) \\ &= t. \end{aligned} $$

Esto prueba que $R_x \sim U(0,1)$. Para probar la independencia de R_x y K_x

$$ \begin{aligned} P[R_x \leq t \text{ y } K_x = k] &= P[k \leq T_x \leq k+t] \\ &=_k p_x \ {}_tq_{x+k} \\ &= t \ {}_kp_x \ q_{x+k} \\ &= P[R_x \leq t]P[K_x = k]. \end{aligned} $$

Para probar la implicación inversa, asumimos que UDD2 es verdadera. Entonces para un entero x, y para $0 \leq t < 1$,

$$ \begin{aligned} {}_tq_x &= P[T_x \leq t] \\ &= P[K_x = 0 \text{ y } R_x \leq t] \\ &= P[R_x \leq t]P[K_x = 0] \end{aligned} $$

como K_x y R_x se asumen independientes. Así,

$$ {}_tq_x = tq_x. $$

El supuesto UDD sirve para determinar el valor de l_{x+t} a partir de las personas que están con vida a la edad entera x y el número de personas que fallecen en el periodo, es decir:

$$ l_{x+t} = l_x - td_x. $$

Entonces l_{x+t} es una función linealmente decreciente de t.
Así tenemos que la fuerza de mortalidad se puede aproximar bajo este supuesto como:

$$\begin{aligned}\mu_{x+t} &= \frac{-\frac{d}{dt}l_{x+t}}{l_{x+t}}\\ &= \frac{-\frac{d}{dt}(l_x - td_x)}{l_x - td_x}\\ &= \frac{q_x}{1-tq_x}.\end{aligned}$$

Esta aproximación se utilizará en el ejemplo de aplicación del seguro como proceso estocástico con el método Runge Kutta de orden 4.

Fuerza de mortalidad constante
Un segundo supuesto de edades fraccionarias es que la fuerza de mortalidad es constante entre edades enteras. Así, para un entero x y $0 \leq t < 1$, asumimos que μ_{x+t} no depende de t, y lo denotamos como μ_x^*. Podemos obtener el valor de μ_x^* usando el hecho de que:

$$p_x = e^{-\int_0^1 \mu_{x+t}dt}.$$

Por lo tanto, el supuesto de que $\mu_{x+t} = \mu_x^*$ para $0 \leq t < 1$ nos da $p_x = e^{-\mu_x^*}$ o $\mu_x^* = -\ln(p_x)$.
Bajo el supuesto de fuerza de mortalidad constante:

$$q_x = 1 - e^{-\mu^*}.$$

siempre que μ^* sea pequeño, y para $0 < t < 1$,

$${}_tq_x = 1 - e^{-\mu^* t}.$$

Este supuesto se utilizará en el ejemplo de seguro como proceso estocástico con una solución analítica.

2.2. Breve historia del seguro

La presencia de esquemas para la protección a la vida en la historia del hombre se comienza a advertir desde el Imperio Babilónico y su rey Hammurabi(1810 - 1750 a.c.). Dentro del Código de Hammurabi se preveía indemnizar a las esposas y descendientes, en caso de la muerte del cónyuge. Del mismo modo, se conoce que las sociedades religiosas griegas garantizaban a sus miembros un entierro con todos los rituales. Luego, bajo el Imperio Romano, nacieron las primeras mutuales, los colegios romanos, que eran asociaciones con beneficios definidos y cuyo financiamiento se basaba en contribuciones regulares establecidas. Otras formas primitivas de seguro surgieron, más tarde en Inglaterra cuando nacen las

"guilds", mutuales que proveían asistencia a los miembros en caso de muerte, enfermedad, captura por piratas, naufragio, incendio de la casa o pérdida de herramientas de trabajo. En estas sociedades no existía indemnización o ayuda garantizada, más bien era un sistema de caridad organizada.
El seguro marítimo -aún sin reglamentación- fue la primera actividad en la que se desarrolló el seguro y el documento histórico que puede considerarse como la primera póliza de seguro marítimo, lleva fecha 23 de octubre de 1347. Se debe al descubrimiento de Enrico Bensa, estudioso italiano en materia jurídica.
Antes de desarrollarse el sistema corporativo de seguros financieros, los primeros aseguradores que aparecieron fueron personas que individualmente asumían uno o varios riesgos. Normalmente los contratos de vida tenían una duración de un año, y para minimizar la exposición al riesgo no se firmaban con un plazo más largo, porque podía suceder que el asegurado sobreviviera al asegurador.
En relación con los seguros de vida se conoce que aunque estas pólizas se habían sugerido desde 1695, no fue sino hasta 1706 cuando se creó una compañía especializada, la Amicable Society. En octubre de 1699 se creó en Londres la Life Assurance and Annuity Association, considerada la primera compañía mutual.

En relación a México, antes del periodo colonial, se encuentran entre los mayas y entre los chichimecas algunas situaciones que pueden considerarse como cierta forma de seguro, al hablarse de indemnizaciones y del pago de deudas.
Fue en el año de 1789, cuando se constituyó la primera compañía de seguros en México. Se puede decir que tanto el inicio como el final del siglo XIX han marcado dos momentos altamente significativos para el seguro mexicano: el establecimiento de la segunda institución de seguros (1802) y, a noventa años de esa fecha, la primera Ley del seguro.
Durante el periodo 1998-2003 se verificó un intenso movimiento estructural del sector, se autorizaron nueve instituciones de seguros, en su mayoría filiales de instituciones de seguros extranjeras, todas las especializadas en Rentas Vitalicias (Pensiones) y las correspondientes al Ramo de Salud. A finales del año 2003 del total de las 85 empresas de seguros que integraron al sector, 11 se dedicaron a Pensiones; 14 al ramo de Salud y el resto, 60 a todas las demás operaciones que se contemplan en la actividad.
En la actualidad la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas es el Órgano desconcentrado de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público, encargada de supervisar que la operación de los sectores asegurador y afianzador se apegue al marco normativo, preservando la solvencia y estabilidad financiera de las instituciones de Seguros y Fianzas, para garantizar los intereses del público usuario, así como promover el sano desarrollo de estos sectores con el propósito de extender la cobertura de sus servicios a la mayor parte posible de la población.

2.3. Anualidad

El capital diferido es una cantidad de dinero que se pagaría al cabo de n años a una persona de edad actual x, a condición de que esté, entonces, con vida.
Se trata de un capital (por ejemplo K), cuyo pago es un evento aleatorio, porque está condicionado a que la persona de edad x cumpla $x+n$ años para recibirlo; por tanto, el precio justo de esta eventualidad, está dado por la esperanza matemática o depósito que el individuo en cuestión debe efectuar hoy para recibirlo solo si se encuentra con vida a la edad $x+n$.
La prima P está dada por el valor descontado Kv^n por la probabilidad de supervivencia.

$$P = Kv^n \ {}_np_x = K(1+i)^{-n}\frac{l_{x+n}}{l_x}.$$

Tratándose de un capital unitario se indica por:

$${}_nE_x = \ {}_np_x v^n = \frac{l_{x+n}}{l_x}(1+i)^{-n}$$

que toma el nombre de factor de actualización demográfico-financiera.

Valor conmutado: Los llamados símbolos de conmutación son relaciones matemáticas artificiosas que ayudan a simplificar los desarrollos algebraicos.
Es necesario advertir que la tasa de interés influye en el valor presente de cualquier tipo de seguro, pues a menor tipo de interés la prima será más alta. Un valor actual es menor cuando el capital futuro pierde más interés en el proceso de actualización.
Se introduce el símbolo:

$$D_x = l_x v^x$$

que podría denominarse solo teórica y curiosamente número de sobrevivientes descontados a una determinada tasa de interés anual por un tiempo equivalente a su edad.
Si el valor de ${}_nE_x$ se multiplica y divide por v^x resulta

$${}_nE_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}v^n\frac{v^x}{v^x} = \frac{l_{x+n}v^{x+n}}{l_x v^x} = \frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

Con lo que obtenemos una nueva forma de expresar el factor de actualización demográfico-financiera pero sobre la base de haber tomado definitivamente un determinado tipo de interés.

Una renta vitalicia, también llamada anualidad, es una sucesión de pagos

o cobros anuales que efectúa una persona de edad actual x solo y únicamente si se encuentra con vida para realizarlos. El término vitalicio en este caso, no necesariamente se refiere a que dicha persona tendrá la renta hasta su muerte, sino mientras viva, porque puede ser efectivamente hasta el último aniversario de su vida como también por un plazo de n años (temporal).
El valor presente de una anualidad vitalicia anticipada, es la suma de los valores presentes individuales de la cuota anual trasladados desde el momento de su pago en una edad $x+n$, con $n = 0, 1, ..., \omega - x$, donde ω representa la edad máxima alcanzada según los registros estadísticos de la tabla de mortalidad, hasta el momento de contratación a la edad x, utilizando el factor ${}_nE_x$, siendo n el plazo de retroceso de cada cuota.

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x &= {}_0E_x +_1 E_x + ... +_{\omega-x} E_x \\ &= \frac{D_{x+0}}{D_x} + \frac{D_{x+1}}{D_x} + ... + \frac{D_{x+\omega-x}}{D_x} \\ &= \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + ... + D_\omega}{D_x}.\end{aligned}$$

Introducimos el símbolo:
$N_x = D_x + D_{x+1} + ... + D_\omega$
Con lo que resulta la fórmula del valor presente de una anualidad vitalicia anticipada:

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}.$$

Otro enfoque que se puede analizar es el de carácter estocástico de las prestaciones y aportaciones que aparecen en las operaciones de seguro de vida, es decir, a través de sus distribuciones de probabilidad y no solamente a partir de sus valores medios o esperados.
De acuerdo con este planteamiento, las funciones biométricas se pueden expresar de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}p_x &= P[T_0 \geq x + 1 | T_0 \geq x] \\ q_x &= P[x \leq T_0 < x + 1 | T_0 \geq x].\end{aligned}$$

Donde T_0 es la variable aleatoria que mide el tiempo transcurrido hasta el fallecimiento de la persona cuya edad inicial es $x = 0$, es decir, recién nacido. Se trata pues, de probabilidades condicionadas al suceso aleatorio de haber alcanzado a edad (x).
Tomando como referencia el estudio de una anualidad vitalicia anticipada($\ddot{a}_x$).
Sea T_x el número de años completos de supervivencia de una persona cuya edad inicial es (x), variable que en principio se considera de tipo discreto.
El campo numérico o espacio de probabilidad de T_x es:
$t : 0, 1, 2, ..., \omega - x - 1$ (ω=Edad máxima $\Rightarrow l_\omega = 0$)

Se desea conocer la probabilidad de que una persona de edad x sobreviva exactamente t años completos, la probabilidad sería:
$P[T_x = t] = {}_tp_x - {}_{t+1}p_x = \dfrac{l_{x+t}}{l_x} - \dfrac{l_{x+t+1}}{l_x} = \dfrac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x} = {}_{t|}q_x = {}_tp_x \cdot q_{x+t}$
Verificándose la condición:

$$\sum_{t=0}^{\omega-x-1} P[T_x = t] = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} \frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x} = \frac{1}{l_x}(l_x - l_\omega) = 1.$$

Lo que implica que la probabilidad de que una persona eventualmente fallezca es uno.
El número de términos de la renta vitalicia que percibirá la persona (x) es, a su vez, la variable aleatoria $T_x + 1$, debido a que hemos supuesto que la renta es anticipada.
Dado que el número de pagos que recibe la persona depende de la variable aleatoria T_x, se puede obtener el valor presente financiero de la anualidad anticipada como:

$$\ddot{a}_{\overline{T_x+1}|} = \frac{1 - v^{T_x+1}}{d} \text{ donde } d = i \cdot v.$$

Esta variable está totalmente especificada una vez conocida T_x. En efecto, resulta:

Periodo	Campo numérico(Y)		Probabilidad(P)
1	$\ddot{a}_{\overline{1}|}$	$\cdots$	q_x
2	$\ddot{a}_{\overline{2}|}$	$\cdots$	$p_x -{}_2 p_x = {}_{1|}q_x$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$t+1$	$\ddot{a}_{\overline{t+1}|}$	$\cdots$	${}_tp_x -{}_{t+1} p_x = {}_{t|}q_x$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$\omega - x$	$\ddot{a}_{\overline{\omega-x}|}$	$\cdots$	${}_{\omega-x-1}p_x = {}_{\omega-x-1|}q_x$

El costo de la anualidad anticipada corresponde con el valor esperado de la variable aleatoria $\ddot{a}_{\overline{T_x+1}|}$:

$$E[\ddot{a}_{\overline{T_x+1}|}] = \sum_{t+1=1}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1}|} P(t+1) = \sum_{t+1=1}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1}|}\ {}_{t|}q_x = \sum_{t+1=1}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1}|}\ {}_tp_x q_{x+t}.$$

Este valor medio coincide con el valor presente actuarial tradicionalmente asignado a este tipo de rentas calculado previamente. La igualdad se demuestra a continuación:

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_x &= \sum_{t+1=1}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1}|}\ {}_tp_x q_{x+t} \\
&= \sum_{t+1=1}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1}|}\ {}_{t|}q_x \\
&= \sum_{t+1=1}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1}|}({}_tp_x -{}_{t+1}\, p_x) \\
&= \sum_{t+1=1}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1}|}\ {}_tp_x - \sum_{t+1=1}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{t+1}|}\ {}_{t+1}p_x \\
&= \sum_{t+1=1}^{\omega-x} \left(\frac{1-v^{t+1}}{d}\right)\ {}_tp_x - \sum_{t+1=1}^{\omega-x} \left(\frac{1-v^{t+1}}{d}\right)\ {}_{t+1}p_x \\
&= \sum_{t+1=0}^{\omega-x-1} \left(\frac{1-v^{t+2}}{d}\right)\ {}_{t+1}p_x - \sum_{t+1=1}^{\omega-x} \left(\frac{1-v^{t+1}}{d}\right)\ {}_{t+1}p_x \\
&= \sum_{t+1=0}^{\omega-x-1} \left(\frac{1}{d}\right)\ {}_{t+1}p_x - \frac{v}{d}\sum_{t+1=0}^{\omega-x-1} v^{t+1}\ {}_{t+1}p_x \\
&- \sum_{t+1=1}^{\omega-x} \left(\frac{1}{d}\right)\ {}_{t+1}p_x + \sum_{t+1=1}^{\omega-x} \left(\frac{v^{t+1}}{d}\right)\ {}_{t+1}p_x \\
&= \frac{1}{d} - \frac{v}{d} + \left(\frac{1-v}{d}\right)\sum_{t+1=1}^{\omega-x-1} v^{t+1}\ {}_{t+1}p_x \\
&= \sum_{t+1=0}^{\omega-x-1} v^{t+1}\ {}_{t+1}p_x \\
&= \frac{N_x}{D_x}.
\end{aligned}
$$

El cual ya se había obtenido anteriormente.
La varianza de $\ddot{a}_{\overline{T_{x+1}}|}$ es:

$$\sigma^2(\ddot{a}_{\overline{T_{x+1}}|}) = \sum (\ddot{a}_{\overline{t+1}|})^2 P(t+1) - \ddot{a}_x^2.$$

2.4. El seguro de vida

Es un contrato entre una compañía de seguros y una persona llamada asegurado, mediante el cual, el asegurado se compromete a pagar una prima ya sea de una vez (prima única) o en pagos sucesivos (primas). A su vez la compañía se

compromete a pagar una suma fija a los beneficiarios designados en la póliza al recibir pruebas de la muerte del asegurado.
De acuerdo a lo expuesto anteriormente, sea T_x el tiempo transcurrido desde la fecha de efecto de la póliza hasta el fallecimiento del asegurado cuya edad inicial es (x). El valor presente de las prestaciones reconocidas a favor del asegurado (o beneficiario) es $b_{T_x}v^{T_x}$ en donde b_{T_x} es la variable aleatoria que recoge las prestaciones que figuran en la póliza, es decir, el beneficio recibido y v^{T_x} una ley financiera de descuento.
Se describen las dos clases básicas de pólizas de seguro de vida:

Seguro temporal a n años: La suma asegurada es pagadera a los beneficiarios solamente si la persona asegurada fallece dentro del periodo establecido. Este periodo puede ser de 1 o más años, y generalmente es de 5, 10, 15 o 20 años. El seguro temporal cubre solo una contingencia, no una certidumbre.
Para un capital asegurado unitario, las variantes en este caso son:

$$b_t = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq n \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases} \tag{2.2}$$

$$v_t = \begin{cases} v^t & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

$$b_{T_x}v^{T_x} = \begin{cases} v^{T_x} & \text{si } T_x \leq n \\ 0 & \text{si } T_x > n. \end{cases} \tag{2.4}$$

Siendo t el campo numérico de T_x.
Las funciones de distribución y de densidad de la variante T_x son, respectivamente:

$$\begin{aligned} F_x(t) &= {}_tq_x \\ f_x(t) &= \frac{d}{dt}F_x(t) \\ &= {}_tp_x\mu_{x+t} \end{aligned}$$

$$t \geq 0.$$

La condición de existencia de $f_x(t)$ permite escribir,

$$\int_0^x {}_tp_x\mu_{x+t}dt = 1.$$

Como:

$$\begin{aligned} {}_tq_x &= 1 - {}_tp_x \\ \frac{d}{dt}(1 -_t p_x) &= -\frac{d}{dt}({}_tp_x) = {}_tp_x\mu_{x+t} \end{aligned}$$

es decir,

$$-d({}_tp_x) = {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}dt.$$

En consecuencia, la prima pura única de acuerdo con el principio de equivalencia es, teniendo en cuenta que $b_{T_x}v^{T_x}$ es función de T_x:

$$E[b_{T_x}v^{T_x}] = \int_0^n v^t f_x(t)dt = \int_0^n v^t \ {}_tp_x\mu_{x+t}dt = \bar{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}.$$

El momento ordinario de orden k de $b_{T_x}v^{T_x}$ es:

$$E[(b_{T_x}v^{T_x})^k] = \int_0^n (v^t)^k \ {}_tp_x\mu_{x+t}dt = \int_0^n e^{(-\delta k)t} \ {}_tp_x\mu_{x+t}dt.$$

La segunda integral muestra que el momento de orden k de la variable es igual a la prima pura calculada al nuevo tanto de interés δk.
En consecuencia, la varianza de $b_{T_x}v^{T_x}$ es:

$$\sigma^2(b_{T_x}v^{T_x}) = \ {}^2\bar{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} - (\bar{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|})^2.$$

Donde ${}^2\bar{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}$ es la prima única de un seguro temporal unitario valorado a una fuerza de interés 2σ.

El seguro temporal definido anteriormente corresponde al caso de una variable aleatoria continua T_x.
En el formato de tabla de vida, los beneficiarios reciben la suma asegurada al final del periodo en el cual ocurre el fallecimiento del asegurado si y solo si el fallo ocurre durante los primeros n intervalos de tiempo, es decir, $K_x^* \leq n$.
La variable aleatoria del valor presente de los pagos se define como:

$$Z_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = \begin{cases} v^{K_x^*} & \text{si } K_x^* \leq n \\ 0 & \text{si } K_x^* \geq n \end{cases},$$

el costo del seguro es la esperanza de la variable aleatoria $Z_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}$, podemos interpretar $P[K_x^* = t]$ como ${}_{t-1}|q_x$, la persona de edad x sobrevive $t-1$ años y fallece en el siguiente.
El costo del seguro temporal asociado es:

$$A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} b_t v^t \ {}_{t-1}|q_x$$

para el caso particular en que el beneficio b_t es una unidad monetaria

$$A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t \ {}_{t-1}|q_x.$$

Seguro de vida entera: Proporciona un seguro para toda la vida, si no se termina previamente por falta de pago de una prima vencida o si no se rescata por su valor en efectivo; la póliza vence para su pago solo en caso de fallecimiento de la persona asegurada.

Considerando también una suma unitaria resulta

$$b_t = 1 \quad ; \quad t \geq 0$$
$$v_t = v^t \quad ; \quad t \geq 0$$
$$b_{T_x} v^{T_x} = v^{T_x} \quad ; \quad T_x \geq 0.$$

La prima pura única es:

$$E[b_{T_x} v^{T_x}] = E[v^{T_x}] = \int_0^\infty v^t \ {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \int_0^\infty e^{-\delta t} \ {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \bar{A}_x.$$

La varianza o riesgo actuarial en sentido estricto es:

$$\sigma^2(b_{T_x} v^{T_x}) = \ {}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2.$$

Los seguros definidos anteriormente se limitan a que el pago es al final del año en que ocurra el fallecimiento ($A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}$) o bien en el instante mismo que la persona fallece ($\bar{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}$), por cuestiones operativa ninguno de los dos refleja un escenario real, ya que los beneficiarios no esperarán largos periodos de tiempo para recibir la suma asegurada porque esto podría perjudicarlos a nivel económico, pero tampoco la aseguradora es capaz de emitir un pago en el instante mismo de un deceso. Como se observará en el Capítulo 4 se opta por determinar las probabilidades de supervivencia quincenales para un individuo de edad x para hacer una modelación más “realista”.

Capítulo 3

Runge Kutta

Las ecuaciones diferenciales sirven para modelar problemas que involucran el cambio de una variable respecto a otra. En la mayor parte de ellos hay que resolver un problema con valores iniciales, es decir, resolver una ecuación diferencial que satisface una condición inicial dada.

En situaciones comunes, la ecuación diferencial que modela el problema resulta demasiado complicada para resolverla con exactitud, por lo que se recurre a distintos métodos para aproximar la solución. Uno de ellos se vale de métodos para aproximar la solución del problema original. Este procedimiento es el que se emplea por lo regular, pues los métodos de aproximación dan resultados más exactos y una información realista sobre el error.

Mientras que los métodos analíticos están limitados a ciertas formas especiales de ecuaciones, los métodos numéricos no tienen tales limitaciones a solo formas estándares. No obstante, la solución se obtiene como una tabulación de los valores de la función en varios valores de la variable independiente, y no como una relación funcional.

3.1. El Método de Euler

El método de Euler es la técnica de aproximación más sencilla para resolver problemas con valores iniciales. Aunque rara vez se emplea en la práctica, la simplicidad de su deducción sirve para ejemplificar las técnicas con que se desarrollan algunos de los métodos más avanzados, sin el álgebra tan complicada que acompaña a tales desarrollos.

Este método tiene por objetivo obtener una aproximación de un problema bien planteado con valores iniciales:

$$\frac{dy}{dt} := f(t,y),\ a \leq t \leq b,\ y(a) = \alpha$$

Puede ser que no se obtenga una aproximación continua a la solución $y(t)$; por el contrario, se generarán aproximaciones a y en varios valores, llamados puntos de red, en el intervalo $[a,b]$. Una vez obtenida la solución aproximada en los puntos, se puede obtener por interpolación la solución aproximada en otros puntos del intervalo.

En primer lugar se estipula que los puntos de red tienen una distribución uniforme en todo el intervalo $[a,b]$. Se garantiza esta condición al seleccionar un entero positivo N y los puntos de red:

$$t_i = a + ih, \text{ para cada } i = 0, 1, 2, ..., N.$$

La distancia común entre los puntos $h = (b-a)/N = t_{i+1} - t_i$ recibe el nombre de tamaño de paso. Se utiliza el Teorema de Taylor para deducir el método de Euler.
Supongamos que $y(x)$ la única solución de la ecuación inicial, tiene dos derivadas continuas en $[a,b]$, de modo que para cada $i = 0, 1, 2, ..., N-1$,

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i)y'(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2} y''(\xi)$$

Para algún número ξ en (t_i, t_{i+1}). Como $h = t_{i+1} - t_i$, se tiene

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{(h)^2}{2} y''(\xi)$$

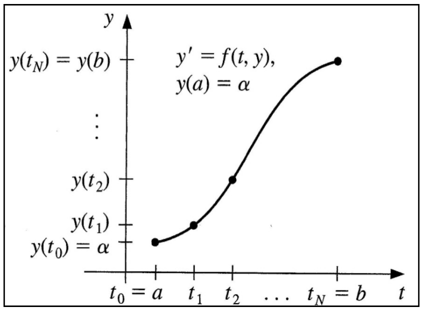
El método de Euler construye $w_i \approx y(t_i)$ para cada $i = 1, 2, ..., N$, al eliminar el término restante. Por tanto,

$$w_o = \alpha$$

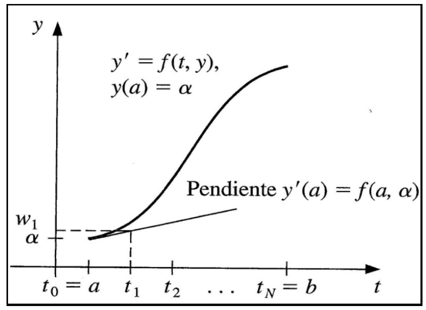
$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i) \text{ para cada } i = 0, 1, ..., N-1.$$

Método de Euler graficamente.

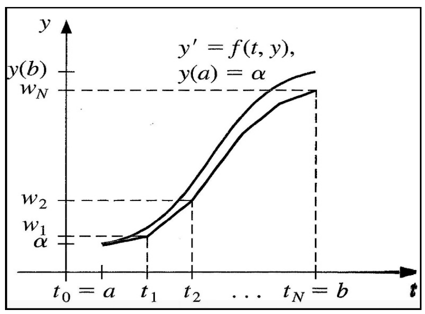
En las siguientes gráficas se muestra la aproximación a una función mediante el método de Euler, además se presenta el algoritmo para llevar a cabo dicho método:



(a) Gráfica de la función



(b) Un paso del método de Euler



(c) Serie de pasos del método de Euler

Figura 3.1: Gráficas de la proximación del método de Euler a una función [6]

Algoritmo 1 Método de Euler

Aproximar la solución del problema con valores iniciales

$$y' = f(t, y),\ a \le t \le b,\ y(a) = \alpha$$

en $(N + 1)$ números uniformemente espaciados en el intervalo $[a, b]$.
ENTRADA: extremos a,b entero N condición inicial α.
SALIDA: aproximación w a y en los $(N + 1)$ valores de t.

Paso 1 Tome $h = (b - a)/N$;
$t = a$;
$w = \alpha$;
SALIDA (t, w).
Paso 2 Para $i = 1, 2, ..., N$ haga los pasos $3, 4$.
Paso 3 Haga $w = w + hf(t, w)$; (Calcule w_i).
$t = a + ih$. (Calcule t_i).
Paso 4 SALIDA (t, w).
Paso 5 PARAR.

Ejemplo 3.1. *Tomando $h = 0.2$, aproximar la solución del problema con valores iniciales:*

$$y' = y - t^2 + 1, \qquad 0 \leq t \leq 2, \qquad y(0) = 0.5.$$

Se utilizará el algoritmo con $N = 10$ para determinar las aproximaciones y compararlas con los valores exactos dados por $y(t) = (t+1)^2 - 0.5e^t$.

Con $N = 10$, tenemos $h = 0.2, t_i = 0.2i, w_0 = 0.5$ y

$$w_{i+1} = w_i + h(w_i - t_i^2 + 1) = w_i + 0.2[w_i - 0.4i^2 + 1] = 1.2w_i - 0.008i^2 + 0.2,$$

para $i = 0, 1, ..., 9$. Por tanto:

$$w_1 = 1.2(0.5) - 0.009(0)^2 + 0.2 = 0.8; \quad w_2 = 1.2(0.8) - 0.008(1)^2 + 0.2 = 1.152;$$

y así sucesivamente. En la siguiente tabla se muestra la comparación entre los valores aproximados en t_i y los valores reales.

t_i	w_i	$y_i = y(t_i)$	$\lvert y_i - w_i \rvert$
0.0	0.5000000	0.5000000	0.0000000
0.2	0.8000000	0.8292986	0.0292986
0.4	1.1520000	1.2140877	0.0620877
0.6	1.5504000	1.6489406	0.0985406
0.8	1.9884800	2.1272295	0.1387495
1.0	2.4581760	2.6408591	0.1826831
1.2	2.9498112	3.1799415	0.2301303
1.4	3.4517734	3.7324000	0.2806266
1.6	3.9501281	4.2834838	0.3333557
1.8	4.4281538	4.8151763	0.3870225
2.0	4.8657845	5.3054720	0.4396874

Cuadro 3.1: Comparación de valores obtenidos mediante el método y valores reales de la función

Se observa que el error crece un poco a medida que el valor t aumenta. Este crecimiento controlado del error es consecuencia de la estabilidad del método de Euler, el cual implica que en el peor de los casos, el error esperado aumente de forma lineal.

3.2. Derivación de Métodos

Los primeros métodos Runge Kutta aparecieron en 1895, pero sería hasta la década de los sesentas que comenzaron a desarrollarse como forma de resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. Denominados así en honor a dos matemáticos alemanes, llamados Carle David Tolmé Runge y Martin Wilhelm

Kutta. Ellos desarrollaron algoritmos que resuelven de una manera eficaz una ecuación diferencial y que son a la vez el equivalente de una aproximación a la solución exacta al hacerla coincidir con los n primeros términos del desarrollo en serie de Taylor.
Para tener una idea de cómo se desarrollan los métodos de Runge Kutta, se mostrará la obtención de un método de segundo orden simple. Aquí, el incremento en y es un promedio ponderado de dos estimaciones del incremento, denominadas k_1 y k_2. Así, para la ecuación $dy/dx = f(x, y)$.

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + b_1k_1 + b_2k_2, \\ k_1 &= hf(x_n, y_n), \\ k_2 &= hf(x_n + c_2h, y_n + c_2k_1). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Puede pensarse que los valores k_1 y k_2 son estimaciones del cambio en y cuando x avanza por h, ya que son el producto del cambio en x y un valor de la pendiente de la curva, dy/dx. Los métodos de Runge Kutta siempre usan la estimación de Euler simple como la primera estimación de Δy, k_1. El problema es concebir un esquema para elegir los parámetros, b_1, b_2, c_2. Lo anterior se logra haciendo que la ecuación (3.1) coincida lo mejor posible con el desarrollo en serie de Taylor, donde las derivadas y se escriben en términos de f, a partir de $dy/dx = f(x, y)$.

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} f'(x_n, y_n) + ...$$

Debido a que $df/dx = f_x + f_y dy/dx = f_x + f_y f$, una forma equivalente es

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + h^2 \left(\frac{1}{2} f_x + \frac{1}{2} f_y f \right)_n . \tag{3.2}$$

Todas las derivadas de la ecuación (3.2) se calculan en el punto (x_n, y_n). Ahora vuelve a escribirse la ecuación (3.1) sustituyendo las definiciones de k_1 y k_2:

$$y_{n+1} = y_n + b_1hf(x_n, y_n) + b_2hf[x_n + c_2h, y_n + c_2hf(x_n, y_n)]. \tag{3.3}$$

Para que el último término de la ecuación (3.3) sea comparable con la ecuación (3.2), $f(x, y)$ se desarrolla en una serie de Taylor en términos de x_n, y_n, recordando que f es una función de dos variables, reteniendo sólo términos de la primera derivada:

$$f[x_n + c_2h, y_n + c_2hf(x_n, y_n)] = (f + f_xc_2h + f_yc_2hf)_n. \tag{3.4}$$

En el lado derecho de las dos ecuaciones (3.2) y (3.4), f y sus derivadas parciales, todas, deben evaluarse en (x_n, y_n).

Al sustituir la ecuación (3.4) en la ecuación (3.3), se tiene

$$y_{n+1} = y_n + b_1 h f_n + b_2 h(f + f_x c_2 h + f_y c_2 h f)_n$$

o bien, reordenando,

$$y_{n+1} = y_n + (b_1 + b_2) h f_n + h^2 (c_2 b_2 f_x + c_2 b_2 f f_y)_n. \tag{3.5}$$

La ecuación (3.5) es idéntica a la ecuación (3.2) si

$$b_1 + b_2 = 1,\ c_2 b_2 = \frac{1}{2}.$$

Observe que sólo es necesario satisfacer dos ecuaciones por las tres incógnitas. Un valor puede elegirse de manera arbitraria (con restricciones menores), por tanto, se tiene un conjunto de métodos de segundo orden. Por ejemplo, al tomar $b_1 = \frac{2}{3}$, se tiene $b_2 = \frac{1}{3}$, $c_1 = \frac{3}{2}$. Con otras opciones se obtienen otros conjuntos de parámetros que coinciden con el desarrollo en serie de Taylor.
Si se toma $b_1 = \frac{1}{2}$, las otras variables son $b_2 = \frac{1}{2}$, $c_2 = 1$. Este último conjunto de parámetros proporciona el algoritmo de Euler modificado; el método de Euler modificado es un caso especial de un Método de Runge Kutta de segundo orden.

Nos enfocaremos en un método Runge Kutta explícito de 3 etapas que puede ser escrito como:

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + h\,(b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3) \\
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + h c_2, y_n + h c_2 k_1) \\
k_3 &= f(x_n + h c_3, y_n + h(c_3 - a_{32}) k_1 + h a_{32} k_2).
\end{aligned}$$

Asumiremos que la función $f(x, y)$ es suficientemente suave y diferenciable, reduciremos la notación a:

$$f := f(x,y) \qquad f_x := \frac{df(x,y)}{dx} \qquad f_{xx} := \frac{d^2 f(x,y)}{dx^2} \qquad f_{xy} := \frac{d^2 f(x,y)}{dxdy}$$

Al expandir en series de Taylor $y(x_{n+1})$ alrededor de x_n se tiene:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h y^{(1)}(x_n) + \frac{1}{2} h^2 y^{(2)}(x_n) + \frac{1}{6} y^{(3)}(x_n) + o(h^4).$$

$$
\begin{aligned}
y^{(1)}(x_n) &= f \\
y^{(2)}(x_n) &= f_x + f_y y' = f_x f f_y \\
y^{(3)}(x_n) &= f_{xx} + f_{xy} f + f(f_{yx} + f_{yy} f) + f_y(f_x + f f_y) \\
&= f_{xx} + 2 f f_{xy} + f^2 f_{yy} + f_y(f_x + f f_y).
\end{aligned}
$$

Los cual se reescribe como

$$
y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf + \frac{1}{2}h^2\left(f_x + f f_y\right) + \frac{1}{6}h^3\left[\left(f_x + f f_y\right) f_y + \left(f_{xx} + 2 f f_{xy} + f^2 f_{yy}\right)\right].
$$

Al expandir $k_i,\ i = 1, 2, 3$

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f \\
k_2 &= f + hc_2\left(f_x + k_1 f_y\right) + \frac{h^2}{2} c_2^2\left(f_{xx} + 2k_1 f_{xy} + k_1^2 f_{yy}\right) \\
k_3 &= f + hc_3\left(f_x + f f_y\right) + \frac{h^2}{2}\left(c_2 a_{32}(f_x + f f_y) f_y + \frac{1}{2} c_3^2 (f_{xx} + 2 f f_{xy} + f^2 f_{yy})\right)
\end{aligned}
$$

y sustituir en la ecuación anterior se tiene

$$
\begin{aligned}
\overline{y}_{n+1} = {} & y(x_n) + h\left(b_1 + b_2 + b_3\right) f + h^2\left(b_2 c_2 + b_3 c_3\right)\left(f_x + f f_y\right) + \\
& \frac{1}{2}h^3\left(2 b_3 c_2 a_{32}\left(f_x + f f_y\right) f_y + \left(b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2\right)\left(f_{xx} + 2 f f_{xy} + f^2 f_{yy}\right)\right).
\end{aligned}
$$

En la cual se puede observar que haciendo $b_3 = 0$ y tomando h hasta orden 2, se obtiene la ecuación obtenida para el método de dos etapas.
De aquí se obtienen las condiciones

$$
\begin{aligned}
b_1 + b_2 + b_3 &= 1 \\
b_2 c_2 + b_3 c_3 &= \frac{1}{2} \\
b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 &= \frac{1}{3} \\
b_3 c_2 a_{32} &= \frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

Existe una infinidad de soluciones a las ecuaciones anteriores, utilizaremos la solución $b_1 = 1/4, b_2 = 0, b_3 = 3/4, c_1 = 0, c_2 = 1/3, c_3 = 2/3, a_{32} = 2/3$ para obtener el siguiente método

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{4}\left(k_1 + 3k_3\right) \\
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f(x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{h}{3}k_1) \\
k_3 &= f(x_n + \frac{2h}{3}, y_n + \frac{2h}{3}k_2).
\end{aligned}
$$

3.2.1. El Runge Kutta de orden cuatro

Los métodos Runge Kutta de cuarto orden son los más utilizados y se obtienen de manera semejante. Resulta mayor complejidad al tener que comparar términos hasta h^2, y así se obtiene un conjunto de 11 ecuaciones en 13 incógnitas. El conjunto de 11 ecuaciones puede resolverse si dos incógnitas se escogen arbitrariamente.
El método Runge Kutta de orden cuatro, aplicado a un sistema de dos ecuaciones diferenciales dadas con funciones f y g respectivamente, tiene solución dada por:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= f(x, y, t) \\
k_1 &= hf(x, y, t) \\
k_2 &= hf\left(x + \frac{k_1}{2}, y + \frac{l_1}{2}, t + \frac{h}{2}\right) \\
k_3 &= hf\left(x + \frac{k_2}{2}, y + \frac{l_2}{2}, t + \frac{h}{2}\right) \\
k_4 &= hf\left(x + k_3, y + l_3, t + h\right) \\
x(t+h) &= x(t) + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= g(x,y,t) \\
l_1 &= hg(x,y,t) \\
l_2 &= hg\left(x+\frac{k_1}{2}, y+\frac{l_1}{2}, t+\frac{h}{2}\right) \\
l_3 &= hg\left(x+\frac{k_2}{2}, y+\frac{l_2}{2}, t+\frac{h}{2}\right) \\
l_4 &= hg\left(x+k_3, y+l_3, t+h\right) \\
y(t+h) &= y(t)+\frac{1}{6}\left(l_1+2l_2+2l_3+l_4\right).
\end{aligned}
$$

Este método se utilizará para dar una solución numérica más exacta al problema de aplicación a un seguro de invalidez del siguiente capítulo.

Capítulo 4

El seguro como proceso estocástico

4.1. Los procesos Estocásticos

Existen procesos o fenómenos que pueden cambiar a través del tiempo, estos se conocen como procesos estocásticos, en los cuales no se puede predecir el resultado de dicho cambio. En muchas situaciones reales, los modelos estocásticos se acercan más a la realidad que los modelos determinísticos, pues estos incorporan el azar por medio de funciones probabilísticas. Por lo cual es importante conocer algunas características de estos procesos.

4.1.1. El proceso estocástico

Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias $\{X_t : t \in T\}$ parametrizada por un conjunto T, llamado espacio parametral, en donde las variables toman valores en un conjunto S llamado espacio de estados.

En los casos más sencillos se toma como espacio parametral el conjunto discreto $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$ y estos números se interpretan como tiempos. En este caso se dice que el proceso es a tiempo discreto, y en general este tipo de procesos se denota por $\{X_n : \; n = 0, 1, \ldots\}$, o explícitamente.

$$X_0, X_1, X_2, \ldots$$

así para cada n, X_n es el valor del proceso o estado del sistema al tiempo n. Este modelo corresponde a un vector aleatorio de dimensión infinita. El proceso se puede ver en la siguiente figura.

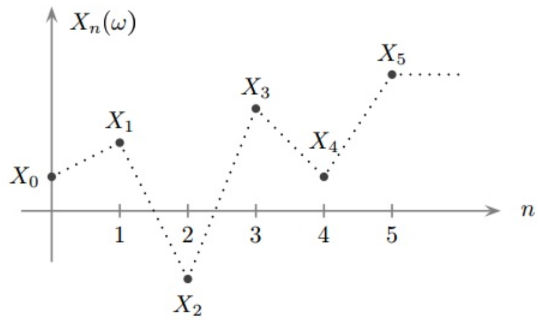


Figura 4.1: Proceso estocástico a tiempo discreto [18]

El espacio parametral puede también tomarse como el conjunto continuo $T = [0, \infty)$. Se dice entonces que el proceso es a tiempo continuo, y se denota por:

$$\{X_t : t \geq 0\}$$

El cual puede ser representado gráficamente como:

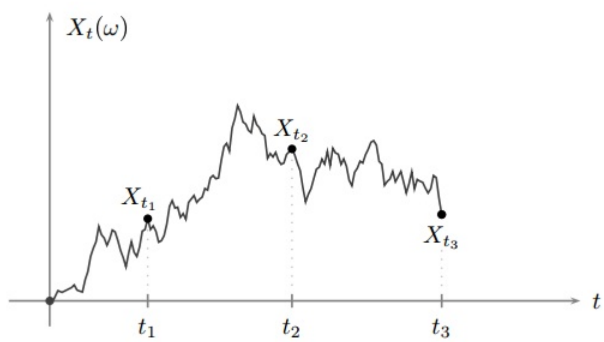


Figura 4.2: Proceso estocástico a tiempo continuo [18]

4.1.2. Cadenas de Markov

Una cadena de Markov es un proceso estocástico a tiempo discreto $\{X_n : n = 0, 1, \ldots\}$, con espacio de estados discreto, y que satisface la propiedad de Markov, esto es, para cualquier entero $n \geq 0$, y para cualesquiera estados $x_0, \ldots, x_{n+1}$, se cumple:

$$P(x_{n+1}|x_0, \ldots, x_n) = P(x_{n+1}|x_n).$$

Si al tiempo $n+1$ se le considera como un tiempo futuro, al tiempo n como el presente y a los tiempos $0, 1, \ldots, n-1$ como el pasado, entonces la condición anterior establece que la distribución de probabilidad del estado del proceso al tiempo futuro $n+1$ depende únicamente del estado del proceso al tiempo n, y no depende de los estados en los tiempos pasados $0, 1, \ldots, n-1$.

Cadenas de Markov a tiempo discreto:
Para una cadena de Markov a tiempo discreto, se empezará definiendo un modelo constituido por m estados, donde $m \geq 2$. El proceso se mueve aleatoriamente entre estos estados. La variable X_n toma el valor numérico del estado en el cual se encuentre el proceso al tiempo n, para $n = 0, 1, \ldots$, así los posibles valores de X_n son $\{1, 2, \ldots, m\}$. En otras palabras, si $X_n = i$ se dice que el proceso está en el estado i al tiempo n. El estado inicial del proceso al tiempo 0 debe ser especificado.
El elemento básico de una cadena de Markov es la probabilidad condicional de que el proceso esté en el estado j al tiempo $n+1$, dado que está en el estado i al tiempo n. Para un proceso estocástico de cadena de Markov, la probabilidad de estar en el estado j al tiempo $n+1$ depende solo del estado en el que se encuentre al tiempo n, es decir, después de moverse a un nuevo estado, se puede olvidar completamente en qué estados se estuvo en el pasado, esto es lo que distingue a las cadenas de Markov de los demás procesos estocásticos en general.
En notación matemática, esta probabilidad condicional es escrita como $P[X_{n+1} = j | X_n = i]$ y es llamada probabilidad de transición.
Si la probabilidad de transición de moverse del estado i al estado j permanece constante en el tiempo se dice que el proceso es homogéneo, y si la probabilidad de transición varía con n el proceso se dice que es no homogéneo.
La probabilidad de transición homogénea es denotada por p^{ij}, así se tiene

$$p^{ij} = P[X_{n+1} = j | X_n = i].$$

Donde i y j pueden ser $1, 2, \ldots, m$, y $n = 0, 1, 2, \ldots$
Dado que el proceso está en el estado i en algún punto de tiempo discreto, debe estar en algún estado en el siguiente punto de tiempo discreto (incluso en el mismo estado i). Esto significa que:

$$\sum_{j=1}^{m} p^{ij} = 1.$$

Si $p^{ii} \neq 0$, entonces es posible permanecer en el estado i en el siguiente intervalo de tiempo, mientras $p^{ii} = 0$ no es posible permanecer en el estado i. Más aún, si $p^{ii} = 1$, entonces no es posible moverse del estado i hacia otro estado. En este caso, se dice que el estado i es un estado absorbente.
El conjunto de todas las probabilidades de transición para todo (i, j) están

contenidas en la matriz de probabilidades de transición P, definida como:

$$P = \begin{vmatrix} p^{11} & p^{12} & \cdots & p^{1m} \\ p^{21} & p^{22} & \cdots & p^{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p^{m1} & p^{m2} & \cdots & p^{mm} \end{vmatrix}.$$

Todos los resultados anteriores son con base en la propiedad de que todo el conjunto de probabilidades de transición permanece constante sobre pasos sucesivos en el proceso.
Ahora, generalizando el proceso al caso donde las probabilidades de transición no necesariamente son las mismas sobre intervalos sucesivos. Se define p_k^{ij}, para $k = 0, 1, 2, \ldots$, denota la probabilidad de que un proceso en el estado i al tiempo k, esté en el estado j al tiempo $k + 1$. Esto es, p_k^{ij} representa la probabilidad de moverse del estado i al estado j el intervalo discreto de tiempo $(k + 1)$.

El conjunto de probabilidades p_k^{ij} para todo i y j se encuentran en la matriz de probabilidades de transición sobre el $(k + 1)$-ésimo intervalo, la cual se denota por P^k. Para la probabilidad de múltiples pasos se define:

$${}_rp_n^{ij} = P[X_{n+r} = j | X_n = i].$$

Un proceso de Markov con diferentes matrices de probabilidades de transición sobre diferentes intervalos de tiempo es llamado proceso no homogéneo.

Ejemplo 4.1. *Considere un modelo de tres estados en el que una persona puede estar saludable, enferma o bien fallecer. Asumimos que las probabilidades de pasar de un estado a otro son constantes a través del tiempo y están representadas en la siguiente figura*

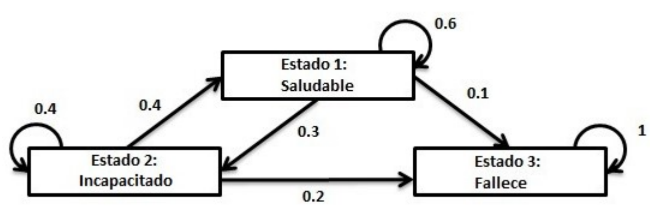


Figura 4.3: Representación gráfica de proceso estocástico con 3 estados [Elaboración propia]

Entonces la matriz de transición asociada es:

$$P = \begin{vmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Observación 1: El estado 3 (fallece) es un estado absorbente.
Observación 2: Si se desea conocer dónde se encuentra una persona que hoy está en el estado i luego de n periodos, bastará con calcular la potencia n-ésima de la matriz de transición.

Cadena de Markov a tiempo continuo
Nuevamente se considera un modelo con m estados, donde $Y(t)$ denota la variable aleatoria discreta con valores posibles $\{1, 2, \ldots, m\}$ que indica el estado en el que se encuentra el proceso al tiempo t, para $t \geq 0$. Así, $Y(t) = i$ denota el evento en el que el proceso está en el estado i en algún tiempo t. El proceso es un proceso a tiempo continuo porque se puede observar en algún tiempo t en los números reales, a pesar de que $Y(t)$ sea una variable aleatoria discreta.
Al igual que en el caso de tiempo discreto, es necesario saber el estado inicial al tiempo 0.
Análogamente al tiempo discreto, la probabilidad de que un proceso no homogéneo que se encuentre en el estado i al tiempo n, esté en el estado j después de r intervalos de tiempo, ahora se considera

$${}_r p_t^{ij} = P[Y(t+r) = j | Y(t) = i].$$

La probabilidad condicional de que el proceso esté en el estado j al tiempo $t+r$ dado que está en el estado i al tiempo t.
Si $P[Y(t+r) = j | Y(t) = i]$ es independiente de t, y depende solo de r, la longitud del intervalo de tiempo, el proceso se dice que es homogéneo.

4.2. La ecuación de Kolmogorov

La ecuación de Kolmogorov es una fórmula que permite descomponer la probabilidad de pasar del estado i al estado j en n pasos, en la suma de probabilidades de las trayectorias que van de i a j, y que atraviesan por un estado k cualquiera en un tiempo intermedio.
En el caso discreto tenemos la ecuación de Chapman-Kolmogorov, la cual enuncia: Para cualquier par de números enteros r y n tales que $0 \leq r \leq n$, y para cualesquiera estados i y j se cumple:

$${}_n p^{ij} = \sum_k {}_r p^{ik} \; {}_{n-r} p^{kj}.$$

Demostración: Por el teorema de probabilidad total y la propiedad de Markov:

$$
\begin{aligned}
{}_n p^{ij} &= P(X_n = j|X_0 = i) \\
&= \sum_k P(X_n = j|X_r = k, X_0 = i)/P(X_0 = i) \\
&= \sum_k P(X_n = j|X_r = k)P(X_r = k|X_0 = i) \\
&= \sum_k \ {}_{n-r}p^{kj} \ {}_r p^{ik}.
\end{aligned}
$$

En el caso continuo, la ecuación de Kolmogorov permite expresar a las probabilidades de transición para cualquier tiempo $t > 0$, en términos de probabilidades infinitesimales, es decir, probabilidades de transición en intervalos de tiempo de longitud muy pequeña.

En un seguro de vida en el cual la persona se puede encontrar en distintos estados de salud como son: supervivencia, invalidez, hospitalización, jubilación, las coberturas y costos actuariales se pueden plantear como un proceso estocástico a tiempo discreto o tiempo continuo.

Para el cálculo de las probabilidades de transición entre los estados se puede plantear la ecuación de Kolmogorov y obtener el sistema de ecuaciones asociado a dichas probabilidades. Por lo cual se parte de lo siguiente:

Supuesto 4.1. *Para cualesquiera estados i y j y cualesquiera tiempos t y $t+s$ donde $s \geq 0$ la probabilidad condicional*

$$P\left[Y(t+s) = j|Y(t) = i\right].$$

La probabilidad condicional esta bien definida en el sentido de que no depende de ninguna información antes del tiempo t. Dicha propiedad de que las probabilidades de eventos futuros dependan del tiempo presente pero no del pasado se conoce como Propiedad de Markov.

Supuesto 4.2. *Suponemos que para cualquier intervalo de tiempo de tamaño h, la probabilidad de que ocurran dos o más transiciones es de orden h, es decir: Para cada función de h, decimos que es de orden h si :*

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{h} = 0.$$

Intuitivamente la función converge a cero más rápido que h.

Definición 4.1. *Para estados i y j en un modelo de estados múltiples*

$$
\begin{aligned}
{}_t p_x^{ij} &= P\left[Y(x+t) = j|Y(x) = i\right], \\
{}_t p_x^{\overline{ii}} &= P\left[Y(x+s) = i \ \textit{para toda} \ s \in [0,t] \, |Y(x) = i\right].
\end{aligned}
$$

${}_tp_x^{ij}$ es la probabilidad de que una persona que esta con vida a la edad x en el estado i este en el estado j a la edad $x+t$, donde j puede ser igual a i.
Pero ${}_tp_x^{\overline{ii}}$ es la probabilidad de que una persona de edad x que esta en el estado i continue en el estado i durante todo el periodo de tiempo de las edades x a la $x+t$.

Supuesto 4.3. *Para todos los estados i y j y todas las edades $x \geq 0$, se asume que ${}_tp_x^{ij}$ es una función diferenciable de t.*

Definición 4.2. *Para $i \neq j$ definimos*

$$\mu_x^{ij} = \lim_{h \to 0^+} \frac{{}_hp_x^{ij}}{h}.$$

Llamemos fuerza de transición a la medida instantánea de la transición a un punto de tiempo, denotaremos μ_x^{ij} como la fuerza de transición entre los estados i y j a la edad x.
Otra forma de expresar la fuerza de transición es:

$${}_hp_x^{ij} = h\mu_x^{ij} + o(h).$$

De esta fórmula para valores pequeños de h se tiene la aproximación:

$${}_tp_x^{ij} \approx h\mu_x^{ij}.$$

Observación

$${}_tp_x^{ii} \geq {}_tp_x^{\overline{ii}}.$$

La probabilidad de que una persona de edad x que se encuentra en el estado i y que luego de un tiempo t este en dicho estado la simbolizamos con ${}_tp_x^{ii}$, es mayor o igual a la probabilidad de que la persona no deje el estado i en el intervalo de tiempo t simbolizada ${}_tp_x^{\overline{ii}}$.
La diferencia entre ambas probabilidades es que el proceso haga dos o más transiciones en el intervalo de tiempo t, lo cual bajo el supuesto 2 es de orden t.

$${}_tp_x^{ii} = {}_tp_x^{\overline{ii}} + o(t).$$

La probabilidad de que la persona deje el estado i en algún momento entre las edades x y $x+h$, con la posibilidad de regresar, es $1 - {}_hp_x^{\overline{ii}}$, se puede reescribir en términos de la fuerzas de transición:

$$\begin{aligned}
1 - {}_hp_x^{\overline{ii}} &= \sum_{j=0, j\neq i}^{n} {}_tp_x^{ij} \\
&= h \sum_{j=0, j\neq i}^{n} \mu_x^{ij} + o(h) \\
{}_hp_x^{\overline{ii}} &= 1 - h \sum_{j=0, j\neq i}^{n} \mu_x^{ij} + o(h).
\end{aligned}$$

La probabilidad ${}_{t+h}p_x^{\overline{ii}}$, se expresará como la probabilidad desde la edad x hasta la $x+t$ multiplicada por la probabilidad de $x+t$ hasta $x+t+h$, es decir,

$$\begin{aligned}
{}_{t+h}p_x^{\overline{ii}} &= {}_tp_x^{\overline{ii}}\ {}_hp_{x+t}^{\overline{ii}} \\
&= {}_tp_x^{\overline{ii}}\left(1 - h\sum_{j=0, j\neq i}^{n} \mu_{x+t}^{ij} + o(h)\right) \\
&= {}_tp_x^{\overline{ii}} - h\ {}_tp_x^{\overline{ii}}\left(\sum_{j=0, j\neq i}^{n} \mu_{x+t}^{ij} + o(h)\right).
\end{aligned}$$

Reordenando términos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\left({}_{t+h}p_x^{\overline{ii}} - {}_tp_x^{\overline{ii}}\right) &= -\ {}_tp_x^{\overline{ii}}\sum_{j=0, j\neq i}^{n} \mu_{x+t}^{ij} + \frac{o(h)}{h} \\
\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left({}_{t+h}p_x^{\overline{ii}} - {}_tp_x^{\overline{ii}}\right) &= -\ {}_tp_x^{\overline{ii}}\sum_{j=0, j\neq i}^{n} \mu_{x+t}^{ij} + \lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h} \\
\frac{d}{dt}\ {}_tp_x^{\overline{ii}} &= -\ {}_tp_x^{\overline{ii}}\sum_{j=0, j\neq i}^{n} \mu_{x+t}^{ij} \\
\frac{d}{dt}\ln\left({}_tp_x^{\overline{ii}}\right) &= -\sum_{j=0, j\neq i}^{n} \mu_{x+t}^{ij}.
\end{aligned}$$

Integrando ambos lados de la igualdad

$${}_tp_x^{\overline{ii}} = e^{\left(-\int_0^t \sum_{j=0, j\neq i}^{n} \mu_{x+t}^{ij}\right)}.$$

Ahora se tiene una expresión para la probabilidad de no dejar el estado i en términos de las fuerzas de transición entre los estados i y j, con $i \neq j$.

Teorema 4.1 (Ecuación de Kolmogorov)**.** *Sean i y j dos estados no necesariamente distintos, en un modelo multiestado en el cual existen $n+1$ estados posibles. Para $x, t, h \geq 0$*

$${}_{t+h}p_x^{ij} = {}_tp_x^{ij} - h\sum_{k=0, k\neq j}^{n+1}\left({}_tp_x^{ij}\mu_{x+t}^{jk} - {}_tp_x^{ik}\mu_{x+t}^{kj}\right) + o(h). \tag{4.1}$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
{}_{t+h}p_x^{ij} &= {}_tp_x^{ij}\ {}_hp_{x+t}^{jj} + \sum_{k=0,k\neq j}^{n} {}_tp_x^{ik}\ {}_hp_{x+t}^{kj} \\
{}_{t+h}p_x^{ij} &= {}_tp_x^{ij}\left(1 - h\sum_{k=0,k\neq j}^{n} \mu_{x+t}^{jk} - o(h)\right) + \sum_{k=0,k\neq j}^{n} {}_tp_x^{ik}\ {}_hp_{x+t}^{kj} \\
{}_{t+h}p_x^{ij} &= {}_tp_x^{ij}\left(1 - h\sum_{k=0,k\neq j}^{n} \mu_{x+t}^{jk} - o(h)\right) + h\sum_{k=0,k\neq j}^{n} {}_tp_x^{ik}\mu_{x+t}^{kj} + o(h) \\
{}_{t+h}p_x^{ij} &= {}_tp_x^{ij} - h\sum_{k=0,k\neq j}^{n+1}\left({}_tp_x^{ij}\mu_{x+t}^{jk} - {}_tp_x^{ik}\mu_{x+t}^{kj}\right) + o(h).
\end{aligned}
$$

Usaremos la ecuación de Kolmogorov para determinar un sistema de ecuaciones diferenciales para el cálculo de ${}_tp_x^{ij}$.
Ordenando términos de la ecuación 4.1.

$$
\frac{1}{h}\left({}_{t+h}p_x^{ij} - {}_tp_x^{ij}\right) = -\sum_{k=0,k\neq j}^{n+1}\left({}_tp_x^{ij}\mu_{x+t}^{jk} - {}_tp_x^{ik}\mu_{x+t}^{kj}\right) + \frac{o(h)}{h}
$$

Cuando $h \to 0$

$$
\frac{d}{dt}\ {}_tp_x^{ij} = \sum_{k=0,k\neq j}^{n+1}\left({}_tp_x^{ik}\mu_{x+t}^{kj} - {}_tp_x^{ij}\mu_{x+t}^{jk}\right).
$$

Esta última fórmula se conoce como la ecuación de Kolmogorov.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\ {}_tp_x^{ij} &= \sum_{k=0,k\neq j}^{n+1}\left({}_tp_x^{ik}\mu_{x+t}^{kj}\right) - {}_tp_x^{ij}\sum_{k=0,k\neq j}^{n+1}\left(\mu_{x+t}^{jk}\right) \\
\frac{d}{dt}\ {}_tp_x^{ij} &= \sum_{k=0,k\neq j}^{n+1}\left({}_tp_x^{ik}\mu_{x+t}^{kj}\right) - {}_tp_x^{ij}\mu_{x+t}^{j}
\end{aligned}
$$

donde $\mu_{x+t}^{j} = \sum_{k=0,k\neq j}^{n+1} \mu_{x+t}^{jk}$. $\square$

4.3. Aplicación

Uno de los riesgos que afectan tanto física como económicamente es sin duda la pérdida de la salud ocasionada por alguna enfermedad o accidente. Para cubrir tal eventualidad existen en nuestro país los servicios de salud, que son proporcionados a través de instituciones públicas y privadas, las primeras representadas por la Secretaría de Salud, los servicios médicos del departamento del Distrito Federal, las instituciones de seguridad social integradas por el IMSS y el ISSSTE, los servicios que presta PEMEX, Ferrocarriles Nacionales de México, la Secretaría de la Defensa Nacional, la Secretaría de Marina y por lo que se refiere al sector privado encontramos los centros hospitalarios. La posibilidad de optar por instituciones públicas o privadas, permite cubrir la atención médica a través de recursos propios, sin embargo esta última elección representa un costo que suele ser elevado, lo que limita su utilización a sectores específicos de la población [16].

Parte del objetivo principal de este trabajo es ejemplificar cómo utilizar la ecuación de Kolmogorov en el cálculo de un seguro con más de dos estados. Para ello plantearemos un seguro de invalidez complementario a la cobertura ofrecida por el Instituto Mexicano del Seguro Social el cual es la institución de seguridad social más importante de nuestro país.

Así mismo se investigaron las tablas de probabilidades de invalidez y fallecimiento del Instituto tomando como versión más reciente la del "Informe al 31 de diciembre de 2014".

De acuerdo con el Primer Tribunal Colegiado en Materia de Trabajo del Primer Circuito Judicial de la Federación se define:
"La invalidez es un estado físico que se traduce en la pérdida de la capacidad de trabajo, debido a una disminución notable de la salud en la persona, ocasionada por una enfermedad de tipo general o accidente no profesionales".
En palabras más coloquiales en nuestro país una persona se considera inválida si tiene alguna enfermedad o un accidente no relacionados con su trabajo que reduzca la capacidad de trabajar.

La Ley del Seguro Social en su artículo 119 es aún más explícita al respecto:
"Para los efectos de esta ley existe invalidez cuando el asegurado se halle imposibilitado para procurarse, mediante un trabajo igual, una remuneración superior al cincuenta por ciento de su remuneración habitual percibida durante el último año de trabajo y que esa imposibilidad derive de una enfermedad o accidente no profesionales".
Para poder recibir una pensión en el ramo de Invalidez y Vida por parte del IMSS, además de contar con la imposibilidad física para trabajar, esta debe ser evaluada y determinada por los servicios médicos del Instituto mediante el dictamen médico establecido para tal fin.
Adicionalmente se requiere un mínimo de 250 semanas cotizadas si la invalidez

es mayor al 50 % pero inferior al 75 % y en caso de invalidez superior a 75 % se requiere de 150 semanas de cotización.

El proceso se resume en el siguiente diagrama:

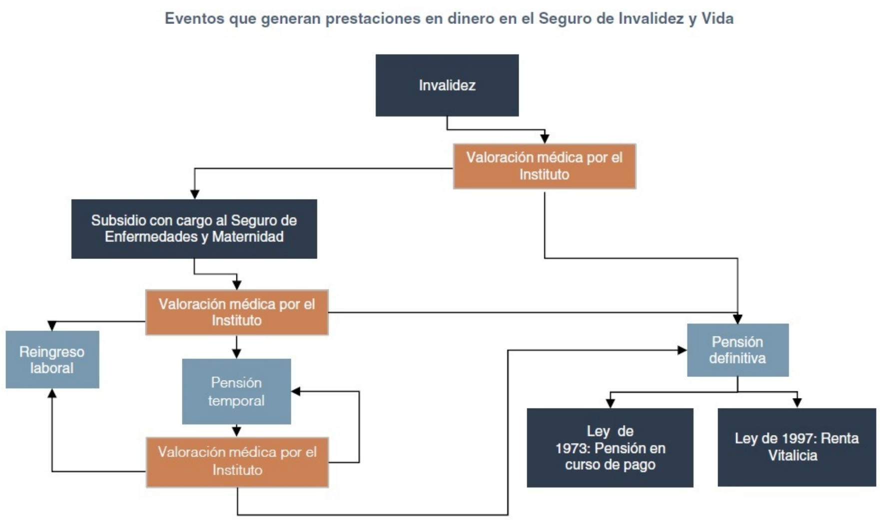


Figura 4.4: Proceso para recibir el Seguro de Invalidez y Vida [Dirección de Prestaciones Económicas y Sociales, IMSS].

Como se puede observar en el diagrama existen dos tipos de pensiones, la temporal y la definitiva.
Una pensión por invalidez temporal es ofrecida por el Instituto al cumplir el estado de invalidez y consiste en el 35 % del salario promedio correspondiente a las últimas 500 semanas de cotización anteriores al otorgamiento de la misma o las que tuviere para obtener dicha pensión.

De acuerdo con el IMSS en su artículo 120 fracción I, 121 y 141, una pensión se otorga por periodos renovables en caso de existir posibilidad de recuperación para el trabajo, dichos plazos están establecidos en quincenas con un máximo de un año, luego de realizar un dictamen médico se puede dar una prórroga de 26 semanas más.
Así dentro de los dos años siguientes a la fecha de expedición del dictamen temporal, el IMSS realiza la revaloración médica del pensionado a fin de definir si existe recuperación para volver al trabajo o se adquiere el carÃ¡cter de pensión definitiva.

La motivación del seguro de invalidez es ofrecer una cobertura accesible para personas que se encuentren saludables y laborando para que en caso de sufrir una enfermedad o accidente no profesional reciban el 35 % de su salario

por parte del IMSS y el otro 65 % de la aseguradora, de esta forma el individuo no se encontrará en una situación de inseguridad económica al menos por un plazo de dos años, en los cuales se podría dar dictamen de recuperación o bien pudiera encontrar un empleo con remuneración del 50 % o más de su anterior salario, o recibe la pensión de forma definitiva.
En caso de fallecimiento de trabajador o pensionado se otorgan por concepto de gastos de funeral 2 meses de salario mínimo general vigente en el Distrito Federal a la fecha de fallecimiento lo cual según la Comisión Nacional de los Salarios Mínimos mediante la resolución publicada en el Diario Oficial de la Federación del 19 de diciembre de 2016 vigente a partir del 1 de enero de 2017 da un monto diario de $80.04, es decir el pago de funeral es por $4,802.4, dicho monto es insuficiente para cubrir los gastos funerarios y/o cualquier otra deuda que pudiera tener el asegurado, por lo que se propone para nuestro producto una indemnización de $200,000.00.

Se considera el siguiente problema:
Un trabajador de edad x que se encuentra saludable contrata un seguro de invalidez con la siguiente cobertura:

- Si la persona se encuentra saludable y fallece, sus beneficiarios reciben al final de la quincena en que fallezca una suma asegurada S.
- Si la persona está incapacitada por una enfermedad o accidente no profesional recibe quincenalmente el 65 % de su salario mientras se encuentre incapacitada.

Las condiciones son las siguientes:

- La cobertura es únicamente por un periodo de 2 años.
- Se paga una prima de forma quincenal anticipada siempre y cuando esté saludable.
- La tasa de interés compuesto es 3.7 % anual [1].

¿Cuánto se debe pagar quincenalmente por dicha cobertura?

Para obtener las probabilidades de transición necesarias para el cálculo del costo de la invalidez y beneficio del seguro, se utiliza la ecuación de Kolmogorov.
En general se presentan dos casos, en el primero el sistema de ecuaciones resultantes tiene una solución analítica y en el segundo no tiene solución analítica, por lo cual se aproxima mediante un método numérico, en este trabajo se emplea el método Runge Kutta de orden 4.

En ambos casos, utilizamos la ecuación de Kolmogorov para obtener las probabilidades de transición.

[1] Referencia tomada del IMSS para el cálculo del seguro.

El problema se representa en el siguiente diagrama:

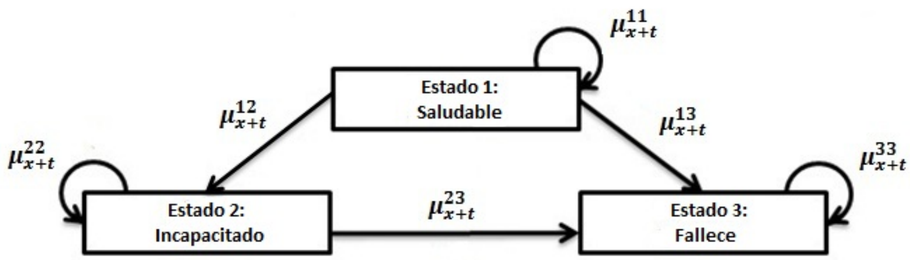


Figura 4.5: Representación gráfica del seguro con 3 estados [Elaboración propia]

La ecuación de Kolomogorov para el caso de tres estados 1(Saludable), 2(Incapacitado) y 3(Fallece), se usa para plantear dos ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d}{dt}\,{}_tp_x^{11} = {}_tp_x^{12}\mu_{x+t}^{21} - {}_tp_x^{11}\left(\mu_{x+t}^{12} + \mu_{x+t}^{13}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\,{}_tp_x^{12} = {}_tp_x^{11}\mu_{x+t}^{12} - {}_tp_x^{12}\left(\mu_{x+t}^{21} + \mu_{x+t}^{23}\right).$$

En el modelo una vez que se cae en el estado 3(fallece) no es posible regresar a algún otro estado, además no es posible regresar del estado 2(Incapacitado) al estado 1(Saludable), bajo el supuesto de que la persona seguirá esperando la valoración médica del Instituto hasta el final del plazo de dos años.

$$\frac{d}{dt}\,{}_tp_x^{11} = -\,{}_tp_x^{11}\left(\mu_{x+t}^{12} + \mu_{x+t}^{13}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\,{}_tp_x^{12} = {}_tp_x^{11}\mu_{x+t}^{12} - {}_tp_x^{12}\left(\mu_{x+t}^{23}\right).$$

Para el cálculo del seguro, es necesario considerar los siguientes supuestos:

1. La persona se encuentra saludable al inicio del proceso.

2. Si la persona enferma o tiene un accidente, el padecimiento es irreversible por lo que es imposible mejorar.

3. El estado 3 (fallece) es un estado absorbente.

4.3.1. Sistema de ecuaciones diferenciales

En caso de que las fuerzas de transición sean constantes en al menos un intervalo de tiempo, las ecuaciones de Kolmogorov se expresan como:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\,{}_tp_x^{11} &= -\,{}_tp_x^{11}[\mu_x^{12}+\mu_x^{13}]\\ \frac{d}{dt}\,{}_tp_x^{12} &= \,{}_tp_x^{11}\mu_x^{12} - \,{}_tp_x^{12}\mu_x^{23}.\end{aligned}$$

Además, la condición inicial $p_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir, ${}_0p_x^{11} = 1$ y ${}_0p_x^{12} = 0$. El cual en forma matricial es de la forma.

$$\begin{pmatrix} {}_tp_x^{11} \\ {}_tp_x^{12} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -(\mu_x^{12}+\mu_x^{13}) & 0 \\ \mu_x^{12} & -\mu_x^{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_tp_x^{11} \\ {}_tp_x^{12} \end{pmatrix}, \text{ con } p_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La solución es de la forma $P(t) = C_1V_1e^{\lambda_1 t} + C_2V_2e^{\lambda_2 t}$, con C_1, C_2 constantes, $V_1,\ V_2$ vectores propios y $\lambda_1,\ \lambda_2$ valores propios de la matriz.

Primero determinamos los valores propios de la matriz usando el polinomio característico..

$$\begin{vmatrix} -(\mu_x^{12}+\mu_x^{13})-\lambda & 0 \\ \mu_x^{12} & -\mu_x^{23}-\lambda \end{vmatrix} = (-(\mu_x^{12}+\mu_x^{13})-\lambda)(-\mu_x^{23}-\lambda)$$

$$\lambda_1 = -(\mu_x^{12}+\mu_x^{13})$$

$$\lambda_2 = -\mu_x^{23}.$$

Una vez que tenemos los valores propios, procedemos a calcular los vectores propios, para λ_1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu_x^{12} & -\mu_x^{23}+\mu_x^{12}+\mu_x^{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces, tenemos

$$\mu_x^{12}v_1 + (\mu_x^{12}+\mu_x^{13}-\mu_x^{23})v_2 = 0.$$

Despejando v_1

$$v_1 = \left(\frac{\mu_x^{23}-\mu_x^{12}-\mu_x^{13}}{\mu_x^{12}}\right)v_2.$$

Tomando $v_2 = \mu_x^{12}$ obtenemos el vector propio

$$V_1 = \begin{pmatrix} \mu_x^{23}-\mu_x^{12}-\mu_x^{13} \\ \mu_x^{12} \end{pmatrix}.$$

Para λ_2

$$\begin{pmatrix} -\mu_x^{12}-\mu_x^{13}+\mu_x^{23} & 0 \\ \mu_x^{12} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Así, podemos tomar el vector

$$V_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Al sustituir $\lambda_1,\ \lambda_2,\ V_1$ y V_2 se tiene el sistema

$$\begin{pmatrix} {}_tp_x^{11} \\ {}_tp_x^{12} \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} \mu_x^{23}-\mu_x^{12}-\mu_x^{13} \\ \mu_x^{12} \end{pmatrix}e^{-(\mu_x^{12}+\mu_x^{13})t}+C_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-\mu_x^{23}t}.$$

Las constantes C_1 y C_2 se determinan sustituyendo la condición inicial. Note que dicha condición así como las fuerzas de transición se modifican año con año. Para el primer año se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} \mu_x^{23}-\mu_x^{12}-\mu_x^{13} \\ \mu_x^{12} \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Con lo cual tenemos las siguientes dos ecuaciones

$$1=C_1(\mu_x^{23}-\mu_x^{12}-\mu_x^{13})$$
$$0=C_1\mu_x^{12}+C_2.$$

Despejando C_1 de la primera ecuación obtenemos el valor

$$C_1=\frac{1}{\mu_x^{23}-\mu_x^{12}-\mu_x^{13}}.$$

Sustituyendo el valor de C_1 en la segunda ecuación y despejando C_2 obtenemos

$$C_2=-\frac{\mu_x^{12}}{\mu_x^{23}-\mu_x^{12}-\mu_x^{13}}.$$

De esta forma, dados los valores de C_1 y C_2, el sistema matricial queda de la forma

$$\begin{pmatrix} {}_tp_x^{11} \\ {}_tp_x^{12} \end{pmatrix}=\frac{1}{\mu_x^{23}-\mu_x^{12}-\mu_x^{13}}\begin{pmatrix} \mu_x^{23}-\mu_x^{12}-\mu_x^{13} \\ \mu_x^{12} \end{pmatrix}e^{-(\mu_x^{12}+\mu_x^{13})t}-\frac{\mu_x^{12}}{\mu_x^{23}-\mu_x^{12}-\mu_x^{13}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-\mu_x^{23}t}.$$

Por lo tanto, la solución para cualquier tiempo t tal que $0\leq t\leq 1$ es:

$${}_tp_x^{11}=e^{-(\mu_x^{12}+\mu_x^{13})t}$$

$${}_tp_x^{12}=\frac{\mu_x^{12}}{\mu_x^{23}-\mu_x^{12}-\mu_x^{13}}\left[e^{-(\mu_x^{12}+\mu_x^{13})t}-e^{-\mu_x^{23}t}\right].$$

Para encontrar las probabilidades para el segundo año, es decir cuando $1 \leq t < 2$ se sigue el procedimiento anterior, tomando como condición inicial el sistema anterior evaluado en $t = 1$, y obtenemos:

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x^{11} &= e^{-(\mu_x^{12}+\mu_x^{13})}e^{-(\mu_{x+1}^{12}+\mu_{x+1}^{13})(t-1)} \\
{}_tp_x^{12} &= \frac{e^{-(\mu_x^{12}+\mu_x^{13})}\mu_{x+1}^{12}e^{-(\mu_{x+1}^{12}+\mu_{x+1}^{13})(t-1)}}{\mu_{x+1}^{23}-\mu_{x+1}^{12}-\mu_{x+1}^{13}} \\
&+ \left[\frac{\mu_x^{12}}{\mu_x^{23}-\mu_x^{12}-\mu_x^{13}}\left[e^{-(\mu_x^{12}+\mu_x^{13})}-e^{-\mu_x^{23}}\right]-\frac{e^{-(\mu_x^{12}+\mu_x^{13})}\mu_{x+1}^{12}}{\mu_{x+1}^{23}-\mu_{x+1}^{12}-\mu_{x+1}^{13}}\right]e^{-\mu_{x+1}^{23(t-1)}}.
\end{aligned}
$$

Como se mencionó anteriormente, el sistema de ecuaciones generalmente tiene una solución analítica cuando las fuerzas de transición son constantes en un intervalo de tiempo, para este ejemplo utilizaremos las probabilidades obtenidas de "Valuación Actuarial del Seguro de Invalidez y Vida al 31 de diciembre de 2014" del IMSS, con estas y aplicando el supuesto exponencial para la fuerza de fallo, tenemos

$$\mu_x = -\ln(p_x).$$

De este modo podemos considerar, por ejemplo, para una persona del género masculino de 50 años las fuerzas de transición como siguen:

- $\mu_{50}^{12} = 0.00330746$
- $\mu_{50}^{13} = 0.00352621$
- $\mu_{50}^{23} = 0.03187258$
- $\mu_{51}^{12} = 0.00379017$
- $\mu_{51}^{13} = 0.00370686$
- $\mu_{51}^{23} = 0.03190355.$

Realizando los cálculos correspondientes al primer año tomando en cuenta que la persona debe estar saludable al momento de contratación, obtenemos las siguientes probabilidades

t	${}_tp_x^{11}$	${}_tp_x^{12}$
0	1.000000000	0.000000000
1/24	0.999715304	0.000137700
2/24	0.999430689	0.000275178
3/24	0.999146156	0.000412434
4/24	0.998861703	0.000549469
5/24	0.998577331	0.000686283
6/24	0.998293040	0.000822876
7/24	0.998008830	0.000959249
8/24	0.997724701	0.001095402
9/24	0.997440653	0.001231335
10/24	0.997156686	0.001367048
11/24	0.996872800	0.001502542
12/24	0.996588994	0.001637817
13/24	0.996305269	0.001772874
14/24	0.996021625	0.001907712
15/24	0.995738062	0.002042332
16/24	0.995454580	0.002176735
17/24	0.995171178	0.002310920
18/24	0.994887857	0.002444888
19/24	0.994604616	0.002578639
20/24	0.994321456	0.002712174
21/24	0.994038377	0.002845493
22/24	0.993755379	0.002978595
23/24	0.993472461	0.003111482
24/24	0.993189623	0.003244154

Cuadro 4.1: Probabilidades de transición del primer año obtenidas por el método analítico [Elaboración propia].

De igual forma, utilizando la fórmula encontrada para $1 < t \leq 2$ podemos obtener las probabilidades para el segundo año del seguro.

t	${}_tp_x^{11}$	${}_tp_x^{12}$
25/24	0.992879422	0.003396564
26/24	0.992569319	0.003548723
27/24	0.992259312	0.003700630
28/24	0.991949402	0.003852287
29/24	0.991639588	0.004003694
30/24	0.991329872	0.004154850
31/24	0.991020252	0.004305757
32/24	0.990710729	0.004456414
33/24	0.990401303	0.004606823
34/24	0.990091973	0.004756983
35/24	0.989782740	0.004906894
36/24	0.989473603	0.005056558
37/24	0.989164563	0.005205974
38/24	0.988855620	0.005355143
39/24	0.988546773	0.005504065
40/24	0.988238022	0.005652740
41/24	0.987929368	0.005801169
42/24	0.987620810	0.005949352
43/24	0.987312349	0.006097290
44/24	0.987003984	0.006244982
45/24	0.986695715	0.006392430
46/24	0.986387543	0.006539633
47/24	0.986079467	0.006686592
48/24	0.985771487	0.006833307

Cuadro 4.2: Probabilidades de transición del segundo año obtenidas por el método analítico [Elaboración propia].

De esta forma, una vez obtenidas las probabilidades podemos calcular el costo de la cobertura ofrecida, primero determinamos el costo de cubrir la incapacidad de la siguiente forma:

$$\text{Costo incapacidad} = \sum_{t=1}^{48}(0.65)(\text{Salario})({}_{\frac{t}{24}}p_{50}^{12})(1.037)^{\frac{-t}{24}}.$$

Tomando un salario quincenal de \$5,000 y utilizando los datos dados en la tabla obtenemos

$$\begin{aligned}\text{Costo incapacidad} &= (0.65)(5000)\left(({}_{\frac{1}{24}}p_{50}^{12})(1.037^{\frac{-1}{24}}) + ... + ({}_{\frac{48}{24}}p_{50}^{12})(1.037^{\frac{-48}{24}})\right)\\ &= (0.65)(5000)(0.15596656)\\ &= \$506.89.\end{aligned}$$

Ahora, calculamos el costo del seguro temporal a dos años en caso de fallecimiento, con una suma asegurada de \$200,000.
La fuerza de transición del estado 1(Saludable) al estado 3 (Fallecimiento) está dada por $\mu_{50}^{13} = 0.00352621$ para el primer año de la cobertura y $\mu_{51}^{13} = 0.00370686$, entonces la probabilidad de que una persona de edad x fallezca si se encuentra saludable es:

$${}_{\frac{1}{24}}q_{50+\frac{t}{24}} = \begin{cases} 1 - e^{-\int_0^{\frac{1}{24}} \mu_{50}^{13}dt} & \text{si } 0 < t \leq 23 \\ 1 - e^{-\int_0^{\frac{1}{24}} \mu_{51}^{13}dt} & \text{si } 23 < t \leq 47. \end{cases}$$

Entonces el costo del seguro será

$$\text{Costo seguro} = (\$200,000)\sum_{t=0}^{47}(1.037)^{\frac{-t}{24}}({}_{\frac{t}{24}}p_{50}^{11})({}_{\frac{1}{24}}q_{50+\frac{t}{24}}).$$

El cual podemos ver como:

$$\begin{aligned}
\text{Costo seguro} &= (\$200,000)\sum_{t=0}^{23}(1.037)^{\frac{-t}{24}}\left({}_{\frac{t}{24}}p_{50}^{11}\right)\left(1-e^{-\int_0^{\frac{1}{24}}0.00352621dt}\right)\\
&+(\$200,000)\sum_{t=24}^{47}(1.037)^{\frac{-t}{24}}\left({}_{\frac{t}{24}}p_{50}^{11}\right)\left(1-e^{-\int_0^{\frac{1}{24}}0.00370686dt}\right)\\
&=(\$200,000)(0.00693052)\\
&=\$1,386.10.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el costo total es:

$$\text{Costo total} = \text{Costo incapacidad} + \text{Costo seguro} = \$506.89 + \$1,386.10 = \ \$1,892.99.$$

El valor de la cobertura debe coincidir con el valor presente de los pagos quincenales anticipados realizador por el asegurado siempre y cuando se encuentre en el estado 1 (Saludable).

$$\begin{aligned}
\text{Valor presente pagos} &= P\left[\sum_{t=0}^{47}(1.037)^{\frac{-t}{24}}\ \ {}_{\frac{t}{24}}p_{50}^{11}\right]\\
&= P\left[1+(1.037)^{\frac{-1}{24}}(0.999715304)+\cdots+(1.037)^{\frac{-47}{24}}(0.986079467)\right]\\
&= 46.02P.
\end{aligned}$$

Por el principio de equivalencia actuarial

$$\begin{aligned}
Valor\ presente\ de\ los\ pagos &= Costo\ cobertura\\
46.02P &= \$1,892.99\\
P &= \$41.13.
\end{aligned}$$

En este caso, un hombre de 50 años pagaría \$41.13 quincenales si se encuentra saludable por el seguro ofrecido que en caso de incapacidad recibe \$3,250 a la quincena y \$200,000 en caso de fallecimiento, durante los dos años del plazo de la cobertura.

Con el fin de facilitar el cálculo del seguro para distintos datos, se realizó un programa en VBA en Excel (el código se encuentra en el Apéndice C), el cual incluye el caso analítico y el caso en que se aproxima la solució mediante el método Runge Kutta, así para el caso calculado anteriormente se ingresaron los datos dados:

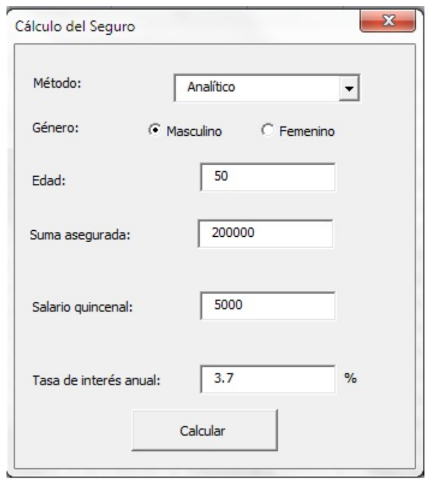


Figura 4.6: Datos programa VBA método analítico[Elaboración propia]

El programa realiza los cálculos correspondientes y muestra un mensaje con el resultado, el cual se puede observar que coincide con el resultado obtenido anteriormente.

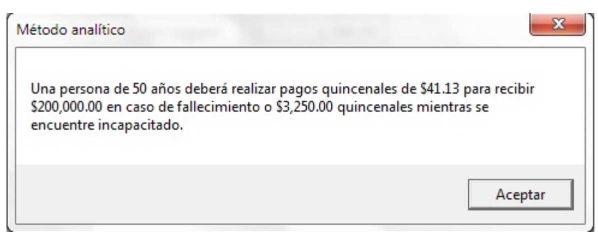


Figura 4.7: Resultados programa VBA método analítico[Elaboración propia]

4.3.2. Solución numérica de Ecuaciones diferenciales

Puede existir el caso en que las fuerzas de transición son conocidas pero dependen de una variable como el tiempo. Para el siguiente ejemplo práctico se considerará el supuesto “UDD” para las fuerzas de transición, es decir, tomando los datos de “Valuación Actuarial del Seguro de Invalidez y Vida al 31 de diciembre de 2014" del IMSS al igual que en el caso anterior, bajo este supuesto las fuerzas de mortalidad se calculan de la siguiente manera:

$$\mu_{x+t} = \frac{q_x}{1 - tq_x} \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

De esta forma, para el ejemplo mencionado anteriormente, las fuerzas de mortalidad son:

- $\mu_{50}^{12} = \frac{0.003302}{1-0.003302t}$
- $\mu_{50}^{13} = \frac{0.00352}{1-0.00352t}$
- $\mu_{50}^{23} = \frac{0.03137}{1-0.03137t}$
- $\mu_{51}^{12} = \frac{0.003783}{1-0.003783t}$
- $\mu_{51}^{13} = \frac{0.0037}{1-0.0037t}$
- $\mu_{51}^{23} = \frac{0.0314}{1-0.03142t}$.

Utilizando nuevamente la ecuación de Kolmogorov y las fuerzas de transición, queda el siguiente sistema para el primer año

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\ {}_tp_x^{11} &= -\left(\frac{0.003302}{1-0.003302t} + \frac{0.00352}{1-0.00352t}\right)\ {}_tp_x^{11} \\
\frac{d}{dt}\ {}_tp_x^{12} &= \left(\frac{0.003302}{1-0.003302t}\right)\ {}_tp_x^{11} - \left(\frac{0.03137}{1-0.03137t}\right)\ {}_tp_x^{12}.
\end{aligned}$$

y para el segundo año de la cobertura

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\ {}_tp_x^{11} &= -\left(\frac{0.003783}{1-0.003783t} + \frac{0.0037}{1-0.0037t}\right)\ {}_tp_x^{11} \\
\frac{d}{dt}\ {}_tp_x^{12} &= \left(\frac{0.003783}{1-0.003783t}\right)\ {}_tp_x^{11} - \left(\frac{0.0314}{1-0.0314t}\right)\ {}_tp_x^{12}.
\end{aligned}$$

Para determinar la solución de las ecuaciones diferenciales se usará el Método Runge Kutta de orden 4 propuesto anteriormente, con tamaño de paso $h = \frac{1}{24}$, tomando en cuenta la condición inicial de que la persona se encuentra saludable al momento de la contratación del seguro.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\ {}_tp_x^{11} &= -\left(\frac{0.003302}{1-0.003302t}+\frac{0.00352}{1-0.00352t}\right)\ {}_tp_x^{11} \\
k_1 &= \frac{1}{24}\left[-\left(\frac{0.003302}{1-0.003302t}+\frac{0.00352}{1-0.00352t}\right)\ {}_tp_x^{11}\right] \\
k_2 &= \frac{1}{24}\left[-\left(\frac{0.003302}{1-0.003302(t+\frac{1}{48})}+\frac{0.00352}{1-0.00352(t+\frac{1}{48})}\right)\right. \\
&\quad \left.\left({}_tp_x^{11}+\frac{k_1}{2}\right)\right] \\
k_3 &= \frac{1}{24}\left[-\left(\frac{0.003302}{1-0.003302(t+\frac{1}{48})}+\frac{0.00352}{1-0.00352(t+\frac{1}{48})}\right)\right. \\
&\quad \left.\left({}_tp_x^{11}+\frac{k_2}{2}\right)\right] \\
k_4 &= \frac{1}{24}\left[-\left(\frac{0.003302}{1-0.003302(t+\frac{1}{24})}+\frac{0.00352}{1-0.00352(t+\frac{1}{24})}\right)\right. \\
&\quad \left.\left({}_tp_x^{11}+k_3\right)\right] \\
{}_{t+\frac{1}{24}}p_x^{11} &= {}_tp_x^{11}+\frac{1}{6}\left(k_1+2k_2+2k_3+k_4\right) \\
\\
\frac{d}{dt}\ {}_tp_x^{12} &= \left(\frac{0.003302}{1-0.003302t}\right)\ {}_tp_x^{11}-\left(\frac{0.03137}{1-0.03137t}\right)\ {}_tp_x^{12} \\
l_1 &= \frac{1}{24}\left[\left(\frac{0.003302}{1-0.003302t}\right)\ {}_tp_x^{11}-\left(\frac{0.03137}{1-0.03137t}\right)\ {}_tp_x^{12}\right] \\
l_2 &= \frac{1}{24}\left[\left(\frac{0.003302}{1-0.003302(t+\frac{1}{48})}\right)\left({}_tp_x^{11}+\frac{k_1}{2}\right)\right. \\
&\quad \left.-\left(\frac{0.03137}{1-0.03137(t+\frac{1}{48})}\right)\left({}_tp_x^{12}+\frac{l_1}{2}\right)\right] \\
l_3 &= \frac{1}{24}\left[\left(\frac{0.003302}{1-0.003302(t+\frac{1}{48})}\right)\left({}_tp_x^{11}+\frac{k_2}{2}\right)\right. \\
&\quad \left.-\left(\frac{0.03137}{1-0.03137(t+\frac{1}{48})}\right)\left({}_tp_x^{12}+\frac{l_2}{2}\right)\right] \\
l_4 &= \frac{1}{24}\left[\left(\frac{0.003302}{1-0.003302(t+\frac{1}{24})}\right)\left({}_tp_x^{11}+k_3\right)\right. \\
&\quad \left.-\left(\frac{0.03137}{1-0.03137(t+\frac{1}{24})}\right)\left({}_tp_x^{12}+l_3\right)\right] \\
{}_{t+\frac{1}{24}}p_x^{12} &= {}_tp_x^{12}+\frac{1}{6}\left(l_1+2l_2+2l_3+l_4\right).
\end{aligned}
$$

Para el segundo año se tienen :

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\ {}_tp_x^{11} &= -\left(\frac{0.003783}{1-0.003783t}+\frac{0.0037}{1-0.0037t}\right)\ {}_tp_x^{11} \\
k_1 &= \frac{1}{24}\left[-\left(\frac{0.003783}{1-0.003783t}+\frac{0.0037}{1-0.0037t}\right)\ {}_tp_x^{11}\right] \\
k_2 &= \frac{1}{24}\left[-\left(\frac{0.003783}{1-0.003783(t+\frac{1}{48})}+\frac{0.0037}{1-0.0037(t+\frac{1}{48})}\right)\right. \\
&\quad \left.\left({}_tp_x^{11}+\frac{k_1}{2}\right)\right] \\
k_3 &= \frac{1}{24}\left[-\left(\frac{0.003783}{1-0.003783(t+\frac{1}{48})}+\frac{0.0037}{1-0.0037(t+\frac{1}{48})}\right)\right. \\
&\quad \left.\left({}_tp_x^{11}+\frac{k_2}{2}\right)\right] \\
k_4 &= \frac{1}{24}\left[-\left(\frac{0.003783}{1-0.003783(t+\frac{1}{24})}+\frac{0.0037}{1-0.0037(t+\frac{1}{24})}\right)\right. \\
&\quad \left.\left({}_tp_x^{11}+k_3\right)\right] \\
{}_{t+\frac{1}{24}}p_x^{11} &= {}_tp_x^{11}+\frac{1}{6}\left(k_1+2k_2+2k_3+k_4\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\ {}_tp_x^{12} &= \left(\frac{0.003783}{1-0.003783t}\right)\ {}_tp_x^{11}-\left(\frac{0.0314}{1-0.0314t}\right)\ {}_tp_x^{12} \\
l_1 &= \frac{1}{24}\left[\left(\frac{0.003783}{1-0.003783t}\right)\ {}_tp_x^{11}-\left(\frac{0.0314}{1-0.0314t}\right)\ {}_tp_x^{12}\right] \\
l_2 &= \frac{1}{24}\left[\left(\frac{0.003783}{1-0.003783(t+\frac{1}{48})}\right)\left({}_tp_x^{11}+\frac{k_1}{2}\right)\right. \\
&\quad \left.-\left(\frac{0.0314}{1-0.0314(t+\frac{1}{48})}\right)\left({}_tp_x^{12}+\frac{l_1}{2}\right)\right] \\
l_3 &= \frac{1}{24}\left[\left(\frac{0.003783}{1-0.003783(t+\frac{1}{48})}\right)\left({}_tp_x^{11}+\frac{k_2}{2}\right)\right. \\
&\quad \left.-\left(\frac{0.0314}{1-0.0314(t+\frac{1}{48})}\right)\left({}_tp_x^{12}+\frac{l_2}{2}\right)\right] \\
l_4 &= \frac{1}{24}\left[\left(\frac{0.003783}{1-0.003783(t+\frac{1}{24})}\right)\left({}_tp_x^{11}+k_3\right)\right. \\
&\quad \left.-\left(\frac{0.0314}{1-0.0314(t+\frac{1}{24})}\right)\left({}_tp_x^{12}+l_3\right)\right] \\
{}_{t+\frac{1}{24}}p_x^{12} &= {}_tp_x^{12}+\frac{1}{6}\left(l_1+2l_2+2l_3+l_4\right).
\end{aligned}
$$

Al hacer los cálculos en Excel se obtienen las probabilidades

t	${}_tp_x^{11}$	${}_tp_x^{12}$
0	1.000000000	0.000000000
1/24	0.99971573	0.000137502
2/24	0.9994315	0.000274804
3/24	0.99914731	0.000411905
4/24	0.998863161	0.000548805
5/24	0.998579052	0.000685503
6/24	0.998294984	0.000822001
7/24	0.998010956	0.000958297
8/24	0.997726968	0.001094391
9/24	0.997443021	0.001230284
10/24	0.997159114	0.001365974
11/24	0.996875247	0.001501461
12/24	0.996591421	0.001636746
13/24	0.996307635	0.001771829
14/24	0.99602389	0.001906708
15/24	0.995740185	0.002041384
16/24	0.99545652	0.002175856
17/24	0.995172896	0.002310125
18/24	0.994889312	0.002444190
19/24	0.994605768	0.002578051
20/24	0.994322265	0.002711707
21/24	0.994038802	0.002845159
22/24	0.99375538	0.002978406
23/24	0.993471997	0.003111448
24/24	0.993188656	0.003244284

Cuadro 4.3: Probabilidades de transición del primer año obtenidas por el método Runge Kutta [Elaboración propia].

De igual forma, utilizando la fórmula encontrada para $1 < t \leq 2$ y tomando como condición inicial $p_x^{11} = 0.993188656$ y $p_x^{12} = 0.003244284$ podemos obtener las probabilidades para el segundo año del seguro.

t	${}_tp_x^{11}$	${}_tp_x^{12}$
25/24	0.9928778	0.003396949
26/24	0.992566994	0.003549375
27/24	0.992256235	0.003701565
28/24	0.991945526	0.003853517
29/24	0.991634865	0.004005231
30/24	0.991324253	0.004156706
31/24	0.99101369	0.004307944
32/24	0.990703175	0.004458942
33/24	0.990392708	0.004609702
34/24	0.990082291	0.004760222
35/24	0.989771922	0.004910503
36/24	0.989461602	0.005060544
37/24	0.98915133	0.005210345
38/24	0.988841107	0.005359906
39/24	0.988530933	0.005509226
40/24	0.988220807	0.005658306
41/24	0.98791073	0.005807144
42/24	0.987600702	0.005955741
43/24	0.987290722	0.006104096
44/24	0.986980791	0.006252210
45/24	0.986670909	0.006400081
46/24	0.986361075	0.006547710
47/24	0.98605129	0.006695097
48/24	0.985741553	0.006842240

Cuadro 4.4: Probabilidades de transición del segundo año obtenidas por el método Runge Kutta [Elaboración propia].

En el problema la persona tiene un salario quincenal de \$5,000 pesos, por lo que recibe \$3,250 siempre y cuando este incapacitado durante el periodo de dos años a partir de la contratación, usando una tasa de interés anual efectiva del 3.7 %.

El costo asociado a dicha cobertura es

$$\text{Costo incapacidad} = \sum_{t=1}^{48} (0.65)(\text{Salario})({}_{\frac{t}{24}}p_{50}^{12})(1.037)^{\frac{-t}{24}}.$$

Usando la información de la tabla

$$\begin{aligned}\text{Costo incapacidad} &= (0.65)(5000)\left(({}_{\frac{1}{24}}p_{50}^{12})(1.037^{\frac{-1}{24}}) + ... + ({}_{\frac{48}{24}}p_{50}^{12})(1.037^{\frac{-48}{24}})\right)\\ &= (0.65)(5000)(0.15604855)\\ &= \$507.15.\end{aligned}$$

También se contrata un seguro de vida temporal a dos años que paga una suma asegurada de \$200,000 en el caso de fallecimiento si la persona esta saludable.

La fuerza de transición del estado 1(Saludable) al estado 3 (Fallecimiento) está dada por $\mu_{50}^{13} = \frac{0.00352}{1-0.00352t}$ para el primer año de la cobertura y $\mu_{51}^{13} = \frac{0.0037}{1-0.0037t}$, la probabilidad de que una persona de 50 años fallezca si se encuentra saludable es:

$${}_{\frac{1}{24}}q_{50+\frac{t}{24}}.$$

Pero

$${}_{\frac{1}{24}}q_{50+\frac{t}{24}}\ {}_{\frac{t}{24}}p_{50} = {}_{\frac{t}{24}|\frac{1}{24}}\ q_{50} \overset{UDD}{=} \frac{1}{24}q_{50}.$$

Lo que implica que

$${}_{\frac{1}{24}}q_{50+\frac{t}{24}} = \frac{\frac{1}{24}q_{50}}{1-\frac{t}{24}q_{50}}.$$

De este modo, tenemos:

$${}_{\frac{1}{24}}q_{50+\frac{t}{24}} = \begin{cases} \frac{\frac{0.00352}{24}}{1-\frac{t(0.00352)}{24}} & \text{si } 0 < t \leq 23 \\ \frac{\frac{0.0037}{24}}{1-\frac{t(0.0037)}{24}} & \text{si } 23 < t \leq 47. \end{cases}$$

El valor presente del beneficio por fallecimiento es

$$\text{Costo seguro} = (\$200,000)\sum_{t=0}^{47}(1.037)^{\frac{-t}{24}}({}_{\frac{t}{24}}p_{50}^{11})({}_{\frac{1}{24}}q_{50+\frac{t}{24}}).$$

El cual podemos ver como

$$\begin{aligned}
\text{Costo seguro} &= (\$200,000)\sum_{t=0}^{23}(1.037)^{\frac{-t}{24}}\left({}_{\frac{t}{24}}p_{50}^{11}\right)\left(\frac{\frac{0.00352}{24}}{1-\frac{t(0.00352)}{24}}\right)\\
&+ (\$200,000)\sum_{t=24}^{47}(1.037)^{\frac{-t}{24}}\left({}_{\frac{t}{24}}p_{50}^{11}\right)\left(\frac{\frac{0.0037}{24}}{1-\frac{t(0.0037)}{24}}\right)\\
&= (\$200,000)(0.00691233152602)\\
&= \$1,382.46.
\end{aligned}$$

El costo total de ambas coberturas es

$$\text{Costo} = \text{Costo incapacidad} + \text{Seguro temporal} = \$507.15 + \$1,382.46 = \$1,889.62.$$

Las condiciones de contratación establecen pagos anticipados quincenales de una prima P para cubrir las coberturas elegidas, se calcula una anualidad anticipada temporal capitalizable quincenal.

$$\begin{aligned}
\text{Valor presente pagos} &= P\left[\sum_{t=0}^{47}(1.037)^{\frac{-t}{24}}\ {}_{\frac{t}{24}}p_{50}^{11}\right]\\
&= P\left[1+(1.037)^{\frac{-1}{24}}(0.99971573)+\cdots+(1.037)^{\frac{-47}{24}}(0.98605129)\right]\\
&= 46.02P.
\end{aligned}$$

Por el principio de equivalencia el valor presente de los pagos debe ser igual al costo de la cobertura contratada, igualando ambas expresiones se obtiene el valor de la prima P mensual.

$$\begin{aligned}
Valor\ presente\ de\ los\ pagos &= Costo\ cobertura\\
46.02P &= \$1,889.62\\
P &= \$41.06.
\end{aligned}$$

Al igual que en el caso analítico, utilizando el programa en VBA y seleccionando el método Runge Kutta, al ingresar los datos del ejemplo:

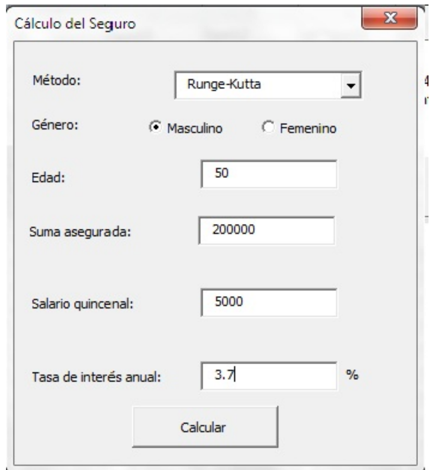


Figura 4.8: Datos programa VBA método Runge Kutta[Elaboración propia]

Se observa que el resultado es el mismo que se obtuvo manualmente:

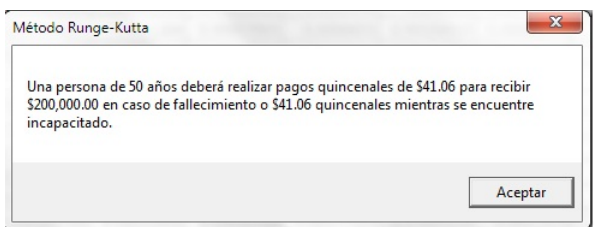


Figura 4.9: Resultados programa VBA método Runge Kutta[Elaboración propia]

Al concluir con nuestro ejemplo numérico y su automatización en VBA, podemos notar que el costo de la cobertura ofrecida es accesible para el trabajador.
En comparación a esto, el IMSS cobra sobre el salario base del trabajador el 1.75 % al patrón, el 0.625 % al trabajador y el 3.75 % de las cuotas patronales para el Estado, entonces para un trabajador con un salario de $5,000 mensuales, el régimen financiero del Instituto recibiría $122.03 por el ramo de Invalidez y Vida.
Cabe señalar que la cobertura del Instituto tiene restricciones (no toma en cuenta la edad), pero también beneficios siendo los principales el acceso al servicio médico y una pensión vitalicia, nuestro ejemplo es únicamente un complemento que beneficiaría a las personas con una invalidez pero con

probabilidades de recuperación.

Para poder verificar la aproximación del método Runge Kutta, se tomaron distintos salarios (tomados del tabulador de salarios BUAP “Benemérita Universidad Autónoma de Puebla Tabulador de Puestos con Pagos Brutos Mensuales 2017”) para una persona de 50 años y utilizando el programa en VBA una comparación del método Runge Kutta se obtuvieron los siguientes resultados:

Salario quincenal	Prima quincenal R.K.	Prima quincenal A.
13023.71	58.75	58.81
11110.085	54.53	54.59
9385.915	50.73	50.79
8764.75	49.36	49.42
8118.875	47.93	48
8042.125	47.77	47.83
7319.46	46.17	46.24
7246.375	46.01	46.08
6653.875	44.71	44.77
6462.335	44.28	44.35
6049.165	43.37	43.44
5499.25	42.16	42.23
4896.21	40.83	40.9
4283.21	39.48	39.55
3753.375	38.31	38.39
2558.54	35.68	35.75

Cuadro 4.5: Comparación de primas quincenales para una persona con un salario de \$7,246.375 para distintas edades [Elaboración propia].

Figura 4.10: Comparación de primas quincenales para una persona de 50 años con distintos salarios [Elaboración propia].

De igual forma, se tomó un salario de $7,246.375 y se hizo una comparación de los dos métodos tomando en cuenta distintas edades, así se obtuvo:

Edad	Prima quincenal R.K.	Prima quincenal A.
30	13.97	13.99
33	16.03	16.04
36	18.63	18.66
39	21.87	21.89
42	26.06	26.1
45	31.62	31.67
48	39.27	39.34
51	49.91	49.98
54	63.16	63.25
57	76.93	77.04
60	65.38	65.58
63	75.82	76.1
66	91.93	92.3
69	113.78	114.29
72	141.19	141.89
75	171.79	172.8

Cuadro 4.6: Comparación de primas quincenales para una persona de 50 años con distintos salarios [Elaboración propia].

Figura 4.11: Comparación de primas quincenales para una persona con un salario de $7,246.375 para distintas edades [Elaboración propia].

Conclusiones

Esta tesis tuvo como objetivo principal plantear un seguro de invalidez complementario a la cobertura que ofrece el IMSS, de este modo se utilizaron los conceptos y métodos presentados en el trabajo para plantear el seguro como un proceso estocástico y poder calcular las probabilidades de transición de estado a estado necesarias para calcular el costo y beneficio de la cobertura.

Como se mencionó anteriormente, la cobertura ofrecida por el IMSS solo depende del salario del trabajador, por otro lado para el planteamiento del seguro presentado en esta tesis se tomó en cuenta la edad de la persona al momento de la contratación, para poder calcular de una mejor manera el costo de dicho seguro con base en las probabilidades de transición.

Al realizar un caso con solución analítica y un caso por aproximación numérica, se mostró que cuando las fuerzas de transición no son constantes en un intervalo de tiempo, es decir, que dependen de algún factor como el tiempo, ejemplo en el que se utilizó el supuesto "UDD", un método numérico puede dar una aproximación cercana al resultado, en este caso con el método de Runge Kutta de orden 4, con base en comparación mostrada en las tablas y gráficas anteriores, se puede ver que la aproximación al tomar distintos salarios o distintas edades es buena.
En el ejemplo presentado, en ambos casos (analítico y numérico) se obtuvo que una persona de 50 años cuyo salario es de $5,000 quincenales, tendría que pagar $41.13 y $41.06 quincenales respectivamente, la cual es una cantidad no significativa en relación a su salario, para una cobertura de $200,000 en caso de fallecimiento o de $3,250 quincenales durante los dos años del plazo en caso de incapacidad, mismo que se verificó con el programa creado en VBA, el cual optimiza el tiempo para calcular el seguro.

De esta forma, se puede concluir que es posible ofrecer a los trabajadores una cobertura complementaria que pueda asegurarles conservar su seguridad económica y la de su familia por un periodo de dos años en caso de invalidez o fallecimiento, por un costo que no tiene un gran impacto en sus ingresos.

Para hacer la propuesta de seguro más completa se deberían incluir a la esposa e hijos con algún beneficio lo cual genera un modelo con muchos más estados; el cual se decidió no implementar por la falta de datos reales y confiables, con los cuales si únicamente se considerara realizar los cálculos (ya que se tienen más variables a considerar como el hecho de que el trabajador continúe casado, o que el hijo sea menor de edad o si la esposa se encuentra saludable, entre otras), la probabilidad de supervivencia se podría calcular con la Ley de Mortalidad Mexicana propuesta por Alejandro Mina.

Apéndice A

Tabla de fuerzas de transición (Analítico)

Edad	μ_x^{12}	μ_x^{12}	μ_x^{13}	μ_x^{13}	μ_x^{23}
	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres	
15	0.000013	0.000104	0.00091	0.00041	0.031769
16	0.000022	0.000093	0.00093	0.00041	0.031769
17	0.000035	0.000087	0.00096	0.00041	0.031769
18	0.000049	0.000081	0.00098	0.00041	0.031769
19	0.00007	0.000085	0.001011	0.00041	0.031769
20	0.000092	0.00009	0.001041	0.00042	0.031769
21	0.000116	0.000097	0.001071	0.00042	0.031769
22	0.00014	0.000106	0.001111	0.00042	0.031769
23	0.000164	0.000117	0.001141	0.00042	0.031769
24	0.000187	0.000131	0.001181	0.00042	0.031769
25	0.000211	0.000146	0.001221	0.00042	0.031769
26	0.000235	0.000165	0.001261	0.00043	0.031769
27	0.00026	0.000186	0.001301	0.00043	0.031769
28	0.000287	0.00021	0.001351	0.00043	0.031769
29	0.000316	0.000238	0.001401	0.00044	0.031769
30	0.000347	0.00027	0.001451	0.00044	0.031769
31	0.000381	0.000305	0.001511	0.00045	0.031769
32	0.00042	0.000343	0.001561	0.00045	0.031769
33	0.000463	0.000386	0.001631	0.00046	0.031769
34	0.000511	0.000433	0.001691	0.00046	0.031769
35	0.000564	0.000483	0.001762	0.00047	0.031769
36	0.000625	0.000538	0.001842	0.00048	0.031769

Edad	μ_x^{12}	μ_x^{12}	μ_x^{13}	μ_x^{13}	μ_x^{23}
	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres	
37	0.000693	0.000597	0.001922	0.00049	0.031769
38	0.000769	0.000661	0.002002	0.00049	0.03178
39	0.000856	0.000731	0.002092	0.0005	0.03178
40	0.000953	0.000807	0.002182	0.00052	0.03178
41	0.001065	0.000891	0.002283	0.00053	0.03178
42	0.001192	0.000985	0.002393	0.00054	0.03179
43	0.001338	0.00109	0.002503	0.00056	0.03179
44	0.001507	0.001209	0.002623	0.00057	0.0318
45	0.001703	0.001344	0.002754	0.00059	0.031811
46	0.001933	0.001499	0.002884	0.00061	0.031821
47	0.002201	0.001677	0.003035	0.00063	0.031831
48	0.002516	0.001882	0.003185	0.00065	0.031842
49	0.002883	0.002116	0.003346	0.00068	0.031862
50	0.003307	0.00238	0.003526	0.0007	0.031873
51	0.00379	0.002673	0.003707	0.00073	0.031904
52	0.004326	0.002987	0.003908	0.00077	0.031924
53	0.004899	0.003309	0.004118	0.0008	0.031965
54	0.005474	0.003619	0.004339	0.00085	0.031996
55	0.005997	0.003879	0.00458	0.00089	0.032048
56	0.006386	0.004231	0.004842	0.00094	0.0321
57	0.007102	0.004353	0.005113	0.001001	0.032162
58	0.007231	0.004559	0.005405	0.001061	0.032244
59	0.005817	0.00354	0.005716	0.001131	0.032327
60	0.002953	0.001961	0.006058	0.001211	0.03243
61	0.002881	0.001961	0.006411	0.001291	0.032544
62	0.002909	0.002018	0.006793	0.001391	0.032688
63	0.003022	0.002124	0.007206	0.001501	0.032843
64	0.003212	0.002272	0.007639	0.001631	0.03303
65	0.00348	0.002455	0.008113	0.001772	0.033236
66	0.003822	0.00267	0.008617	0.001932	0.033484
67	0.00424	0.002907	0.009162	0.002122	0.033764
68	0.004728	0.003158	0.009737	0.002333	0.034095
69	0.005283	0.003411	0.010353	0.002573	0.034467

Edad	μ_x^{12}	μ_x^{12}	μ_x^{13}	μ_x^{13}	μ_x^{23}
	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres	
70	0.005893	0.003652	0.011021	0.002854	0.034892
71	0.006541	0.003868	0.011739	0.003175	0.035389
72	0.007205	0.004046	0.012508	0.003546	0.035948
73	0.007853	0.004174	0.013339	0.003978	0.036602
74	0.008449	0.004243	0.014231	0.00449	0.037359
75	0.008956	0.00425	0.015185	0.005083	0.038221
76	0.009335	0.004197	0.016211	0.005787	0.039209
77	0.009556	0.004088	0.017319	0.006622	0.040353
78	0.00959	0.003935	0.01851	0.007609	0.041687
79	0.009429	0.003749	0.019795	0.008778	0.043221
80	0.009075	0.003544	0.021173	0.010192	0.044997
81	0.008546	0.003336	0.022665	0.01189	0.047071
82	0.007874	0.003018	0.024262	0.013947	0.049495
83	0.007097	0.002705	0.025995	0.016444	0.052336
84	0.00626	0.002407	0.027865	0.019499	0.055682
85	0.005408	0.002131	0.029882	0.023238	0.059644
86	0.004578	0.001884	0.032048	0.027844	0.064357
87	0.003804	0.001666	0.034395	0.033557	0.069993
88	0.003107	0.00148	0.036934	0.040655	0.076795
89	0.002499	0.001325	0.039666	0.049516	0.085035
90	0	0	0.046672	0.06738	0.095124
91	0	0	0.053728	0.08558	0.107574
92	0	0	0.063046	0.098219	0.123049
93	0	0	0.074034	0.112844	0.142486
94	0	0	0.08703	0.129801	0.167106
95	0	0	0.10242	0.149487	0.198585
96	0	0	0.120711	0.172427	0.239171
97	0	0	0.142497	0.199268	0.291891
98	0	0	0.168561	0.230773	0.360726
99	0	0	0.199891	0.267971	0.450844
100	0	0	0.237775	0.312166	0.568649

Apéndice B

Tabla de probabilidades de transición (Runge Kutta)

Edad	q_x^{12}	q_x^{12}	q_x^{13}	q_x^{13}	q_x^{23}
	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres	
15	0.000013	0.000104	0.00091	0.00041	0.03127
16	0.000022	0.000093	0.00093	0.00041	0.03127
17	0.000035	0.000087	0.00096	0.00041	0.03127
18	0.000049	0.000081	0.00098	0.00041	0.03127
19	0.00007	0.000085	0.00101	0.00041	0.03127
20	0.000092	0.00009	0.00104	0.00042	0.03127
21	0.000116	0.000097	0.00107	0.00042	0.03127
22	0.00014	0.000106	0.00111	0.00042	0.03127
23	0.000164	0.000117	0.00114	0.00042	0.03127
24	0.000187	0.000131	0.00118	0.00042	0.03127
25	0.000211	0.000146	0.00122	0.00042	0.03127
26	0.000235	0.000165	0.00126	0.00043	0.03127
27	0.00026	0.000186	0.0013	0.00043	0.03127
28	0.000287	0.00021	0.00135	0.00043	0.03127
29	0.000316	0.000238	0.0014	0.00044	0.03127
30	0.000347	0.00027	0.00145	0.00044	0.03127
31	0.000381	0.000305	0.00151	0.00045	0.03127
32	0.00042	0.000343	0.00156	0.00045	0.03127
33	0.000463	0.000386	0.00163	0.00046	0.03127
34	0.000511	0.000433	0.00169	0.00046	0.03127
35	0.000564	0.000483	0.00176	0.00047	0.03127
36	0.000625	0.000538	0.00184	0.00048	0.03127

Edad	q_x^{12}	q_x^{12}	q_x^{13}	q_x^{13}	q_x^{23}
	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres	
37	0.000693	0.000597	0.00192	0.00049	0.03127
38	0.000769	0.000661	0.002	0.00049	0.03128
39	0.000856	0.000731	0.00209	0.0005	0.03128
40	0.000953	0.000807	0.00218	0.00052	0.03128
41	0.001064	0.000891	0.00228	0.00053	0.03128
42	0.001191	0.000985	0.00239	0.00054	0.03129
43	0.001337	0.001089	0.0025	0.00056	0.03129
44	0.001506	0.001208	0.00262	0.00057	0.0313
45	0.001702	0.001343	0.00275	0.00059	0.03131
46	0.001931	0.001498	0.00288	0.00061	0.03132
47	0.002199	0.001676	0.00303	0.00063	0.03133
48	0.002513	0.00188	0.00318	0.00065	0.03134
49	0.002879	0.002114	0.00334	0.00068	0.03136
50	0.003302	0.002377	0.00352	0.0007	0.03137
51	0.003783	0.002669	0.0037	0.00073	0.0314
52	0.004317	0.002983	0.0039	0.00077	0.03142
53	0.004887	0.003304	0.00411	0.0008	0.03146
54	0.005459	0.003612	0.00433	0.00085	0.03149
55	0.005979	0.003871	0.00457	0.00089	0.03154
56	0.006366	0.004222	0.00483	0.00094	0.03159
57	0.007077	0.004344	0.0051	0.001	0.03165
58	0.007205	0.004549	0.00539	0.00106	0.03173
59	0.0058	0.003534	0.0057	0.00113	0.03181
60	0.002949	0.001959	0.00604	0.00121	0.03191
61	0.002877	0.001959	0.00639	0.00129	0.03202
62	0.002905	0.002016	0.00677	0.00139	0.03216
63	0.003017	0.002122	0.00718	0.0015	0.03231
64	0.003207	0.002269	0.00761	0.00163	0.03249
65	0.003474	0.002452	0.00808	0.00177	0.03269
66	0.003815	0.002666	0.00858	0.00193	0.03293
67	0.004231	0.002903	0.00912	0.00212	0.0332
68	0.004717	0.003153	0.00969	0.00233	0.03352
69	0.005269	0.003405	0.0103	0.00257	0.03388

Edad	q_x^{12}	q_x^{12}	q_x^{13}	q_x^{13}	q_x^{23}
	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres	
70	0.005876	0.003645	0.01096	0.00285	0.03429
71	0.00652	0.003861	0.01167	0.00317	0.03477
72	0.007179	0.004038	0.01243	0.00354	0.03531
73	0.007822	0.004165	0.01325	0.00397	0.03594
74	0.008413	0.004234	0.01413	0.00448	0.03667
75	0.008916	0.004241	0.01507	0.00507	0.0375
76	0.009292	0.004188	0.01608	0.00577	0.03845
77	0.00951	0.00408	0.01717	0.0066	0.03955
78	0.009544	0.003927	0.01834	0.00758	0.04083
79	0.009385	0.003742	0.0196	0.00874	0.0423
80	0.009034	0.003538	0.02095	0.01014	0.044
81	0.00851	0.00333	0.02241	0.01182	0.04598
82	0.007843	0.003013	0.02397	0.01385	0.04829
83	0.007072	0.002701	0.02566	0.01631	0.05099
84	0.00624	0.002404	0.02748	0.01931	0.05416
85	0.005393	0.002129	0.02944	0.02297	0.0579
86	0.004568	0.001882	0.03154	0.02746	0.06233
87	0.003797	0.001665	0.03381	0.033	0.0676
88	0.003102	0.001479	0.03626	0.03984	0.07392
89	0.002496	0.001324	0.03889	0.04831	0.08152
90	0	0	0.0456	0.06516	0.09074
91	0	0	0.05231	0.08202	0.10199
92	0	0	0.0611	0.09355	0.11578
93	0	0	0.07136	0.10671	0.1328
94	0	0	0.08335	0.12173	0.15389
95	0	0	0.09735	0.13885	0.18011
96	0	0	0.11371	0.15838	0.21272
97	0	0	0.13281	0.18067	0.25315
98	0	0	0.15512	0.20608	0.30283
99	0	0	0.18118	0.23507	0.36291
100	0	0	0.21162	0.26814	0.43371

Apéndice C

Código de programa en VBA

Función para el cálculo de la pensión

```
Private Sub CommandButton1_Click()

If UserForm1.ComboBox1.Text = "Analítico" Then
Sheets("Tablas fuerza mortalidad").Activate
If edad < 15 Then
MsgBox "La edad mínima para contratar el seguro es de 15
    años"
End If
If hombre = True Then
mux12 = Application.WorksheetFunction.VLookup(Val(edad),
    Range("A:F"), 2)
mux13 = Application.WorksheetFunction.VLookup(Val(edad),
    Range("A:F"), 4)
mux23 = Application.WorksheetFunction.VLookup(Val(edad),
    Range("A:F"), 6)
muxx12 = Application.WorksheetFunction.VLookup(Val(edad +
     1), Range("A:F"), 2)
muxx13 = Application.WorksheetFunction.VLookup(Val(edad +
     1), Range("A:F"), 4)
muxx23 = Application.WorksheetFunction.VLookup(Val(edad +
     1), Range("A:F"), 6)
Else
If mujer = True Then
mux12 = Application.WorksheetFunction.VLookup(Val(edad),
    Range("A:F"), 3)
mux13 = Application.WorksheetFunction.VLookup(Val(edad),
    Range("A:F"), 5)
```

```
mux23 = Application.WorksheetFunction.VLookup(Val(edad),
    Range("A:F"), 6)
muxx12 = Application.WorksheetFunction.VLookup(Val(edad +
     1), Range("A:F"), 3)
muxx13 = Application.WorksheetFunction.VLookup(Val(edad +
     1), Range("A:F"), 5)
muxx23 = Application.WorksheetFunction.VLookup(Val(edad +
     1), Range("A:F"), 6)
Else
MsgBox "Se debe seleccionar el género de la persona"
End If
End If

Sheets("seguro").Activate

Cells.Clear
 Columns("A:A").Select
     Selection.NumberFormat = "# ???/???"
     Range("A1").Select
For i = 0 To 48
Cells(1, 1) = "t"
Cells(i + 2, 1) = i / 24
Cells(1, 2) = "tpx11"
Cells(1, 3) = "tpx12"
If i < 25 Then
Cells(i + 2, 2) = Exp((-mux12 - mux13) * Cells(i + 2, 1))
Cells(i + 2, 3) = (mux12 / (mux23 - mux13 - mux12)) * (
    Exp(-(mux12 + mux13) * Cells(i + 2, 1)) - Exp(-mux23 *
     Cells(i + 2, 1)))
Else
Cells(i + 2, 2) = Exp(-(mux12 + mux13)) * Exp(-(muxx12 +
    muxx13) * (Cells(i + 2, 1) - 1))
Cells(i + 2, 3) = ((Exp(-(mux12 + mux13)) * muxx12 * Exp
    (-(muxx12 + muxx13) * (Cells(i + 2, 1) - 1))) / (
    muxx23 - muxx12 - muxx13)) + ((((mux12 / (mux23 -
    mux12 - mux13)) * (Exp(-(mux12 + mux13)) - Exp(-mux23)
    )) - (Exp(-(mux12 + mux13)) * muxx12 / (muxx23 -
    muxx12 - muxx13))) * Exp(-muxx23 * (Cells(2 + i, 1) -
    1)))
End If

Cells(1, 4) = "v^t"
Cells(2 + i, 4) = Application.WorksheetFunction.Power(1 +
     (tasa / 100), -Cells(2 + i, 1))
Cells(1, 5) = "v^t*tpx11"
Cells(2 + i, 5) = Cells(2 + i, 4) * Cells(2 + i, 2)
```

```
Cells(1, 6) = "v^t*tpx12"
Cells(2 + i, 6) = Cells(2 + i, 4) * Cells(2 + i, 3)
Next
Cells(1, 7) = "Edad"
Cells(1, 8) = edad.Value
Cells(2, 7) = "Salario"
Cells(2, 8) = salario.Value
Cells(3, 7) = "Género"
If hombre = True Then
Cells(3, 8) = "Masculino"
Else
Cells(3, 8) = "Femenino"
End If
Cells(4, 7) = "Suma asegurada"
Cells(4, 8) = suma.Value
Cells(5, 7) = "Tasa de interés"
Cells(5, 8) = tasa & "%"
Cells(6, 7) = "Costo de cobertura"
Cells(6, 8) = Round(Application.WorksheetFunction.Sum(
    Range(Cells(3, 6), Cells(50, 6))) * 0.65 * salario, 2)
Cells(7, 7) = "Costo del seguro"
Cells(7, 8) = Round(suma * ((Application.
    WorksheetFunction.Sum(Range(Cells(2, 5), Cells(25, 5))
    ) * (1 - Exp(-mux13 / 24)) + Application.
    WorksheetFunction.Sum(Range(Cells(26, 5), Cells(49, 5)
    )) * (1 - Exp(-muxx13 / 24)))), 2)
Cells(8, 7) = "Costo total"
Cells(8, 8) = Cells(6, 8) + Cells(7, 8)
Cells(9, 7) = "prima quincenal"
Cells(9, 8) = Round(Cells(8, 8) / Application.
    WorksheetFunction.Sum(Range(Cells(2, 5), Cells(49, 5))
    ), 2)
Rows("1:1").Select
     Selection.Font.Bold = True
Columns("g:g").Select
     Selection.Font.Bold = True
Cells(1, 1).Select
     Range("A1:F2").Select
     Range(Selection, Selection.End(xlDown)).Select
     Selection.Borders(xlDiagonalDown).LineStyle = xlNone
     Selection.Borders(xlDiagonalUp).LineStyle = xlNone
     With Selection.Borders(xlEdgeLeft)
          .LineStyle = xlContinuous
          .ColorIndex = 0
          .TintAndShade = 0
          .Weight = xlThin
```

```
End With
With Selection.Borders(xlEdgeTop)
    .LineStyle = xlContinuous
    .ColorIndex = 0
    .TintAndShade = 0
    .Weight = xlThin
End With
With Selection.Borders(xlEdgeBottom)
    .LineStyle = xlContinuous
    .ColorIndex = 0
    .TintAndShade = 0
    .Weight = xlThin
End With
With Selection.Borders(xlEdgeRight)
    .LineStyle = xlContinuous
    .ColorIndex = 0
    .TintAndShade = 0
    .Weight = xlThin
End With
With Selection.Borders(xlInsideVertical)
    .LineStyle = xlContinuous
    .ColorIndex = 0
    .TintAndShade = 0
    .Weight = xlThin
End With
With Selection.Borders(xlInsideHorizontal)
    .LineStyle = xlContinuous
    .ColorIndex = 0
    .TintAndShade = 0
    .Weight = xlThin
End With
Range("G1:H9").Select
Selection.Borders(xlDiagonalDown).LineStyle = xlNone
Selection.Borders(xlDiagonalUp).LineStyle = xlNone
With Selection.Borders(xlEdgeLeft)
    .LineStyle = xlContinuous
    .ColorIndex = 0
    .TintAndShade = 0
    .Weight = xlThin
End With
With Selection.Borders(xlEdgeTop)
    .LineStyle = xlContinuous
    .ColorIndex = 0
    .TintAndShade = 0
    .Weight = xlThin
End With
```

```
    With Selection.Borders(xlEdgeBottom)
        .LineStyle = xlContinuous
        .ColorIndex = 0
        .TintAndShade = 0
        .Weight = xlThin
    End With
    With Selection.Borders(xlEdgeRight)
        .LineStyle = xlContinuous
        .ColorIndex = 0
        .TintAndShade = 0
        .Weight = xlThin
    End With
    With Selection.Borders(xlInsideVertical)
        .LineStyle = xlContinuous
        .ColorIndex = 0
        .TintAndShade = 0
        .Weight = xlThin
    End With
    With Selection.Borders(xlInsideHorizontal)
        .LineStyle = xlContinuous
        .ColorIndex = 0
        .TintAndShade = 0
        .Weight = xlThin
    End With
    Range("H2").Select
    Selection.Style = "Currency"
    Range("H4").Select
    Selection.Style = "Currency"
    Range("H6:H9").Select
    Selection.Style = "Currency"
    Range("A1").Select
Unload UserForm1
MsgBox "Una persona de " & edad & " años deberá realizar
    pagos quincenales de $" & Cells(9, 8) & _
" para recibir $" & Format(Cells(4, 8), "##,##0.00") & "
    en caso de fallecimiento o $" & _
Format(Cells(2, 8) * 0.65, "##,##0.00") & " quincenales
    mientras se encuentre incapacitado.",, "Método analí
    tico"

End If



If UserForm1.ComboBox1.Text = "Runge Kutta" Then
Sheets("Tablas fuerza mortalidad1").Activate
```

```
If edad < 15 Then
MsgBox "La edad mínima para contratar el seguro es de 15
    años"
End If
If hombre = True Then
qx12 = Application.WorksheetFunction.VLookup(Val(edad),
    Range("A:F"), 2)
qx13 = Application.WorksheetFunction.VLookup(Val(edad),
    Range("A:F"), 4)
qx23 = Application.WorksheetFunction.VLookup(Val(edad),
    Range("A:F"), 6)
qxx12 = Application.WorksheetFunction.VLookup(Val(edad +
    1), Range("A:F"), 2)
qxx13 = Application.WorksheetFunction.VLookup(Val(edad +
    1), Range("A:F"), 4)
qxx23 = Application.WorksheetFunction.VLookup(Val(edad +
    1), Range("A:F"), 6)
Else
If mujer = True Then
qx12 = Application.WorksheetFunction.VLookup(Val(edad),
    Range("A:F"), 3)
qx13 = Application.WorksheetFunction.VLookup(Val(edad),
    Range("A:F"), 5)
qx23 = Application.WorksheetFunction.VLookup(Val(edad),
    Range("A:F"), 6)
qxx12 = Application.WorksheetFunction.VLookup(Val(edad +
    1), Range("A:F"), 3)
qxx13 = Application.WorksheetFunction.VLookup(Val(edad +
    1), Range("A:F"), 5)
qxx23 = Application.WorksheetFunction.VLookup(Val(edad +
    1), Range("A:F"), 6)
Else
MsgBox "Se debe seleccionar el género de la persona"
End If
End If
Sheets("seguro").Activate

Cells.Clear
 Columns("A:A").Select
     Selection.NumberFormat = "# ???/???"
     Range("A1").Select
Cells(1, 1) = "t"
Cells(1, 2) = "k1"
Cells(1, 3) = "l1"
Cells(1, 4) = "k2"
Cells(1, 5) = "l2"
```

```
Cells(1, 6) = "k3"
Cells(1, 7) = "l3"
Cells(1, 8) = "k4"
Cells(1, 9) = "l4"
Cells(1, 10) = "tpx11"
Cells(1, 11) = "tpx12"
Cells(1, 12) = "vt*tpx11"
Cells(1, 13) = "vt*tpx12"
Cells(1, 14) = "(qx/24)/(1-(t/24)*qx)*(vt*tpx11)"
Cells(2, 10) = 1
Cells(2, 11) = 0
Cells(2, 12) = (1 + tasa / 100) ^ (-Cells(2, 1)) * Cells
    (2, 10)
Cells(2, 13) = (1 + tasa / 100) ^ (-Cells(2, 1)) * Cells
    (2, 11)
Cells(2, 14) = (qx13 / 24) / (1 - (Cells(2, 1) / 24) *
    qx13) * Cells(2, 12)
For i = 1 To 48
If i > 24 Then
qx12 = qxx12
qx13 = qxx13
qx23 = qxx23
End If
Cells(2, 1) = 0
Cells(i + 2, 1) = i / 24
Cells(i + 2, 2) = (1 / 24) * (-((qx12 / (1 - Cells(i + 2,
     1) * qx12)) + (qx13 / (1 - Cells(i + 2, 1) * qx13))))
     * Cells(1 + i, 10)
Cells(i + 2, 3) = (1 / 24) * ((qx12 / (1 - Cells(i + 2,
    1) * qx12)) * Cells(1 + i, 10) - (qx23 / (1 - Cells(i
    + 2, 1) * qx23)) * Cells(1 + i, 11))
Cells(i + 2, 4) = (1 / 24) * (-((qx12 / (1 - (Cells(i +
    2, 1) + (1 / 48)) * qx12)) + (qx13 / (1 - (Cells(i +
    2, 1) + (1 / 48)) * qx13)))) * (Cells(1 + i, 10) +
    Cells(i + 2, 2) / 2)
Cells(i + 2, 5) = (1 / 24) * ((qx12 / (1 - (Cells(i + 2,
    1) + (1 / 48)) * qx12)) * (Cells(1 + i, 10) + Cells(i
    + 2, 2) / 2) - (qx23 / (1 - (Cells(i + 2, 1) + (1 /
    48)) * qx23)) * (Cells(1 + i, 11) + Cells(i + 2, 3) /
    2))
Cells(i + 2, 6) = (1 / 24) * (-((qx12 / (1 - (Cells(i +
    2, 1) + (1 / 48)) * qx12)) + (qx13 / (1 - (Cells(i +
    2, 1) + (1 / 48)) * qx13)))) * (Cells(1 + i, 10) +
    Cells(i + 2, 4) / 2)
Cells(i + 2, 7) = (1 / 24) * ((qx12 / (1 - (Cells(i + 2,
    1) + (1 / 48)) * qx12)) * (Cells(1 + i, 10) + Cells(i
```

```
    + 2, 4) / 2) - (qx23 / (1 - (Cells(i + 2, 1) + (1 /
    48)) * qx23)) * (Cells(1 + i, 11) + Cells(i + 2, 5) /
    2))
Cells(i + 2, 8) = (1 / 24) * (-((qx12 / (1 - (Cells(i +
    2, 1) + (1 / 24)) * qx12)) + (qx13 / (1 - (Cells(i +
    2, 1) + (1 / 24)) * qx13)))) * (Cells(1 + i, 10) +
    Cells(i + 2, 6))
Cells(i + 2, 9) = (1 / 24) * ((qx12 / (1 - (Cells(i + 2,
    1) + (1 / 24)) * qx12)) * (Cells(1 + i, 10) + Cells(i
    + 2, 6)) - (qx23 / (1 - (Cells(i + 2, 1) + (1 / 24)) *
     qx23)) * (Cells(1 + i, 11) + Cells(i + 2, 7)))
Cells(i + 2, 10) = Cells(i + 1, 10) + (1 / 6) * (Cells(i
    + 2, 2) + 2 * Cells(i + 2, 4) + 2 * Cells(i + 2, 6) +
    Cells(i + 2, 8))
Cells(i + 2, 11) = Cells(i + 1, 11) + (1 / 6) * (Cells(i
    + 2, 3) + 2 * Cells(i + 2, 5) + 2 * Cells(i + 2, 7) +
    Cells(i + 2, 9))
Cells(i + 2, 12) = (1 + tasa / 100) ^ (-Cells(i + 2, 1))
    * Cells(i + 2, 10)
Cells(i + 2, 13) = (1 + tasa / 100) ^ (-Cells(i + 2, 1))
    * Cells(i + 2, 11)
Cells(i + 2, 14) = (qx13 / 24) / (1 - (Cells(i + 2, 1) /
    24) * qx13) * Cells(i + 2, 12)
Next

Cells(1, 15) = "Edad"
Cells(1, 16) = edad.Value
Cells(2, 15) = "Salario"
Cells(2, 16) = salario.Value
Cells(3, 15) = "Género"
If hombre = True Then
Cells(3, 16) = "Masculino"
Else
Cells(3, 16) = "Femenino"
End If
Cells(4, 15) = "Suma asegurada"
Cells(4, 16) = suma.Value
Cells(5, 15) = "Tasa de interés"
Cells(5, 16) = tasa & "%"
Cells(6, 15) = "Costo de cobertura"
Cells(6, 16) = Round(Application.WorksheetFunction.Sum(
    Range(Cells(3, 13), Cells(50, 13))) * 0.65 * salario,
    2)
Cells(7, 15) = "Costo del seguro"
Cells(7, 16) = Round(suma * (Application.
    WorksheetFunction.Sum(Range(Cells(2, 14), Cells(49,
```

```
    14)))), 2)
Cells(8, 15) = "Costo total"
Cells(8, 16) = Cells(6, 16) + Cells(7, 16)
Cells(9, 15) = "prima quincenal"
Cells(9, 16) = Round(Cells(8, 16) / Application.
    WorksheetFunction.Sum(Range(Cells(2, 12), Cells(49,
    12))), 2)
Rows("1:1").Select
     Selection.Font.Bold = True

     ActiveWindow.ScrollColumn = 4
     ActiveWindow.ScrollColumn = 3
     ActiveWindow.ScrollColumn = 2
     ActiveWindow.ScrollColumn = 1
     Range("A1:N1").Select
     Range(Selection, Selection.End(xlDown)).Select
     Selection.Borders(xlDiagonalDown).LineStyle = xlNone
     Selection.Borders(xlDiagonalUp).LineStyle = xlNone
     With Selection.Borders(xlEdgeLeft)
          .LineStyle = xlContinuous
          .ColorIndex = 0
          .TintAndShade = 0
          .Weight = xlThin
     End With
     With Selection.Borders(xlEdgeTop)
          .LineStyle = xlContinuous
          .ColorIndex = 0
          .TintAndShade = 0
          .Weight = xlThin
     End With
     With Selection.Borders(xlEdgeBottom)
          .LineStyle = xlContinuous
          .ColorIndex = 0
          .TintAndShade = 0
          .Weight = xlThin
     End With
     With Selection.Borders(xlEdgeRight)
          .LineStyle = xlContinuous
          .ColorIndex = 0
          .TintAndShade = 0
          .Weight = xlThin
     End With
     With Selection.Borders(xlInsideVertical)
          .LineStyle = xlContinuous
          .ColorIndex = 0
          .TintAndShade = 0
```

```
        .Weight = xlThin
End With
With Selection.Borders(xlInsideHorizontal)
        .LineStyle = xlContinuous
        .ColorIndex = 0
        .TintAndShade = 0
        .Weight = xlThin
End With
ActiveWindow.ScrollColumn = 2
Range("O1:P9").Select
Selection.Borders(xlDiagonalDown).LineStyle = xlNone
Selection.Borders(xlDiagonalUp).LineStyle = xlNone
With Selection.Borders(xlEdgeLeft)
        .LineStyle = xlContinuous
        .ColorIndex = 0
        .TintAndShade = 0
        .Weight = xlThin
End With
With Selection.Borders(xlEdgeTop)
        .LineStyle = xlContinuous
        .ColorIndex = 0
        .TintAndShade = 0
        .Weight = xlThin
End With
With Selection.Borders(xlEdgeBottom)
        .LineStyle = xlContinuous
        .ColorIndex = 0
        .TintAndShade = 0
        .Weight = xlThin
End With
With Selection.Borders(xlEdgeRight)
        .LineStyle = xlContinuous
        .ColorIndex = 0
        .TintAndShade = 0
        .Weight = xlThin
End With
With Selection.Borders(xlInsideVertical)
        .LineStyle = xlContinuous
        .ColorIndex = 0
        .TintAndShade = 0
        .Weight = xlThin
End With
With Selection.Borders(xlInsideHorizontal)
        .LineStyle = xlContinuous
        .ColorIndex = 0
        .TintAndShade = 0
```

```
        .Weight = xlThin
    End With
    Range("P1").Select

    Columns("O:O").Select
    Selection.Font.Bold = False
    Selection.Font.Bold = True
    Range("P2").Select
    Selection.Style = "Currency"
    Range("P4").Select
    Selection.Style = "Currency"
    Range("P6:P9").Select
    Selection.Style = "Currency"

'
    Columns("N:N").EntireColumn.AutoFit
    ActiveWindow.ScrollColumn = 3
    ActiveWindow.ScrollColumn = 4
    Columns("O:O").EntireColumn.AutoFit
    Range("P9").Select

Unload UserForm1
MsgBox "Una persona de " & edad & " años deberá realizar
   pagos quincenales de $" & Cells(9, 16) & _
" para recibir $" & Format(Cells(4, 16), "##,##0.00") & "
    en caso de fallecimiento o $" & _
Format(Cells(9, 16), "##,##0.00") & " quincenales
   mientras se encuentre incapacitado.",, "Método Runge
   Kutta"
End If
End Sub
```

Bibliografía

[1] Alejandro Mina Valdés. La demografía en la formación del actuario -material de apoyo didáctico-. `http://intermat.fciencias.unam.mx/A-Mina-2012.pdf`, 2012. [última fecha de consulta: 15 agosto 2017].

[2] Antonio Minzoni Consorti. Crónica de dos siglos del seguro en méxico. `http://www.cnsf.gob.mx/Difusion/OtrasPublicaciones/Historia%20en%20Seguros%20y%20Fianzas/CRONICA%20DE%20DOS%20SIGLOS%20DEL%20SEGURO%20EN%20MEXICO.pdf`, 2005. [última fecha de consulta: 15 agosto 2017].

[3] Comisión Nacional de Seguros y Fianzas. ¿qué hacemos? `https://www.gob.mx/cnsf/que-hacemos`, 2017. [última fecha de consulta: 15 agosto 2017].

[4] Ubaldo Nieto de Alba/ Jesús Vegas Asensio. *Matemática Actuarial*. Mapfre, 2001.

[5] Dirección de finanzas. Coordinación de administración de riesgos institucionales. IMSS. Valuación actuarial del seguro de invalidez y vida al 31 de diciembre de 2014. `http://www.imss.gob.mx/sites/all/statics/pdf/estadisticas/valuaciones/siv/va-siv-2014.pdf`, 2015. [última fecha de consulta: 15 agosto 2017].

[6] Richard L. Burden/ J. Douglas Faires. *Análisis numérico*. Cengage Learning, 2011.

[7] Stanley I. Grossman/ José Job Flores Godoy. *Álgebra lineal*. McGraw-Hill, 2012.

[8] Dickson Hardy and Waters. *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risk*. Cambridge, 2013.

[9] Bernard Kolman/ David R. Hill. *Álgebra lineal*. Pearson Educación, 2006.

[10] Stephen G. Kellison. *The Theory of Interest*. McGraw-Hill, 2009.

[11] Cunningham/ Thomas Herzog/ Richard London. *Models for Quantifying Risk*. Actex Academic Series, 2012.

[12] Joseph B. Maclean. *El Seguro de Vida.* Continental.

[13] Luis Huerta/ Camilo Reynaud Niguex. *La actuaría en México.* 2009.

[14] Pérez Chávez / Fol Olguín. *Cómo calcular las pensiones que otorga el IMSS.* Tax Editores Unidos, 2012.

[15] Hugo E. Palacios. *Introducción al cálculo actuarial.* Mapfre, 1996.

[16] Miguel Ángel Beltrán Prado. *Aspectos técnicos para la determinación de la prima de riesgo en el seguro de gastos médicos mayores.* Comisión Nacional de Seguros y Fianzas, 1992.

[17] Luis Rincón. *Curso intermedio de probabilidad.* Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias.UNAM, 2007.

[18] Luis Rincón. *Introducción a los procesos estocásticos.* Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias.UNAM, 2012.

[19] Roberto Junguito. Reseña sobre la historia de los seguros. `https://www.fundacionmapfre.org/documentacion/publico/i18n/catalogo_imagenes/grupo.cmd?path=1060618`, 2008. [última fecha de consulta: 15 agosto 2017].

[20] Sheldon Ross. *A first course in probability.* Prentice Hall, 1997.

[21] Curtis F. Gerald/ Patrick O. Wheatley. *Análisis numérico.* Pearson Educación, 2000.