BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Un enfoque de la teoría de riesgo a través del Modelo Binomial Compuesto

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADA EN ACTUARÍA

PRESENTA

Karina Monserrat Morales Atenco

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Hugo Adán Cruz Suárez

PUEBLA, PUE. NOVIEMBRE 2018

A mis padres.

Agradecimientos

Las palabras no son suficientes para agradecer a mis padres, Luz y Victor, el apoyo incondicional, esfuerzo, paciencia y amor que recibí durante mi carrera universitaria, en la realización de este trabajo y que recibo todos los días. Por ser tan afortunada de tenerlos a mi lado aunque casi nunca se los diga.

A mi hermana Pamela, por ser mi mejor amiga, aguantar mi mal humor y siempre hacerme reír. Por darme ánimos, apoyarme y creer en mí. A Milton por su ayuda constante y apoyo técnico. A mis sobrinos Meli y Maxi por terminar varias veces con mi paciencia, no dejarme estudiar, desordenar mi cuarto pero sobre todo porque siempre me hacen muy muy feliz.

A mi asesor de tesis, el Dr. Hugo Adán Cruz Suárez, a quien admiro profundamente; por enseñarme Procesos Estocásticos I, II y Cálculo Estocástico. Por permitirme trabajar con él desde Jóvenes Investigadores, en el servicio social y durante la realización de este trabajo; tenerme mucha paciencia, su continua asesoría y gran apoyo.

A todos los amigos que he conocido en esta Facultad, en especial a los que aún lo siguen siendo. Hicieron muy agradable mi larga estancia en la licenciatura.

A mis sinodales la Dra. Hortensia J. Reyes Cervantes, a la Mtra. Brenda Zavala López y al Dr. Francisco S. Tajonar Sanabria, por impartirme clase, compartir sus conocimientos y revisar este trabajo. También a todos los profesores con los que tome clase y se esmeraban por trasmitir sus conocimientos.

Muchas gracias.

Índice general

Un enfoque de la teoría de riesgo a través del Modelo Binomial Compuesto

Karina Monserrat Morales Atenco

Octubre 2018

Introducción

El concepto de ***riesgo*** tiene una amplia definición dependiendo del tema en el que sea utilizado. Así que en general, podría definirse como la posibilidad de que ocurra algún daño en un evento dado como consecuencia de la vulnerabilidad a la que se esta expuesto. Por ejemplo, un campesino corre el riesgo de perder su cultivo por diferentes factores como las heladas, lluvias, etc. pero al mismo tiempo, tiene la posibilidad de obtener una buena cosecha que le genere una ganancia.

Por otro lado, un seguro se define como un contrato en el que el *asegurador* tiene la obligación de indemnizar al *asegurado* si sufre algún siniestro a cambio del pago de una suma previamente estipulada en el contrato. De está forma en el área de seguros, el riesgo puede definirse como el monto agregado de las reclamaciones que ingresan a la compañía aseguradora.

Entonces, una compañía de seguros opera de la siguiente manera: un grupo de personas que está expuesto a un tipo determinado de peligro, ya sea un choque de auto, robo, incendio, etc. contratan un seguro donde cada una paga una cantidad fija de dinero por unidad de tiempo, llamada prima; a su vez la compañía aseguradora tiene la obligación de pagar al asegurado el monto total del daño o lo que se ha convenido en la póliza o contrato en caso de un incidente, en el momento en que este ocurre.

Por lo tanto, aunque no se conozca con exactitud cuantas personas requerirán de la protección de la compañía, ni el tamaño total de los daños que ocurrirán, el capital obtenido de las primas colectadas más el capital inicial de la compañía deben ser suficientes para solventar los gastos que se le presenten.

Existe un amplio estudio en la teoría de la ruina para controlar y medir la pérdida generada. Este trabajo se basa en la Teoría de ruina en tiempo discreto [13] y en los artículos: *Mathematical fun with the compound binomial process* [7] y *A review of discrete-time risk models* [16], en donde se propone resultados para los modelos de riesgo en tiempo discreto, el cálculo de la probabilidad de ruina y el modelo binomial compuesto incluyendo algunas extensiones.

El modelo binomial compuesto, es propuesto por primera vez por Hans Ulrich Gerber, un matemático que forma parte del departamento de la ciencia actuarial en la Universidad de Lausanne de Suiza, es investigador, miembro de la Society of Actuaries desde 1974 y asociado redactor del North American Actuarial Journal por sus numerosos artículos en materia de seguros, finanzas, probabilidad, teoría de riesgo, etc. En conjunto con otros investigadores profundiza el tema del modelo binomial compuesto como una aproximación al modelo clásico de riesgo, derivando resultados más allá de las fórmulas recursivas habituales. La investigación de los modelos de riesgo en tiempo discreto sigue siendo foco de gran importancia y el modelo binomial compuesto no es la excepción como se ve en el artículo *On the Compound Binomial Risk Model with Delayed Claims and Randomized Dividennds* [18] del presente año.

Por otra parte, en este trabajo se desarrollan de manera más detallada los resultados de la probabilidad de ruina en tiempo discreto y del proceso de riesgo binomial compuesto y a su vez se elabora un programa en Excel VBA que simula la probabilidad de ruina con el fin de ejemplificar los conceptos establecidos. Así la estructura de este trabajo se conforma por tres capítulos. El Capítulo 1: Preliminares, se aborda de manera introductoria y general los conceptos básicos de probabilidad necesarios para el desarrollo del tema de estudio. Como lo son las variables aleatorias, las funciones generadoras, las distribuciones utilizadas a lo largo de este trabajo, la definición de proceso estocástico y los modelos de riesgo: individual y colectivo; con el fin de brindar un marco teórico breve y conciso para el lector.

En el Capítulo 2: Teoría de ruina en tiempo discreto, se precisa el proceso de riesgo en tiempo discreto, sus características y propiedades. La prueba de las fórmulas recursivas de la probabilidad de ruina en tiempo discreto y algunos problemas que ejemplifican su empleo. Luego se describe el modelo binomial compuesto al igual que sus fundamentos y se deriva la probabilidad de ruina de este proceso de manera alternativa al de sus fórmulas recursivas con el uso de un singular resultado, fijando el análisis de manera más amplia.

Por otro lado, se elaboró un programa en Excel para simular la probabilidad de ruina como modelo de riesgo en tiempo discreto, en donde se propone al lector una manera dinámica de familiarizarse y asimilar los temas vistos en el Capítulo 2. Se ha denominado a lo largo de este trabajo como *"Simulador de ruina"* ya que proporciona la probabilidad de ruina de algunos ejemplos vistos y el caso particular de los datos de una aseguradora utilizando la herramienta @Risk del software Palisade Decision Tools.

Así mismo, en el Capítulo 3: Aplicaciones, se explica los tres bloques que conforman al *Simulador de ruina*, se expone el procedimiento de su elaboración, los factores y resultados que intervienen en su uso.

Antecedentes

La teoría de riesgo se ha definido de forma general por varios autores como la rama de la ciencia actuarial que proporciona un análisis matemático de las fluctuaciones aleatorias de los seguros y modela los elementos que los integran, como el número y montos de los siniestros para su protección ante efectos desfavorables.

Algunos de los precursores de la teoría de riesgo es Edmund Halley al desarrollar su tabla de mortalidad en 1693 y Daniel Bernoulli al exponer y aplicar la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre. En 1909 Georg Bohlmann realiza una recopilación de los resultados más importantes de la teoría de riesgo y observa las fluctuaciones aleatorias de las pólizas individuales; hasta ese momento el enfoque del modelo individual de riesgo era el que se empleaba para modelar los portafolios.

Por otro lado, en 1903 Filip Lundberg presenta por primera vez el modelo de riesgo colectivo y el proceso Poisson compuesto pero es hasta 1909 que plantea completamente la teoría de su modelo. Esta era una teoría innovadora puesto que incluía el factor del tiempo como variable aleatoria a diferencia del modelo individual. De este enfoque surge la *probabilidad de ruina*; brindando información para medir las reservas de la compañía para afrontar el fluctuante ingreso de las reclamaciones. Lundberg empleó procesos estocásticos en tiempo continuo mucho antes de que el concepto fuera definido con claridad, la sintaxis estrictamente actuarial en el tema de seguros impidió que otros matemáticos no familiarizados con el tema le dieran la relevancia adecuada, así que su teoría fue relegada por 20 años.

A principios de la década de 1930, Harald Cramér reescribe el trabajo de Lundberg en el contexto de los procesos estocásticos, puesto que recién se había formalizado, y se establece la teoría clásica de ruina, como modelo de Cramer- Lundberg o modelo clásico Poisson compuesto [9].

En 1957 Bruno de Finneti da paso a la teoría moderna de riesgo, así como E. Sparre Andersen al extender el modelo clásico de riesgo en donde permite las reclamaciones intermedias entre cada unidad tiempo, este modelo tiene gran atención en años recientes; además se da paso a nuevos problemas como el cálculo de reservas; a su vez, Hans Ulrich Gerber propone por primera vez el modelo binomial compuesto como un modelo discreto análogo al clásico de Poisson compuesto [8] y lo utiliza como aproximación del mismo en el artículo **Mathematical fun with the compound binomial process** [7].

Posteriormente, el planteamiento de la teoría del modelo binomial compuesto toma gran atención por algunos autores de las últimas décadas. Tal es el caso de Elias. S. Shiu que en 1989, define la ruina como un evento en el que el superávit sea estrictamente negativo, en comparación de Gerber y elabora su propia versión del Modelo de Gerber en el artículo *The probability of eventual ruin in the compound binomial model* [15]. Otros autores que continuaron la investigación relacionada a este tema son Shixue Cheng, Shuanming Li y José Garrido [16]. El artículo *On the Compound Binomial Risk Model with Delayed Claims and Randomized Dividends* [18] muestra que el estudio del modelo binomial compuesto sigue vigente en la actualidad.

Justificación

El estudio constante a lo largo del tiempo con respecto a los fundamentos de la teoría de riesgo ha permitido la innovación de estrategias favorables para contrarrestar los efectos que conlleva la incertidumbre en el entorno. Así, el análisis de modelos diferentes al modelo clásico da nuevos enfoques útiles para calcular la probabilidad de ruina y muestra una mayor diversidad de soluciones en los diferentes problemas que se enfrentan habitualmente las compañías aseguradoras. De acuerdo con esto, un gran número de modelos teóricos de riesgo se basan en la continuidad del tiempo pero en su práctica cotidiana suele ser discreta. Los resultados en tiempo discreto pueden ser útiles como aproximaciones o cotas en sus análogos resultados continuos. Así que los modelos discretos, en particular el Modelo Binomial Compuesto, brindan respuestas reales más allá que solo sus definiciones formales.

Objetivos

El **objetivo general** es estudiar la probabilidad de ruina en tiempo discreto incluyendo el Modelo Binomial Compuesto; su teoría y funcionamiento, así como sus características. Comprobar que los modelos discretos son de gran importancia y en su manejo son más sencillos de abordar que sus análogos continuos y pueden emplearse en situaciones reales y no solo teóricas.

El **objetivo específico** es optimizar la probabilidad de ruina mediante la extensión VBA(Visual Basic for Applications) del programa de Microsoft Excel y @Risk una herramienta especializada en riesgo de Palisade Decision Tools y analizar sus resultados.

Capítulo 1

Preliminares

El contenido de este capítulo se basa en las siguientes referencias: [2], [5], [11], [12] y [14].

1.1. Propiedades básicas de probabilidad

Un experimento aleatorio es aquel que admite repetición bajo las mismas condiciones, posee más de un resultado y que al realizarlo no se sabe con exactitud cuál de ellos ocurrirá. Un espacio de probabilidad, denotado por $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, es la terna conformada por el conjunto arbitrario Ω conocido como espacio muestral; $\mathfrak{F}$ la σ-*álgebra* de subconjuntos de Ω y P es una medida de probabilidad definida sobre $\mathfrak{F}$, es decir, que la función P esta definida sobre una σ-*álgebra* $\mathfrak{F}$, toma valores en el intervalo $[0, 1]$ con $P(\Omega) = 1$ y es σ-aditiva bajo las uniones numerables de conjuntos ajenos.

Una variable aleatoria X es una función medible que va del espacio muestral al conjunto de los números reales, denotados por $\mathbb{R}$, es decir,

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

tal que:

$$\forall r \in \mathbb{R}, \quad \{w \in \Omega | X(w) \leq r\} \in \mathfrak{F}.$$

El conjunto de posibles valores que puede tomar X se le denomina *rango* o *recorrido* de X y lo denotaremos por R_x.

La variable aleatoria X es *discreta* si R_x es un conjunto finito o infinito numerable. Por otra parte, se dice que X es una variable aleatoria *continua* si R_x es un conjunto infinito no numerable.

Función de distribución

Toda variable aleatoria X tiene asociada una función de distribución tal que, $F : \Re \rightarrow [0,1]$ es una función que se define de la siguiente manera:

$$F(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esta función nos dice que x, como argumento de la función, puede tomar cualquier valor real, por esta razón también se le conoce como **función de distribución acumulada**.

Además, si X es una variable aleatoria discreta

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{-\infty}^{x} p(x),$$

en donde la función $p(x)$ corresponde a la función de probabilidad o función de masa de X.
Si X es una variable aleatoria continua

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\, ds,$$

en donde $f(s)$ representa la función de densidad.

En ambos casos, la función $f(\cdot)$ representa la función de probabilidad de X, ya que caracteriza su comportamiento o distribución. Dicha función es no negativa y

$$\sum_{x \in R_x} f(x) = 1.$$

Así mismo, se dice que una variable aleatoria que es discreta en una parte de su dominio y es continua en el resto del dominio, se le conoce como variable aleatoria mixta.
Algunas propiedades importantes de la función de distribución, son enunciadas a continuación.

1. F es una función no decreciente.

2. F es continua por la derecha.

3. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Esperanza

La **esperanza** de una variable aleatoria, denotado por $E(X)$, es el promedio ponderado de todos los posibles valores en el dominio.
También se le conoce por el nombre de valor esperado, media o valor promedio y de igual manera se puede denotar por μ.

Si X es una variable aleatoria discreta, la esperanza se define por:

$$E(X) = \sum_{x \in R_x} xp(x),$$

siempre que

$$\sum_{x \in R_x} |x|p(x) < +\infty.$$

Por otro lado, si X es una variable aleatoria continua, el valor esperado se define como:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\, dx,$$

siempre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)\, dx < \infty.$$

Propiedades

Sean X y Y variables aleatorias con esperanza finita y sea $\lambda \in \mathbb{R}$ una constante. Entonces

1. Si $X \geq 0$ entonces $E(X) \geq 0$.
2. Si $X \leq Y$ entonces $E(X) \leq E(Y)$.
3. $E(\lambda) = \lambda$.
4. $E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y)$.

La **covarianza** es otro término importante, que indica la variación conjunta de dos variables aleatorias respecto a sus medias. La covarianza de X y Y denotada por $Cov(X, Y)$ es el número

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y),$$

y puede ser un valor positivo o negativo.

Momentos de una variable aleatoria

Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria (discreta o continua) el *k-ésimo* momento de X, se denota con $E(X^k)$ y se define:

$$E(X^k) = \begin{cases} \sum_x x^k p(x), & \text{si X es v.a. discreta,} \\ \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\, dx, & \text{si X es una v.a. continua.} \end{cases}$$

Siempre que la serie infinita y la integral impropia sean absolutamente convergentes. El *k-ésimo* momento también se denota como $\mu_k = E(X^k)$.

Ahora definamos el *k-ésimo* momento central de X o el *k-ésimo* momento de X alrededor de la media μ

$$\mu^k = E[(X-\mu)^k] = \begin{cases} \sum_x (x-\mu)^k p(x), & \text{si X es v.a. discreta,} \\ \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^k f(x)\, dx, & \text{si X es una v.a. continua,} \end{cases}$$

siempre que

$$\sum_x |x-\mu|^k p(x) < \infty$$

y

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x-\mu|^k f(x)\, dx < \infty.$$

Se puede notar que el primer momento es la esperanza y el segundo momento central es la varianza.

Varianza

Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria (discreta o continua). La varianza de X, se denota con $V(X)$, $\mathrm{Var}(X)$ o σ^2, y se define como:

$$V(X) = E[(X - E(X))^2].$$

Al simplificar esta expresión se puede obtener un resultado más sencillo, como a continuación se muestra:

$$\begin{aligned} V(X) &= E[X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2] \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + (E(X))^2 \\ &= E(X^2) - (E(X))^2. \end{aligned}$$

Observación. A la raíz cuadrada positiva de la varianza de X, es decir,

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

se le denomina desviación estándar de X.

Propiedades

Sean X y Y variables aleatorias con varianza finita y sea $\lambda \in \mathbb{R}$ una constante, entonces:

1. $V(X) \geq 0$.
2. $V(\lambda) = 0$.
3. $V(X + \lambda) = V(X)$.
4. $V(\lambda X + Y) = \lambda^2 V(X) + V(Y) + 2\lambda Cov(X, Y)$.

1.2. Funciones generadoras

En éste apartado se presenta un breve resumen para recordar las características de las funciones generadoras, las cuales son herramientas fundamentales para el desarrollo de la teoría de la probabilidad de ruina que se emplea en el Capítulo 2.

Función generadora de probabilidad (fgp)

Consideremos una variable aleatoria X con valores enteros positivos y distribución de probabilidad

$$p(x) = P(X = x), \quad x = 1, 2, 3, \cdots .$$

La función generadora de probabilidad (fgp) asociada a la variable X se define como

$$G(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P(X = k), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Es importante observar que el radio de convergencia de esta serie es por lo menos uno, pues para $|t| < 1$,

$$|G(t)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |t|^k P(X = k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = 1.$$

Una de las principales razones por las que se utiliza la fgp, es que al manipularla como serie de potencias facilita la obtención de la media, varianza y momentos factoriales de las distribuciones.
Algunos resultados fundamentales se presentan a continuación.

Propiedades de la fgp.

- Sean X y Y variables aleatorias con valores en $\{0, 1, 2, ...\}$ tales que $G_X(t)$ y $G_Y(t)$ existen y coinciden en algún intervalo alrededor de $t = 0$. Entonces X y Y tienen la misma distribución de probabilidad.

- El *k-ésimo* momento factorial se define como

  $$E[X(X-1)\cdots(X-k+1)] = \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1)\cdots(j-(k+1))p(j) = G^{(k)}(1),$$

  es decir, el *k-ésimo* momento factorial se obtiene al derivar k veces la fgp y haciendo $t = 1$.

- Es posible obtener las probabilidades $p(x)$ de la distribución a partir de la siguiente fórmula:

  $$p(x) = \frac{1}{x!} \frac{d^x G(t)}{dt^x}\bigg|_{t=0}.$$

- Si $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$ son variables aleatorias independientes (v.a.i.) con funciones generadoras $G(X_1), G(X_2), G(X_3), \cdots, G(X_n)$, respectivamente, la fgp de la suma $X = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n$ es el producto de las funciones generadoras respectivas, es decir,

  $$G(X) = G(X_1)G(X_2)G(X_3)\cdots G(X_n).$$

- Sean X y Y v.a.i. con valores en $\{0, 1, 2, ...\}$ y con funciones generadoras de probabilidad

  $$G_X(t) = E(t^X), \quad G_Y(t) = E(t^Y), \quad |t| < 1,$$

  entonces la fgp de la suma es

  $$G_{X+Y}(t) = E(t^{X+Y}) = E(t^X t^Y) = E(t^X)E(t^Y) = G_X(t)G_Y(t).$$

- Si $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$ entonces las variables aleatorias X y Y son independientes. Esta propiedad es recíproca a la propiedad anterior.
- Como consecuencia de las últimas dos propiedades se tiene que si $X_1, X_2, \cdots, X_n$ son v.a.i. con valores en el conjunto $\{0, 1, 2, 3, ...\}$, y fgp $G(t) = E(t^X)$ con $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ entonces

$$E(t^{X_1+X_2+\cdots+X_n}) = G^n(t).$$

Función generadora de momentos (fgm)

La función generadora de momentos (fgm) de una variable aleatoria X es la función

$$M(t) = E(e^{tX}), \quad \text{para} \quad t \in \text{Dom}(M),$$

siempre y cuando la esperanza exista. Donde $\text{Dom}(M)$ es el dominio de la fgm.

Si la función M está definida alrededor de $t = 0$, entonces las series

$$M_x(t) = E(e^{tX}) = E\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n X^n}{n!}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} E(X^n),$$

son convergentes y en consecuencia se puede derivar término a término.

Así obtenemos $M_x'(0) = E(X)$; $M_x''(0) = E(X^2)$ y en general

$$M_X^{(n)}(0) = E(X^n).$$

Observación. Si X y Y son v.a.i. y cuyas fgm existan en una vecindad alrededor de cero, entonces para cualquier $t \in (-a, a)$ para algún $a > 0$,

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(t) &= E(e^{t(X+Y)}) \\ &= E(e^{tX}e^{tY}) \\ &= E(e^{tX})E(e^{tY}) \\ &= M_X(t)M_Y(t). \end{aligned}$$

1.3. Algunas distribuciones discretas

A continuación, se presentan de una manera breve algunas distribuciones discretas y sus respectivas propiedades que se abordan en los siguientes capítulos.

Distribución Bernoulli

Un ensayo Bernoulli es un experimento aleatorio con dos posibles resultados, ***éxito*** y ***fracaso*** con probabilidades, p y $1-p$, respectivamente.
Definimos la variable aleatoria X como:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{si tenemos éxito,} \\ \\ 0, & \text{si tenemos fracaso.} \end{cases}$$

Entonces se dice que X tiene una distribución Bernoulli con parámetro $p \in (0,1)$, se denota como $X \sim Ber(p)$ y función de probabilidad es

$$p(x) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad \text{para } x = 0, 1.$$

Algunas propiedades de está distribución son:

- $E(X) = p$.
- $V(X) = p(1-p)$.
- $G(t) = 1 - p + pt$.
- $M(t) = 1 - p + pe^t$.

Distribución Binomial

Una variable aleatoria Binomial registra el número de éxitos en n ensayos independientes Bernoulli en donde en cada ensayo la probabilidad de éxito es $p \in (0,1)$, y lo denotaremos por $Bin(n,p)$.

La variable X toma valores en el conjunto $\{0, 1, 2, \cdots, n\}$, y su función de probabilidad es

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}, \quad \text{para } x = 0, 1, \cdots, n.$$

Algunas propiedades de esta distribución son:

- $E(X) = np$.
- $V(X) = np(1-p)$.
- $G(t) = (1 - p + pt)^n$.

- $M(t) = (1 - p + pe^t)^n$.
- La suma de dos variable independientes con distribución $Bin(n, p)$ y $Bin(m, p)$ tiene distribución $Bin(n + m, p)$.

Distribución Binomial Negativa

En la distribución binomial negativa el número de éxitos, se denota por r con una probabilidad de ocurrencia $p \in (0, 1)$ son los parámetros de la distribución y en este caso la variable aleatoria X representa el número de fracasos que ocurren antes del *r-ésimo* éxito obtenido, a diferencia de la distribución Binomial.
Está distribución se denota como $X \sim Bin\,Neg(r, p)$ con $r \in \mathbb{N}$.

Su función de probabilidad es

$$p(x) = \binom{r + x - 1}{x} p^r (1 - p)^x, \quad \text{para } x = 0, 1, \cdots .$$

Algunas propiedades de dicha distribución son:

- $E(X) = \frac{r(1-p)}{p}$.
- $V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$.
- $G(t) = \left(\frac{p}{\left(1-t(1-p)\right)} \right)^r$.
- $M(t) = \left(\frac{p}{(1-qe^t)} \right)^r$.
- La distribución binomial negativa se reduce a la distribución geométrica cuando $r = 1$.

Distribución Poisson

La distribución Poisson es una distribución de un sólo parámetro $\lambda > 0$ y se escribe como $X \sim Poisson(\lambda)$.
Su función de probabilidad es

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad \text{para } x = 0, 1, 2, \cdots .$$

En este caso la variable aleatoria X representa la probabilidad de que ocurra un determinado número de eventos en un intervalo unitario de tiempo o alguna otra medida.

Algunas propiedades de está distribución son:

- $E(X) = \lambda$.
- $V(X) = \lambda$.
- $G(t) = e^{-\lambda(1-t)}$.
- $M(t) = \exp[\lambda(e^t - 1)]$.
- La suma de dos variables independientes con distribución $Poisson(\lambda_1)$ y $Poisson(\lambda_2)$ tiene distribución $Poisson(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Procesos estocásticos

Consideremos una sucesión de variables aleatorias definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$:

$$\{X_n : n \in T\},$$

donde, T es un conjunto de índices o espacio parametral que denominaremos como eje de tiempo y las variables aleatorias pueden tomar valores en un conjunto S que es conocido como espacio de estados. Esta colección $\{X_n\}$ es denominada **proceso estocástico**. Es decir, un sistema puede ser caracterizado de esta forma, en donde puede encontrarse en cualquiera de sus estados y al ir transcurriendo el tiempo puede ir de un estado a otro entonces X_n es el estado del sistema en cuestión al tiempo n y así puede modelarse el sistema para analizar su evolución a lo largo del tiempo. En la Figura 1.1 se muestra un ejemplo gráfico de un proceso estocástico.

Si $n \in T = \{0, 1, 2, \cdots\}$ se dice que el proceso es discreto y generalmente se denota como $\{X_n : n = 0, 1, 2, \cdots\}$; si $t \in T = [0, \infty)$ el proceso será continuo y se denota como $\{X_t : t \geq 0\}$. También el espacio de estados S puede ser discreto al ser todas las variables aleatorias discretas o puede ser continuo cuando al menos una o todas de esas variables son continuas.

Propiedad de Markov

Consideremos un proceso estocástico a tiempo discreto $\{X_n : n \geq 0\}$, en donde los estados o valores $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n$ es la información del proceso hasta

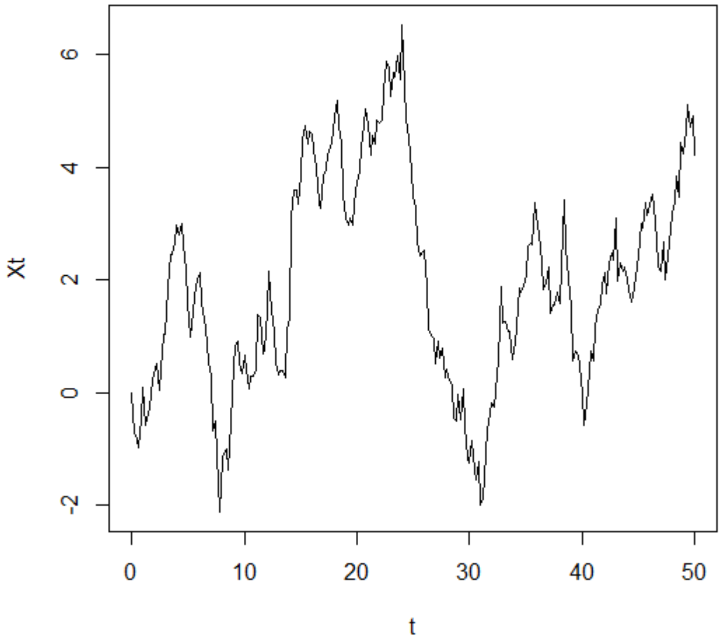


Figura 1.1: Ejemplo de proceso estocástico

el tiempo n, se le puede denominar historial del proceso. Este proceso cumple la propiedad de Markov si para cualquiera de los estados $x_0, x_1, \cdots, x_{n+1}$ cumplen la siguiente identidad

$$P(X_{n+1} = x_{n+1}|X_0 = x_0, \cdots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n).$$

Dicho de otra forma, la probabilidad de un evento futuro $\{X_{n+1} = x_{n+1}\}$ solo depende del evento actual $\{X_n = x_n\}$ y no de su historial o el pasado del proceso $\{X_0 = x_0, X_1 = x_1, \cdots, X_{n-1} = x_{n-1}\}$.

1.4. Modelos de riesgo

El propósito de éste apartado es introducir el desarrollo de algunos modelos agregados de pérdida en dos perspectivas: individual y colectiva.

Dado que el riesgo es un factor inminente, en el caso de una compañía aseguradora es factible conocer y modelar las reclamaciones que se han recibido a través del tiempo para contrarrestarlos y aprovechar su llegada de la manera más favorable. La diferencia principal en ambas teorías consiste en la manera que se acumulan los montos de las reclamaciones que ingresan; en una el número de reclamaciones es fijo mientras que en la otra se considera como una variable aleatoria.

1.4.1. Modelo individual

El modelo individual es un concepto básico en el proceso aleatorio que genera reclamaciones para un portafolio de pólizas; se ha tomado en cuenta en éste trabajo para entender mejor el funcionamiento y las propiedades del modelo de riego colectivo. Dicho modelo se utiliza para agregar las pérdidas de un número específico de pólizas o un conjunto de contratos.

Supongamos que un portafolio tiene n pólizas individuales de seguros en un determinado periodo de tiempo.

La probabilidad de que un asegurado efectúe una reclamación durante algún periodo dentro de la vigencia del seguro que ha contratado es p, mientras que la probabilidad de que no efectúe alguna reclamación es $q = 1 - p$.
Con esto tenemos que ningún asegurado pueda efectuar más de una reclamación durante el periodo.

Entonces definimos la variable aleatoria de la siguiente forma:

$$I_i = \begin{cases} 1, & \text{si hay una reclamación en la póliza } i, \\ \\ 0, & \text{si no hay una reclamación en la póliza } i. \end{cases}$$

Notemos que la distribución I_i es Bernoulli con parámetro p.
El número total de reclamaciones en el periodo, está dado por la variable aleatoria N,

$$N = I_1 + I_2 + \cdots + I_n.$$

Está variable esta asociada con la frecuencia de las reclamaciones.

El monto de la i-ésima reclamación, se denota por $Y_i > 0$ y es la variable aleatoria que mide la severidad de las reclamaciones.
En nuestro modelo tenemos dos supuestos fundamentales:

1. Las v.a. $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ son idénticamente distribuidas.

2. Las v.a. $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ son mutuamente independientes.

Entonces, la verdadera reclamación de la póliza i esta dada por:

$$I_iY_i = \begin{cases} Y_i, & \text{si } I_i = 1, \\ \\ 0, & \text{si } I_i = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, lo que paga la compañía aseguradora por concepto de reclamaciones es

$$S = \sum_{i=i}^{n} I_i Y_i.$$

S se conoce como *riesgo* y el objetivo es conocer sus características, ya que representa las reclamaciones agregadas generadas por el portafolio.

En el modelo individual se supone conocer las probabilidades de la ocurrencia de reclamación y el monto de las reclamaciones en cada uno de los asegurados. Además, se presupone que el número de asegurados es constante en el portafolio durante todo el periodo de vigencia del seguro.

1.4.2. Modelo colectivo

El modelo colectivo considera un portafolio conformado por un número no especificado de pólizas observadas en conjunto, expuestas a un mismo riesgo. Este modelo tiene las siguientes características:

- El conjunto de pólizas en el portafolio con vigencia en el periodo de tiempo $[0, T]$ es un número no determinado.
- La variable aleatoria (v.a.) N es el número de reclamaciones producidas en el portafolio de pólizas en un cierto periodo de tiempo t, cuando sea necesario especificar el tiempo, se denotará como N_t.
- Las variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (vaiid) $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{N_t}$ son los monto de las reclamaciones.

Como en el modelo individual, lo que paga la compañía aseguradora por concepto de reclamaciones, es la variable aleatoria:

$$S = \sum_{i=1}^{N} Y_i.$$

En el caso que de que $N = 0$ la suma S será nula. Observamos que cada sumando es una variable aleatoria, que el número de sumandos también es aleatorio y que la suma S puede ser mixta, es decir, una v.a. no discreta ni continua.

A la función de distribución de cada reclamación Y la denotaremos por $F(y)$.

Dado que la variable Y es positiva, $F(0) = 0$. Para derivar la función de distribución de S de acuerdo a cuantas reclamaciones ocurren y utilizando la ley de probabilidad total. Tenemos

$$\begin{aligned} F_S(y) &= P(S \leq y) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(S \leq y | N = n) P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n \leq Y) P(N = n) \\ &= P(S \leq y | N = 0) P(N = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} P(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n \leq Y) P(N = n), \end{aligned}$$

donde $P(N = n)$ es la probabilidad de que el portafolio tenga n reclamaciones. Así mismo, la función de probabilidad de la suma $Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ es la *n-ésima* convolución de la función de masa de probabilidad $p(y)$ que denotaremos como $P^{*n}(y)$ y se deriva de la siguiente manera:
Para $n = 0$,

$$P^{*n}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0, \\ \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Para $n = 1, 2, \cdots$

$$P^{*n}(y) = \sum_{w} P^{*(n-1)}(y - w)\ (y).$$

Con lo anterior, se tiene que

$$F_s(y) = P(N = 0) P^{*0}(y) + \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) P^{*n}(y).$$

En consecuencia,

$$F_S(y) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) P^{*n}(y). \tag{1.1}$$

Dicha distribución es conocida como *distribución compuesta.*

Y la función de probabilidad de (1.1) es

$$p_s(y) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) f^{*n}(y).$$

Retomando la notación de la Sección 1.1 y 1.2, recordemos que

- $\mu_k = E(Y^k)$ es el momento *k-ésimo.*
- $M_Y(t) = E(e^{ty})$ es la función generadora de momentos de la variable Y.
- $M_N(t) = E(e^{tN})$ es la f.g. de momentos del número de reclamaciones.

Proposición 1.4.1. La variable aleatoria de la pérdida agregada o riesgo del modelo colectivo S, cumple las siguientes propiedades.

a) La función generadora de momentos de S es

$$M_S(t) = M_N\Big(\ln\big(M_Y(t)\big)\Big).$$

b) La esperanza de S es
$$E(S) = E(N)E(Y).$$

c) La varianza de S es

$$V(S) = V(N)\mu_1^2 + V(Y)E(N).$$

Demostración. a)

$$\begin{aligned}
M_S(y) &= E\big[e^{t(Y_1+Y_2+\cdots+Y_N)}\big] \\
&= E\big[E(e^{tS}|N)\big] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E\big[e^{tS}\big]P(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} M_{Y_1+Y_2+\cdots+Y_n}(t)P(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{n} M_{Y_i}(t)\right) P(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \big(M_Y(t)\big)^n P(N=n) \\
&= E\left[\big(M_Y(t)\big)^N\right] \\
&= E\left[e^{N*\ln\left(M_Y(t)\right)}\right] \\
&= M_N\Big(\ln\big(M_Y(t)\big)\Big).
\end{aligned}$$

b) Ahora en términos de la fgm de S obtendremos la esperanza.

$$\begin{aligned}
E(S) &= \frac{d}{dt} M_S(t)\bigg|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\left\{ M_N\left[\ln\big(M_Y(t)\big)\right]\right\}\bigg|_{t=0} \\
&= \left[M'_N\Big(\ln\big(M_Y(t)\big)\Big)\frac{M'_Y(t)}{M_Y(t)}\right]\bigg|_{t=0} \\
&= M'_N\Big(\ln\big(M_Y(0)\big)\Big)\frac{M'_Y(0)}{M_Y(0)} \\
&= E(N)E(Y).
\end{aligned}$$

c) Para la varianza, calculemos el segundo momento:

$$\begin{aligned}
E(S^2) &= \frac{d}{dt}\left\{ M_N^2\left[\ln\big(M_Y(t)\big)\right]\frac{M'_Y(t)}{M_Y(t)}\right\}\bigg|_{t=0} \\
&= \left\{ M''_N\left[\ln\big(M_Y(t)\big)\right]\left[\frac{M'_Y(t)}{M_Y(t)}\right]^2 \right. \\
&\left. + M'_N\Big(\ln\big(M_Y(t)\big)\Big)\left[\frac{M''_Y(t)}{M_Y(t)} - \left(\frac{M'_Y(t)}{M_Y(t)}\right)^2\right]\right\}\bigg|_{t=0} \\
&= E(N^2)E^2(Y) + E(N)\big(E(Y^2) - E^2(Y)\big) \\
&= E(N^2)\mu_1^2 + E(N)V(Y).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
V(S) &= E(S^2) - E^2(S) \\
&= E(N^2)\mu_1^2 - E^2(N)\mu_1^2 + E(N)V(Y).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$V(S) = V(N)\mu_1^2 + V(Y)E(N).$$

□

Capítulo 2

Teoría de ruina en tiempo discreto

En este capítulo se aborda de la siguiente manera. En la primera parte se describen los conceptos elementales de la probabilidad de ruina en tiempo discreto. Se definirá el proceso de riesgo, las fórmulas recursivas para calcularla y el tiempo en el que ocurre la ruina. Se presenta el caso en que la probabilidad de ruina tiene horizonte infinito y finito. En la segunda parte, se expone el Modelo Binomial Compuesto, sus características principales y se desarrolla los resultados del artículo *Mathematical fun with the compound binomial process*, (Gerber, 1988) de una forma más detallada y se demuestran algunos teoremas para derivar las fórmulas principales. El contenido de este capítulo se fundamenta en [3], [6], [7], [13] y [16].

2.1. Proceso de ruina en tiempo discreto

Supongamos que el capital inicial de una compañía aseguradora es $u \geq 0$ y que en cada periodo unitario de tiempo recibe un monto por concepto de primas, a su vez supongamos que la empresa recibe reclamaciones cuyos montos están dados por: $Y_1, Y_2, Y_3, ...$ al tiempo $n \geq 1$. Definimos el proceso de riesgo a tiempo discreto

$$\{X_n : n = 1, 2, \cdots\},$$

de acuerdo a la siguiente expresión:

$$X_n = u + cn - \sum_{i=1}^{n} Y_i, \tag{2.1}$$

donde $c \geq 1$ es el monto recibido por concepto de primas y $Y_1, Y_2, Y_3, \cdots$ son v.a.

independientes e idénticamente distribuidas que toman valores en el conjunto {0,1,2,...}. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que el valor de la prima es uno para facilitar su manejo.
Por otro lado, la colección de variables aleatorias $Y_1, Y_2, Y_3, \cdots$ cumple una propiedad conocida como *Condición de Ganancia Neta:* $E[Y] < 1$, puesto que nos indica que por cada unidad de tiempo, la cantidad de dinero recibido en concepto de primas es mayor al valor promedio de las reclamaciones que surgieron en la empresa aseguradora.

La variable Y representará a cualquiera de las variables $\{Y_1, Y_2, Y_3, \cdots\}; F$ será la función de distribución de Y y la correspondiente función de densidad de probabilidad se denotará por f. Por otra parte, $\overline{F}$ se define de la siguiente manera:

$$P(Y > y) = \overline{F}(y) := 1 - F(y).$$

Proposición 2.1.1. Sea Y la variable aleatoria discreta con valores en el conjunto $\{0, 1, \cdots\}$ con función de distribución $F(y)$. La esperanza de Y es

$$E[Y] = \sum_{y=0}^{\infty} \overline{F}(y).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
E[Y] &= \sum_{y=0}^{\infty} y f(y) \\
&= f(1) + 2f(2) + 3f(3) + ... \\
&= (f(1) + f(2) + f(3) + ...) + (f(2) + f(3) + f(4)...) + ... \\
&= (1 - F(0)) + (1 - F(1)) + (1 - F(2)) + ... \\
&= \overline{F}(0) + \overline{F}(1) + \overline{F}(2) + ... \\
&= \sum_{y=0}^{\infty} \overline{F}(y).
\end{aligned}$$

□

Definición 2.1.1. Si $X_n \leq 0$ al tiempo $n \geq 1$, se dice que la compañía aseguradora se encuentra en ruina y se define a τ como el primer momento en el que la ruina se presenta, es decir, $\tau = inf\{n \geq 1 : X_n \leq 0\}$.

Observación. Si $\{n \geq 1 : X_n \leq 0\}$ es un conjunto vacío se entiende que la ruina nunca se presenta, en este caso se puede definir como $\tau = \infty$.

Por otro lado, se observa que técnicamente al tiempo cero no hay ruina, incluso si el capital inicial es cero, ya que por la definición anterior esto sucede si $n \geq 1$; a su vez es usual denotar la probabilidad de ruina como $\psi(u)$ donde sabemos que u es el capital inicial. Es claro que a mayor capital inicial menor es su probabilidad de ruina, es decir, para $u \geq 0$,

$$a)\ \psi(u+1) \leq \psi(u).$$

$$b)\ \lim_{u\to\infty} \psi(u) = 0.$$

2.1.1. Probabilidad de ruina con horizonte infinito

Proposición 2.1.2. Para el proceso de riesgo a tiempo discreto $\{X_n : n \geq 0\}$ con un valor inicial $u \geq 0$,

$$\psi(u) = \psi(0) + \sum_{y=0}^{u-1} \psi(u-y)\overline{F}(y) - \sum_{y=0}^{u-1} \overline{F}(y)$$

y

$$\psi(0) = E[Y].$$

Demostración. Para cualquier capital inicial $w \geq 0$. Se tiene por definición lo siguiente

$$\begin{aligned}
\psi(w) &= P(\tau < \infty) \\
&= P(\tau < \infty, \bigcup_{y=0}^{\infty}\{Y_1 = y\}) \\
&= \sum_{y=0}^{\infty} P(\tau < \infty, Y_1 = y) \\
&= \sum_{y=0}^{\infty} P(\tau < \infty | Y_1 = y) P(Y_i = y) \\
&= \sum_{y=0}^{\infty} P(\tau < \infty | Y_1 = y) f(y) \\
&= \sum_{y=0}^{w} P(\tau < \infty | Y_1 = y) f(y) + \sum_{y=w+1}^{\infty} P(\tau < \infty | Y_1 = y) f(y).
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
P(\tau < \infty | Y_1 = y) &= P(\tau < \infty | X_0 = w, Y_1 = y) \\
&= P(\tau < \infty | X_0 = w, X_1 = w + 1 - y) \\
&= P(\tau < \infty | X_1 = w + 1 - y) \\
&= \psi(w + 1 - y).
\end{aligned}$$

Observamos que la probabilidad que está en el segundo término se refiere al caso en el que se va a la ruina, por lo tanto, es 1. En consecuencia,

$$\psi(w) = \sum_{y=0}^{w} \psi(w + 1 - y) f(y) + \sum_{y=w+1}^{\infty} f(y).$$

Entonces

$$\psi(w) = \sum_{y=1}^{w+1} \psi(y) f(w + 1 - y) + \overline{F}(w). \tag{2.2}$$

Sustituimos a w por u y separamos el último término de la suma anterior, así

$$\psi(u) = \sum_{y=1}^{u} \psi(y) f(u + 1 - y) + \psi(u + 1) f(0) + \overline{F}(u).$$

Despejamos a $\psi(u + 1) f(0)$, obtenemos

$$\psi(u + 1) f(0) = \psi(u) - \sum_{y=1}^{u} \psi(y) f(u + 1 - y) - \overline{F}(u). \tag{2.3}$$

Sumando desde 0 hasta u la expresión (2.2) se llega a

$$\begin{aligned}
\sum_{w=0}^{u} \psi(w) &= \sum_{w=0}^{u} \sum_{y=1}^{w+1} \psi(y) f(w + 1 - y) + \sum_{w=0}^{u} \overline{F}(w) \\
&= \sum_{y=1}^{u+1} \sum_{w=y-1}^{u} \psi(y) f(w + 1 - y) + \sum_{w=0}^{u} \overline{F}(w) \\
&= \psi(u + 1) f(0) + \sum_{y=1}^{u} \psi(y) \left(\sum_{w=y-1}^{u} f(w + 1 - y) \right) + \sum_{w=0}^{u} \overline{F}(w) \\
&= \psi(u + 1) f(0) + \sum_{y=1}^{u} \psi(u) F(u + 1 - y) + \sum_{w=0}^{u} \overline{F}(w).
\end{aligned}$$

Despejando a $\psi(u+1)f(0)$ se consigue lo siguiente

$$\begin{aligned}\psi(u+1)f(0) &= \sum_{w=0}^{u}\psi(w) - \sum_{y=1}^{u}\psi(y)F(u+1-y) - \sum_{w=0}^{u}\overline{F}(w)\\ &= \psi(0) + \sum_{w=1}^{u}\psi(w) - \sum_{y=1}^{u}\psi(y)F(u+1-y) - \sum_{w=0}^{u}\overline{F}(w).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\psi(u+1)f(0) = \psi(0) + \sum_{y=1}^{u}\psi(y)(1-F(u+1-y)) - \sum_{w=0}^{u}\overline{F}(w). \tag{2.4}$$

Igualando (2.3) con (2.4) y despejando $\psi(u)$ obtenemos

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \psi(0) + \sum_{y=1}^{u}\psi(y)\left(1-F(u+1-y)\right) - \sum_{w=0}^{u}\overline{F}(w)\\ &+ \sum_{y=1}^{u}\psi(y)f(u+1-y) + \overline{F}(u)\\ &= \psi(0) + \sum_{y=1}^{u}\psi(y)\left(1-F(u+1-y)+f(u+1-y)\right)\\ &- \sum_{w=0}^{u}\overline{F}(w) + \overline{F}(u).\end{aligned}$$

Observamos lo siguiente

$$\begin{aligned}1-F(u+1-y)+f(u+1-y) &= 1 - \sum_{i=0}^{u+1-y} f(i) + f(u+1-y)\\ &= 1 - \sum_{i=0}^{u-y} f(i) = 1-F(u-y)\\ &= \overline{F}(u-y).\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \psi(0) + \sum_{y=1}^{u}\psi(y)\overline{F}(u-y) - \sum_{y=0}^{u-1}\overline{F}(y)\\ &= \psi(0) + \sum_{y=0}^{u-1}\psi(u-y)\overline{F}(y) - \sum_{y=0}^{u-1}\overline{F}(y).\end{aligned}$$

Se ha demostrado la primera parte de la Proposición 2.1.2. Ahora veamos que la segunda parte de la Proposición 2.1.2 se cumple, es decir, $\psi(0) = E(y)$.
Por la primera parte de la Proposición 2.1.2 sabemos que se cumple que

$$\psi(u) = \psi(0) + \sum_{y=0}^{u-1} \psi(u-y)\overline{F}(y) - \sum_{y=0}^{u-1} \overline{F}(y).$$

Aplicando límite en ambos lados,

$$\lim_{u\to\infty} \psi(u) = \lim_{u\to\infty} \psi(0) + \lim_{u\to\infty} \sum_{y=0}^{u-1} \psi(u-y)\overline{F}(y) - \lim_{u\to\infty} \sum_{y=0}^{u-1} \overline{F}(y).$$

Podemos observar que al tener un capital muy grande la probabilidad de que encontremos la ruina tiende a ser 0. Por otra parte, la segunda suma del lado derecho es $E(Y)$. Entonces

$$0 = \psi(0) + \sum_{y=0}^{\infty} \psi(u-y)\overline{F}(y) - E[Y].$$

Basta demostrar que $\sum_{y=0}^{\infty} \psi(u-y)\overline{F}(y) = 0$ para obtener lo deseado. Notemos que

$$\sum_{y=0}^{\infty} \psi(u-y)\overline{F}(y) = \sum_{y=0}^{n} \psi(u-y)\overline{F}(y) + \sum_{y=n+1}^{\infty} \psi(u-y)\overline{F}(y).$$

Además

$$\sum_{y=0}^{n} \psi(u-y)\overline{F}(y) \leq \sum_{y=0}^{n} \psi(u-y)$$

y

$$\sum_{y=n+1}^{\infty} \psi(u-y)\overline{F}(y) \leq \sum_{y=n+1}^{\infty} \overline{F}(y).$$

Entonces

$$\sum_{y=0}^{\infty} \psi(u-y)\overline{F}(y) \leq \sum_{y=0}^{n} \psi(u-y) + \sum_{y=n+1}^{\infty} \overline{F}(y)$$

y

$$\sum_{y=0}^{u-1} \psi(u-y)\overline{F}(y) \leq \sum_{y=0}^{\infty} \psi(u-y)\overline{F}(y).$$

Así,

$$\sum_{y=0}^{u-1} \psi(u-y)\overline{F}(y) \leq \sum_{y=0}^{n} \psi(u-y) + \sum_{y=n+1}^{\infty} \overline{F}(y).$$

Entonces, aplicando límites en ambos lados de la desigualdad tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to\infty} \sum_{y=0}^{u-1} \psi(u-y)\overline{F}(y) &\leq \lim_{u\to\infty} \sum_{y=0}^{n} \psi(u-y) + \lim_{u\to\infty} \sum_{y=n+1}^{\infty} \overline{F}(y) \\
&= \sum_{y=0}^{n} \lim_{u\to\infty} \psi(u-y) + \sum_{y=n+1}^{\infty} \overline{F}(y) \\
&= \sum_{y=n+1}^{\infty} \overline{F}(y)
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\lim_{u\to\infty} \sum_{y=0}^{u-1} \psi(u-y)\overline{F}(y) \leq \sum_{y=n+1}^{\infty} \overline{F}(y).$$

Aplicando en ambos lados el límite cuando $n \to \infty$,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{u\to\infty} \sum_{y=0}^{u-1} \psi(u-y)\overline{F}(y) \right) &\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{y=n+1}^{\infty} \overline{F}(y) \\
\lim_{u\to\infty} \sum_{y=0}^{u-1} \psi(u-y)\overline{F}(y) &\leq 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$E[Y] = \psi(0).$$

□

Denotamos a $\overline{\psi}(u)$ como la probabilidad de que nunca se presente la ruina.
Notación: $\overline{\psi}(u) := 1 - \psi(u)$.

También puede escribirse una ecuación recursiva para $\psi(u)$, como sigue:

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}(u) &= 1-\psi(u) \\
&= 1-\psi(0)-\sum_{y=0}^{u-1}\psi(u-y)\overline{F}(y)+\sum_{y=0}^{u-1}\overline{F}(y) \\
&= \overline{\psi}(0)+\sum_{y=0}^{u-1}\overline{F}(y)\Big(1-\psi(u-y)\Big) \\
&= \overline{\psi}(0)+\sum_{y=0}^{u-1}\overline{\psi}(u-y)\overline{F}(y), \qquad\qquad u\geq 1.
\end{aligned}$$

Así que al unir los dos resultados de la Proposición 2.1.2 y mediante un cambio de variable se encuentra la fórmula recursiva de $\psi(u)$, también puede escribirse como

$$\psi(u)=\sum_{y=0}^{u-1}\psi(u-y)\overline{F}(y)+\sum_{y=u}^{\infty}\overline{F}(u), \quad u\geq 1. \tag{2.5}$$

En seguida, se describen dos ejemplos típicos para ilustrar la probabilidad de ruina.

Ejemplo 1: La ruina del jugador

Sea $\{X_n : n \geq 0\}$ un proceso de riesgo a tiempo discreto donde X_n representa el capital de un jugador A que apuesta una unidad monetaria en cada unidad de tiempo, u el capital inicial del jugador A y supongamos que el jugador contrario, B, cuenta con un capital infinito.
Además, supongamos que las reclamaciones tienen la siguiente distribución:

$$P(Y=0)=p$$

$$P(Y=2)=1-p$$

donde $1/2 < p < 1$. Es decir, al final de cada periodo el proceso se incrementa en una unidad si $Y=0$ o se disminuye en una unidad si $Y=2$.
Notemos que se garantiza la *Condición de ganancia neta* ya que $E[Y]=2(1-p)$ y esto es menor a 1 ya que $1/2 < p < 1$.

Proposición 2.1.3. La probabilidad de que el jugador A se vaya a la ruina dado que inició con un capital $u \geq 1$ es

$$\psi(u)=\left(\frac{1-p}{p}\right)^{u}. \tag{2.6}$$

Demostración. Notemos que

$$\overline{F}(0) = 1 - p$$

$$\overline{F}(1) = 1 - p$$

$$\overline{F}(y) = 0 \quad para \quad y \geq 2.$$

Por la segunda parte de la Proposición 2.1.2 tenemos que

$$\psi(0) = E[Y] = 2(1 - p).$$

Por la primera parte de la Proposición 2.1.2 obtenemos

$$\begin{aligned}\psi(1) &= \psi(0) + \psi(1)\overline{F}(0) - \overline{F}(0)\\ &= 2(1-p) + \psi(1)(1-p) - (1-p).\end{aligned}$$

Entonces

$$\psi(1) - \psi(1 - p) = 2(1 - p) - (1 - p).$$

Despejando a $\psi(1)$ se llega a

$$\psi(1) = \frac{1-p}{p}.$$

Para $u = 2$ tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\psi(2) &= \psi(0) + \psi(2)\overline{F}(0) + \psi(1)\overline{F}(1) - \overline{F}(0) - \overline{F}(1)\\ &= 2(1-p) + \psi(2)(1-p) + \left(\frac{1-p}{p}\right)(1-p) - 2(1-p)\\ &= \psi(2)(1-p) + \frac{(1-p)^2}{p}.\end{aligned}$$

Despejando a $\psi(2)$ obtenemos lo siguiente

$$\psi(2) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^2.$$

Supongamos que se cumple para $u = n$, es decir, $\psi(n) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^n$ y veamos si se cumple para $u = n + 1$.

Por la primera parte de la Proposición 2.1.2 se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned}
\psi(n+1) &= \psi(0) + \sum_{y=0}^{n} \psi(n+1-y)\overline{F}(y) - \sum_{y=0}^{n} \overline{F}(y) \\
&= \psi(0) + \psi(n+1)\overline{F}(0) + \psi(n)\overline{F}(1) \\
&+ \sum_{y=2}^{n} \psi(n+1-y)\overline{F}(y) - \overline{F}(0) - \overline{F}(1) - \sum_{y=2}^{n} \overline{F}(y).
\end{aligned}$$

Observamos que ambas sumas son iguales a cero ya que $\overline{F}(y) = 0$ para $y \geq 2$. Entonces

$$\begin{aligned}
\psi(n+1) &= 2(1-p) + \psi(n+1)(1-p) + \psi(n)(1-p) - 2(1-p) \\
&= \psi(n+1)(1-p) + \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n} (1-p).
\end{aligned}$$

Despejando de la expresión anterior a $\psi(n+1)$ obtenemos

$$\psi(n+1) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n+1}.$$

□

Ejemplo 2

Suponga que las reclamaciones en el modelo de riesgo a tiempo discreto tiene la siguiente función de probabilidad: para algún $k \geq 2$ fijo,

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1-p, \\
f(k) &= p.
\end{aligned}$$

Entonces las siguientes identidades son válidas:

$$a)\ \psi(u) = \frac{p}{1-p}\left(k - u + \sum_{y=1}^{u-1} \psi(u-y)\right), \quad \text{para } 1 \leq u < k,$$

$$b)\ \psi(u) = \frac{p}{1-p} \sum_{y=1}^{k-1} \psi(u-y), \quad \text{para } u > k.$$

Demostración. Para empezar la prueba de ambos incisos calcularemos

$$\psi(0) = E(Y) = 0(1-p) + kp = kp < 1.$$

a) Para determinar $\overline{F}(y)$, tomemos en cuenta las siguientes desigualdades:

$$1 \leq u < k \;\wedge\; 0 \leq y \leq u-1 \;\Rightarrow\; 0 \leq y \leq u-1 < k-1 < k.$$

Entonces, si $0 \leq y < k$,

$$\overline{F}(y) = p.$$

Así, por la Proposición 2.1.2

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= \psi(0) + \sum_{y=0}^{u-1} \psi(u-y)\overline{F}(y) - \sum_{y=0}^{u-1} \overline{F}(y) \\
&= kp + p\sum_{y=0}^{u-1} \psi(u-y) - \sum_{y=0}^{u-1} p \\
&= kp + p\psi(u) + p\sum_{y=1}^{u-1} -pu.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\psi(u) - p\psi(u) = p\bigg(k + \sum_{y=1}^{u-1} \psi(u-y) - u\bigg).$$

En consecuencia,

$$\psi(u) = \frac{p}{1-p}\bigg(k - u + \sum_{y=1}^{u-1} \psi(u-y)\bigg).$$

b) Se tiene que $\overline{F}(y) = 0$ si $y \geq k$. Por otro lado, si

$$u < k \;\Rightarrow\; u-1 < k-1.$$

Análogo al inciso anterior, por la Proposición 2.1.2

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= \psi(0) + \sum_{y=0}^{u-1} \psi(u-y)\overline{F}(y) - \sum_{y=0}^{u-1} \overline{F}(y) \\
&= kp + \sum_{y=0}^{k-1} \psi(u-y)\overline{F}(y) + \sum_{y=k}^{u-1} \overline{F}(y) - \sum_{y=0}^{k-1} \overline{F}(y) - \sum_{y=k}^{u-1} \overline{F}(y) \\
&= kp + p\sum_{y=0}^{k-1} - \sum_{y=0}^{u-1} p \\
&= kp + p\,\psi(u) + p\sum_{y=1}^{k-1} -kp.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se sigue que

$$\psi(u) = \frac{p}{1-p} \sum_{y=1}^{k-1} \psi(u-y).$$

$\square$

Ejemplo 3: Distribución geométrica

Sea $\{X_n : n \geq 0\}$ un proceso de riesgo a tiempo discreto donde los montos de las reclamaciones tienen una distribución geométrica con parámetro p, es decir, su función de probabilidad es

$$f(y) = (1-p)^y p, \quad y = 1, 2, \cdots .$$

A partir de la Proposición 2.1.2, puede encontrarse los valores de $\psi(u)$ de manera sucesiva para $u = 0, 1, 2, \cdots$.
Por otro lado, usando inducción sobre el parámetro $u \geq 0$, y para cualquier $p > 1/2$, se tiene que

$$\psi(u) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{u+1}. \tag{2.7}$$

2.1.2. Probabilidad de ruina con horizonte finito

Ahora supongamos que deseamos calcular la probabilidad de que la ruina se presente a lo más hasta el tiempo n dado que se inicia con un capital u, es decir, queremos calcular la probabilidad de que $\tau \in \{1, 2, .., n\}$ dado que $X_0 = u$.

Definición 2.1.2. La probabilidad de ruina con horizonte finito es

$$\psi(u, n) = P(\tau \leq n | X_0 = u) = P(\tau \in \{1, 2, ...n\} | X_0 = u).$$

Dado que estaremos siempre en el caso en que el capital inicial es u entonces podemos omitir la condicional, así

$$\psi(u, n) = P(\tau \leq n).$$

Notamos que la probabilidad de ruina con horizonte finito es la función de distribución acumulada de τ y sabemos que esta es creciente entonces se cumple

$$\psi(u, 1) \leq \psi(u, 2) \leq ... \leq \psi(u, n).$$

Además

$$\lim_{n\to\infty} \psi(u, n) = \lim_{n\to\infty} P(\tau \leq n) = P(\tau < \infty) = \psi(u).$$

Entonces

$$\psi(u, n) \leq \psi(u).$$

Proposición 2.1.4. Para el proceso de riesgo a tiempo discreto $\{X_n : n \geq 0\}$ con valor inicial $u \geq 0$ la probabilidad de ruina con horizonte finito $\psi(u, n)$ puede calcularse de la siguiente forma:

$$\psi(u, 1) = \overline{F}(u)$$

y

$$\psi(u, n) = \overline{F}(u) + \sum_{y=0}^{u} \psi(u + 1 - y, n - 1) f(y), \qquad n \geq 2.$$

Demostración. Para $n = 1$,

$$\psi(u, 1) = P(\tau = 1) = P(u + 1 - Y_1 \leq 0) = P(Y_1 \geq u + 1) = \overline{F}(u).$$

Para $n \geq 2$, al condicionar sobre el monto de la primera reclamación tenemos

$$\begin{aligned}
\psi(u, n) &= P(\tau \leq n) \\
&= P(\tau \leq n, \bigcup_{y=0}^{\infty} \{Y_1 = y\}) \\
&= \sum_{y=0}^{\infty} P(\tau \leq n, Y_1 = y) \\
&= \sum_{y=0}^{\infty} P(\tau \leq n | Y_1 = y) P(Y_1 = y) \\
&= \sum_{y=0}^{u} P(\tau \leq n | Y_1 = y) P(Y_1 = y) + \sum_{y=u+1}^{\infty} P(\tau \leq n | Y_1 = y) P(Y_1 = y).
\end{aligned}$$

Notamos que la probabilidad condicional del primer sumando es igual a $\psi(u + 1 - y, n - 1)$ ya que estamos recorriendo nuestro proceso una unidad, es decir, al tiempo 1 nuestro capital es $u + 1 - y$ y la ruina se da en a lo más $n - 1$ pasos. Además, la probabilidad condicional de la segunda suma es igual a 1 ya que es el caso en que estamos en ruina. Entonces

$$\begin{aligned}
\psi(u, n) &= \sum_{y=0}^{u} \psi(u + 1 - y, n - 1) f(y) + \sum_{y=u+1}^{\infty} f(y) \\
&= \sum_{y=0}^{u} \psi(u + 1 - y, n - 1) f(y) + \overline{F}(u).
\end{aligned}$$

$\square$

2.2. Modelo binomial compuesto

El Modelo Binomial Compuesto (MBC), es un modelo a tiempo discreto y cumple las siguientes condiciones:

- La prima que ingresa es uno y a lo más existe una reclamación en cada periodo.
- El número de reclamaciones entre 0 y t, esta regido por un proceso binomial, $\{N_t : t = 0, 1, 2, \cdots\}$.
    - $N_0 = 0$.
    - $N_t = I_1 + I_2 + \cdots + I_t$.
    - $I_1, I_2, \cdots, I_t$ son v.a. Bernoulli independientes e idénticamente distribuidas con $p \in (0, 1)$, es decir, la probabilidad de que se tenga una reclamación es p y de que no haya reclamaciones es $q := 1 - p$.
    - La ocurrencia de alguna reclamación en diferentes periodos son eventos independientes.
- Los montos de las reclamaciones $Y_1, Y_2, \cdots$ son v.a. con valores enteros positivos, mutuamente independientes e idénticamente distribuidas.
    - Su función de probabilidad es $p(y) = P(Y = y)$ para $y = 1, 2, 3, \cdots$.
    - La función de distribución acumulada es $F(y)$.
    - La fgp es $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} p(k)z^k$.
    - $\mu < \infty$.

Entonces, el superávit de una compañía aseguradora o el capital al tiempo t es,

$$X_t = u + t - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad t = 0, 1, 2, \cdots, \tag{2.8}$$

donde $X_0 = u \geq 0$ es el capital inicial y se asume como un valor entero.

Por la *Condición de ganancia neta* se asume que $p\mu < 1$, con p la probabilidad de que haya una reclamación y μ la media poblacional. Recordemos que definimos a S_t como el riesgo o reclamaciones agregadas entre 0 y t, es decir,

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{N_t}.$$

Asumimos que S_t es un proceso Binomial compuesto. Podemos escribir

$$S_t = S_{N_t}.$$

Proposición 2.2.1. Si el número total de reclamaciones N tiene una distribución $Bin(n, p)$ y las v.a. Y_i son independientes e idénticamente distribuidas con cierta distribución A con media μ y varianza σ^2, entonces:

1. $E(S) = np\mu$.
2. $E(S^2) = np\big(\mu^2(1-p+np)+\sigma^2\big)$.
3. $V(S) = np\big(\mu^2(1-p)+\sigma^2\big)$.

Demostración. 1. Este resultado se obtiene directamente por la Proposición 1.5.1. b)

$$E(S) = E(N)E(Y) = np\mu.$$

2. Si $N \sim Bin(n, p)$, $Y \sim A(\mu, \sigma^2)$ y

$$E(N^2) = V(N) + \big[E(N)\big]^2 = np(1-p) + n^2p^2.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} E(S^2) &= E(N^2)p_1^2 + V(Y)E(N) \\ &= \mu^2\big(np(1-p)+n^2p^2\big) + \sigma^2 np \\ &= \mu^2 np - \mu^2 np^2 + n^2p^2\mu^2 + \sigma^2 np \\ &= np\big(\mu^2(1-p+np)+\sigma^2\big). \end{aligned}$$

3. Por Proposición 1.5.1. c) se sigue

$$\begin{aligned} V(S) &= V(N)(p_1)^2 + V(X)E(N) \\ &= np(1-p)\mu^2 + \sigma^2 np \\ &= np\mu^2 - np^2\mu^2 + \sigma^2 np \\ &= np\big(\mu^2(1-p)+\sigma^2\big). \end{aligned}$$

□

El modelo de riesgo Binomial Compuesto definido en (2.8) puede reescribirse como

$$X_t = u + t - \sum_{i=1}^{t} W_i, \qquad t = 0, 1, 2, \cdots . \tag{2.9}$$

En donde, $W_i = I_i Y_i$ es el monto de la reclamación en el periodo i, con función de probabilidad

$$b(y) = \begin{cases} 1-p, & \text{si } y = 0, \\ \\ p\ p(y), & \text{si } y \in N^+. \end{cases}$$

La fórmula (2.9) modifica la composición de la v.a. del monto de reclamación como el producto de una variable aleatoria $Ber(p),\ p \in (0,1)$ y la distribución de los montos; es una forma más sencilla para facilitar su manejo y programación, dado que el número de reclamaciones ya no es una variable aleatoria y se asigna como un valor fijo.

2.2.1. Probabilidad de ruina en el modelo binomial compuesto

En la Definición 2.1.1 hemos establecido el concepto de ruina como el evento de que $X_t \leq 0$ para algún $t \geq 1$, el primer momento en que ocurre la ruina, τ y $\psi(u)$ la probabilidad de ruina. Para calcular la probabilidad de ruina $\psi(u)$ del Modelo Binomial Compuesto recursivamente, considerando que se conoce previamente $\psi(0)$, se pueden derivar las siguientes expresiones.

Proposición 2.2.2. Para el proceso de riesgo discreto binomial compuesto $\{X_t : t \geq 0\}$ con valor inicial $u \geq 0$,

$$\psi(0) = (1-p)\psi(1) + p$$

y

$$\psi(u) = (1-p)\psi(u+1) + p\sum_{y=1}^{u} \psi(u+1+y)p(y) + p\sum_{y=u+1}^{\infty} p(y).$$

Demostración. Recordemos que $\overline{F}(y) = 1 - F(y)$, en específico

$$\overline{F}(0) = 1 - (1-p) = p,$$

entonces condicionando en lo que ocurre en el primer periodo tenemos que,

$$\begin{aligned} \psi(1) &= \psi(0) + \psi(1)\overline{F}(0) - \overline{F}(0) \\ &= \psi(0) + p\psi(1) - p. \end{aligned}$$

Entonces, despejando $\psi(0)$ obtenemos,

$$\psi(0) = (1-p)\psi(1) + p.$$

Para la segunda parte de la demostración, condicionamos en lo que ocurre en el primer periodo de tiempo y utilizamos la ley de probabilidad total.

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= P(\tau < \infty) \\
&= P(\tau < \infty, \bigcup_{y=0}^{\infty}\{Y1 = y\}) \\
&= \sum_{y=0}^{\infty} P(\tau < \infty, Y_1 = y) \\
&= \sum_{y=0}^{\infty} P(\tau < \infty, Y_1 = y)P(Y_1 = y) \\
&= \sum_{y=0}^{\infty} P(\tau < \infty, Y_1 = y)f(y) \\
&= \sum_{y=0}^{u} P(\tau < \infty, Y_1 = y)f(y) + \sum_{y=u+1}^{\infty} P(\tau < \infty, Y_1 = y)f(y).
\end{aligned}$$

De manera similar a la demostración de la Proposición 2.1.2 el segundo sumando se vuelve uno puesto que la primera reclamación es mayor que el capital inicial y

$$\begin{aligned}
\sum_{y=0}^{u} P(\tau < \infty, Y_1 = y)f(y) &= P(\tau < \infty | X_0 = u, Y_1 = y) \\
&= P(\tau < \infty | X_1 = u + 1 - y) \\
&= \psi(u + 1 - y).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= \sum_{y=0}^{u} \psi(u + 1 - y)f(y) + \sum_{y=u+1}^{\infty} f(y) \\
&= \psi(u + 1)f(0) + \sum_{y=1}^{u} \psi(u + 1 - y)f(y) + \sum_{y=u+1}^{\infty} f(y) \\
&= \psi(u + 1)(1 - p) + \sum_{y=1}^{u} \psi(u + 1 - y)f(y) + \sum_{y=u+1}^{\infty} f(y) \\
&= \psi(u + 1)(1 - p) + p\sum_{y=1}^{u} \psi(u + 1 - y)p(y) + p\sum_{y=u+1}^{\infty} p(y).
\end{aligned}$$

$\square$

La Proposición 2.2.2 ha establecido dos expresiones para calcular recursivamente la probabilidad de ruina del Modelo Binomial Compuesto análogas a las del proceso de riesgo en tiempo discreto. Sin embargo, uno de los propósitos de este trabajo es estudiar la probabilidad de ruina de dicho modelo más allá que solo sus fórmulas recursivas y por tal motivo se presenta el siguiente resultado.

Resultado clave

Como se ha mencionado anteriormente, Hans U. Gerber propone por primera vez el Modelo Binomial Compuesto y establece el siguiente Teorema como herramienta para definir un resultado que determine la probabilidad de ruina sin tener que recurrir a su cálculo recursivo.

Por otra parte, en el contexto de este autor, se dice que el proceso de riesgo X_t visita al estado y al tiempo t, es decir, $X_t = y$. En consecuencia, el inciso a) del siguiente Teorema se puede interpretar como el número esperado de visitas al estado y y el inciso b) como la probabilidad de que el estado y será alguna vez visitado.
Así mismo, se tiene que $S_0 = 0$ y $S_k = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k$ como el monto total de reclamaciones en los primeros k periodos. De igual manera, se emplea la notación

$$a^{(k)} := k!\binom{a}{k}$$

para las potencias factoriales de a.

Teorema 2.2.1. a) Para toda y

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{p}{q}\right)^k E\Big[\big(S_k + y\big)^{(k)} q^{S_k+y}\Big] = \frac{1}{1-p\mu}.$$

b) Para toda $y \neq 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{p}{q}\right)^k E\Big[\big(S_k + y - 1\big)^{(k-1)} q^{S_k+y}\Big] = \frac{1}{y}.$$

Demostración. a) Sea Y un elemento genérico de la secuencia $\{Y_n\}$ de vaiid y supongamos que g denota su fgp, es decir,

$$g(z) = E\big[z^y\big],$$

con z una vecindad alrededor de 1. De este modo observe que la fgp de la v.a. $S_k + y$ con $k \geq 1$ y $y \in \mathbb{Z}^+$ se encuentra caracterizada de la siguiente forma

$$\begin{aligned} E\Big[z^{S_k+y}\Big] &= E\Big[z^y \prod_{i=1}^{k} z^{Y_i}\Big] \\ &= z^y \prod_{i=1}^{k} E\Big[z^{Y_i}\Big] \\ &= z^y g(z)^k. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$E\Big[z^{S_k+y}\Big] = z^y g(z)^k. \tag{2.10}$$

Derivando (2.10) *k-veces,* el teorema de convergencia dominada nos permite llegar a la siguiente cadena de equivalencias.

$$\begin{aligned} E\Big[(S_k + y)\ \ z^{S_k+y-1}\Big] &= D\big[z^y g(z)^k\big] \\ E\Big[(S_k + y)(S_k + y - 1)\ \ z^{S_k+y-2}\Big] &= D^2\big[z^y g(z)^k\big] \\ &\vdots \\ E\Big[(S_k + y)(S_k + y - 1)\cdots(S_k + y - (k+1))\ \ z^{S_k+y-k}\Big] &= D^k\big[z^y g(z)^k\big]. \end{aligned}$$

Usando la notación

$$a^{(k)} = k!\binom{a}{k},$$

se llega a:

$$E\Big[(S_k + y)^{(k)}\ \ z^{S_k+y-k}\Big] = D^k\big[z^y g(z)^k\big].$$

Sea $h(z) = D^k\Big[g(z)^k z^y\Big]$, entonces

$$E\Big[(S_k + y)^{(k)}\ \ z^{S_k+y-k}\Big] = h(z),$$

evaluando lo anterior en $z = q$,

$$E\Big[(S_k + y)^{(k)}\ \ q^{S_k+y}q^{-k}\Big] = h(q).$$

Entonces,

$$E\Big[(S_k + y)^{(k)}\ \ q^{S_k+y}\Big] = q^k h(q).$$

Equivalentemente,

$$E\Big[(S_k+y)^{(k)}\ \ q^{S_k+y}\Big] = q^k D^k\Big[g(z)^k z^y\Big]\Big|_{z=q}.$$

Entonces,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{p}{q}\right)^k E\big[(S_k+y)^{(k)}\ \ q^{S_k+y}\big] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}p^k D^k\Big[g(z)^k z^y\Big]\Big|_{z=q}.$$

En consecuencia,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{p}{q}\right)^k E\big[(S_k+y)^{(k)} q^{S_k+y}\big] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}p^k h(q). \tag{2.11}$$

Realizando un desarrollo en series de Taylor de la función $h(q)$ alrededor de $q=1$, se tiene que:

$$\begin{aligned} h(q) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^{(n)}(1)}{n!}\ (q-1)^n \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\ D^{k+j}\Big[g(z)^k z^y\Big]\Big|_{z=1}(q-1)^j \\ &= D^k\left[\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}(-p)^j D^j\Big[g(z)^k z^y\Big]\Big|_{z=1}\right]. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (2.10),

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{p}{q}\right)^k E\Big[(S_k+y)^{(k)} q^{S_k+y}\Big] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}p^k D^k\left[\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}(-p)^j D^j\Big[g(z)^k z^y\Big]\Big|_{z=1}\right]. \tag{2.12}$$

Realizamos el cambio de variable $n = k + j$ y la expresión (2.12) puede reescribirse como,

$$
\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, p^k D^k \left[\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n-k)!} (-p)^{n-k} D^{n-k} \Big[g(z)^k z^y \Big] \Big|_{z=1} \right] \\
= \; & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{k!}\, p^k \frac{1}{(n-k)!} (-p)^{n-k} D^n \Big[g(z)^k z^y \Big] \Big|_{z=1} \\
= \; & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n!} \binom{n}{k} p^n (-1)^{n-k} D^n \Big[g(z)^k z^y \Big] \Big|_{z=1} \\
= \; & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!}\, {}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} D^n \Big[g(z)^k z^y \Big] \Big|_{z=1} \\
= \; & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, p^n D^n \left[\sum_{k=0}^{n} p^n (-1)^{n-k} D^n \Big[g(z)^k z^y \Big] \Big|_{z=1} \right].
\end{aligned}
$$

Por el Teorema del binomio se sigue que:

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, p^n D^n \left[\Big(g(z) - 1 \Big)^n z^y \right] \Big|_{z=1}.
$$

Ahora observe que si $g(1) = 1$ y $g'(1) = \mu$,

$$
D^n \left[\Big(g(z) - 1 \Big)^n z^y \right] \Big|_{z=1} = \mu^n n!.
$$

Probaremos la hipótesis anterior por la regla del producto.
Para $n = 1$,

$$
D\Big[\big(g(z) - 1 \big) z^y \Big] \Big|_{z=1} = g'(z) z^y + g(z) y\, z^{y-1} \Big|_{z=1} = g'(z) 1^y = \mu.
$$

Para $n = 2, \cdots, k$,

$$
\begin{aligned}
D^2\Big[\big(g(z)-1\big)^2 z^y\Big]\Big|_{z=1} &= D\Big[2\big(g(z)-1\big)g'(z)\,z^y + \big(g(z)-1\big)^n y\,z^{y-1}\Big]\Big|_{z=1} \\
&= 2g'(z)g'(z)z^y + 2\big(g(z)-1\big)g''(z)z^y \\
&+ 2\big(g(z)-1\big)g'(z)yz^{y-1} + 2\big(g(z)-1\big)g'(z)yz^{y-1} \\
&+ \big(g(z)-1\big)^2 y(y-1)z^{y-2}\Big|_{z=1} \\
&= 2\mu^2. \\
&\cdots \\
D^k\Big[\big(g(z)-1\big)^k z^y\Big]\Big|_{z=1} &= D^{k-1}\Big[k\big(g(z)-1\big)^{k-1}g'(z)z^y + \big(g(z)-1\big)^k yz^{y-1}\Big]\Big|_{z=1} \\
&= D^{k-2}\Big[k(k-1)\big(g(z)-1\big)^{k-2}g'(z)g'(z)\,z^y \\
&+ k\big(g(z)-1\big)^{k-1}g''(z)z^y + k\big(g(z)-1\big)^{k-1}g'(z)y\,z^{y-1} \\
&+ k\big(g(z)-1\big)^{k-1}g'(z)yz^{y-1} \\
&+ \big(g(z)-1\big)^k y(y-1)z^{y-2}\Big]\Big|_{z=1} \\
&\cdots \\
&+ k(k-1)\cdots 2\big(g'(z)\big)^k z^y \\
&+ (k-1)\cdots 2\big(g(z)-1\big)g^k(z)z^y \\
&+ \cdots + \big(g(z)-1\big)^k y(y-1)\cdots 2z^{y-k}\Big]\Big|_{z=1} \\
&= k!\;\mu^k.
\end{aligned}
$$

En consecuencia,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{p}{q}\right)^k E\Big[\big(S_k+y\big)^{(k)}\,q^{S_k+y}\Big] &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^n}{n!}\mu^n n! \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\big(p\mu\big)^n.
\end{aligned}
$$

Puesto que $p\mu < 1$, simplificando el resultado obtenemos

$$
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{p}{q}\right)^k E\Big[\big(S_k+y\big)^{(k)}\,q^{S_k+y}\Big] = \frac{1}{1-p\mu}, \tag{2.13}
$$

lo que prueba el inciso a) de la demostración.

Notemos que la probabilidad de que haya exactamente n visitas a un estado $x \geq 0$, es

$$
\psi(0)^{n-1}\big(1-\psi(0)\big), \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \cdots.
$$

Entonces el número esperado de visitas al estado x es

$$\frac{1}{1-\psi(0)},$$

que es la expresión del lado derecho del Teorema 2.2.1.

b) Para probar el Teorema 2.2.1.b, proponemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{p}{q}\right)^{k} E\Big[\big(S_k+y-1\big)^{(k-1)} q^{S_k+y}\Big] = \frac{q^y}{y} + R, \tag{2.14}$$

donde

$$R = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{p}{q}\right)^{k} E\Big[\big(S_k+y-1\big)^{(k-1)} q^{S_k+y}\Big]. \tag{2.15}$$

En la prueba del Teorema 2.2.1.a) se definió a Y como un elemento genérico de la secuencia $\{Y_n\}$ y fgp, $g(z) = E[z^y]$, con z una vecindad alrededor de 1. De este modo observe que la fgp de la v.a. $S_k + y - 1$ con $k \geq 2$ y $y \in \mathbb{Z}^+$ se encuentra caracterizada de la siguiente forma:

$$E\big[z^{S_k+y-1}\big] = E\left[z^{y-1}\prod_{i=1}^{k} z^{y_i}\right].$$

En consecuencia,

$$E\big[z^{S_k+y-1}\big] = z^{y-1} g(z)^k. \tag{2.16}$$

Derivando (2.16) *(k-1)-veces* y usando nuevamente

$$a^{(k)} = k!\binom{a}{k},$$

llegamos a la siguiente equivalencia

$$E\big[(S_k+y-1)^{(k-1)} z^{S_k+y-k}\big] = D^{k-1}\big[z^{y-1} g(z)^k\big].$$

Sea $h(z) = D^{k-1}\big[g(z)^k z^{y-1}\big]$, entonces

$$E\Big[(S_k+y-1)^{(k-1)}\ \ z^{S_k+y-k}\Big] = h(z),$$

evaluando lo anterior en $z = q$,

$$E\Big[(S_k+y-1)^{(k-1)}\ \ q^{S_k+y} q^{-k}\Big] = h(q).$$

Entonces,

$$E\Big[(S_k+y-1)^{(k-1)}\ \ q^{S_k+y}\Big]=q^k h(q).$$

Equivalentemente,

$$E\Big[(S_k+y-1)^{(k-1)}\ \ q^{S_k+y}\Big]=q^k D^{k-1}\Big[g(z)^k z^{y-1}\Big]\Big|_{z=q}. \tag{2.17}$$

Así,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{p}{q}\right)^k E\big[(S_k+y-1)^{(k-1)}\ \ q^{S_k+y}\big]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}p^k D^{k-1}\Big[g(z)^k z^{y-1}\Big]\Big|_{z=q}$$

En consecuencia,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{p}{q}\right)^k E\big[(S_k+y-1)^{(k-1)}\ \ q^{S_k+y}\big]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\ p^k\ h(q). \tag{2.18}$$

Realizando un desarrollo en series de Taylor, análogo al de la prueba del Teorema 2.2.1.a, de la función $h(q)$ alrededor de $q=1$, se tiene que:

$$h(q)\ \ =\ \ D^{k-1}\left[\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}(-p)^j D^j\Big[g(z)^k z^{y-1}\Big]\Big|_{z=1}\right].$$

Sustituyendo en (2.15), tenemos que

$$R=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\ p^k D^{k-1}\left[\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}(-p)^j D^j\Big[g(z)^k z^{y-1}\Big]\Big|_{z=1}\right]. \tag{2.19}$$

Realizamos el cambio de variable $n=k+j$, tomando en cuenta que la suma empieza a correr desde $k=1$ a diferencia de la prueba anterior, así la expresión (2.19) puede reescribirse como,

$$\begin{aligned}
R\ &=\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\ p^k D^{k-1}\left[\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{(n-k)!}(-p)^{n-k}D^{n-k}\Big[g(z)^k z^{y-1}\Big]\Big|_{z=1}\right]\\
&-\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(-p)^n D^{n-1}\Big[g(z)z^{y-1}\Big]\Big|_{z=1}\\
&=\ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n!}\binom{n}{k}p^n(-1)^{n-k}\ D^{n-1}\Big[g(z)^k z^{y-1}\Big]\Big|_{z=1}\\
&-\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(-p)^n D^{n-1}\Big[g(z)z^{y-1}\Big]\Big|_{z=1}\\
&=\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}p^n D^{n-1}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}g(z)z^{y-1}\right]\Bigg|_{z=1}.
\end{aligned}$$

Utilizando el Teorema del Binomio en la primera expresión y recorriendo el índice en la derivada del segundo término se sigue,

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\, p^n D^{n-1}\left[\Big(g(z)-1\Big)^n z^{y-1}\right]\Big|_{z=1} - \frac{1}{y}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(-p)^n D^n\left[z^y\right]\big|_{z=1}.$$

Notemos que

$$D^{n-1}\left[\big(g(z)-1\big)^n z^{y-1}\right]\big|_{z=1} = 0.$$

Entonces

$$R = -\frac{1}{y}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(-p)^n D^n\left[z^y\right]\Big|_{z=1}.$$

Así mismo, observemos que

$$D^n\left[z^y\right]\Big|_{z=1} = \prod_{k=1}^{n}(y-k).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} R &= -\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(-p)^n\,\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(y-k) \\ &= -\frac{1}{y}\sum_{n=1}^{\infty}(-p)^n\binom{y}{n} \\ &= -\frac{1}{y}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\binom{y}{n}p^n \\ &= -\frac{1}{y}\Big[\big(1-p\big)^y - 1\Big] \\ &= -\frac{1}{y}\big(q^y - 1\big). \end{aligned}$$

Por lo tanto, al sustituir R en la expresión (2.14) se concluye que el lado izquierdo del Teorema 2.2.1.b es $\frac{1}{y}$. □

2.2.2. La probabilidad de ruina según Gerber

En esta sección se presentará el Teorema de la probabilidad de ruina que deriva Gerber en el artículo *Mathematical fun with the compound binomial process* [7]. En donde propone determinar la probabilidad de ruina centrándose en S_k, es decir, en el monto total de las reclamaciones hasta los primeros k periodos; evitando el desarrollo del procedimiento recursivo.

Teorema 2.2.2. La probabilidad de ruina para el modelo binomial compuesto se puede expresar como

$$\psi(0) = p\mu,$$
$$\psi(u) = \Big(1 - p\mu\Big) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{p}{q}\right)^k E\Big[(S_k - u)_+{}^{(k)} \;\; q^{S_k - u}\Big] \ , \qquad u = 1, 2, \cdots .$$

Demostración. Su prueba se desarrollara en dos casos. El primer caso es cuando el capital inicial sea $u = 0$ y el segundo en el que $u > 0$.

Caso 1: $u = 0$.
La probabilidad de ruina $\psi(0)$ puede interpretarse de manera más general como la probabilidad de que el capital no regrese o se encuentre por debajo de su estado inicial.

Para que la ruina se presente es necesaria una última visita al estado 0. Así, la probabilidad de ruina será la probabilidad de una última visita a dicho estado 0.

Sea $S_0 = 0$ y $S_k = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k$ el monto total de las reclamaciones en los primeros k periodos. El proceso de riesgo $\{X_t\}$ visita al estado 0 entre la *k-ésima* y la *(k+1)-ésima* reclamación si y solo si el número de reclamaciones entre 0 y $t = S_k$ es exactamente k.
Entonces la probabilidad condicional, dado S_k, para una visita a 0 es la probabilidad binomial

$$P(N_t = k) = \binom{S_k}{k} p^k q^{S_k - k}.$$

Si el superávit del proceso no regresa al origen se dirá que es la última visita a 0. Entonces la probabilidad de que la última visita a este estado tome lugar entre (o en) la *k-ésima* y la *(k+1)-ésima* reclamación es

$$E\left[\binom{S_k}{k} p^k q^{S_k - k}\right] \Big(1 - \psi(0)\Big).$$

Ahora, sumando sobre $k = 1, 2, \cdots$ la probabilidad de ruina que es también la probabilidad de una última visita al estado 0 es

$$\begin{aligned}
\psi(0) &= \sum_{k=1}^{\infty} E\left[\binom{S_k}{k} p^k q^{S_k-k}\right] \quad \Big(1-\psi(0)\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \quad p^k q^{-k} E\left[\frac{S_k!}{(S_k-k)!} \quad q^{S_k}\right]\Big(1-\psi(0)\Big).
\end{aligned}$$

Utilizando la notación anterior

$$a^{(k)} = k!\binom{a}{k},$$

obtenemos

$$\psi(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{p}{q}\right)^k E\left[{S_k}^{(k)} q^{S_k}\right]\Big(1-\psi(0)\Big).$$

Del Teorema 2.2.1.a. se infiere que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{p}{q}\right)^k E\left[{S_k}^{(k)} q^{S_k}\right] = \frac{p\mu}{1-p\mu}.$$

Así,

$$\psi(0) = \frac{p\mu}{1-p\mu} \Big(1-\psi(0)\Big).$$

Despejando $\psi(0)$ obtenemos,

$$\psi(0) = p\mu. \tag{2.20}$$

Caso 2: $u > 0$.

Ahora veremos el caso general en donde el capital inicial es un valor entero positivo, $u > 0$. De manera análoga al Caso 1, sea $S_0 = 0$ y $S_k = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k$. Si $S_k < u$ una visita a 0 no sería posible entre (o en) la *k-ésima* y *(k+1)-ésima* reclamación. En cambio si $S_k \geq u$, una visita a 0 entre (o en) la *k-ésima* y *(k+1)-ésima* reclamación tendrá lugar en el tiempo $t = S_k - u$ siempre y cuando $N_t = k$. Entonces la probabilidad condicional para la última visita a 0 entre (o en) la *k-ésima* y *(k+1)-ésima* reclamación es

$$\binom{(S_k-u)_+}{k} p^k q^{S_k-u-k}\Big(1-\psi(0)\Big).$$

Así, la probabilidad de ruina o de una última visita a 0 tiene lugar entre (o en) la *k-ésima* y *(k+1)-ésima* reclamación, es decir,

$$E\left[\binom{(S_k-u)_+}{k}p^k q^{S_k-u-k}\right] \quad \Big(1-\psi(0)\Big).$$

Por lo tanto, al sumar sobre $k=1,2,\cdots$, se sigue que la probabilidad de ruina esta dada por

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \sum_{k=1}^{\infty} E\left[\binom{(S_k-u)_+}{k}\ p^k\ q^{S_k-u-k}\right]\ \Big(1-\psi(0)\Big)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{p}{q}\right)^k E\left[\frac{(S_k-u)!}{(S_k-u-k)!}\quad q^{S_k-u}\right]\ \Big(1-\psi(0)\Big).\end{aligned}$$

Utilizando la notación

$$a^{(k)} = k!\binom{a}{k},$$

se tiene

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{p}{q}\right)^k E\Big[(S_k-u)_+{}^{(k)}\ \ q^{S_k-u}\Big]\ \Big(1-\psi(0)\Big).$$

Al sustituir $\psi(0)$ en la última expresión tenemos

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{p}{q}\right)^k E\Big[(S_k-u)^{(k)}\ \ q^{S_k-u}\Big]\ \Big(1-p\mu\Big). \tag{2.21}$$

□

A través de este capítulo se han presentado algunos resultados de los modelos de riesgo en tiempo discreto, incluyendo el Modelo Binomial Compuesto con algunas de sus extensiones exponiendo de manera más detallada la prueba de estos resultados con la finalidad de facilitar su uso y programación como se muestra en el siguiente capítulo. No obstante, la investigación de estos temas tiene un extenso contenido más allá de los que se han desarrollado en el presente trabajo.

Capítulo 3

Aplicaciones

En este capítulo, se explica el desarrollo de una simulación básica e ilustrativa efectuada en Visual Basic for Applications (VBA) que es una extensión del programa Excel que se ha denominado como *”Simulador de ruina”*; con el fin de familiarizarse con el funcionamiento de los conceptos descritos a lo largo del capítulo anterior.

Dicho *”Simulador de ruina”* se compone de varias rutinas o programas en VBA y se clasifican en tres bloques esenciales. Para facilitar su uso se ha generado una pestaña especial para ejecutar cada programa separando cada bloque, dicha pestaña se ha denominado **RUINA** como lo muestra la Figura 3.1.

El primer bloque introduce el concepto de probabilidad de ruina. El bloque 1 contiene 2 opciones: Trayectoria y Datos de Y. Los resultados de esta sección se presentan en las hojas Trayectoria y Prob. Ruina iluminadas de color rojo. El segundo bloque simula la probabilidad de ruina cuando los montos de las reclamaciones se distribuyen como el problema de la ruina del jugador y como una distribución geométrica, ejemplos que se revisaron en la Sección 2.1.1. El último bloque proporciona la probabilidad de ruina cuando los datos cumplen las condiciones del Modelo Binomial Compuesto y optimiza el Teorema 2.2.2.

3.1. Bloque 1

En la Sección 1.5 y a lo largo del Capítulo 2, se ha mostrado que el capital de una compañía aseguradora a lo largo del tiempo se ve afectada por varios factores, como lo son el número y el monto de las reclamaciones. Conocer la trayectoria del capital a través del tiempo da información acerca del comportamiento del superavit y permite observar en que momento el capital disminuye, aumenta o se vuelve cero.

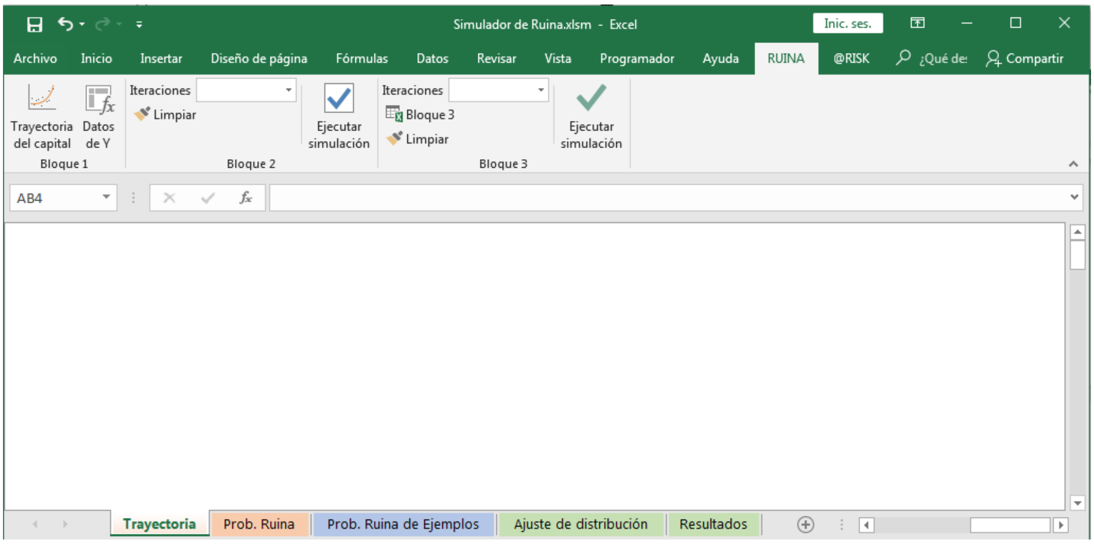


Figura 3.1: Simulador de Ruina.

Generación de la variable aleatoria Y

La trayectoria del capital a través del tiempo, no es más que la simulación del Modelo clásico de riesgo descrito en la expresión (2.1). Para ello es necesario obtener valores de la variable aleatoria Y, es decir, los valores de las reclamaciones o pérdidas. Por lo tanto, el objetivo de esta sección es describir de manera general, el *Método de la transformada inversa* que se ha utilizado para generar los valores específicos de Y, dada su distribución.

Método de la transformada inversa para distribuciones discretas

Sea Y una variable aleatoria con probabilidades positivas en los puntos $y_1, y_2, \cdots, y_m$ y sea $p(y_i) = P(Y = y_i)$ para $i = 1, 2 \cdots, m$ su función de probabilidad. Sin pérdida de generalidad asumimos que $y_1 < y_2 < \cdots < y_m$. Entonces:

1. Generamos un número aleatorio entre 0 y 1 : $w \sim U(0, 1)$.

2. Generamos Y,

$$Y = \begin{cases} y_1 & \text{si } 0 \leq w < p(y_1), \\ y_2 & \text{si } p(y_1) \leq w < p(y_1) + p(y_2), \\ y_3 & \text{si } p(y_1) + p(y_2) \leq w < p(y_1) + p(y_2) + p(y_3), \\ \cdots & \\ y_m & \text{si } w > p(y_1) + p(y_2) + \cdots + p(y_{m-1}). \end{cases}$$

Donde $p(y_1) + p(y_2) + \cdots + p(y_m) = 1$.

Por consiguiente, para ilustrar la trayectoria del capital, se ha ocupado el Ejemplo 7.1 del libro *Introducción a la teoría del riesgo* [13], en donde se supone que las reclamaciones Y se distribuyen como la siguiente tabla:

Y	0	1	2
p(y)	0.5	0.2	0.3

Cuadro 3.1: Distribución de Y.

Así que al seleccionar la opción **Trayectoria del capital** del simulador se despliega una tabla que contiene el Tiempo, Y_i y X_n y elabora una gráfica de acuerdo a X_n, es decir, al capital al tiempo n. Los resultados de esta opción se sitúan en la hoja denominada Trayectoria, como se observa en la Figura 3.2, y se basan en el cálculo de X_n de acuerdo al capital inicial que se ha insertado, al tiempo n, puesto que sin pérdida de generalidad se ha supuesto que el monto por concepto de primas es 1 y la acumulación de los valores que se han generado de la variable aleatoria Y.

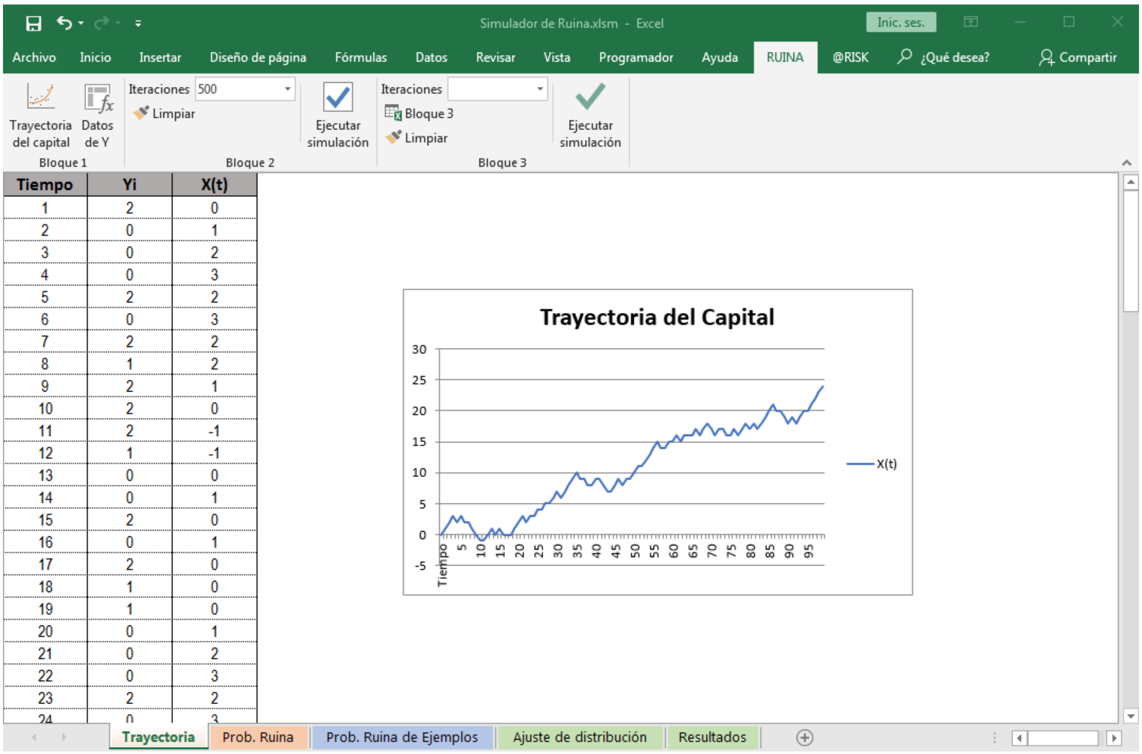


Figura 3.2: Vista de la hoja Trayectoria.

Es así que en la programación de esta opción se ha fijado que solo se observe los primeros 100 periodos de tiempo. En la Figura 3.3 se muestra como ha sido la Trayectoria del Capital en una sola corrida o iteración cuando el capital inicial es 5. La intención de esta opción es mostrar de manera visual si se presenta el primer momento en que ocurre la ruina, es decir, si existe τ.

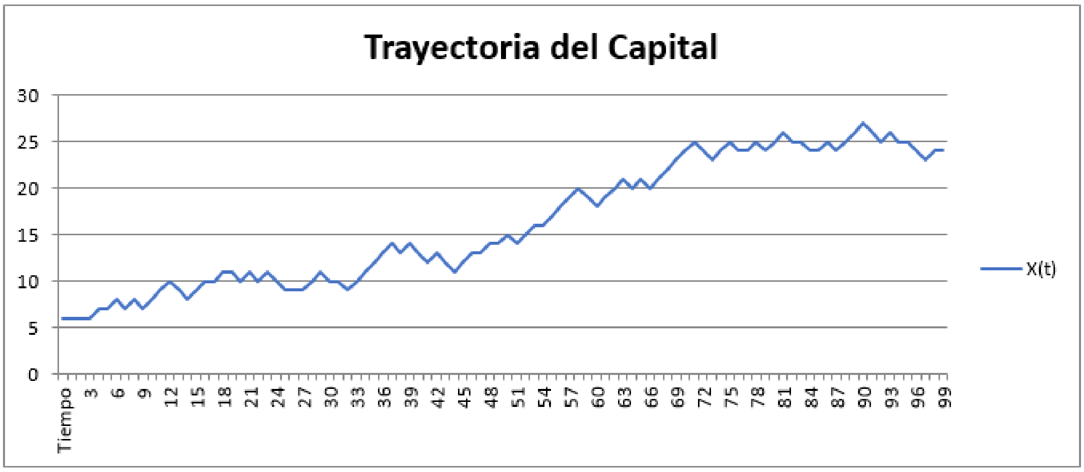


Figura 3.3: Trayectoria del capital con u=5.

A su vez, este procedimiento es la primera parte para simular la probabilidad de ruina que se verá en la siguiente sección.

Por otra parte, en la segunda opción del Bloque 1: *Datos de Y,* en donde de manera directa se proporciona la probabilidad de ruina para los primeros valores de u, utilizando directamente las fórmulas de la Proposición 2.1.2. Consiste en crear manualmente una tabla semejante al Cuadro 3.1 en donde se ingresan el número de probabilidades que se requieran y los valores de tales probabilidades verificando que la suma de estos sea 1.

y	0	1	2	3
f(y)	0.45	0.3	0.13	0.12

Cuadro 3.2: Datos de Y.

Lo que realizará el programa es calcular los 3 sumandos de $\psi(u)$ de la Proposición 2.1.2 para obtener la probabilidad de ruina de los primeros valores de u, hasta que la probabilidad alcance la cota fija 0.05.

Por ejemplo, si requerimos ingresar las probabilidades, 0.45, 0.3, 0.13, 0.12; al seleccionar la opción Datos de Y, se obtendrá una tabla en la hoja Prob. Ruina como lo muestra el Cuadro 3.2.

Capital inicial	Probabilidad de ruina
0	0.92
1	0.822222222
2	0.72345679
3	0.621179698
4	0.538021643
5	0.464548832
6	0.401555123
7	0.346965868
8	0.299840182
9	0.25910211
10	0.223902998
11	0.193484451
12	0.167198828
13	0.144484091
14	0.124855294
15	0.107893143
16	0.09323538
17	0.080568938
18	0.069623289
19	0.060164655
20	0.051991019
21	0.044927807

Cuadro 3.3: Probabilidad de ruina para los primeros valores de u.

También obtendremos la lista del Capital inicial con su respectiva probabilidad de ruina para los primeros 21 valores de u como se ve en el Cuadro 3.3 además de un gráfico para verificar que a mayor valor del capital inicial la probabilidad de ruina irá disminuyendo como se muestra en la Figura 3.4.

Finalmente, cabe destacar que la distribución de Y, de acuerdo al Cuadro 3.1, se encuentra en la programación de *Trayectoria del capital* de manera predeterminada, es decir, no admite una modificación y solo es necesario insertar el capital

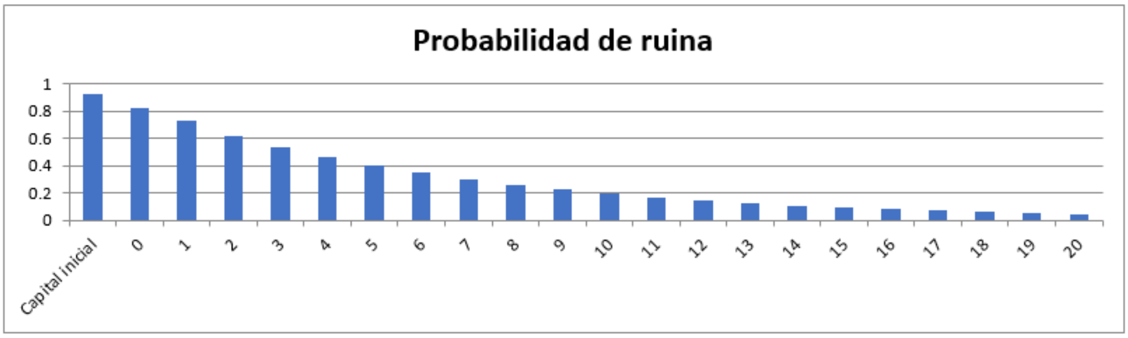


Figura 3.4: Gráfico de la probabilidad de ruina los primeros valores de u.

inicial para que se despliegue la trayectoria. En cambio, en la opción *Datos de Y*, se insertan manualmente la probabilidad de Y cuando toma valores consecutivos desde 0.

3.2. Bloque 2

El Bloque 2 se basa esencialmente en simular la probabilidad de ruina cuando la distribución de Y se comporta como el problema de la ruina del jugador y como una distribución geométrica; ejemplos que se vieron en la Sección 2.1.1 del Capítulo 2. Como se mencionó anteriormente, la Trayectoria del capital permite observar si u se vuelve 0 o un valor negativo en una sola repetición. Así que básicamente la simulación consiste en el Método Monte Carlo.

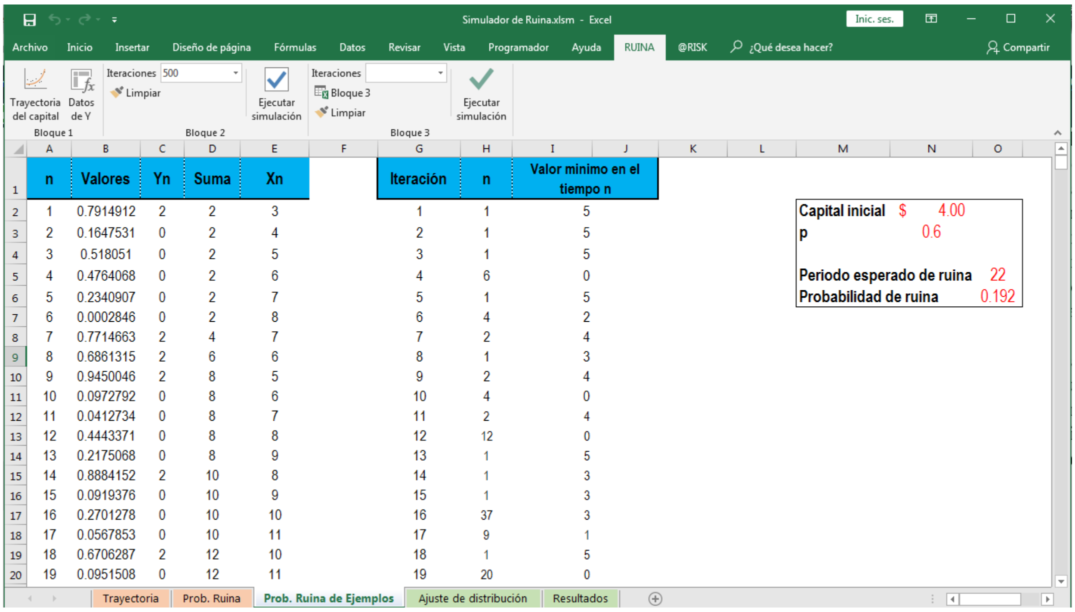
Método Monte Carlo

El Método Monte Carlo es usualmente utilizado para realizar simulaciones estocásticas mediante el uso de una secuencia de valores aleatorios de una o varias variables aleatorias. Consta principalmente de lo siguiente:

1. construcción de un modelo adecuado de observación.
2. Diseño del experimento que se desea analizar.
3. Generación de valores o números aleatorios de una o más variables aleatorias para determinar alguna propiedad.
4. Análisis de los resultados que el método ha arrojado.

Gran parte de este método se ha realizado en el Bloque 1, al generar una muestra aleatoria para la variable de importancia Y, sin embargo, aún no se contaba con más información para aproximar alguna propiedad de relevancia ya que solo se realiza en una corrida o repetición.

En cambio, el Bloque 2 busca determinar la probabilidad de ruina haciendo el procedimiento de Trayectoria del Capital varias repeticiones o iteraciones. A diferencia del Bloque 1, X_n cortará su recorrido cuando sea igual o menor a 0, en caso contrario, terminará hasta el periodo 365. Luego guardará su valor y el periodo en que se ha terminado la corrida. En consecuencia la probabilidad de ruina será el promedio de casos en que $X_n \leq 0$ entre el número total de iteraciones.



n	Valores	Yn	Suma	Xn	Iteración	n	Valor minimo en el tiempo n
1	0.7914912	2	2	3	1	1	5
2	0.1647531	0	2	4	2	1	5
3	0.518051	0	2	5	3	1	5
4	0.4764068	0	2	6	4	6	0
5	0.2340907	0	2	7	5	1	5
6	0.0002846	0	2	8	6	4	2
7	0.7714663	2	4	7	7	2	4
8	0.6861315	2	6	6	8	1	3
9	0.9450046	2	8	5	9	2	4
10	0.0972792	0	8	6	10	4	0
11	0.0412734	0	8	7	11	2	4
12	0.4443371	0	8	8	12	12	0
13	0.2175068	0	8	9	13	1	5
14	0.8884152	2	10	8	14	1	3
15	0.0919376	0	10	9	15	1	3
16	0.2701278	0	10	10	16	37	3
17	0.0567853	0	10	11	17	9	1
18	0.6706287	2	12	10	18	1	5
19	0.0951508	0	12	11	19	20	0

Figura 3.5: Vista de la hoja Prob. Ruina de Ejemplos.

En el apartado del Bloque 2 se ha generado un cuadro combinado o combobox con el nombre de Iteraciones, de manera predeterminada las iteraciones son 50, 100, 500 y 1000. Al fijar el número de veces que se repite el procedimiento se sigue seleccionar la opción Ejecutar simulación. De aquí aparecerán un par de formularios en donde se selecciona alguno de los 2 ejemplos, el Capital inicial y el parámetro p que requieren ambas distribuciones. Recordemos que p debe ser un valor entre 0. 5 y 1 para garantizar la Condición de ganancia neta.

Luego en la hoja denominada Prob. de Ruina de Ejemplos se colocan los resultados: Probabilidad de ruina y Periodo esperado de ruina. Además de una tabla que muestra el número de iteración, el periodo n donde se ha detenido la corrida y el valor mínimo que ha alcanzado con el objetivo de corroborar el comportamiento de la simulación, como se ve en la Figura 3.5.

Iteraciones	100	1000
Periodo esperado de ruina	8	9
Probabilidad de ruina	0.660	0.667

Cuadro 3.4: Resultados de la simulación.

El Cuadro 3.4 presenta la aproximación de la probabilidad de ruina por medio de la simulación del Bloque 2 cuando Y se comporta como una distribución geométrica con parámetro $p = 0.55$ y capital inicial $u = 1$. En la segunda columna nos indican los resultados de la simulación con 100 repeticiones y en la tercera columna con 1000.

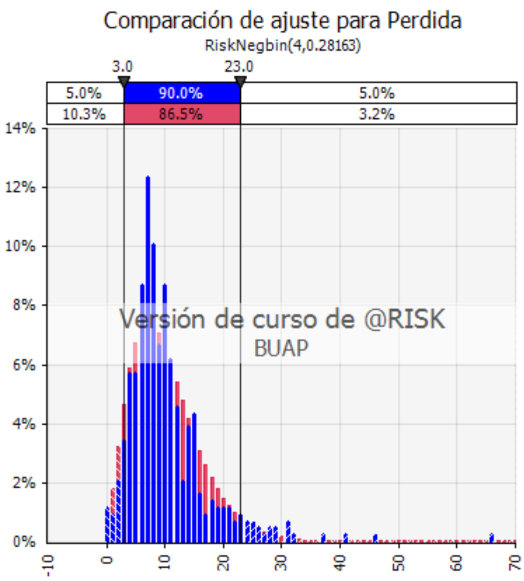
3.3. Bloque 3

La finalidad del Bloque 3, es simular la probabilidad de ruina del Modelo Binomial compuesto de acuerdo al Teorema 2.2.2 del Capítulo 2. Se ha utilizado la base de datos de la aseguradora *Italian Motor-TPL* que contiene los montos en euros de las reclamaciones efectuadas entre los años 1997 y 2012. Esta información forma parte de la paquetería *Casdataset* del software *R* (Véase en [4, pág.63]). Los conceptos vistos en el presente capítulo se apoyan en [10], [17] y @Risk Ayuda.

Antes de iniciar la aplicación del modelo, es importante tomar en cuenta que el Modelo binomial compuesto es completamente discreto donde las primas, montos de reclamación y el capital inicial se asumen que son valores enteros y a lo más se realiza una reclamación en cada periodo. En consecuencia, para facilitar el manejo de los montos de las reclamaciones se han redondeado y fijado en términos de 100k. De los 457 datos se han tomado en cuenta 438 para asegurar que no exista más de una reclamación diaria.

Ajuste de distribución

Como en el Bloque 1 y 2, uno de los factores fundamentales en el cálculo de la probabilidad de ruina es conocer el comportamiento de la variable Y. Para discernir la distribución de los montos de las reclamaciones se realiza el ajuste de distribución con la ayuda del software @RISK de Palisade Decision Tools como herramienta en Excel. Una de las opciones de @Risk es el ajuste de distribución de una base de datos y propone las distribuciones que mejor se acoplen bajo los



	Entrada	NegBin
Mínimo	0.000	0.000
Máximo	66.000	+∞
Media	10.203	10.203
Moda	7.000	7.000
Mediana	8.000	9.000
Desv Est	6.881	6.019
Asimetría	2.5621	1.0137
Curtosis	15.5507	4.5276
Izquierda X	3.0	3.0
Izquierda P	5.0%	10.3%
Derecha X	23.0	23.0
Derecha P	95.0%	96.8%
Dif X	20.000	20.000
Dif P	90.0%	86.5%
1%	0.000	1.000
5%	3.000	2.000
10%	4.000	3.000
15%	5.000	4.000
20%	6.000	5.000
25%	6.000	6.000
30%	7.000	6.000

Figura 3.6: Ajuste de distribución de la base de datos.

criterios de bondad de ajuste más destacados, ofrece una variedad de informes, gráficos y nos muestra el análisis descriptivo de los datos, que ayudan a evaluar los ajustes y a seleccionar la mejor opción para el modelo. La Figura 3.6 muestra el ajuste de distribución con la comparación de los datos de entrada y la distribución ajustada. Las distribuciones propuestas son: Binomial negativa, Poisson, Geométrica y la Uniforme discreta. @RISK clasifica todas las distribuciones ajustadas utilizando una o más de las estadísticas de ajuste, se seleccionó el Criterio de Información de Akaike.

Criterio de información de Akaike (AIC)

En el informe de @Risk por medio del criterio de información de Akaike (AIC por sus siglas en inglés) ha comparado el ajuste entre las distribuciones como se ve en la Figura 3.7. El AIC se expresa de la siguiente forma:

$$AIC = 2k - 2ln(L),$$

donde k es el número de parámetros en el modelo estadístico y L es el máximo valor de la función de máxima verosimilitud del modelo. Así que el mejor candidato es el modelo que tenga el menor valor del AIC.

Por lo tanto, la distribución Binomial negativa es el modelo que mejor se ajusta a los datos.

	Entrada	NegBin	Poisson	Geomet	IntUniform
Ajuste					
Función		RiskNegbin(4,0.28163)	RiskPoisson(10.203)	RiskGeomet(0.08926)	RiskIntUniform(0,66)
Clasificaciones por estadística ajustada [4 ajustes válidos]					
Akaike (AIC)		Núm. 1	Núm. 3	Núm. 2	Núm. 4
Criterios de información					
Akaike (AIC)		2,745.03	3,423.10	2,954.29	3,687.34

Figura 3.7: Información del AIC.

Método de momentos

Ahora para calcular los parámetros de la distribución binomial negativa se ha utilizado el método de momentos. Este método es utilizado comúnmente para obtener estimadores puntuales. Se basa en la idea de que los momentos muéstrales (m_k) son buenas estimaciones de sus correspondientes momentos poblacionales (μ_k). Entonces las soluciones de las ecuaciones

$$\mu_k = m_k, \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \cdots, h,$$

donde h es el número de parámetros, serán las estimaciones de los parámetros. Así, las estimaciones para una distribución binomial negativa con parámetros r y s son:

$$\hat{r} = \frac{\overline{x}^{\,2}}{s^2 - \overline{x}} \qquad \text{y} \qquad \hat{s} = \frac{\overline{x}}{s^2}.$$

Al sustituir $\overline{x} = 10.2031$ y $s^2 = 47.3430$ obtenemos

$$\hat{r} = 2.803 \approx 3 \qquad \hat{s} = 0.215516.$$

Por otra parte, por medio del gráfico Probabilidad-Probabilidad (P-P Plot) se evalúa visualmente la calidad del ajuste como se observa en la Figura 3.8.

Otro rasgo del Modelo binomial compuesto es el proceso binomial que rige el número de reclamaciones. Por lo tanto, es necesario determinar la probabilidad de que ocurra una reclamación, es decir, su parámetro p.

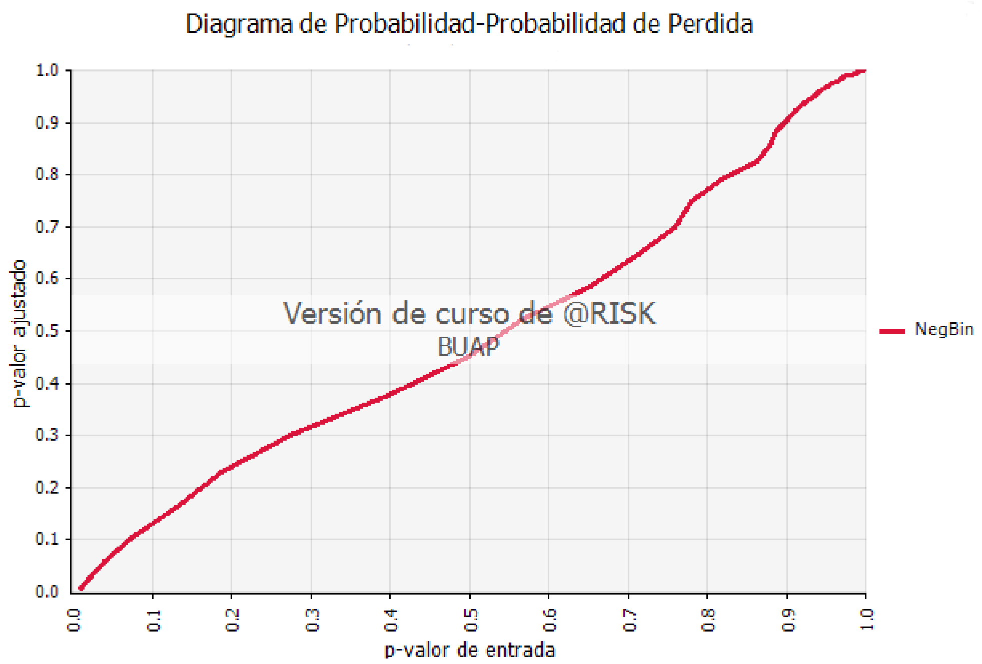


Figura 3.8: Gráfico P-P Binomial negativa.

Para calcular dicho valor se separaron por año los datos de la compañía aseguradora y se promedio el número de reclamaciones en cada año,

$$p_{año} = \frac{\text{Número de reclamaciones}}{365},$$

donde $año = 1997, 1998, \cdots, 2012$.

Entonces la probabilidad de que ocurra una reclamación no será más que su estimación puntual

$$\hat{p} = \frac{p_{1997} + p_{1998} + \cdots + p_{2012}}{5840}.$$

En consecuencia,

$$\hat{p} = 0.075.$$

Simulación y resultados

Al tener los parámetros del Modelo binomial compuesto se continua en la programación de $\psi(u)$ del Teorema 2.2.2.
En general, el algoritmo consiste en producir S_k, que es el monto total de las reclamaciones en los primeros k periodos, y su estructura es de la siguiente manera:

1. *(Inicialización)* Se establece los valores iniciales de los contadores en $S_k = 0$, $E = 0$, $SA = 0$, y el valor del capital inicial u.

2. Se calcula $\psi(0) = p\mu$ cuando $u = 0$.

3. Si $u > 0$,

   a) Se establece el valor inicial del contador $k = 1$.

   b) Se genera un valor aleatorio x_k de la distribución binomial negativa con parámetros $(3, 0.215516)$ (Véase Apéndice A).

   c) Se restablece $S_k = S_k + x_k$.

   d) Regresamos al inciso *a*) hasta que $S_k > u$.

4. Si $S_k - u \leq 0$ entonces $E = 0$, en caso contrario,

$$E = k!\binom{S_k - u}{k} q^{S_k - u}.$$

5. $SA = SA + \frac{1}{k!}\left(\frac{p}{q}\right)^k E$.

6. Se restablece $k = k + 1$.

7. Regresar al paso 1.

8. Se establece a $t = S_k - u$ como el tiempo en que ocurre la ruina y al número de reclamaciones como k.

9. $\psi(u) = \big(1 - \psi(0)\big)SA$.

Así mismo, el procedimiento anterior se repetirá el número de veces que hemos fijado como iteraciones y los resultados para S_k, k y t son el promedio de acuerdo al número de repeticiones o iteraciones. En cuanto al manejo del Bloque 3 es similar al del bloque anterior, en donde en un cuadro combinado se puede especificar el número de iteraciones que deseemos que realice la simulación, de forma predeterminada las iteraciones son 100, 500, 1000 y 5000.

Considerando que la distribución que siguen las reclamaciones es una Binomial negativa, el programa calcula automáticamente los parámetros por la estimación que se obtuvo por el método de momentos, así que si cambiamos otra base de datos que siga la misma distribución se proporcionaran los parámetros inmediatamente.

Realizamos la simulación con 5000 iteraciones y los resultados de la probabilidad de ruina con diferentes valores del capital inicial se señalan en la siguiente tabla:

u	$\psi(u)$	S_k	t
0	0.76524	-	-
1	0.071012	11	10
2	0.067407	12	10
3	0.064042	12	9
4	0.061312	13	9
5	0.058562	14	9
10	0.042985	18	8
15	0.031080	23	8
20	0.022164	28	8
25	0.015171	33	8
30	0.010461	38	8
40	0.00496	48	8
50	0.0024	58	8

Cuadro 3.5: Probabilidad de ruina en base al MBC.

Conclusiones

Como se ha mencionado en un principio el estudio de la teoría de riesgo ha permitido contrarrestar los efectos desfavorables de incertidumbre que se enfrentan las compañías aseguradoras.
El análisis de este trabajo se centró básicamente en la probabilidad de ruina en tiempo discreto y en el modelo binomial compuesto como herramientas para determinar la solvencia de una compañía aseguradora desde ejemplos básicos y observar el comportamiento del capital en el tiempo.

En cuanto a la teoría, en el Capítulo 2 se desarrolló de manera más extendida las pruebas de la Proposición 2.1.2 y los Teoremas 2.2.1 y 2.2.2 con el fin de facilitar su entendimiento. También se expuso las propiedades y características en la probabilidad de ruina con horizonte finito e infinito y del modelo binomial compuesto enfatizando el enfoque que da Gerber. A la par se ha elaborado un programa en Excel, que se nombró *"Simulador de ruina"* para calcular la probabilidad de ruina en diversos casos.

La estructura de los 3 bloques que componen el simulador se organizan conforme al estudio del Capítulo 2. La intención fue obtener la probabilidad de ruina desde el enfoque clásico, por medio de fórmulas recursivas y en el particular enfoque de Gerber. El bloque 1 y 2 proporciona resultados gráficos que ayudan a visualizar los resultados numéricos y teóricos. En el último bloque se examina el procedimiento para aplicar una base de datos al modelo binomial compuesto y se optimiza el Teorema 2.2.2. Se ratifica que la probabilidad de ruina depende en gran parte del capital inicial y de la acumulación de reclamaciones que ingresan en la compañía aseguradora.

Como se ha mencionado, el objetivo fue familiarizar al lector en los conceptos básicos y el funcionamiento de la probabilidad de ruina brindando enlazar los conceptos teóricos con una simulación práctica. Se ha reafirmado que los resultados en tiempo discreto suelen ser tan útiles como sus análogos continuos. Ofrecen un conocimiento introductorio a la basta investigación de la teoría de riesgo y su practicidad los mantiene vigentes en la actualidad.

Apéndice A

Generación de variables aleatorias

En este apartado se presentan algunas rutinas o programas en Excel VBA para la generación de las variables aleatorias que se emplearon en el *"Simulador de ruina"*.

Distribución Bernoulli en VBA

```
Sub bernoulli()
p = Val(InputBox("Proporcione el valor de p"))
'p es la probabilidad de ruina y es un valor entre 0 y 1.

u = Rnd()
If u <1 - p Then
x = 0
Else
x = 1
End If

MsgBox (x)
End Sub
```

Distribución Binomial Negativa en VBA

```
Sub binNeg()
'Distribución binomial negativa con parámetros (r,p)
p = Val(InputBox("Proporcione el valor de p"))


contador = 0
r = 0

Do Until r = 2 'Escribir r directamente en la rutina
u = Rnd()
If u <1 - p Then
contador = contador + 1
Else
r = r + 1
End If

Loop
MsgBox (contador)

End Sub
```

Distribución Geométrica en VBA

```
Sub DistGeo()
'Distribución geométrica con parámetro p
p = Val(InputBox("Proporcione el valor de p"))

px = p
u = Rnd()
F = p
x = 0

While u >F
x = x + 1
px = px * (1 - p)
F = F + px
Wend

MsgBox (x)
```

```
End Sub
```

Ruina del jugador en VBA

```
   Sub Rjugador()
'Distribución geométrica con parámetro p
p = Val(InputBox("Proporcione el valor de p"))
u = Rnd()

If u <p Then
x = 0
ElseIf u >= p And u <1 Then
x = 2
End If

MsgBox (x)
End Sub
```

Apéndice B

Modificar la cinta de opciones de Excel

Una de las formas más practicas de modificar la cinta de opciones de Excel es por medio de la ayuda del programa *Custom UI Editor for Microsoft Office.* Con este programa se puede agregar pestañas a la cinta de opciones, personalizar y crear accesos rápidos para ejecutar macros o rutinas de VBA [1]. A continuación se muestra el código que se ha empleado para crear la pestaña RUINA de las Aplicaciones del Capítulo 3 y se proporciona en el Cuadro B.1 una breve guía de referencias.

```
<customUI
xmlns= "http://schemas.microsoft.com/office/2009/07/
customui” >
<ribbon>
<tabs>
<tab id=” customTab” label=”RUINA” >
<group id=”customGroup” label=”Bloque 1” >
<button id=”customButton1” label=”Trayectoria del
capital” imageMso=”ChartTrendline” size=”large”
screentip=”Trayectoria del capital”
supertip=”Al seleccionar muestra el comportamiento del
capital dada la reclamación y el tiempo en el que se
situé. Despliega su respectiva gráfica.”
onAction=”ModuloInicio.Trayectoria”/ >
<button id=”customButton” label=”Datos de Y”
imageMso=”PivotFormulasMenu”
size=”large” screentip=”Datos de Y”
supertip=”Agregue el número de probabilidades de Y,
```

```
aparecerá una serie de ventanas para insertar los valores
de cada una.” onAction=”ModuloInicio.bloque1”/>
</group>
<group id=”customGroup2” label=”Bloque 2”>
<comboBox id=”customCombo1” label=”Iteraciones”
screentip=”Iteraciones” supertip=”Establece el número
de iteraciones y ejecutar.” onChange=”bloq2iteraciones”>
<item id=”item50” label=”50”/>
<item id=”item100” label=”100”/>
<item id=”item500” label=”500”/>
<item id=”item1000” label=”1000”/>
</comboBox>
<button id=”customButton6” label=”Limpiar”
imageMso=”FormatPainter” size=”normal”
screentip=”Limpiar celdas”
supertip=”Al seleccionar las celdas se limpiaran.”
onAction=”bloq2limpiar”/>
<separator id=”separador2”/>
<button id=”customButton2” label=”Ejecutar simulación”
imageMso=”FormControlCheckBox” size=”large”
screentip=”Iniciar simulación”
supertip=”El programa iniciará su ejecución con el
número de iteraciones especificado.”
onAction=”ModuloInicio.bloq2”/>
</group>
<group id=”customGroup3” label=”Bloque 3”>
<comboBox id=”customCombo2” label=”Iteraciones”
screentip=”Iteraciones” supertip=”Establece el número
de iteraciones e ejecutar.” onChange=”bloq3iteraciones”>
<item id=”item101” label=”100”/>
<item id=”item501” label=”500”/>
<item id=”item1001” label=”1000”/>
<item id=”item5001” label=”5000”/>
</comboBox>
<button id=”customButton3” label=”Bloque 3”
imageMso=”TableExcelSpreadsheetInsert” size=”normal”
screentip=”Bloque 3” supertip=”Muestra la hoja Bloque 3.”
onAction=”bloq3hoja”/>
<button id=”customButton5” label=”Limpiar”
imageMso=”FormatPainter” size=”normal”
screentip=”Limpiar celdas”
```

```
supertip=”Al seleccionar las celdas se limpiaran.”
onAction=”bloq3limpiar”/ >
<separator id=”separador1”/ >
<button id=”customButton4” label=”Ejecutar simulación”
imageMso=”AcceptTask” size=”large” screentip=”Iniciar
simulación"
supertip=”El programa se ejecutará con el número de
iteraciones especificado.” onAction=”bloq3”/ >
< /group>
< /tab>
< /tabs>
< /ribbon>
< /customUI>
```

Comando	Referencia
<ribbon> < /ribbon>	Indica la apertura y cierre para la modificación de la cinta.
<tabs> < /tabs>	Indica la apertura y cierre para agregar pestañas a la cinta de opciones.
<tab> < /tab>	Indica la apertura y cierre para agregar una pestaña con sus propiedades.
id	Identificación del elemento.
label	Etiqueta del elemento.
<group> < /group>	Indica la apertura y cierre de una sección o grupo dentro de la pestaña.
<button> < /button>	Indica apertura y cierre de un botón de comando para señalar sus propiedades.
imageMSO	Nombre de la imagen MSO que tendrá el botón de comando.
size	Tamaño del botón de comando.
screentip	Etiqueta o nombre que indica la sugerencia del botón de comando.
supertip	Breve sugerencia del uso del botón.
onAction	Indica el nombre de la rutina o macro que ejecutará.
<comboBox> < /comboBox>	Indica la apertura y cierre de un cuadro combinado.
onChange	Indica el nombre de la rutina o macro que ejecutará el cuadro combinado
<item / >	Señala propiedades del elemento que integra el comboBox

Cuadro B.1: Guía de referencias.

Bibliografía

[1] Asurmendi, D. (2014). Personalizar la interface de usuario y la cinta de opciones ribbon de excel con xml y vba.

[2] Cunningham, R. J., Herzog, T. N., and London, R. L. (2012). *Models for quantifying risk*. ACTEX publications.

[3] Dickson, D. C. (1994). Some comments on the compound binomial model. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 24(1):33–45.

[4] Dutang, C. (2015). Casdatasets: Insurance datasets.

[5] Escalante, C. and Arango, G. (2004). Aspectos básicos del modelo de riesgo colectivo. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, 12(2).

[6] Gerber, H. U. (1988a). Mathematical fun with ruin theory. *Insurance: Mathematics and Economics*, 7(1):15–23.

[7] Gerber, H. U. (1988b). Mathematical fun with the compound binomial process. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 18(2):161–168.

[8] Gerber, H. U. and Shiu, E. S. (1998). On the time value of ruin. *North American Actuarial Journal*, 2(1):48–72.

[9] Hernández, D. (1996). *Métodos Combinatorios en la Teoría de Ruina*. PhD thesis, Tesis de Licenciatura, ITAM, México.

[10] Herzog, T. N. and Lord, G. (2002). *Applications of Monte Carlo methods to finance and insurance*. Actex Publications.

[11] Klugman, S. A., Panjer, H. H., and Willmot, G. E. (2012). *Loss models: from data to decisions*, volume 715. John Wiley & Sons.

[12] Rincón, L. (2007). *Curso intermedio de probabilidad*. UNAM, Facultad de Ciencias.

[13] Rincón, L. (2012a). Introduccion a la teoria del riesgo. *Facultad de Ciencias UNAM.*

[14] Rincón, L. (2012b). Introducción a los procesos estocásticos. *Ciudad de México: Universidad Nacional Autónoma de México.*

[15] Shiu, E. S. (1989). The probability of eventual ruin in the compound binomial model. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 19(2):179–190.

[16] Shuanming L., Yi L., G. J. (2009). A review of discrete-time risk models. *RACSAM-Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas*, 103(2):321–337.

[17] Wackerly, D. D., Muñoz, R., Humberto, J., et al. (2010). *Estadística matemática con aplicaciones.* Number 519.5 W3.

[18] Wat, K. P., Yuen, K. C., Li, W. K., and Wu, X. (2018). On the compound binomial risk model with delayed claims and randomized dividends. *Risks*, 6(1):6.