



BUAP

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

**Derivado para generar un beneficio definido en un plan
de pensión privado con contribuciones fijas**

TESIS COMO REQUISITO PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
LICENCIADA EN ACTUARÍA

PRESENTA:
LIGIA MARÍA REYES SANTOS

DIRECTOR DE TESIS:
MTRO. MANUEL IGNACIO TRUJILLO MAZORRA

PUEBLA, PUEBLA.

DICIEMBRE 2018

“Actuaries apply scientific principles and techniques from a range of other disciplines to problems involving risk, uncertainty and finance.”

DAVID C.M. DICKSON

A mis queridos padres, por tanto...

AGRADECIMIENTOS

Gracias a mi querida universidad, la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla y a su Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, que fueron un nido de aprendizaje y experiencias para mi desarrollo como estudiante. Gracias a todos los profesores que me impartieron clases, a quienes tuvieron la paciencia de explicarme una y otra vez, a los que me exigieron y corrigieron, y a los que me brindaron apoyo. Particularmente al Mtro. Manuel Ignacio Trujillo Mazorra, por su confianza, impulso y dirección para la realización de esta tesis.

Gracias a mi familia, primordialmente a mis padres, el Sr. Francisco Reyes y la Sra. Alma Ligia Santos, por el esfuerzo realizado, el inagotable cansancio y sobretodo por su inmenso amor. A mis hermanos: Alma Cecilia, Francisco Miguel y Juan Pablo por su apoyo incondicional en las buenas y en las malas. A mis sobrinos: Regina, Rafael y Alma Victoria por ser motivo de mi alegría y motivación.

Finalmente agradezco la oportunidad de vivir y poder concluir este proyecto al lado de buenos amigos, especialmente con quienes compartí el aula y vivimos juntos el sentir y la demanda que requiere la carrera de Actuaría. En particular Luis Ángel Alcántara, Dulce Ivette Herrera, Ángel González, Cesia Hernández, Omar Valencia, Arantxa Mota, Paulina Morales y José Leonardo González; sin ustedes este viaje no hubiera sido tan enriquecedor y divertido.

RESUMEN

El presente trabajo propone un derivado como instrumento para generar un plan de pensión privado con beneficio definido a través de contribuciones fijas. De manera natural, dicho plan generaría contribuciones variables; sin embargo, con ayuda del derivado se busca contrarrestar dicha variabilidad, la cual está asociada a la fluctuación de los rendimientos del Fondo de Pensiones. Así, pronosticando las tasas de interés con el método Vasicek y teniendo como indicador el *Valor Neto Actual*; se realiza una simulación sobre el comportamiento del fondo, bajo la cual se determina la contribución fija asociada al beneficio definido y en consecuencia, al derivado.

Palabras clave: derivado, plan de pensión privado, beneficio definido, contribución fija, método Vasicek, simulación y Valor Neto Actual.

Índice general

Índice general	5
1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del problema	1
1.2. Preguntas de investigación	2
1.3. Justificación	2
1.4. Objetivos	4
1.4.1. General	4
1.4.2. Específicos	4
1.5. Alcances	5
1.6. Limitaciones	6
2. Marco Teórico	7
2.1. Pensiones	7
2.1.1. Antecedentes desde la seguridad social	7
2.1.2. Pensiones en México	9
2.1.3. Clasificación	11
2.1.4. Pensiones privadas	15
2.2. Derivados financieros	19
2.2.1. Mercado de derivados	22
2.2.2. Clasificación de derivados	24
2.2.3. Uso y aplicación	25
2.2.4. Relación Derivados-Pensiones	26
3. Generación del modelo	27
3.1. Supuestos	27
3.1.1. Hipótesis del plan	29
3.2. Cómo funciona el programa	35

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	6
3.2.1. Variables de entrada	35
3.2.2. Proyección de los beneficios	38
3.2.3. Cálculo de contribuciones	39
3.2.4. Determinación de la contribución fija	44
3.2.5. Proceso de simulación	47
3.3. Propuesta del derivado	48
4. Conclusiones	51
Referencias bibliográficas	53
Apéndices	54
A. Conceptos importantes	55
A.1. Método Vasicek	55
A.2. Anualidades utilizadas	56
A.3. UDIBONOS	56
B. Código	57

Capítulo 1

Introducción

1.1. Planteamiento del problema

Considerando que la vida laboral en gran parte de las personas sólo coincide en ciertos intervalos de su existencia, donde generalmente el inicio se da en la juventud, el auge en la adultez y su término en la vejez; surge la necesidad de establecer *planes financieros* que puedan soportar económicamente la última etapa de vida, donde el trabajo se encuentra restringido por el aumento de la edad; como son las *pensiones*.

Hoy en día se vuelve más difícil solventar el pago de las pensiones de planes anteriormente establecidos, aunado a los que se generan día a día. Según Anderson (2006), una dolorosa lección a través de los años para los empleadores tanto privados como públicos, ha sido aprender que el costo de un plan de pensión debe ser reconocido durante la vida laboral de los trabajadores, quienes recibirán sus respectivas pensiones. Y más aún, establecer fondos aparte para proveer completamente cada *anualidad de vida*¹ de los trabajadores al momento del retiro.

Dado que un plan de pensión se encuentra definido por distintos aspectos, gracias a sus beneficios y contribuciones se denomina de *beneficio definido* (BD) o bien, de *contribución definida* (CD). Donde el primero, establece el beneficio a recibir durante la etapa del retiro; y a partir de ello, se ajustan los costos. El segundo por el contrario, fija las aportaciones

¹Renta vitalicia.

económicas que se deben hacer periódicamente antes del retiro; y en consecuencia, se determinan los beneficios. Así, se puede notar que existe una relación beneficio-contribución donde, si fijamos cualquiera de estas variables necesariamente la otra cambia, pues una depende de la otra.

Situación asociada a la ley, que establece una u otra opción: donde los planes de CD (adaptados en México desde la ley del 97) son útiles por su certeza respecto al flujo de cada periodo, pero sacrifican la posibilidad de tener una idea precisa de cuánto equivale el beneficio a recibir, al contrario de los planes de BD (anterior a la ley del 97). Es por ello que, surge la pregunta: ¿Cómo es posible generar un modelo que pueda obtener un beneficio definido a partir de contribuciones definidas? Y es ahí, donde la esencia de un *derivado*² es de gran utilidad, encajando las ventajas de los dos planes distintos, en uno solo.

Siendo el *área de pensiones* un tema de interés, nace la inquietud de profundizar en su funcionamiento y proponer un recurso que agregue valor de un área distinta: *Derivados financieros*.

1.2. Preguntas de investigación

Con el fin de establecer una guía estructural para esta tesis, se definieron las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo funciona actualmente el sistema de pensiones y el mercado de derivados en México?
2. ¿Qué nivel de contribuciones definidas se tendría que solicitar para obtener un beneficio definido?
3. ¿Cómo se podría implementar dicho modelo?

1.3. Justificación

De acuerdo con Booth et al. (2004), un modelo de plan individual teóricamente tiene la opción de ser de BD o de CD. Sin embargo, en

²Instrumento financiero cuyo valor depende de otro activo.

la práctica es más común que este tipo de plan sea de contribución definida, dada la dificultad de obtener un beneficio definido sin tomar en cuenta grandes incrementos en las contribuciones, las cuales pueden afectar significativamente la estabilidad económica del aportador.

Es por ello que, con el presente trabajo se pretende contar con ambas ventajas, sin que lo anterior suceda. La primera, fijar una pensión deseada a partir de la fecha de retiro bajo las condiciones actuales de un trabajador: edad y salario³; suponiendo continuidad en su carrera laboral. Y la segunda, conocer el monto que se debe pagar periódicamente antes del retiro para alcanzar el BD.

Para lograrlo, se fusionan dos áreas de la actuaría distintas entre sí, pero no excluyentes: *pensiones y derivados financieros*. Pues dadas las características de un derivado, se utiliza como vehículo de cobertura para asegurar dicha pensión. Razón que conlleva a explorar las ventajas que surgen a partir de la interacción propuesta.

Por lo tanto, la importancia de esta tesis radica en desarrollar una estrategia de innovación, que permita estructurar planes para el retiro:

- Incursionando en recursos no tradicionales, que son posibles por naturaleza.
- Dando más opciones a las empresas para poder garantizar una pensión para el retiro de sus trabajadores.
- Facilitando al miembro del plan tener conocimiento de los beneficios a recibir, así como de las aportaciones necesarias para obtener dichos beneficios.
- Por otro lado, permitiendo al sector inversionista contar con más opciones de contratos, pues dicho ámbito cada vez es más sofisticado.
- Y finalmente, ampliando el horizonte del sector asegurador en la creación de productos complejos, con el fin de generar oportunidad de negocio.

³En este trabajo, los términos: salario y sueldo se toman como sinónimos.

1.4. Objetivos

1.4.1. General

Encontrar el nivel de contribución fija, que soporte económicamente un plan de pensión privado de BD bajo una perspectiva probabilística. Por consiguiente, vincular dicho nivel a un instrumento derivado; que pague o gane la diferencia según sea el caso, entre el nivel encontrado y la contribución variable asociada al plan.

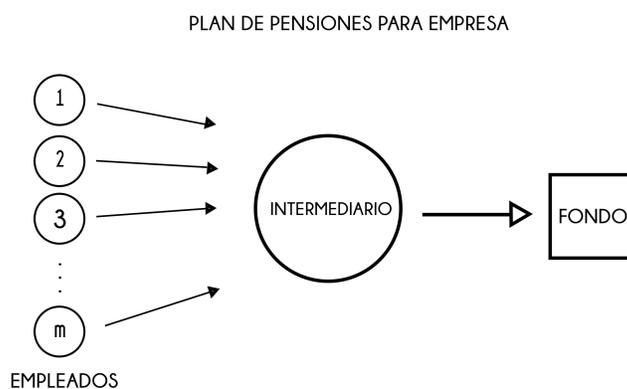
1.4.2. Específicos

- Exponer el funcionamiento y entorno, tanto del sistema de pensiones en México como el de derivados financieros, explorando los conceptos de ambas áreas.
- Realizar un programa en VBA⁴ Excel que genere una proyección de pagos en un fondo para financiar un plan de pensión privado de BD, para un individuo con condiciones específicas de edad, salario y edad de retiro.
- Pronosticar las tasas de interés del fondo, bajo el modelo Vasicek teniendo como referencia los rendimientos de los UDIBONOS a treinta años.
- Encontrar la contribución fija, bajo la cual el Valor Neto Actual (VNA) de las diferencias entre ésta y la contribución variable es cero con una tasa de retorno.
- Analizar el comportamiento del esquema anterior bajo la realización de 10,000 escenarios posibles.
- Definir el derivado con respecto al percentil 0.95 de la distribución de la contribución fija, explicar las partes involucradas y los riesgos en perspectiva.

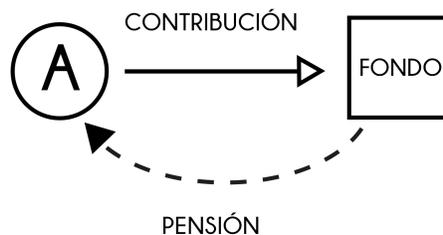
⁴Lenguaje de programación: Visual Basic for Applications.

1.5. Alcances

El *plan de pensión*⁵ privado se plantea generalmente como una prestación de una empresa para un grupo de empleados. De tal manera que en conjunto, el total de las pensiones es la suma correspondiente a las pensiones de cada uno de los miembros inscritos en el plan.



El análisis de este trabajo contempla únicamente la metodología para encontrar la contribución conforme a un sólo miembro del plan. Como lo muestra el siguiente diagrama:



⁵También llamado *régimen de pensiones*, se desarrolla con base en un diagnóstico, propuesta, valuación, implementación y administración.

Por lo que, el alcance general de esta tesis es plantear la metodología de cómo se puede generar un plan de pensión de BD a través de contribuciones fijas mediante un derivado financiero. En virtud de ello, se determina la contribución fija C tal que, bajo los supuestos definidos de mortalidad, tasa de interés e incremento salarial; el indicador VNA de las pérdidas y ganancias es cero. Se aclara que no es interés de esta tesis profundizar en la exactitud de cada uno de los supuestos, ya que pueden ser elegidos a conveniencia de los fines que se requieran. De esta manera, sólo se toman como base para la metodología expuesta.

1.6. Limitaciones

- El modelo está programado en VBA Excel y realiza los cálculos sólo bajo los supuestos definidos; generando un análisis exclusivo de la información arrojada por una serie de datos. Por lo que, es importante señalar que existen variables exógenas⁶ a este análisis que pueden afectar significativamente el mercado y con ello, el modelo. Como pueden ser: cambios en la ley, elecciones presidenciales, conflictos internacionales, tratados comerciales, entre otros.
- Al fijar la mortalidad considerando una tabla de vida, el modelo se limita a seguir dicho comportamiento. Sucede que, en la realidad en distintos momentos del tiempo se producen diferentes tasas de mortalidad pero estimarlas continuamente requiere de un extenso trabajo.
- La serie de tiempo sobre los rendimientos de los UDIBONOS a treinta años está acotada por la disponibilidad de la información, puesto que se tiene conocimiento desde enero de 2006.
- El modelo utilizado para pronosticar las tasas, considera hasta cierto punto un comportamiento estable con un nivel de regresión a la media y mantiene continuidad, es decir, no toma en cuenta saltos. Esto significa, que excluye cambios en la política monetaria del país, la cual influye en la tendencia de las tasas de interés.

⁶Variables que no son incluidas en el modelo.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Pensiones

2.1.1. Antecedentes desde la seguridad social

Desde sus inicios el hombre en su afán por subsistir, ha buscado seguridad para la obtención de alimento con la caza, la domesticación de animales y el cultivo de plantas. Y también, ha tenido la necesidad de vivir en conjunto con otros seres; creando ciertos medios de organización social, dando paso al surgimiento de comunidades, la formación de antiguas civilizaciones, o bien la institución de estados complejamente estructurados. Siendo así, la búsqueda de la seguridad una parte esencial de su actuar.

Mientras las sociedades progresaron en su economía y complejidad social, los lugares abiertos donde existían granjas aisladas alrededor del mundo, con el paso del tiempo dieron lugar a las ciudades y villas. De forma que, el trabajo como recurso de seguridad económica, resaltó la importancia de los trabajadores. Fue así, que Europa en la Edad Media fue testigo del desarrollo de varios tipos de organizaciones formales que buscaron proteger la seguridad económica de sus miembros, individuos que tenían en común una forma de negociar se unieron para formar sociedades de ayuda mutua llamados *guilds*¹.

¹Gremios de comerciantes y artesanos en la Edad Media, que se originan con el fin de protegerse, especializarse y establecer estándares dentro de su campo de trabajo.

Más adelante con la Revolución Industrial, la clase trabajadora sin protección oficial estuvo expuesta a muchos riesgos provocados por el mismo trabajo. Es por ello que, nace la necesidad de agruparse de acuerdo a las actividades laborales que se desarrollaban. De modo que, Alemania y España fueron los precursores en materia de seguros sociales voluntarios a partir de 1883, impulsando a países como Francia, Dinamarca e Inglaterra a involucrarse en materia de *seguridad social*². En tanto, del otro lado del mundo en Estados Unidos antes del siglo XX, la mayoría de la gente vivía en granjas y trabajaba la tierra como sustento; y algunos otros, dependían del apoyo de sus hijos o familiares para proveerse de seguridad económica³.

Siendo un objetivo primordial, para una persona que trabaja, garantizar el sustento y alimento, aunado a alcanzar un nivel de vida digna y decorosa en el cual se pueda desarrollar el trabajador y las personas que dependan de él; la seguridad social tiene como fin contrarrestar las diferencias que puedan existir de la injusticia de la naturaleza en las actividades económicas; a través de un sistema creado para beneficiar especialmente a los sectores económicamente más vulnerables, tratando de disminuir tal desigualdad.

Es así, que mediante un fondo común, que solventaba a las personas enfermas y en edades avanzadas que no laboraban, se origina el concepto de *pensión* en Prusia en el siglo XIX. Sin embargo, no es hasta 1924 en Chile que se instala el primer programa de seguridad que considera un plan de pensiones en América Latina.

Hoy en día, el conjunto de medidas públicas contra las privaciones económicas y sociales de un trabajador y por consecuente de su familia, derivadas de una disminución de ingresos debido a una contingencia⁴ como puede ser: una enfermedad, accidente de trabajo, enfermedad laboral, desempleo, invalidez, maternidad o muerte, es conocido como *Seguridad Social* según la Organización Internacional del Trabajo (OIT).

²Medidas que establece la sociedad para el bienestar común de sus miembros.

³Extraído del documento *Social Security-A Brief History* Administración de Seguridad Social.

⁴Referido a un evento que puede o no suceder. En términos actuariales, dichos eventos en caso de que ocurran pueden generar impactos económicos negativos.

2.1.2. Pensiones en México

En México, a partir de 1943 se tiene registro del Instituto Mexicano del Seguro Social IMSS, como institución dirigida a promover la *seguridad social* de los trabajadores y sus dependientes. Tal protección, es generada por la misma sociedad y tiene su fundamento legal en el Artículo 123 de la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos. De esta manera, se establece que el objetivo de la seguridad social pretende garantizar el derecho a la salud, asistencia pública y servicios sociales que contribuyan a un beneficio individual y colectivo.

De las funciones básicas con mayor relevancia de la seguridad social se pueden destacar: los servicios de hospitales y clínicas; los seguros en caso de existir algún riesgo de trabajo, enfermedad o maternidad entre otros; créditos para la adquisición de vivienda; así como el otorgamiento de una **pensión al momento de retiro**⁵. Para poder dar cumplimiento a estos objetivos, la recaudación y la adecuada administración de los recursos son tareas indispensables.

En conjunto con el IMSS nace la Ley del Seguro Social (LSS), la cual establece las bases para el funcionamiento de dicho instituto. Así también, es creado el Sistema de Pensiones en nuestro país, que comenzó con el llamado *sistema de reparto*. En el cual, los trabajadores activos cubren con sus aportaciones el pago de las pensiones del momento, ganando el derecho de recibir su pensión cuando dejen de trabajar; creando un vínculo intergeneracional.

En el año de 1973 se hicieron modificaciones sobre la LSS, y en 1959 cuando se establece la Ley del ISSSTE⁶ se instaura también el sistema de reparto para los trabajadores del Estado, el cual sería administrado por dicha institución. Más adelante, dicho sistema se reforma en el año 1983 resultando una mejora en el esquema de prestaciones.

Al parecer este sistema puede sonar garantía en un inicio; al pensar que siempre habría trabajadores activos, dado el continuo desarrollo de la industria y economía del país. No obstante, se estableció una relación

⁵Acuerdo de recibir un monto de por vida cada cierto periodo a partir del retiro.

⁶Instituto de Seguridad y Servicios Sociales de los Trabajadores del Estado.

totalmente dependiente entre ambas poblaciones involucradas. Lo que destacó el comportamiento de factores que influyen directamente en el funcionamiento de este sistema como: el envejecimiento de la población y el comportamiento de la *tasa de natalidad*⁷.

Con el paso del tiempo, a pesar de ciertas modificaciones a la ley se muestra que llegado el momento, los recursos económicos no alcanzarían para cubrir la demanda de pensionados. Para entender esta situación, se identifican algunos elementos a continuación que afectaban el sistema establecido:

- *El incremento de la esperanza de vida* de los trabajadores, y en general de la población. Debido a los avances en la ciencia y tecnología, especialmente en la medicina, los cuales dieron como resultado un aumento en la calidad de vida. En otras palabras, la gente al vivir más tiempo que antes, moría más vieja; lo que implicaba, seguir manteniendo los pagos de las pensiones del momento a un plazo mayor, aunado a las de los nuevos pensionados que cada día se sumaban.
- *La disminución de la tasa de natalidad*, es un resultado cultural apoyado en que las familias tienden a tener menos hijos que las familias de décadas pasadas. Siendo que la vida con el paso del tiempo se vuelve más cara, mantener o mejorar el nivel económico se vuelve más difícil con más hijos.
- *La escasez de educación financiera en México*. Se debía a que las condiciones laborales para la obtención de una pensión establecían requisitos que una vez cumplidos; ya no le interesaba al trabajador seguir cotizando o adicionar aportaciones voluntarias. Puesto que su salario cubría sus necesidades al margen, aunado a una falta de cultura de ahorro.
- *La desigualdad* existente, dado que los trabajadores con menor estabilidad en el trabajo debido a bajos ingresos o a una alta movilidad, llegaban a perder sus aportaciones al no cumplir con los requerimientos. En otros casos, se daban pensiones altas que no las solventaban las aportaciones dadas.

⁷Razón del número de nacidos vivos en un año entre la población total a mitad del mismo año, por mil. *Fuente: Organización Panamericana de la Salud.*

- *El desvío del dinero.* Cuando se utilizaba el dinero acumulado para otros propósitos y no se generaba la reserva⁸ adecuada para el pago de exigencias futuras, exponiéndose a un posible déficit.

Con razón de todo lo anterior, en 1992 se establece el Sistema de Ahorro para el Retiro conocido como SAR-92. El cual, es el primer intento por cambiar el sistema a una administración de cuentas individuales. Esto es, el *sistema de capitalización individual*, donde las aportaciones realizadas por el patrón y trabajador, según sea el caso, son depositadas a la cuenta respectiva del trabajador acumulando un monto que al momento del retiro será la base para la generación de la pensión del trabajador. De esta manera, fue que el gobierno cedió la responsabilidad a las AFORE⁹ de administrar y dar seguimiento a los fondos de pensiones de los trabajadores. Éstos están sujetos a los planes de pensiones establecidos en la ley como:

- *Beneficio definido*¹⁰ con contribución variable.
- *Contribución definida*¹¹ con beneficio variable.

Este último sistema de financiamiento, entró en vigor en 1997 para los trabajadores del IMSS, para trabajadores no afiliados en 2002 y para los trabajadores inscritos en el ISSSTE en 2007. De esta manera, surgieron figuras esenciales como AFORE y SIEFORE¹² para el funcionamiento del nuevo sistema. Además se crea la AMAFORE, Asociación Mexicana de las AFORE, quien se encarga de promover entre sus socios el desarrollo y crecimiento del sistema mexicano de ahorro para el retiro de manera que sea sustentable. (Aguirre Farías, 2012)

2.1.3. Clasificación

Tomando en cuenta que una pensión es un arreglo de pagos periódicos, que se dan al pensionado a partir de una fecha determinada dada cierta condición cumplida, como puede ser: enfermedad, invalidez, viudez, orfandad,

⁸Monto preservado para utilizarse en caso de una contingencia futura.

⁹Administradoras de Fondos para el Retiro.

¹⁰Ley de 1973.

¹¹Ley de 1997.

¹²Sociedad de Inversión Especializada en Fondos para el Retiro.

cesantía¹³ y vejez, entre otros; existen distintos tipos de pensiones. Por ello, es necesario aclarar que para fines de este trabajo, el término *pensión* se refiere exclusivamente para pensiones con causa en el retiro del trabajo; ya sea por alcanzar la *edad de retiro*¹⁴, o bien por cumplir con ciertos años de servicio en una empresa.

De acuerdo con Booth et al. (2004)¹⁵, un plan de pensiones es un contrato financiero que se establece entre un proveedor y uno o varios miembros, con el fin de proporcionarles el pago de una pensión a partir del momento de su retiro. Muchos de estos planes llevan consigo otro tipo de beneficios, llamados *beneficios auxiliares*¹⁶, como puede ser un seguro de vida para la esposa(o) del miembro, en caso de fallecimiento de éste.

De ahora en adelante, se considera un *plan de pensión* como una estructura financiera de derechos y obligaciones, entre el trabajador quien pasa a ser miembro del plan; y un proveedor, que puede ser: la misma empresa empleadora, una institución financiera de interés, una aseguradora, un administrador de un fondo de inversión, etc. Con el propósito de establecer las condiciones necesarias de financiación y pago, para proveer al trabajador de un ingreso a partir de su retiro, mientras viva.

De modo que, los derechos mencionados están asociados a los *beneficios futuros*, es decir, a las cuantías de dinero a recibir en un futuro como concepto de pensión. Y las obligaciones se encuentran relacionadas con las *contribuciones* antes de la fecha de retiro, es decir, los costos que dan financiamiento al plan.

Acorde a las distintas características que posee un plan de pensión, existen diferentes maneras de clasificarlos, las cuales se presentan a continuación:

Financiamiento: cómo se costea el plan.

¹³Se puede dar a partir de los 60 años y el beneficio es menor a la pensión por vejez.

¹⁴La *edad normal* de jubilación en México es de 65 años (Ley del IMSS de 1973).

¹⁵[Pág. 559].

¹⁶Dichos beneficios reducen el capital disponible en el fondo para la pensión del miembro; de forma que contar con ellos aumenta el costo de la pensión.

- *Funded plans o planes fondeados.* Se contempla un fondo, el cual es destinado para soportar los costos de la pensión.
- *Planes pay-as-you-go* son planes para los que no existe un fondo o reserva pero se costean al momento del retiro del trabajador. Durante el comienzo de vida de dichos planes, los costos son bajos pero irán creciendo significativamente hasta llegar a su etapa crítica donde es posible que se establezca a elevados costos.

Por legislación: bajo qué ley funciona el plan.

- *Planes de reparto.* Como ya se mencionó anteriormente, estos planes se basan en que las generaciones laboralmente activas canalizan sus contribuciones a un fondo común que sostiene el pago de las pensiones en curso.
- *Planes de capitalización.* Éstos son las llamadas cuentas individuales, donde las contribuciones son depositadas en un fondo de reserva. El cual se administra e invierte, esto quiere decir, que puede generar rendimientos que forman parte de los beneficios.

Beneficio: cómo se define el monto de la pensión.

- *Planes de beneficio-definido* son aquellos en los que se determina por anticipado la cantidad a la cual será acreedor una persona al momento de su retiro; o bien, la cantidad que será recibida en términos porcentuales del *salario pensionable*¹⁷.
- *Planes de contribución-definida.* En ellos se fija el pago correspondiente a las contribuciones, de tal manera que el beneficio dependerá del monto que acumulen tales contribuciones. Por el *principio de equivalencia*¹⁸, dicho monto acumulado será igual a una renta (monto de la pensión) por un factor actuarial.

¹⁷Ganancias utilizadas para el cálculo de beneficios y contribuciones según Booth et al. (2004) [pág. 563]

¹⁸En el ámbito financiero, establece que dos cuantías de dinero invertidas en diferente tiempo son iguales cuando se comparan en una misma fecha, generalmente alguna tiene asociado un factor de descuento o acumulación.

*Nota: Los planes *no-contributorios* son cuando el empleador asume el 100 % del costo.

Cobertura: quién o quiénes pertenecen al plan.

- *Planes individuales* son aquellos para una sola persona; por ejemplo los contratos privados con el fin de ahorrar para el retiro.
- *Planes colectivos o de grupo*, cubren a un conjunto de personas que comparten un interés en común, frecuentemente se aplican para un grupo de empleados en una compañía.
- *Planes del Estado* son planes que contemplan a toda una nación; o bien, ciertos sectores de la población, ya sea de un estado o ciudad. Lo que lleva a definir la siguiente clasificación.

Sector: qué institución ofrece el plan.

- *Planes públicos* son aquellos que ofrece el Estado como parte de la seguridad social, con el fin de apoyar la calidad de vida tratando de nivelar las desigualdades económicas en ciertos sectores de la población de un país. Ojo: dichos planes son financiados por el gobierno. Por ejemplo, al amparo de la LSS, el gobierno federal asegura una pensión garantizada ¹⁹
- *Planes privados o complementarios* son los aquellos que las aseguradoras o instituciones afines al ramo, ofrecen a las empresas quienes podrían brindar dicho plan como prestación a sus trabajadores. Una de las ventajas para los patrones, es que los planes privados tienen beneficios fiscales; ya que pueden deducir ²⁰ las aportaciones que realicen para el retiro de los trabajadores así como los gastos derivados de la administración del dinero acumulado.

Es posible notar que un plan de pensión puede ser una combinación de las clasificaciones anteriores, por lo que a continuación se explica sólo lo referente el correspondiente a esta tesis.

¹⁹Cuyo monto mensual será equivalente a un salario mínimo general de la Ciudad de México. Fuente: <http://www.imss.gob.mx/pensiones/preguntas-frecuentes/que-es-la-pension-minima-garantizada>

²⁰De 47% a un 53% del monto de las aportaciones realizadas al fondo de las pensiones. Fuente: <https://www.economista.com.mx/economia/Limite-a-deducibilidad-en-planes-privados-de-retiro-es-un-desastre-20171012-0143.html>

2.1.4. Pensiones privadas

Dadas las adversas condiciones del sistema de pensiones en México, además del crecimiento del sector asegurador, es que se crean las pensiones privadas. En su mayoría, son patrocinadas parcial o totalmente por el empleador, con el fin de ofrecer una prestación adicional a sus empleados. De esta manera, es posible brindarles como beneficio una suma global o una anualidad al momento del retiro según Dickson et al. (2013)²¹.

Así, una de las ventajas de contar con dicho planteamiento además de los beneficios fiscales, es que incentiva a los nuevos trabajadores en su permanencia en la empresa; y ésta por otro lado, asegura la rotación de personal con mayor edad de una manera satisfactoria para ambas partes. También un plan privado, puede verse como una recompensa para los trabajadores que contribuyeron al éxito de la compañía. Siendo que, se puede establecer la edad de retiro de acuerdo a los intereses propios del miembro del plan o del empleador, bajo los términos de la ley.

Por lo tanto, para **diseñar un plan privado** de pensiones es necesario adecuarlo a las necesidades primordiales que motivan dicho plan, de acuerdo a lo siguiente:

- *Público al que va dirigido.* Se trata del conjunto de individuos para el cual se realiza el plan.
- *Requisitos de elegibilidad.* Se refieren a las condiciones que la empresa establece para que un trabajador sea miembro del plan, con el fin de tener control sobre los costos del plan.
- *Compensación contemplada* reflejada en los conceptos a considerar como: bonos, aguinaldo, vacaciones, etc. Los cuales, conforman el sueldo pensionable.
- *Sueldo pensionable.* Es el monto que se toma como base para realizar los cálculos de la pensión que se va a recibir. Los tipos más comunes son:

²¹[pag. 12]

- *Carrera laboral.* Para calcular los beneficios considera los distintos salarios obtenidos durante la vida del plan.
- *Salario final.* Se basa en el último salario pensionable o un conjunto cercano a éste. Por ejemplo: calcular un promedio de los salarios obtenidos aproximadamente en los últimos cinco años que dure el plan.
- *Servicios pensionables.* Se refiere al tiempo considerado para acumular activos en el fondo. Es posible considerar años completos, años y meses completos; o años completos y partes proporcionales de un año.
- *Fechas y condiciones de retiro.* Alcanzar la edad de retiro establecida, además de cumplir con reglas particulares del contrato, si es que las hubiere.
- *Monto del beneficio.* Se establece una regla que determina los cálculos para obtener los beneficios. En el siguiente apartado se explican a detalle las fórmulas.
- *Beneficios adicionales.* Dichos beneficios pueden ser una jubilación por enfermedad, indemnización por muerte antes del retiro, extender la pensión a un beneficiario en caso de fallecimiento del pensionado o un seguro que garantice la pensión ciertos años después del retiro. Para el propósito de este trabajo no se tomarán en cuenta dichos beneficios.
- *Tipo de financiamiento.* Puede ser que se pague al momento, es decir, periodo a periodo; o bien, que se pague antes mediante la capitalización en un fondo, donde es posible que sea contributorio o no contributorio.

Así, las dos grandes ramas de un plan de pensión financiado por un empleador son: BD y CD. De cualquier modo, el BD o bien, el monto acumulado bajo un plan de CD se determinan al considerar una adecuada *tasa de reemplazo*; la cual se define a continuación según Dickson et al. (2013):

$$\text{tasa de reemplazo} = \frac{\text{pensión un año después del retiro}}{\text{salario un año antes del retiro}} = \beta \quad (2.1)$$

Una tasa de reemplazo alrededor del 70 % incluyendo seguridad social y ahorros personales, a menudo se asume que permite a los retirados mantener el estilo de vida que tenían antes del retiro²².

Beneficio definido

En los planes de BD, una vez estipulado el sueldo pensionable al que denotaremos “ s ”, se establece el monto de la pensión. Para ello, definimos una función $P : \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+$, la cual representa el monto de la pensión. Es decir, el beneficio definido cuyas formas más comunes se muestran a continuación:

- *Beneficio cerrado*, considera la pensión como una cuantía constante. Es la fórmula más simple para un plan de beneficio definido.

$$P(s) = c, \text{ donde } 0 < c \leq s$$

- *Beneficio vinculado al salario*, tiene por objeto establecer un nivel de vida acorde al nivel alcanzado antes del retiro. En consecuencia, es necesario el salario pensionable como base de los cálculos. Así, se definen las siguientes fórmulas:

- b) *Porcentaje nivelado de compensación*, donde la pensión se define como un porcentaje del salario pensionable.

$$P(s) = \lambda s, \text{ con } 0 < \lambda \leq 1 \quad (2.2)$$

- c) *Crédito unitario*, estipula la pensión con un factor en función de los años de servicio y salario pensionable.

$$P(s) = \beta ns$$

Donde β es el beneficio por año de servicio y n son los años de servicio.

Así, en un plan de pensión donde el pago de la pensión se calcula conforme a una *fórmula*, es decir, de beneficio-definido, no bajo la cantidad acumulada en un fondo; se requiere de una forma para asignar los costos de las obligaciones futuras a cada año; a dicho proceso se le conoce como **método**

²²Dickson et al. (2013) [página 335.]

de costeo actuarial y su aplicación es lo que da lugar a la *valuación actuarial*. Según Anderson (2006) en general los tres componentes esenciales que produce un método de costeo son: un costo normal²³, pasivo acumulado no financiado²⁴ y una ganancia. En estos casos, existen diferentes tipos de métodos, entre los cuales destacan en la práctica:

- Crédito Unitario (*Unit Credit*)
- Edad de Entrada (*Entry Age Normal*)
- Prima Individual Nivelada (*Individual Level Premium*)
- Pasivo Inicial Congelado (*Frozen Initial Liability*)
- Edad Alcanzada (*Attained Age Normal*)
- Costeo Agregado (*Aggregate Cost Method*)

Todos y cada uno de ellos, se encuentran bajo la premisa de que las pensiones deben ser financiadas antes que comiencen; y a pesar que no existe uno estrictamente correcto, se considera en su elección el más adecuado de acuerdo al diseño del plan. Los métodos mencionados son para calcular *planes grupales*. Puesto que, el alcance de esta tesis llega sólo a calcular el esquema para un sólo trabajador, no se profundiza en este aspecto.

Finalmente en un plan financiado por un fondo, la contribución del empleador es periódicamente estimada por un actuario y depende de varios supuestos como: los retornos de inversión en el fondo, el crecimiento de los salarios de los empleados y de la mortalidad de los pensionados. Es por ello que, la instrucción y consejo en planes financiados de beneficio definido, es probablemente el área más importante del trabajo actuarial en términos de planes de pensiones de acuerdo con Booth et al. (2004)²⁵.

²³Costo por año que garantiza cubrir las obligaciones adquiridas desde que el trabajador está activo en el plan hasta ese año.

²⁴También conocida como obligación acumulada.

²⁵[pag. 562]

Contribución definida

En los planes de contribución definida (CD), se define la cuantía o porcentaje del salario como aportación del empleador y/o del empleado como variable conocida. Estas aportaciones se realizan a un fondo que gana un *interés* y cobra una comisión²⁶. Y al final, el acumulado es el capital que proveerá los ingresos en la etapa del retiro; ya sea en una suma global o en una renta vitalicia.

En esta área es donde las AFORE son de gran relevancia; ya que gracias a la reforma, hoy en día toman un papel primordial para las pensiones futuras; siendo las cuentas de capitalización la forma más común de proveer para el futuro.

Dickson et al. (2013)²⁷ menciona que, para determinar el monto de la contribución con el fin de alcanzar una tasa de reemplazo para un individuo, se considera necesariamente:

- Tasa de reemplazo y edad de retiro.
- Supuestos en la tasa de rendimiento de las inversiones, tasa de interés al momento del retiro, escala de salarios y un modelo de mortalidad a partir del retiro.
- Forma en que son definidos los beneficios.

De esta manera se puede elegir una tasa de contribución, también conocida como tasa de cotización, que sea adecuada si en el transcurso del tiempo se cumplen los supuestos plantados. Teniendo cierta incertidumbre al respecto, es importante tomar en cuenta un análisis de sensibilidad, el cuál evalúe en un rango de distintos posibles resultados, los ingresos del plan de retiro.

2.2. Derivados financieros

Los mercados donde se comercian diferentes tipos de productos con el fin de satisfacer alguna necesidad del ser humano, tienen su equivalente

²⁶Dado el fin académico de esta tesis, no se toman en cuenta comisiones.

²⁷[Página 339.]

en el mundo financiero. Claro está, que existen ciertas diferencias que los distinguen, y una muy concreta es que en el mercado financiero, los activos son valores que pueden representarse en un documento.

Cierto es, que si el mercado es lugar o medio por el cual se negocian activos; cuando se habla de negociar un instrumento financiero, se entiende el proceso por el cual un activo adquiere un nuevo propietario. Y para que esto se lleve a cabo es necesario tomar en cuenta lo siguiente:

1. Tanto comprador y vendedor deben contactarse entre sí, para acordar el precio del activo de interés.
2. La negociación debe ser clara, estableciendo las condiciones tanto de obligaciones como derechos correspondientes de ambas partes. Esto incluye: fecha de entrega, precio, forma de entrega, entre otros.
3. Llegada la fecha pactada se debe cumplir con el acuerdo establecido: realizar la entrega del bien y de la compensación por el mismo.
4. Finalmente actualizar los registros de propietario.

Todo esto es muy claro, pues hoy en día se realiza con mayor facilidad dados los avances de la tecnología. No obstante, en el mercado financiero es necesario precisar cada paso; pues para cada uno se han definido ciertos estatutos que lo caracterizan.

Actualmente, en México se tiene como referencia del mercado financiero a la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), la cual es una entidad financiera privada que tiene la concesión por la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP)²⁸. De modo que, la Bolsa provee un lugar de encuentro con el fin de facilitar el llevar a cabo transacciones de valores financieros. Todo esto dentro de un marco jurídico y normativo que especifica qué tipo de activos se negocian y cómo se lleva a cabo la negociación en la vida real. Hace algunos años las transacciones se realizaban cara a cara con señales corporales, las cuales fueron reemplazados por espacios virtuales donde se llevan a cabo de manera electrónica²⁹ en la actualidad.

²⁸Dependencia federal encargada de controlar la política económica del Gobierno Federal, incluyendo el sector financiero, fiscal, de ingreso, de gasto y deuda pública.

²⁹En México se cuenta con el sistema SENTRA CAPITALS.

Ahora bien, aunque existe una gran variedad de mercados e instrumentos financieros, la atención se enfoca en lo relacionado a un *derivado* que es el instrumento de interés para el objetivo esta tesis. Así, un derivado es un contrato de índole financiera que establece en el presente la compra-venta futura de un activo llamado *subyacente*. En dicho contrato se especifican las condiciones de la transacción acordada, como: el tipo de activo, el precio a pagar o recibir por el subyacente, la fecha pactada y la forma de liquidación³⁰. Este instrumento financiero tiene cierta particularidad, es llamado derivado ya que “su valor depende o se deriva del precio del activo subyacente”.

De esta forma, es posible que pueda ser visto como una apuesta debido a que se fija el precio de un bien hoy, sin saber cuánto costará mañana. De otro modo, puede figurar una cobertura contra resultados desfavorables, dependiendo de la postura y perspectiva de las partes involucradas. Una vez negociado el contrato se espera su liquidación, pues ésta se ejecutará en su vencimiento debido a que tiene madurez finita³¹. Durante la espera, se genera cierta exposición a diferentes fuentes de *riesgo*. Por lo que es tarea importante analizarlos y así gestionarlos, para ello es necesario conocer las variables que impactan sobre el valor del derivado.

En primer lugar se tiene el *precio del subyacente* al momento de definir el contrato, ya que representa una referencia inicial. Tiene sentido pensar que los precios de los activos están sujetos a fluctuaciones con el paso del tiempo que dependen del precio del mercado; razón suficiente para originarse los mismos derivados.

Segundo, el *precio strike*, *precio pactado* o *precio de ejercicio* es el precio del activo establecido para la compra-venta del mismo. Este precio será respetado independientemente de cuál sea el valor del activo en el mercado al momento de la liquidación. Claramente, se encuentra estrechamente relacionado con el precio del subyacente (al momento que se realizó el contrato), multiplicado por un factor que depende de cierto comportamiento anterior o esperado, pensando que actúe de manera similar.

³⁰Se le conoce como la acción de cerrar una posición abierta, ya sea larga(i.e, vendiendo el contrato) o corta(i.e., comprando el contrato). [Recuperado el 27 de agosto 2018].

³¹Se refiere a una fecha específica donde de tiene que cumplir el contrato.

Tercero, la *tasa de interés* estrechamente ligada con el tipo de política monetaria³² vinculada con los créditos otorgados o adquiridos del momento.

Cuarto, la *volatilidad* del subyacente. Parámetro de variación en incrementos y decrementos que ha presentado el precio del subyacente durante cierto periodo anterior, produciendo mayor incertidumbre en cuanto a ganancias y pérdidas.

Por último, el *tiempo por madurar*, es el periodo desde que se celebra el contrato hasta la fecha de vencimiento. Durante él, el precio del subyacente se encuentra vulnerable a todos los cambios que se lleguen a dar.

Una vez familiarizándose con todas estas variables es más fácil entender el comportamiento del precio del derivado y por consiguiente notar que dicho instrumento es apalancado por naturaleza.

2.2.1. Mercado de derivados

Se le conoce *mercado de derivados* al conjunto de negociaciones con base en activos ya existentes (por ejemplo: acciones, divisas, commodities³³, tasas de interés, créditos, bienes raíces, entre otros) que se llevarán a cabo en un futuro determinado. Para poder negociar dichos activos existen dos tipos de mercados, que se detallan a continuación.

En primer lugar se encuentran los *mercados organizados*, operan instrumentos estandarizados, esto quiere decir que cotizan en una Bolsa de Derivados formal bajo ciertas normas y estatutos. Además, cuentan con un *mercado secundario* para poder deshacer alguna posición antes de su vencimiento, aunado a que la contraparte³⁴ es una cámara de compensación³⁵ para gestionar el riesgo de crédito³⁶.

³²Medidas que toma el Banco de México para controlar la masa monetaria.

³³Materias primas.

³⁴Parte contraria en la transacción. Suponiendo que se es el vendedor la contraparte es el comprador y viceversa.

³⁵Entidad encargada de compensar los pagos y liquidar las transacciones de derivados.

³⁶Riesgo de incumplimiento de pago.

Hoy en día MEXDER, Mercado Mexicano de Derivados S.A. de C.V., es la Bolsa de Derivados que opera en México. Creada con el fin de proporcionar infraestructura, tecnología y servicios para la cotización y negociación de instrumentos derivados. Comenzó sus operaciones el 15 de diciembre de 1998 autorizada por la SHCP; aunado a ello, se clasifica como una entidad autorregulatoria. También funge como creador de comités necesarios para la conciliación de diferencias que surjan de las transacciones, mantiene programas de auditoría, supervisa la transparencia de los procedimientos y es observador del cumplimiento de la normativa en las transacciones. Además, diseña e induce al mercado los contratos que serán negociados.

Por otro lado los *mercados “Over the Counter” OTC*, operan instrumentos hechos a la medida ya que las condiciones: el tipo del subyacente, el monto, el precio de ejercicio y fecha de expiración, son determinados entre las partes involucradas. Esto es debido, a que en mercados extrabursátiles³⁷ las negociaciones se realizan directamente entre comprador y vendedor. En algunas ocasiones, se da el caso de que la contraparte es un intermediario financiero y su negociación es realizada por medios de comunicación electrónica.

Existen dos tipos de liquidación: el primero es en especie, por medio de la entrega del subyacente al precio acordado. Y la otra forma es en efectivo; mediante el pago equivalente al monto de la diferencia entre el precio pactado del subyacente y el precio del mercado del subyacente. En OTC este método es llamado *por diferencias*. Existen varias razones por las cuáles se podría realizar una transacción directamente:

1. Con el fin de facilitar una transacción extensa con el dealer, negociando un sólo precio, evitando costos de intermediarios, cuotas del mercado y deshacerse de la incertidumbre del precio dado el anuncio de la venta.
2. Negociar una reclamación del cliente, siendo que no es aceptable en el mercado organizado.
3. Convenir diferentes demandas financieras de las partes en una sólo transacción.

³⁷Fuera del mercado regulado.

2.2.2. Clasificación de derivados

Tomando en cuenta lo anterior, los derivados pueden clasificarse como:

Estandarizados

- *Futuros*. Contratos cuyas dos partes establecen la obligación de llevar a cabo la compra-venta de un activo a un precio acordado y en un futuro determinado.
- *Opciones*. Contratos en los que el comprador paga una prima por tener el derecho, más no la obligación, de comprar o vender un activo subyacente a un precio fijo convenido, en una fecha futura y el emisor³⁸ al recibir dicha prima, acepta ser la contraparte asumiendo la obligación correspondiente.

OTC

- *Forwards*. También conocidos como contratos adelantados, representan la obligación de comprar o vender un bien con cierta calidad y cantidad; en una fecha, lugar y precio pactados. A diferencia de los futuros, operan fuera de la Bolsa, por lo que no tienen un mercado secundario para salir de una posición y consecuentemente resultan de alto riesgo sobretodo por incumplimiento.
- *Títulos Opcionales (Warrants)*. Similares a las opciones a nivel internacional pues el tenedor tiene el derecho de comprar o vender. En México, las emisoras de estos contratos son emisoras de acciones, casas de bolsa y bancos; con el fin de ser operadas en bolsas de valores de México y del extranjero por medio de intermediarios financieros.
- *Swaps* son la versión financiera de un trueque. También llamados *permutas financieras*, establecen intercambios de un subyacente a una fecha definida; muy populares y utilizados para los tipos de tasa de interés, ya sea variable o fija. Y también son factibles en el *mercado de dinero*, mediante la ejecución de reportos³⁹.

³⁸Es aquél que otorga el derecho de la opción a cambio de una prima.

³⁹Operaciones en la que el reportado da ciertos títulos de valores al reportador en propiedad, a cierto precio durante un periodo, a cambio de una prima. Al finalizar dicho periodo, el reportador está obligado a devolver por el mismo precio los títulos de valores al reportado.

Para ciertas compañías son de utilidad algunos de estos derivados, por lo que depende del risk manager y de su creatividad la combinación de ciertos productos que sean viables para sus fines. A la construcción de nuevos productos resultado de la mezcla de los existentes se le conoce como *ingeniería financiera*.

2.2.3. Uso y aplicación

Una vez definidas las características respecto a los derivados y los tipos que existen, es necesario explicar las razones importantes de su uso y aplicación, las cuales se detallan a continuación:

- *Gestión de riesgo*. Busca eliminar, trasladar o reducir los riesgos de las fluctuaciones del precio de los subyacentes por lo que en su mayoría aplica a portafolios de acciones, obligaciones contraídas a *tasas variables*, pagos o cobranzas en moneda extranjera⁴⁰, compra-venta de divisas y planeación de flujos de efectivo. Ambas partes aceptan participar con el fin de reducir riesgos.
- *Especulación*. Literalmente es como adivinar, o crear una postura de creencia acerca de la tendencia de los precios. Por lo que ciertos inversionistas apuestan a la baja o a la alza de los precios. Frecuentemente utilizado en el mercado secundario.
- *Disminución de costos de transacción*. Evita pagar comisiones a brokers, o costos como *bid-ask spread*⁴¹.
- *Apalancamiento*. Término que se refiere a la relación de desembolsar una pequeña parte de la inversión con respecto a la cantidad expuesta al riesgo. Ya sea la prima o una garantía. Razón para ser un mercado muy atractivo para los inversionistas en cuanto a la rentabilidad que puede ofrecer, considerando al mismo tiempo, el riesgo de perder el 100 % de la inversión en un corto plazo.
- *Arbitraje regulatorio*. Es con el fin de esquivar ciertos impuestos o regulaciones contables con el uso de los derivados.

⁴⁰Generalmente, se da en exportaciones e importaciones.

⁴¹Diferencia entre el precio de venta y el de compra que ofrece la misma entidad.

2.2.4. Relación Derivados-Pensiones

Una vez conociendo ambas áreas: pensiones y derivados, se puede deducir que existe una relación entre ellas. Mientras que el área de pensiones requiere de fondos para solventar una pensión; los derivados son utilizados para generar riqueza. Es por ello que, una puede fungir como la contraparte de la otra. Siendo así, que en esta tesis se busca el punto de equilibrio para poder establecer un acuerdo entre ellas.

Capítulo 3

Generación del modelo

Para definir el derivado de interés, se ha generado un programa¹ en VBA Excel, en el cual se analiza el comportamiento del fondo y de las contribuciones que éste requiere, para financiar un plan de retiro de BD de un individuo de acuerdo a su edad, salario y beneficio.

3.1. Supuestos

Como el plan se sufraga con la acumulación de recursos a través de un fondo de inversión, es esencial considerar los siguientes puntos que influyen en el comportamiento del mismo:

1. Las *ganancias de las inversiones*, dadas por los rendimientos del fondo.
2. Los *gastos por manejo del fondo* asociados al crecimiento del mismo como un porcentaje. O bien, implícitos en la disminución de la tasa de interés dando como resultado una *tasa real*².
3. Los *términos y las condiciones* en los que se va a generar la pensión. En este caso, se pretende que el monto acumulado en el fondo una vez llegada la fecha de retiro soporte financieramente la pensión con una renta vitalicia a partir de ese momento.

Se asume que durante la vida laboral activa del miembro, el fondo demanda una contribución asociada a la tasa del momento; con el propósito

¹De creación propia.

²Rendimiento del fondo menos el porcentaje por gastos de administración.

de alcanzar el beneficio definido. Y es así, que con el monto acumulado se genera la pensión. De modo que, en la figura 3.1 plantea la estructura considerada con las variables a utilizar.

La línea de tiempo se encuentra determinada por dos fechas focales: el inicio del plan y la fecha de retiro. En consecuencia, se pueden distinguir dos periodos importantes: el tiempo de acumulación y el tiempo de recibir la pensión.

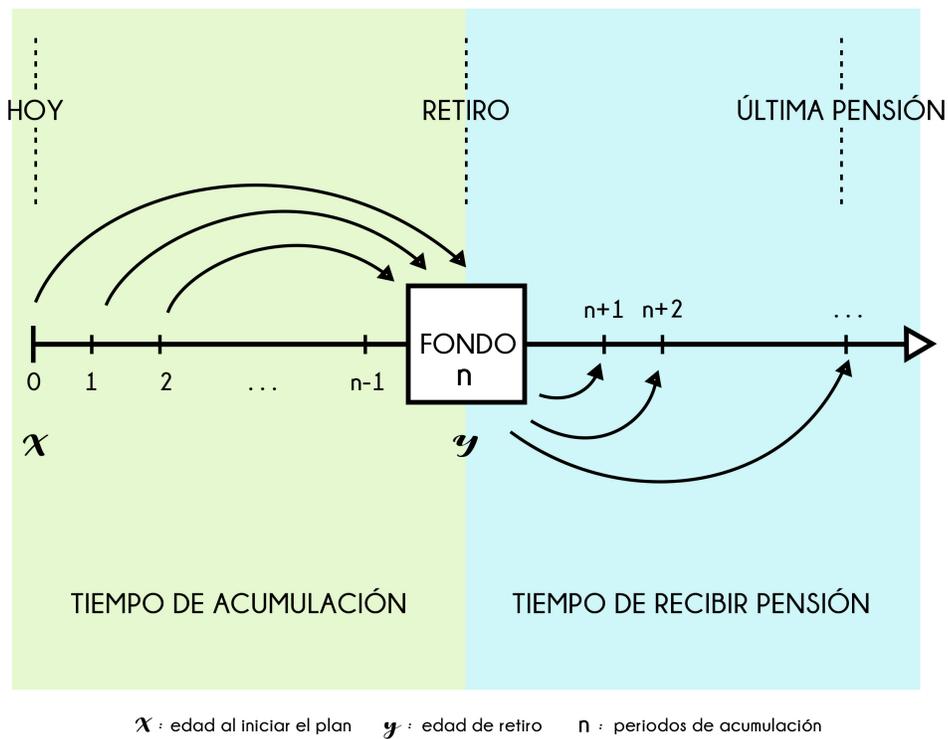


Figura 3.1: Línea de tiempo

El primero, y de mayor interés para el análisis, es el periodo que abarca desde la fecha inicial del plan hasta la fecha de retiro. Y el segundo, comprende desde el retiro hasta el último periodo de vida del pensionado;

si la muerte del individuo miembro del plan, sucede después del retiro. En caso contrario, si la muerte se da antes del retiro, el plan se cancela. En consecuencia, es importante considerar las siguientes variables de acuerdo al miembro del plan:

- 1) x_0 : Edad a la que se inicia el plan.
- 2) y : Edad de retiro, a partir de la cual es pagada la pensión.
- 3) S_0 : Salario mensual del miembro a la edad x_0 .
- 4) β : Tasa de reemplazo³, asociada al beneficio.

3.1.1. Hipótesis del plan

Se refieren a los criterios de medición tanto demográficos como financieros, para realizar la estimación de los eventos que originan las fechas y los montos correspondientes a las obligaciones futuras, tomando en cuenta la incertidumbre de que dichos eventos sucedan. En este proyecto dichas hipótesis se basan en lo siguiente:

Incremento salarial

Al momento de iniciar el plan se conoce el salario del trabajador; sin embargo, se desconoce el salario que tendrá al momento de su retiro. Dado que el modelo de pensión es de BD, el cual está vinculado al último salario, es primordial realizar una proyección de éste bajo el supuesto que existen incrementos con motivo de la inflación; o bien, a un cambio de puesto a causa de una promoción. Razón por la cual, se establece el salario a la edad de retiro S_{n-1} , estrictamente mayor al inicial S_0 . Es decir,

$$S_0 < S_{n-1}$$

Para poder definir dicho valor, Dickson et al. (2013) considera una función salarial $\{\bar{s}_y\}_{y \geq x_0}$, que calcula de una manera determinística el salario a cierta edad y con respecto a una edad inicial (x_0) y a una *tasa de incremento anual* (j), de la siguiente forma:

³De la ecuación (2.1)

$$\bar{s}_y = (1 + j)^{y-x_0}$$

Dado que en la práctica es más común utilizar una *escala de salarios* $\{s_y\}_{y \geq x_0}$ en vez de una función salarial; entonces, se puede obtener para cualquier $y > x \geq x_0$:

$$\frac{s_y}{s_x} = \frac{\int_0^1 \bar{s}_{y+t} dt}{\int_0^1 \bar{s}_{x+t} dt} = \frac{\text{salario recibido de la edad } y \text{ a } y + 1}{\text{salario recibido de la edad } x \text{ a } x + 1} \quad (3.1)$$

De esta manera se pueden obtener los salarios proyectados durante un año completo. Por otro lado, si se quieren los salarios en un punto específico, es decir en el punto t :

$$S_t = S_{t-1} \frac{(1 + j)^{t-1} - (1 + j)^t}{\ln(1 + j)} \quad (3.2)$$

donde:

- S_t es el salario proyectado en el tiempo t , tal que $S_0 < S_t \leq S_{n-1}$.
- t es el tiempo al cual se proyecta el salario, donde $t = 1, 2, 3, \dots, n - 1$.
- j es la tasa de incremento anual definida como una variable aleatoria⁴.

En este caso en particular, descrita por simplicidad de la forma triangular con un mínimo de 0%, un máximo de 5.78% y un valor más probable de 2.1%⁵. Es decir,

$$j \sim \text{Triang}(0\%, 2.1\%, 5.78\%)$$

⁴Toma diferentes valores con cierta probabilidad.

⁵Los parámetros se tomaron por conveniencia en el modelo, a través de la simulación. En la práctica éstos pueden ser elegidos bajo el análisis de los históricos de una empresa en específico.

Mortalidad

Término entendido como el número de defunciones en un periodo específico respecto a una población. La *mortalidad* es un factor primordial en los cálculos que requiere este proyecto considerando que es el único factor de decremento. En primer lugar, si se da el caso de que el miembro muera antes de la fecha de retiro, el plan para dicho miembro se cancela y lo que correspondía a éste sirve para dar soporte a los miembros activos del plan. Y en segundo, por que el pensionado recibe su pensión siempre y cuando, se encuentre con vida, lo que implica considerar una renta vitalicia para su pensión. Por consiguiente, para realizar el cálculo tanto de las contribuciones como de la pensión es necesario un modelo de mortalidad sobre el cual trabajar.

Dentro del ámbito actuarial existen diferentes modelos matemáticos que buscan describir dicho fenómeno, creando herramientas de uso en la práctica como las tablas de vida. Según Dickson et al. (2013) “Una tabla de vida resume un modelo de supervivencia⁶ especificando la proporción de vidas que se espera que sobrevivan en cada edad”. Es por ello, que con fines prácticos y metodológicos, se ha considerado *tasas de mortalidad constantes* respecto a una tabla de vida, CNSF 2000-I, de la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas,⁷ donde el único factor de decremento es la muerte de acuerdo a la edad⁸.

Notar que, para el caso de un grupo de empleados es común utilizar una *tabla de servicio*, mediante la cual se contemplan decrementos múltiples además de la muerte como pueden ser: despido, invalidez, rotación, etc. Los cuales no son tomados en cuenta para esta tesis.

Tasa de interés

Según Dickson et al. (2013) el beneficio definido es financiado por las contribuciones invertidas y sus rendimientos, lo que se espera es que las contribuciones acumuladas sean suficientes en promedio para cubrir la pensión.

⁶Indicador complementario de mortalidad.

⁷Modelo Individual (1991-1998).

⁸Donde las edades se contemplan en años completos.

EDAD	q_x	p_x	EDAD	q_x	p_x	EDAD	q_x	p_x
12	0.000396	0.999604	42	0.003672	0.996328	72	0.033180	0.966820
13	0.000427	0.999573	43	0.003954	0.996046	73	0.035651	0.964349
14	0.000460	0.999540	44	0.004258	0.995742	74	0.038300	0.961700
15	0.000495	0.999505	45	0.004581	0.995419	75	0.041136	0.958864
16	0.000533	0.999467	46	0.004938	0.995062	76	0.044174	0.955826
17	0.000575	0.999425	47	0.005317	0.994683	77	0.047424	0.952576
18	0.000619	0.999381	48	0.005725	0.994275	78	0.050902	0.949098
19	0.000667	0.999333	49	0.006164	0.993836	79	0.054619	0.945381
20	0.000718	0.999282	50	0.006637	0.993363	80	0.058592	0.941408
21	0.000773	0.999227	51	0.007145	0.992855	81	0.062834	0.937166
22	0.000833	0.999167	52	0.007693	0.992307	82	0.067362	0.932638
23	0.000897	0.999103	53	0.008282	0.991718	83	0.072190	0.927810
24	0.000966	0.999034	54	0.008915	0.991085	84	0.077337	0.922663
25	0.001041	0.998959	55	0.009597	0.990403	85	0.082817	0.917183
26	0.001121	0.998879	56	0.010330	0.989670	86	0.088649	0.911351
27	0.001209	0.998791	57	0.011119	0.988881	87	0.094850	0.905150
28	0.001300	0.998700	58	0.011967	0.988033	88	0.101436	0.898564
29	0.001400	0.998600	59	0.012879	0.987121	89	0.108424	0.891576
30	0.001508	0.998492	60	0.013860	0.986140	90	0.115832	0.884168
31	0.001624	0.998376	61	0.014914	0.985086	91	0.123677	0.876323
32	0.001749	0.998251	62	0.016048	0.983952	92	0.131973	0.868027
33	0.001884	0.998116	63	0.017265	0.982735	93	0.140737	0.859263
34	0.002029	0.997971	64	0.018574	0.981426	94	0.149983	0.850017
35	0.002186	0.997814	65	0.019980	0.980020	95	0.159723	0.840277
36	0.002354	0.997646	66	0.021490	0.978510	96	0.169970	0.830030
37	0.002535	0.997465	67	0.023111	0.976889	97	0.180733	0.819267
38	0.002730	0.997270	68	0.024851	0.975149	98	0.192020	0.807980
39	0.002940	0.997060	69	0.026720	0.973280	99	0.203837	0.796163
40	0.003166	0.996834	70	0.028724	0.971276	100	1.000000	0.000000
41	0.003410	0.996590	71	0.030874	0.969126			

Figura 3.2: CNSF 2000-I.

Es por ello que, bajo el supuesto de que las aportaciones se realizan a un fondo que genera intereses se contempla el pronóstico de los mismos, haciendo referencia a la tasa de rendimiento de los UDIBONOS⁹ a treinta años bajo un modelo que pueda describirlos. Para ello, se considera la serie histórica de enero del 2006 a septiembre del 2018 publicada por el Banco de México¹⁰.

⁹Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal denominados en unidades de inversión.

¹⁰Fuente: <http://www.banxico.org.mx/SieInternet/consultarDirectorioInternetAction.do?accion=consultarCuadro&idCuadro=CF114>

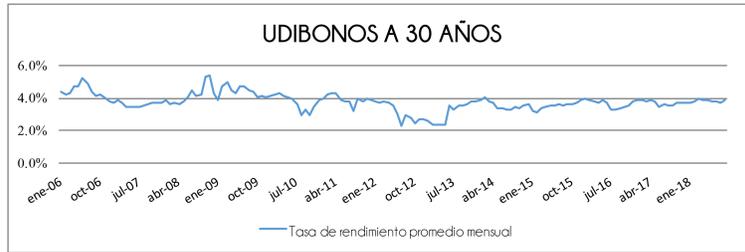


Figura 3.3: Tasa de rendimiento promedio mensual.

Dado que, "La aplicabilidad de las ecuaciones diferenciales deterministas es reducida si queremos describir el comportamiento de sistemas sometidos a entornos o parámetros que fluctúen" (Egido, 1999, p. 14). Y considerando que la tasa de interés cambia continuamente respecto al tiempo y a las condiciones del mercado al momento, se utiliza el modelo Vasicek basado en una ecuación diferencial estocástica cuya solución, un proceso gaussiano, puede describir el comportamiento de las tasas por la siguiente fórmula:

$$r(t) = r_e + (r_o - r_e)e^{-\alpha t} + \frac{\sigma e^{-\alpha t} \sqrt{e^{2\alpha t} - 1}}{\sqrt{2\alpha}} Z \quad (3.3)$$

donde:

$$Z \sim N(0, 1)$$

Esta ecuación es un proceso estocástico sobre el cual se modelan las tasas a utilizar, siempre que se ajusten los parámetros que requiere. Como se puede observar en (3.3), $r(t)$ depende principalmente del tiempo t , de una tasa inicial r_o y de los parámetros: r_e como una tasa media, σ como medida de dispersión y α como la velocidad de reversión.

Por consecuencia, es preciso estimar los tres parámetros (r_e , σ y α) y con ellos definir el modelo. Para ello, se emplea el método de Máxima Verosimilitud; el cual se basa en encontrar los valores de los parámetros más probables, maximizando la función de verosimilitud¹¹, a partir de una muestra.

¹¹O su equivalente la función de logverosimilitud.

Tasa histórica	
Media	0.037430464
Error típico	0.000443524
Mediana	0.0375
Moda	0.039
Desviación estándar	0.005450113
Varianza de la muestra	2.97037E-05
Curtosis	1.413619285
Coefficiente de asimetría	-0.062915023
Rango	0.031
Mínimo	0.0229
Máximo	0.0539
Suma	5.652
Cuenta	151

Función de Máxima Verosimilitud	
Suma	134.814537
Primer término	696.964395
Segundo término	-67.407269
$\ln(L(\alpha, r_e, \sigma; r_1, r_2, \dots, r_N))$	629.557126

Las estimaciones de los parámetros son:

$$r_e = 0.037028096$$

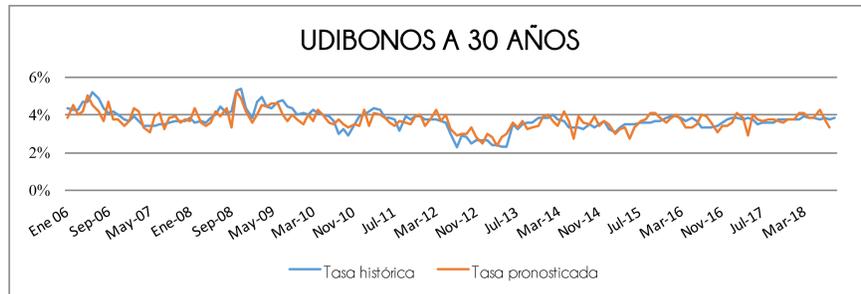
$$\sigma = 0.004090186$$

$$\alpha = 0.46408083$$

Una vez obteniendo las estimaciones, el modelo se representa de la siguiente forma:

$$r(t) = 0.037028 + (0.0386 - 0.037028)e^{-0.46408t} + \frac{0.004090e^{-0.46408t}\sqrt{e^{2(0.46408)t} - 1}}{\sqrt{2(0.46408)}} Z \quad (3.4)$$

Dicho modelo se observa así:



Para este caso, se considera r_0 como la última tasa de la que se tiene conocimiento de la serie histórica. Finalmente con (4.2), se realiza el pronóstico de las tasas.

3.2. Cómo funciona el programa

El programa realizado en Excel está compuesto por seis hojas, de las cuales sólo nos enfocaremos a las 2 primeras que conllevan la operación de los cálculos y la muestra de los resultados. Las demás, sólo son un apoyo para los cálculos realizados. La primera hoja, llamada “Automatizado”, presenta cuatro botones de ejecución como se muestra a continuación:



Figura 3.4: Botones de ejecución.

3.2.1. Variables de entrada

Dando clic en el primer botón de la Figura 3.4, llamado “Variables de entrada”, aparece el siguiente cuadro:

Es aquí, donde se introducen los valores característicos del miembro del plan. Notar que cuenta con tres entradas y un valor a elegir; además del lado inferior derecho se encuentra una casilla que al activarse, toma la edad de retiro como la edad que tenga el miembro al cumplir 30 años de servicio continuos, no importando que ésta sea menor a 60.

Para explicar el funcionamiento del modelo, a manera de ejemplo se considera una persona de 30 años de edad, con un sueldo mensual de \$20,000.00 MXN, esperando obtener una pensión a la edad de 60, con un beneficio equivalente a un 70%¹² de su último sueldo. Así, las variables de interés se establecen de la siguiente manera:

x_0	y	S_0	β
30	60	\$20,000.00	0.7

Entonces, es posible calcular lo siguiente:

¹²Los planes financiados por las empresas a menudo consideran tasas de reemplazo de 50 % a 70 % para empleados con carrera completa en la compañía según Dickson et al. (2013).

- *Periodos de acumulación:*

$$n = y - x = 30$$

- *Proyección del último salario anual:* S_{y-1} . Supongamos que en un escenario $j = 1.76\%$, lo que genera un salario mensual proyectado de \$ 33,169.08 al momento del retiro por la ecuación (3.2). Entonces el sueldo anual proyectado es:

$$S_{59} = (33,169.08) \cdot 12 = \$ 398,028.93$$

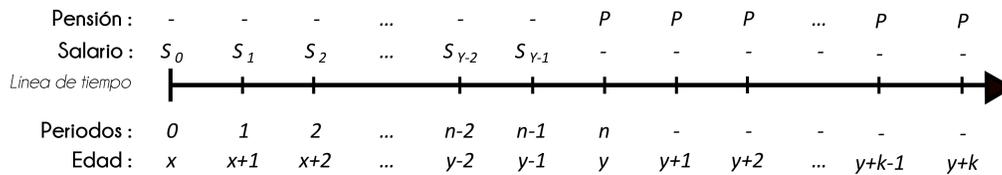
Tiempo	Edad x	Salario durante la edad x	Tiempo	Edad x	Salario durante la edad x
0	30	\$ 20,000.00	15	45	\$ 25,981.83
1	31	\$ 20,351.95	16	46	\$ 26,439.04
2	32	\$ 20,710.09	17	47	\$ 26,904.30
3	33	\$ 21,074.53	18	48	\$ 27,377.74
4	34	\$ 21,445.39	19	49	\$ 27,859.52
5	35	\$ 21,822.77	20	50	\$ 28,349.77
6	36	\$ 22,206.79	21	51	\$ 28,848.65
7	37	\$ 22,597.58	22	52	\$ 29,356.32
8	38	\$ 22,995.23	23	53	\$ 29,872.91
9	39	\$ 23,399.89	24	54	\$ 30,398.59
10	40	\$ 23,811.67	25	55	\$ 30,933.53
11	41	\$ 24,230.69	26	56	\$ 31,477.88
12	42	\$ 24,657.09	27	57	\$ 32,031.81
13	43	\$ 25,090.99	28	58	\$ 32,595.48
14	44	\$ 25,532.52	29	59	\$ 33,169.08

Figura 3.5: Salarios proyectados durante etapa laboral

- *Monto anual de la pensión:* P . El cual se ha vinculado al último salario anual en relación con el factor de beneficio β , de la siguiente forma:

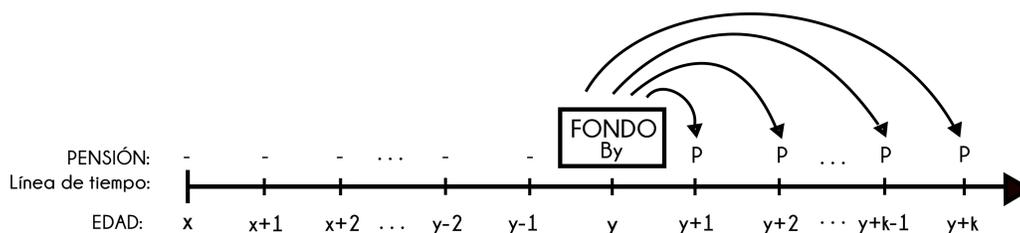
$$P = \beta \cdot S_{59} = 0.7(398,028.93) = \$ 278,620.25$$

El siguiente esquema muestra las variables conocidas hasta el momento, ordenadas a través del tiempo.



3.2.2. Proyección de los beneficios

Una vez definido el monto anual de la pensión, la pregunta esencial es la siguiente: ¿Cuánto cuesta cubrir la pensión deseada, P ? De acuerdo con Bowers et al. (1997) un plan de retiro se puede ver como la compra de una anualidad vitalicia diferida¹³. Lo que se puede explicar en el siguiente diagrama.



Ahora bien, suponga la compra de una anualidad vitalicia al momento del retiro; entonces, el valor proyectado de los beneficios, denotado por B_y , se expresa en la siguiente ecuación:

$$B_y = P \ddot{a}_y \quad (3.5)$$

donde:

B_y := Monto de los beneficios acumulados a la edad y .

P := Pensión en términos anuales.

\ddot{a}_y := Valor proyectado de la *anualidad vitalicia anticipada*.

Siendo que la edad de retiro es 60 años, se busca:

$$B_{60} = P \ddot{a}_{60} \quad (3.6)$$

El valor proyectado de dicha anualidad se calcula con una tasa, llamada interés técnico, bajo el supuesto que mantiene el mismo comportamiento del

¹³Anualidad cuyo primer pago ocurre en algún punto específico del futuro Dickson et al. (2013)

rendimiento del fondo¹⁴. De modo que, la anualidad generada con dichas tasas se puede ajustar a una distribución de la familia normal para generar dicho valor. Y se observa en la siguiente gráfica:

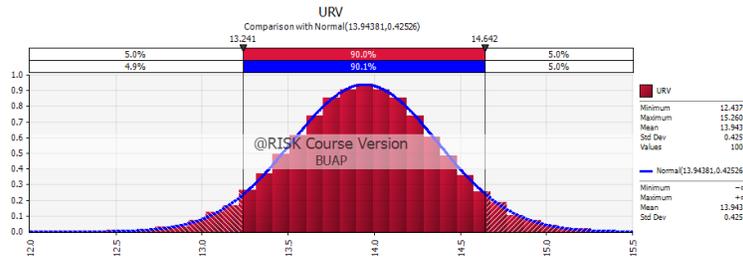


Figura 3.6: Distribución de anualidad

Prueba de bondad de ajuste Para saber que tanto se acercan los datos a la distribución se realiza un test:

Estadístico Chi-cuadrado	10.44
P-value	0.84

Por consiguiente, se considera $\ddot{a}_{60} \sim N(14.34925, 0.58218)$; de modo que para cada valor de la anualidad se tiene un monto de beneficios “ B_y ” diferente. Entonces, suponiendo que en el escenario explicado $\ddot{a}_{60} = 14.34925$, el monto de los beneficios es:

$$B_{60} = 278,620.25(14.34925) = \$3,997,991.65$$

Lo que quiere decir, que bajo los valores elegidos, se necesitan por lo menos \$ 3,997,991.65 para costear \$ 278,620.25 anuales hasta el año que fallezca el pensionado.

3.2.3. Cálculo de contribuciones

Una vez fijados los beneficios, es primordial establecer esta cantidad como meta de acumulación para el fondo. Dado que el beneficio definido

¹⁴Nota: *En la realidad esta tasa difiere de la tasa de interés que genera el fondo antes del retiro, puesto que generalmente la estrategia de inversión durante el periodo de acumulación resulta ser más agresiva que la de una anualidad, según Booth et al. (2004) [pág. 665].*

O bien,

$$B_y A_{x:\overline{n}|}^1 = C \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

puesto que:

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = v^n {}_n p_x$$

Lo cual tiene sentido, ya que la prima de la anualidad contingente temporal diferida de la que habla Bowers et al. (1997) es:

$$P({}_n|\ddot{a}_x) = \frac{A_{x:\overline{n}|}^1 \ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Notar, que en las últimas ecuaciones se considera una tasa fija donde los pagos anticipados son iguales y se realizan en intervalos equidistantes. Sin embargo, dada la variabilidad de los rendimientos del fondo por una tasa i_k , se genera un pago distinto C_k para cada periodo. Por consiguiente se define de la siguiente ecuación:

$$v_{i_k}^{n-k} {}_{n-k} p_{x+k} B_y = C_k \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|i_k} + H_k \quad (3.8)$$

para $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$

Donde cada término representa lo siguiente:

$v_{i_k}^{n-k}$:= Factor de descuento $n - k$ periodos calculado con i_k .

C_k := Contribución realizada al fondo a la edad $x + k$.

$\ddot{a}_{x:\overline{n-k}|i_k}$:= Anualidad anticipada de $n - k$ periodos con una tasa i_k .

H_k := Balance en el fondo en el periodo k .

Sustituyendo y despejando (3.8), se tiene:

$$C_k = \frac{A_{x+k:\overline{n-k}|} B_y - H_k}{\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|i_k}} \quad (3.9)$$

Donde el monto de la contribución se realiza de manera anticipada y es determinado por la valoración de la tasa al periodo k , considerando el plazo a cubrir. De forma que, se genera un esquema de las aportaciones anuales requeridas año por año, durante el tiempo de actividad laboral, para analizar su comportamiento.

Periodo	Edad	Tasa de Interés t_i	v^{t^*}	$\gamma_x P_x$	$\ddot{a}_{x:\overline{n} }$	Acumulado	Pago i	Balance del fondo
0	30	3.4687%	0.35953	0.8505352	18.39129	\$ -	\$ 66,474.42	\$ 66,474.42
1	31	3.8260%	0.33661	0.8518198	17.33707	\$ 68,884.08	\$ 62,148.14	\$ 131,032.23
2	32	3.2896%	0.40403	0.8532054	17.98218	\$ 136,266.76	\$ 69,063.53	\$ 205,330.29
3	33	3.6964%	0.37530	0.8547002	16.85039	\$ 212,456.51	\$ 63,499.19	\$ 275,955.70
4	34	3.8585%	0.37368	0.8563135	16.20754	\$ 286,696.23	\$ 61,244.19	\$ 347,940.42
5	35	3.7159%	0.40166	0.8580545	16.04176	\$ 362,100.54	\$ 63,322.55	\$ 425,423.09
6	36	3.4291%	0.44522	0.8599344	16.05560	\$ 442,198.18	\$ 67,794.15	\$ 509,992.33
7	37	3.7565%	0.42820	0.8619634	15.16010	\$ 528,725.03	\$ 62,460.92	\$ 591,185.95
8	38	3.9646%	0.42512	0.8641540	14.47279	\$ 614,952.66	\$ 58,993.45	\$ 673,946.11
9	39	3.6782%	0.46834	0.8665196	14.37558	\$ 702,583.70	\$ 63,990.84	\$ 766,574.54
10	40	3.9292%	0.46265	0.8690747	13.63978	\$ 797,114.38	\$ 59,413.30	\$ 856,527.68
11	41	3.5162%	0.51861	0.8718350	13.58968	\$ 893,009.29	\$ 67,305.72	\$ 960,315.01
12	42	3.8988%	0.50235	0.8748181	12.72704	\$ 997,482.82	\$ 59,676.42	\$ 1,057,159.24
13	43	3.8844%	0.52317	0.8780423	12.24090	\$ 1,102,424.07	\$ 59,971.88	\$ 1,162,395.95
14	44	4.0190%	0.53235	0.8815278	11.62521	\$ 1,212,342.10	\$ 57,104.33	\$ 1,269,446.43
15	45	3.4524%	0.60103	0.8852974	11.48066	\$ 1,326,111.65	\$ 69,783.83	\$ 1,395,895.49
16	46	2.9231%	0.66807	0.8893716	11.22515	\$ 1,450,732.91	\$ 82,378.71	\$ 1,533,111.62
17	47	3.3329%	0.65298	0.8937851	10.34937	\$ 1,585,756.43	\$ 72,233.21	\$ 1,657,989.64
18	48	3.4174%	0.66816	0.8985628	9.67294	\$ 1,722,406.15	\$ 70,083.20	\$ 1,792,489.35
19	49	3.7238%	0.66886	0.9037367	8.89997	\$ 1,864,419.11	\$ 62,053.67	\$ 1,926,472.78
20	50	3.2109%	0.72903	0.9093419	8.41616	\$ 2,010,603.85	\$ 76,020.67	\$ 2,086,624.52
21	51	3.3196%	0.74534	0.9154175	7.67530	\$ 2,168,013.57	\$ 72,938.05	\$ 2,240,951.62
22	52	3.4519%	0.76224	0.9220052	6.91746	\$ 2,332,003.59	\$ 69,063.71	\$ 2,401,067.29
23	53	2.7742%	0.82568	0.9291532	6.28532	\$ 2,503,206.88	\$ 89,730.71	\$ 2,592,937.59
24	54	2.7834%	0.84813	0.9369127	5.47614	\$ 2,687,125.07	\$ 89,439.14	\$ 2,776,564.21
25	55	3.6322%	0.83662	0.9453404	4.56955	\$ 2,879,516.61	\$ 61,810.13	\$ 2,941,326.74
26	56	3.1817%	0.88225	0.9545008	3.75863	\$ 3,077,698.23	\$ 76,897.99	\$ 3,154,596.22
27	57	3.1870%	0.91018	0.9644637	2.87596	\$ 3,288,939.36	\$ 76,712.10	\$ 3,365,651.46
28	58	2.6449%	0.94913	0.9753081	1.96257	\$ 3,511,964.44	\$ 96,276.45	\$ 3,608,240.89
29	59	3.2782%	0.96826	0.9871210	1.00000	\$ 3,748,533.82	\$ 72,700.58	\$ 3,821,234.40
30	60	-	-	-	-	\$ 3,997,991.65	\$ -	\$ 3,997,991.65

Figura 3.7: Contribuciones por año

3.2.4. Determinación de la contribución fija

Lo que se pretende es encontrar una contribución fija, la cual sea equivalente a las contribuciones variables realizadas al fondo durante el periodo de acumulación, bajo un indicador: el *Valor Neto Actual*, definido como el valor presente de una serie de flujos futuros.

Para ello, sea “ C ” la contribución fija y C_k la aportación al fondo en el k -ésimo periodo; entonces, se define D_k como la diferencia entre estas últimas

dos variables:

$$D_k = C - C_k, \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots, n - 1 \quad (3.10)$$

Por los Axiomas de Orden de los números reales, existen tres opciones posibles para D_k :

$$\text{si } C > C_k \Rightarrow D_k > 0 \Rightarrow \text{ganacia}$$

$$\text{si } C < C_k \Rightarrow D_k < 0 \Rightarrow \text{pérdida}$$

y

$$\text{si } C = C_k \Rightarrow D_k = 0 \Rightarrow \text{breakeven}$$

Lo que indica que se puede tomar las D_k 's como futuros flujos, de tal forma que:

$$VNA = \sum_{k=0}^{n-1} D_k v^k \quad (3.11)$$

Siendo éste, el indicador utilizado y siguiendo con el ejemplo, se considera una tasa de retorno del 10% con fines ilustrativos. De tal manera, se pretende encontrar C tal que:

$$VNA = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} (C - C_k) v^k = 0 \quad (3.12)$$

Lo que se genera es un problema de raíces, que se puede resolver por medio de una interpolación. Para ello, se utiliza la herramienta *Goal Seek*¹⁶ en Excel; donde C es la variable independiente, que toma el valor del promedio de las C_k 's como punto de partida; la función objetivo es (3.12) con el valor

¹⁶Encuentra el valor de una variable independiente que cumpla un valor específico en una función; modificando la variable independiente; bajo un número de iteraciones o alcanzado el valor objetivo con un error aceptado.

cero, y se acepta un error de 0.001. En consecuencia, el resultado arrojado de la contribución fija anual es $C = \$ 65,720.16$ como se observa en la siguiente tabla:

Periodo k	C_k	C	D_k
0	\$66,474.42	\$65,720.16	-\$ 754.26
1	\$62,148.14	\$65,720.16	\$ 3,572.01
2	\$69,063.53	\$65,720.16	-\$ 3,343.38
3	\$63,499.19	\$65,720.16	\$ 2,220.96
4	\$61,244.19	\$65,720.16	\$ 4,475.97
5	\$63,322.55	\$65,720.16	\$ 2,397.61
6	\$67,794.15	\$65,720.16	-\$ 2,074.00
7	\$62,460.92	\$65,720.16	\$ 3,259.24
8	\$58,993.45	\$65,720.16	\$ 6,726.71
9	\$63,990.84	\$65,720.16	\$ 1,729.32
10	\$59,413.30	\$65,720.16	\$ 6,306.86
11	\$67,305.72	\$65,720.16	-\$ 1,585.56
12	\$59,676.42	\$65,720.16	\$ 6,043.74
13	\$59,971.88	\$65,720.16	\$ 5,748.28
14	\$57,104.33	\$65,720.16	\$ 8,615.83
15	\$69,783.83	\$65,720.16	-\$ 4,063.68
16	\$82,378.71	\$65,720.16	-\$16,658.55
17	\$72,233.21	\$65,720.16	-\$ 6,513.05
18	\$70,083.20	\$65,720.16	-\$ 4,363.04
19	\$62,053.67	\$65,720.16	\$ 3,666.49
20	\$76,020.67	\$65,720.16	-\$10,300.51
21	\$72,938.05	\$65,720.16	-\$ 7,217.89
22	\$69,063.71	\$65,720.16	-\$ 3,343.55
23	\$89,730.71	\$65,720.16	-\$24,010.56
24	\$89,439.14	\$65,720.16	-\$23,718.98
25	\$61,810.13	\$65,720.16	\$ 3,910.03
26	\$76,897.99	\$65,720.16	-\$11,177.84
27	\$76,712.10	\$65,720.16	-\$10,991.94
28	\$96,276.45	\$65,720.16	-\$30,556.29
29	\$72,700.58	\$65,720.16	-\$ 6,980.42

Figura 3.8: Tabla de diferencias

Es decir, en el escenario descrito bajo los supuestos contemplados, una contribución anual de \$ 65,720.16, alcanzaría para obtener una pensión del 70 % para una persona que se piensa retirar a los 60 años; cuya edad y sueldo al iniciar el plan es de 30 años y \$ 20,000.00.

3.2.5. Proceso de simulación

Todo este proceso ha sido para generar un solo esquema de aportaciones al fondo y una contribución fija equivalente a éstas, pero qué pasaría si se tuviera la noción de 100, 1000, 10,000 o cuantos esquemas posibles se puedan.

Sucede que a mayor información se disminuye el error de un pronóstico; por ello, se hace uso de una simulación, la cual es un método de repetición basado en el modelo de un sistema (comportamiento del fondo) que depende de variables aleatorias como factores de cambio (incremento salarial, mortalidad y tasa de interés). De tal forma que, dado un número suficientemente grande de repeticiones o distintos escenarios sujetos a cambios en las variables, se puede describir el comportamiento del sistema global; que en este caso, produce una variable de interés: la contribución fija.

Así, se genera una simulación de 10,000 diferentes escenarios, que produce la siguiente gráfica:

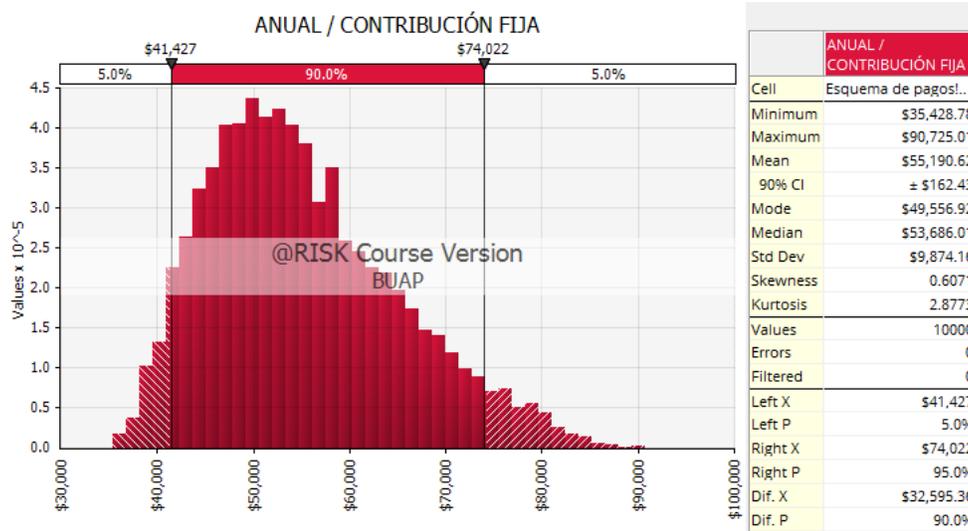


Figura 3.9: Gráfico de simulación.

Bajo una perspectiva probabilística, notar que C tiene una distribución sesgada a la izquierda parecida a una triangular; o aún mejor, a una gamma. No obstante, no se pretende ajustar los datos a una distribución paramétrica, sino más bien, analizarlos por sí solos. En consecuencia, se puede decir que C tiene una media de \$ 55,190.62 y una desviación estándar de \$ 9,874.16. Además, se encuentra entre \$ 41,427.00 y \$ 74,022.00 con un 90 % de confianza, lo que implica que el percentil 0.95 es 74,022.00. Esto quiere decir, que en la simulación presentada en el 95 % de los casos, C tiene un valor por debajo de 74,022.00.

3.3. Propuesta del derivado

Suponiendo un fondo real para financiar dicha pensión, se busca fijar C como el punto de equilibrio entre pérdidas y ganancias para alcanzar el beneficio deseado durante el periodo de acumulación. Es por ello, que se propone asociar dicho fenómeno a un derivado, el cual pague o gane la diferencia entre la contribución fija encontrada y la contribución variable del fondo.

Para explicar lo anterior, suponga que se establece un acuerdo entre dos partes: A y B (el comprador y el emisor del derivado respectivamente). Donde A le paga periódicamente a B el monto correspondiente a la contribución fija. Y por otro lado, B adquiere el compromiso de pagar las aportaciones periodo a periodo al fondo, cualesquiera que éstas sean.

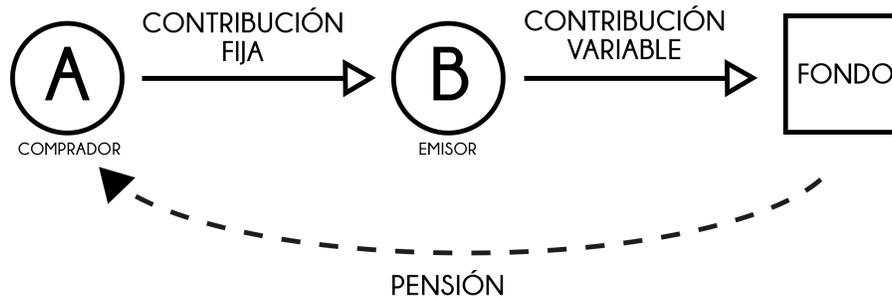


Figura 3.10: Estructura propuesta

La parte B al emitir el derivado, asume el riesgo de que exista una diferencia positiva o negativa, entre ambas cantidades. Por consiguiente, el instrumento derivado¹⁷ toma su valor a partir de C , considerado el activo subyacente.

De esta forma, se propone:

- El *precio de ejercicio* como el percentil 0.95 de $C = \$74,022.00$ anuales para que la parte B soporte el riesgo de solvencia y además genere una utilidad.
- El *precio strike* o spot es la contribución variable que requiere el fondo.

Si se supone, un escenario donde se tenga que pagar $\$75,000.00$ en el fondo, el emisor tendría un déficit igual a la diferencia $\$75,000.00 - \$74,022.00 = \$988.00$. Por otro lado, si se supone que se debe pagar un monto

¹⁷Si se busca un rendimiento esperado sobre este instrumento financiero, es necesario contemplarlo como un cargo extra sobre C definida.

menor al obtenido por el modelo, entonces el emisor tendría un superávit dado por la diferencia entre estos valores.

El derivado se propone como un instrumento de *gestión de riesgo* para el patrocinador del plan, el cuál sería el comprador del derivado. Y se presenta como una *oportunidad de inversión* para el vendedor del derivado.

Riesgos en perspectiva

La expectativa de la tasa de interés considerando el modelo Vasicek, es de un comportamiento con regresión a la media; aún cuando ésta varíe en intervalos distintos. Así, es posible realizar estudios y análisis más profundos para perspectivas de tasas a la alza y a la baja donde es necesario otro tipo de modelo matemático.

De cualquier modo, los posibles escenarios respecto al pronóstico de la tasa pueden ser:

1. Si se sobrestima la tasa de interés, el pago es menor al requerido y puede provocar un problema de financiamiento.
2. Si se subestima la tasa de interés, significa que el pago es mayor a lo que requiere y en consecuencia puede generar un problema de flujo.

Por otro lado, dado que el modelo establece la contribución como una cantidad fija, existe la desventaja de que el valor real de las contribuciones disminuya a través del tiempo si la inflación es positiva. Para poder evitar esto, se puede extender el modelo a una contribución que crezca conforme a la inflación.

Capítulo 4

Conclusiones

- Al definir el derivado con base en el percentil 95 de la distribución aproximada de la contribución fija anual, se realiza una estimación puntual para poder asignarle un valor al precio de ejercicio. Sin embargo, se podría considerar un intervalo de confianza construyendo un nuevo estadístico en base a la distribución obtenida por el modelo.
- Es posible que las aportaciones tengan una tendencia creciente, de tal forma que sería conveniente asociar una tasa de aportación fija con respecto al salario, en lugar de establecer una contribución fija.
- Se debe suponer en el modelo que las decisiones del Banco Central respecto a la política monetaria implementada en el país afectan directamente a las tasas de interés provocando cambios abruptos de dirección respecto a su tendencia, o saltos considerables que no son reconocidos por el modelo de pronóstico.
- Una de las ventajas que genera esta metodología es la simplificación para el aportador al no involucrarse en temas actuariales más complejos. Sin tener mayor conocimiento que el monto de la contribución fija para obtener un beneficio definido deseado.
- Los supuestos empleados se exponen de manera metodológica en el procedimiento para entender la estructura de la estrategia, dado el carácter académico del proyecto. Sin embargo, se deja a la práctica analizarlos con mayor profundidad con base en datos específicos de una entidad.

Finalmente, el actuario tiene la capacidad de prevenir situaciones de descontrol financiero; en el caso particular de los planes de pensiones, al margen de distintos aspectos económicos, demográficos, legales, entre otros. Es por ello, que busca proyectar a futuro y haciendo pronósticos; pero también se encuentra con un gran reto al lidiar con resultados que no fueron parecidos a los esperados y aún así seguir con el objetivo planteado. Razón para estar en constante seguimiento de los planes establecidos de manera que se puedan ajustar a las necesidades de los individuos a través del tiempo en el marco legal y factible sobre las condiciones de mercado.

Referencias bibliográficas

- Abreu, G., Acosta, M., Álvarez, C., et al. (2014). *El mercado de valores gubernamentales en México*. Banco de México.
- Aguirre Farías, F. M. (2012). *Pensiones... ¿y con qué?* Fineo Editores, México.
- Anderson, A. W. (2006). *Pension mathematics for actuaries*. Actex Publications.
- Booth, P., Chadburn, R., Haberman, S., James, D., Khorasane, Z., Plumb, R. H., and Rickayzen, B. (2004). *Modern actuarial theory and practice*. CRC Press.
- Bowers, N., Gerber, H., Hickman, J., Jones, D., and Nesbitt, C. (1997). *Actuarial mathematics*. Society of Actuaries.
- Cardona, L. G. H. and Giraldo, D. C. (2013). Modelos de valoración de opciones sobre títulos de renta fija: aplicación al mercado colombiano. *Estudios Gerenciales*, 29(126):77–85.
- Dickson, D. C., Hardy, M. R., Hardy, M., and Waters, H. R. (2013). *Actuarial mathematics for life contingent risks*. Cambridge University Press.
- Egido, E. M. (1999). *Estudio analítico y numérico de ecuaciones diferenciales estocásticas: Aplicación a la Mecánica Estadística*. PhD thesis, Universidad Carlos III de Madrid.
- Gerber, H. U. (1997). *Life Insurance Mathematics*. Springer.

Apéndices

Apéndice A

Conceptos importantes

A.1. Método Vasicek

En el año de 1997, Oldrich Vasicek modeló el precio de un bono con la tasa de interés estocástica; donde supone que la tasa $r(t)$, se asocia a un proceso Ornstein Uhlenbeck cuya volatilidad es constante:

$$dr(t) = [\alpha - \beta r(t)]dt + \rho dW(t),$$

$$r(t_o) = r_o$$

Esta ecuación diferencial estocástica es conocida como el modelo Vasicek, donde $t \geq 0$; α , β y ρ constantes positivas; $W(t)$ es un movimiento Browniano; y r_o es una tasa de referencia inicial. Resulta, que la solución a dicha ecuación, es la tasa spot $r(t)$ definida a continuación:

$$r(t) = r_e + (r_o - r_e)e^{-\alpha t} + \frac{\sigma e^{-\alpha t} \sqrt{e^{2\alpha t} - 1}}{\sqrt{2\alpha}} Z \quad (\text{A.1})$$

donde:

$$Z \sim N(0, 1)$$

Y funciona considerando un *mercado eficiente*, lo que significa que todos los involucrados en el mercado financiero cuentan con acceso a la misma información. De esta forma no hay arbitraje.

A.2. Anualidades utilizadas

Anualidad vitalicia: provee de pagos equidistantes de 1 unidad mientras el beneficiario viva.

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x$$

Anualidad temporal: provee de pagos equidistantes durante n periodos.

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_k p_x$$

A.3. UDIBONOS

Los Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal denominados en unidades de inversión tienen su origen desde mayo de 1996 y cuentan con la particular característica de proteger al tenedor de la inflación. Ya que pagan intereses semestralmente con base en una tasa real fija que se define al momento de emitir el bono. Son colocados a largos plazos como 3, 10 y 30 años, donde el Banco de México funge como agente financiero. Su valor nominal es de 100 udis.

Apéndice B

Código

```
Sub OptimizeVBA(isOn As Boolean)
    Application.EnableEvents = Not (isOn)
    Application.ScreenUpdating = Not (isOn)
    ActiveSheet.DisplayPageBreaks = Not (isOn)
    Application.Calculation = xlCalculationAutomatic
End Sub

Sub esquema()
Dim z As Single, kpx As Double, vk As Single
Dim p As Double, acumulado As Double, ta As Single
Dim balance As Double, t0 As Double
Dim d As Double, c As Double, factor As Double

OptimizeVBA True
Application.Calculation = xlCalculationAutomatic

ActiveWorkbook.Sheets("Esquema_de_pagos").Activate
'Limpiar esquema
Range("G11:H110").ClearContents
Range("J11:K110").ClearContents
Range("F11:p110").Select
    With Selection.Interior
        .Pattern = xlNone
        .TintAndShade = 0
        .PatternTintAndShade = 0
    End With
```

```

Range("B10").Select
'Variables globales para generar esquema
edad = Range("B12").Value
y = Range("B15").Value
n = Range("B18").Value
Range("B22") = Risk.Sample("RiskTriang(0,0.021,0.0578)")
factor = Risk.Sample("RiskNormal(14.34925,0.58218)")
Range("B27").Value = factor
by = Range("B26").Value
'Parametros estimados para simular tasas
re = Range("H3").Value
sigma = Range("H4").Value
alfa = Range("H5").Value

'Generacion de esquema de pagos
For i = 1 To n
  If i = 1 Then
    Range("G" & 10 + i).Value = edad
    t0 = Range("H6")
    z = Risk.Sample("RiskNormal(0,1)")
    t = re + (t0 - re) * Exp(-alfa) + sigma * Exp(-alfa) * Sqr(
      Exp(2 * alfa) - 1) * z / Sqr(2 * alfa)
    Range("H" & 10 + i) = t
  Else
    Range("G" & 10 + i).Value = edad - 1 + i
    'Simular tasa
    z = Risk.Sample("RiskNormal(0,1)")
    t = re + (t - re) * Exp(-alfa) + sigma * Exp(-alfa) * Sqr(
      Exp(2 * alfa) - 1) * z / Sqr(2 * alfa)
    Range("H" & 10 + i) = t
    ta = Range("H" & 9 + i)
  End If

  x = Range("G" & 10 + i).Value
  'Obtener kpx y anualidad
  ActiveWorkbook.Sheets("Tabla_de_mortalidad").Range("B1") = t
  ActiveWorkbook.Sheets("Tabla_de_mortalidad").Range("B2") = x
  ActiveWorkbook.Sheets("Tabla_de_mortalidad").Range("B3") = y
  - x
  mortalidad
  kpx = ActiveWorkbook.Application.WorksheetFunction.VLookup(
    Range("B3"), Range("D6:F95"), 3, True)
  ActiveWorkbook.Sheets("Esquema_de_pagos").Activate
  Range("J" & 10 + i) = kpx

```

```

Range("K" & 10 + i) = anualidad

'Destacar acumulado en fondo
If i = n Then
Range("N" & 10 + i).Select
With Selection.Interior
    .Pattern = xlSolid
    .PatternColorIndex = xlAutomatic
    .Color = 49407
    .TintAndShade = 0
    .PatternTintAndShade = 0
End With
End If
Next

'Formula VNA monto fijo
Range("P2").Select
ActiveCell.FormulaR1C1 = "=NPV(R[1]C,R[9]C:R[" & 8 + n & "]C)"
'Valor inicial para la contribucion
procon = Application.WorksheetFunction.Average(Range("M11:M"
& 10 + n))
Range("N6") = procon
'Goal seek contribucion fija
ActiveWorkbook.Sheets("Esquema_de_pagos").Activate
Range("P2").GoalSeek goal:=0.001, ChangingCell:=Range("N6")

'Formula VNA tasa fijo
Range("R7").Select
ActiveCell.FormulaR1C1 = "=NPV(R[1]C,R[4]C:R[" & 3 + n & "]C)"
'Valor inicial para la tasa
Range("E6").Select
ActiveCell.FormulaR1C1 = "=AVERAGE(R[5]C:R[" & 4 + n & "]C)"
Range("E5").Select
ActiveCell.FormulaR1C1 = "=MIN(R[6]C:R[" & 5 + n & "]C)"
Range("E4").Select
ActiveCell.FormulaR1C1 = "=MAX(R[7]C:R[" & 6 + n & "]C)"
prota = Application.WorksheetFunction.Average(Range("E11:E"
& 10 + n))
Range("N7") = prota
'Goal seek tasa fija
ActiveWorkbook.Sheets("Esquema_de_pagos").Activate
Range("R7").GoalSeek goal:=0.001, ChangingCell:=Range("N7")

```

```

OptimizeVBA False
End Sub

Sub limpiar ()
    'Limpiar esquema
    ActiveWorkbook.Sheets("Esquema_de_pagos").Activate
    Range("G11:H110").ClearContents
    Range("J11:K110").ClearContents
    Range("N11:N110").Select
        With Selection.Interior
            .Pattern = xlNone
            .TintAndShade = 0
            .PatternTintAndShade = 0
        End With
    Range("E4:E6").ClearContents
    Range("B10").ClearContents
    Range("B12:B14").ClearContents
    Range("B18").ClearContents
    Range("B22").ClearContents
    Range("B27").ClearContents
    Range("Q7").ClearContents
    Range("P2").ClearContents
    Range("R7").ClearContents
End Sub

Sub mortalidad ()

Dim tasa As Double, e As Integer, aos As Integer
ActiveWorkbook.Worksheets("Tabla_de_mortalidad").Activate

    'Asignacion de variables
    tasa = Range("B1")
    e = Range("B2")
    aos = Range("B3")
    Sheets("Tabla_de_mortalidad").Range("G4").FormulaR1C1 = "=SUM(R[
        " & e - 9 & "]C[0]:R[" & e - 10 + aos & "]C[0])"
    anualidad = Application.WorksheetFunction.Sum(Range(Cells(e - 5,
        7), Cells(e - 6 + aos, 7)))
    Range("G2") = anualidad

End Sub

```